QUELLEN UND STUDIEN
ZUR
GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER
GÖTTINGEN

J. STENZEL
KIEL

O. TOEPLITZ
BONN

ABTEILUNG B:
STUDIEN

BAND 1 HEFT 2

(ABGESCHLOSSEN AM 15. MAI 1930)

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1930

PREIS RM 17.—

QUELLEN UND STUDIEN
ZUR
GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER
GÖTTINGEN

J. STENZEL
KIEL

O. TOEPLITZ
BONN

ABTEILUNG B:
STUDIEN

BAND 1 HEFT 2

(ABGESCHLOSSEN AM 15. MAI 1930)

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1930

ISBN 978-3-662-37523-5 ISBN 978-3-662-38293-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-38293-6

Von den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik" erscheinen in zwangloser Folge zwei Publikationen. Die eine Abteilung, A Quellen, soll die eigentlichen Originalausgaben größeren Umfangs umfassen mit möglichst getreuer Übersetzung. Die zweite Abteilung, B Studien, soll Abhandlungen enthalten, die mehr oder weniger mit dem Material der Quellen zusammenhängen. Etwa 25 Bogen der Abteilung B werden zu einem Bande zusammengefasst, jährlich wird höchstens ein solcher Band erscheinen. Die Quellenbearbeitungen der Abteilung A bilden jeweils einzelne Bände.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100, von größeren Arbeiten 50 Sonderdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung. Doch bittet die Verlagsbuchhandlung nur die zur tatsächlichen Verwendung benötigten Exemplare zu bestellen. Die Herren Mitarbeiter werden jedoch in ihrem eigenen Interesse gebeten, die Kosten vorher vom Verlage zu erfragen. Manuskriptsendungen sind an einen der drei Herausgeber zu richten:

Privatdozent Dr. **O. Neugebauer**, Göttingen, Calsowstraße 57.
Professor Dr. **J. Stenzel**, Kiel, Feldstraße 80.
Professor Dr. **O. Toeplitz**, Bonn, Koblenzer Straße 121.

Zugelassene Sprachen für Aufsätze der Abteilung B sind: Deutsch, Englisch, Französisch und Italienisch.

Die Erledigung aller nichtredaktionellen Angelegenheiten, die die Zeitschrift betreffen, erfolgt durch die

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.
Fernsprecher: Amt Kurfürst 6050—53 und 6326—28 sowie Amt Nollendorf 755—57.

1. Band **Inhalt** **2. Heft**

	Seite
Datta, B. Origin and History of the Hindu names for Geometry	113
Neugebauer, O. Beiträge zur Geschichte der babylonischen Arithmetik	120
Regenbogen, O. Eine Forschungsmethode antiker Naturwissenschaft	131
Neugebauer, O. Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung	183
Schuster, H. S. Quadratische Gleichungen der Seleukidenzeit aus Uruk	194
Wieleitner, H. Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrh., insbesondere über Schwerpunktbestimmungen	201
Stein, W. Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes	221

Origin and History of the Hindu names for Geometry.

By Dr. Bibhutibhusan Datta, University of Calcutta.

(Eingegangen am 20. 9. 1929.)

The geometrical knowledge of the ancient Hindus can be gauzed from a class of works known under the generic name of *Śulba-sūtra*[1]). There are works with that title by several ancient writers such as Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana, Manu, Varāha and Vadhula. In the epithet *Śulba-sūtra*, the term *sūtra* means "an aphorism", "a short rule". It indeed describes the nature of the composition of the works. Hence truly speaking, it does not form an essential part of the name of the subject. In the *Śrauta-sūtra* of Āpastamba[2]), his *Śulba-sūtra* is found to have been referred to as *Śulba* simply[3]). The title of the work attributed to Kātyāyana is *Śulba-pariśiṣṭa* ("Supplement to the *Śulba*"). In the introductory verses of a commentary on Baudhāyana's *Śulba-sūtra* by Dvārakanātha Yajvā, the commentator says: "Desiring to give a clear exposition of the *Śulba* of Baudhāyana, this commentary, named *Śulba-dīpikā* ("The Light of the *Śulba*"), has been made by Yajvā, the son of Bhaṭṭa"[4]). Similarly Sundararāja, the commentator of the *Āpastamba Śulba-sūtra*, has spoken of the subject as *Śulba*[5]). We have also works of later times, which are obviously based on the earlier treatises, entitled *Śulba-mīmāṁsā* ("Investigation into the *Śulba*"), *Śulba-vārtika* ("The Glossary of the *Śulba*"), *Śulba-bhāṣya* ("Commentary on the *Śulba*"), and *Śulba-rahasya-prakāśa* ("Divulging of the secrets of the *Śulba*"). Hence it is established beyond dispute that the true name of the subject is *Śulba*. As the *Śulba* is entirely

---

[1]) The name can be spelled as *Śulba-sūtra* or *Śulva-sūtra*. Both the forms will be correct. For the extent and nature of Hindu geometry see the author's article on the "Hindu Contribution to Mathematics" in the *Bulletin of the Mathematical Association of the Allshabad University*, vol. I, 1928. See also, G. Thibaut, "On the Sulvasūtras", *Jour. Asiat. Soc. Beng.*, 1875; A. Bürk, „Das Āpastamba Śulbasūtra", *Zeit. d. deut. morgl. Gesellschaft*, vol. 55, pp. 543ff. and vol. 56, pp. 327ff.

[2]) *Āpastamba Śrauta-sūtra*, xvii. 26. 2.

[3]) The *Śulba-sūtra*, in fact, forms a part of the *Śrauta-sūtra*.

[4]) *The Pandit*, O. S., vol. 9, 1875, p. 293.

[5]) *Zeit. d. deutsch. morg. Gesellschaft*, vol. 56, pp. 327ff.

devoted to the treatment of geometry and its application we get it that the earliest Hindu name for geometry was *Śulba*. In ancient India geometry was also called by the name *Rajju* as will be sufficiently evident from the opening sūtra of the *Kātyāyana Śulba-pariśiṣṭa*: "Rajju-samāsaṃ vakṣyāma", or "I shall speak of the 'Collection of (rules regarding) the *Rajju*'"[6]. In the early canonical works of the Jainas (500—300 B. C.), *rajju* is stated to be a branch of mathematics (*Saṁkhyāna* or "The Science of Numbers")[7]. As has been observed by the commentators Śīlāṅka (862 A. D.) and Abhayadeva Sūri (1050), that epithet denotes *rajju-gaṇita* ("Mathematics of lines") or *kṣetra-gaṇita* ("Mathematics of areas and volumes")[8].

What is the origin of the name *Śulba* or *Rajju* for geometry? In Sanskrit the words *śulba* and *rajju* have got the identical significance which is ordinarily "rope", "cord". They then came to be used in a particular sense to denote a measure of the same name. Mention of a linear measure, called *rajju*, is found as early as in the *Śulba-sūtra*[9], the *Arthaśāstra* of Kauṭilya[10], and later on in the *Śilpa-śāstra*[11]. In fact in ancient India there were three kinds of measure, — linear, superficial, and voluminal — having the same epithet *rajju*. In the Jaina canonical works, they are sometimes distinguished as *sūcī-rajju* ("needle-like or linear *rajju*"), *pratara-rajju* ("superficial *rajju*"), and *ghana-rajju* ("cubic *rajju*"); while in the *Arthaśāstra* the superficial unit is called *pārideśa* and the cubical unit *nivartana*. It is perhaps noteworthy that this measure is nowhere spoken of as *śulba*. The use of the word *rajju* at least in its ordinary signification of "rope" occurs as early as in the *Veda*[12], but the word *śulba* does not appear there. The earliest use of *śulba* is found in the *Śrauta-sūtra*[13] and that in the ordinary sense of "rope". The word *śulba* or *śulva* is derived from the root *śulb* or *śulv*, meaning "to measure" and

---

[6]) *The Pandit*, N. S., vol. 4, 1882, p. 95.

[7]) *Sthānāṅga-sūtra*, Sūtra 338, 747; *Sūtrakṛtāṅga-sūtra*, ii. 1. 154. These works with the commentaries of Abhayadeva Sūri and Sīlāṅka respectively have been printed and published by the Āgamodaya Samiti of Mehesana.

[8]) Śīlāṅka observes: "Rajju-riti rajjugaṅitaṃ kṣetragaṇita-mityartha." Abhayadeva Sūri remarks: "Rajjvā yat saṁkhyānaṃ tad-rajju-rabhidhīyate tacca ksetragaṇitaṃ."

[9]) *Āpastaṁba Śulba-sūtra* and *Mānava Śulba-sūtra*.

[10]) *Arthaśāstra of Kauṭilya*, edited by R. Shama Sastri, Mysore, 1919, p. 107.

[11]) See *Mānasāra*, *Mayamata*, etc.

There is difference of opinion about the exact length of the measure *rajju*. According to the *Arthaśāstra* one *rajju* is equivalent to 40 cubits whereas according to the *Śilpa-śāstra* 32 cubits make one *rajju*.

[12]) *Ṛg-veda* i. 162. 4; *Atharva-veda* iii. 11. 8; *Śatapatha Brāhmaṇa* i. 3. 1. 14.

[13]) *Āpastamba Śrauta-sūtra*, i. 4. 10; i. 5. 12; i. 6. 1. 6; xi. 3. 1. 1; etc.; *Kātyāyana Śrauta-sūtra* i. 3. 14. 20.

hence its etymological significance is "measuring" or "act of measurement". From that it came to denote "a thing measured" and in consequence "a line"[14]). Thus the term *śulba* (or *rajju*) has four meanings: (1) mensuration, — the act and process of measuring; (2) line, — the result obtained by measuring; (3) a measure; and (4) geometry, — the art of measuring, including areas and volumes. This has been partly interpreted by Rāma, the commentator of the *Kātyāyana Śulba-pariśiṣṭa*[15]).

The *Āpastamba Śulba-sūtra* says[16]): "The diagonal line (*akṣṇayā-rajju*) of an oblong produces both (areas) which its side (line) and the base (line) produce separately." This rule has been formulated by Baudhāyana and Kātyāyana in almost identical terms[17]). There *rajju* denotes a line.

In later times, geometry was called by the Hindus as *Kṣetragaṇita* ("Mathematics of the *kṣetra*"). This term appears in the *Gaṇitasāra-saṁgraha* of Mahāvīra. In this the term *kṣetra* denotes a plane figure bounded by lines. In the mathematical treatises of Brahmagupta (628), Śrīdhara (*c.* 750) and Bhāskara (1150), the section devoted to the treatment of plane figures is called *kṣetra-vyavahāra* ("Treatment of plane figures"). The epithet *kṣetra-gaṇita* occurs as early as the first century before the Christian era in the works of Siddhasena Gaṇi[18]). There the term *kṣetra* has an wider connotation so as to include both areas and volumes. In the same significance it appears in the title of the Jaina works, called *Kṣetra-samāsa*[19]) which contain a description of the Jaina cosmography and wherein are also found the geometrical formulae known to the early Jainas[20]). The earliest work of the kind is probably that by Jinabhadra Gaṇi who flourished in the sixth century of the Christian era. I presume that the term *kṣetra-gaṇita* had a wider connotation in the beginning so as to include the geometry of plane figures as well as of solid figures. But in later times when the two branches of geometry

---

14) Considered from this etymological sense, *śulba* should also denote areas and volumes. But it is not found to have ever been used in that significance.

15) *The Pandit*, N. S., vol. 4, 1882, p. 92.

16) i. 4.

17) G. Thibaut, *The Śulvasūtras*, reprinted from the *Journal Asiat. Soc. Beng.*, 1875, p. 8.

18) *Tattvārthādhigama-sūtra* of Umāsvāti with his own gloss elucidated by Siddhasena Gaṇi is being edited by Professor H. R. Kapadia of Bombay.Part I of the work containing chapters i—iv is already out. See Siddhasena's com. on iii. 16. There is an uncertainity about the time of Siddhasena Gaṇi. He is, however, identified with Siddhasena Divākara who lived about 56 B. C.

19) Compare the epithet *rajju-samāsa* of the *Kātyāyana-Śulba-pariśiṣṭa*.

20) See the author's article on "The Jaina School of Mathematics", *Bull. Cal. Math. Soc.*, vol. 21, 1929, pp. 115—145.

began to be considered separately, the old name was reserved only for the geometry of plane figures. This conjecture will be corroborated by the fact that Bhāskara has at least once used the term *kṣetra* to denote solid bodies as well[21]. The etymological sense of the word is "a bounded region". Jagannātha (1718) called the science of geometry as *Rekhā-gaṇita* ("Mathematics of lines")[22]. Bāpudeva Śāstrī preferred the name *Kṣetra-miti* ("Measurement of areas and volumes")[23]. He seems to have intended an accurate translation of the Greek name, but it is less scientific. For the Greek science is indeed the geometry of lines, but not the geometry of areas and volumes. Jagannātha's epithet is more in keeping with the spirit of the Greek geometry. He had probably discarded the Greek epithet intentionally as it is a misnomer. In some vernacular tongues of India, geometry is now more commonly known as *Kṣetra-tattva* ("Principles of areas and volumes") or *Jyāmiti*. This latter term is highly interesting because it is very closely alike the Greek term "geometry", not only phonetically but also in signification and at the same time it is not a Hinduised Greek word. The word *Jyāmiti* is a compound of pure Sanskrit origin derived from the words *jyā* meaning "earth", and *miti*, meaning "measure". Hence its literal significance is "earth measurement". It is thus obviously a translation of the Greek name. This epithet for the science of geometry is, however, of very recent origin.

It is therefore found that the Hindu name for geometry has varied from time to time. The earliest names were derived from the Sanskrit words for "rope" as a unit of measurement. In later times they were discarded for a name (*kṣetragaṇita*) derived from the words for "figure" and "mathematics", probably because this is more expressive of the spirit of Hindu geometry, which is practically the geometry of areas and volumes. The earlier terms reveal the characteristic *modus operandi*, while the other term conveys the idea of the result of those operations. Jagannātha gave the science of geometry a name which is based on a principle entirely different from those of the older names. It is derived from words for "line" and "mathematics". Though this epithet is highly scientific, it has not been accepted by other Hindu scholars.

In ancient India, the geometrician was called *śulba-jña* or *śulba-vid* ("One who knows the *śulba*"), *sama-sūtra-nirañchaka* ("Uniform-rope-stretcher") etc.[24] In the *Śilpa-śāstra*, he is spoken of as *sūtra-grāhī* or *sūtra-dhāra* ("rope-holder") and he is further described as an expert in

---

[21]) *Siddhāntā-śiromaṇi*, *Golādhyāya*, i. 5.

[22]) *Rekhā-gaṇita*, edited by K. P. Trivedi, Bombay, 1901. This is known to be the first complete translation of Euclid's *Elements* in an Indian language.

[23]) Bāpudeva Śāstrī, *Kṣetra-miti*.

[24]) *The Pandit*, N. S., vol. 4, 1882, p. 94.

alignment (*rekhā-jña*, lit. "one who knows the line")[25]. In the Pāli literature we find the terms *rujjuka* and *rajju-grāhaka* ("rope-holder") for the king's land-surveyor[26]. The first of these terms appear, together with a few other slighly varied forms, in the inscriptions of Aśoka (250 B. C.)[27].

The Greek name for the science of geometry is derived from the words for "earth" and "measure", and was therefore originally synonymous with "earthmeasurement" or "surveying". It may be noted that Euclid (c. 300 B. C.) did not call his celebrated treatise a geometry but designated it by an earlier and more generic term "Stoicheia" or "Elements". Indeed the term "geometry" does not at all appear in his treatise though it was copiously used by the Greek writers since the time of Plato (429—348 B. C.) who were explicitly aware of its primitive character as a definite branch of mathematical sciences, the science of (earth-) measurement. This apparent dislike of Euclid for the term "geometry" is perhaps not altogether without any significance. However, later translators of Euclid's *Elements* in Arabic and Latin gradually changed his name for "Geometry". The change was affected first probably by the Arabs who spoke of the science as *jumātrīya* (an Arabicised Greek term) in addition to their earlier and more usual name *handasa.* The first Latin translations were made from the Arabic but not from the Greek. The Greeks are known to have originally learnt of geometry in Egypt where the science grew up in connexion with earth-measurement.

The title of the earliest known Arabic geometry is *Bâb al-Misâḥah.* It forms indeed a chapter of Al-khowârizmî's algebra (*c.* 825). The word *misâḥah* is derived from the word *meshîḥah* which is of common use in the Talmudic and Syriac literature in the signification of a surveyor's rope or measuring cord. Hence the literal meaning of the epithet *Bâb al-Misâḥah* is "Light of the rope"[28]. In Al-khowârizmî's work, the term *misâḥah* has three meanings: (1) mensuration, — the act and process of measuring; (2) area and superficial content, — the result obtained by measuring; and (3) geometry, — the art of measuring[29]. Thus it is ana-

---

[25]) Binodebehari Dutt, *Town-planning in Ancient India*, Calcutta, p. 168.

[26]) *Jātaka*, edited by Fausboll, vol. II, p. 367.

[27]) *Corpus Inscriptionum Indicarum, vol. I, — Inscriptions of Aśoka*, new edition by E. Hultzsch, Oxford, 1925; Third Rock-Edicts of Girnar, Shahabazgarhi, Dhauli and Kalsi; Fourth Rock-Edicts of Lauriya-Araraj; Fourth Pillar-Edict of Delhi-Topra. Compare Bühler's article in *Zeit. d. deut. morg. Gesellschaft*, vol. 47, pp. 466ff.

[28]) Compare Suters article on *handasa* in the Encyclopaedia of Islam.

[29]) Solomon Gandz, "On three interesting terms relating to area", *Amer. Math. Monthly*, vol. 34, 1927, pp. 80—86. I have drawn on this article for informations about the Hebrew and Arabic terms.

logous to the Hindu term *śulba* or *rajju*. In Arabic, geometry is more commonly called *handasa* (or *Ilm al-handasa*), a term whose primitive sense is probably the "Hindu science", "Hindu art" or "Hindu method"[30]. As has been already stated later on the Arab scholars adopted also the Greek name for geometry. In the Hebrew geometry *Mishnath ha-Middoth*[31], the term *meshîḥah* has been applied to mean area and also volume. The geometers were called in Hebrew *mashîḥanu* or *mashôha* and in Arabic *massâh*; they were the measurers of area, the ones who handled the measuring cord (*meshîhah*).

We therefore find that the Egyptian and Greek terms for geometry and the geometrician were conceived on a principle entirely different from that of the earliest Hindu terms, whereas the earliest Hebrew and Arabic terms were derived exactly in the same way as the latter. The question will be naturally asked: Is it a mere coincidence by chance that the early Hindus, Hebrews and Arabs derived their terminology from the same principle? If not, did they do so under mutual influence or under a common external influence? We do not know of any other ancient peoples who derived their names for geometry and the geometers from words for the measuring cord, though it is known that the use of cord for measure was in vogue among several ancient peoples including the Egyptians and Akkadeans. So the question of a common external influence may be safely left out of consideration. It will be a very strange coincidence indeed, if it be supposed to be a case of chance coincidence alone, that the peoples, especially the Hindus and Hebrews, who lived in distant countries conceived their terminologies exactly in the same way. But I presume that the early Hebrew and Arabic terms for geometry and geometers are translation of the early Hindu terms. There will be nothing of improbability in such a presumption. The Hindu terms are much older than the terms of the other peoples, the earliest mention of them being found in the *Śrauta-sūtra* (before 1500 B. C.). We also know that the Arabs learnt of geometry from the Hindus before they came into contact with the Greek science[32]. Dr. Solomon Gandz has shown that the concepts of a few other terms in Hebrew and Arabic mathe-

[30]) F. Woepcke, "Mémoire sur la propagation des chiffres indiens", *Journal Asiatique*, t. I(6), 1863; see particularly pp. 505ff. This interpretation has been disputed by Kaye and Carra de Vaux. For a critical study of all the devergent opinions on this matter, see the author's forthcoming article on the "Testimony of Arab writers on the origin of our numerals" in the *Journal of the Asiatic Society of Bengal.*

[31]) The date of this work by an anonymous writer is rather uncertain as stated by Prof. D. E. Smith (*History of Mathematics*, vol. I, p. 174). Some writers consider it to be even posterior to Al-khowârizmî's algebra to which it shows a close relation. Dr. Solomon Gandz believes it to be an earlier work.

[32]) Suter, loc. cit.

matics were borrowed from the Hindu source[33]). Here is another instance to show how the ideas of Hindu Mathematics permeated the cultures of the Arabs and Hebrews. Their influence seems to have once affected even the Greek ideas. Democritos (*c.* 440 B. C.) once boasted that in geometry he excelled the *harpedonaptai* ("rope-strechers") of Egypt*). Obviously he meant by that term the Egyptian geometers. Now the idea in that term is neither Greek nor Egyptian, but it is characteristically Hindu. It is analogous to *rajju-grāhaka*, *sūtra-grāhī* or more closely to *sama-sūtra-nirañchaka.* This is very striking indeed.

---

[33]) Loc. cit. See also Bibhutibhusan Datta, "On *Mûla*, the Hindu Term for Root", *Amer. Math. Monthly*, vol. 34, 1927, pp. 420—423; "The science of calculation by the board", *Ibid*, vol. 35, pp. 520—529; Solomon Gandz, "The origin of the term root" — "Second Article", *Ibid*, vol. 35, p. 75.

*) Anm. d. Red.: Nach *H. Diels* ist die Echtheit dieser berühmten Stelle *Clem. Alex.* Strom. I 15, 69 zu bestreiten. Sie fand daher in die 4. Auflage (1922) der "Vorsokratiker" nicht mehr Aufnahme. Über die Harpedonapten und ihre Gleichsetzung mit den "Hierogrammatai" vgl. *W. Otto*, Priester und Tempel im hellenistischen Ägypten, Leipzig-Berlin 1905—08, Bd. I, S. 88f. und S. 88, Anm. 8. (N.)

Beiträge zur Geschichte der babylonischen Arithmetik.

Von O. Neugebauer in Göttingen.

(Eingegangen am 2. 4. 29.)

Die in den folgenden Paragraphen mitgeteilten Tatsachen beziehen sich gewissermaßen nur auf den äußeren Aspekt der babylonischen Arithmetik. Die für ihre wirkliche Erforschung unerläßliche Frage nach Berechnung, Anlage und Verwendung der zahlreich erhaltenen Tabellen (Multiplikations- und Reziproken-Tafeln, Tafeln der Quadrate und Kuben u. s. w.) soll hier gänzlich beiseite bleiben. Ich beabsichtige, sie in einer besonderen Arbeit anzugreifen.

Mit der vorliegenden Untersuchung setze ich die in Heft 1, S. 67, begonnene Bearbeitung der von Frank edierten „*Straßburger Keilschrifttexte*" (in Hinkunft mit SKT abgekürzt) weiter fort. Auf den Rest wird in anderem Zusammenhange einzugehen sein. Frank hat die hier zu besprechenden Abschnitte (abgesehen von SKT 6 Vs.) teils gar nicht, teils nur lückenhaft übersetzt bzw. transkribiert. Man vergleiche deshalb S. 19—21 seiner Edition.

§ 1.

Verteilung in arithmetischer Progression.

(SKT 6, Vs.)

Diese Aufgabe behandelt die Verteilung von 1 2/3 „Minen" oder 100 „Schekel" (die Mine hat 60 Schekel) Silber unter 10 Brüder in arithmetischer Progression, d. h. so, daß bei fester Reihenfolge der Brüder (z. B. nach dem Alter) jeder um denselben Betrag mehr bekommt, als der vorangehende (am wenigsten soll Nr. 10 — der Jüngste — bekommen).

Auf den philologisch genauen Wortlaut der ersten drei Zeilen des Textes kommt es nicht sehr an, da sie nur in recht unbestimmter Form die Tatsache zum Ausdruck bringen, daß es sich um die Verteilung der 100 Schekel unter die 10 Brüder handelt, und daß dabei irgendeine Frage zu klären ist. *Welche* Frage es nun genau ist, werden wir aus der Rechnung selbst bald sehen. Diese ersten Zeilen heißen nun (im wesentlichen im Anschluß an Frank):

1. 10 Brüder wollen 1 2/3 Minen Silber
2. Bruder für Bruder unter sich bereinigen.
3. Die Schekel können sie nicht unter sich bereinigen; ich weiß es nicht.

Nun folgen äußerst knapp die wesentlichen Angaben (abgesehen von der schon genannten Gesamtsumme von 100 Schekel):

4. Der Anteil bei 8 ist 6 Schekel. Bruder gegen Bruder[1])
5. gleichmäßig bereinigt.

Das soll heißen: 1. Der Anteil *des achten Bruders* ist 6 Schekel[2]). Die Richtigkeit dieser Interpretation unserer Stelle folgt nicht nur aus der weiteren Rechnung, sondern wird durch die Worte des Textes selbst explizite bestätigt. Zeile 9 heißt es: „6, der Anteil des Achten, . . .“ (*zi-it-ti sa-am-ni-im* — Frank: „6 Teile der Acht“). 2. Die Verteilung soll „gleichmäßig“ (*ki-ma-ṣi* — vielleicht besser „in Gemäßheit“, nämlich etwa des Alters oder einer andern Anordnung) erfolgen, worunter die arithmetische Progression verstanden ist, in dem anfangs angegebenen Sinne. Das Wort für „gegen“ (*eli*) in Zeile 4 ist das charakteristische Wort bei der Differenzbildung: „(a) ist *gegen* (b) um (c) größer.“ Die Differenz der Anteile von Bruder „gegen“ Bruder soll also immer dieselbe sein; es ist die konstante Differenz der arithmetischen Reihe.

6. Du verfährst dabei so:
7. Das Reziproke von 10, den Leuten, bilde und 0;6 erhältst Du. 0;6 mit 1 2/3 Minen Silber
8. multiplizierst Du und 10 erhältst Du. . . .

Der Sinn dieser Rechnung ist offenbar der, daß der mittlere Anteil jedes Bruders im Falle gleichmäßiger Verteilung dadurch bestimmt wird, daß das Gesamtvermögen von 1 2/3 Minen = 100 Schekel durch 10, die Anzahl der Brüder, dividiert wird. (Die Rechnung erfolgt selbstverständlich sexagesimal; vgl. dazu Quellen und Studien B 1, S. 68 Anm. 3 und S. 71.) Das gibt 10 Schekel pro Mann.

Zur Veranschaulichung der weiteren Rechnung empfiehlt sich die Anwendung eines geometrischen Bildes. 10 äquidistante Punkte auf der

[1]) Durch die Einschaltung des Wortes „Bruder“ nach „8“, das im Text *nicht* steht, und durch falsche Satztrennung hat sich Frank das Verständnis alles Weiteren unmöglich gemacht. Er übersetzt: „Der Anteil bei 8 (Brüdern) ist 6 Sekel Bruder für Bruder.“

[2]) Das Wort für „bei“ (*ki*) ist genau dasselbe, das in den geometrischen Aufgaben SKT 8, die ich Quellen und Studien B 1, S. 74ff. behandelt habe, immer wieder vorkommt: „30 ist die Länge *bei* 5“ u. s. w. Ich bin überzeugt, daß der Lösung unserer jetzigen Aufgabe derselbe geometrische Leitgedanke zugrunde gelegen hat, wie ich ihn im folgenden entwickeln werde. Hierfür scheint mir auch diese Terminologie eine Stütze zu sein (vgl. Anm. 3).

Abszissenachse (vgl. Fig. 1) mögen die Brüder repräsentieren. Als Ordinaten mögen die Anteile aufgetragen werden. Dann hat man bisher folgendes. Der Anteil des Achten ist durch die Ordinate bis $A_8 = 6$ gegeben[3]). Der mittlere Anteil $M = 10$ wurde soeben bestimmt. Das gibt Fig. 1.

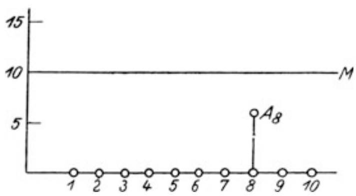

Fig. 1.

Nun weiter, wo wir oben abgebrochen haben:

8. ... 10 mit 2 verdopple.
9. 20 erhältst Du. 6, den Anteil des Achten,
10. mit 2 verdopple. 12 erhältst Du. 12 von 20 ziehe ab und
11. 8 erhältst Du. 8 behalte im Kopf.

Hier ist ein Abschnitt der Rechnung erreicht. Ihr Sinn ist der: es wird $2M - 2A_8$, d. h. $2(M - A_8)$ gebildet. Geometrisch ist dies der doppelte Abstand des Punktes A_8 von der Geraden M. Nun bedeutet die Forderung „gleichmäßiger" Verteilung (d. h. in arithmetischer Progression), daß die Anteile der einzelnen Brüder auf einer Geraden liegen müssen. Da ferner bei 10 Brüdern 9 Anteildifferenzen zu verteilen sind, so bekommt keiner von ihnen den mittleren Anteil. Nr. 5 bekommt eine halbe Differenz mehr als M, Nr. 6 eine halbe weniger. Die Anteil-Gerade geht also durch den Punkt Z (vgl. Fig. 2) der Geraden M über der Mitte des Intervalles (5, 6). Sie geht ferner durch den Punkt A_8. Aus Symmetriegründen liegt ihr Punkt A_3 ebensoviel über der Geraden M wie A_8 unter ihr. Das heißt aber, daß die eben berechnete Differenz die Bedeutung hat:

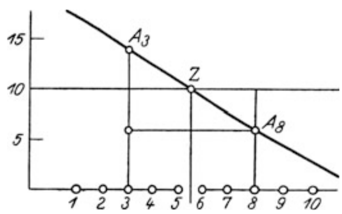

Fig. 2.

$$2(M - A_8) = A_3 - A_8.$$

Nun kann es weiter gehen, wie wir sehen werden mit dem Endziel, die feste Differenz von „Bruder gegen Bruder" zu berechnen.

12. 1 und 1 addiere . . .[4]) und 2 erhältst Du.
13. 2 mit 2 verdopple und 4 erhältst Du.
14. 1 zu 4 füge hinzu. 5 erhältst Du.
15. 5 von 10, den Leuten, ziehe ab[5a]) und 5 erhältst Du.

---

[3]) Diese Ordinate ist der „Anteil bei 8" von Zeile 4. Vgl. Anm. 2.

[4]) Ein mir unverständliches Wort.

[5a]) Hier wird ein Wort (*du*$_8$) für „subtrahieren" verwendet, das sonst Terminus der Division ist. Die Grundbedeutung „spalten" macht diesen Bedeutungswandel leicht verständlich („abspalten"). Dieselbe Redewendung tritt auch SKT 10, Rs. 10 auf; Quellen und Studien B 1 S. 69 wollte ich Frank's Lesung *a-šà(g) dù* zu

Kommentar: Es wird abgezählt, wieviele Brüder zur Differenzbildung in dem Intervall (A_3, A_8) berücksichtigt werden müssen (vgl. Fig. 2); Links zwei („1 und 1") und ebenso rechts (also „mal 2"). Für die Zahl der Differenzen ist aber noch ein weiterer Mann wegzulassen (entweder Nr. 3 oder Nr. 8), also „1 zu 4 füge hinzu". Die restlichen Brüder (Zeile 15) kommen nun wirklich für die Differenzbildung in Frage. Das gibt den Schluß:

16. Den 5ten Teil (sc. von 1) bilde und 0;12 erhältst Du.
17. 0;12 mit 8 multipliziere und 1;36 erhältst Du.
18. 1;36 (ist es) welches Bruder gegen Bruder höher ist ...[5]).

Es wird also, nach Bestimmung der Anzahl a der Intervalle zwischen A_3 und A_8 (nämlich 5) das Reziproke von a gebildet und mit der 8 von Zeile 11, d. h. mit $A_3 - A_8$ multipliziert. Mit anderen Worten: es wird berechnet, daß

$$\frac{A_3 - A_8}{a} = 1;36 = 1\ 3/5$$

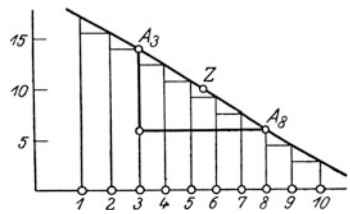

Fig. 3.

ist (vgl. Fig. 3). In der Tat ist es 1 3/5 „welches Bruder gegen Bruder" mehr erhält: *Es ist die Differenz der arithmetischen Reihe von 10 Gliedern, deren 8tes Glied $A_8 = 6$ und deren Summe gleich 100 ist.*

§ 2.
Gleichungen mit zwei Unbekannten.
(SKT 6, Rs. 6 bis 10)

Es handelt sich hier um zwei sehr unscheinbare Beispiele babylonischer Mathematik, die aber doch von größter prinzipieller Bedeutung sind. Hier sehen wir nämlich das erstemal in der Geschichte der Mathematik jene Stufe von Abstraktion erreicht, die *Größen ungleicher Dimension*, „Längen" und „Flächen", addiert, *unbesorgt um die ursprünglich geometrische Interpretation dieser Worte!*

Unrecht in den gewöhnlichen Terminus *usuḫ* verbessern. Seine Übersetzung „durch 36 Felder(?) teilbar" ist in „21, 36 von) 36, 0, der Fläche, abgespalten (ist 14, 24" zu verbessern, wodurch auch meine Übersetzung von S. 69 vervollständigt wird, und der textliche Beweis der Interpretation von 36, 0 als $F_o + F_u$ (vgl. S. 74) erbracht ist.

[5]) Es können hier noch ein oder zwei Worte gestanden haben (etwa das in CT IX übliche „so ist das Verfahren" ?). — Prof. Götze verdanke ich die Bemerkung, daß man hier gar nicht, wie Frank den Text emendiert, *út-te-li-lu* (!) *-ú* zu lesen hat, sondern einfach *ú-te-li-ma*. Das gibt erst diesen Worten den richtigen Sinn.

1. SKT 6, Rs. 9 und 10.

9. Der 7^{te} Teil der Länge und die Fläche dazugegeben ist 27.
10. 0;30 (ist) die Breite. Länge und Fläche berechne. 42 (ist) die Länge, 21 die Fläche.

Also: ist x die Länge, y die Breite, so bedeutet dies:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} + xy = 27 \\ y = 1/2. \end{cases}$$

Die Lösung des Textes $x = 42$, $xy = 21$ ist richtig (Faktoren 60^k bleiben natürlich unbestimmt).

2. SKT 6, Rs. 6 bis 8.

6. Der 7^{te} Teil der Länge, der 7^{te} Teil der Breite und der 7^{te} Teil der Fläche
7. dazugegeben ist 2. Länge und Breite dazugegeben ist 5;50.
8. Länge und Breite berechne. 3;30 (ist) die Länge, 2;20 die Breite.

Mit den Bezeichnungen des vorigen Beispiels heißt dies:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{xy}{7} = 2 \\ x + y = 5\,5/6. \end{cases}$$

Lösung: $x = 3\,1/2$, $y = 2\,1/3$. Um sie zu finden, hat man eine quadratische Gleichung zu lösen. Daß man auch dazu sehr wohl imstande war, geht aus dem folgenden Paragraphen hervor.

§ 3.
Quadratische Gleichungen.
(SKT 7)

Schon gelegentlich eines Aufsatzes zur babylonischen Geometrie konnte ich darauf hinweisen, daß gewisse Aufgaben zur Dreiecksberechnung auf quadratische Gleichungen führen[6]), ohne daß aber das Lösungsverfahren angegeben war. Später ergab sich, daß die explizite Auflösungsformel in einer Aufgabe von CT IX belegt ist[7]). Ich will aber nicht an dieser Stelle auf die CT-Beispiele eingehen, weil es eine umfangreiche Diskussion der zugehörigen Aufgabengruppe verlangen würde, die das Gebiet der Arithmetik ganz verlassen müßte. Dagegen enthalten die SKT eine Tafel, die sich ihrem ganzen Charakter nach völlig den arithmetischen Beispielen des vorigen Paragraphen anschließt und ebenfalls

[6]) Quellen und Studien B 1, S. 78ff.

[7]) Quellen und Studien B 1, S. 80. Eine zweite Belegstelle ist CT IX 15 III, 0 bis 22.

quadratische Gleichungen zum Gegenstand hat. Dieser Text ist als SKT Nr. 7 von Frank publiziert worden und S. 20f. ohne Kommentar bzw. zusammenhängende Übersetzung transkribiert worden[8]).

1. SKT 7, Vs. 1 bis 12.

1. Eine Fläche (aus) zwei Quadraten zusammengenommen (ist) 16,40. (Das eine) Quadrat (ist) 2/3 (des anderen) Quadrates (wobei)
2. 10 von dem kleineren Quadrat abgezogen ist. Die Quadrate berechne. . . .

Wenn x und y die Quadratseiten bedeuten, so heißt unser Problem[9]) (auf die gänzlich überflüssige dezimale Umschreibung der Zahlen verzichte ich in Hinkunft):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = A & A = 16{,}40 \\ y = \frac{\alpha}{\beta} x - d & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3} = \frac{40}{60}, \qquad d = 10. \end{cases}$$

Setzt man y in die erste Gleichung ein, so erhält man für x die quadratische Gleichung

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) x^2 - \frac{2 d \alpha}{\beta} x + d^2 - A = 0.$$

Überlegt man, daß 2/3 in sexagesimaler Schreibweise als „40" in die Rechnung eingehen muß, so wird man $\alpha = 40$ und demgemäß $\beta = 60$ setzen und an Stelle von x die Größe

$$\xi = \frac{x}{\beta} = \frac{x}{60}$$

zu bestimmen suchen, deren Zahlzeichen ja von denen von x selbst nicht verschieden sind (Fehlen der Null!). Dann genügt ξ der Gleichung

$$\xi^2 - \frac{2 d \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \xi - \frac{A - d^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Daraus findet man:

$$\xi = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ d \alpha \pm \sqrt{d^2 \alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(A - d^2)} \right\}.$$

---

[8]) Die von Frank erwähnten „teilweise phantastisch hohen Zahlen" aus denen er schließt, „daß es sich nur um Übungsbeispiele handelt", sind teilweise dadurch bedingt, daß Frank bei der dezimalen Umwandlung der Sexagesimalzahlen auch Brüche zu ganzen Zahlen macht, ganz abgesehen von dem immer verfügbaren Faktor 60^k.

[9]) Es ist darauf hinzuweisen, daß die Formulierung des Textes als solchen keine so eindeutige ist, daß aus ihr allein das Problem mit Sicherheit bestimmt werden könnte. Das Wort für „Quadrat" (IB—DI, nach Gadd *mitḫartum* zu lesen) kann sowohl Quadratfläche wie Quadratseite bedeuten (abgesehen von der Verwendung dieses Wortes im arithmetischen Sinne für „Quadratwurzel"); erst der Gang der Rechnung entscheidet zwischen den verschiedenen Möglichkeiten.

Schließlich ist
$$x = \beta\xi$$
$$y = \alpha\xi - d.$$

Man vergleiche nun den Text, wobei

$$A = 16{,}40 \quad \alpha = 40 \quad \beta = 60 \quad d = 10$$

zu setzen ist.

2. ... Du verfährst dabei so:	
3. 10 quadriere, 1,40 gibt es. 1,40 von 16,40 subtrahiere und	$A - d^2 = 15{,}0$
4. 15,0 gibt es. 1,0 quadriere und 1,0,0 gibt es. 40 quadriert (ist) 26,40.	
5. 1,0,0 und 26,40 dazugegeben und 1,26,40 gibt es. 1,26,40 mit 15,0 multipliziere.	$\alpha^2 + \beta^2 = 1{,}26{,}40$
6. 21,40,0,0 gibt es. 40 mit 10 multipliziere und 6,40 gibt es.	$(\alpha^2 + \beta^2)(A - d^2) = 21{,}40{,}0{,}0$ $d\alpha = 6{,}40$
7. 6,40 quadriere und 44,26,40 gibt es. 44,26,40	$d^2\alpha^2 = 44{,}26{,}40$
8. zu 21,40,0,0 addiere und 22,24,26,40 gibt es.	
9. 22,24,26,40 (hat) 36,40 (als) Quadratwurzel. 6,40 welches (oben) gefunden wurde	$\sqrt{d^2\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(A - d^2)} = 36{,}40$
10. zu 36,40 dazugegeben und 43,20 gibt es. Was von 1,26,40 genommen	$d\alpha + \sqrt{} = 43{,}20$
11. (ist es), welches 43,20 gibt? 0;30 genommen (?). 0;30 mit 1,0 multipliziert und 30 gibt es (als) größeres Quadrat.	$(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \frac{1}{2} = d\alpha + \sqrt{}$ (d. h. $\xi = \frac{1}{2}$) $\frac{1}{2} \cdot \beta = \xi\beta = x = 30$
12. 0;30 mit 40 multipliziere und 20 gibt es. 10 von 20 subtrahiere und 10 gibt es (als) kleineres Quadrat.	$\frac{1}{2} \cdot \alpha = \xi\alpha = 20 \quad \xi\alpha - d = y = 10$

Man sieht, daß die Rechnung Zahl für Zahl mit unserer Formel übereinstimmt. Unberücksichtigt bleibt nur das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel[10]).

[10]) Auf die Terminologie dieser und der folgenden Aufgaben will ich hier nicht eingehen. Da sie es ermöglicht, die Parallelstelle CT IX 14 II 12/13 zu SKT 10 Rs. 4/5 vollständig zu ergänzen (vgl. Quellen und Studien, B 1, S. 73 u. Anm. 17 dort), so wird doch noch in diesem Zusammenhang auf sie zurückzukommen sein.

2. SKT 7, Vs. 13 bis Rs. 7 und Rs. 8 bis Rs. 23.

Es folgen zwei Beispiele, die sich nur unwesentlich in den Zahlwerten von einander unterscheiden. Gegen das vorangehende Beispiel stellen sie in genau dem Sinne eine Erweiterung dar, wie es die Parameterdarstellung der Geradengleichung gegen die Darstellung $f(x, y) = 0$ bildet.

Vs. 13. Eine Fläche (aus) 2 Quadraten zusammengenommen (ist) 37,5. (Das eine) Quadrat (ist) 2/3 (des anderen) Quadrates, (wobei)	Rs. 8. Eine Fläche (aus) 2 Quadraten zusammengenommen (ist) 52,5. (Das eine) Quadrat (ist) 2/3 (des anderen) Quadrates, (wobei)
14. 10 zum größeren Quadrat addiert ist (und) 5 zum kleineren Quadrat addiert ist.	9. 20 zum größeren Quadrat addiert ist (und) 5 zum kleineren Quadrat addiert ist.
15. Die Quadrate berechne....	10. Die Quadrate berechne....

Das lautet in Formeln:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = A \\ x = u + d_1 \\ y = \frac{\alpha}{\beta} u + d_2, \end{cases}$$

wo u eine neue Unbekannte bedeutet. Durch Einsetzen von x und y in die erste Gleichung erhält man eine quadratische Gleichung für u. Ich schreibe sie wieder statt in u in der Hilfsgröße

$$\xi = \frac{u}{\beta} \quad (\beta = 60).$$

Dann ist ξ zu bestimmen aus:

$$\xi^2 + \frac{2(d_1\beta + d_2\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2}\xi - \frac{A - (d_1^2 + d_2^2)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Daraus ergibt sich die Lösung zu:

$$\xi = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\left\{\pm \sqrt{(d_1\beta + d_2\alpha)^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(A - (d_1^2 + d_2^2))} - (d_1\beta + d_2\alpha)\right\}$$

womit man schließlich

$$x = \beta\xi + d_1$$
$$y = \alpha\xi + d_2$$

erhält.

Und nun der Text:

Vs. 13 bis Rs. 7				Rs. 8 bis 23
$A = 37,5$ $\alpha = 40 \quad \beta = 60$ $d_1 = 10 \quad d_2 = 5$				$A = 52,5$ $\alpha = 40 \quad \beta = 60$ $d_1 = 20 \quad d_2 = 5$
	Zahlen Vs. 13 ff.	Formel [11])	Zahlen Rs. 8 ff.	
15. ... Du verfährst dabei so: 10 quadriere und 1,40 gibt es. 16. 5 quadriere, 25 gibt es. 1,40 und 25 dazu gegeben und 2,5 gibt es.				10. ... Du verfährst dabei so: 20 quadriere und 6,40 (ist es). 11. 5 quadriere und 25 gibt es. 6,40 und 25 dazugegeben und
17. 2,5 von 37,5 subtrahiere. 35,0 gibt es.	35,0 =	$A - (d_1^2 + d_2^2)$	= 45,0	12. 7,5 gibt es. 7,5 von 52,5 ziehe ab. 45,0 gibt es.
18. 1,0 quadriere und 1,0,0 gibt es. 40 quadriere und 26,40 (gibt es).				13. 1,0 quadriere und 1,0,0 gibt es. 40 quadriert. 26,40 gibt es.
19. 1,0,0 und 26,40 dazugegeben und 1,26,40 gibt es. 1,26,40	1,26,40 =	$\alpha^2 + \beta^2$	= 1,26,40	14. 1,0,0 und 26,40 dazugegeben und 1,26,40 gibt es. 1,26,40
20. mit 35,0 multipliziere. 50,33,20,0 gibt es. 10 mit 1,0 multipliziere. 10,0 gibt es.	50,33,20,0 =	$(\alpha^2 + \beta^2)\,(A - (d_1^2 + d_2^2))$	=1,5,0,0,0	15. mit 45,0 multipliziere und 1,5,0,0,0 gibt es. 20 und 1,0 multipliziere und 20,0 (ist es).
21. 40 mit 5 multipliziere und 3,20 gibt es. 10,0 und 3,20 dazugegeben und				16. [4]0 und 5 multipliziere und 3,20 gibt es. 20,0 und 3,20 dazugegeben und

22. 13;20 gibt es. 13,20 quadriert (ist) 2,57, 46,40.	13,20 =	$d_1\beta + d_2\alpha$	= 23,20	17. 23,20 gibt es. 23,20 quadriere und 9,4, 26,40 gibt es.
1. 2,57,46,40 zu 50, 33,20,0 addiere und	2,57,46,40 =	$(d_1\beta + d_2\alpha)^2$	= 9,4,26,40	18. 9,4,26,40 zu 1,5,0, 0,0 addiert und 1,14, 4,26,40 gibt es.
2. 53,31,6,40 gibt es. 53,31,6,40 (hat) 56,40 (als) Quadratwurzel.	56,40 =	$\sqrt{(d_1\beta+d_2\alpha)^2+(\alpha^2+\beta^2)(A-(d_1^2+d_2^2))}$	= 1,6,40	19. 1,[14,4,]26,40 (hat) 1,6,40 (als) Quadratwurzel. 23,20 von 1, 6,[40] subtrahiere
3. 13,20 von 56,40 subtrahiere und 43,20 gibt es.	43,20 =	$\sqrt{} - (d_1\beta + d_2\alpha)$	= 43,20	20. [43,20 gibt] es.
4. Was von 1,26,40 genommen (ist es), was 43,20 liefert?				Was von 1,26,40 genommen (ist es)
5. 0;30 genommen (?). 0;30 mit 1,0 multipliziere und 30 gibt es. 10 zu 30 addiert und	$\xi = \frac{1}{2}$	$(\alpha^2 + \beta^2)\,\frac{1}{2} = \sqrt{} - (d_1\beta + d_2\alpha)$	$\xi = \frac{1}{2}$	21. was 4[3],20 ergibt? 0;30 genommen. 0;30 mit 1,0 multipliziere. 30 gibt es.
6. 40 (ist) das größere Quadrat. 0;30 mit 40 multipliziere. 20 gibt es. 5 zu 20 addiere und	40 =	$\xi\beta + d_1 = x$	= 50	22. 20 zu 30 addiert und 50 (ist) das größere Quadrat. 0;30 mit 40 multipliziere. 23. 20 gibt es. 5 zu 20 addiere und 25 (als) kleineres Quadrat gibt es.
7. 25 (als) kleineres Quadrat liefert es.	25 =	$\xi\alpha + d_2 = y$	= 25	

Die Übereinstimmung von Text und Formel ist wieder eine vollkommene (abgesehen von der Zweideutigkeit des Vorzeichens der Wurzel).

[11]) Die Zahlen der linken Spalte beziehen sich auf das Beispiel SKT 7, Vs. 13ff., die der rechten Spalte auf SKT 7, Rs. 8ff. Die Transitivität des Gleichheitszeichens ist natürlich aufzuheben.

§ 4.
Schlußbemerkung.

Das bisher älteste Beispiel einer arithmetischen Reihe ist aus Ägypten überliefert (mathematischer Papyrus Rhind, zurückdatierbar bis etwa —1800). — Hinsichtlich der Homogenität der Dimension ist noch Vieta (+1600) sehr penibel. Über Addition von Strecken und Flächen bei Heron (+150) und über quadratische Gleichungen vgl. man z. B. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik III, 2. Aufl., 1922, S. 38f. Tropfke vermutet, daß Hipparch (—150) quadratische Gleichungen wohl gekannt habe, eine Vermutung, die durch die Ausführungen von § 2 und 3 sehr an Wahrscheinlichkeit gewinnen dürfte.

Die soeben behandelten Texte datiert Frank in die altbabylonische Zeit (ca. —1900). Verwendung sumerischer Worte und sumerischer Termini und allgemeine Kulturgeschichte machen es wohl so gut wie sicher, daß sie in letzter Linie auf sumerischer Grundlage ruhen (vor —2000).

Die große Knappheit des Ausdruckes, die den Text für uns nur aus den mathematischen Konsequenzen heraus voll verständlich macht, ist dieser ganzen Textgattung gemeinsam. Man wird wohl auf eine umfangreiche ergänzende mündliche Tradition schließen dürfen.

Eine Forschungsmethode antiker Naturwissenschaft*).

Von Otto Regenbogen in Heidelberg.

(Eingegangen am 5. 11. 1929.)

Es soll sich bei dieser Betrachtung nicht um eine weit ausgreifende Darstellung handeln, die durch die Jahrhunderte eilt und zu mannigfaltigen, in der Geschichte der Naturwissenschaften viel verhandelten Problemen Stellung nimmt, sondern um eine kritische Untersuchung, die, wie es sich für den Philologen gehört, auf dem Fundament der formalen und inhaltlichen Textesinterpretation ruht. Sie kann darum auch nicht darauf verzichten, eine Menge sprachliches Material vorzulegen, auf die Gefahr hin, dem nicht-philologischen Leser dadurch schwer genießbar zu werden. Doch ist wenigstens der Versuch gemacht, die Hauptmasse der Belegstellen in Anhänge zu verweisen, um den Gang der Darstellung möglichst übersichtlich zu gestalten. Ihre Rechtfertigung findet eine solche Untersuchung in der Überzeugung, daß gerade der Geschichte der antiken Wissenschaft noch auf lange Zeit nichts nötiger ist, als Erforschung von Einzelheiten, seien es nun Tatsachen oder Methoden oder geschichtliche Zusammenhänge, oder, was meist der Fall sein wird, alles drei in einem. An „Darstellungen", die häufig nur Materialhaufen sind oder Werturteile abschreiben, ohne die Quellen zu prüfen, oder etwa groteske Mißverständnisse ausschlachten und als Entdeckungen auf den Markt bringen, haben wir genug. Wer diese Dinge kennt, liest sie nicht mehr. Zum andern aber gründet die Untersuchung sich auch auf den Glauben, daß vielleicht überall, aber bei den Griechen ganz besonders, die eindringliche Behandlung einer Einzelfrage aufs engste verbunden ist nicht nur mit nächst übergeordneten allgemeineren Gesichtspunkten, sondern recht gefaßt, geradezu mit den zentralen Anliegen geistesgeschichtlicher Betrachtung. So möchte ich, indem ich eine Forschungsmethode griechischer, und zwar voraristotelischer Naturwissenschaft be-

*) Die Redaktion greift mit der Veröffentlichung dieser Arbeit dem Stoffe nach über den Bereich der Mathematik hinaus; sie tut es wegen der engen methodischen und prinzipiellen Verbundenheit dieser Untersuchungen mit denen zum mathematischen Analogie- und Verhältnisbegriff der Griechen, die in dieser Zeitschrift begonnen worden sind.

handle, implizite dabei zeigen, wie einmal die in der neueren historischen Behandlung beliebte Anwendung moderner Kategorien, wie induktive und deduktive Methode, Hypothese, Experiment u. dgl. eigentlich genommen, paßt und auch wieder nicht paßt, weil nämlich solche genuinen Methoden einer noch nicht international gewordenen Wissenschaft aus einer besonderen Art geistig zu erleben und zu formen erwachsen, traditionsgebunden und tief in Grundvoraussetzungen nationaler Geistigkeit verwurzelt, sui iuris und sui generis sind. Es ist hier wie bei den Wortbedeutungen, wo es J. Stenzel einleuchtend und eindrucksvoll gezeigt und begründet hat: es gibt schlechthin keine konzentrisch sich deckenden Kreise, sondern nur segmentär sich überschneidende. Zum zweiten soll, wenn es gelingt, anschaulich gemacht werden, wie gerade im archaischen griechischen Denken solche Methoden und Denkformen prall gefüllt sind von Entfaltungsmöglichkeiten aller Art und wie, bei der engen Verflochtenheit aller geistigen Tendenzen in der hellenischen Zeit, die Frage, ob diese Möglichkeiten zur Entfaltung kommen oder nicht, sofort in einen funktionellen Zusammenhang tritt mit den wichtigsten und übergreifendsten Fragen und Entscheidungen griechischer Geistesgeschichte überhaupt.

Wir nehmen für den Ausgang unserer Betrachtung den Standpunkt da, wo allein eine kompakte Masse naturwissenschaftlicher Schriften verhältnismäßig früher Zeit erhalten ist, von denen wenigstens ein Teil bis in das 5. Jahrhundert hinaufreicht: in der Hippokratischen Sammlung. Es wird nicht überflüssig sein, hier ausdrücklich zu sagen, daß bei weitem die meisten von ihnen sicher nicht aus Hippokrates', des berühmten Arztes des 5. Jahrhunderts, Feder stammen; daß wir nicht einmal sagen können, ob überhaupt welche und welche etwa wir dem koischen Arzte zuschreiben dürfen[1]). Sicher ist, daß sie nicht einer einzigen medizinischen Richtung angehören (die „Schulen" von Kos und Knidos und wahrscheinlich noch manche andre teilen sich in den überlieferten Bestand)[2]) und auch nicht einer einzigen Generation von Ärzten. Die Schriften

[1]) Auch M. Wellmann, Hermes 64 (1929), S. 16ff. bes. S. 18 beweist nicht den Hippokratischen Ursprung des Prognostikon. Aus den von ihm zitierten Stellen des Soran (Cael. Aurel. m. chr. IV, 8, 113, S. 392) und Galen (Comment. in Progn. I, 4, S. 205, 7 und 207, 23) ergibt sich nur, daß zur Zeit des Herophilos das Prognostikon für echt Hippokratisch galt. Übrigens hatte Herophilos eine andre Rezension in Händen. Mit dem Ansatz einer Lücke hinter δεῖ δὲ (Kw., S. 88, 17) und dem von Wellmann vorgeschlagenen Einschub läßt sich die Abweichung des bei Caelius Aurelianus l. c. angeführten Prognostikontextes von dem Text unserer Handschriften nicht beseitigen. Daß das Exemplar des Herophilos „den Namen des Hippokrates als σφραγὶς an der Spitze trug", wird nur der gelten lassen, der die Ergebnisse von Wellmanns Aufsatz, Hermes 61, 1926, S. 332 annimmt.

[2]) Vgl. J. Ilberg, Die Ärzteschule von Knidos, SBSA 1925.

reichen zeitlich vom Ende des 5. Jahrhunderts bis in die Mitte des 4. Jahrhunderts hinein, vielleicht sogar noch weiter hinab. In ihrer chaotischen Masse Ordnung zu schaffen, durch Gruppenbildung, die das inhaltlich und formal Zusammengehörige umfassen, ist ein wichtiges Anliegen der Forschung, das erfüllt sein muß, ehe sich über Herkunft und Zustandekommen der Sammlung etwas Endgültiges wird sagen lassen. Eine solche Gruppe, in Wahrheit sogar eine zusammengehörige, einheitliche Schrift bilden die in der Überlieferung mit Sondertiteln versehenen 3 Bücher *περὶ γονῆς*, *περὶ φύσιος παιδίου* und *περὶ νούσων* IV, deren Einheit bereits Littré erkannte. Er hat sie im VII. Bande seiner großen Hippokratesausgabe demgemäß auch zusammengestellt. Die Bücher enthalten im wesentlichen eine Embryologie mit anschließender Krankheitslehre. Ihre Zusammengehörigkeit wird bewiesen einmal durch die in den Schriften selbst ausdrücklich enthaltenen Hinweise, zweitens durch die allen gemeinsame Sprache, mit ihrer bewußten Kunst der rhetorisch-poetisch tingierten Wortwahl und Figurenbildung, drittens durch die durchgehenden Aufbau- und Gliederungsmittel, deren stereotype Formeln den bewußten und gewollten Zusammenhang verbürgen[3]). Schließlich durch die Einheit der allem zugrunde liegenden Doktrin[4]).

Ich gebe nun zunächst eine knappe Inhaltsübersicht der Schriftenreihe, um den staunenswert reichen Inhalt dieser medizinischen Schrift anschaulich zu machen: sie entstammt eben noch einer Zeit, wo keine oder fast keine Schranken der Fachwissenschaften existieren und der Blick des Forschers ungehemmt über alle Bereiche der Natur und des Menschendaseins schweift, um die Beweisstücke seiner Theorien zusammen zu sehen. Es ist alles noch *ἱστορίη*, Forschung, im alten ionischen Sinne. Der ganze erste Teil der Reihe, die eng zusammengehörigen Schriften *περὶ γονῆς* und *περὶ φύσιος παιδίου*, haben es zu tun mit der Entstehung und Entwicklung des Kindes bis zum Augenblick der Geburt. Die mannigfaltigsten Probleme der Embryologie kommen dabei zur Sprache; Vererbungstheorien, Gliederung des Kindes durch das Pneuma, das allenthalben hier als das produktive und regulative Prinzip erscheint; die Frage nach den Gründen für die Differenz männlicher und weiblicher Geburten; die Physiologie des Embryo, Bildung von Muskeln, Knochen,

[3]) Vgl. zu allen diesen Gesichtspunkten die angehängten Beilagen, in denen das Material zusammengestellt ist.

[4]) Das Buch will trotz des spürbar rhetorischen Einflusses durchaus eine wissenschaftliche Darstellung geben. Man muß, um sich vor Irrtümern in der Einordnung zu hüten, nur bedenken, daß das wissenschaftliche Buch eben damals erst zu entstehen beginnt und nach einer Form sucht. Für literarische Ansprüche gibt es allein die Formkategorien, die für künstlerische Prosa gefunden waren und gelehrt wurden: d. h. die rhetorischen. Das Verhältnis zur sophistischen Rhetorik wäre genauer zu untersuchen. In den Beilagen sind nur einige Andeutungen gegeben.

Haaren, Nägeln; die Bewegung des Foetus und ihre Verursachung; die Ätiologie seiner Gesundheit und Krankheit; die Tatsache, daß diese abhängt von der Natur der Mutter, gibt Anlaß zu einem durchgeführten analogischen Vergleich. Der Embryo verhält sich zur Mutter wie die Pflanze zur umhegenden Erde. So setzt sich an dieser Stelle ein großer botanischer, besser pflanzenphysiologischer Exkurs an, das älteste Dokument griechischer Pflanzenkunde, das wir besitzen. Was den Autor nur irgend dabei interessiert, wird in den Kreis der Betrachtung einbezogen, Entwicklung der Pflanze aus Samen und Setzling, Verzweigung und Bewurzelung, Erzeugung der Frucht, Okulation usf. Er verdient eine gesonderte Behandlung, die im Umriß wenigstens in einer Beilage gegeben wird. Schließlich ruft sich der Autor von dieser langen Abschweifung zum Thema zurück, um erst noch die Lage des Fötus und den Zeitpunkt der Geburt zu erörtern; dann schließt eine allgemeine Pathologie, Lehre von den Krankheiten und ihrer Entstehung an, die das ganze Buch, das den Sondertitel *περὶ νούσων* in unserer Überlieferung führt, anfüllt. Die Doktrin des Ganzen zeigt einen doppelten Einfluß, der durch die Namen Empedokles und Diogenes von Apollonia bezeichnet wird. Durch diese Namen ist auch für den zeitlichen Ansatz der Schriftenreihe ein Terminus post quem gegeben. Sie gehört in das letzte Viertel des 5. Jahrhunderts und wird schwerlich ins 4. Jahrhundert hineinreichen. Über die eigentümlich rhetorisch-poetische Stereotypie der Darstellungsform ist bereits kurz gesprochen worden. Es ist durchaus möglich, daß die fühlbar dichterischen Bestandteile des Wortschatzes von Empedokles beeinflußt sind, der seinerseits in der Tradition des Homerischen und des späteren Epos, von dessen sprachlicher Form wir leider nur zu wenig wissen, steht.

Der Stereotypie der Darstellungsform, namentlich der Aufbau- und Übergangsformeln, entspricht nun bis zu einem gewissen Grade auch die Stereotypie der wissenschaftlichen Verfahrungsweise, die Gleichförmigkeit einer immer wieder angewendeten Beweismethode, die aus einer bestimmten Untersuchungsmethode sich ergibt. Sie findet sich auch in anderen Schriften der Hippokratischen Sammlung[5]), aber in der vorliegenden am häufigsten, konsequentesten und einseitigsten angewendet. Sie ist in ihrer eigentlichen Bedeutung, wie es scheint, bis dahin nicht erkannt und gewürdigt worden[6]). Auch von Ilberg nicht völlig, der

---

[5]) Vgl. dazu jetzt G. Senn, Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medizin 22, 1929, 217ff. Besonders 220 Mitte.

[6]) Am meisten noch von medizinischen Sachverständigen: vgl. B. Bloch, Die geschichtlichen Grundlagen der Embryologie bis auf Harvey, Nova Acta, Abh. d. Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 82, 1904, 215ff. und Th. Beck, Das wissenschaftliche Experiment in der Hippokratischen Büchersammlung, 49. Philologenversammlung, 1907, S. 197—201.

unserer Schrift jüngst in größerem Zusammenhange eine Behandlung gewidmet hat[7]). Es handelt sich um die sogenannten Vergleichungen, die für diesen Autor charakteristisch sind. Man hat sich bis dahin das Verständnis des eigentlichen Sachverhaltes in der Regel dadurch verbaut, daß man in diesen Vergleichungen lediglich rednerische Prunkstücke, lumina orationis, sehen wollte, denen nur formale, bestenfalls illustrative Bedeutung zukommen sollte. Es handelt sich aber um mehr. Diese „Vergleichungen" sind wichtig nicht nur für die Entwicklung wissenschaftlicher Darstellungsformen, sondern auch für die Entwicklung der Formen wissenschaftlichen Denkens und wissenschaftlicher Untersuchung. Will man ihre sachliche Aufgabe zunächst einmal ganz allgemein charakterisieren, so handelt es sich kurz gesagt bei allen von ihnen um folgendes: ein Vorgang nicht anschaulicher Art wird einem zweiten anschaulichen verglichen, dergestalt, daß der erste durch den zweiten eine besondere Beleuchtung empfängt. Es genügt, an den oben erwähnten Vergleich des Kindes in der Mutter mit der Pflanze in der Erde zu erinnern. Der äußere Umfang dieser Vergleichungen schwankt sehr stark; während die kürzesten von ihnen nur wenige Zeilen umfassen, wachsen sich andre zu ganzen Exkursen von einigen Seiten aus; schon diese rein äußere Tatsache zeigt ihre sachliche Bedeutung im Rahmen der Schrift; das ist nicht mehr bloße ἐπίδειξις. Ein zweites fällt an ihnen einer näheren Betrachtung auf: das ist die Festigkeit ihrer darstellerischen Form. Sie nähern sich alle formal einem bestimmten Schema an, das mit Konsequenz, aber auch mit stereotyper Unbiegsamkeit gehandhabt wird. Die Belege dafür sind in die 3. Beilage verwiesen worden. Diese Beobachtung zeigt, sie haben einen sicheren Platz in der Darstellungsweise und in der Untersuchungsmethode des Autors. Nirgendwo sonst gehen ja Denkform und Form des Aussprechens so Hand in Hand wie bei der wissenschaftlichen Untersuchung. So drängt sich sogleich die Frage auf: hat sich der Verfasser dies Mittel der Forschung und die Form seiner Darstellung selbst geschaffen? Oder steht er etwa schon selbst in einer Tradition des Untersuchens und Darstellens? Wenn ja — wo kommt sie her? Was wird aus ihr?

In einem merkwürdigen Gegensatz zu der stereotypen, wenig variabeln Form der Vergleichungen steht ihr außerordentlich reicher, vielseitiger Inhalt. Alle möglichen Gebiete der Naturerkenntnis, Botanik und Zoologie zieht der Autor heran, auch die ionische Ethnographie mit ihrem Lieblings- und Spezialthema, den skythischen Sitten und Gebräuchen, wird in Kontribution genommen. So wird 520, 2 die größere Wärme, Dichte und Feuchtigkeit der Erde damit in Parallele gesetzt, daß ja auch

[7]) Ilberg, Die Schule von Knidos, 1925, SBSA, S. 9ff., wo schon ganz richtig von einem „Analogieschluß" gesprochen wird. Vgl. ebd. S. 12ff.

gestampfter Mist, dichtgelagertes Getreide, fest geschnürte Kleider stark erwärmt würden, die letzten sogar der Selbstentzündung ausgesetzt seien. 586, 25 wird die langsame Verbreitung eines Krankheitsstoffes im Körper mit der in einer Fleischmasse um sich greifenden Fäulnis verglichen, 590, 9 die Einwirkung der Kälte auf die Säfte des Körpers der Veränderung der Milch durch Zugießen von Lab, 602, 6 das Blasensediment und seine Versteinerung den Prozessen bei der Reinigung des Erzes im Schmelzofen. 486, 13 wird die Behauptung, daß alles Erwärmte aus sich Pneuma entwickle, damit belegt, daß man diesen Vorgang an brennendem Holze, an erhitzten grünen Blättern, an erwärmten Hülsenfrüchten beobachten könne. Die Theorie, daß der Embryo durch Bewegung in allzu enger *μήτρῃ* beschädigt werde, wird durch den Hinweis deutlich gemacht, daß Bäume usw., die von einem Steine oder dgl. im Wachstum gehemmt werden, sich krümmen oder ungleich stark sich gestalten. Diesem botanischen Interesse danken wir auch die zwei großen Exkurse, die in der Hauptsache die Phytologie des Autors enthalten: einmal 514, 6, wo die Abhängigkeit der Gesundheit oder Krankheit des Fötus von dem Zustande der Mutter dem Verhältnis der Pflanzen zu dem mütterlichen Nährboden, und zum andern 544, 20, wo die Nahrungsaufnahme der *πηγαὶ* im Menschen aus der *κοιλίῃ* der Art verglichen wird, wie die Pflanzen ihre Nährstoffe dem Boden entnehmen. Ausgezeichnet durch feine zoologische Beobachtung ist schließlich die Art, wie 536, 6 die Behauptung, das Kind beginne bei Eintritt von Nahrungsmangel im Mutterleib seine Bewegung, damit gestützt wird, daß dem jungen Huhn im Ei das Weiße als Nahrung diene, und daß von diesem Stoffe sich nichts mehr vorfinde, wenn das junge Tier nach dem Anpicken die Schale durchbreche. Dem Gebiete der Ethnographie ist endlich der Vergleich entnommen, durch den die Annahme erläutert wird, es gerate bei übermäßiger Erwärmung *τὸ ὑγρὸν πᾶν* in Aufregung und scheide sich dadurch in seine Bestandteile auseinander: so sei es auch, wenn die Skythen in ihren Holzgefäßen aus der Pferdemilch ihr *βούτυρον* und ihre *ἱππάκη* bereiteten.

Alle diese Vergleiche entnehmen ihr Material der sich von selbst darbietenden Beobachtung, und wenn sie auch in jedem Falle von einem offenen Blick des Autors, von der Weite seines Interessenkreises Zeugnis ablegen, so könnte man doch sagen, er habe eben zufällig aufgegriffenes Wissen verwertet, etwa um mit seinen Kenntnissen zu prunken oder seiner Darstellung einige brillante Lichter aufzusetzen oder günstigen Falles, um seine Darlegungen annehmlicher und anschaulicher zu machen. Es findet sich nun aber eine große Anzahl von Stellen, die ihr Vergleichsmaterial sich selbst schaffen, an denen der Autor sich keineswegs damit begnügt, irgendwo aufgelesene Kenntnisse anzubringen, sondern wo er uns

— bis zu ziemlich komplizierten Verfahrungsweisen — Versuchsanordnungen beschreibt, die er zum Teil zweifellos selber durchgeführt hat — wo wir also, wie wir vorgreifend jetzt schon einmal sagen wollen, den Versuch zur Bestätigung einer Theorie angewendet sehen. Wir wollen die Versuchsreihe unseres Schriftstellers geordnet vom einfacheren zum komplizierteren ansteigend einmal an uns vorüberziehen lassen.

Auf einer zufälligen Beobachtung kann es noch beruhen, wenn 600, 21 die Bildung des Blasensteines dem Bodensatz verglichen wird, der entsteht, wenn man unreines Wasser in einem Gefäße bewegt und sich dann beruhigen läßt. Anders ist es schon, wenn das Aufsteigen der Milch von den Verdauungsorganen durch die Gewebe des Körpers mit der Beobachtung parallelisiert wird, die sich darbietet, wenn man eine Haut mit Öl tränkt und sie kräftig drückt: das Öl quillt dann durch die Poren der Haut heraus; oder wenn die durch Eindringen der *γονή* bewirkte *σβέσις τῆς θέρμης* verglichen wird dem Aufhören des Siedens bei Zugießen von kaltem Wasser auf kochendes, oder das *ἐξαίσσειν τῆς ἡδονῆς ἅμα τῇ γονῇ πιπτούσῃ* dem Auflodern einer Flamme beim Aufgießen von Wein. Umständlicher sind schon die folgenden Versuche: 478, 11 soll die Mischung von männlichem und weiblichem *σπέρμα* bei der *σύμπηξις* desselben erläutert werden: man lasse Fett und Wachs zusammenschmelzen; beim Erkalten wird sich dann durch deutliche Sonderung herausstellen, ob mehr vom einen oder anderen genommen ist. 580, 7: bei Erhitzung des Körpers verflüchtigt sich das *ὑδρωποειδὲς* am meisten, das *χολῶδες* bleibt zurück: man gieße Wasser und Fett in ein Gefäß und lasse es lange Zeit kochen; das Wasser wird sich viel stärker vermindern als das Fett. 588, 17 Bluterguß nach einem Schlag; plötzliche Infiltration der Gewebe: man füllt eine langhalsige Lekythos mit Salbe und kehrt sie plötzlich um: es wird nichts ausfließen; neigt man sie langsam zur Seite, so kann die Flüssigkeit entweichen. Sehr ähnlich, unserem bekannten Schulexperiment noch ähnlicher, ist die Fassung desselben Versuchs 612, 6. 556, 17: die *πηγαί*, wenn gefüllt, geben dem Körper von ihrem Inhalte ab, im anderen Falle entnehmen sie ihm Stoff; wir würden sagen, nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren. Der Verf. beschreibt folgende Versuchsanordnung: man stelle auf ebener Grundlage drei oder mehr Metallgefäße auf, verbinde sie unten durch Röhren und gieße in eins derselben Wasser ein, so wird man sie nach und nach alle füllen; auf dieselbe Weise entleert man sie wieder. Oder noch komplizierter 522, 20 und 498, 17. Im ersten Falle soll bewiesen werden, daß im Sommer — da die Erde durchlässig ist — das Wasser in der Tiefe Dünste aufsteigen läßt, die kühlend wirken; dem wird folgender, nicht ganz klarer Versuch zur Seite gestellt: wenn man in einem Schlauch das Wasser stark zusammenschnürt, durch einen Nadelstich eine Nebenöffnung macht und dann den Schlauch schwebend aufhängt, so wird durch die Öffnung nur Wasser dringen; läßt man aber dem Wasser viel Spielraum, so wird auch Luft durch die Nebenöffnung hindurchgehen. Sehr eigenartig und recht kompliziert, aber im einzelnen durchaus klar ist 498, 17. Es soll gezeigt werden, daß das *πνεῦμα* als ausbildendes Prinzip am Embryo wirkt und ihn gestaltet. Man befestigt an einer Blase eine Röhre; bringt in die Blase Erde, Sand, Bleispäne und gießt Wasser zu; bläst man jetzt stark durch die Röhre, so tritt zunächst eine allgemeine Mischung der Elemente ein; dann aber sondert sich das Gleiche zum Gleichen; läßt man nun das Ganze trocknen und zerbricht die Blase, so findet man Gleiches bei Gleichem[8]).

Den Schluß mögen drei Versuche bilden, die sich gemeinsam dadurch auszeichnen, daß sie am lebenden Objekt vorgenommen werden: 482, 14 wird eine junge Gurke, die am Beet belassen wird, in ein enges Gefäß getan; es zeigt sich, daß sie im Wachstum gehemmt ist: ebenso wird der Embryo schwächlich, wenn er in der *μήτρῃ* keinen Platz hat. Den Glanzpunkt bildet entschieden der Tierversuch, durch den bewiesen werden soll, daß die Entwicklung des Fötus sich genau in der vom Autor angegebenen Weise vollziehe; man lege einem oder mehreren Hühnern 20 Eier unter und untersuche vom 2. Tage an jeden Tag ein Ei, so wird man alles entsprechend der angegebenen Entwicklungsgeschichte vorfinden (530, 10). Anders ging v. Baer bei seinen epochemachenden Forschungen zur Entwicklungsgeschichte zu Beginn des vorigen Jahrhunderts auch nicht vor[9]).

Noch darüber hinaus geht 508, 15 ein Versuch, angestellt am lebenden Menschen: wenn man die Oberhaut brennt, eine Blase hervorruft und diese dann heilt, so verdickt sich die Oberhaut und läßt keine Haare mehr wachsen: damit wird gezeigt, daß nur an den dünnsten Stellen der Haut Haare wachsen.

Es ist nun an sich nicht eben wahrscheinlich, daß der Verf. diesen komplizierten Apparat in Bewegung setzt, nur um seiner Schrift ein paar anmutige Pointen zu geben; vielmehr muß er sich einen methodischen Nutzen, die Erreichung eines wissenschaftlichen, besser apodeiktischen, Zweckes davon versprochen haben. Die Frage nach diesem Zwecke haben wir nun zu stellen.

Zu ihrer Beantwortung haben wir eine unverächtliche Unterstützung durch die Äußerungen des Autors selbst, die uns zeigen, daß er über seine

---

[8]) Aristoteles polemisiert gegen diese Theorie generat. anim. II, 4, 740b: *Ἡ δὲ διάκρισις γίνεται τῶν μορίων οὐχ ὥς τινες ὑπολαμβάνουσι διὰ τὸ πεφυκέναι φέρεσθαι τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ὅμοιον* — —

[9]) Vgl. K. E. v. Baer, Über Entwicklungsgeschichte der Thiere. Königsberg 1828. II. ebd. 1888.

Methoden nachgedacht hat, wie übrigens andre Hippokratiker, z. B. der Verfasser von *περὶ ἀρχαίης ἰητρικῆς*, auch. Es würde ein lohnendes Unternehmen sein, diese methodischen Äußerungen im Zusammenhange zu betrachten, ein notwendiger Baustein zur Geschichte der wissenschaftlichen Untersuchung. An einem speziellen Falle wollen wir die Aufgabe wenigstens einmal andeuten.

Zum Beweis des Interesses, das unser Autor für die Theorie der Untersuchungsmethoden hat, werden wir allerdings den Satz, den er an die Spitze seiner Abhandlung stellt, besser beiseite lassen (470, 1 *νόμος μὲν πάντα κρατύνει*), er steht allzu sehr außer jedem Zusammenhange mit den anderen Teilen der Schrift und erweckt allzu sehr den Eindruck eines aufgesetzten Flitters[10]). Anders steht es mit gewissen Einschränkungen, die er gelegentlich seinen Argumenten beifügt und die zeigen, daß er über ihren Beweiswert sich Gedanken gemacht hat: so z. B.: 492, 2 *ἐρέωἱστόριον παντὶ τῷ ἐμῷ λόγῳ ὅτι ἐστὶν ἀληθὴς ὡς εἰπεῖν ἄνθρωπον περὶ τοιούτου πράγματος* *) vgl. mit 530, 2—10; oder 530, 14 *ὡς χρὴ ὄρνιθος φύσιν ξυμβάλλειν ἀνθρώπου φύσει* **). Wichtig ist auch 504, 21—25, über das später noch einige Worte gesagt werden sollen. Die Bewußtheit seiner Argumentation und ihrer Anordnung zeigt sich in seiner Äußerung 608, 18—20 *καὶ ἀνάγκη ἐστὶ πρὸς τὰ ἰσχυρῶς δοκέοντα τὰ πολλὰ ἱστόρια ἐπάγεσθαι, εἴτις μέλλει τὸν ἄκοντα ἐκ τῆς πρὶν γνώμης μεταστρέψα<ς> τοῖσιν ἑωυτοῦ λόγοισι πείσειν* ***) und kürzer: 504, 2 *μέλλω δὴ τὸ δεύτερον νῦν ὀνομάζειν σαφηνίης ἕνεκα.*

Das läßt uns hoffen, daß wir auch über den Zweck einer so häufig angewandten und so fest geformten Methode wie die Analogie ist, durch den Verf. selbst Aufschluß erhalten werden. Daß natürlich der Gesichtspunkt der bloßen Anschaulichkeit, vielleicht auch nur des Schmuckes, nicht ganz auszuschalten ist, ist an sich ziemlich gewiß, das zeigt die Parallele anderer Hippokratiker, die von solchen Vergleichen ebenfalls, wenn auch sparsamer, Gebrauch machen, das zeigt auch die Verwendung des Kunstmittels in der Rhetorik, belegen aber insbesondere Äußerungen des Autors. So etwa 602, 10 *καὶ ὄψει ὁρᾶται τὸ γινόμενον*, oder 536, 21 *καὶ ἐμφανές ἐστιν ὅτι ὧδε ἔχει* oder 540, 12 *καὶ ταῦτα αὐτοὶ ὁρέομεν γινόμενον* (ähnlich 486, 17; vgl. auch 520, 10). Es ist aber nicht unwahrschein-

*) (ich will ein Indicium für die Wahrheit meiner ganzen Auseinandersetzung vorbringen, soweit ein Mensch über einen derartigen Gegenstand [etwas Gewisses] sagen kann.)

**) (soweit man die Natur eines Huhns mit der des Menschen vergleichen darf.)

***) (es ist nötig, gegen sehr festgewurzelte Meinungen viele Beweismittel vorzubringen, wenn einer auch den Widerstrebenden von seiner früheren Meinung abbringen und durch seine Ausführungen überzeugen soll.)

[10]) Vgl. die Beilage I.

lich, daß der Verf. noch andere, wichtigere Zwecke damit verfolgt: nur dann verstehen wir ganz die ungemein häufige Anwendung, die feste sprachliche Form und den Umstand, daß nicht einige beliebige Beobachtungen zur Illustration aufgegriffen, sondern Versuche angestellt werden, um Vergleichsmaterial zu gewinnen. Eine Untersuchung der benutzten Terminologie wird uns über den Zweck dieser Analogien ins klare bringen.

544, 17 hat der Verf. behauptet, daß aus der *κοιλίη* die *πηγαί* die *ἰκμάς* anziehen, und zwar die gleiche die gleiche. Damit wird die Art verglichen, wie jede Pflanze der Erde die für sie passende Nahrung entnimmt; es wird aus dieser Bemerkung ein ziemlich ausgedehnter Exkurs über die Verhältnisse der Pflanzen zu ihrem Nährboden überhaupt, der dann 548, 7 zurücklenkt und abschließt mit den Worten: *ἀνάγκην οὖν τῷδε προσηγαγόμην, ὅτι ἀπὸ τῶν βρωμάτων καὶ τῶν ποτῶν ἐς τὴν κοιλίην χωρεόντων ἕλκει τὸ σῶμα κατὰ τὰς πηγὰς ἃς ὠνόμασα, ἡ ὁμοίη ἰκμὰς τὴν ὁμοίην διὰ τῶν φλεβῶν* *) — d. h. also, die Analogie des Pflanzenreiches zwingt zu der Annahme, daß es beim Menschen gerade so ist; die Analogie ist kein Schmuck, auch keine bloße Veranschaulichung, sondern ein Mittel des Beweises, ein Zwang zur Anerkennung der vorgebrachten erklärenden Annahme. Nicht anders steht die Sache 486, 2ff., wo eine Reihe von Analogien (*ξύλα καιόμενα, φύλλα χλωρὰ ὅταν καίηται, χέδροπα σῖτος ἀκρόδρυα θερμαινόμενα*) **) zusammengefaßt werden in dem Schlußsatz: *καὶ αὗταί μοι ἀνάγκαι προηγμέναι εἰσίν, ὅτι ἡ γονὴ θερμαινομένη ἐν τῇσι μήτρῃσι πνεῦμα ἴσχει καὶ ἀφίησιν* ***). Neben dieser Bezeichnung der Analogie als *ἀνάγκη* finden sich auch noch andere: so 536, 5 und 540, 9 als *ἱστόριον* und 530, 3~492, 2/5 als *διάγνωσις*. Zu einer genauern Abgrenzung von *ἱστόριον* (= *διάγνωσις*) gegenüber der *ἀνάγκη* verhilft uns nun schließlich die wichtige Stelle S. 504, 21—24, die wir in ihrem Zusammenhange etwas genauer würdigen müssen. Die Auseinandersetzung beginnt S. 498, 26: es soll bewiesen werden, daß die Gliederung des weiblichen Fötus in längstens 42 Tagen, die des männlichen in 30 Tagen beendet ist. Die Hauptargumente bilden ziemlich komplizierte Berechnungen über die *λοχίη κάθαρσις* †), die wir hier nicht zu reproduzieren brauchen. Zusammengefaßt wird nun p. 504, 2ff.:

*) (einen zwingenden Beweis nun habe ich für die Behauptung vorgebracht, daß von Speise und Trank, die in den Verdauungsapparat gelangen, der Körper gemäß den Quellen, die ich genannt habe, und zwar die gleiche dunstförmige Feuchtigkeit die gleiche anzieht.)

**) (brennendes Holz, grüne Blätter, die man verbrennt, Hülsenfrüchte, Getreidekörner, Baumfrüchte, die man erwärmt.)

***) (und dies ist mir als zwingender Beweis vorgebracht, daß der Same, in der Gebärmutter erwärmt, Pneuma hat und entsendet.)

†) (Reinigung nach der Entbindung.)

1. Es entspricht der Abstand der *λοχίη κάθαρσις* (42 Tage nach Geburt eines Mädchens, 30 Tage nach Geburt eines Knaben) der Dauer der Gliederung des Fötus in beiden Fällen.

2. wiederholt dasselbe in etwas anderer Weise; daß nämlich in der *λοχίη κάθαρσις* die abnehmende Quantität der *κάθαρσις* sich umgekehrt verhalte wie die wachsende Stärke des Blutzuflusses nach erfolgter Konzeption. Beide Argumente sind als *ἱστόρια* bezeichnet (504, 8; 502, 20). Als drittes Argument wird die Tatsache angeführt, daß bei *ἐξαμβλώσιες* *) innerhalb 30 (42) Tagen der Fötus ungegliedert, später aber gegliedert ist. (Hinter *ὕστερον* (21) gehört ein Punkt.) Nun kommt der Abschluß: 540, 21 *ᾧδε φαίνεται καὶ λόγῳ καὶ ἀνάγκῃ ἡ διάρθρωσις ἐοῦσα. . . ἱστορέουσι γὰρ αἱ ἐξαμβλώσιες τῶν παιδίων καὶ τῶν λοχίων αἱ καθάρσιες* **). Daraus folgt, *ἱστορέουσι* gehört zu allen drei Argumenten: Es umfaßt sowohl die Berechnungen 1 und 2, wie den Tatsachenbeweis unter 3; *ἱστόριον* ist argumentum im weitesten Sinne. Dagegen ist 504, 21 geschieden zwischen *λόγος* (Berechnung) und *ἀνάγκη* ***); es ist klar, daß *λόγος* sich bezieht auf die Tagesberechnungen der *λοχίη κάθαρσις*; d. h. also *ἀνάγκη* bezeichnet den Tatsachenbeweis auf Grund einer empirischen Beobachtung. Ebenso aber wertet der Autor die Analogien (Vergleiche), die er mehrfach als *ἀνάγκαι* bezeichnet: wir stellen also fest, die Analogie, der Vergleich dient nicht nur als Schmuck oder zur Veranschaulichung, er ist vielmehr ein wichtiges Stück im Beweisverfahren unseres Autors, und hat die Aufgabe, einzelne Behauptungen und ganze (hypothetische) Beschreibungen von unanschaulichen, nicht beobachtbaren Vorgängen zu verifizieren, zu beweisen. Ja, mehr als das. Diese Art der Analogie dient nicht nur als Beweismittel im kleinen, die schematische Art ihres Aufbaus (unanschaulicher Vorgang — Analogie — Zusammenfassung)[11]) dient nicht nur als Dispositions- und Darstellungsmittel im einzelnen, es läßt sich vielmehr zeigen, daß eine solche analogische Betrachtung die Keimzelle für einen Hauptteil der ganzen Schrift, ihr Darstellungsschema die Dispositionsgrundlage für einen langen Abschnitt des Buches *περὶ φύσιος παιδίου* bildet.

Wir setzen ein bei dem schon oben besonders hervorgehobenen Kapitel 29 (p. 530, 2ff.). Die Einleitung *νῦν δὲ ἐρέω τὴν διάγνωσιν ἣν ἔφην ἀποφανεῖν ὀλίγῳ πρότερον, ὡς ἀνυστὸν ἀνθρωπίνῃ γνώμῃ ἐμφανέα ἐοῦσαν*

*) (Fehlgeburten.)

**) (so verhält es sich, wie offenkundig ist, nach Berechnung und zwingendem Beweis mit der Gliederung des Foetus; denn es dienen zum Erweis die Fehlgeburten und die Reinigungen nach der Entbindung.)

***) (Tatsachenbeweis = Beweiszwang.)

---

[11]) S. unten Beilage III.

*παντὶ τῷ θέλοντι εἰδέναι τούτου πέρι**). Es folgen als Themata probanda die Sätze: 1. *ὅτι ἥτε γονὴ ἐν ὑμένι ἐστί*

2. *καὶ κατὰ μέσον αὐτῆς ὁ ὀμφαλός ἐστι*

3. *κἀκείνη πρῶτον τὴν πνοὴν ἕλκει ἐς ἑωυτὴν καὶ μεθίησιν ἔξω*

4. *καὶ ἐκ τοῦ ὀμφαλοῦ ὑμένες εἰσίν*

5. *καὶ τὴν ἄλλην φύσιν τοῦ παιδίου ἣν εἴρηκα***),

welche eine Zusammenfassung dessen sind, was in den vorangehenden Kapiteln über die Entwicklung des Fötus behauptet worden ist. Nun kommt der Vergleich mit der Entwicklung des Huhns im Ei, die auf Grund des Brütversuchs festgestellt wird. Die Einleitung aber greift zurück auf 492, 2, das in engem Zusammenhang mit cc. 12/13 steht. Es bilden also — abgesehen von den zahlreichen Exkursen — die cc. 12—29 ein zusammenhängendes Ganzes, das die Darlegung eines unanschaulichen Vorgangs, der Entwicklung des menschlichen Fötus, enthält: auf diesen Teil folgt nun der anschauliche Vorgang, die Analogie im c. 29. So haben wir hier dieselbe Anlage im großen, die wir im kleinen oft beobachtet haben; die Darlegung eines erschlossenen, nicht anschaulichen Vorgangs wird in Analogie zu einem zweiten anschaulichen gebracht. Wir sehen, wie hier die Erörterung in einem Hauptteile der ganzen Schrift durch dasselbe Kunstmittel gestützt wird, das wir aus der Beweisführung kleinerer Abschnitte bereits kennen. So wie dieser Tierversuch den einen Grundpfeiler der ganzen Schrift bildet, so wird der andere durch die empirische Beobachtung an der *μουσοεργὸς* (c. 13) hergestellt; man kann wohl sagen, daß in diesen beiden Beobachtungen der Anlaß zur Konzeption des ganzen Gedankenganges — wenigstens von *π. φύσιος παιδίου* — gelegen hat. Es sind also Beobachtung und Versuch bereits bei diesem Hippokratiker die Grundlagen der wissenschaftlichen Hypothesenbildung, nur daß die Spekulation sich bald allzu ungezügelt erhebt.

Es lohnt sich und klärt die Sachlage, die im Laufe unserer bisherigen Untersuchung beschriebene Methode nun auch einmal vom Standpunkte der modernen Theorie auf ihre Eigenart hin anzusehen, um zu erwägen, mit welchen Kunstmitteln des heutigen Verfahrens sie Berührungen zeigt. Besser und richtiger drückt man sich vielleicht aus, wenn man sagt, was für Formen wissenschaftlichen Denkens noch ungeschieden und keimhaft, aber entwicklungsfähig in ihr beieinander liegen. Das Verfahren be-

*) (jetzt will ich das Erkenntnismittel vorbringen, das ich kurz vorher in Aussicht gestellt habe, das einleuchtend ist, soweit es menschlicher Einsicht möglich, für jeden, der über diesen Gegenstand etwas wissen will.)

**) (1. daß der Same in einer Haut ist; 2. daß in seiner Mitte sich der Nabel befindet; 3. daß er zuerst Pneuma an sich zieht und nach draußen entsendet; 4. daß am Nabel Häute befestigt sind; 5. und die übrige Natur des Embryo, von der ich sprach.)

steht, allgemein und schematisch gesprochen, darin, daß ein angenommener, unanschaulicher Vorgang a, der in Thesenform apodiktisch entwickelt worden ist, einem zweiten anschaulichen Vorgang b — zuweilen tritt ein zweiter und dritter anschaulicher Vorgang b^1 b^2 dazu — verglichen wird, mit dem deutlichen Zweck, die Richtigkeit der Annahme bezüglich des unanschaulichen Vorgangs a dadurch zu beweisen. Diese Anordnung der Darstellung entspricht zweifellos nicht der Entstehung des Gedankenkomplexes im Geiste des Autors. Gewiß ist das Prius der anschauliche Vorgang, nach dessen Analogie der Ablauf des unanschaulichen Vorgangs entworfen wird. In der Darstellung kehrt sich das Verhältnis um: sie verfährt dogmatisch; sie stellt die Summe der unanschaulichen Vorgänge unter dem Gesamtbegriff „Entwicklung des Fötus in der Mutter" thetisch dar. Eine solche Konstruktion eines unanschaulichen Vorgangs auf Grund eines anschaulichen nennt die moderne Methodenlehre eine Hypothese. Um Hypothesen, dem modernen Ausdruck nach, handelt es sich bei den Beschreibungen, die der Hippokratiker von den nicht beobachtbaren Entwicklungen gibt. Es trifft auf sie genau zu, was man von der Hypothese gesagt hat; sie sei nicht bloße Denkfigur oder bloßes Veranschaulichungsmittel, sondern sie wolle die Angabe einer Tatsache sein; wer eine Hypothese aufstelle, glaube die Reihe der wirklichen, beobachtbaren Tatsachen durch glückliches Erraten nicht minder wirklicher, aber nicht beobachtbarer verlängert zu haben. Das ist, in weitläufiger Umschreibung, ein augenscheinlich sehr berühmter Satz des Anaxagoras, auf den wir noch zurückkommen werden: *ὄψις τῶν ἀδήλων τὰ φαινόμενα.* (Vors. 46 B 21 a) *). Nicht minder deutlich ist zweitens, daß die Konstruktion des hypothesenähnlichen Gebildes letztlich auf der Vergleichung, besser gesagt auf der Analogie[12]) beruht. Es liegt ein Analogie-

*) (Sicht des Undeutlichen [= Nicht-Wahrnehmbaren] ist das Erscheinende.)

---

[12]) Vgl. dazu H. Höffding, Der Begriff der Analogie, Leipzig 1924. S. 42: Kein prinzipieller Unterschied zwischen Induktion und Analogie; Zusammenhang mit der Hypothesenbildung und Verifikation, implizite, ebenda. Vgl. ferner E. Mach, Die Ähnlichkeit und die Analogie als Leitmotiv der Forschung (Annalen der Naturphilosophie I, 1902, S. 5ff.) S. 11: Die Operation mit Hypothesen wird durch den Reiz der Ähnlichkeit und Analogie eingeleitet. S. 10: Ein noch wenig geläufiges Tatsachengebiet N offenbare in irgendeiner Weise seine Analogie zu einem uns geläufigeren, der unmittelbaren Anschauung zugänglicheren Gebiet M. Sofort fühlen wir uns angetrieben, in Gedanken . . . zu den bekannten Merkmalen oder Beziehungen der Merkmale von M die Homologen von N aufzusuchen. Ebd. Maxwell (zitiert bei Mach, S. 5): „unter einer physikalischen Analogie verstehe ich jene teilweise Ähnlichkeit zwischen den Gesetzen eines Erscheinungsgebietes mit jenen eines andern, welche bewirkt, daß jedes das andre illustriert". Setzt man für den spezifischen Terminus der modernen Naturwissenschaft „Gesetz" den Ausdruck „Vorgänge" ein, so hat man ziemlich genau den Standpunkt des Hippokratikers.

Die Wichtigkeit der Analogie als eines „Brückenpfeilers zu Schlüssen von größter schluß, ein Schluß vom Besonderen aufs Besondere vor: durch die Analogisierung wird ein vereinzelter und damit unverstehbarer Fall gleichsam in den ganzen Weltzusammenhang aufgenommen und dadurch verständlich gemacht. Drittens. Ein weiteres kommt hinzu; jede Hypothese fordert eine Verifikation. In der Darstellung unsres Hippokratikers bilden die bestätigenden Vergleichungen eine Art von unentwickelter Verifikation, durch ihren Rekurs auf Beobachtungen natürlicher, spontaner Vorgänge oder auf Experimente. Es wird dabei keine Rücksicht darauf genommen, daß sie ihm, wie wir annehmen durften, bereits gewissermaßen als konstruktives Hilfsmittel gedient haben. Hier, in der Art der Hypothesenverifikation, liegt ein Hauptunterschied gegenüber dem entwickelteren und mit wacherer Kritik geformten modernen Verfahren. In ihm werden aus der Hypothese selbst Folgerungen abgeleitet, die ohne Rest mit beobachtbaren Tatsachen übereinstimmen müssen; die Analogie ist sozusagen nur das Baugerüst. Das Gebäude muß stehen können, auch wenn das Gerüst abgebrochen ist. Beim Verfahren des Hippokratikers bildet das Gerüst gewissermaßen zugleich die Stütze des Baues. Doch ist mit diesen Erwägungen das Verfahren noch nicht völlig charakterisiert. Es spielt, wenn auch in unentwickeltem Zustande, noch eine weitere Denkoperation hinein, die, ein Hauptverfahren moderner Wissenschaft, schon bei den Peripatetikern als bewußt geübte Methode uns entgegentritt. Wir erinnern uns daran, daß zu wiederholten Malen nicht nur eine Analogie als Stütze dient, sondern ein zweiter, ein dritter Fall ähnlicher Art herangezogen wird. Dann wird energisch ein Schlußstrich gesetzt: (488,7) *πάντα ὅσα θερμαίνεται, πνεῦμα ἀφίησιν καὶ ἕτερον ψυχρὸν κατὰ τοῦτο ἀντισπᾷ* *) oder an einer andern Stelle (520, 11) *καὶ τἄλλα εἴτις θέλοι ἐνθυμηθῆναι, πάντα ὅσα πεπίεκται ὑπὸ σφῶν αὐτῶν θερμό-*

*) (alles, was erwärmt wird, entsendet Pneuma und zieht andres kaltes an seiner Statt an sich.)

Tragweite in allen Wissenschaften" hervorgehoben auch bei E. H. Hänßler, Zur Theorie der Analogie und des sogenannten Analogieschlusses, Dissert. Basel 1927, S. 7ff., der aber leider auf die Aufsuchung tatsächlich vorkommender Analogien vor der Entwicklung des logischen Begriffs verzichtet und damit das hippokratische Material beiseite gelassen hat (S. 9). Er streift im Fortgang seiner Untersuchung die biologische Analogie bei Aristoteles (S. 40) und sieht richtig, daß für diesen das fundamentum relationis die Übereinstimmung in der *δύναμις*, der Funktion ist: *π. ζ. μ.* 645b, 6. Vgl. auch J. B. Meyer, Aristoteles' Tierkunde, S. 335—340. Er stellt gleichfalls richtig fest, daß Aristoteles zwischen *ἀναλογία* und *ὁμοιότης* scheidet: *π. ζ. ἱ.* 497b, 33 und einen Zusammenhang zwischen Analogie und Metapher statuiert: *ποιητ.* 1457b, 16. Irrig dagegen scheint mir, was über die Bedeutung der Analogie bei Theophrast (S. 44, 45) von ihm vorgebracht wird. Darüber wird weiterhin noch zu sprechen sein.

τερα εὑρήσει ...... οὕτω δὲ καὶ τῆς γῆς τὸ κάτω ...... θερμόν ἐστι *). Es ist klar genug, was hier geschehen ist. Aus drei empirischen Beobachtungen wird gefolgert, daß alle Wirklichkeit sich dem daraus abgeleiteten allgemeinen Satze wird fügen müssen: also auch der hypothetisch angesetzte Vorgang. Wir haben somit einen allerdings unvollkommen fundierten Induktionsschluß vor uns. Denn, in der Tat, der Autor macht es sich mit seinen Induktionen sehr leicht. Aus zwei Versuchen wird der Schluß gezogen, daß *σχεδὸν ἅπαντα* sich so verhalte. Dann wird der angenommene Sachverhalt subsumiert und die Sache ist fertig. Hier hat, wie wir noch sehen werden, die Kritik der ihrer Methoden bewußt gewordenen Wissenschaft später eingesetzt: zum Nutzen von Sicherheit und Genauigkeit, zum Schaden wagemutiger und erfolgreicher Intuition und Divination.

Mir scheint, die sogenannte Vergleichung hat sich an Stelle eines illustrativen Schmuckstücks als ein leidlich kompliziertes, jedenfalls durchaus ernsthaftes Stück wissenschaftlicher Forschungsmethode erwiesen, das mannigfache Möglichkeiten in sich barg.

Aber ehe wir fragen, ob und wie diese Möglichkeiten entfaltet wurden, was aus dieser Methode wurde, haben wir zu untersuchen: wo kommt sie her? Denn daß der Hippokratiker ihr Schöpfer ist, kommt seiner ganzen geistigen Haltung nach aus inneren und äußeren Gründen nicht in Frage.

Daß der Autor der von ihm vertretenen Lehre nach in den Bereich des Empedokles und des Diogenes von Apollonia gehört, wurde oben bereits angedeutet. Für seine Pflanzenlehre ist es in der II. Beilage ausfürlicher dargelegt. Und bei Empedokles, dem genialsten Frager unter den Vorsokratikern, finden wir die Anfänge der analysierten Methode, soweit wir auf Grund unserer Überlieferung darüber noch Feststellungen machen können[13]). Eben bei Empedokles finden wir selbst in unsrer

*) (und wenn einer das andre erwägen will, so wird er finden, alles, was zusammengepreßt ist, ist durch eigene Wirkung wärmer; so ist auch die untere Schicht der Erde warm.)

[13]) Auf diese Berührung mit Empedokles hat auch Ilberg aufmerksam gemacht, a. a. O. S. 12. Ob man über ihn hinausgehen darf und Ursprung bei den Pythagoreern anzunehmen hat, bleibt auch nach den Untersuchungen von Senn, Über Herkunft und Stil der Beschreibungen von Experimenten im Corpus Hippocraticum, Sudhoffs Archiv 22, 1929, S. 217ff. ganz unsicher. Die Arbeit ist sehr dankenswert durch die Zusammenstellung der Experimente aus 20 Hippokratischen Schriften, wo sich dann sogleich zeigt, daß ihre Mehrzahl unsrer Schriftenreihe entstammt (S. 220). Am Schluß werden anfechtbare bzw. schwer verständliche Versuchsbeschreibungen zusammengestellt. Dazu werden gerechnet *π. ἀέρων* c. 8 (Verdunstung von Eis), *π. φύσιος παιδίου* c. 17 (Bleiteile, Sand und Erde in wassergefüllter Blase), *π. φυσ. παιδ.* c. 25 (Austritt von Wasser oder Pneuma aus einem mit Wasser gefüllten Schlauch),

dürftigen doxographischen Überlieferung charakteristischerweise alle Problemstellungen wieder, die in dem hippokratischen Schriftenkomplex begegnen. Auch den Empedokles hat das Rätsel des Werdens und Vergehens gelockt und seinen ätiologischen Scharfsinn beschäftigt. Die *γένεσις* des Lebewesens drängt ihm die Frage auf nach dem Ursprung des Geschlechtsunterschiedes, nach den Gründen der Ähnlichkeit des Kindes mit den Eltern, nach dem Problem der Vererbung; der Gliederung des Fötus und den dabei wirksamen Kräften sowie der dafür nötigen Zeit; er fragt nach der Möglichkeit der Ernährung im Mutterleibe, nach den Ursachen von Mißbildungen und Zwillingsbildungen. Er untersucht die Physiologie der Atmung und der Ernährung im allgemeinen; theoretisiert über die Physiologie und die Funktion der Sinnesorgane. Er dehnt seine

π. νούσων IV, 57 (fälschlich als „das Wasser auf dem Tische" bezeichnet, womit der Versuch nichts zu tun hat). Die Analyse dieser schwierigen Stellen, in denen Unklarheiten, Widersprüche, ja Unsinn (S. 251) nachgewiesen werden soll, soll ergeben, daß die Verfasser diese Versuche nicht selbst angestellt haben, sondern verständnislos aus einem älteren „Physikbuche" übernommen, verstümmelt und erweitert haben (254.) Ich kann diesen Interpretationen weder im einzelnen noch in ihren Ergebnissen (242, 244, 248, 255) zustimmen. Sie richtigzustellen würde hier zu weit führen und muß einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben. Daß es sich zum Teil um tralatizische Experimente handelt, glaube auch ich. An törichte Verfälschung durch die Hippokratiker glaube ich nicht. Ein „Physikbuch" im speziellen Sinne ist auch Ende des 5. Jahrhunderts nicht denkbar. Daß man mit ausschließlich stilistischen Gründen über „Echtheit und Unechtheit" (besser Originalität und Nichtoriginalität) der Vergleiche und Versuchsbeschreibungen nichts ausmachen kann, gibt Senn (268) selber zu. Mit unzureichenden Gründen wird der Zusammenhang der Hippokratischen Experimente mit solchen der vorsokratischen Philosophen (auch mit Empedokles) geleugnet (271). Weder der etwas abweichende Sprachgebrauch (zumal es sich entweder um Referate, nicht um originale Texte, oder um dichterische Formungen, wie bei Empedokles handelt) noch die Spärlichkeit der aus den Vorsokratikern überlieferten Experimente (bei dem trümmerhaften Zustand der Überlieferung) kann das beweisen. Daß die Pythagoreer experimentiert haben, ist sicher. Plato in der Politeia sagt es ausdrücklich (530d, 531a, 531b: Versuche mit Saiten). Ob sie im modernen Sinne physikalische und biologische Experimente angestellt haben, ist ungewiß. Jedenfalls ist unmittelbare Abhängigkeit der Hippokrateer von ihnen weder aus den inhaltlichen, übrigens ganz schwachen Berührungen, noch aus den formalen zu erschließen. Unter allen Umständen bildet der auch sonst vom Hippokratiker *π. φύσ. παιδ.* benutzte Empedokles für diesen das Mittelglied. Und vor allem: die von Empedokles und ihm benutzte Methode der „Analogie" ist immer noch etwas ganz andres als ein einzelnes Experiment, das nur in den Dienst dieser Methode gestellt wird. Irrig ist schließlich die Annahme (S. 280), das in *π. ἀρχ. ἰητρ.* c. 22 aufgestellte Prinzip *καταμανθάνειν δεῖ ταῦτα* (d. h. die im Inneren des Körpers sich abspielenden Vorgänge) *ἔξωθεν ἐκ τῶν φανερῶν*, sei vom Hippokratiker als erstem gefunden und proklamiert worden. Gerade dieses Prinzip stammt, wie oben belegt wird, von Anaxagoras, soviel wir sehen, und zeigt den engen Zusammenhang der Hippokratiker und ihrer Methode mit den vorsokratischen Philosophen. Es geht ja überhaupt nicht an, zwischen diesen und der „Pythagoreischen Physik" einen Trennungsstrich ziehen zu wollen.

Fragen auch auf die Tier- und Pflanzenwelt aus, genau wie der Hippokratiker, und sein Fragetrieb läßt ihn bezüglich der Pflanzen Probleme in einer Fülle aufwerfen, die über die Fragestellungen Theophrasts zum Teil weit hinausgehen und die, wieder charakteristischerweise, in dem botanischen Exkurs des Hippokratikers zu einem guten Teil wiederkehren. So wird er der große Anreger auch für die griechische Pflanzenkunde und es scheint, daß im Anschluß an ihn Menestor von Sybaris, der noch für Theophrast eine keineswegs obsolete Größe ist, die Botanik, im Sinne der Pflanzenphysiologie, begründet hat[14]). Empedokles schafft Erkenntnismethoden, mit deren Hilfe in das Gebiet des den Sinnen nicht Zugänglichen vorgedrungen werden kann. Er tut es im Sinne des von Anaxagoras formulierten Prinzips, das oben bereits zitiert wurde: *ὄψις τῶν ἀδήλων τὰ φαινόμενα.* (B 21a Diels)[15]). Der Satz war berühmt, wie sein Reflex bei den Hippokratikern beweist, von denen Diels zur Stelle den Passus aus de victu I, 12 vergleicht, der in seiner heraklitisierenden Sprache ihm das Komplement beifügt: *τοῖσι μὲν φανεροῖσι τὰ ἀφανέα γινώσκει καὶ τοῖσι ἀφανέσι τὰ φανερά* *). Er hätte ebenso die Schrift *π. ἀρχαίης ἰητρικῆς* zitieren können, wo c. 22 *καταμανθάνειν δεῖ ταῦτα ἔξωθεν ἐκ τῶν φανερῶν* dasselbe mit etwas andren Worten sagt. Noch Diokles hat den Satz wörtlich angeführt (fg. 31 Wellmann), wenn das Referat bei Aëtius plac. V 29, 2 ∼ Doxogr. 441, 16 getreu ist. Was heißt das? Wenn das Original in seiner gedrungenen Kürze vielleicht noch einen Zweifel an der

*) (durch das Offenbare erkennt er das Nicht-Offenbare, und durch das Nicht-Offenbare das Offenbare.)

[14]) Über ihn besonders W. Capelle, Philologus 69, 1910, 264ff., vornehmlich S. 277ff. Er hat richtig gesehen, daß die Fragmente, die bei Diels stehen, aus Theophrast nicht unerheblich vermehrt werden können. So h. pl. V, 3, 4. Er zeigt richtig, daß der ganze § 5 von C. Pl. I, 21 als Lehre des Menestor aufgenommen werden muß. Alle Argumente gehören dem M. So auch E. H. F. Meyer, Geschichte der Botanik I, 171. c. 22 widerlegt Theophrast die Argumente ausführlich. Th. übernahm von M. die Scheidung „kalter" und „warmer" Pflanzen. Capelle vermutet mit Recht, daß man in der Analyse Theophrasts für Menestor noch weiter kommen kann. Das wird an anderm Orte genauer gezeigt werden. Daß M. seine Betrachtung auch auf die *ζῷα* erstreckte, glaube ich nicht. Er hat sie als „Analogie" herangezogen. Theophrast mahnt dieserhalb zur Vorsicht, vgl. H. pl. I, 1, 4. Wenn Capelle glaubt, in M. den Begründer der Pflanzenphysiologie und -biologie sehen zu müssen, so gilt das nur, wenn er früher ist als Empedokles. Diese Annahme ruht nur auf der Erwägung, daß seine Meinung über die Phyllobolie der Pflanzen (Vors. I, 219, 44) primitiver sei als die des Empedokles. Das schlägt nicht durch gegenüber Theophrasts Äußerung C. Pl. I, 21, 5: *συνηκολούθηκε.*

[15]) Die Überlieferung des Satzes bei Sextus Emp. adv. log. I, 140 ist nicht einstimmig. Er ist nur in der Handschrift N überliefert. Vgl. Kochalsky, De Sexti adv. log. ll. quaest. critic., Diss. Marburg 1911, p. 39. Vgl. auch ebd. S. 10ff. Doch hat Kochalsky evident gezeigt, daß der Satz für den Zusammenhang unentbehrlich ist. Er ist in den anderen Handschriften durch Homöoteleuton ausgefallen.

Deutung Raum lassen könnte, so zeigen die Reflexe des Satzes evident, was gemeint ist und wie die Zeitgenossen verstanden haben. Mit Hilfe des Sichtbaren ist es möglich, einen Blick in den Bereich des nicht Sichtbaren, den Sinnesorganen nicht Zugänglichen zu tun: d. h. auf Grund eines Analogieschlusses. Die Methode stellt sich dar als eine Methode der Bildlichkeit bzw. der Anschaulichkeit und für uns ist Empedokles der erste, bei dem wir ihre Anwendung in voller Wirksamkeit sehen. Und zwar bereits so, daß er den zu vergleichenden Vorgang nicht nur der Beobachtung, sondern einem einfachen Versuche entnimmt. Es ist die Methode des Hippokratikers: der erste Keim des Versuchs, das Experiment zur Verifikation einer ätiologischen Hypothese zu benutzen. Man glaubt beim Empedokles noch zu spüren, wie diese Methode aus der Kraft des dichterischen Vergleichs herauswächst, aus dem *μεταφορικόν*, das Aristoteles ihm in besonderem Grade zuerkennt: fg. 59, 1485b 9 *'Εμπεδοκλῆς δεινὸς τὴν φράσιν γέγονε, μεταφορικὸς ὤν* *). Die Metapher ist für Aristoteles eines der wesentlichsten Merkmale dichterischen Ausdrucks: *π. ποιητικῆς* 22, 1459a 6. Als wissenschaftliches Erkenntnismittel lehnt er sie mit Hohn ab, gerade wo er den Satz des Empedokles, das Meer sei der *ἱδρὼς τῆς γῆς* kritisiert; Meteor. B 3, 357a 24: *ὁμοίως δὲ γελοῖον καὶ εἴτις εἰπὼν ἱδρῶτα τῆς γῆς εἶναι τὴν θάλατταν οἴεταί τι σαφὲς εἰρηκέναι, καθάπερ 'Ε. πρὸς ποίησιν μὲν γὰρ οὕτως εἰπὼν ἴσως εἴρηκεν ἱκανῶς (ἡ γὰρ μεταφορὰ ποιητικόν), πρὸς δὲ τὸ γνῶναι τὴν φύσιν οὐχ ἱκανῶς* **). Das hindert ihn übrigens nicht, an einer andern Stelle einer solchen Ineinssetzung durch Vergleich seine Zustimmung zu erteilen: *ᾠοτοκεῖ μακρὰ δένδρεα* (B 79 Diels) hatte Empedokles gesagt. Und Aristoteles fügt (de generat. A 23, 731a 1ff.) ausdrücklich hinzu *καὶ τοῦτο καλῶς λέγει 'Ε.* Auch Theophrast schließt sich dieser Anerkennung an: c. plant. I, 7, 1, freilich mit gedämpfteren Tönen: *οὐ κακῶς 'Ε. εἴρηκε ... παραπλησία γὰρ κτλ.* Das ist für seine vorsichtigere Haltung, wie sich noch zeigen wird, charakteristisch. Charakteristisch überhaupt die Zustimmung der beiden Peripatetiker, gerade bei diesem Vergleich der pflanzlichen Lebensvorgänge mit den tierischen: wir werden sehen, daß diese Spezialisierung kein Zufall ist. Für Empedokles aber steht dieser Vergleich auf keiner anderen Stufe als der des Meeres mit dem „Schweiße der Erde" oder die Identifikation des fg. 82 (Arist. Meteor. Δ 387b 4): *ταὐτὰ τρίχες καὶ φύλλα καὶ οἰωνῶν πτερὰ πυκνὰ / καὶ λεπίδες γίγνονται ἐπὶ στιβαροῖσι μέλεσσιν* ***).

*) (Empedokles ist ein eindrucksvoller Stilist, da er die Metapher liebt.)

**) (in gleicher Weise ist es lächerlich, wenn einer das Meer den Schweiß der Erde nennt und sich dann einbildet, etwas Deutliches gesagt zu haben, wie E. es macht. Im Hinblick auf die Dichtung ist das vielleicht befriedigend gesagt — denn die Metapher ist poetisch —, zur Naturerkenntnis ist es nicht befriedigend.)

***) (dasselbe sind Haare und Blätter und dichtes Gefieder der Vögel und Schuppen auf den wuchtigen Gliedern.)

Aristoteles würde zwischen diesen Organen eine Analogie statuiert und diese auf den Begriff der Funktion gegründet haben. Auch darüber wird noch zu sprechen sein. Für Empedokles bedeutet dies Vergleichen, Identifizieren, Analogisieren zweifellos mehr als eine poetische Metapher: er glaubt damit einen Blick in das Wesen der Sache zu tun und ihre besondre Art durch Einordnung mit Hilfe des Vergleichs deutlich zu machen. Erleichtert wird ihm dieses Ineinssetzen durch die Überzeugung von der durchgehenden Einheit aller Dinge, der Verwandelbarkeit von allem in alles, so daß es den gleichen Gesetzen des Werdens und Seins gehorcht. Eine Grundüberzeugung, die der Hippokratiker durchaus mit ihm teilt. Wie bei ihm erweitern sich die kurzen Vergleichungen, die doch etwas über das Wesen der Sache aussagen wollen, auch bei Empedokles zu ausgeführten Analogien. Die eine, die es mit dem Sehvorgang zu tun hat (fg. B 84 Diels), entnimmt den Vergleichsgegenstand der Erfahrung des täglichen Lebens und bleibt in der Form dem homerischen Gleichnis noch sehr nahe:

Wie wenn einer in der Winternacht einen Ausgang vorhat und dazu sich ein Licht rüstet und des brennenden Feuers Glanz entzündet, von allen Seiten vor dem Wind schirmende Laternen; sie zerteilen zwar der blasenden Winde Wehen, doch das Licht drang nach allen Seiten durch, weil es soviel feiner war, und leuchtete zum Firmament mit unermatteten Strahlen. So barg sich das urewige Feuer damals hinter der runden Pupille in Häute und dünne Gewänder eingeschlossen, die mit göttlich eingerichteten, gerade hindurchgehenden Poren durchbohrt waren. Diese hielten die Tiefe des ringsum erflossenen Wassers ab, doch das Feuer ließen sie hinaus, weil es soviel feiner war. Wir brauchen auf die Schwierigkeiten der Einzelinterpretation, die etwa Korrekturen an der Übersetzung von H. Diels nötig machen könnten, hier nicht einzugehen. Sie sind für unsern Zweck unerheblich. Wichtiger sind sie bei dem zweiten, noch weiter ausgeführten Vergleich, dem berühmten Klepsydravergleich (fg. B 100 Diels), der bis heute nach Inhalt und Aufbau nicht recht verstanden zu sein scheint. Bei Diels ist die Interpunktion, die das Ganze gliedert, falsch und störend; näher ist dem Richtigen Powell in der Classical Quarterly von 1923 gekommen. Eine eingehende Interpretation wird in der Beilage IV gegeben. Wichtig ist für uns an dieser Analogie des Blutumlaufs mit den Vorgängen beim Füllen und Entleeren eines „Hebers", denn das ist die *κλεψύδρα*, nicht eine Wasseruhr[16]), dreierlei: einmal der experimentelle Charakter des verglichenen Vorgangs, der aber doch aus einer Erscheinung des gewöhnlichen, täglichen Lebens gewonnen

[16]) Lehrreich ist dafür auch, was Pernice im Arch. Jahrbuch VIII, 1894, S. 180ff. über den *Σίφων* ausführt.

wird, zweitens das Herauswachsen aus dem plastischen Anschauungsbedürfnis des epischen Vergleichs, und drittens, daß Aufbau und Anordnung bei E. genau zu den ausgeführten Analogien beim Hippokratiker stimmt. Kein Zweifel: hier haben wir den Ursprung dieser „Analogien" in Händen.

Wir wenden uns nun in dieser Skizze mit einem Sprunge sogleich zur Naturwissenschaft der Peripatetiker. Es ist oben bereits von der scharfen Kritik des Aristoteles an der Bildlichkeit (der Metaphorik) des Empedokles die Rede gewesen: es ist lächerlich, wenn man sich einbildet, damit zur Erkenntnis der Sache etwas beigetragen zu haben. Für die Poesie ist damit etwas gewonnen, für die Wissenschaft nichts. *Πᾶν ἀσαφὲς τὸ κατὰ μεταφορὰν λεγόμενον* *) heißt es in der Topik ζ 2, 139b 34, 140a 5. Dennoch finden sich zuweilen, namentlich in den ätiologischen Tierschriften, durchgeführte Vergleiche; am ausführlichsten *π. ζ. μ.* III 5, 668a 13ff., wo das Verhältnis der Adern zum Fleisch dem Verhältnis der Gräben in einem künstlichen Bewässerungssystem zu dem in ihnen abgelagerten Schlamm verglichen wird: die großen Gräben bleiben bei der Bewässerung erhalten, die kleinen werden vom Schlamm erfüllt und verschwinden; so werden die kleinen Adern gänzlich vom Blute ausgefüllt, so daß sie nicht mehr wahrnehmbar sind: *ἐνεργείᾳ σάρκες γίνονται, δυνάμει δ' εἰσὶν οὐδὲν ἧσσον φλέβες* **). Das Ganze wird eingeführt mit einem *ἔοικε*: es ist ein reiner illustrativer Vergleich, dem ein Beweiszwang nicht innewohnen soll [17]).

Dagegen hat die „Analogie", wie Stenzel (in diesen Studien I, 45ff.) mit Recht bemerkt, im naturwissenschaftlichen Denken der Akademie und des Peripatos eine große Rolle gespielt: als wichtiges heuristisches Motiv [18]), zum Zwecke der Klassifikation [19])und der biologischen Einsicht. Unter den Beispielen, die Stenzel gibt, sind am wichtigsten Meteor. 387b 3: Knochen, Haare und alles derart rechne ich zum selben: sie haben keinen gemeinsamen Namen, aber *κατ' ἀναλογίαν* gehören sie zum selben. Erläutert wird das durch den Empedokleischen Vers, der oben zitiert wurde. Hier zeigt sich schon, wie der Begriff des *ταὐτόν* geschärft ist. Sie sind nicht schlechtweg *ταὐτά*, wie das vorlogische Denken des Empedokles es formuliert hatte: es gibt verschiedene Spezies des „Selben" und nur vom *ἀναλογίᾳ ταὐτόν* kann hier nach Aristoteles die Rede

*) (alles ist undeutlich, was metaphorisch ausgedrückt wird.)

**) (aktuell werden sie Fleisch, potentiell aber sind sie nichtsdestoweniger Adern.)

[17]) Über Bilder und Vergleiche bei Aristoteles: R. Eucken, Fleckeis Jb. 1869, 248 bietet kaum etwas hier Brauchbares, ist auch unvollständig.

[18]) Vgl. Stenzel 46a 5, der Beispiele gibt.

[19]) Als Prinzip der Gruppenteilung: *π. ζ. μ.* I, 4, 644a, 16. Vgl. auch J. B. Meyer, Aristoteles Tierkunde (1855), S. 336, 337, 339, 340.

sein. Dasselbe Beispiel wird in der Tiergeschichte ausführlich erläutert: h. a. I 1, 486b 19: einige Tiere haben Teile, die weder artmäßig (oder nach dem Aussehen) noch nach dem Plus oder Minus dieselben sind, die aber nach der Analogie dieselben sind; sie verhalten sich wie Knochen zur Gräte, wie Nagel zum Huf, wie Hand zur Klaue, wie Feder zur Schuppe: denn was beim Vogel die Feder, ist beim Fisch die Schuppe. Auch hier klingt noch der Satz des Empedokles an: aber die Blätter der Pflanze sind nicht mehr genannt und die Analogie umfaßt nur noch das Verhältnis von Tier zu Tier: die Gleichen im *γένος*. Worauf sich der physiologische Analogiebegriff des Aristoteles gründet, spricht *π. ζ. μ.* a 5, 646b 6 implizite dann ganz unmißverständlich aus: es gibt Teile, die vielen Tieren gemeinsam sind; teils einfach und schlechthin, wie viele Tiere Füße oder Federn oder Schuppen haben; teils analogisch gemeinsame: viele haben eine Lunge, manche zwar keine Lunge, aber was für die einen die Lunge ist, ist für jene der „Ersatz" der Lunge (*ὅτι τοῖς μὲν ὑπάρχει πλεύμων, τοῖς δὲ πλεύμων μὲν οὔ, ὃ δὲ τοῖς ἔχουσι πλεύμων, ἐκείνοις ἕτερον ἀντὶ*[20]) *τούτου*). Oder *τοῖς μὲν αἷμα, τοῖς δὲ τὸ ἀνάλογον, τὴν αὐτὴν ἔχον δύναμιν ἥνπερ τοῖς ἐναίμοις τὸ αἷμα* *).

So gründet sich der geläuterte (physiologische) Analogiebegriff des Aristoteles auf den Begriff der Funktion: physiologisch analog sind die Teile, die der gleichen Funktion dienen. Er scheidet sich damit vom *ὅμοιον*, dem Gestaltähnlichen. H. a. *β* 1, 497b 33: *τῷ δὲ στήθει τῷ τοῦ ἀνθρώπου πάντα τὰ ζῷα ἀνάλογον ἔχει τοῦτο τὸ μόριον, ἀλλ' οὐχ ὅμοιον· ὁ μὲν γὰρ πλατὺ τὸ στῆθος, τὰ δὲ ἄλλα στενόν* **). Die genaue Durcharbeitung dieser Begriffsgruppe des *ὅμοιον ἀνάλογον* usw. zeigt der Abschnitt aus der Topik I 17, 108a 7, den Stenzel a. a. O. 46a 5 besprochen hat. Zweifellos hat er recht, wenn er annimmt, daß diese Lehre vom Ähnlichen, von der Analogie und vom Paradeigma auch bei Speusipp breit ausgeführt war. Ebenso, wenn er die Entdeckung der Problematik dieser Begriffe auf Platon zurückführt. Darüber hat er in dem Artikel Speusippos der Realenzyklopädie eingehend und überzeugend gehandelt[21]). Vom Standpunkt dieser methodisch geläuterten und umgrenzten Begriffsphilosophie aus mußte freilich die größte Masse der Vorsokratischen und Hippokratischen Analogien ohne weiteres dem Verdikt der Unklarheit

*) (die einen haben Blut, die andern das Analogon, das die gleiche Funktion hat wie für die Blutführenden das Blut.)

**) (diesen Teil haben alle Tiere als Analogon zur Brust des Menschen, aber nicht gestaltgleich; denn seine Brust ist breit, die der andern eng.)

[20]) Über dieses *ἀντὶ* vgl. J. B. Meyer, Arist. Tierkunde, S. 338.

[21]) Nachzutragen ist dort der Hinweis auf die für die Anknüpfung des Speusippischen Werkes über die *Ὅμοια* an Platonische Denkmotive wichtigste Stelle: Phaidros 262 a/b.

und Unwissenschaftlichkeit verfallen. Höchstens als poetische Metaphern mit illustrativem Zweck konnten sie ein gewisses Daseinsrecht behaupten. Dazu kommt eine zweite, ebenso tief greifende Differenz.

Wie es, soviel ich sehe, in den biologischen Schriften des Aristoteles keine Beweisanalogie im Sinne des Hippokratikers gibt, so spielt vollends das Experiment in der peripatetischen Naturwissenschaft so gut wie keine Rolle. Zuweilen übernimmt Aristoteles den Hinweis auf einen Versuch einem Gewährsmann: so *π. ζ. γ.* II, 743a 8 (vgl. mit *μ.* II 358b 33ff. und *π. ζ. ἱ.* VIII 2,590a 22)[22]; aber bezeichnenderweise steht das „Fehlexperiment“ Pysik *Δ* 6, 213b 21 in einem doxographischen Abschnitt, der es mit den Argumenten für und wider die Existenz eines *κενόν* zu tun hat. Aristoteles selbst macht in seiner eigenen Argumentation davon keinen Gebrauch und erklärt 214b 10 ausdrücklich, es sei leicht mit diesen Gründen für die Existenz eines *κενόν* fertig zu werden. Der Herkunftsbereich auch dieses Experiments wird dadurch wenigstens wahrscheinlich, daß in derselben Übersicht sich auch ein Hinweis auf den Schlauch- und Klepsydraversuch findet (213a 24—26). An dieser Stelle klingt deutlich die Geringschätzung des Aristoteles allen solchen experimentellen Methoden gegenüber durch. Wer es so macht wie Anaxagoras und die, welche die gleiche Beweismethode anwenden, der irrt sich: *ἁμαρτάνοντες λέγουσιν, ὥσπερ Ἀναξαγόρας καὶ οἱ τοῦτον τὸν τρόπον ἐλέγχοντες· ἐπιδεικνύουσι γὰρ ὅτι ἔστι τι ὁ ἀήρ, στρεβλοῦντες τοὺς ἀσκοὺς καὶ δεικνύντες ὡς ἰσχυρὸς ὁ ἀὴρ καὶ ἐναπολαμβάνοντες ἐν ταῖς κλεψύδραις* *). Eine Variante des ersten Experiments erscheint bei unserm Hippokratiker, das zweite (wahrscheinlich geradezu) beim Empedokles. Man wird immer in den gleichen Kreis von Forschern: Empedokles, Anaxagoras, etwa noch Demokrit, geführt. Man glaubt in Worten wie *στρεβλοῦν* deutlich die Geringschätzung des philosophischen Denkers gegenüber solchem primitiv empiristischen Verfahren zu spüren. *Στρεβλοῦν* ist auch das Schlagwort, mit dem Plato das experimentelle Bemühen der Pythagoreer um klanglich-akustische Feststellungen ablehnt: man sieht, daß die Haltung des Aristoteles der gemeinsamen Atmosphäre der Platonischen Schule entspringt. Plato hat (rep. 530b ff.) über die Astronomie als Unterrichtsgegenstand gesprochen. Das Ziel dieses Unterrichts kann nur sein *χρήσιμον τὸ φύσει φρόνιμον ἐν τῇ ψυχῇ ἐξ ἀχρήστου ποιεῖν* **)

*) (sie reden irrig, wie Anaxagoras und die andern, die auf diese Weise den Beweis führen. Denn sie zeigen nur, daß die Luft ein Etwas ist, indem sie die Schläuche foltern und zeigen, daß die Luft Widerstand leistet, und indem sie sie in den Klepsydrai einsperren.)

**) (das von Natur Vernünftige in der Seele nützlich aus einem Unnützen zu machen.)

[22]) Dazu Diels, Hermes 40, 1905, 301—6; der es richtig auf die „Kinderzeit“ experimentaler Forschung (Demokrit? Anaxagoras?) zurückführt.

(530c). Hat es die Astronomie mit den Augen zu tun, so die ἐναρμόνιος φορὰ (530d) mit den Ohren. Sie ist, wie die Pythagoreer sagen, der Astronomie verschwistert, und damit haben sie recht. Nicht recht haben sie mit der Methode und mit der Zielsetzung, nach der sie diese Wissenschaft betreiben. (531 a ff.) Sie messen die hörbaren Töne und Klänge aneinander und machen sich nutzlose Mühe: ἀνήνυτα πονοῦσι. Glaukon schildert dann ironisch das empiristische Bemühen, bei dem es um das ὅμοιον (ταὐτόν) und ἕτερον geht. (Die Problematik des ὅμοιον, ταὐτόν und ἕτερον spielt also auch hier wieder hinein.) Die einen halten die Töne bereits für ὅμοια, wenn die andern noch ein σμικρότατον διάστημα zu bemerken meinen. Sokrates bestätigt diese ironische Polemik: σὺ μέν, ἦν δ' ἐγώ, τοὺς χρηστοὺς λέγεις, τοὺς ταῖς χορδαῖς πράγματα παρέχοντας καὶ βασανίζοντας, ἐπὶ τῶν κολλόπων στρεβλοῦντες· ἵνα δὲ μὴ μακροτέρα ἡ εἰκὼν γίγνηται πλήκτρῳ τε πληγῶν γιγνομένων καὶ κατηγορίας πέρι καὶ ἐξαρνήσεως καὶ ἀλαζονείας χορδῶν, παύομαι τῆς εἰκόνος κτλ. *).

Hier ist zu beachten einmal die dem Ganzen zugrunde liegende Situation, die aufs deutlichste ein Experimentieren mit den Saiten zum Zwecke der Prüfung von Tönen und Klängen zeigt. Zweitens der Ton, in dem Plato ironisch, verächtlich redet, indem er deutlich mit dem Bilde (εἰκών) eines peinlich verhörten Angeklagten spielt. Es ist also βασανίζειν, στρεβλοῦν im gerichtlichen Sinne der Folterung zu verstehen, die angewendet wird, um dem Angeklagten oder den Zeugen (Sklaven) Äußerungen zu erpressen. Das ganze Verfahren ist für Plato letztlich doch nur eine ἀλαζονεία, aber keine sachliche Aussage, die der Erkenntnis dient. Bei dieser Pointierung der bildlichen Rede darf man dann auch die Übereinstimmung des aristotelischen Ausdrucks στρεβλοῦν bei analoger Gelegenheit mit dieser Platostelle nicht für Zufall halten: er ist Ausdruck der gleichen geistigen Haltung gegenüber dem Erkenntnisbemühen vorsokratischer Naturwissenschaft[23]).

*) (du meinst die Trefflichen, die den Saiten zu schaffen machen und sie prüfen, indem sie sie auf den Wirbeln foltern; damit aber das Bild nicht zu sehr ausgedehnt werde, indem Schläge mit dem Schlägel geschehen und über die Anklage und das Ableugnen und die Renommisterei [den Schwindel] der Saiten, höre ich mit dem Bilde auf . . .)

---

[23]) In diesem Sinne ist auch die Formulierung bei H. Dingler, Das Experiment, sein Wesen und seine Geschichte, München 1928, einzuschränken. D. versucht S. 210ff zu klären, warum das Altertum und das Mittelalter das Experiment nicht gekannt haben (212: daß dies eine Übertreibung ist, wird bereits klar geworden sein). D. geht von dem Gegensatz δόξα und ἐπιστήμη bei den Griechen aus (214: auch dies eine zu weite Fassung eines richtigen Gedankens) und fährt fort: „so ist es verständlich, daß die Erfahrung, das Experiment überhaupt nicht unter den Begriff Wissenschaft bei ihnen fiel“. Es möge oft vorgekommen sein, daß ein Grieche experimentiert habe: das habe er dann zu praktischen Zwecken oder aus Neugier getan; es sei ihm nicht

Vielleicht muß hier auch eine schwierige Timaeusstelle (68d) angeschlossen werden, die uns ein weiteres polemisches Schlagwort Platos gegen den empirischen „Versuch“ liefert. Sie muß in ihrem Zusammenhang vorgelegt werden, zumal sie auch in dem großen Kommentar von Taylor noch nicht die genügende Beachtung gefunden zu haben scheint. Platon hat 67cff. die Entstehung der Farbennuancen aus Mischung erläutert. Die Einzelerklärung dieses überaus schwierigen Stücks und seine Würdigung im Zusammenhang der antiken Theorien findet man jetzt bei Taylor, A Commentary on Platos Timaeus, 1928, S. 479ff. Plato beschließt den Abschnitt 68d: bezüglich der anderen (Nuancen) ist auf Grund dieser Ausführungen ziemlich klar, welchen Mischungen man sie gleichen muß, um die Wahrscheinlichkeit zu wahren (*διασῴζειν τὸν εἰκότα μῦθον*). Er fährt dann fort: wenn aber einer bei seiner Untersuchung (*σκοπούμενος*) die Tatprobe hiervon nehmen wollte (*τούτων ἔργῳ βάσανον λαμβάνοι*), so dürfte er den Unterschied göttlicher und menschlicher Natur verkennen; denn Gott versteht es und ist imstande, das Viele in eines zu mischen und aus dem Einen in das Viele aufzulösen; von den Menschen aber ist keiner dazu imstande und wird nie dazu imstande sein. — Es ist kein Zweifel, daß Plato hier den Versuch (das Experiment) zur Bestätigung seiner Hypothese (des *εἰκὼς μῦθος*) ausdrücklich ablehnt. Das Wort *βάσανος* stimmt zur Pythagoreerstelle im Staate. Und die Ablehnung gründet sich hier auf das Verdikt, daß ein solches Verfahren die Grenzen göttlichen und menschlichen Wissens und Könnens ignoriere. Gilt das Experiment im Staate als unnütz und unergiebig — es unterliegt der Wahrnehmung und der Beurteilung durch die menschliche Subjektivität, kann also keine reinen Ergebnisse liefern —, so gilt es im Timaeus geradezu als unfromm, da es menschlichem Können göttliche Potenz vindiziert. Das stimmt zu der priesterlichen Haltung dieser größten Auseinandersetzung Platos mit der ionischen Wissenschaft, die man recht eigentlich einen platonisch umstilisierten und umorientierten kosmologischen Logos nennen könnte. —

Wenn also Aristoteles, in platonischer Tradition stehend, im Unterschied von ionisch-vorsokratischer Wissenschaft auf das Experiment kein Gewicht legt, es vielmehr mit deutlicher Geringschätzung behandelt,

eingefallen, das für Wissenschaft zu halten (214). Er erwähnt ebenda das Saitenexperiment der Pythagoreer. Die Griechen seien nicht zum Experiment gekommen, weil sie vollauf damit zu tun gehabt hätten, die logischen Formen fester und eindeutiger Begriffe herauszuarbeiten. Wieder sind hier richtige und tiefgreifende Gedanken zu weit gefaßt und damit ihrer historischen Gültigkeit beraubt. Was von den „Griechen“ ausgesagt wird, gilt von der Wissenschaft der attischen Philosophie, im wesentlichen der Akademie und des Peripatos. Die bereits geschaffene Methode des Experiments findet nicht den Anschluß an diese mathematisch und logisch fundierte, ethisch-politisch abgezweckte Wissenschaft.

noch weniger es als Stütze einer Beweisanalogie verwendet, wie Empedokles und der Hippokratiker, sondern eine solche Beweisanalogie überhaupt nicht zuläßt, so bedient er sich doch, wie wir sahen, des Herüber- und Hinübervergleichens gelegentlich zu illustrativen Zwecken. Theophrasts Stellung ist demgegenüber noch vorsichtiger und dezidierter. Er übt eine allgemeine und bewußte Skepsis mit Bezug auf solches Vergleichen, auch zwischen Pflanze und Tier. Gleich im Anfang seiner Pflanzengeschichte, wo er seine methodischen Prinzipien formuliert (die genauere Interpretation, die dieses überaus schwierige und noch unverstandene Kapitel nötig hat, wird an anderer Stelle gegeben werden), äußert er sich dahin (H. Pl. I 1, 4): *ὅσα γὰρ μὴ οἷόν τε ἀφομοιοῦν, περίεργον τὸ γλίχεσθαι πάντως, ἵνα μὴ καὶ τὴν οἰκείαν ἀποβάλλωμεν θεωρίαν* *). Er läßt zwar trotzdem, zumal in der ätiologischen Schrift, Analogien zu; höchstens jedoch zwischen Pflanze und Tier, und als Beweismittel, soviel ich sehe, nur zwischen Pflanze und Pflanze [24]). Er trennt, wie Aristoteles, auch terminologisch *ἀναλογία* und *ὁμοιότης*: die erste hat methodisches Gewicht, die andre mehr ornamentalen Charakter.

Ein gutes Beispiel für die Analogie in diesem strengen Sinne und ihre beweisende Kraft zur Stützung einer hypothetisch gegebenen Erklärung steht c. plant. II 19, 3: es handelt sich um die Erklärung des Phänomens, daß Wasserpflanzen ihre Blüten schließen und unter den Wasserspiegel untertauchen, wenn die Nacht anbricht. Beide Erscheinungen werden auf die Zunahme bzw. das Nachlassen der Wärme unter dem Einfluß der wechselnden Sonnenbestrahlung zurückgeführt. Als Analogie wird die Tatsache zitiert, daß auch bei Tage die Blüten sich mit dem Stande der Sonne drehen und sich ihr zuneigen und daß man gleiches auch bei den Blättern wahrnehmen könne. Dann kommt der Schlußsatz: *τοῦτο μὲν οὖν ὡς πίστεως χάριν εἰρήσθω πρὸς τὸ πρότερον ῥηθέν* **). Hier liegt also eine Beweisanalogie im strengen Sinne vor: beide Glieder gehören demselben *γένος*, „Pflanze", an.

Das Gegenbild liefert ein Beispiel für die *ὁμοιότης*, dessen Schicksal nachzusinnen lohnt. Zweimal nämlich ist Theophrast haarscharf an einer der folgenreichsten und wichtigsten Entdeckungen der Pflanzenkunde gewesen, die dem Altertum, soviel wir wissen, dann für immer verschlossen geblieben ist: es ist die Entdeckung der Zweigeschlechtigkeit, bzw. der

*) (was zu vergleichen unmöglich ist, das um jeden Preis vergleichen zu wollen, ist ein übertriebenes [und schädliches] Beginnen, weil es die Gefahr einschließt, daß man am Ende die dem Gegenstand angemessene Betrachtungsweise verliert.)

**) (dies soll also als Erweis gesagt sein, im Hinblick auf das früher Gesagte.)

[24]) Vgl. was An. pr. 69a, 13 über das *παράδειγμα* gesagt wird: *οὔτε ὡς μέρος πρὸς ὅλον οὔτε ὡς ὅλον πρὸς μέρος, ἀλλ' ὡς μέρος πρὸς μέρος, ὅταν ἄμφω μὲν ᾖ ὑπὸ ταὐτό, γνώριμον δὲ θάτερον.*

Zweihäusigkeit gewisser Pflanzen und die Einsicht in das Wesen des pflanzlichen Befruchtungsvorganges. C. Pl. II, 9 spricht Theophrast über den sogenannten *ἐρινασμός*, die caprificatio der Feigen, den er mit dem *ὀλυνθάζειν* der Palmen vergleicht. Er schließt mit dem weittragenden Gedanken: *φαίνεται δὲ τρόπον τινὰ ὅμοιον τούτῳ καὶ τὸ ἐπὶ τῶν ἰχθύων συμβαῖνον, ὅταν ὁ ἄρρην ἐπιρραίνῃ τοῖς ᾠοῖς ἀποτικτομένοις τὸν θορόν· ἀλλὰ τὰς μὲν ὁμοιότητας καὶ ἐκ τῶν ἀπηρτημένων ἐστὶ λαμβάνειν* ...*). Also: solche „Ähnlichkeiten" kann man auch „entfernten" Dingen oder Gebieten entnehmen: ein Beweis für die Richtigkeit einer ätiologischen Deutung kann daraus nicht gewonnen werden. Nicht einmal der Vergleich des Pflanzenlebens mit dem Tierleben kann etwas andres als eine solche „Ähnlichkeit" liefern, auf die man nichts bauen darf. Noch ein zweites Mal stand er auf der Schwelle der wichtigen Entdeckung: wieder unterließ er es, aus methodischer Vorsicht, den letzten Schritt zu tun. Theophrast spricht wieder von dem künstlichen Bestäubungsvorgang, den man bei den Palmen herbeizuführen pflegte, und er vergleicht ihn zum zweiten Male mit der Kaprifikation der Feigen: C. Pl. III, 18: *τὸ δὲ μὴ ἐπιμένειν ἐπὶ τῷ θήλει φοίνικι τὸν καρπόν, ἂν μὴ τὸ τοῦ ἄρρενος ἄνθος κατασείωσι ἅμα τῷ κονιορτῷ (καὶ γὰρ τοῦτο λέγουσί τινες) ἴδιον μὲν παρὰ τὰ ἄλλα, παρόμοιον δὲ τῷ ἐρινασμῷ τῶν συκῶν***)· Theophrast hält es für erwägenswert, aus diesen beiden beobachteten Tatsachen einen Induktionsschluß zu ziehen (*ἐπαγάγοι*), daß nämlich das weibliche Exemplar für sich allein nicht imstande sei, vollständige Früchte hervorzubringen (vielmehr, wie man weiter schließen kann, dazu der Befruchtung bedürfe): *ἐξ ὧν πρὸς τὸ τελειογονεῖν μὴ αὔταρκες εἶναι τὸ θῆλυ καὶ μάλιστα ἄντις ἐπαγάγοι.* Aber er macht sich selbst sofort den methodischen Einwand: dann müßte das nicht in ein oder zwei Fällen, sondern bei allen oder den meisten Exemplaren der Gattung Pflanze der Fall sein: „denn so kommen wir zu einem Urteil über die Natur der Gattung": *πλὴν ἐχρῆν τοῦτο μὴ ἐφ' ἑνὸς ἢ δυοῖν, ἀλλ' ἐπὶ πάντων ἢ τῶν πλείστων εἶναι· τὴν γὰρ φύσιν οὕτω κρίνομεν τοῦ γένους.* Wenn man die gezügelte Vorsicht, die Th. hier zeigt, mit dem kühnen Wagemut vergleicht, mit dem der Hippokratiker seine Induktionsschlüsse aus einigen wenigen Gliedern aufbaute, so ermißt man den methodischen Fortschritt, den das wissenschaftliche Denken der Griechen durch die

*) (dem scheint in gewisser Weise ähnlich zu sein, was bei den Fischen geschieht, wenn der männliche Fisch seinen Samen über die abgelegten Eier spritzt; aber Ähnlichkeiten kann man auch aus Fernliegendem nehmen.)

**) (daß aber auf der weiblichen Palme die Frucht nicht bleibt, wenn man nicht die Blüte des männlichen Exemplars darüber schüttelt zusammen mit dem Staube [denn auch dieses geben einige an], diese Tatsache ist isoliert gegenüber den andern Pflanzen, aber sie ist ganz ähnlich der Kaprifikation der Feigen.)

Arbeit der attischen Philosophie, des Sokrates, der Akademie, des Peripatos gemacht hatte. Aber man ermißt auch zugleich, wie durch diese methodische Zucht dem Fluge der Divination Fesseln angelegt worden sind. Th. stand unmittelbar vor einer folgenreichen Entdeckung; er wagt nicht die letzte Folgerung zu ziehen, weil die Daten für eine Induktion nicht hinreichen. Aber sein Forschungstrieb ist nicht mehr rege genug, nun die fehlenden Beobachtungen sich um jeden Preis zu verschaffen.

Hier schließt sich der Kreis unserer Betrachtung. Es verlohnt, am Schluß einen Rückblick auf die zweite These zu tun, die am Anfang aufgestellt wurde: daß nämlich in dem Schicksal dieser einzelnen Denk-, Forschungs- und Darstellungsmethode sich etwas von der geistigen Geschichte Griechenlands in den Jahrhunderten 5 und 4 spiegele. Man darf vielleicht sogar sagen, der Rückblick ergebe einen Aspekt, der in gewissem Sinne tragisch genannt werden kann. Die Beweisanalogie in dem analysierten Sinne ist eine Schöpfung der Vorsokratik, die die ätiologische Forschung im ganzen Umkreise der Natur mit leidenschaftlichem Drange des Fragens und Wissenwollens aufgenommen hat. Sie ist, soviel wir sehen, geschaffen und in bereits festen Formen angewendet worden von dem kühnsten und eindringlichsten Frager der Zeit, von Empedokles. Sie ist aufgenommen worden von den von ihm ausstrahlenden Richtungen naturwissenschaftlicher und philosophischer Forschung: in der Botanik, in der Medizin, die ihre Dokumente in gewissen Gruppen der hippokratischen Sammlung hinterlassen hat; aufgenommen auch von Anaxagoras und von Diogenes von Apollonia. Sie schließt keimhaft in sich, noch ungeschieden und ohne sich der Möglichkeiten wissenschaftlich bewußt zu sein, die Methoden der Hypothesenbildung und ihrer Verifikation, des Experimentes und der Induktion. Sie ist noch ungeklärt und überkühn in der Methodik ihrer Anwendung. Sie stößt von schmaler, häufig allzu schmaler Basis aus vor in die Region des noch Unerforschten. Aber sie ist trotz ihrer Mängel oder gerade wegen ihrer Mängel ein Signum des verwegenen Forschergeistes der vorsokratischen Wissenschaft, wohl geeignet, Pforten zu unbekannten Bereichen aufzureißen. Sie ist ein nicht entfalteter, absterbender Trieb, als Aristoteles im Alter, als der maestro di color che sanno, den gigantischen Versuch macht, die Erforschung der Natur, die die Ionier in Angriff genommen hatten, mit der Begriffs- und Wertphilosophie Attikas zu einer neuen mächtigen Einheit zusammenzuschließen. Er hat den großen Wurf nicht mehr vollenden können. Seines Schülers Theophrast historische Stellung und ihr beinahe tragischer Charakter zeigt sich wie in einem Symbol in dem methodengebundenen Zweifel, der ihn zweimal von folgenweiter Entdeckung zurückscheucht, der er sich bis auf Haaresbreite genähert hatte und die ein Denker des 5. Jahrhunderts im Sturm errungen hätte, wenn er Theophrasts Material gehabt hätte. Dazwischen liegt der ungeheure Durchbruch ins Gebiet des Erkenntniskritischen, Logischen, Ethischen und Politischen, der, längst vorbereitet und im Kern des attischen Wesens vorgebildet, durch die entscheidenden Namen Sophistik — Sokrates — Plato bezeichnet wird. Wir pflegen in der Regel nur zu sehen, was dieser Durchbruch, zuletzt ins Metaphysische, für die Menschheit gewonnen hat: die Entdeckung eines neuen geistigen Bereiches, einer Heimat der Seele jenseits aller Wirklichkeit. Hier vielleicht sahen wir an einem winzigen Einzelfall, der etwa doch eine Art von symbolischer Bedeutung beanspruchen darf, was er, wohl nach einem Naturgesetz menschlichen Geisteslebens, an triebkräftigen Keimen anderer Art, wenn nicht geknickt, so doch am Wachstum und am vollen Entfalten verhindert hat. Platos Werk bedeutet mitsamt seinen Folgen doch die geistige und seelische Entscheidung in Hellas. Die neue Naturvergottung, die er im Timaeus der ionischen Wissenschaft entgegenwirft und die das Verdikt gegen den *ἔργῳ βάσανος* in sich schließt, hat bis in die Endzeit des Griechentums mit immer erneuter Gewalt gewirkt. Die völlige Verdrängung Demokrits aus dem geistigen Blickfelde und dementsprechend aus der Überlieferung ist vielleicht das stärkste Symptom dieses Zustandes. Auch zu solchen Betrachtungen mag diese schlichte Untersuchung wohl anregen können.

Beilage I.

Einheit der Schriftenreihe. Sprache — Stil.

a) Die Einheit der Schriftenreihe. Zuletzt darüber Ilberg SBSA 1925, S. 9, der auch eine kurze Analyse des Aufbaues gibt. Die Einordnung der Schrift (S. 10 oben) unter Hinweis auf Jaegers Entstehungsgeschichte der Metaphysik ist mir zweifelhaft. Dazu vgl. im folgenden S. 161.

Die Einheit wurde zuerst behauptet von Littré VII, S. 542. Zustimmend ohne Vorbehalt hat sich geäußert Brandt, Griechische Temporalpartikeln, Straßburg, Diss. 1908. Die Einheit von *π. γονῆς* und *π. φύσιος παιδίου* stand für Erotian fest. Nachmanson, Erotianstudien, Upsala 1917, S. 313. Die Zugehörigkeit von *π. νούσων* IV wurde bezweifelt von Fredrich, Hippokratische Untersuchungen, S. 48. Er meinte, *π. νούσων* IV sei vor dem anderen Stück geschrieben. Erotian las es im Zusammenhang mit den andern Büchern *π. νούσων*: Nachmanson a. a. O. Beweisend ist für die kompositionelle Zusammengehörigkeit das 1. Kapitel von *π. νούσων* IV (32, bei Littré VII, 542). Seine erste Hälfte ist ein zusammenfassender Rückblick auf die bis dahin geführte Untersuchung; es weist zurück 542, 3—4 auf 470, 1—3, 542, 4—6 auf 486, 1—3, 542, 6—11 auf 474, 5—10, also in umgekehrter Folge; vgl. jetzt Ilberg

a. a. O. S. 18. Die Ausdrücke *ἐπάγη* und *ἐγένετο* in ihrer aoristischen Fassung sind gar nicht zu verstehen, wenn man das Kapitel nicht in engstem Zusammenhange mit den vorangehenden Teilen denkt. Das Perfektum *δεδήλωται* (474, 9) darf man demgegenüber nicht pressen, wie Fredrich tut. Der markierte Abschluß (542, 1) *οὗτος ὁ λόγος ὧδε εἰρημένος τέλος ἔχει* widerspricht nicht. Vgl. innerhalb des einheitlichen großen *λόγος*, als den sich *π. νούσων* IV bis auf c. 54—57 darstellt, den Teilabschluß 578, 4—8 mit der Formel: *οὕτω δέ μοι ὁ λόγος οὗτος πᾶς ἐκκεκορύφωται*. D. h. die Teile eines *λόγος* heißen wiederum *λόγοι*. Die drei „Schriften“ bilden also eine beabsichtigte Einheit und müssen als ein Ganzes gewürdigt werden. Die in manchem nahestehenden *γυναικεῖα* können nicht demselben Verfasser zugeschrieben werden; gewichtige sprachliche Gründe stehen dem entgegen: vgl. Symbola Hippocratea, Diss. Berl. 1914, S. 51 ff.; auch Ilberg a. a. O. S. 19 ff.

b) Die Sprache nimmt eine Sonderstellung unter den anderen Schriften des hippokratischen Corpus ein. Diels hat wiederholt darauf hingewiesen: Hermes 53, 1918, S. 85 (Syntax der Kondizionalsätze) und S. B. A. 1910, 1154 (Gebrauch des Duals). Andres läßt sich hinzufügen, und zwar nicht nur Dinge, die den Wortgebrauch angehen, sondern ebenso Beobachtungen zum Stil (auch zur Untersuchungsmethode). Ich stelle nur einiges kurz zusammen 1. Wortgebrauch. 580, 18 *ῥακούμενον* (?). 580, 1 *ἐμπολήσει*. 562, 18 *τὰ πονέοντα τὸν ἄνθρωπον*. So noch 492, 23; 574, 10; 592, 8, 18, 19, 22; 594, 8. Dazu der übereinstimmende Gebrauch der *γυναικεῖα* I, 621; 625; 658; 665. Vgl. Lobeck, Aias³, 320 a 2. 472, 6 *ἀμαλδύνεται* 498, 13 *ἀμαλδύνει*. *γυναικ.* I, 8; II, 201. Vgl. Demokrit Vorsokr.⁴, II B 202. 498, 8 *αὐτοστομοῦται* (?) (*καὶ τὰ νεῦρα ἑλίσσεται* (c ξ) *ἀμφὶ τὰς φύσιας* (<*ἐπι*>*φύσιας* ci) *τῶν ἄρθρων καὶ αὐτοστομοῦται*. Bedeutung unklar; das Wort fehlt bei Liddell-Scott). 486, 12 *ῥαγή*, vgl. Galen XIX, 134 K, wo gedruckt ist *ῥηγῆσι: σχίσμασι, ῥήγμασι*; dazu Artaeus VII, 13 (160, 24 Hude) und Hesych s. v. *ῥαγά· ἀκμή, βία, ὁρμή* (unsicher). Allein schon beweisend für gleichen Ursprung der Schrift: *ἱστόριον* = *σημεῖον, τεκμήριον*, oft. Daneben das Verbum *ἱστορεῖν* = argumento esse 504, 23 und 578, 7, durch die Überlieferung der besten Handschriften gesichert. Das Wort ist sonst in dieser Bedeutung gar nicht belegt. Die Stelle *παραγγελίαι* 12 (IX, 268 L) ist nicht zu verwerten; vgl. Aly de Aeschyli copia verborum 31. Aus unsrer Schrift hat der Imitator Ep. Hippocr. 19b (Diels, Hermes 53, 1918, S. 66, 11—17) das seltene Wort entlehnt. Hesych s. v. *ἱστορεῖ* und *ἱστόρια* wird letztlich aus Hippokratesglossaren stammen und auf unsre Stellen gehen. Poetische Worte z. B. 530, 22 *ἀκιδνοτέρην δύναμιν*, vgl. *γυναικ.* I, 12; 52; Praecept. 8. 564, 24 *ἄκικυς*: der Nachahmer hat auch dies übernommen, vgl. Hermes 53, 1918, 70, 30. 470, 19 *διὰ τῶν ὀρχίων μεσάτων*. 476, 13 *ῥηΐτερος*; dies wieder *γυναικ.* I, 10 (Littré VIII). 592, 4 ἰσώτατον scheint sonst nicht belegt. Der Autor versucht also durch archaische und poetische Worte (auch Konstruktionen) seine Sprache auf eine höhere Stufe zu heben. Über poetische Worte bei Protagoras, Thrasymachos u. a. vgl. Norden, Kunstprosa 41, 43, 52ff., 73ff.

c) Stil ein ausgesprochener ich-Stil persönlicher Haltung. Er entspricht darin der Sitte ionischer ἱστορίη überhaupt. Zu eng Pohlenz, Hermes 53 (1918), 398. Bei Herodot sind die Belege besonders zahlreich im II. Buch, das ein sehr getreues Bild echt ionischer ἱστορίης ἀπόδεξις gibt. Die 1. Singul. überwiegt. Jedes Kapitel beinahe gibt Beispiele. Die 1. Pluralis kommt daneben (viel seltener) vor. Bei Hekataios wird das nicht anders gewesen sein. Beleg das bekannte Fragment aus Demetrios π. ἑρμην. 12 (F 1 Jacoby) (im Anfang scheint orientalische Phraseologie durchzuschimmern, vgl. den Anfang des Dareiosbriefes an Gadatas und die Imitation bei Thulydides I (Brief des Xerxes an Pausanias). Der Ich-Stil herrscht auch in der Hippokratischen Sammlung, mit einigem Schwanken, vor. Vergleichsweise zurückhaltend ist der Autor π. ἀέρων und π. ἱρῆς νούσου. Viel freigebiger und selbstbewußter ist der Verf. unsres Schriftenkomplexes. Ganz anders ist das Verfahren des Aristoteles und seiner Schule. Die eigene Person tritt völlig zurück. Für die Formulierung von Anfängen, Verweisungen, Abschlüssen wird ein eigener Stil gebildet, den man den passivischen nennen könnte. So Aristoteles sonst und namentlich in den biologischen Schriften (vgl. jetzt auch W. Jaeger, S. B. A. 1928, 403, 404). Nur in einer einzigen Verwendungsart kommt die 1. Sg. vor; da, wo der Autor von sich aus eine nähere Erklärung hinzufügt; z. B. de part. anim. 641a λέγω δ' οἷον ὀφθαλμός (653b). Damit stimmt der Gebrauch des Polybios überein: Knodel, Die Urbanitätsausdrücke des Polybios, Tübingen 1908, S. 45. Theophrast geht in dieser spröden Zurückhaltung, die vortrefflich zu dem sachlich vornehmen Ton des Peripatos paßt (vgl. auch Theophr. charact. XXIV, 13 und Knodel a. a. O. S. 41ff.) noch weiter als Aristoteles. Gebrauch der 1. Singul. ist in diesem Kreise Kennzeichen der Unechtheit einer Schrift: vgl. Bonitz, Index Aristot. 589b 21ff. Die Späteren haben sich solche Zurückhaltung nicht auferlegt; z. B. spricht Archimedes in seinem Psammites ganz ungeniert in der 1. Person. Dagegen tritt die 1. Plur. auffallend zurück. Passivische Wendungen scheinen zu fehlen.

d) Rhetorische Haltung. Dahin wird man die einleitende Sentenz am Beginn der Schrift zu rechnen haben: νόμος μὲν πάντα κρατύνει. Sie wird durch sophistische Formulierungen angeregt sein. Vgl. Aristot. rhetor. III, 3 und Vahlen, der Rhetor Alkidamas, Philol. Schriften I, 119ff. Die Geschichte des Satzes von Pindar an behandelt H. E. Stier, *Νόμος βασιλεύς*, Berl. Diss. 1927. Vor allem S. 17ff., 22ff. Zur Interpretation des Satzes an unsrer Stelle Ilberg, SSA 1925, 10, der ihn wahrscheinlich richtig faßt, „das Naturgesetz beherrscht alles". Diese Deutung paßt sehr wohl zu dem von Stier für das VI./V. Jahrhundert statuierten Begriffsinhalt. Vgl. auch K. Reinhardt, Parmenides, S. 83. O. Schröder, Philol. 74, 199ff. 2. Rhetorische Figuren. Man kann nicht sagen, daß die rhetorische Stilisierung die Schrift beherrschte. Dazu sind im Verhältnis zum Umfang des Ganzen die Beispiele zu wenige und die vorhandenen sind nicht immer sicher, so daß sich nicht jedesmal Absicht des Autors annehmen läßt. Manche verschwinden auch, wenn man die Lesart der besten Überlieferung herstellt: 500, 3. *ἢ ὀλίγῳ μείονι ἢ ὀλίγῳ πλείονι* (Littré im Text); *ἢ ὀλίγῳ πλεῖον ἢ ὀλίγῳ ἔλασσον* c: *ἢ ὀλίγῳ ἐλάσσω ἢ ὀλίγῳ πλεῖον* ξ. 502, 5, 542, 12, 544, 1, 544, 14, 546, 4/5 zeigen, daß dies allein der Sprache des Autors entspricht. Es ist also nach c herzustellen *ἢ ὀλίγῳ πλείον⟨ι⟩ ἢ ὀλίγῳ ἐλάσσον⟨ι⟩*. Dennoch bleiben zweifellose Fälle genug übrig: 508, 19 *ἡβῶσι* ∾ *γενειῶσι* 518, 17 *ῥιζοῦται* — *φυλλοῦται* 522, 13 *πέρι πάρα* (so richtig c ξ) vgl. 540, 7/8. 478, 18/19 *ἐθηλυτόκησαν* — *ἐκουροτόκησαν*. 482, 2 *κουρογονίη* — *θηλυγονίη*. 486, 13 *ξύλων* — *φύλλων βρωτῶν* — *ποτῶν* (544, 1; 560, 8; 564, 20/21). Dreigliedrig 470, 6 *ὑποτριβομένοισι* — *θερμαινομένοισι* — *πληρουμένοισι*. 470, 9 *θερμαίνεται* — *διαχεῖται* — *κλονεῖται*. Spiel mit dem Wort 528, 4 *δένδρεα* — *δενδρέων* — *δένδρεα* — *ἐν τοῖσι δένδρεσι* Paralleler Bau von Sätzen: 526, 9; ähnlich 482, 21; 544, 26; 546, 3—5. Daneben Sätze von altertümlicher Umständlichkeit 538, 8ff. und eine schöne Probe von richtiger *λέξις εἰρομένη*. Charakteristischerweise in der Erzählung des einzigen Praxisfalls, der in der Schrift vorkommt. 490, 3ff. mit unvermitteltem Übergang in direkte Rede (6/7), der partizipialen Aufnahme (5 *ἠκηκόει* ∾ 7 *ταῦτα ἀκούσασα*) und neunmaligem *καὶ* zur Anknüpfung im letzten Satz. Vgl. aber auch 552, 1—4 in der Beschreibung eines medizinischen Vorgangs. Der stilistische Schwebezustand ist charakteristisch für die Stellung des Buches zwischen der lebendigen unverkünstelten Prosa, die ein Teil der Hippokratischen Sammlung aufweist, und dem rhetorischen Stil, den ein andrer Teil affektiert.

e) Gliederungsmittel. Ilberg a. a. O. S. 11, hat richtig bemerkt, daß man in der Schrift eine etwas pedantisch anmutende Hodegese von Punkt zu Punkt finde, wie sie aus den Reden gleichzeitiger Sophisten bekannt sei. Man wird aber dann kaum beistimmen können, wenn behauptet wird, das lebendige Wort werde durch diesen schulmäßigen Schematismus kaum beeinträchtigt und wenn sogar die ausgedehnten Abschweifungen „zuweilen den Eindruck mündlichen Sichgehenlassens erhöhen" sollen. Es wird vielmehr im folgenden und noch weiterhin festzustellen sein, daß gerade in dieser „Schrift" (und es ist eine „Schrift" im eigentlichen Sinne) von einem mündlichen Sichgehenlassen nicht die Rede sein kann, daß vielmehr dem Autor eine Neigung zum papierenen Schematismus eignet, die sich an den verschiedensten Symptomen konstatieren läßt. Hier handelt es sich zunächst um die Neigung des Verfassers, Formeln des Eingangs, des Abschlusses usw. in einer merkwürdig stereotypen Gestalt zu geben; mit solchen Formeln wie mit feststehenden Größen zu operieren, sie zu kombinieren, sie an wichtigen Stellen zu größeren Komplexen aufzuschwellen, immer aber dem Leser bzw. Hörer durch ihre Anwendung einzuschärfen, daß er an einem Abschluß, einem Wendepunkte der Ausführung, an einem neuen Einsatz angekommen ist, eine Pedanterie, die in der gleichzeitigen sophistischen Prosa ebenfalls zu finden ist und für die später Beispiele gegeben werden sollen; die aber hier um so stärker auffällt, als eine große Fülle solcher Anhaltspunkte über einen verhältnismäßig kleinen Raum verteilt ist. Diese Starrheit gehört zur geistigen Haltung des Autors überhaupt. Wir werden später zu zeigen haben, daß er mit gleicher Festigkeit sich Inhalt und Form seiner Untersuchungsmethode ausgebildet hat.

Am klarsten wird dieser Befund, der mit Freiheit mündlicher Äußerung nichts zu tun hat, durch ein einfaches Vorlegen des Materials: die festen Formeln, ihre Kombination und Ausweitung tritt so am deutlichsten in Erscheinung.

Überleitungs- und Abschlußformeln.

I. Ankündigung.

a) In der einfachsten, noch unpersönlichen Form:
ἔχει δὲ οὕτω καὶ τόδε· (mit einigen wenigen Variationen). 478, 1; 478, 5; 482, 3; 510, 14; 514, 1; 514, 6; 544, 12; 548, 23; 550, 19; 560, 7; 574, 3; 600, 7; 606, 5, 15.

b) *ἐρέω* entweder mit Obj. Acc.: 492, 1 *ἐρέω δὲ καὶ ἄλλην διάγνωσιν* (530, 3, 582, 11).

oder mit abhängigem Satz:
562, 10 *ὅκως δὲ . . . ἐρέω.*
518, 19 *ὑπ' ἀνάγκης τοιῆσδε, ἣν ἐρέω.*
490, 12 *ὁκοῖον δὲ ἦν, ἐγὼ ἐρέω.*

c) *θέλω* (*ἐθέλω*) mit Infinit.:
522, 8 *θέλω εἰπεῖν, ὅτι.*
542, 18 *ἐθέλω δὲ ἀποφῆναι πρῶτον.*
562, 6 *ἐθέλω δὲ ἀποφῆναι κάλλιον.*

d) *μέλλω ἐρεῖν*, die Wendung steht vorzugsweise im Relativsatz:
532, 15 *τρόπῳ τοιῷδε, ᾧ μέλλω ἐρεῖν.*
546, 16 *ὃ μέλλω ἐρεῖν.*
558, 17 *κατὰ ἀνάγκην τοιήνδε, ἣν μέλλω ἐρεῖν.*
604, 19 *διαβάλλονται τούτῳ, ᾧ μέλλω ἐρεῖν.*

II. Behauptung.

Durch *φημί* gegeben, ein Infinitiv hängt meistens ab:

474, 14 *τῇσι γυναιξὶ φημὶ . . ἐμπίπτειν.*
484, 11 *φημὶ αὐτὸ πηρωθῆναι.*
540, 16 *φημὶ . . . ἐνεῖναι.*
572, 13, 22; 566, 8.

Dieser Typus II wird nun mit den vorangehenden kombiniert. 574, 13 *νῦν δὲ ἐρέω, διότι θνήσκουσιν . . . ., φημὶ δὲ . . . .* dazu treten Erweiterungen:

548, 15 *τοῦτο δὲ χρὴ ἐλπίσαι, ὅθεν ἐγὼ ἐρέω· φημὶ δὲ . . . .*
552, 20 *νῦν δὲ ἐρέω περὶ ὕδρωπος, ὥς τε καὶ διὰ τί πλείων γίνεται . . . . φημὶ δὲ . . . .*
vgl. 572, 2.
584, 7 *ἐρέω δὲ πρότερον περὶ τοῦ ὡς θερμαίνει· φημὶ οὖν ταράσσεσθαι . . .*
590, 5. 594, 8.

Stark erweitert durch Kombination von II mit I b und c, zur Markierung eines bedeutenden Abschnitts:

578, 9: *νῦν δὲ ἐθέλω ἀτρεκέστερον εἰπεῖν, διότι . . . . .· ἐρέω δὲ σὺν τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τίνες . . . . . καὶ ὁκοῖα . . . . .· φημὶ δὲ . . . . . .*

Die Technik der Vor- und Rückverweisungen gibt nicht viel Merkwürdiges.

Dagegen sind die Abschlußformeln ebenso sorgfältig stilisiert und so strikt festgehalten wie die Eingangswendungen; sie zeigen auch dieselbe Neigung, Verbindungen miteinander einzugehen und sich zu größeren Gebilden zu kristallisieren, die an erheblichen Wende- und Abschlußpunkten der Diskussion aufgebaut werden.

1. Die einfachste Formel und die am häufigsten gebrauchte ist:

a) *ταῦτα δέ μοι ἐς τοῦτο εἴρηται* (es springt die Übereinstimmung mit dem peripatetischen Typus, nur ohne *μοι*, in die Augen). Sie tritt auf beispielsweise: 472, 2; 476, 15; 484, 20; 492 init.; 498, 25; 510, 16; 526, 5; 538, 6; 538, 27; 544, 16; 556, 12; 560, 5; 562, 5; 586, 11; 604, 2; 608, 25.

b) Sie geht Verbindung ein mit dem Anfangstypus I, a:

530, 19 *ἔχει δὲ ὧδε τάδε καὶ ταῦτα μοι ὧδε εἴρηται.*

c) eine Variante dazu ist:

474, 3 *ταῦτα δέ μοι οὕτως ἀποπέφανται.* Dazu vgl. 550, 13 u. 556, 7.

2. Erweiterung dieser einfachen Formel:

   a) 516, 16 *καὶ ταῦτα μὲν εἴρηταί μοι περὶ τῶν ἐκ σπερμάτων φυομένων.*

   b) Durch einen abhängigen Satz:

      522, 5 *πάντα ταῦτα εἴρηταί μοι ὅτι τῆς γῆς τὸ κάτω.*
      566, 12 *ταῦτα δέ μοι εἴρηται ὅτι συμβαίνει.*
      Ähnlich 580, 19.

   b 1) Durch mehrere Sätze:

      562, 17 *ταῦτα δέ μοι εἴρηται ὅκως τε καὶ διότι.*
      So auch 564, 15; 566, 4; 554, 14, 15; 566, 17.

   Kombinationen von a) und b):

      528, 15: *ταῦτα μοι εἴρηται περὶ τῶν δενδρέων.... διὰ τόδε, ὅτι ....*

   Kombination von a) und b'):

      474, 11: *καὶ ταῦτα μὲν εἰρέαταί μοι περὶ γονῆς, ὁκόθεν .... καὶ ὅκως .... καὶ διότι.* cp. Gorgias, Helene 5: *ὅστις μὲν οὖν καὶ διότι καὶ ὅπως ἀπέπλησε ...., οὐ λέξω·* andere Gorgianische Stellen, die den Zusammenhang unseres Autors mit sophistischer Prosa zeigen: Gorgias, Helene 15 *καὶ ὅτι μὲν εἰ λόγῳ ἐπείσθη, οὐκ ἠδίκησεν, ἀλλ' ἠτύχησεν, εἴρηται· τὴν δὲ τετάρτην αἰτίαν τῷ τετάρτῳ λόγῳ διέξειμι.*
      vgl. auch Palamedes 21. 37.

      598, 24 *ταῦτα δέ μοι εἴρηται περὶ ἕλμινθος πλατείης, ὅθεν γίνεται καὶ ....*

      614, 2 *ταῦτα δέ μοι εἴρηται περὶ ὕδρωπος, ὅθεν τε γίνεται καὶ ὅτι τὰ σημήϊα αὐτοῦ τάδε.*

3. Varianten.

   a) 556, 7 *ἀποπέφανται ταῦτα πάντα, ὅκως τε καὶ διότι κτλ.*

   b) 552, 16 *ἐν τούτῳ δὲ ἐγὼ ἐπεσήμηνον, ὅκως .... καὶ διότι .... καὶ ὅτι* anderes: 502, 17; 488, 8, 9; 480, 20.

4. Kombination von 3a mit 2b1:

      550, 13 *ἐν τούτῳ μὲν οὖν τῷ λόγῳ ἀποπέφανται, ὅκως ...., καὶ ἅμα εἴρηταί μοι ὅκως τε καὶ διότι πλεῖον γίνεται κτλ.*

5. Große Abschlüsse, zum Teil mit Hilfe des dargelegten Materials, zum Teil freier gestaltet, aber untereinander recht ähnlich:

      594, 9 fg. *ταῦτα δέ μοι εἴρηται, ὅκως τε .... καὶ ὅκως, καὶ τἆλλα ἐν αὐτῷ φύσει ἐόντα ἀπέδειξα πολλά, ὁκόσα ἐπεδέχετο οὗτος ὁ λόγος,*
      καὶ ταῦτα μὲν εἰρημένα οὕτως τέλος ἔχει·

578, 4 *οὗτος ὁ λόγος ἐρεῖ τὰ νουσήματα κρίνεσθαι . . . . . . καὶ ἐξιέναι . . . .*

καὶ ταῦτα τριταῖα ἐόντα ἱστορεῖ ἀλλήλοισι, ὅτι οὕτως ἔχει· οὕτω δέ μοι ὁ λόγος οὗτος πᾶς ἐκκεκορύφωται.

Einige Einzelheiten mögen hier noch ihren Platz finden. Erläuterung wird gegeben in einer Form, wie wir sie schon bei Aristoteles und Theophrast kennen lernten:

582, 6: *ἤν τι βίαιον προσπέσῃ. βίαιον δὲ λέγω κτλ.*

Variante ibd. 13: *τοῦτο δὲ νόσημα ὀνομάζω εἶναι.*

Der Exkurs würde eine besondere Untersuchung verdienen; erwähnt sei hier nur die Form des Abbrechens und Zurücklenkens in die Erörterung:

484, 20 *ἀναβήσομαι δ' αὖθις ὀπίσω ἐς τὸν λόγον ὃν ἔλεγον.*

Ganz ähnlich 506, 2; 568, 8.

Varianten: *ἀναλήψομαι δὲ αὖθις κτλ.* (526, 6) und *ἀλλ' ὅθεν ἀπέλιπον περανέω τὸν λόγον* (496, 8/10).

Mehrmals wird ein Exkurs mit einer rhetorischen Frage abgebrochen:

488, 6: *καὶ τί δεῖ μακρηγορεῖν;* und

496, 8: *ἀλλὰ τί δεῖ λέγειν αὐτὰ ἐνθάδε;*

Das ist insofern bemerkenswert, als es bereits epischer Technik entspricht: der Monologisierende ruft sich so wieder zur Sache zurück: Vgl. Leo, Monolog, p. 3.

Andere Art des Abbruchs 472, 2; Frage in anderer Absicht — als indirekter Beweis — 608, 14.

Beilage II.

Der botanische Exkurs.

Die pflanzenkundlichen Analogien wachsen sich an zwei Stellen zu ganzen Exkursen aus: *π. φύσιος παιδίου* c. 22—27 und *π. νούσων δ'* c. 33—34; daneben kommen noch einige kürzere Bemerkungen in Betracht: *π. φύσιος παιδίου* c. 9, 10, 12. Diese Stellen machen es möglich, die pflanzenkundlichen Anschauungen unseres Hippokratikers in ziemlichem Umfange zu rekonstruieren; wir tun es, indem wir die mehr verstreuten Ausführungen in eine etwas systematischere Anordnung bringen.

Die Pflanzenarten sind zunächst aus der Erde entstanden — durch Urzeugung also — und zwar bereits in artlicher Differenzierung (546, 25). Sie empfangen ihre Nahrung aus der Erde und verhalten sich so, wie die Erde selbst (514, 8). Was das besagen will, erfahren wir später deutlicher. Das Verhältnis zwischen Pflanze und Erde ist ganz analog dem zwischen

Kind im Mutterleib und der Mutter, die ihm die Stoffe zum Aufbau liefert. Aufgenommen wird die Nahrung aus der Erde von den Pflanzen in Form der *ἰκμάς*, des feuchten Dunstes, wie wir wohl übersetzen können (528, 18ff.), und zwar durch die Wirkung der *ἕλξις*, der Anziehung, wie sie auch in den Gefäßen des Körpers stattfindet: doch so, daß der im Körper (in der Pflanze) vorhandene Dunst immer nur den ihm gleichen anzieht (544, 17ff.). Diese *ἰκμὰς* wird an anderer Stelle auch als *δύναμις* bezeichnet: das muß man schließen aus der Vergleichung von 548, 3: *ἕλκει γὰρ ἐκ τῆς γῆς ἡ ὁμοίη ἰκμὰς τὴν ὁμοίην καὶ τούτοισιν αὔξεται καὶ τρέφεται* mit 544, 25, wo es heißt: *τό τε γὰρ ῥόδον ἕλκει ἀπὸ τῆς γῆς ἰκμάδα τοιαύτην, οἷόν περ καὶ αὐτὸ δυνάμει ἐστίν*, eine Stelle, die durch eine zweite gestützt wird: 546, 24 *μύριαι (ἐν τῇ γῇ) δυνάμιές εἰσι, καὶ διὰ ταῦτα τὰ γένεα ἐκ τῆς γῆς πρῶτον οὐδὲν ἕτερον ἑτέρῳ ὅμοιον ἔφυ ὅτι μὴ συγγενές*. Aus der zweiten lernen wir zugleich, daß eben die Verschiedenheit der in der Erde enthaltenen *ἰκμάδες* der Grund für die ursprüngliche Verschiedenheit der Arten ist.

Dieselben speziellen *ἰκμάδες* muß die Erde den Pflanzen auch weiterhin liefern, damit die Arten erhalten bleiben; im anderen Falle würden die Gewächse nicht dem Samen entsprechen (544, 22). Naturgemäß sind alle Gewächse, wie sie zunächst aus der Erde entstehen, Wildpflanzen; die Menschen haben sie gezähmt und Kulturpflanzen aus ihnen gemacht (548, 1ff.; vgl. Hippon bei Th. H. Pl. 1, 3, 5); wenn der Autor an der unten zitierten Stelle dann aber fortfährt: *ἡμέρωσαν ἐργαζόμενοι καρποφορεῖν κατὰ τὸ σπέρμα ἕκαστον* und zur näheren Begründung seine Lehre von der *ἕλξις* wiederholt, so wird nicht recht klar, was denn nun eigentlich die menschliche Pflege Besonderes tue, da ja eine Erhaltung der Arten auch bei den Wildpflanzen durch die gleiche *ἕλξις τῆς ὁμοίης ἰκμάδος* stattfindet. Wir müssen wohl annehmen, daß die Schaffung von besonders günstigen Existenzbedingungen gemeint sei. Ebenso bleibt eine gewisse Unklarheit über die Bedeutung des Begriffes *πνεῦμα* und sein Verhältnis zur *ἰκμάς*: beides spielt eine Rolle bei der Entwicklung des in die Erde gelegten *σπέρμα*. Dieses wird, so heißt es 514, 11ff., zunächst von der Erde her mit *ἰκμάς* erfüllt; infolgedessen wird es gebläht und schwillt auf (l. c.); es tritt nun eine gewisse Überfüllung mit dieser Feuchtigkeit ein, die zur Folge hat: *ἀναγκάζεται ὑπὸ τῆς ἰκμάδος συστρέφεσθαι ἡ δύναμις* (= *ἰκμάς*), *ἥ ἐστι κουφοτάτη ἐν τῷ σπέρματι*. Dann geht es weiter: *συστραφεῖσα δὲ ἡ δύναμις ὑπὸ τοῦ πνεύματος καὶ τῆς ἰκμάδος φύλλα γενομένη ῥήγνυσι τὸ σπέρμα*. Was ist dies *πνεῦμα*? Einigermaßen wird die Sache verständlich, wenn wir dazu nehmen 488, 7 *πάντα ὁκόσα θερμαίνεται πνεῦμα ἀφίησι*; das wird weiterhin an den Beispielen von erwärmtem Holz, Blättern usw. gezeigt: wenn diese erwärmt werden, bahnt sich das *πνεῦμα* unter Entstehung einer *ῥαγή* den Weg nach draußen. Zugrunde liegt wohl die Beobachtung des entweichenden Wasserdampfes und das Knistern und Krachen der sich zusammenziehenden Materie. Nun ist aber auch die Erde — zumal im Winter (auch im Frühjahr, werden wir im Sinne des Autors hinzusetzen dürfen) im Inneren warm. So werden wir annehmen können, das *πνεῦμα* sei auch in diesem Falle dunstförmig gewordene *ἰκμάς*, Feuchtigkeit, die dazu dient, einen Weg nach draußen zu brechen. Ein Teil der *ἰκμάς*, — wie sich diese Verschiedenheit erklärt, sagt der Autor nirgends — aber verdichtet sich (*συστραφεῖσα*), verwandelt sich in Blätter (*φύλλα γενομένη*) und sproßt hervor. Und zwar geht dieser Blattsproß noch der Wurzelbildung voraus (514, 16).

Zu dieser kommt es erst, wenn die Blätter nicht mehr von den im Samenkorn enthaltenen Nahrungsstoffen — der *ἰκμάς* — ernährt werden können; dann wiederholt sich der eben geschilderte Vorgang nur in entgegengesetzter Richtung: die bis dahin ihrer „Schwere" wegen zurückgebliebene *δύναμις* bricht nach unten durch und es entstehen Wurzeln „*ἐκ τῶν φύλλων διατεταμέναι*", die mit den Blättern in direkter Verbindung stehen (514, 17ff.). Von nun an entnimmt die Pflanze ihre Aufbaustoffe dem Erdboden und die Überreste des Samens verwesen (514,22). Die junge Pflanze besitzt aber zunächst nur enge Adern, durch welche lediglich wässerige Nahrungsstoffe hindurchgehen (516, 7ff.); diese werden von der jungen Pflanze zum Wachstum nach oben und unten verwendet (516, 2ff.). Wenn die Menge der aufgenommenen *ἰκμάς* sich dann allmählich vergrößert, so tritt eine Cumulierung an einigen Punkten ein: ein neuer Durchbruch findet statt; die *ὄζοι* bilden sich (518, 19). Die eigentliche *τελέωσις* (um mit dem Theophrastischen Ausdruck zu reden) des Gewächses ist schließlich die Hervorbringung des *καρπός* oder *σπέρμα*: zwischen beiden wird anscheinend nicht weiter unterschieden; zu dieser Folgerung ist man wohl berechtigt nach 516, 4/5: *οὐ δύναται τὸν καρπὸν ἐκβάλλειν, οὐ γάρ ἐστιν αὐτῷ δύναμις ἰσχυρὴ καὶ πιαρά, ἐξ ἧς τὸ σπέρμα συστραφήσεται.*

Abhängig ist die Möglichkeit der Fruchtbildung von der Verbreiterung der die Nahrung zuführenden Adern (516, 5ff. und 526, 19ff.): diese entnehmen dann der Erde eine *δύναμις παχείη* und *πίειρα*, welche unter dem Einfluß der Sonnenwärme sich verteilt und an den Spitzen „hervorsiedet"; an diesen „Ausschwitzungen", möchte man sagen, vollzieht sich dann die *πέψις*, indem die Sonne „die leichte Feuchtigkeit" (*τὸ ὑδαρέστερον* heißt es an anderer Stelle) an sich zieht, die dicke und fette jedoch zurückläßt: aus dieser entsteht dann die feste Frucht (516, 7ff. und 526, 19ff.), die unter Einwirkung der Wärme süß wird. Das Wachstum der Pflanze dauert dabei fort und zwar nach Dicke, Höhe und Tiefe: jedoch erfolgt Höhen- und Tiefenwachstum nach Anschauung des Autors wohl schwerlich gleichzeitig. Man wird vielmehr glauben dürfen, daß er Tiefenwachstum vorzüglich im Winter annimmt. Fügt er doch 518, 22 hinzu: *διὰ τόδε ὅτι τὸ κάτω τῆς γῆς τοῦ μὲν χειμῶνος θερμόν ἐστι, τοῦ δὲ θέρεος ψυχρόν.* Es scheint also, daß die Wärme in seiner Theorie eine wesentliche Vorbedingung für das Wachstum ist; das ist wohl begreiflich: nur dann kann ja jener „Ausbruch" stattfinden, der schon bei der Keimung, später bei der *ὄζωσις* seine Rolle spielte; es ist wie eine dunkle Vorahnung von dem Turgor des Wachstumskegels.

Natürlich ist auch reichliche Ernährung für das Wachstum nötig: wir erfahren, 526, 17, daß der Baum seine Nahrung nun doch nicht mehr ausschließlich der Erde entnimmt: *αὔξεται δένδρον καὶ ἐς τὸ ἄνω καὶ ἐς τὸ κάτω διὰ τόδε, ὅτι οἱ τροφή ἐστιν καὶ ἐκ τοῦ κάτωθεν καὶ ἐκ τοῦ ἄνωθεν.* Das scheint aber nicht recht zum übrigen zu passen; klingt es doch beinahe so, als ob die Nahrung aus der Erde den Wurzeln, die *ἐκ τοῦ ἄνωθεν* den oberen Teilen zugute käme — wozu dann aber die Verbindungswege der oberen Teile mit den Wurzeln?[25]) Endlich hört das Wachstum auf: 528, 2: *ὁκόταν ὑπὸ τοῦ χρόνου στερεωθῇ καὶ λάβηται ἐκ τοῦ κάτω τῇσι ῥίζῃσιν ἤδη βεβαίως* (sc. *τὸ δένδρεον.*) — Auch an die Entstehung der Frucht schließen sich noch eine Reihe von Problemen an. So zunächst: wie kommt es, daß eine einzige Pflanze eine ganze Anzahl von Früchten hervorbringen kann? Die Antwort lautet 516, 11ff., daß eben jedes Gewächs aus der Erde mehr Kraft (*δύναμις = ἰκμάς*) an sich ziehe, als die war, aus der es selbst entstand und daß diese Ausschwitzungen nicht an einer, sondern an vielen Stellen stattfänden (516, 11). Nicht völlig klar ist die Lösung des Problems, weshalb denn einige Bäume überhaupt keine Frucht tragen: denn auch im Sinne der Theorien des Autors — um von unserem Standpunkt, wie billig, gänzlich abzusehen — kann man die Antwort 528, 1 *οὐκ ἔχει πῖαρ ἐν αὐτοῖσιν, ὅσον ἐς τὸν καρπὸν ἐκδώσεται* nicht als bis zu Ende durchgedacht ansehen; ist dadurch das Problem doch nur zurückgeschoben, und endgültig lösbar könnte es nur durch Rekurrieren auf die vielgeplagte *ἰκμάς* werden. Diese Frage der mangelnden *καρποφορία* führt ganz von selbst zu der anderen nach Gesundheit und Krankheit des Baumes überhaupt, und auch diese hat unser Autor wenigstens gestreift: er sieht eine Hauptbedingung für die Gesundheit in einer gegenseitigen Ausgeglichenheit von Luft und Bodentemperatur; 526, 9ff.: *δεῖ τῷ δένδρεϊ μὴ δύο θερμὰ ὁμοῦ προσγίνεσθαι μηδὲ δύο ψυχρὰ ὁμοῦ ἢν μέλλῃ ὑγιαίνειν.* Ist es oben warm, so muß es unten kalt sein und umgekehrt. Denn wie die Nahrungsstoffe, so werden auch Wärme und Kälte in beiden Richtungen weitergeleitet und ausgetauscht (526, 12ff.). Eine eigentliche *νόσος* wird hervor-

[25]) Vgl. Empedokles A 70 D; Theophr. c. pl. I, 12, 5; Aristot. de anim. B 4, 415b, 28. Plut. quaest. conviv. VI, 22, 6.

gerufen vor allem durch Hypertrophie: 546, 3 ff.: *ὅτῳ δὲ τῶν φυομένων ἐν τῇ γῇ ἰκμὰς κατὰ συγγένειαν τοῦ δέοντος πολλῷ πλέων ἐστι, νοσεῖ ἐκεῖνο τὸ φυτόν*, während *αὔανσις* die Folge der entgegengesetzten Ursache ist: *ὅτῳ δὲ ἐλάσσων τοῦ καιροῦ, ἐκεῖνο αὐαίνεται*. Auf mechanische Hindernisse wird zurückgeführt die Verkrümmung und die ungleiche Stärke des Stammes (484, 6 ff.). Fehlt es aber irgendwo gänzlich an der gewissen Pflanzen nötigen *ἰκμάς*, so kommen die betreffenden Pflanzen in jener Gegend gar nicht vor: es wird deutlich hervorgehoben, daß klimatische Bedingungen zur Erklärung dieses Phänomens nicht hinreichen, sondern die edaphischen Faktoren, wie die moderne Botanik sagen würde, zu Hilfe gerufen werden müssen, vielmehr nach unserem Autor die einzig maßgebende Rolle spielen. Das wird erhärtet einmal damit (546 ff.), daß trotz aller Akklimatisationsversuche das Silphion weder im Peloponnes noch in Ionien vorkomme, obwohl die klimatischen Voraussetzungen nicht übel seien, und zweitens durch Hinweis auf die Differenzen des Bodens „auf kleinstem Raum“, wie die Pflanzenkundigen es heute nennen: ibd. 16—18: *διαφέρει χῶρος χώρου κάρτα πλησιάζων ἐς τὴν ἡδυοινίαν, τοῦ ἡλίου ὁμοίως ἐξαρκέοντος* und ebd.: gewisse Wildpflanzen *μεταρθέντα ὁκόσον ὀργυιὴν οὐκ ἂν εὕροις ἔτι φυόμενα*. Es zeigen sich die ersten Anfänge von pflanzengeographischer Betrachtungsweise, sowohl in floristischer wie auch in ökologischer Beziehung.

Eine ganze Anzahl von Stellen weist aber darauf hin, daß unsere Schrift in eine Zeit gehört, in der zuerst die rationelle Erfassung sich allen Gebieten des menschlichen Lebens zuwendete, auf denen bis dahin die bloße Empirie, vom Vater zum Sohn sich forterbend, geherrscht hatte: die Zeit der Sophistik. Wie damals die Theorie mit ihren ersten, uns jetzt so seltsam anmutenden wissenschaftlichen Erklärungsversuchen neben die überlieferte Praxis trat — teilweise in ihrem stolzen Rationalismus auf den einfachen Praktiker recht hochmütig herabsah — und allerlei theoretisch-wissenschaftliche Behandlungen der Musik z. B. bis hinab zur Kochkunst ans Licht brachte, so sehen wir auch hier die Pflanzenkunde sich der Deutung von Kunstgriffen zuwenden, die von den Garten- und Ackerbauern schon seit Menschenaltern geübt worden waren. Nur kurz wird auf S. 482, 14 ein eigentümlicher Pflanzenversuch beschrieben, auf den wir oben (S. 8) bereits hinwiesen; um so eingehender aber betrachtet unser Hippokratiker (518, 16) die Entstehung und Aufzucht junger Bäumchen aus Setzlingen (*ἐκ φυτευτηρίων*), wobei *ἀπὸ δενδρέων δένδρεα γίνεται*. Er sieht in ihr eine Art von Gegenstück zu der Entstehung aus dem Samen und richtet dementsprechend seine Erklärungen ein. Zunächst wird (516, 19) festgestellt, daß der *κλάδος* (= *φυτευτήριον*) an der dem Erdboden zugekehrten Seite eine Wunde erhalten hat, aus der die Wurzeln hervorbrechen. Zur Begründung dieses Vorgangs wird natürlich wieder die oft berufene *ἰκμάς* herangeholt. Der Teil, welcher sich in der Erde befindet, nimmt von der Erde die *ἰκμάς* auf, schwillt an „und hat *πνεῦμα*"; der Teil über der Erde aber noch nicht. Pneuma und *ἰκμάς* bewirken nun, daß die *δύναμις, ὅση ἦν βαρυτάτη,* sich im unteren Teil zusammenzieht, durchbricht und den Setzling mit zarten Wurzelfasern versieht. Erst jetzt zieht dieser mit Hilfe der Wurzeln Nahrung an sich; dadurch schwillt auch der obere Teil an und bekommt Pneuma; die *δύναμις ὅση ἐν τῷ φυτῷ κούφη ἔνεστι,* zieht sich zusammen und sproßt (*βλαστάνει φύλλα γενομένη*), und nunmehr wächst der Setzling nach oben und nach unten. Die Entwicklung verläuft also der aus dem Samen gerade entgegengesetzt: das wird 518, 3 noch besonders betont und hat seinen Grund darin, daß wohl der Same aus seinen Vorräten die zuerst entstehenden Blätter ernähren kann, nicht aber der Setzling, der darum zunächst Wurzeln erzeugen muß; er ist gewissermaßen ein Analogon des Baumes im kleinen: 518, 12ff.

In große Verlegenheit hat den Autor aber augenscheinlich das Problem der Okulation (*ἐνοφθάλμισις*) gebracht. In der Tat lagen ja hier für seine Theorie recht bedenkliche Schwierigkeiten: wenn jede Art der Gewächse ihre besondere *ἰκμάς* hat, durch die sie ernährt wird, wie ist es dann möglich, daß ein Reis von einer anderen Art irgendeinem Baum eingepflanzt werden kann und ihm seine Nahrung entnimmt? Denn dieser Baum zieht doch aus der Erde nur die für ihn passende *ἰκμάς*, mit der sollte aber das eingepfropfte Reis nichts anfangen können: müßte also elend zugrunde gehen. Über diese Schwierigkeiten gleitet der Autor zum Teil hinweg, zum anderen Teil sucht er sie durch eine höchst seltsame Erklärung zu beseitigen. Hören wir ihn selbst: 528, 4ff.

1. *Συμβαίνει τῷ ὀφθαλμῷ πρῶτον μὲν βλαστάνειν, τροφὴν γὰρ εἶχε πρῶτον μὲν ἀπὸ δενδρέου ἀφ' οὗ ἀπηνέχθη* (es scheint also eine Art von Vorrat mitzubringen) *ἔπειτα ἐν ᾧ ἐνετέθη.* Wie das mit seiner Theorie bestehen kann, verrät der Verf. uns leider nicht; ebensowenig im folgenden, wenn er fortfährt:

2. *ὁκόταν δὲ βλαστήσῃ οὕτω, μεθίησιν ἐς τὸ δένδρεον ῥίζας ἀπ' αὐτοῦ λεπτάς· καὶ πρῶτον ἀπαυρίσκεται ἀπὸ τῆς ἰκμάδος τῆς ἐν τῷ δενδρέῳ ἐνεούσης, ἐν ᾧ ἔγκειται·* — Auch hier müßte die Verschiedenheit der nötigen *ἰκμάδες* ein Hindernis bilden; der Autor hat das auch wohl empfunden, wenn er auch nichts davon sagt, denn er fährt fort mit einer äußerst seltsamen Auseinandersetzung:

3. *ἔπειτα χρόνου ἐγγενομένου ἀφίησι ῥίζας ἐς τὴν γῆν διὰ τοῦ ἐν ᾧ ἐνετέθη καὶ ἀπαυρίσκεται ἀπὸ τῆς γῆς ἕλκον τὴν ἰκμάδα, καὶ τροφὴ αὐτῷ κεῖθέν ἐστιν, ὥστε μὴ θαυμάζειν* (!) *ἑτερόκαρπα εἶναι τὰ ἔνθετα τῶν δενδρέων, ζῇ γὰρ ἀπὸ τῆς γῆς.* Man hätte nur einen okulierten Stamm zu zersägen brauchen, um diese kuriose Theorie in ihrer Unhaltbarkeit dar-

zutun — allerdings hätte der Verf. vielleicht auch dann irgendwo diese postulierten Wurzeln entdeckt. Das Ganze ist höchst charakteristisch für die Art, wie von dem Rationalismus der beginnenden Wissenschaft die einfachen Tatsachen dem System zuliebe vergewaltigt werden. Trotzdem werden wir uns hüten müssen, allzu geringschätzig zu urteilen. Die Zahl der aufgeworfenen oder berührten Probleme ist nicht gering, zumal wenn wir in Betracht ziehen, daß es sich doch eigentlich nur um beiläufige Bemerkungen handelt, und sie zeigt, mit welchem Interesse die Forschung mit ihren Erklärungsvorschlägen sich aller möglichen Erscheinungen des Pflanzenlebens bemächtigte.

Durchmustern wir noch einmal kurz die vom Autor mehr oder minder ausführlich behandelten Probleme.

Er streift die Entstehung der Pflanzen, gedenkt ihrer Ernährung und der Art, wie sie zustande kommt, sucht nach einer Erklärung der Artverschiedenheiten und ihrer Erhaltung, womit dann die Frage der Wild- und Kulturpflanzen zusammenhängt. Genau wird behandelt die Entwicklung des Samens, des Blattes, die Wurzelbildung, die Verzweigung und die Astbildung. Weiterhin kommt die Fruchtentstehung zur Sprache mit dem ganzen Kreise von Fragen, die damit verbunden sind. Bei Erörterung des Wachstums handelt es sich besonders darum, ob es nach allen Seiten, nach unten und oben gleichzeitig erfolge und warum es schließlich aufhöre. In der Behandlung der Fragen über Gesundheit und Krankheit der Pflanzen wird u. a. geschieden zwischen *νόσος* und *αὔανσις*, und endlich beim Problem des Fehlens der Existenzbedingungen und bei der Grundlegung einer primitiven Pflanzengeographie ausdrücklich des Umstandes gedacht, wie sehr einander nahegelegene Orte sich unter Umständen mit Bezug auf die Güte des hervorgebrachten Weines unterscheiden.

Es ist von vorneherein nicht wahrscheinlich, daß der Verfasser der fraglichen Schriftenreihe als erster diese Probleme sich gestellt und versucht habe, sie einer Lösung entgegen zu führen. Ein Überblick über die allerdings spärlichen phytologischen Fragmente der vorsokratischen Philosophen wird das bestätigen und zwar wird dabei Empedokles besonders in den Vordergrund treten. Das ist kein Zufall. Denn wenn auch nach der langen Unsicherheit und Meinungsverschiedenheit der Älteren und Neueren über Wert und Stellung dieses Philosophen in der Geschichte [26]), es im ganzen bei dem ziemlich scharfen Urteil von Diels [27]) sein Bewenden wird haben müssen, und zuzugeben sein wird, daß das eigentliche philosophische System des Agrigentiners unselbständig ist und

---

[26]) Zeller I^5, 2, 819 u. 818a, 4.

[27]) Stett. Phil. Vers. 1880 (Lpzg. 1881), p. 104.

die mannigfaltigen Entlehnungen aus Eleaten, Heraklit[28]) und wohl auch Atomisten[29]) keineswegs mit der nötigen Folgerichtigkeit durchdacht und zu einem einheitlichen, von Widersprüchen freien Ganzen zusammengeschweißt hat, so wird man andrerseits doch Zeller recht geben müssen, der wiederholt darauf hinwies, daß Empedokles vermöge seiner von Parmenides abweichenden Stellung gegenüber der Wirklichkeit der Erscheinung, sich besonders der Betrachtung der organischen Wesen zugewendet habe und bei der Erklärung der Naturerscheinungen folgerichtig zu Werke gegangen sei. Auch daß sein Vorgang für die Mediziner der Folgezeit richtunggebend war und die sizilische Ärzteschule gewissermaßen als seine *διαδοχή* aufzufassen sei, ist bereits ausgesprochen worden. So wird es kein Zufall sein, daß wir durch die Überlieferung der Placita über seine phytologischen Anschauungen einläßlicher unterrichtet werden, sondern dieser verhältnismäßige Reichtum wird der Bedeutung des Mannes auf diesem Gebiete zuzurechnen sein. Freilich, daß er über die Entstehung der Pflanzen aus der Erde gedacht und gesprochen hat[30]), ist nicht besonders zu werten — das haben viele andere auch getan[31]). Aber dem Problem des Wachstums hat er Aufmerksamkeit zugewendet[32]), und dabei anscheinend bereits die Gründe des Höhen- und Tiefenwachstums gesondert erörtert[33]). Die Bewahrung der Arten ist wohl mindestens gestreift worden[34]), die Ernährung und ihr Mechanismus hat eine genauere Behandlung gefunden — wohl für Pflanzen und Tiere gemeinsam[35]). Ebensowenig ist die Physiologie der *καρποφορία* unbesprochen geblieben[36]) und die sehr eingehenden Erörterungen über den Blattfall, die uns Plutarch[37]) erhalten hat, können wenigstens in der Stellung des Problems mit dem der *αὔανσις* verglichen werden, das der Autor unserer Schriften

---

[28]) Aber Burnet 208.

[29]) Burnet 214.

[30]) Vgl. Plac. 5, 26, 4.

[31]) Zeller I^5, 1, 269.

[32]) Vgl. Plac. 5, 26, 4: wo ich für *μήτρας* vermute *μητρός· καθάπερ καὶ τὰ ἔμβρυα τὰ ἐν τῇ γαστρὶ τῆς μητρὸς μέρη.*

[33]) Vgl. Arist. de anim. B 4, 415b, 28.

[34]) Plut. Quaest. conv. VI, 2, 2, 6, p. 688a (A 70 D).

[35]) Vgl. B 90 D und Plut. Quaest. conv. IV, 1, 3, 12 und III, 2, 2, 8; dazu Plac. V, 26, 4: im ganzen Zeller I^5, 2, 792, 793.

[36]) Plac. V, 26, 4.

[37]) Quaest. conv. III, 2, 2: sollten übrigens in diesem Stück nicht *μανότητα* und *πυκνότητα* ihre Plätze miteinander tauschen müssen? Vgl. die gründliche Behandlung dieses botanischen Problems durch Capelle, Philol. 69, 1910, 282ff. Allerdings stehe ich der Vermutung desselben, Menestor sei älter als Empedokles und ihm gebühre der Ruhm, eine wissenschaftliche Pflanzenkunde zuerst auf die Bahn gebracht zu haben, sehr zweifelnd gegenüber; gewiß ist die Bedeutung des Mannes, den Theophrast einer eingehenden Widerlegung gewürdigt hat.

im Zusammenhang mit den Krankheiten behandelt. Daß endlich auch die Frage nach den Existenzbedingungen und die primitiven Anfänge ökologischer Pflanzengeographie bei Empedokles zu finden waren, geht aus Plac. V, 26, 4 s. f. hervor: er scheint an dieselbe Beobachtung angeknüpft zu haben, wie der Hippokratiker: *τὰς δὲ διαφορὰς τῶν χυμῶν ⟨παρὰ⟩ παραλλαγὰς τῆς ⟨γῆς⟩ πολυμερείας καὶ τῶν φυτῶν γίνεσθαι, διαφόρως ἑλκόντων τὰς ἀπὸ τοῦ τρέφοντος ὁμοιομερείας ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἀμπέλων· οὐ γὰρ αἱ διαφοραὶ τούτων χρηστὸν ⟨ἢ ἄχρηστον⟩ τὸν οἶνον ποιοῦσιν, ἀλλ' αἱ τοῦ τρέφοντος ἐδάφους.*

Wenn man diese Reihe überblickt, so findet sich, daß eine ganze Anzahl der Probleme, um deren Lösung sich unser Arzt bemüht, bereits die Aufmerksamkeit des sizilischen Philosophen erregt hatte; dabei ist noch zu berücksichtigen, daß unser Vergleichsmaterial lückenhaft ist und bei größerer Vollständigkeit desselben die Übereinstimmung der behandelten Probleme noch stärker hervortreten würde. Nimmt man hinzu ein gewisses Übereinkommen in der eigentümlichen Grundstimmung der gesamten Betrachtungsweise, die die Pflanze sozusagen als das Kind der Erde ansieht und das Verhalten des Fötus im Mutterleibe mit dem der Pflanze im mütterlichen Erdenschoße parallelisiert, so könnte man geneigt sein, der Ansicht der neueren Gelehrten, die nicht selten solche Übereinstimmungen des Autors mit Empedokles notiert haben[38]), beizutreten und den Verfasser als einen Empedokleer in Anspruch nehmen. Bei genauer Betrachtung zeigt sich nun aber, daß wenigstens für die Phytologie dieser vielfältigen Verwandtschaft in der Stellung der Fragen nicht auch im selben Grade die Gleichheit des zu ihrer Lösung eingeschlagenen Weges entspricht.

Hier macht sich ein von dem System des Empedokles sehr abweichender Begriff stark geltend, der allenthalben die Theorien beherrscht, ihnen recht eigentlich zur Grundlage dient: die unendlich häufig erwähnte *ἰκμάς*, die das besondere Schiboleth diogenischer Doktrin bildet[39]). Man hat diese Beziehung zu Diogenes von anderer Seite ziemlich schroff in Abrede gestellt und hat gemeint, durch seine Ansicht, das Herz sei Mittelpunkt für Blut und Adern, „scheide sich der Mann reinlich von Diogenes“ — doch ist dem zunächst ganz allgemein entgegenzuhalten, daß in dergleichen Fragen bei dem vielfältigen Herüber- und Hinüberschießen der Verbindungsfäden, die sich mannigfach kreuzen und verknüpfen, wir uns so einfach die Verhältnisse nicht vorstellen dürfen und „reinliche Scheidungen“ selten oder gar nie möglich sein werden. Im besonderen aber ist die Übereinstimmung unseres Autors mit Diogenes seit den Unter-

[38]) Fredrich, Hipp. Unters. 64, 127, 128, 4. Wellmann, Fgmte. 36. Gossen in R. E. sv. Hippokrates. Vgl. auch Diels, Herm. 28, 428. Jetzt auch Ilberg, SSA 1925.

[39]) Diels, Stett. Philol. Vers. 1880, Leipzig 1881, 106a 33.

suchungen von Petersen[40]) nicht wohl ernstlich zu bezweifeln und ich begnüge mich hier damit, lediglich im Vorbeigehen einiges Übereinkommende aus den Lehren beider zusammenzustellen. So wird beispielsweise die Entstehung des Samens ebenso vom Hippokratiker wie von Diogenes beschrieben[41]), allerdings mit der Abweichung, daß Diogenes ihn einen *ἀφρὸν τοῦ αἵματος* nennt, während er in unserem Buche *ἀπὸ παντὸς τοῦ ὑγροῦ* abgeschieden wird[42]). Die ganze Stufenfolge bei der Bildung und Entwicklung des Fötus entspricht in dem kurzen Referat, das Censorinus[43]) uns über die Anschauungen des Diogenes aufbehalten hat, ganz den eingehenden Erörterungen des Autors in den cc. 15, 17, 19, 20. Ebenso läßt die eigenartige Theorie des Arztes, daß durch die entwickelte Wärme die Kälte angezogen und auf diese Weise das *πνεῦμα* unterhalten werde, sich belegen für Diogenes aus den Placita[44]), wo es heißt, daß die eingepflanzte Wärme sogleich nach der Geburt des Kindes die kalte Luft in die Lunge ziehe, eine Stelle, die eigentlich erst recht verständlich wird, wenn man die Ausführungen des Hippokratikers dazu nimmt. Weniger Gewicht möchte darauf zu legen sein, daß der Durchbruch der leichteren und schwereren *ἰκμάς* bei der Keimung des Samens nach oben, bzw. nach unten, dem allgemeinen Satze über die Verteilung des Leichten und Schweren überhaupt entspricht, den Diogenes seiner Kosmologie zugrunde gelegt hatte[45]): dergleichen ist auch von anderen behauptet worden[46]) und liegt zu nahe, um eine Abhängigkeit daraus erschließen zu können. Dagegen ist es wohl kein Zufall, daß die Art, wie Diogenes die Anziehung der Feuchtigkeit aus der Erde durch die Sonne und die Verteilung der Feuchtigkeit in der Erde schilderte — Seneca[47]) hat uns dieses wertvolle Stück erhalten — an die Ausführungen unseres Autors einmal über die *ἰκμάς* im Erdboden während des Sommers und die aus ihr entstehenden *πνεύματα* (vgl. auch A 17, 24 D), zum zweiten über die „Quellen“ im menschlichen Körper und ihre „Anziehung“ erinnert. Auch das fügt sich der Gesamtanschauung des Diogenes, der ja die Behinderung des Denkens durch die *ἰκμάς* behauptet[48]) und den Pflanzen jede „seelische“ Funktion im Gegensatz etwa zu Empedokles abgesprochen

---

[40]) Petersen, Hippocratis scripta ad temporum rationes disposita, Hamburg 1838, p. 30f.

[41]) Clem. paidag. I, 6, 48 = A 24 D.

[42]) 470, 1, 2. Seltsam dagegen die Bemerkung 474, 6 *καὶ ἀπὸ τῶν στερεῶν καὶ ἀπὸ τῶν μαλθακῶν*. Sollte es sich da nicht um einen zu entfernenden Zusatz handeln?

[43]) Censor. 6, 1 = A 27 D.

[44]) V, 15, 4 = A 28 D.

[45]) (Plut.) Strom 12 = A 6 D.

[46]) So z. B. auch von Anaxagoras.

[47]) n. quaest. IV, 2, 28 = A 18 D.

[48]) Theophr. de sens 39ff. = A 19, 38, 39 D.

hatte, daß konsequenterweise bei diesen in unseren Schriften immer nur von einer ἰκμάς die Rede ist, durch welche sie keimen, ernährt werden, wachsen u. dgl. m. Wir dürfen nun aber keinesfalls in den Fehler verfallen, deshalb den Autor für einen Nachtreter des Diogenes zu halten, der sich einer eigenen Meinung gänzlich entäußert habe: im Gegenteil — gerade in den embryologischen Betrachtungen, wo er unstreitig auf gründlichen eigenen Beobachtungen fußt, zeigen sich an mehreren Stellen starke und nicht auszugleichende Gegensätze gegen den Apolloniaten. So hatte dieser die Ernährung des Embryo mit Hilfe der „Kotyledonen" behauptet[49]), was mit den Anschauungen des Arztes gar nicht übereinstimmt; an anderer Stelle[50]) die Entstehung des Fötus lediglich aus dem väterlichen Samen hergeleitet, wozu das vierte Kapitel von π. γονῆς in einem geraden Gegensatze steht, und endlich die Bildung des männlichen Kindes in 4 Monaten, die des weiblichen in 5 Monaten geschehen lassen[51]) — womit jedoch wenig übereinstimmt, was Galen[52]) aus Rufus von Ephesus anführt —, eine Meinung, die zu der von unserem Autor ausführlich erörterten[53]) in keiner Beziehung paßt.

Es zeigt sich also, daß der Verfasser der Schriftenreihe kein unselbständiger Kopf ist, vielmehr trotz mancher Abhängigkeit doch auch seinen eigenen Standpunkt zu wahren weiß. Sollte nun auf Grund dieses Befundes jemand meinen, er habe zwar die Anregung zum Aufwerfen der verschiedenen, oben durchmusterten botanischen Probleme von Empedokles empfangen, dann aber gemäß seinem eigenen, mehr dem Diogenischen angenäherten philosophischen Standpunkte für eben diese Probleme selbständig neue Lösungen gesucht und diese in den von uns analysierten Exkursen vorgetragen, so dürfte diese Ansicht als unhaltbar kaum strikt zu erweisen sein; ja, man müßte sogar — entsprechend der wiederholt betonten Gefahr, Entwicklungen und Zusammenhänge geistiger Art im Altertum uns aus Mangel an Material allzu einsträngig und geradlinig vorzustellen — mit der Möglichkeit rechnen, die Vereinigung empedokleischer Problemstellung mit diogenischen Lösungsversuchen in phytologischer Hinsicht sei von irgendeinem unbekannten Dritten vollzogen und von da vom Autor übernommen worden. Indessen weisen eine Reihe von Instanzen, so scheint es mir wenigstens, auf die größere Wahrscheinlichkeit einer dritten Möglichkeit hin. Wir wissen, daß Diogenes in seinem Werke der Pflanzen und ihrer Entstehung mehrfach Erwähnung tat; daß er auch analogisch von seinen phytologischen Kenntnissen und Theorien

[49]) Aristoph. epitom. hist. anim. I, 78 = A 25 D.
[50]) Censor. 5, 4 = A 27 D.
[51]) Censor. 9, 2 = A 26 D.
[52]) XVII A 1006, 8 K.
[53]) Vgl. insbes. p. 504.

Gebrauch machte, ähnlich wie unser Autor es tut, kann man wohl erschließen aus der Bemerkung der aristophanischen Parodie[54]) *πάσχει δὲ ταὐτὸ τοῦτο καὶ τὰ κάρδαμα*, zumal es aus der oben angeführten Senecastelle feststeht, daß er sich der verdeutlichenden Analogie auch sonst bedient hat[55]). Weiterhin ist es ausgemacht, daß er ähnlich wie Empedokles über einen gewissen Reichtum empirischer Kenntnisse verfügte[56]) und daß sein Hauptverdienst in den Untersuchungen liegt, durch welche er die empirische Naturkenntnis und Naturerklärung zu fördern bemüht war[57]): so kann, meine ich, die Vermutung nicht von der Hand gewiesen werden, daß schon Diogenes es war, der die Pflanzenkunde eingehend in den Kreis seiner Betrachtungen zog. Daß dabei die Problemstellungen des Empedokles bereits auf ihn Einfluß geübt haben, kann nicht wundernehmen, da aus seiner Polemik gegen die Elementenlehre desselben[58]) folgt — was auch an sich wahrscheinlich wäre —, daß er dessen System und also doch auch wohl dessen Werk kannte. So neige ich also dazu, anzunehmen, daß Diogenes selbst es war, der, angeregt durch die von Empedokles aufgeworfenen botanischen Probleme, es unternahm, für diese nun auch von seinen Gesichtspunkten aus Lösungsversuche zu geben, und daß wir — wenigstens in den größeren, zusammenhängenden Exkursen — in den Meinungen des Hippokratikers im ganzen diogenisches Gut zu sehen haben: allerdings nur im ganzen; denn in Anbetracht der mehrfach erwähnten Selbständigkeit des Autors in Einzelfragen ist es uns nicht erlaubt, seine Theorien ohne weiteres als diogenisch zu bezeichnen. So führt auch hier die genauere Prüfung zur Zurückhaltung. Man wird sich damit bescheiden müssen, die allgemeine Richtung der verbindenden Fäden aufzuweisen, ohne das Gespinst im einzelnen auflösen zu können[59]).

Beilage III.

Die Darstellungsform der Vergleichungen.

Eigentümlichkeiten teils sprachlicher teils stilistischer Art, wie sie in der Beilage I zusammengestellt worden sind, finden sich gleichmäßig in allen Teilen des vorliegenden Komplexes. Schon dadurch würde, wenn

---

[54]) Nub. 234.

[55]) ut in lucernis oleum illo fluit ubi exuritur, sic aqua illo incumbit, quo vis caloris et terrae aestuantis arcessit.

[56]) Zeller[5] I, 1, 272.

[57]) Zeller[5] I, 1, 278.

[58]) Zeller I, 1, 275 (265, 2; 260, 2).

[59]) Auf einen besonderen Punkt möchte im Zusammenhang mit diesem Abschnitt vielleicht noch hinzuweisen sein: im Verlauf seiner pflanzengeographischen Betrachtung berücksichtigt der Autor, wenn auch nur polemisch abweisend, die

es dessen bedürfte, seine Entstehung aus derselben Feder erwiesen. Eine andre Erscheinung, die schon öfter die Aufmerksamkeit der Betrachter erregt hat, kommt noch hinzu, die vom sprachlich stilistischen Gebiet in das der Untersuchungsmethode hinüberführt. Es sind die oben kurz charakterisierten Vergleichungen, deren Form jetzt eingehender beschrieben werden soll, um ihren stereotypen Charakter zu zeigen. Das Material reicht bei der großen Zahl solcher Vergleiche durchaus zu einem sicheren Urteil hin. Daß die Form eine solche Beständigkeit erlangen konnte, erklärt sich einmal gerade aus dieser großen Zahl der vorkommenden Fälle, durch die natürlich eine häufige Wiederkehr typischer Wendungen begünstigt werden mußte; zum zweiten aber, und das ist wichtiger, aus der eigenartigen Vorliebe des Autors für formelhafte Ausdrucksweise überhaupt. So hat er sich auch für die Vergleichung eine Anzahl von Formtypen gebildet, die er nun mit derselben Konsequenz, aber auch Unbiegsamkeit, handhabt wie die oben analysierten stilistischen Formeln.

Schon die Anordnung ist von außerordentlicher Regelmäßigkeit.

Immer (mit ganz verschwindenden Ausnahmen) wird erst irgendein Vorgang beschrieben, hierauf folgt die Vergleichung[60]), nach dieser Vergleichung wird dann fast ebenso regelmäßig eine genaue, zusammenfassende Anwendung gegeben[61]): es hat immer besondere Gründe, wenn die Anwendung der Analogie unterbleibt; so etwa 478, 15, wo es sich nur um eine vergleichsweise kurze Darlegung handelt, oder wenn an ihre Stelle eine ausgiebige schriftstellerische Zusammenfassung tritt, wie 548, 7—10: da hat sich die Analogie zum großen Exkurs ausgewachsen, der viel mehr enthält, als der Vergleich erforderte; darum ist eine Anwendung im einzelnen unmöglich geworden.

---

ionische Klimatologie — aus dem c. 8 ergibt sich, daß ihm wohl das Buch π. ἀέρων bekannt war; dem Emp. scheint derartige Doktrin noch fremd gewesen zu sein, wenn man aus Plac. V, 26, 4 diesen Schluß ziehen darf. Doch kann die klimatische Lehre auch schon vor unserem Mediziner von Diogenes selbst herangezogen worden sein, zumal wenn dieser auch Arzt gewesen sein sollte (Krause I, p. 7).

[60]) Diese Anordnung findet sich an folgenden Stellen: 474, 25 ∼ 476, 1—5; 478, 1—11 ∼ 11—15; 482, 9—14 ∼ 14—21; 484, 6—8 ∼ 9—13; 486, 1—8 + 8—13 ∼ 486, 13 ff.; 496, 17—498, 15 ∼ 498, 15—25; 512, 3—7 ∼ 7—10; 518, 24—520, 2 ∼ 520, 2—13; 522, 15—20 ∼ 522, 20—524, 6; 536, 5—7 ∼ 8—24; 540, 1—8 ∼ 8—13; 544, 17—21 ∼ 544, 22—548, 7; 556, 15—17 ∼ 556, 18—558, 2; 580, 4—7 ∼ 7—13; 584, 8—13 ∼ 13—19; 586, 20—25 ∼ 25—588, 3; 590, 7—9 ∼ 9—12; 612, 3—6 ∼ 7—15. Die Beschreibung des Vorganges ist zuweilen ersetzt durch eine einfache Behauptung 506, 24—26 ∼ 508, 5—18; 588, 16 ∼ 17—22; 602, 6 ∼ 6—12.

[61]) Anwendung folgt dem Vergleiche:

1. kurz: 474, 25; 476, 4—5; 482, 21—22; 484, 11—12; 498, 24—25; 506, 8—9.
2. Ausführlich — die Fälle sind in der Überzahl: 512, 10—12; 528, 17—25; 524, 6—12; (530, 15—18 in der Form abweichend); 536, 24—27; 540, 13—16; 588, 2—6; 580, 13—20; 584, 19—23; 588, 3—7; 588, 22—25; 590, 12—15; 602, 13—15; 612, 13—18.

Die stereotype Formulierung greift aber noch viel weiter und beherrscht auch die besonderen Ausdrucksmittel vollkommen: nicht weniger als etwa bei den Abschluß- und Anfangsphrasen, die wir oben analysiert haben.

Die Einführung der Analogie erfolgt stets mit Hilfe derselben Grundformel, die aber dreifach variiert ist, je nachdem der Vergleich ganz kurz oder ausführlicher ist und im letzteren Falle eine Beobachtung als gegeben übernimmt oder durch Versuch (Experiment) herstellt[62]).

So entstehen 3 Typen: der einfachste und kürzeste beim kurzen Vergleich: etwa 562, 1 *ὥσπερ ἐν ἀγγείῳ*[63]); b) bei übernommenem Inhalt: etwa 584, 7 *ἔοικε δὲ τοῦτο ὥσπερ οἱ Σκύθαι ποιέουσιν*[64]); c) bei Anführung eines Experimentes 1. kürzer: 580, 7: *ὥσπερ εἴτις*[65]). 2. Ausführlicher mit Einleitung: beispielsweise 474, 22: *καὶ ἔχει οὕτως ὥσπερ εἴτις*[66]). 3. Mit Anrede an die zweite Person: 498, 17: *καὶ γὰρ εἰ θέλοις* und 530, 10: *εἰ γὰρ ἐθέλοις*[67]).

Der Abschluß — der nur bei ganz kurzen Vergleichen wohl gelegentlich einmal fehlt[68]) — ist für alle Fälle einheitlich gehalten: ein einfaches *οὕτω δέ*, *οὕτω καὶ*, *οὕτω δὲ καὶ* (häufig variieren die Handschriften mit *δή*), selten einmal (474, 22) *ὡσαύτως δὲ καὶ* oder *ὧδε δὴ* [*ὧδε καὶ*] z. B. 540, 1; 524, 1; 524, 6 stellt die Verbindung des Vergleichs mit der Zusammenfassung her, und zwar so, daß die Häufigkeit von *οὕτω δὲ* (*δὴ*) *καί* gegen das Ende des Komplexes immer größer wird und andere Stilisierung gänzlich ausschließt[69]).

Ja, mehr als das. Bei dem ausgeführtesten Vergleich — nämlich bei Heranziehung des Experimentes und Beschreibung einer Versuchsanordnung — sind die syntaktischen Mittel des Ausdrucks merkwürdig konstant:

1. 474, 22: *εἴ τις — ἐπιχεῖ, παύεται* ∾ 476, 1 *εἴ τις ἐπιχεῖ, συμβαίνει·*
2. 512, 7: *εἴ τις — ἀλείψειεν καὶ πιέζοι, διαπιδύοι ἄν·*
3. 530, 10/18: *εἰ γὰρ . . . ἐθέλοι, εὑρήσει* ∾ 580, 7 *εἴ τις ὑποκαίοι, ἔσται·*

nur einmal 590, 9: *ἤν τις ἐμβάλῃ, συνεπάχυνε* — hier aber kann man nur

62) Darüber vgl. weiter unten.

63) Oder 600, 12; 502, 1; 502, 6 (*οἷον*); 524, 13; 506, 6; 526, 14 u. a. m. Selten steht *καθάπερ* 470, 10.

64) Oder 586, 25; 602, 6; 484, 9; 514, 6; etwas anders 520, 2.

65) Vgl. 588, 17; 612, 3; 474, 22; 478, 11; 512, 4.

66) Vgl. 482, 14; 522, 8; 590, 7 mit Anschluß an b: *ἔοικε δὲ καὶ τοῦτο τὸ πάθος γάλακτι· ἐπὴν τις . . .*

67) Etwas anders bei nicht eigentlichem Vergleich: 508, 15 *σημήιον δὲ ὅτι*, 536, 6; 540, 1: *τούτῳ δὲ τῷ λόγῳ . . . ἱστόριον τόδε ἐστίν* und vor Beginn eines ganzen Exkurses 544, 16.

68) Z. B. 502, 1, 6; 524, 13.

69) So etwa 556, 15; 580, 4; 584, 7; 586, 20; 588, 22; 590, 7; 602, 13; 612, 15.

mit Einschränkung von einem Experimente reden. Während also immer *εἰ* c. ind. oder opt. angewendet wird, wenn eine Bedingung vorangeschickt wird, zeigt sich eine seltsam konstante Abwechslung, wenn zwei Konditionalsätze gebildet werden:

vgl. 478, 11: *εἴ τις τήξειε, γίνεται· ἐπὴν δὲ . . . γίνεται·*
522, 20: *εἴ τις ἀποπιέσειεν — ποιήσειε — αἰωροίη, χωρήσει·*
ἢν δὲ ποιήσῃς — αἰωροίης (sic!), *διαχωρήσει·*
498, 17: *εἰ ἐθέλοις, μίξεται, ἐλεύσεται· ἤν τις ἐάσῃ — σκέψηται, εὑρήσει·*
556, 17: *εἴ τις διαθείη — ἐγχέοι, ῥεύσεται·*
ἤν τις ἀπαρύσῃ, ἀνταποδώσει — ἔσται·
588, 17: *εἴ τις — καταστρέψειεν, δυνήσεται· ἤν τις — ἀποκλίνῃ, ἔσται·*

nur einmal 612, 13 *εἴ τις — καταστρέψειεν — ἀφέλοι, οὐκ ἐκρεύσεται·*
εἴ τις — κλίνειε — τρήσειεν, ἐξελεύσεται.

Der Autor wählt also im ersten Satze regelmäßig *εἰ* mit Opt., im zweiten Satze *ἤν*, das er einmal sogar mit dem Optativ verbindet.

Der Gebrauch des Subjekts in diesen Sätzen schwankt, wie schon die angezogenen Beispiele belegen: gewöhnlich ist *τις* (etwa 474, 22; 478, 11; 482, 14; 512, 3; 520, 2), das anfänglich zuweilen in Kombination mit der Anrede erscheint (522, 20ff.: *ἢν ποιήσῃς — αἰωροίης*, 498, 17: *εἰ ἐθέλοις*, 530, 3: *εὑρήσεις* [bis], Anrede ohne eingemischten Gebrauch von *τις* kommt m. W. nicht vor), später die Alleinherrschaft gewinnt [70]; auch dies wieder ein Beleg dafür, wie der Stil des Autors im Fortgange seiner Arbeit an Konstanz, aber auch an Eintönigkeit zunimmt — übrigens auch ein Indizium dafür, daß die drei Schriften in fortlaufender Reihe hintereinander verfaßt sind.

Natürlich treten an gewissen Stellen freiere Gestaltungen ein. So, wenn zum Beispiel sich eine solche Analogie zu einem ganzen Exkurs auswächst, wie z. B. c. 22—27 über die Pflanzen. Man sieht ihm seine Abkunft aus dem Vergleich noch ganz wohl an. Er beginnt 514, 6—8 mit einer Behauptung: *ὅκως ἂν ἡ μήτηρ ἔχῃ ὑγιείης ἢ ἀσθενείης, ὧδε καὶ τὸ παιδίον ἔχει.* Hierauf kommt die typische Einleitung des Vergleichs: *ὥσπερ καὶ τὰ ἐν τῇ γῇ φυόμενα.* Es wird aber daraus die über viele Seiten ausgedehnte Phytologie des Autors.

Der Schluß ist dementsprechend reicher ausgestattet (528, 15—16 Rechtfertigung für den langen Exkurs, 17/18 Rückkehr zum Thema, 18—20 Ergebnis), aber auch hier finden wir den typischen Abschluß: *οὕτω καὶ τὸ παιδίον ζῇ ἀπὸ τῆς μητρός* mit genauer Durchführung des Vergleichs, soweit Vergleichsmomente noch geblieben sind.

---

[70]) So 556, 15; 580, 4; 588, 12—16; 590, 7; 612, 3, ohne daß noch einmal in dieser Verbindung eine Anrede aufträte.

Aus einem anderen Grunde ist die übliche Form durchbrochen. 530, 3ff.; hier legte der Autor den größten Wert auf möglichst eindrucksvolle Ausführung eines Glanzstückes, nämlich des Brütversuches, der die Entwicklung des jungen Huhns im Ei illustrieren sollte. Hier erhalten wir erst eine Ankündigung (3—5) mit der methodisch recht interessanten Einschränkung: *διάγνωσιν (ἐρῶ) ὡς ἀνυστὸν ἀνθρωπίνῃ γνώμῃ ἐμφανέα ἐοῦσαν*, dann folgen in langer Aufzählung die Themata probanda, die hier an die Stelle der einen Behauptung getreten sind.

Auch der Übergang zur Analogie ist ausführlich gehalten: *καὶ τὴν ἄλλην φύσιν τοῦ παιδίου, ἣν εἴρηκα, ὧδε ἔχουσαν εὑρήσεις, πᾶσαν μέχρις ἐς τέλος, ὅκως μοι ἐν τοῖσι λόγοισι ἀποπέφανται, εἰ βούλεταί τις τοῖσιν ἱστορίοισιν, ὁκόσοισι μέλλω λέγειν, χρῆσθαι.*

Es beginnt dann die eigentliche Analogie: *εἰ γάρ τις ἐθέλοι, οὕτως ἔχοντα εὑρήσεις* (sic!).

Der Inhalt ist hergestellt: der Brutversuch.

Am Ende wird noch einmal auf das Erstaunliche des Beobachteten hingewiesen, eine Bekräftigung hinzugesetzt und die übliche Abschlußformel angebracht:

καίτοι ἤν τις μηδέπω ἴδῃ (*εἶδε* Hss.), *θαυμάσει ἐν ὀρνιθείῳ ᾠῷ ἐνεόντα ὀμφαλόν· ἔχει δὲ ὧδε τάδε· καὶ ταῦτά μοι ὧδε εἴρηται.*

Solche Ausnahmen können aber den Gesamteindruck von Starrheit und Eintönigkeit der Stilisierung nicht beeinträchtigen.

Beilage IV.

Der Klepsydravergleich des Empedokles.

Das berühmte Stück scheint noch nicht richtig behandelt und verstanden zu sein. Sowohl der Text (Diels, Vors.[4] 21 B 100) wie die Übersetzung geben noch zu Bedenken Anlaß. Der dort gesammelten Literatur ist aus neuerer Zeit noch hinzuzufügen Bignone, Empedocle, S. 471 bis 473, der sich ganz eng an Diels anschließt und J. U. Powell, Class. Quarterly XVII (1923), 172ff., der gegen einige Punkte richtig polemisiert, ohne zu einem befriedigenden Gesamtergebnis zu gelangen. Festzuhalten ist zunächst, daß es sich bei dem Gegenstand nicht um eine „Wasseruhr", im Sinne eines Zeitmessers handelt, sondern um ein Hausgerät, um einen Heber für Wasser und Wein, dessen Gebrauch Heron, Pneumatika I, 7 (I, S. 56ff., Schmidt) behandelt. Das Material steht in R. E. s. v. von Thalheim gesammelt. Abbildungen von Fundstücken z. B. bei Zahn, A. M. 1899, S. 338ff. Das physikalische Problem wurde von Anaxagoras übernommen und besprochen: vgl. [Aristot.] Problem. 16, 8, 914b 33.

Einsetzen wird man am besten bei den Versen 16—21.

Da drängen sich gegenüber der Interpretation und Übersetzung von Diels einige Fragen auf.

1. Wie kann die Luft, die von außen nach innen strebt, das Naß an den Ausgang des.. Halses zurückdrängen, „indem sie die Spitze des Halses besetzt“ hält?

2. Wie kann das Wasser, das die Tiefe des Erzes innehat, d. h. „den Bauch des Erzgefäßes füllt“, durch die Luft, die von draußen nach drinnen strebt (was sie nur durch Löcher des Siebes tun kann), an den Ausgang des ... Halses zurückgedrängt werden?

3. Heißt *ἐρύκειν* „zurückdrängen“?

4. Wo ist der zu *ὡς δ' αὔτως* gehörige Satz? Denn *τότε δ' αὖ πάλιν* ist klärlich ein neuer Einsatz, steht dem *αὐτὰρ ἔπειτα* (v. 14) parallel und beschreibt die Folge des Loslassens, wie oben; wird auch durch *ἔμπαλιν ἢ πρίν* ausdrücklich mit dem ersten Experiment in Beziehung gesetzt.

Zuerst muß man versuchen, sich die Sache ganz klar zu machen.

Es handelt sich um 2 Versuche. 1. Die Klepsydra ist leer und durch die Hand oben verschlossen. Was geschieht, wenn sie so ins Wasser getaucht wird? Es fließt kein Wasser ein. Grund dafür: der Druck der Luft, der von innen (13 *ἔσωθε πεσών*) sich stürzt auf die zahlreichen Öffnungen (*τρήματα πυκνά* ebd.) des Siebes. Erfolgt das Abdecken der Hand, so gibt die Luft (nach oben) nach (*πνεύματος ἐλλείποντος* 15) und der gehörige Teil Wasser dringt ein (*ἐσέρχεται αἴσιμον ὕδωρ* 15).

2. Nach v. 20 *ἔμπαλιν ἢ πρίν* soll der Versuch den entgegengesetzten Effekt haben. Die Klepsydra ist nicht leer, sondern voll. Das steht in den Versen 16 u. 17. Der Hals der Klepsydra ist durch die Hand verschlossen. Das steht im Verse 17. Was geschieht? Kein Wasser fließt aus. Grund: Druck der Luft hält das Wasser zurück: auch das steht da: v. 18 *ὄμβρον ἐρύκει* (so die Handschriften). Welcher Druck? Worauf, d. h. in welcher Richtung wirkt er? Wir verlangen: von unten gegen die Löcher des Siebes. Das Abdecken erfolgt, das steht v. 20 *εἰσόκε χειρὶ μεθῇ*. Die Folge: von oben (v. 21 *πνεύματος ἐμπίπτοντος*) stürzt die Luft hinein — unten (*ὑπεκθεῖ* 21) fließt das Wasser aus. Das erwarten wir sachlich dargestellt zu finden. Dafür gibt, wie gezeigt, auch der Text die Anhaltspunkte. Zweierlei ist nötig als Konsequenz aus diesen Voraussetzungen zu ziehen. 1. Der Nachsatz der zweiten Periode (= des 2. Experimentes) beginnt v. 18 mit *αἰθὴρ δ'*. Daß das sprachlich möglich ist, wird nachher belegt werden. 2. Muß man klar fragen: wo beherrscht die Luft die Oberfläche? Wo hält sie das Wasser zurück? Das Wasser will nach unten ausfließen; also durch das Sieb. Es kann, weil die Luft dagegen drückt, nicht hindurch — durch das Sieb. Also nicht in 19 *ἰσθμοῖο*, sondern

ἠθμοῖο, obwohl es nur „wenige Handschriften" bieten. Auch in v. 15 haben nur „wenige" das richtige Wort αἴσιμον, die „meisten" das falsche αὔξιμον. ἠθμός ist Terminus für diesen Teil: [Aristot.] Probl. 16, 8, 914b, 33. Sturz entschied sich dafür und Burnet zieht es vor. Mit Recht, wie sich zeigt, denn der Sachverhalt erfordert es.

Die formale Bestätigung wird geliefert dadurch, daß sich bei dieser Auffassung und Gliederung ein genauester Parallelismus im syntaktischen Aufbau der beiden Perioden zeigt, die die beiden Experimente beschreiben.

a) 10/11:	εὖτε μὲν αὐλοῦ πορθμὸν ἐπ' εὐειδεῖ χερὶ θεῖσα εἰς ὕδατος βάπτῃσι τέρεν δέμας ἀργυφέοιο
zu 16/17:	ὡς δ' αὔτως ὅτ' ὕδωρ μὲν ἔχῃ κάτα βένθεα χαλκοῦ πορθμοῦ χωσθέντος βροτέῳ χροὶ ἠδὲ πόροιο
b) Nachsatz 12/13:	οὐκέτ' ἐς (ci) ἄγγοσδ' ὄμβρος ἐσέρχεται, ἀλλά μιν εἴργει ἀέρος ὄγκος ἔσωθε πεσὼν ἐπὶ τρήματα πυκνά
zu 18/19:	αἰθὴρ δ' ἐκτὸς ἔσω λελιημένος ὄμβρον ἐρύκει ἀμφὶ πύλας ἰσθμοῖο bzw. ἠθμοῖο δυσηχέος ἄκρα κρατύνων.
c) Temporalsatz 14:	εἰσόκ' ἀποστεγάσῃ πυκινὸν ῥόον
20:	εἰσόκε χειρὶ μεθῇ
d) Effekt 14/15:	αὐτὰρ ἔπειτα πνεύματος ἐλλείποντος ἐσέρχεται αἴσιμον ὕδωρ
20/21:	τότε δ' αὖ πάλιν, ἔμπαλιν ἢ πρίν, πνεύματος ἐμπίπτοντος ὑπεκθέει αἴσιμον ὕδωρ.

Der gleiche Abschluß markiert den Parallelismus besonders. Aristoteles hat den Empedokles nicht umsonst den Erfinder der Rhetorik genannt. Vgl. Vors.[4] 21 A 1, 57. Gewiß wäre ἰσθμοῖο δυσηχέος: „des glucksenden Halses" an sich gut. Doch kann gerade Powell, der sachlich richtiger erklärt als Diels, dann damit nichts anfangen. Und es ist weiter zu fragen, kann das beim Einströmen der Luft und beim Ausströmen des Wassers leise tönende Erz nicht auch so genannt werden? Vgl. auch v. 7: παφλάζων von der Luft. 2. Die Aufnahme eines μέν im Nebensatz durch ein δέ im apodotischen Hauptsatz findet sich, auch nach einem temporalen Vordersatz, gerade so im λ 387 αὐτὰρ ἐπεὶ ψυχὰς μὲν ἀπέσκεδασ' ἄλλυδις ἄλλη / ἁγνὴ Περσεφόνεια γυναικῶν θηλυτεράων, ἦλθε δ' ἐπὶ ψυχὴ Ἀγαμέμνονος Ἀτρεΐδαο. Ein ähnlicher Gebrauch scheint auch der älteren Prosa nicht ganz fremd zu sein: Herodot IX, 70 ἕως μὲν γὰρ ἀπῆσαν οἱ Ἀθηναῖοι, οἱ δ' ἠμύνοντο und Thukyd. III, 98 μέχρι μὲν οὖν οἱ τοξόται εἶχόν τε τὰ βέλη αὐτοῖς καὶ οἷοί τε ἦσαν χρῆσθαι, οἱ δὲ ἀντεῖχον· vgl. Kühner-Gerth II, 2, 275/76.

Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung.

Von O. Neugebauer, Göttingen.

(Eingegangen am 14. 12. 29.)

Seit Hincks 1854 an dem sogenannten „Täfelchen von Senkereh“ die Tatsache entdeckt hatte, daß im Zweistromlande ein Zahlensystem in Gebrauch gewesen war, das 60 an Stelle von 10 als Basis verwandte, hat das Interesse an dieser Erscheinung nicht aufgehört. So sehr aber auch über sie diskutiert wurde, so wenig hat man versucht, sie in tieferen Zusammenhang mit der geschichtlichen Entwicklung des mathematischen Denkens zu bringen. Schon der Name „Sexagesimalsystem“ bezieht sich nur auf den nebensächlichsten Punkt; denn die „sexagesimale“ Schreibung der Zahlen gibt dem System gar nicht sein besonderes mathematisches Gepräge, da nicht etwa 59 Zahlzeichen für 1 bis 59 existieren, sondern nur zwei, nämlich 1 und 10, woraus in bekannter additiver Weise alle Zahlen unter 60 zusammengesetzt werden ($23 = 10{,}10{,}1{,}1{,}1$). Man hat es also zunächst mit einem harmlosen Dezimalsystem zu tun, wie auch sonst überall im alten Orient. Dieses System wird nun dadurch unterbrochen, daß nicht bis zu einem neuen Zahlzeichen „100“ weitergegangen wird, sondern Potenzen von 60 statt von 10 als weitere Einheiten gezählt werden. Aber auch darin liegt noch nicht das eigentlich Entscheidende, — die vigesimalen Zahlensysteme u. ä. würden Analoga (wenn auch leichter erklärbare) abgeben. Der immer wieder übersehene, mathematisch wesentliche Punkt besteht in folgendem: Orientiert an der sprachlichen und schriftlichen Ausdrucksweise aller autochtonen Zahlensysteme würde man erwarten, daß für die nächste Stufe nach 10 (also hier 60) ein neues Zahlzeichen erscheint, das nun ebenso additiv verwendet wird, wie bisher 1 und 10 (etwa $72 = 60,\ 10,\ 1{,}1$); an Stelle des Komplexes von 6 Zehnern hätte ein neues Symbol zu treten, wie die Zehn für 10 Einer. Nichts davon geschieht, vielmehr tritt das alte Zeichen „1“ an die Stelle eines neuen Zeichens (d. h. $72 = 1{,}10{,}1{,}1$[1]))!

Man muß sich klar machen, daß dies ungleich mehr besagt, als die Ersetzung von 6 statt 10 Zehnerzeichen durch ein neues Zahlzeichen.

---

1) Im folgenden wird diese Zahlschreibung immer nach dem Schema $72 = 1{,}12$ abgekürzt (vgl. oben S. 68, Anm. 3).

Letzteres bedeutet nach dem dezimalen Anfang zwar eine Inkonsequenz, aber an solchen ist in der Geschichte von Schrift, Sprache, Zählen usw. kein Mangel. Jedoch die Verwendung des primitivsten Symbols der Zahlenschreibung, der Einermarke 𒁹, nicht nur für diese 1, sondern auch für 60, ja sogar für alle positiven und negativen Potenzen von 60, bedeutet die Einführung einer auf den ersten Blick katastrophalen Mehrdeutigkeit in ein Gebiet, wo man sie am wenigsten gebrauchen kann, in das Zahlenrechnen. Und wie katastrophal diese Mehrdeutigkeit sich auswirken konnte, ist heute noch an der Tatsache zu erkennen, daß nicht die philologische Schwierigkeit der mathematischen Texte das Haupthindernis ihrer Interpretation gewesen ist, sondern fast ausschließlich das Mißverstehen der Zahlenangaben.

In mehrfacher Hinsicht haben wir hiermit den zentralen Punkt des ganzen Fragenkreises berührt. Mit dem Aufgeben des klassischen Prinzips der Zahlenschreibung durch „Individualzahlzeichen" (d. h. besondere Zahlzeichen für jede Potenz der Basis) ist der Weg für eine der größten Entdeckungen, der Möglichkeit einer „Positionsbezeichnung", frei geworden. Ich bin überzeugt, daß es nur eine Frage der Zeit ist, erkennen zu können, daß das indische (dezimale) Positionsystem, das wir heute benutzen, durch das babylonische Vorbild angeregt ist — in demselben Sinne etwa, wie die Buchstabenschrift durch die „syllabischen" Schreibungen der Ägypter beeinflußt erscheint. Freilich ist das babylonische System alles andere als ein „Positionssystem" im modernen Sinne. Es fehlt nämlich dazu ein absoluter Stellenwert, d. h. eine feste Methode, um anzugeben, welche Potenz der Basis 60 mit „1" gemeint sei (was etwa durch eine „Null" zu leisten wäre).

Dieser offensichtliche Mangel hat aber Konsequenzen von größter Tragweite. Es ist bekannt, daß antike und mittelalterliche Bruchrechnung, vor allem im Bereiche der Astronomie, durch das Operieren mit „Sexagesimalbrüchen" charakterisiert wurde — unsere Minuten und Sekunden sind noch ein beredtes Zeugnis dafür. In der Tat bringt es die Unbestimmtheit von Faktoren 60^k mit beliebig hohem auch negativem k mit sich, daß man jede „sexagesimale" Rechnung auch als Rechnung mit Brüchen auffassen kann, so daß eine besondere „Bruchrechnung" in Babylonien eine ebenso überflüssige Disziplin sein konnte, wie heute bei uns. In der Tat nimmt auch Babylonien dadurch eine extreme Sonderstellung unter allen Völkern der Antike ein, daß es frei von all den Sorgen scheint, die die Bruchrechnung allen anderen Zeitgenossen (und Nachfahren) gemacht hat. Und wenn man die Virtuosität beachtet, die sich in der Handhabung dieses „pseudopositionellen" Rechnens schon in den ältesten mathematischen Texten ausspricht (es genügt, die in vorangehenden Seiten veröffentlichten Beispiele zu lesen), so wird man zugeben, daß die babylonische Rechentechnik mit Hilfe ihres Zahlensystems bei weitem alles hinter sich läßt, was wir sonst aus dem Altertum kennen.

Das Ziel dieser Arbeit ist nicht die Konstatierung dieser an sich bekannten Tatsache. Im Gegenteil: sie will auch diese Einzigartigkeit der babylonischen Arithmetik als Produkt einer historischen Entwicklung erfaßbar machen. Der Positionscharakter des „Sexagesimalsystems" ist dabei wieder entscheidend; entscheidend als Ansatzpunkt für die Erklärung der Entstehungsgeschichte des Zahlensystems als solchen, entscheidend aber auch für die Verwischung der Entwicklungsspuren in der Rechentechnik selbst, so daß ein Weiterkommen hier nur einem Zufall zu danken war. Trotzdem hoffe ich, daß das Erreichte tragfähig genug ist, um als Fundament für eine Ideengeschichte der antiken Rechentechnik und Arithmetik dienen zu können.

Das Problem der Entstehung des „Sexagesimalsystems" habe ich in einer 1927 erschienenen Arbeit[2]) ausführlich behandelt. Im einzelnen darauf zurückzukommen erweist sich um so mehr als untunlich, als mit der Geschichte dieses Zahlensystems ein weiter Fragenkreis über die Geschichte der sumerischen Zahlen- und Maßsysteme verknüpft ist, zu dessen neuerlichen Darlegung mir jetzt die Möglichkeit fehlt. Ich glaube mich darauf beschränken zu dürfen, das wesentlichste der Resultate zu wiederholen — trotz der abweichenden Ansicht, die der Altmeister der sumerischen Sprachwissenschaft, Fr. Thureau-Dangin im Anschluß an meine Betrachtungen geäußert hat[3]). Denn Thureau-Dangins eigene Theorie leistet gerade nicht die Erklärung desjenigen Zuges des Systems, den ich oben als den wesentlichsten bezeichnet habe: des positionellen Einschlages, oder besser der Mehrdeutigkeit der Ziffernschreibung[4]).

Dieser positionelle Einschlag kann keine ursprüngliche Eigenschaft des Zahlensystems sein, denn das hieße, in völlig künstlicher und unbegründeter Weise auf die Eindeutigkeit im Ausdruck der Zahlen zu verzichten, und dies bereits in einer Entwicklungsphase, in der von bewußter mathematischer Spekulation, die allein einen solchen Schritt rechtfertigen könnte (dann aber notwendig gleich in wesentlich vollkommener Form

[2]) Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abh. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, Math. phys. Kl. N. F. Bd. 13,1.

[3]) L'origine du système sexagésimal, Rev. d'Ass. 25 (1928), S. 115ff., sowie ein „Postscriptum" dazu Bd. 26, S. 43 derselben Zeitschrift.

[4]) Ich hoffe, diesen ganzen Fragenkreis nochmals im einzelnen bei anderer Gelegenheit behandeln zu können, unter Berücksichtigung dessen, was ich in der Zwischenzeit hinzugelernt habe.

mit absoluter Position!), nicht die Rede sein kann. So scheint mir nur der eine Weg gangbar, dieses Pseudopositionssystem als Überbleibsel einer älteren Bezeichnungsweise zu verstehen zu suchen, in der die Mehrdeutigkeit der Bezeichnungen entweder nicht bestand oder nebensächlich war, die aber doch den Keim für die spätere Gestaltung in sich trug. Ein solches Zahlgebiet zu finden ist nicht schwer: es sind die Zahlbezeichnungen der Metrologie. Es ist eine täglich zu beobachtende Erscheinung, daß Angaben des Messens und Rechnens im täglichen Leben der besonderen Bezeichnung der Einer nicht bedürfen, da jeder weiß, welchen Absolutwert die einzelnen (benannt gedachten) Zahlen jeweils haben müssen. Dabei ist es auch unmittelbar naheliegend, die einzelnen Stufen der Maß-, Geld- oder sonstigen Einheiten immer von neuem mit Einern zu zählen, d. h. den ersten Schritt zur „Positionsbezeichnung" der Zahlen zu tun — hier aber ganz von selbst mit dem charakteristischen Mangel des Verzichtes auf die Angabe des metrologisch selbstverständlichen „absoluten" Stellenwertes.

Die Verfolgung dieses Gedankens führt dazu, die Geschichte des gesamten „Sexagesimalsystems" in das Gebiet der Metrologie zurückzuverlegen. Ich glaube, daß es mir gelungen ist, Ursachen aufzuweisen, die in der historisch gegebenen Struktur des sumerischen Maßsystems gelegen sind, und die zur Motivierung der Tatsache ausreichen, daß in der Folge der Einheiten von der a priori gegebenen und benutzten dezimalen Zählweise abgegangen wurde, um eine sukzessive Versechzigfachung aufeinanderfolgender Maßeinheiten zu bevorzugen — ohne dabei in dem schriftlichen Ausdruck der Zahlen von dem alten additiv-dezimalen System abzulassen, wie es für den Zahlausdruck als solchen längst neben aller Metrologie entwickelt war[5]). Die Tatsache, daß in praxi Zahlen und Zahlenrechnen eben nur beim Messen und geschäftlichen Rechnen eine Rolle spielen, führt dann ganz von selbst dazu, daß alles Rechnen diesen Erfordernissen angepaßt wird — das Resultat ist genau jenes dezimale, pseudopositionelle „Sexagesimalsystem", das später das Zahlensystem der mathematischen Texte wurde, während das Zählen des Alltags im Laufe der wechselvollen Geschichte des Zweistromlandes immer stärker auf das an sich so naheliegende Dezimalsystem (mit einer neuen „Individualbezeichnung" (!) für 100) zurückkam.

Die babylonische Mathematik — „babylonisch" ist dabei eine sehr oberflächliche Bezeichnung für die komplizierte Übereinanderschiebung der verschiedensten Völker und Rassen — hat ihre enge Beziehung zur

---

[5]) Für die Einzelheiten vgl. die oben S. 185 zitierte Abhandlung. Als allgemeinere Übersicht kann ein Vortrag „Über vorgriechische Mathematik" dienen, der in den „Abh. aus dem Math. Sem. d. Hamburg. Univ.", Bd. 7 (1929), S. 107ff. erschienen ist (= Hambg. Math. Einzelschriften, Heft 8).

Metrologie nie verleugnet. Die lange Zeit allein bekannten (oder wenigstens allein diskutierten) „mathematischen Texte“ bestanden in „Rechentafeln“ zur Durchführung der Multiplikation, Division usw., denen eine etwa gleich große Menge völlig analog angelegter „metrologischer Tafeln“ zur Seite stand — die Publikation von Hilprecht aus den Grabungen der Pennsylvania University in Nippur ist das klassische Beispiel. Wie etwa die Multiplikationstafeln die sukzessiven Multipla einer Zahl aufzählen, so nennen die metrologischen Tafeln die sukzessiven Multipla einer Maßeinheit — nur mit dem Unterschied, daß sie jeweils den Namen der betreffenden Einheit hinzufügen. Oft sind beiderlei Typen auf einer Tafel vereinigt, offenbar für den Gebrauch in der Praxis des geschäftlichen Rechnens bestimmt.

Neben Wirtschaftstexten, Lohnlisten und Abrechnungen (die es zu Tausenden gibt), gehören diese Rechentafeln zu den ermüdendsten Produkten der Keilschriftliteratur. Hilprecht legte zwar zunächst in seiner großen Publikation[6]) mehr in diese Texte hinein, als einer strengen Kritik standhalten konnte — die Absurdität, die in der völligen Unbestimmtheit aller Zahlenangaben hinsichtlich Faktoren 60^k zu liegen schien, veranlaßte ihn, allen Zahlen doch einen Absolutwert zuzuschreiben und zwar „1“ als 12960000 ($=60^4$) zu lesen, indem er die ausgezeichnete Rolle gerade dieser Zahl aus ihrer Bedeutung bis in die Platonische Zahlenmystik hinein zu belegen suchte. So viel ich weiß, hat als erster Ungnad gegen diese unhaltbaren Spekulationen Einspruch erhoben[7]) und darauf hingewiesen, daß gerade die Unbestimmtheit der babylonischen Zahlbezeichnung sie zu einem besonders elastischen Werkzeug der Rechnung machen mußte — eine Einsicht, die sonderbarerweise ohne alle Wirkung blieb[8]), abgesehen von der Erledigung der Bezugnahme auf die Zahlenmystik. Das kulturelle Interesse dieser Texte schien mit begraben.

---

[6]) Babylonian Expedition of the University of Pennsilvania, Ser. A. Vol. 20,1.

[7]) Zeitschr. f. Ass. 31, (1917/18) S. 156ff.

[8]) Vermutlich deshalb, weil Ungnad selbst die Tragweite seiner Feststellung nicht übersah; sagt er doch Oriental. Lit. Ztg. 19 (1916), Sp. 366: „Der Babylonier kann infolge des Sexagesimalsystems nicht so einfach, wie wir es tun, Divisionen vornehmen.“ Dem von Ungnad als umständlich angeführten Beispiel der Division $30:5$ als $^1/_5 = 0;12$ $\quad 30 \cdot 0;12 = 6$ darf nicht „unser“ $30:5 = 6$ gegenübergestellt werden (denn zu wissen, daß $30 = 5 \cdot 6$ ist, bleibt den Babyloniern ebensowenig benommen, wie uns), sondern $^1/_5 = 0,2$ $\quad 30 \cdot 0,2 = 6$. Man darf nicht Kürzen und Divisionsalgorithmus verwechseln: Ersteres ist eine von der Basis des benutzten Zahlensystems unabhängige Sache, da es nur auf das Erkennen gemeinsamer Faktoren ankommt; letzteres dagegen ist in seiner Anwendbarkeit wesentlich durch die Teilbarkeitseigenschaften der Basis bedingt. So müssen wir, wenn wir 30 durch 9 „dividieren“ wollen, bereits zu dem unendlichen Dezimalbruch 0;1111 . . . Zuflucht nehmen, während im Sexagesimalsystem $^1/_9 = 0;6,40$ ist, also noch ein (im antiken Sinne) „mög-

Die Gleichförmigkeit der uns hier allein beschäftigenden Multiplikations- und Reziprokentabellen ist in der Tat wenig anziehend. Die Struktur einer „Multiplikationstabelle" ist, bis auf kleine Abweichungen in den Beischriften und der Terminologie, immer diese: Eine bestimmte Zahl — ich nenne sie die „*Kopfzahl*" a der betreffenden Tabelle — wird Schritt für Schritt mit allen Zahlen von „1" bis „20" multipliziert, dann noch mit „30", „40", „50", um schließlich bei dem Produkte „1 mal a ist a" zu endigen, wo „1" eben die nächsthöhere Potenz von 60 nach der „1" der ersten Zeile der Tabelle repräsentiert.

Ähnlich sehen die „Reziprokentafeln" aus. Man ersieht aus der Gegenüberstellung

1	1
2	30
3	20 usw.,

daß links immer die Zahl n, rechts das sexagesimale Äquivalent für $1/n$ angegeben ist. Von Interesse sind natürlich diejenigen Zeilen, in denen ein „n" stehen müßte, das zu einem unendlichen Sexagesimalbruch Anlaß geben würde — es sind dies offenbar diejenigen Zahlen, die nicht nur aus Potenzen von 2, 3 und 5 bestehen [9]), also z. B. 7, 11, 13, 14 usw. Einige Texte lassen nun solche Zahlen einfach aus, andere bemerken: „es teilt nicht" oder ähnlich. — Beispiele von genäherter Angabe eines unendlichen Sexagesimalbruches sind mir bis jetzt nicht bekannt.

Der Umfang dieser Reziprokentabellen ist recht verschieden. Einige Tabellen beschränken sich auf die Zahlen aus dem Intervall einer einzigen Sechzigerpotenz (von 60^k bis 60^{k+1}). Andere gehen etwas über dieses Intervall hinaus, wieder andere haben einen geradezu ungeheuren Umfang. Der Zeit nach erfüllen alle diese Texte mindestens die anderthalb Jahrtausende zwischen dem Ende der sumerischen Epoche und dem Hellenismus.

So eintönig alle diese Tabellen an sich sind, so verschieden sind sie doch in ihrer Zusammenfassung. Oft gibt es kleine Einzeltafeln für die

liches" Resultat $0;6,40 \cdot 30 = 3;20$ liefert, wo es beim Dezimalsystem nicht mehr gehen würde.

[9]) Soll nämlich

$$1/n = a_1 \cdot 60^{-1} + a_2 \cdot 60^{-2} + \ldots + a_s \cdot 60^{-s} \begin{cases} 0 \leqq a_i \leqq 59 & \text{für } i = 1, 2, \ldots, s-1 \\ 0 < a_s \leqq 59 \end{cases}$$

sein, so folgt nach Multiplikation mit 60^s

$$60^s/n = a_1 \cdot 60^{s-1} + a_2 \cdot 60^{s-2} + \ldots + a_s,$$

was soviel besagt, als daß $60^s/n$ eine ganze Zahl sein muß, weil alle Zahlen der rechten Seite der letzten Gleichung ganze Zahlen sind. Für die Endlichkeit der Sexagesimalbruchentwicklung von $1/n$ ist also notwendig, daß eine Potenz von 60 durch n teilbar ist, was eben bedeutet, daß n keine anderen Primfaktoren als 2, 3 und 5 haben darf. Es ist klar, daß diese Eigenschaft von n auch hinreichend für das Abbrechen des Sexagesimalbruches für $1/n$ ist.

Multiplikation einer Kopfzahl, oft sind mehrere Multiplikationstabellen auf einer Tafel gesammelt, oft auch mit Reziprokentabellen, Quadrat- und Kubikzahllisten oder metrologischen Tabellen kombiniert. In der Auswahl der einzelnen Tabellen solcher „kombinierter“ Tafeln scheint oft reine Willkür zu herrschen — unterstrichen durch die Tatsache, daß sich etwa dieselbe Multiplikationstabelle auf einer Tafel mehrmals finden kann.

Daß aber die Zusammenstellung dieser kombinierten Tafeln nicht immer reine Willkür sein muß, lehrt eine Tafel, die Lutz im American Journal of Semitic Languages and Literatur vol. 36, S. 249ff. veröffentlicht hat. Die erste ihrer 12 Kolumnen enthält eine jener Reziprokentabellen, von denen oben die Rede war, diesmal bald nach „1“ abbrechend, indem sie noch angibt, daß sich

1,4	56,15
1,12	50
1,20	45
1,21	44,26,40

als Reziproke zugeordnet sind[10]). Die in diesem Intervalle noch „mögliche“ Zahl 1,15 ist ausgelassen.

Die nächste Kolumne ist eine Multiplikationstabelle, und zwar für die Kopfzahl 50. Sie gibt, wie üblich, sämtliche Multipla von 1 bis 20, dann noch 30 und 40, und schließt mit den Zeilen:

50 mit 50 (ist) 41,40.
41,40 (hat) 50 (als) Quadratwurzel.
Das Reziproke von 50 (ist) 1,12.
Das Reziproke von 1,12 (ist) 50.

Völlig analog sind alle restlichen Multiplikationstabellen dieses Textes (nur aus solchen besteht er, abgesehen von der einen Reziprokenliste von Kol. I) angelegt[11]).

Die tiefere Bedeutung dieses Textes wird mit einem Schlage klar, wenn man sich die Liste aller aufeinanderfolgender Kopfzahlen aufschreibt:

Kol. II	50	Kol. VIII	30
Kol. III	48	Kol. IX	25
Kol. IV	45	Kol. X	24
Kol. V	44,26,40	Kol. XI	22,30
Kol. VI	40	Kol. XII	20
Kol. VII	36		

[10]) Auf eine Wiedergabe des Textes im einzelnen möchte ich hier verzichten, da dies doch in Kap. II von „Quellen und Studien“, Abtlg. A, Bd. 2 geschehen wird.

[11]) Unwesentlich ist, daß die anderen Tabellen vor der Angabe von n^2 noch den Wert $50 \cdot n$ nennen, während dies in Kol. II mit n^2 zusammenfiel.

und sie mit der Reziprokenliste am Schlusse von Kol. I vergleicht — am einfachsten an Hand der letzten Zeilen der Textkolonnen selbst:

Kol. II	Das Reziproke von	1,12	(ist)	50
Kol. III	„ „ „	1,15	„	48
Kol. IV	„ „ „	1,20	„	45
Kol. V	„ „ „	1,21	„	44,26,40
Kol. VI	„ „ „	1,30	„	40
Kol. VII	„ „ „	1,40	„	36
Kol. VIII	„ „ „	2	„	30
Kol. IX	„ „ „	2,24	„	25
Kol. X	„ „ „	2,30	„	24
Kol. XI	„ „ „	2,40	„	22,30
Kol. XII	„ „ „	3	„	20

Man sieht: *Die Kopfzahlen a sind so ausgewählt, daß sie die Reziproken von Zahlen n sind, die zwischen „1“ und „3“ liegen und endliche Sexagesimalbruchdarstellungen für 1/n ergeben.*

Aus der Tatsache, daß die Kopfzahlen unserer „Multiplikationstabellen“ als Sexagesimalbruchentwicklungen von reziproken ganzen Zahlen, d. h. als sexagesimale Darstellung von sog. „Stammbrüchen“ angesehen werden können, folgt, daß man mit ihrer Hilfe in dem angegebenen Bereiche die Aufgabe lösen konnte, *die Multipla von Stammbrüchen als Sexagesimalzahlen anzugeben. Unsere Tafel erweist sich so als ein Hilfsmittel der Bruchrechnung, als angelegt zur Auffindung des Sexagesimalausdrucks für den „allgemeinen Bruch“ m/n*, mit der Einschränkung allerdings, daß das Resultat ein endlicher Ausdruck werden müsse.

Mit dieser Erkenntnis gewinnt unsere Tabelle viel konkreter faßbare Formen. Zunächst kann man sich von der Unbestimmtheit in der Lesung der Zahlen mit Rücksicht auf die unausdrückbar bleibenden Faktoren 60^k dadurch freimachen, daß man bedenkt, daß die Zahl der „möglichen“ (d. h. zu endlichen Sexagesimalbrüchen Anlaß gebenden) n sehr gut zu der Anzahl der im Text gegebenen Kopfzahlen paßt[12]), wenn man die Intervallgrenzen „1“ und „3“ als 60 und 180 liest, wie es auch geschehen müßte, wenn man den Anfang der Tabelle in der naheliegendsten Weise als gewöhnliche Einer faßt. Dagegen würde die Zahl der möglichen n sehr steigen, wenn man das Intervall von „1“ und „3“ etwa als das Intervall 3600 bis 10800 betrachtete. Während also bei der ersten Annahme fast alle möglichen n des Intervalles aufgezählt sind, wäre es für die weitere Annahme nur ein ganz geringer Bruchteil[13]). Man wird also die

[12]) Es fehlen unter 25 nur die 7 Werte 1,4, 1,36, 1,48, 2,5, 2,8, 2,15 und 2,42. Dagegen ist 1,15, das in Kol. I übergangen war, hier nicht ausgelassen.

[13]) Eine Bestätigung dieser an sich naheliegendsten (weil primitivsten) Deutung der Zahlen ist auch in den ersten beiden Zeilen von Kol. I gelegen, die ich folgender-

Reziprokentabelle in Kol. I einfach als Liste der endlichen sexagesimalen Äquivalente der Stammbrüche von 1/2 bis 1/81 auffassen können, während die zugehörigen Multiplikationstafeln die resultierenden Entwicklungen für alle „gemischten" Brüche mit Nennern bis 180 zu berechnen gestatten[14]).

Unser Text hat mit diesen Feststellungen zunächst zwar etwas von dem Ausdruck eleganten elastischen Sexagesimalrechnens verloren. Um so mehr hat er als historisches Dokument gewonnen: er zeigt, daß das ganze positionelle Sexagesimalrechnen ursprünglich immer festen Stellenwert vor Augen hatte, also sich seiner ungeheuren Anpassungsfähigkeit gar nicht bewußt war, ferner, daß es auch mit dem zentralen Problem der gesamten antiken Arithmetik, mit der Beherrschung der Bruchrechnung rang, zu einer Zeit, in der das positionelle Sexagesimalsystem schon völlig ausgebildet war und damit das Problem der Bruchrechnung bereits vollkommen erledigt hätte sein müssen — wenn man sich der prinzipiellen mathematischen Bedeutung der Positionsschreibung bewußt gewesen wäre. Unser Text beweist also, daß die Positionsschreibung keine bewußte mathematische Konstruktion ist (wie später ganz offensichtlich die Positionsschreibung der Inder), sondern nur ein von ganz anderer Seite kommendes Geschenk des Zufalls — wir kommen damit von einer neuen Seite auf die Betrachtungen der Einleitung dieser Arbeit zurück. Erst die abschleifende Wirkung der Zeit kann es verursacht haben, daß man allmählich mit größter Geschicklichkeit die Vorteile des Systems zu nutzen lernte — der scheinbar so kleine Schritt zum vollen Positionssystem wurde trotzdem in Babylonien nie getan[15]).

---

maßen übersetzen möchte (wobei sich zur Emendierung des Textes u. a. die Parallelstelle Rev. d'Ass, 12, S. 197, Vs. 2 heranziehen läßt, um Zeile 2 als *šu-ri-bi 30 àm* zu lesen):

Von 1,30 ist 40 das Reziproke,
Von der Hälfte ist es 30,

was die nächsten Zeilen durch

Das Reziproke von 2 (ist) 30,
Das Reziproke von 3 (ist) 20 usw.

fortführen. Das Zahlwort „Hälfte" soll offenbar die ganze Umgebung als Umgebung der Einheit festlegen. — Ähnlich hilft man sich oft bei geometrischen Aufgaben dadurch, daß man eine der Zahlen der Angaben als Zahlwort ausschreibt und damit absolut festlegt, woraus dann der Stellenwert aller davon abhängigen Zahlen zwangläufig folgt.

[14]) Liest man die Faktoren „1" bis „20", „30", „40" und „50" der Multiplikationstabellen ebenfalls als mit 1 beginnende ganze Zahlen, so bedeutet die Tatsache, daß die Kopfzahlen dem Intervall der Nenner $60 < n \leq 180$ entsprechen, daß nur echte Brüche m/n behandelt werden $(n > m)$!

[15]) Soweit mir bekannt, wird ein „Nullzeichen" für fehlende Sexagesimalpotenzen im Innern von Zahlausdrücken erst in der spätesten Zeit gebraucht und zwar in

Es liegt der Einwand auf der Hand: Wie weit ist man berechtigt, in dieser Weise aus dem Tatbestand eines einzigen Textes auf den Gesamtcharakter der babylonischen Rechentechnik zu schließen? Ist nicht etwa die Lutzsche Tafel nur als solche so eingerichtet, daß sie zur Lösung der Aufgabe, allgemeine Brüche in Sexagesimalbrüche zu entwickeln, dient, ohne daß damit eine tiefere Eigentümlichkeit aller babylonischer Multiplikationstabellen angeschnitten wäre?

Diese Frage läßt sich mit unerwarteter Bestimmtheit erledigen.

Unter 153 mir bekannt gewordenen „Multiplikationstabellen" finden sich nur zwei, deren Kopfzahlen nicht als Sexagesimalentwicklung eines Stammbruches gedeutet werden könnten, nämlich *zwei* mit der Kopfzahl 7. Der Umfang des herangezogenen Materials [16]) ist bei weitem groß genug, um diese Aussage vor dem Einwand zu schützen, daß sie durch den zufälligen Erhaltungszustand unserer Texte bedingt sei. Es kann nicht mehr als zufällig bezeichnet werden, wenn unter 51 Zahlen, die Sexagesimalbrüchen mit höchstens 2 Stellen entsprechen können, 41 (zum Teil über 5 mal) als Kopfzahlen für Multiplikationstabellen belegt sind, während bisher nur eine solche Tabelle für eine einzige beliebige Primzahl (verschieden von 2, 3 oder 5) bekannt geworden ist. [17]). Die eine Ausnahmetafel (für $a = 7$) stammt übrigens erst aus der Kassitenzeit (also mindestens 200 Jahre nach Hammurapi) [18]).

---

der Weise, daß ein sonst als Trennzeichen verwandtes Zeichen dort steht, wo wir „0" schreiben würden In Hinkunft soll daher immer „." an die Stellen gesetzt werden, wo im Text das Trennzeichen steht; dagegen soll „0" der von uns zur Erleichterung des Verständnisses eingeführten Positionsbezeichnung (z B. 0;30 oder 25,0) vorbehalten bleiben, bzw. dann gesetzt werden, wenn „." im Text ausgelassen ist, oder Zahlen ohne Bezugnahme auf eine bestimmte Textstelle gemeint sind. Diese Schreibweise war erstmalig in astronomischen Texten der Seleukidenzeit bekannt geworden. Das m. W. erste Beispiel in mathematischen Texten wurde von Herrn Schuster gelegentlich der Diskussion der „Tablettes d'Uruk" (veröffentlicht von Thureau-Dangin in „Musée du Louvre, dep. d. ant. orient., Textes cunéiformes, t. 6") gefunden: Z. B. 33 Rs. 24 „2,.,15" oder 33 Rs. 10 „2,.,.,33,20". In 33 Rs. 26 ist das Zeichen „." beim Quadrieren von 3,52,30 (wohl irrtümlich) ausgefallen: „15,56,15" statt „15,.,56,15" — der wirkliche Stellenwert würde natürlich noch eine weitere „Null" am Ende verlangen ($3,52,30^2 = 15,0,56,15,0$), die aber immer ausgelassen wird — das ist ja gerade der prinzipielle Mangel des Systems.

[16]) Wie schon oben bemerkt, soll es in „Quellen und Studien", Abtlg. A, Bd. 2, Kap. II vollständig vorgelegt werden.

[17]) Dabei ist ganz davon abgesehen, daß die Lutzsche Tafel gar kein Unikum ist, sondern durch eine Anzahl analog aus Reziproken- und Multiplikationstabellen kombinierten Tafeln ergänzt wird (besonders der große Text des British Museum Bu. 91—5—9, 263 ist zu nennen, den Pinches in der Hilprecht-Festschrift 1909 veröffentlicht hat).

[18]) Dieser Text, veröffentlicht von Speleers, Rec. des Inscr. de l'Asie Ant. des Mus. R. du Cinquent à Bruxelles 1925, wurde mir erst durch die Bibliographie von

Ergebnis: *Die babylonischen „Multiplikationstabellen" dienen gar nicht a priori zur Auffindung beliebiger Produkte ganzer Zahlen a und b, sondern sind ganz und gar auf das Grundproblem der Bruchrechnung, die Bestimmung des sexagesimalen Äquivalents von m/n zugeschnitten.* Als „möglich" erscheint dabei die Lösung dieser Aufgabe nur in den Fällen, in denen der Stammbruch $1/n$ eine endliche Entwicklung ergibt. Daß man trotz dieser Einschränkung zu einer ausreichenden und dazu noch sehr eleganten Bruchrechnung gelangt, ist allein dem Zufall der besonders günstigen Eigenschaften der Basis 60 zu verdanken[19]. Andernfalls wäre es den Babyloniern nicht erspart geblieben, einen ähnlich umständlichen Apparat zu entwickeln, wie ihn die Ägypter besaßen, denn die Ausgangsfragestellung hat keinerlei prinzipiellen mathematischen Vorsprung vor der der anderen Völker der antiken Welt.

R. C. Archibald zu Bd. 2 (1929/30) von Chase, The Rhind Math. Pap. bekannt. Ebenso die zweite Ausnahmetafel (ebenfalls für $a = 7$), publiziert von Mercer in Bull. of the R. Ontario Mus. of Archaeol. Toronto March 1928 No. 7 S. 3. Datierung leider unbekannt; auch aus den schlechten Reproduktionen glaube ich nicht mehr ersehen zu können, als daß die photographierten Tafeln nicht die im Text behandelten Stücke sind. Archibald sagt l. c. S. 95: „Presumably the tablets are no older than those describet by Speleers". Die Wiederholung dieser Publikation in „Art and Archaeology" 26 (Chase-Archibald l. c. S. 94) ist mir nicht zugänglich.

[19]) Es muß zukünftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben, die Frage zu klären, wie man sich in Fällen zu helfen suchte, in denen $1/n$ nur einen unendlichen Sexagesimalbruch ergeben hätte.

Quadratische Gleichungen der Seleukidenzeit aus Uruk.

Von H. S. Schuster in Göttingen[1]).

(Eingegangen am 25. I. 1930.)

Im Jahre 1922 hat F. Thureau-Dangin in den „*Tablettes d'Uruk*"[2]) (künftig mit TU abgekürzt) eine Sammlung von Texten veröffentlicht, die der spätbabylonischen Zeit (Achämeniden- und Seleukidenzeit) angehören. Sämtliche Tafeln stammen aus Uruk (dem heutigen Warka). Unter diesen befindet sich neben astronomischen Texten und einer Reziprokentafel auch ein eigentlich mathematischer Text. Über ihn (es ist Nr. 33 in der Zählung der TU) schreibt Thureau-Dangin: „Opérations arithmétiques (tablette fragmentaire). Probablement première moitié du second siècle des Seleucides"[3]). In der Tat wird in der Unterschrift als Schreiber der Tafel ein Vertreter einer großen Priesterfamilie genannt, die aus anderen Texten der Seleukidenzeit schon lange bekannt ist[4]).

Im folgenden soll eine Aufgabengruppe dieses Textes behandelt werden (TU 33 Rs. 10—27), die die Auflösung von quadratischen Gleichungen zum Gegenstand hat[5]). Diese Tatsache gewinnt gerade durch die Möglichkeit einer scharfen Datierung besondere Bedeutung, da uns hier das erstemal ein Einblick in die mathematischen Kenntnisse gewährt ist, die noch zur Griechenzeit in Babylon existierten — an einer Kontinuität der orientalischen Tradition von sumerischer Zeit bis weit in den Hellenismus hinein kann jetzt nicht mehr gezweifelt werden.

Die an sich argen Beschädigungen der Tafel lassen sich durch synoptische Gegenüberstellung der vier parallellaufenden Beispiele so gut

---

[1]) Aus dem Seminar über Fragen aus der Geschichte der antiken Mathematik.

[2]) Musée du Louvre; Département des Antiquités Orientales. Textes Cunéiformes Tome VI, Tablettes d'Uruk. Paris 1922.

[3]) Also —200 bis —150.

[4]) Thureau-Dangin, TU, „Avant-propos".

[5]) Bei dieser Gelegenheit sei zusammengestellt, was bis jetzt an quadratischen Gleichungen aus Babylon bekannt ist. Insgesamt kennen wir 19 Aufgaben (2 in CT IX, 13 in SKT, 4 in TU), die auf quadratische Probleme führen. In 10 Aufgaben (2 in CT IX, 4 in SKT, 4 in TU) ist die Auflösungsformel der quadratischen Gleichung explizit belegt, während die übrigen 9 Beispiele (SKT) nur die Aufgaben und z. T. das Resultat enthalten (vgl. QS B 1 S. 78ff. und S. 120ff.).

wie restlos beseitigen, wie dies in der folgenden Übersetzung angegeben ist[6]).

Rs. 10—14	Rs. 15—18	Rs. 19—23	Rs. 24—27
10. *igû* und *šipû* (zusammen) (ist) 2,.,.,33,20.[7])			
igû und *šipû* 2,[.,.,33,20] *11.* mit 30 multipliziere und 1,.,.,16,40 (ist es).	*15.* *igû* und *šipû* 2,3 mit 30 multipliziere und 1,1,30 (ist es).	*19.* *igû* und *šipû* 2,5,26,40 mit 30 multipliziere und 1,2,4[3,20 (ist es).	*24.* *igû* und *šipû* 2,.,15 mit 30 multipliziere und 1,..7,30 (ist es).
1,.,.,16,40 m[it 1,.,.,16,40 multipliziere und 1,.,.,33,20,4, 37,46,40 (ist es)].	[1,1,30 mit 1,1,30 multipliziere und 1,3,2,15 (ist es)].	1,2,43,20 mit 1,2,43,20] *20.* multipliziere und 1,5,3[4,4], 37,46,40 (ist es).	1,[.,7,30 mit 1,.,7,30 multipliziere und 1,.,15,.,56,15 (ist es)].
12. Die 1, ihr Produkt[8]), subtrahiere und behalte 33,[20],4,37,46,40 übrig[9]).	*16.* Die 1, ihr Produkt[8]), subtrahiere und behalte 3,2,15 übrig[9]).	Die 1, ihr Produkt[8]), subtra- [hiere und behalte 5,34,4,37,46,40 übrig[9]).	*25.* Die 1, ihr Produkt[8]), subtrahiere und behalte 15,0,56,15 übrig[9]).
Was m[it was mögest du multiplizieren, damit du 33,20,4,37,46,40 (bekommen mögest ?[10])]	Was mit was [mögest du multiplizieren, damit du 3,2,15 (bekommen) mögest ?[10])]	Was mit was] *21.* mögest du multiplizieren, damit [du 5,34],4,37,46,40 [(bekommen) mögest ?[10])]	Was mit was mögest du multiplizieren, [damit du 15,.,56,15 (bekommen) mögest ?[10])].
13. 44,43,20 mit 44,43,20 multipliziere und 33, [20],4,37,4[6,40 (ist es).	*17.* 13,30 [mit] 13,30 {mit} m[ultipliziere u]nd 3,2,15 (ist es).	18,16,40 [mit 18,16,40 multipliziere und 5,34,4,37,46,40 (ist es)].	*26.* 3,52,30 mit 3,52,30 multipliziere und 15,0,56,15 (ist es).

[6]) Die genaue Bearbeitung dieser und der übrigen Aufgaben dieser Tafel (insbes. Transkription) wird in QS A Bd. 2 Kap. V erfolgen.

[7]) Über den Gebrauch von Punkt und Null vgl. S. 191 Anm. 15.

[8]) *šag* = Produkt folgt eindeutig aus dem Zusammenhang. Man ist versucht, an (*a*)-*šag*, Fläche, zu denken, doch kommt dieser Terminus auch in voller Form ***a-šag*** TU 33 Vs. 16 vor.

[9]) So nach Saubin, Lexique Assyrien-Français S. 295: „*râḫu*, rester, être de reste".

[10]) *mi kam mi lû* DU-*ma lû* . . . Ergänzt nach Vs. 15. Dort ist diese Wendung vollständig erhalten.

Rs. 10—14	Rs. 15—18	Rs. 19—23	Rs. 24—27
44,43,20 zu 1,.,.,16,40 addiere,] [14.] 1,.,45 (ist das) *igû*.	13,30 [zu 1,1,30 addiere, 1,15 (ist das) *igû*.]	[22.] 1[8],16,40 [zu 1],2,43,20 addiere, 1,21 (ist das) *igû*.	3,5[2,30 zu 1,.,7,30 addiere,] [27.] 1,4 (ist das) *igû*.
Die 44,43,20 (von) 1,.,.,16,40 sub[trahiere und 59,15,33,20 (ist das) *šipû*].	[18.] Die 13,30 (von) 1,1,30 subtrahiere und 48 (ist das) *ši*[*pû*].	[Die] 18,16,[40 (von) 1,2,43,20 subtrahiere und] [23.] behalte 44,26,40 (als) *šipû* übrig [9]).	Die 3,52,30 (von) 1,.,7,30 subtrahiere und 5[6,15 (ist das) *šipû*].

Kommentar:

Bei der äußerst knappen und nicht einmal vollständigen Formulierung der Aufgaben sind die Angaben z. T. aus der Ausrechnung zu erschließen. Danach ergibt sich, daß in allen vier Aufgaben zwei Größen gesucht werden, *igû* (x_1) und *šipû* (x_2)[11]), und folgende Relationen gegeben sind:

$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1 \cdot x_2 = b,$$

d. h. x_1 und x_2 sind Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Das liefert

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$
$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

[11]) Anmerkung der Redaktion (N). Diese Lesung bestätigt aufs beste die Bemerkung von Ungnad (Zeitschr. f. Ass. 31, S. 42), daß „I.GI wohl *igû* zu lesen sein" wird, „wofür auch der Name des Zeichens ŠI (=IGI)=*igû* spricht".

Man könnte geneigt sein, daraus ziemlich weitreichende Konsequenzen zu ziehen. Es ist nämlich *igû*, wie Ungnad l. c. hervorhebt und wie es aus den Reziprokentabellen klar ersichtlich ist, ein Terminus der „Division" — in den Tabellen etwa als „das Reziproke von *a* ist *b*" wiederzugeben, an der von Ungnad kommentierten Assurbanipal-Stelle aber einfach „Division" schlechthin bedeutend. Es wäre daher möglich, in dem obigen Text auch an diese Bedeutung anzuknüpfen und *igû* durch „Divisor" wiederzugeben. Das einzige Bedenken gegen diese Übersetzung besteht darin, daß man dann im Sinne der weiteren Rechnung (*igû* und *ši-pu-ú* erweisen sich als zueinander reziprok!) konsequenterweise *ši-pu-ú* als etwas wie „Multiplikator" übersetzen müßte, obwohl, im Augenblick wenigstens, keine direkte Beziehung zu den sonst üblichen Terminis der Multiplikation zu ersehen ist. Mangels irgendeiner Übersetzungsmöglichkeit von *ši-pu-ú* bleibt aber der vorgeschlagene Ausweg eines neuen Multiplikationsterminus wenigstens diskutabel. Dann würden die Einleitungsworte der Beispiele in ganz freier Wiedergabe lauten: „Nenner und Zähler (ist) soundsoviel..." und die Antwort immer lauten „,... (ist) der Nenner, ... der Zähler". Geschichtlich würde dies die ersten Beispiele von rein arithmetisch formulierten Aufgaben bilden.

Man vergleiche damit die Rechnung, die in allen vier Aufgaben vollkommen parallel verläuft:

1. Rs. 10—14.

$a = 2;0,0,33,20 \qquad b = 1.$

$\frac{a}{2} = 1;0,0,16,40 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1;0,0,33,20,4,37,46,40$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0;0,0,33,20,4,37,46,40$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = 0;0,44,43,20$ (Beweis durch Quadrieren).

$x_1 = 1;0,0,16,40 + 0;0,44,43,20 = 1;0,45$

$x_2 = 1;0,0,16,40 - 0;0,44,43,20 = 0;59,15,33,20.$

2. Rs. 15—18.

$a = 2;3 \qquad b = 1.$

$\frac{a}{2} = 1;1,30 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1;3,2,15$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0;3,2,15$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = 0;13,30$ (Beweis durch Quadrieren).

$x_1 = 1;1,30 + 0;13,30 = 1;15$

$x_2 = 1;1,30 - 0;13,30 = 0;48.$

3. Rs. 19—23.

$a = 2;5,26,40 \qquad b = 1.$

$\frac{a}{2} = 1;2,43,20 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1;5,34,4,37,46,40$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0;5,34,4,37,46,40$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = 0;18,16,40$ (Beweis durch Quadrieren).

$x_1 = 1;2,43,20 + 0;18,16,40 = 1;21$

$x_2 = 1;2,43,20 - 0;18,16,40 = 0;44,26,40.$

4. Rs. 24—27.

$a = 2;0,15 \qquad b = 1.$

$\frac{a}{2} = 1;0,7,30 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1;0,15,0,56,15$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0;0,15,0,56,15$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = 0;3,52,30$ (Beweis durch Quadrieren).

$x_1 = 1;0,7,30 + 0;3,52,30 = 1;4$

$x_2 = 1;0,7,30 - 0;3,52,30 = 0;56,15.$

Man sieht, Text und Formel stimmen vollkommen überein.

Wegen der Unveränderlichkeit des Produktes $x_1 x_2 = 1$ in allen vier Beispielen kann man vermuten, daß diese Aufgaben so konstruiert wurden, daß zuerst x_1 und $\frac{1}{x_1} = x_2$ einer Reziprokentafel entnommen wurden. Daraus ergibt sich dann $x_1 + x_2$ und die Rationalität der Wurzel von selbst. Dafür sprechen die Werte

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1,4 & x_2 = 56,15 \\ 1,15 & 48 \\ 1,21 & 44,26,40, \end{array}$$

die jeder Reziprokentafel, die über 60 hinausreicht, zu entnehmen sind[12]).

Nur $\qquad x_1 = 1,0,45 \qquad x_2 = 59,15,33,20$

verlangt eine über 60^2 hinausgehende Reziprokentafel, wie sie z. B. durch TU 31 gegeben ist.

Man könnte versucht sein, aus der Rechnung die Kenntnis des doppelten Vorzeichens der Quadratwurzel zu schließen. Diese Tatsache ist aber von so wesentlicher historischer Bedeutung, daß man äußerste Zurückhaltung üben muß. Das wesentlichste Argument gegen einen solchen Schluß ist die Tatsache, daß sich hier das doppelte Vorzeichen zwangsläufig ergibt, da zwei Unbekannte gesucht sind. Man kann nämlich zunächst

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

bilden, was wegen der Relation

$$x_1 + x_2 = a$$

für die zweite Unbekannte

$$x_2 = a - \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right) = a - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

ergibt. Der Text liefert nach x_1 sofort

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,.$$

Damit der Schreiber stillschweigend $a - \frac{a}{2}$ in $\frac{a}{2}$ zusammenziehen konnte, mußte er notwendigerweise den vollen Überblick über den ganzen Formelmechanismus der Aufgabe besitzen[13]). Daß diese Annahme nicht zuviel verlangt, zeigen die quadratischen Gleichungen aus SKT und CT IX[14]).

---

[12]) Die ersten Zahlen einer solchen Tabelle sind:

1,0 1,4 1,12 1,20 1,21 1,30 (vgl. QS B 1 S. 198).

[13]) Diese Zusammenziehung ist nicht trivial, da es sich um recht komplizierte Zahlen (z. B. $a = 1;0,0,33,20$) handelt. Auch ist nicht anzunehmen, daß der Schreiber in allen vier Aufgaben an der gleichen Stelle eine Zeile ausgelassen haben sollte.

[14]) Man vergleiche vor allem die Eleganz, mit der die schwierigen quadratischen Probleme in SKT 7 gelöst werden (siehe S. 124ff.).

Hier wird es besonders deutlich an der Stelle, wo zur Quadratwurzel der halbe Koeffizient des linearen Gliedes hinzugefügt wird, um die Unbekannte zu erhalten.

So handelt es sich z. B. in SKT 11 um folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 - ax - \frac{b}{c} = 0,$$

die

$$x = \frac{1}{b}\left(\left(\frac{1}{2}bh\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}bh\right)^2 + ab}\right)$$

liefert. Nachdem in den vorangehenden Zeilen $ab = 3,7,30,0$, $\frac{1}{2}bh = 1,15$, $\left(\frac{1}{2}bh\right)^2 = 1,33,45$, $\left(\frac{1}{2}bh\right)^2 + ab = 3,9,3,45$ und $\sqrt{\left(\frac{1}{2}bh\right)^2 + ab} = 13,45$ gebildet ist, heißt es Rs. 8f.:

„... Die 1,15, die quadriert (wurde), dazu (sc. zu 13,45) füge hinzu[15]), 15,0 bekommst du ..."

Als zweites Beispiel ist die Stelle SKT 7 Vs. 9/10 zu nennen. Dort heißt es:

> „... 6,40, welches (oben) gefunden wurde, zu 36,40 dazu gegeben und 43,20 gibt es ..."

Hier ist $6,40 = \frac{a}{2}$ und es wird in der Auflösungsformel der quadratischen Gleichung

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

gebildet. Schließlich ist in CT IX eine sachlich völlig analoge Stelle belegt (CT IX 15 III, 13).

In allen diesen Fällen wird durch den Relativsatz auf den halben Koeffizienten des linearen Gliedes, der in einem früheren Abschnitt der Rechnung gebildet ist, zurückverwiesen. Dieser Rückverweis läßt erkennen, daß der Rechner völligen Einblick in den Formalismus der Rechnungen besaß.

Schließlich noch einige Worte über die Terminologie dieser Aufgabengruppe. Da ist zu sagen, daß sie offensichtlich dürftiger ist als in den alten Texten. Dies zeigt sich vor allem beim Quadrieren und Quadratwurzelziehen. Während uns aus CT IX und SKT besondere Termini für quadrieren bekannt sind (GIŠ-GIŠ = *šutamḫir* bezw. ZUR-ZUR), hilft man sich hier damit, die Zahl a, die quadriert werden soll, mit sich selbst zu „multiplizieren" (z. B. Rs. 13). Weiter existiert kein besonderer Terminus für Quadratwurzel mehr (IB-DI = *mitḫartum* in CT IX und SKT). Soll aus einer Zahl a^2 die Quadratwurzel gezogen werden, so umschreibt man dies folgendermaßen:

---

[15]) Frank, SKT S. 23.

„Was mit was mußt du multiplizieren, um a^2 zu erhalten?"

Antwort: „a mit a multipliziere, a^2 (ist es)" ... (z. B. Rs. 25). Es wird also eine Zahl a genannt und hinterher durch Quadrieren bewiesen, daß sie wirklich die Quadratwurzel aus a^2 ist. Eine weitere Eigentümlichkeit der Terminologie dieser Textgruppe liegt darin, daß (A)-DU=(*a*)-*rá* und LAL als Verba gebraucht werden, was man an der Anhängung von -*ma*, der Kopula zwischen Verbis, erkennt. (*a*)-*rá* ist das aus zahlreichen Multiplikationstabellen bekannte Wort für „mal"[16]; das Wort LAL „minus" ist in den älteren rein mathematischen Texten nicht vertreten, es findet sich aber fast immer bei der Schreibung der Zahl 19 als „20 weniger 1" in den Multiplikationstabellen. Endlich ist zu erwähnen, daß *ta-mar* bzw. *in-se*, „du erhältst", das in den alten Texten hinter den Resultaten der einzelnen Rechnungsgänge zu stehen pflegt, hier stets fortgelassen wird. Statt dessen ist der Terminus *ri-ḫi* („behalte übrig"[9]), nach Subtraktionen ein Novum.

---

[16]) In CT IX 10, Z. 44 und 50 ist *a-rá* belegt.

Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrh., insbesondere über Schwerpunktbestimmungen.

Von Heinrich Wieleitner in München.

(Eingegangen am 2. Sept. 1929.)

I.

Wenn ich über das Fortleben gewisser Methoden bei Archimedes sprechen will, muß ich natürlich über das Fortleben von Archimedes überhaupt zuerst ein paar Worte sagen. Da hat J. L. Heiberg der 2. Auflage seiner Archimedesausgabe im 3. Band (Leipzig 1915) eine 98 Seiten umfassende Vorrede beigegeben, die von der Verwandtschaft und den Schicksalen der von ihm benützten Handschriften handelt. Diese Vorrede ist stellenweise ganz dramatisch zu lesen. Ich entnehme ihr für den Augenblick nur das, was uns Kunde gibt von der Überlieferung des Archimedischen Gesamtwerks, so weit diese Überlieferung mit dem wirklichen Studium von Archimedes verknüpft ist.

Archimedes selbst hatte seine einzelnen Schriften verschiedenen Alexandrinischen Freunden gewidmet und übersandt, wie Eratosthenes, Konon, Dositheos. Diese sorgten dann offenbar für deren Abschreibung und Verbreitung; aber eine Gesamtausgabe wurde nicht hergestellt. So kam viel Verderbnis in die Handschriften und mehreres ging ganz verloren. Noch im 3. und 4. Jahrhundert n. Chr. war, wie aus Heron, Pappos und dem Alexandriner Theon hervorgeht, manches heute Fehlende vorhanden. Neues Leben kam in das Studium der Klassiker im 5. Jahrhundert, als die neuplatonische Schule unter Proklos, dem Theologen und Philosophen, zu Athen wieder aufblühte. Um 500 entstanden die umfangreichen Kommentare des Eutokios zu den Büchern über Kugel und Zylinder, über die Kreismessung und über den Schwerpunkt ebener Figuren. Im Jahre 529 wurde allerdings diese Schule vom Kaiser Justinian als „heidnisch“ aufgehoben; aber derselbe Justinian war doch wieder in anderer Weise schuld, daß das Studium der alten Mathematiker fortlebte. Im Jahre 531 war nämlich die Sophienkirche zu Konstantinopel abgebrannt, und Justinian übertrug ihren Wiederaufbau den Architekten Anthemios von Tralles und Isidoros von Milet.

Beide sind uns auch als Mathematiker bekannt, der erstere durch eigene Arbeiten, der zweite gerade dadurch, daß er die Werke des Archimedes sammeln ließ. Nach dem Tode des Anthemios, der noch mit dem wahrscheinlich ein Menschenalter früheren Eutokios befreundet war, übernahm Isidoros den Bau der Sophienkirche allein. Beide Männer befaßten sich offenbar aus beruflichen Gründen mit den alten Klassikern.

Eine neue Belebung des Studiums erfolgte nach der Wiedererrichtung einer Hochschule zu Konstantinopel im 9. Jahrhundert unter Theophilos (um 830[1]) durch den mathematisch gerichteten Philosophen Leon, und aus jener Zeit, also dem 9. und 10. Jahrhundert, stammen die zwei ältesten Kodizes des Archimedes, die Heiberg A und C nennt. Der erste war noch in der Renaissancezeit vorhanden und gehörte dem gelehrten Arzt Georg Valla, einem Vetter des berühmten Humanisten Lorenz Valla, der 1499 in Venedig starb. Von diesem Kodex A, der leider verloren ging, leiten sich die meisten anderen vorhandenen Handschriften ab. Der Kodex war wahrscheinlich im 12. Jahrhundert durch die Normannenkönige nach Unteritalien gekommen. Der Kodex C aber war in Konstantinopel liegen geblieben und wurde dort erst im Jahre 1906 wieder aufgefunden. Er enthielt ganz neue Dinge, wie die „Methodenlehre" des Archimedes und den griechischen Text der Schrift über die schwimmenden Körper, wie ja allen Fachleuten bekannt ist[2]).

Die Römer verstanden von Mathematik gar nichts. „Quid enim civi Romano cum principe mathematicorum?", sagt Heiberg. Aber die Muslime machten schon im 9. Jahrhundert Bekanntschaft mit verschiedenen seiner Werke. Leider ist von dem, was sie über die Infinitesimalmathematik im Sinne des Archimedes schrieben, wie es scheint, bis jetzt nur das eine Stück über die Ausmessung des Paraboloids von Ibn al-Haiṯam (um 1000 n. Chr.) wieder ans Licht gezogen worden[3]). Ibn al-Haiṯam stützt sich dort schon auf andere muslimische Arbeiten, die er angibt und die er verbessern will. Er berechnet das gewöhnliche Rotationsparaboloid, zwar etwas anders als das bei Archimedes in der Schrift über Konoide und Sphäroide geschieht (Op. I², S. 344f.), aber doch ganz in dessen Manier. Das ist um so interessanter, als gerade die Schrift über Konoide den Muslimen nicht bekannt gewesen sein soll. Aber Ibn al-Haiṯam gelingt auch die viel schwierigere Kubatur des Körpers, den Kepler später[4]) „parabolische Spindel" nannte, d. h. des Kör-

[1]) Vgl. Friedr. Fuchs, Die höheren Schulen von Konstantinopel im Mittelalter. Byzant. Archiv, Heft 8, Leipzig 1926, S. 17.

[2]) Siehe J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen, Eine neue Schrift des Archimedes, Bibl. math. (3) 7, 1906/7, S. 321—363. — Archim. Op. II², S. 425f.

[3]) Veröff. von H. Suter in Bibl. math. (3) 12, 1911/12, S. 289—332.

[4]) Nova Stereometria doliorum vinariorum, Linz 1615. Opera, ed. Ch. Frisch, Bd. IV. Deutsch in Ostwalds Klass. Nr. 165 (dort S. 34f.).

pers, der durch Rotation eines Parabelbogens um eine zur Achse senkrechte Sehne entsteht. Er fand ganz richtig $^8/_{15}$ des umgeschriebenen Zylinders, indem er über Archimedes und einen arabischen Vorgänger hinausgehend auch die Summenformel für die 4. Potenzen der ganzen Zahlen entwickelte. Dasselbe zu finden gelang erst wieder B. Cavalieri um das Jahr 1640[5]). Kepler war offenbar nicht damit zustande gekommen, denn ergab nur eine unbestimmte Näherung an (Nov. Ster. I,26). Wieviel nun bei den Muslimen überhaupt, und im besonderen in diesem Fall bei Ibn al-Haiṯam, Eigengewächs ist, und wieviel sie aus uns unbekannten griechischen Quellen schöpfen konnten, ist heute noch nicht entscheidbar. Auf alle Fälle geht aus der Abhandlung hervor, daß Ibn al-Haiṯam die Sache gut verstand und klar darbieten konnte.

Im lateinischen Mittelalter dürfen wir eine große Zeitspanne überspringen, bis wir auf Interesse an dem den Scholastikern im allgemeinen viel zu schwierigen Archimedes stoßen. Es war ein flämischer Dominikaner Wilhelm von Moerbeke (1215?—1297?), der sich daran wagte, den ganzen Archimedes samt einigen Kommentaren des Eutokios zu übersetzen. Diese Übersetzung wurde allerdings erst im Jahre 1884 durch Valentin Rose im Vatikan wieder aufgefunden, und der Kodex wird von Heiberg mit B bezeichnet, da er einer anderen Gruppe angehört. Die Übersetzung Wilhelms ist freilich barbarisch. Er übersetzte nämlich Wort für Wort; sogar die griechischen Artikel gab er mit qui, quae, quod wieder. Roger Bacon, sein Zeitgenosse, hat in seiner temperamentvollen Art (übrigens war er auch ein Franziskaner!), sehr scharf über Wilhelm geurteilt (Archim. III², S. LI). Heiberg selbst spricht sich wesentlich milder aus. Der Kodex B ist für die Herausgabe der Werke des Archimedes insofern wichtig geworden, als man ihn eben wegen der wörtlichen Übersetzung fast für einen griechischen nehmen darf, und die Abhandlung über die schwimmenden Körper hat man bis zur Entdeckung des Kodex C nur in der lateinischen Form des Kodex B gehabt[6]). Daß aber Wilhelm, der u. a. auch die Politik des Aristoteles übersetzt hat (hrsgg. von Franz Susemihl 1872 in der Bibl. Teubneriana),

---

[5]) Veröff. in den „Exercitationes geometricae sex" (Bologna 1647; Ex. IV, Prop. XXIV), vorher schon angekündigt in einem Nachwort zur „Centuria di varii problemi" (Bologna 1639). Ungefähr gleichzeitig kam P. de Fermat zum nämlichen Resultat. Seine „Ad Bonaventurae Cavalerii quaestiones responsa" wurden aber erst in neuester Zeit veröffentlicht (Œuvres I, Paris 1891, S. 195—198; franz. Übers. Œuvres III, 1896, S. 169—171). Die Methode Fermats ist in dieser Notiz nicht angegeben. Vgl. „Un chapitre de l'œuvre de Cavalieri" von H. Bosmans, Mathésis 36 (1922) S. 365—373, 446—456.

[6]) Vgl. H. Bosmans, Guillaume de Moerbeke et le Traité des corps flottants d'Archimède. Revue d. Quest. scient., avril 1922. S.-A. 23 S.

selbst mit den Archimedischen Verfahren nichts hätte anfangen können, ist mir nicht zweifelhaft.

Wilhelm von Moerbeke hatte seine Übersetzung in allen Teilen im Jahre 1269 vollendet. Es gab zwar auch davon Abschriften; aber man hört nicht, daß sie irgendwie verwendet worden wären. Und doch blieb diese Übersetzung nicht ohne direkte Folgen. Zuerst gab der Prälat Lukas Gauricus, der als Mathematiker und Astrolog bezeichnet wird, Teile der Wilhelmschen Übersetzung im Druck heraus (Venedig 1503). Dieses Büchlein hatte aber nicht nur keine Wirkung, sondern es blieb überhaupt fast unbekannt. Sonst wäre es doch nicht möglich gewesen, daß Nikolaus Tartaglia, ein geschickter Mathematiker und Techniker, den ganzen Text des Gauricus sich hätte aneignen, und ihn zusammen mit der Wilhelmschen Übersetzung der „Schwimmenden Körper", alles als sein eigenes Geistesprodukt unter der Vorspiegelung, er habe einen griechischen Kodex benützt, im Jahre 1543 zu Venedig hätte drucken lassen können (es erschien sogar eine vermehrte Ausgabe, Venedig 1565). Ohne Zweifel wurde Tartaglia, der die Sache wohl verstand, dadurch zu seinen eigenen hydrostatischen Arbeiten angeregt. Aber diese gehören nicht zu meinem eigentlichen Thema, da es sich dabei nicht gerade um Infinitesimales handelt.

Es gibt aber noch eine mittelalterliche Übersetzung, die von einem Kanonikus Jakob von Cremona auf Befehl des wissenschafts- und griechenfreundlichen Papstes Nikolaus V. im Jahre 1450 angefertigt wurde. Auch diese Übersetzung trug Früchte. Im Jahre 1461 schrieb sie Regiomontanus ab, versah sie mit Verbesserungen, und brachte sie um 1468 nach Nürnberg, wo sie noch liegt. Leider starb Regiomontan schon 1476, und damit fielen alle seine Herausgeberpläne ins Wasser. Aber ein anderer Nürnberger, der gelehrte Patrizier Willibald Pirckheimer, brachte einen griechischen Kodex, der im Wesen zur Gruppe A gehört, aber Verbesserungen nach B aufweist, anfangs des 16. Jahrhunderts nach Hause, und dieser Kodex diente mit der Regiomontanschen Kopie der Jakobschen Übersetzung als Grundlage für die Editio princeps des Archimedes, die zu Basel 1544 durch Thomas Gechauff Venatorius veranstaltet wurde. Erst von da ab war Archimedes Gemeingut aller Kundigen, und wir finden die Erstausgabe z. B. in dem Verzeichnis der 38 wissenschaftlichen Bücher, die Evangelista Torricelli († 1647) besaß[7]), wiewohl unterdessen (Paris 1615) die ebenfalls griechisch-lateinische, gegenüber der Erstausgabe verbesserte Ausgabe von D. Rivault erschienen war.

---

[7]) Opera, ed. Loria-Vassura, I, 1, Faenza 1919, S. IX/X.

II.

Spätere Ausgaben interessieren uns nicht. Ich erwähne nur noch eine lateinische Übersetzung der Hauptwerke durch F. Commandino (Venedig 1558), der derselbe etwas später (Bononiae 1565) die von Tartaglia so barbarisch herausgegebene Hydrostatik folgen ließ. Bei Commandino, dem Arzt und Mathematiker, der durch viele andere Werke bekannt ist, verbindet sich volles Verständnis des Archimedes mit seinen Herausgebertalenten. Wir werden das noch sehen. Ich will mich aber jetzt einer lateinischen Ausgabe zuwenden, die keine wörtliche Übersetzung, sondern in großen Teilen eine Überarbeitung des Archimedes mit Zusätzen ist, offenbar ein ganz selbständiges Geistesprodukt, entstanden im Jahre 1548, infolge widriger Umstände aber erst 1685 (zu Palermo) erschienen. Es ist das die Archimedesausgabe des späteren Abtes Francesco Maurolico aus Messina[8]), die zwar aus Cantor bekannt ist[9]), aber kaum von jemand, wie es scheint, bis jetzt näher angesehen wurde[10]). Heiberg zählt sie unter den von ihm benützten Ausgaben nicht auf.

Es kann natürlich hier nicht meine Aufgabe sein, die ganze Ausgabe mit dem Urtext und den anderen Ausgaben zu vergleichen, was gewiß reizvoll wäre, sondern entsprechend meinem Thema will ich nur zeigen, wie Maurolico in dieser Ausgabe selbständig auf der Grundlage der Archimedischen Infinitesimalmethoden weiter gearbeitet hat. Maurolico hat nämlich dem Werk des Archimedes über die Schwerpunkte ebener Figuren (Op. II², S. 123ff.), das nach seiner Einteilung 3 Bücher hat (S. 86—155), noch ein viertes angehängt über die Schwerpunkte von Körpern (S. 156—180). Die Bearbeitung der ersten 3 Bücher hatte er am 30. Dezember 1547 vollendet, das vierte schrieb er im Januar 1548. In der Einleitung (S. 156) sagt er, er wundere sich nicht wenig, daß Archimedes nichts über die Schwerpunkte von Körpern hinzugefügt habe[11]). Das wolle er jetzt nachholen. Er ist auch zweifellos in der neueren Zeit der erste gewesen, der Schwerpunkte von Körpern zu bestimmen suchte,

---

[8]) Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica, quae exstant, ..., ex traditione doctissimi viri D. Francisci Maurolici Nobilis Siculi, Abbatis Sanctae Mariae a Partu. ... Panormi, ... MDC.LXXXV. (8) u. 296 S. fol.

[9]) Vorles. ü. Gesch. d. Math., II², Leipzig 1900, S. 558.

[10]) A. G. Kästner hat in seiner „Geschichte der Mathematik", II. Bd., Göttingen 1797, S. 64—74 eine ziemlich ausführliche Inhaltsangabe gemacht, aber von diesen wichtigen Zusätzen Maurolicos nichts erwähnt. Hingegen hat der immer selbständige H. G. Zeuthen auf den Kern der Sache kurz aufmerksam gemacht. S. u. die Fußnote 23.

[11]) Daß Archimedes in der verschollenen „Methodenlehre" schon eine ganze Reihe von Körperschwerpunkten, freilich mit der nicht strengen Indivisibelnmethode,

ja er dürfte der erste gewesen sein, der die Archimedische Integralmethode im Abendlande selbständig anwendete. Des Archimedes Werk läuft (soweit es erhalten ist) darauf hinaus, den Schwerpunkt des Parabelsegments zu bestimmen[12]), und enthält an besonderen Resultaten außerdem nur die dazu nötigen Schwerpunkte des Dreiecks und des Trapezes. Die Parabel hat Archimedes dabei nach der Methode eingeteilt, die er als *γνωρίμως* bezeichnet, d. h. auf bekannte (passende) Art, was Maurolico mit „perspectè" (Heiberg mit „proprie") übersetzt, nämlich so, daß zuerst dem Segment das größte Dreieck eingeschrieben wird, dann die Grundlinie mehrmals halbiert und den neu entstehenden Parabelsegmenten immer wieder das größte Dreieck eingeschrieben wird (Fig. 1).

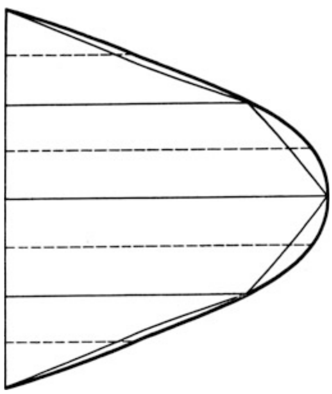
Fig. 1.

Maurolico fügt nun dem bei die Schwerpunkte der Kugel, des Parallelepipeds, dann des dreiseitigen und des allgemeinen Prismas, und des allgemeinen Oktaeders mit parallelen Gegenflächen. Er bestimmt mittels des Oktaeders, indem er an einer dreiseitigen Pyramide die Eckpyramiden mit den halben Seitenlängen wegschneidet, den Schwerpunkt zuerst der dreiseitigen, dann den der allgemeinen Pyramide, und behandelt diesen Satz noch in verschiedenen Formen mit seiner Umkehrung[13]). Auch auf den Kegel hat er den Satz ausgedehnt[14]).

Mit Propositio XIX (S. 172) beginnen die Vorbereitungen für den Schwerpunkt des (senkrechten) Paraboloidsegments (was Maurolico allerdings nicht sagt). Er beweist folgenden Satz: Wenn an einem Waagebalken in fortlaufender Reihe kongruente rechtwinklige Dreiecke hängen, alle in gleicher Lage zum Waagebalken, so daß entsprechende Seiten

bestimmt hatte, konnte damals kein Mensch ahnen. Man konnte höchstens wissen, daß Archimedes den Schwerpunkt des Segmentes eines Rotationsparaboloides kannte, weil er ihn ohne Erläuterung im Buch II der „Schwimmenden Körper" öfters benützt (Op. II², S. 317ff., z. B. S. 350, wo Archimedes sogar auf sein Werk über die Schwerpunkte zurückverweist).

[12]) S. u. die Fußnote 34.

[13]) Es ist mir bekannt, daß Leonardo da Vinci den Satz vom Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide schon vielleicht ein halbes Jahrhundert vorher besaß (Ms. F, fol. 51, r, nach P. Duhem, Les Origines de la Statique, I. Bd., Paris 1905, S. 212/13). Aber selbst wenn Leonardo den Satz selbständig gefunden haben sollte, könnte von einer mathematischen Ableitung bei ihm keine Rede sein.

[14]) Die Lage des Kegelschwerpunktes wird von Archimedes in der Einleitung zur „Methodenlehre" angegeben.

dem Waagebalken parallel sind, so ist der Aufhängungspunkt, für den das ganze System im Gleichgewicht ist („punctum suspensionis ex centro communis gravitatis"), vom Mittelpunkt des Waagebalkens gegen die Grundflächen der Dreiecke hin um $\frac{1}{6}$ einer der zum Balken parallelen Seiten des Dreiecks verschoben. Es werden 2 Figuren (Fig. 2a u. 2b) vorgeführt[15], so:

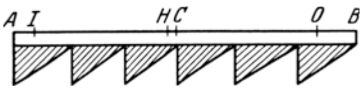

Fig. 2a.

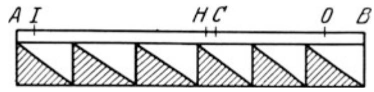

Fig. 2b.

I und *O* sind die Aufhängepunkte für die einzelnen Randdreiecke. Maurolico sagt nun, da *OB* doppelt so groß ist wie *AI*, muß man um die Hälfte des Unterschiedes der beiden vom Mittelpunkt *C* des Balkens aus nach links gehen, bis man zum Aufhängepunkt *H* des Systems kommt.

In Prop. XX (S. 173) wird das folgendermaßen erweitert. Es ist ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck *ABC* (Fig. 3) gegeben, in diesem sind Treppenstufen, alle von gleicher Breite, angebracht, die einen nach innen, die anderen nach außen. Es wird der Aufhängepunkt gesucht für die Figur, die entsteht, wenn man von dem Dreieck die inneren Treppenstufen abzieht, und von der Figur, die entsteht, wenn man zum Dreieck die äußeren Treppenstufen dazuzählt. Das Ergebnis ist, daß dieser Aufhängepunkt vom Aufhängepunkt *D* des Dreiecks $\left(AD = \frac{1}{3} AC\right)$ um $\frac{1}{6}$ der horizontalen Breite *h* einer Treppenstufe nach links oder rechts abweicht, also sich in *R* oder *S* befindet.

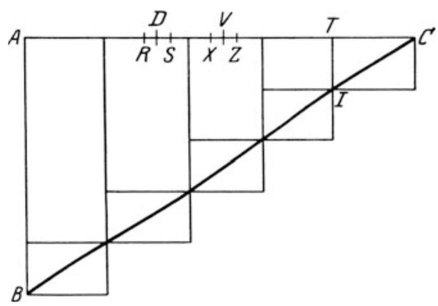

Fig. 3.

Der Beweis wird so geführt. Am Schluß von XIX wurde schon gesagt, daß die Dreiecke durchaus nicht alle am Waagebalken selbst befestigt sein müssen, wenn nur die betreffenden Seiten parallel zum Waagebalken bleiben. Ist also *V* die Mitte des Waagebalkens und $VX = VZ = \frac{1}{6} h$, so ist für die inneren Treppenstufen *X*, für die äußeren *Z* der Aufhängepunkt. Sei nun *n* die Zahl der Streifen längs *AC*[16]), setzen wir

---

[15]) Die Schraffierung fehlt bei Maurolico.

[16]) Maurolico hat natürlich keinerlei algebraische Bezeichnung und drückt ganz wie Archimedes alles in Worten und mit den großen Buchstaben der Figur aus.

die Fläche einer Treppenstufe CTI gleich t, und nennen die Summe der inneren (äußeren) Treppenstufen Σ, so ist $\Sigma = nt$, und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CTI und CAB $(=\Delta)$

$$\Delta = n^2 t = n\Sigma.$$

Nun ist $AC = nh$, also

$$DV = \frac{1}{2} nh - \frac{1}{3} nh = \frac{1}{6} nh,$$

$$DX = \frac{1}{6} nh - \frac{1}{6} h = \frac{1}{6} h (n-1).$$

Setzen wir jetzt $\Delta - \Sigma = F$, d. i. die treppenförmige Fläche, die übrig bleibt, wenn man vom Dreieck die inneren Treppenstufen wegnimmt, so soll R der Aufhängepunkt für F sein, und Δ, dessen Aufhängepunkt D ist, denken wir uns in $\Sigma + F$ zerlegt. Dann ist nach dem Hebelgesetz, wenn man D als Drehpunkt festhält,

$$F \cdot DR = \Sigma \cdot DX,$$

oder

$$\Sigma (n-1) \cdot DR = \Sigma \cdot \frac{1}{6} h (n-1),$$

folglich

$$DR = \frac{1}{6} h.$$

Für die äußeren Treppenstufen ist es natürlich ähnlich. Ein Scholium besagt, daß man den Satz leicht auf Prismen erweitern könne, die man auf diesem Dreieck mit seinen Treppenstufen senkrecht errichte.

An diesen Betrachtungen ist gegenüber Archimedes, der ja in I, 13 (wo der Satz von den Seitenhalbierenden bewiesen wird), ähnliche Überlegungen macht (Op. II², S. 150f.), auf alle Fälle neu, daß die Breite h der Treppenstufen berücksichtigt wird, wodurch sich die Verschiebung des Schwerpunktes um $\frac{1}{6} h$ ergibt. Das ist aber hier das Wesentliche.

In der Proposition XXI wird folgender Satz bewiesen: Wenn an zwei gleichen Waagebalken in gleichen Entfernungen proportionale Gewichte in entsprechender Anordnung hängen, so schneiden die Aufhängepunkte für das Gleichgewicht der ganzen Systeme auf den Waagebalken gleiche und entsprechend liegende Stücke ab. Darüber brauchen wir weiter nichts zu sagen.

Es folgt nun die Anwendung dieser Sätze in Proposition XXII (S. 176): Schreibt man einem parabolischen Konoid[17]) zwei Figuren ein, die treppenförmig aus gleich hohen Zylindern zusammengesetzt sind, so steht der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur in der Achse von der Basis

[17]) Das ist die Bezeichnung des Archimedes für „Rotationsparaboloid".

um weniger als $\frac{1}{3}$, der Schwerpunkt der umgeschriebenen Figur aber steht um mehr als $\frac{1}{3}$ der ganzen Achse ab; und es ist der Unterschied im einen oder andern Sinn gleich $\frac{1}{6}$ der Höhe irgendeines der Zylinder.

Der Sinn des Beweises ist der folgende. Dem Paraboloidsegment (Fig. 4a) wird ein rechtwinkliges Dreieck EGF (Fig. 4b) zugeordnet, so daß $EF = AB$. Dem Dreieck werden Treppenstufen ein- und angeschrieben von derselben Höhe (und

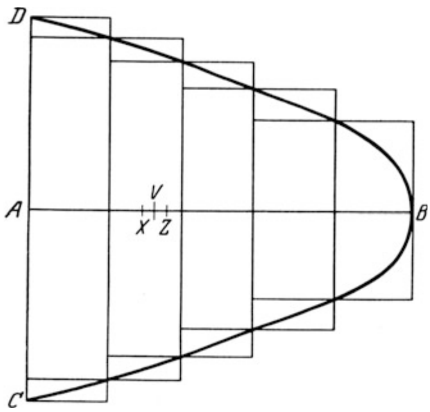

Fig. 4 a.

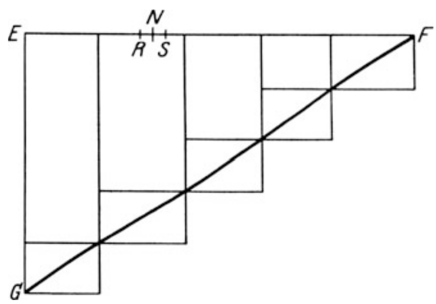

Fig. 4 b.

Zahl) wie dem Paraboloidsegment Zylinder. Da die Zylinder alle dieselbe Höhe haben, verhalten sie sich wie die Grundflächen. Diese verhalten sich aber wie die Quadrate der Ordinaten, die sich wiederum bei der Parabel wie die (von B aus gemessenen) Abszissen[18]) verhalten. Im Dreieck EGF verhalten sich aber die Ordinaten selbst wie die (von F aus gemessenen) Abszissen, und die in das Dreieck eingeschriebenen oder über dieses um die angeschriebenen Treppenstufen hinausragenden Rechtecke verhalten sich (wieder wegen der gleichen Höhe) wie die Ordinaten (d. i. wie ihre Grundlinien). An der Hebelstange EF hängen also Rechtecke, an der Hebelstange AB Zylinder, die an jeder Stelle gleiches Verhältnis zueinander haben. Demnach liegt nach Proposition XXI der Aufhängepunkt bei beiden Figuren völlig gleich. Vom Dreieck wurde aber bewiesen, daß der Aufhängepunkt vom Punkt N, der EF gegen E hin drittelt, um $\frac{1}{6}$ der Höhe eines Rechtecks absteht, nach links oder rechts. Also steht der Schwerpunkt X oder Z der ein- oder umgeschriebenen Figur des Paraboloids auch um $\frac{1}{6}$ der Höhe eines Zylinders vom Punkte V ab, der AB gegen A hin drittelt.

Für uns wäre nun selbstverständlich, daß wir sagten, $VX = VZ = \frac{1}{6}\,h$ wird für $h \to 0$ selbst Null, und damit fällt der Schwerpunkt des Paraboloids

[18]) Die Ausdrücke Abszissen und Ordinaten hat Maurolico natürlich nicht.

nach *V*. Aber Archimedes kannte und Maurolico kennt noch keinen solchen Grenzübergang. Archimedes hielt eine solche Schlußweise, die er wohl doch für sich im Kopfe machte, zur Veröffentlichung offenbar nicht für streng genug, und demgemäß macht auch Maurolico in Proposition XXIII (S. 177) den indirekten Beweis dafür, den jeder kennt, der einmal in Archimedes hineingesehen hat. Damit schließt das 4. Buch der Maurolicoschen Bearbeitung.

Die ganze Art der Ableitung zeigt, daß Maurolico den Archimedes nicht nur genau verstand, sondern auch imstande war, ganz Neues mittels derselben Methode zu leisten, so daß es Archimedes selbst kaum hätte besser machen können[19]).

III.

Dieselbe Lücke bei Archimedes reizte auch den uns schon bekannten Kenner der alten Mathematiker, F. Commandino. In seinem „Liber de Centro Gravitatis Solidorum" (Bononiae 1565) erzählt er uns im Vorwort, er habe in einem Buch von Maurolico (das er nicht angibt[20]) gelesen, daß dieser etwas über den Gegenstand geschrieben habe. Da nun Maurolico viel gelehrter und erfahrener in diesen Sachen sei als er, habe er lang gewartet, bis das angezeigte Werk erscheine, sich aber dann doch entschlossen, seine eigene Schrift zu veröffentlichen.

Er beginnt mit einfachen ebenen Figuren, die in Kreis und Ellipse eingeschrieben sind, die ersten regelmäßig, die zweiten diesen affin entsprechend, so daß ihr Schwerpunkt im Mittelpunkt des Kreises bzw. der Ellipse liegt. Beim Theorema VI (fol. 8,r), daß der Schwerpunkt eines Prismas auf der Mittelebene liegt, teilt er schon das Prisma in eine Anzahl quer verlaufender Schichten, die beim Zylinder wiederkehren. Es folgt dann für die Grundfläche des dreiseitigen Prismas dieselbe Einteilung, die Archimedes beim Dreieck macht (Op. II^2, S. 152; Fig. 5). Das Prisma selbst wird durch entsprechende Ebenen zerlegt. Dies wird dann

[19]) Archimedes hat in der „Methodenlehre" auch den Schwerpunkt des Paraboloidsegmentes abgeleitet, aber auf eine ganz andere Art (Nr. V). Es ist sehr wahrscheinlich, daß Maurolicos Gedankengang durchaus selbständig ist.

[20]) Sicherlich in der von Maurolico im Jahre 1558 zu Messina herausgegebenen Sammelausgabe mehrerer griechischer Sphäriken, deren (sehr langer) Titel beginnt: „Theodosii Sphaericorum Elementorum Libri III. Ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici . . ." (Am Schluß) Messanae . . . M.D.LVIII. Dort ist schon auf Bl. (2) r^0 in dem umfangreichen „Index lucubrationum Maurolyci" angegebenen: „De momentis aequalibus libelli quatuor. In quorum postremo de centris Solidorum ab Archimede omissis agitur." Am Schluß des Werkes bringt er eine nähere Inhaltsangabe seiner „Lucubrationen", und da steht auf Bl. 71 (verdruckt in 68) v^0, daß er u. a. den Schwerpunkt der Pyramide gefunden habe (mit dem Ergebnis); doch teilt er nichts über das Paraboloid mit.

auf ein allgemeines Prisma und auf den Zylinder erweitert. Damit ist bis jetzt nur gezeigt, daß der Schwerpunkt dieser Körper auf der Achse liegt. Nun wird im Problema I (Prop. X; fol. 17,r) der Satz aufgestellt, daß man in eine (dreiseitige) Pyramide und um sie treppenförmige Körper beschreiben könne (mit gleich hohen Stufen), so daß der äußere vom inneren Körper sich um weniger als eine vorgegebene Größe unterscheide. Diese Ausführungen sind von einer sehr feinen Figur begleitet (s. Fig. 6). Das Entsprechende wird dann für den Kegel bewiesen und für einen Kugelabschnitt, der nicht größer als eine Halbkugel ist. Nun wird erst gezeigt, daß auch der Schwerpunkt dieser Körper auf der Achse liegt. Das Theorema XIII (Prop. XXII; fol. 27,v) bringt den Satz, daß in einer Pyramide der Schwerpunkt die Achse im Verhältnis 3 : 1 teilt. Dies wird so bewiesen, wie wir es etwa machen, indem die Ebenen durch die Seitenkanten und die Achsen gelegt werden. Das Verfahren hat mit keinem der von Maurolico angewendeten Verfahren Ähnlichkeit.

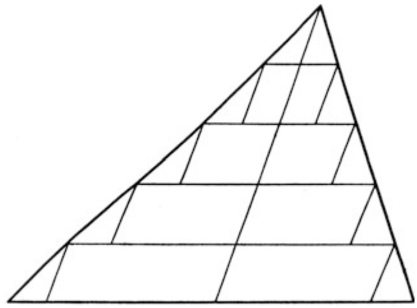

Fig. 5.

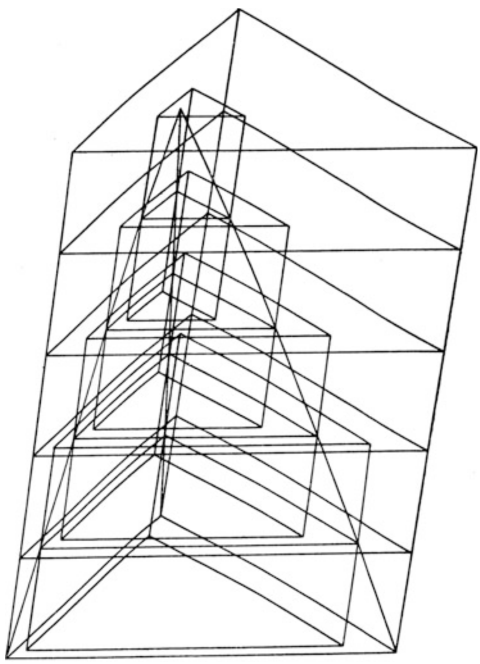

Fig. 6.

Es kommt die Erweiterung auf allgemeine Pyramiden und Kegel. Dann geht Commandino zu Pyramiden- und Kegelstümpfen über, leitet zuerst das Volumen ab und bestimmt hierauf in Theorema XXI, das fast eine ganze Seite lang ist, deren Schwerpunkt. Dabei kommt nichts Infinitesimales mehr vor. Es folgen die regelmäßigen Körper, deren Schwerpunkt mit dem der umgeschriebenen Kugel zusammenfällt.

In Problema VI (Prop. XXVII) geht er auf das Rotationsparaboloid über, das er auch schief abschneidet Er beweist zuerst den Satz, daß man dem Paraboloid einen aus gleich hohen Zylindern bestehenden Körper um-, bzw. einbeschreiben könne, sodaß die Strecke zwischen dem Schwerpunkt des Paraboloidsegments und dem des ein-, bzw. des umgeschriebenen Körpers kleiner sei als irgendeine vorgegebene Strecke Der Beweis wird indirekt geführt Er kommt so (fol. 41, v) zu dem Satz, daß die Schwerpunkte der ein- und umgeschriebenen Körper sich um so mehr dem Schwerpunkt des Paraboloidsegments nähern, aus je mehr Zylindern sie bestehen. Niemals könnten sie aber diesen Schwerpunkt selbst erreichen. Daraus würde nämlich folgen, sagt er, daß der eingeschriebene Körper nicht nur dem Paraboloidsegment, sondern auch dem umgeschriebenen Körper gleich wäre, „quod est absurdum". Der Gedanke eines Grenzüberganges wird also abgelehnt.

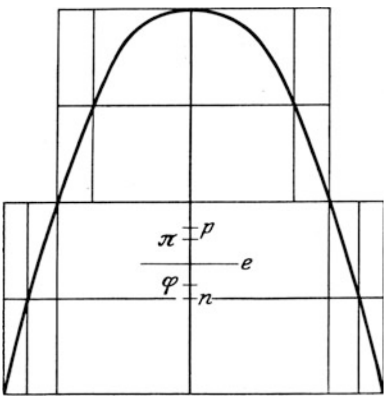

Fig. 7.

Das Theorema XXIII (Prop. XXIX; fol. 41, v) gibt dann den Satz, daß jedes (rechtwinklige) Paraboloidsegment den Schwerpunkt auf der Achse so liegen habe, daß er diese im Verhältnis 2:1 (von der Spitze zur Basis genommen) teilt. Dieser Beweis ist sehr lang und mühsam, aber ganz originell. Commandino fängt mit der einfachen Halbierung der Höhe des Paraboloids an. Dann besteht der eingeschriebene Körper nur aus einem Zylinder mit bekanntem Schwerpunkt n, der umgeschriebene aus zwei Zylindern, deren Summe den Schwerpunkt p hat (Fig. 7). Bei der weiteren Halbierung entstehen innen 3 Zylinder, außen 4, die Schwerpunkte sind dann π und φ, und es wird gezeigt, daß $p\pi = n\varphi$ ist (fol. 44, r, unter Mitte). Bei dem Mangel jeder allgemeinen Rechnung erscheint aber der folgende Schluß, daß bei weiterer Halbierung die neuen Schwerpunkte der ein- und umgeschriebenen treppenförmigen Körper sich wieder gleich weit von π und φ entfernen, sehr gewagt. Daraus folge, daß die Linie $\pi\varphi$ vom Schwerpunkt e des Konoids halbiert werde, der damit auf den angegebenen Teilungspunkt der Achse falle. Das wird wieder indirekt bewiesen. Der Grenzübergang fehlt also auch hier tatsächlich; aber er liegt immerhin näher als bei Maurolico. Doch ist Maurolicos Beweis offenbar zwingender als der Commandinos. Auf schief abgeschnittene Paraboloide dehnt der letztere den Satz ohne weiteres aus. — In den letzten zwei Propositionen wird dann noch der Schwerpunkt des Paraboloidstumpfes bestimmt, der entsteht, wenn man dem ganzen Paraboloidsegment oben ein kleineres Segment wegnimmt. Dazu sind nur Schwerpunktbetrachtungen nötig.

IV.

Nun waren Archimedes und Commandino allgemein zugänglich. An beiden hat sich Simon Stevin geschult, der 1586 zu Leiden ebenfalls ein Büchlein über Schwerpunkte herausgab, das er „Beghinselen der Weeghkonst" betitelte. Es ging mit dem gleichzeitig erschienenen Büchlein „Beghinselen des Waterwichts" im Jahre 1608 in die „Hypomnemata mathematica" (lat. von W. Snellius) über, und erschien dann französisch durch A. Girard 1634 in den „Œuvres mathematiques de Simon Stevin". Stevin hat sachlich nichts Neues gemacht. Beim Paraboloid hat er sogar direkt die Überlegungen Commandinos rechnerisch etwas weiter (bis zur 16-Teilung) verfolgt, wie er selbst zugibt. Aber er weicht von Archimedes und dem immer noch sehr vorsichtigen Commandino schon bei den grundlegenden Sätzen, z. B. dem, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks auf einer Seitenhalbierenden liegen müsse, himmelweit ab. Archimedes hat diesen Satz sehr umständlich, aber ganz streng, bewiesen, indem er eine Teilung des Dreiecks zugrunde legte, wie sie Figur 5 zeigt. Stevin macht kurzen Prozeß, indem er erklärt, wenn man die Teilung beliebig fortsetze, würde der Unterschied der Summe der eingeschriebenen Parallelogramme gegenüber dem Dreieck kleiner als eine noch so kleine gegebene Fläche. Der Schluß ist dann sehr summarisch der, daß Größen, die sich um weniger als eine noch so kleine gegebene Größe unterscheiden, einander gleich sind. Das ist also ein mehr anschaulicher Grenzübergang, den Archimedes nie für wissenschaftlich genommen hätte, und den er eben durch seine indirekte Beweismethode ersetzte. Von unserem Standpunkt bedeutet es aber doch einen Fortschritt, weil nur auf diese Weise schließlich der analytische Grenzübergang entstehen konnte, auf dem die moderne Mathematik beruht. Ich begnüge mich mit diesen Bemerkungen über Stevin, weil über ihn schon eine Arbeit von H. Bosmans vorliegt, in der nähere Angaben gemacht werden[21]). Ich muß Bosmans beistimmen, wenn er sagt, daß die „Hypomnemata" in aller Hände kamen, und, wenn sie von Kepler, Cavalieri u. a. auch nicht genannt werden, diesen doch sicher bekannt waren. Stevins Landsleute Snellius und Gregorius a St. Vincentio haben ihn bestimmt schon in der Ursprache gelesen.

Rein zeitlich kommt jetzt ein Werk „Guidi Ubaldi è Marchionibus Montis In duos Archimedis aequeponderantium libros paraphrasis", Scholiis illustrata; Pisauri 1588, das eine Bearbeitung des nämlichen Archimedischen Werkes ist. Daß Guidubaldo den Archimedes ver-

[21]) Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin. Ann. Soc. Scient. Brux. XXXVII, 2 (1912/13). S.-A. 33 S. Etwas kürzer „Le calcul infinitésimal chez Simon Stevin". Mathésis 37 (1923). S.-A. 18 S.

standen hat, ist sicher. Er geht aber nicht über ihn hinaus, sondern verfolgt nur den Zweck, das Werk vielen, die zu wenig Geometrie konnten, leichter verständlich zu machen. An Räumlichem kommt nur (S. 115) ein sehr schön perspektivisch gezeichnetes quadratisches Prisma mit seiner Achse vor.

V.

Ich muß aber noch einen ganz bedeutenden Mathematiker nennen, der mit den vorigen eng zusammenhängt, und der schon von Galilei[22]) der neue Archimedes seiner Zeit genannt wurde: Es ist das der „Professor für bürgerliche Philosophie und Mathematik am Gymnasium zu Rom" Luca Valerio, der von der offiziellen Geschichtschreibung lange ungebührlich vernachlässigt worden war. Doch wies H. G. Zeuthen auf ihn hin[23]), und C. Wallner legte dar, wie Valerio dem Grenzbegriff vorgearbeitet hat[24]). Ich muß ihn hier noch aufführen, weil er ein eigenes Buch schrieb über Schwerpunkte „De Centro Gravitatis libri tres", das zu Rom 1604 erschien, also auch von Commandino, dem er sich stellenweise anschloß, nicht zu weit absteht. Man hat gewöhnlich nur die 2. Auflage dieses Werkes zur Verfügung, die zu Bologna 1661 herauskam und von der ersten nur in der Seitenzählung abweicht. Es ist das schon ein ganz stattliches Buch von 260 Seiten in 4°. Ich will wenigstens flüchtig über seinen Inhalt berichten.

Valerio hat die Ableitung des Schnittpunktes der 4 Achsen des Tetraeders wie Commandino, aber die Ableitung des Schwerpunktes mittels des Oktaeders wie Maurolico. Das kann er selbst gefunden haben, wenn auch vielleicht das Manuskript Maurolicos nicht unter Schloß und Riegel lag. Er bringt den Schwerpunkt des Trapezes eigens und dann den Schwerpunkt des dreikantigen Pyramidenstumpfes. Stereometrische Sätze sind bei ihm in größerer Zahl wie bei Commandino eingestreut. Auch stellt er eine Reihe von allgemeinen algebraischen Sätzen auf, die mindestens als Vorläufer von Sätzen über Grenzwerte zu betrachten sind. Besonders schön ist die Ableitung des Kugelvolumens, die in Cavalieris Werk von 1635 überging und jetzt an allen unseren Schulen gelehrt wird, mit dem Unterschied, daß Valerio keine Indivi-

---

[22]) Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Leiden 1638. Giornata seconda. S. z. B. die deutsche Ausgabe in Ostwalds Klass. Nr. 11, S. 122.

[23]) Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert (Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., Heft XVII). Leipzig 1903, S. 237/38. Dort stehen auch kurze Bemerkungen über die meisten anderen oben erwähnten Männer.

[24]) Über die Entstehung des Grenzbegriffs. Bibl. math. (3) 4 (1903) S. 246—259. — S. a. den Artikel von H. Bosmans, „Les Démonstrations par l'Analyse Infiniésimale chez Luc Valerio" Ann. Soc. scient. Bruxelles 37 (1912/13). S.-A. 22 S.

sibeln, sondern korrekte Archimedische Schichten von endlicher Dicke verwendete (Buch 2, Prop. XII). Nun folgen Volumenbestimmungen von Kugelsegmenten, ohne Verwendung von Infinitesimalem. Hierauf die Schwerpunkte allgemeiner Pyramidenstümpfe. Dann kommt nach einigen allgemeineren vorbereitenden Sätzen über die Schwerpunkte von Figuren und Körpern, von denen besonders XXXII sehr bemerkenswert ist[25]), in Proposition XXXIII der Satz, daß der Schwerpunkt der Halbkugel die Achse im Verhältnis 5:3 teilt, vom Scheitel zur Grundfläche gerechnet, und anschließend werden die Schwerpunkte der verschiedenen Kugelsegmente ($\gtrless$ Halbkugel) bestimmt[26]).

Proposition XLI enthält den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids. Es wird gezeigt, daß dieser mit dem Schwerpunkt eines eingeschriebenen Achsendreiecks übereinstimmt. Der Beweis stützt sich auf den erwähnten allgemeinen Satz XXXII. Mittels desselben Satzes leitet er sodann in Proposition XLIII den Schwerpunkt des senkrechten Hyperboloidsegmentes („hyp. Konoid“ = zweischaliges Hyperboloid) ab[27]), indem er dieses durch die Summe eines Paraboloidsegmentes (gleicher Achse und gleichen Scheitels) und eines Kegels ersetzt. Dann werden noch die Schwerpunkte der Stümpfe der paraboloidischen und hyperboloidischen Körper berechnet.

Das 3. Buch beginnt mit Sätzen über Paraboloide und Kugelschichten. Es treten mehrere frühere Sätze wieder auf, offenbar auf anderer Grundlage bewiesen. Dies alles ist noch niemals genau studiert und kritisch beurteilt worden[28]). Es folgen die Schwerpunkte des Halbsphäroids und des Sphäroidsegments, sowie die Schwerpunkte aller schief abgeschnittenen Segmente. Das Buch endet mit Erörterungen über den Schwerpunkt des hyperbolischen Konoids, der in einem eigenen Appendix nochmals in eleganterer Weise in Angriff genommen wird. Valerio hatte gefunden, daß der erwähnte Kegel dem aus dem hyperbolischen durch das parabolische Konoid ausgeschnittenen glockenförmigen Restkörper gleich sei. Am Schluß der zweiten Auflage ist die „Quadratura Parabolae“ (Bononiae M. DC. LX) beigefügt, die ursprünglich eine eigene Schrift gewesen war (1. Auflage Romae M. DC. VI), zwar mit eigenem

---

[25]) Hier kommt er dem Indivisibelbegriff Cavalieris recht nahe (s. Fußn. 38).

[26]) In der „Methodenlehre“ hat Archimedes sowohl den Schwerpunkt der Halbkugel (Nr. VI) wie den Schwerpunkt der Kugelsegmente (VIII u. IX) abgeleitet.

[27]) Der Schwerpunkt des Hyperboloidsegments ist in der „Methodenlehre“ des Archimedes nicht mehr enthalten.

[28]) Seit der Niederschrift dieses Satzes hat ein etwas eingehenderes Studium des Werkes durch Herrn Oskar Kraus ergeben, daß Valerio sehr häufig und in erweiterter Form die Idee des Maurolico, Schwerpunkte von Körpern auf die von Flächen zurückzuführen, benützt. Meine obige Bemerkung über das Manuskript Maurolicos hat also doch wohl mehr Grundlage, als ich ursprünglich dachte.

Titelblatt, doch unter Fortzählung der Seiten. Hier hat Valerio in der Manier des Maurolico aus dem bekannten Schwerpunkt der Halbkugel (oder des Halbsphäroids) auf den Schwerpunkt des Parabelsegments geschlossen und daraus dann die Fläche abgeleitet[29]).

Ist es ein Wunder, wenn auf diesen Grundlagen, die man früher zum größten Teil ganz übersehen hatte, die Anwendungen des Infinitesimalen im 17. Jahrhundert wie die Pilze in die Höhe schossen? Ich habe Kepler und Cavalieri schon genannt, ich könnte auch Descartes und Galilei anführen, die, wie ich schon einmal näher ausgeführt habe[30]), sofort mit Unendlichkleinem in verschiedener Form arbeiteten (um 1620; Galilei wohl später, aber vor 1632), als an sie die Frage der mathematischen Ableitung des Fallgesetzes herantrat. Ich will meine Aufzählung von Werken über den Schwerpunkt beschließen mit der Namhaftmachung zweier Werke, die in der Richtung der bereits besprochenen Arbeiten liegen, d. i. die noch ganz im antiken Stil geschriebene 55 Seiten umfassende Schrift des Jesuiten Jean-Charles della Faille „Theoremata de Centro gravitatis partium circuli et ellipsis" (Antwerpiae M. DC. XXXII). Dort wird zum erstenmal der Schwerpunkt eines Kreissektors (und damit auch der eines Kreissegments) bestimmt. Das zweite Werk kam noch später heraus. Es ist das große vierbändige Werk des Jesuiten Paul Guldin „De centro gravitatis", das zu Wien von 1635 bis 1641 erschien und bereits Kritiken von Keplers und Cavalieris Werken enthält. Über die Schrift des della Faille hat sein Landsmann und Ordensgenosse H. Bosmans einen längeren Bericht gemacht[31]), von Guldins Werk hat man aber nicht einmal eine genauere Inhaltsangabe.

VI.

All diese langwierigen Einzeluntersuchungen über Schwerpunkte wurden überflüssig, nachdem Torricelli die allgemeine Regel ausgesprochen hatte, die ihm schon seit 1642 richtig vorschwebte und der er 1646 die entscheidende Form gab[32]), daß, wie wir heute sagen, der Durch-

[29]) Die öfteren Wiederholungen in diesem Werk sind darauf zurückzuführen, daß bei Herstellung der ersten Auflage die einzelnen Bücher schon gedruckt wurden, während der Verfasser noch an der Fortsetzung arbeitete. Daher sind in der ersten Auflage die einzelnen Teile auch je für sich paginiert.

[30]) Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei. Zeitschr. math. nat. Unterr. 45 (1914) S. 208—228.

[31]) Le Traité „De Centro Gravitatis" de Jean-Charles della Faille, S. J. Ann. Soc. scient. Bruxelles 38 (1914). S.-A. 63 S. — Eine kürzere Notiz (mit Bildnis) in Mathésis 41 (1927). S.-A. 11 S.

[32]) Siehe den Brief Torricellis an B. Cavalieri vom 7. April 1646. Opere di Evangelista Torricelli, ed. Loria-Vassura, Vol. III, Faenza 1919, S. 365—367. Vgl. dazu den Artikel „Le prime applicazioni del calcolo integrale alla determinazione

messer des Körpers (oder der Fläche) durch den Schwerpunkt so geteilt wird, daß sich die beiden Abschnitte wie die Integrale aller Momente, diese nach beiden Seiten genommen, verhalten. Die Integrale wurden nach der Indivisibelnmethode des Cavalieri ausgewertet.

Um Torricellis Satz in unserer Bezeichnung auszudrücken, nehmen wir etwa Fig. 8 als Typus für den allgemeinen Fall, die Abszissenachse (mit A als Anfangspunkt) als „Durchmesser" (Achse durch den Schwerpunkt) des im übrigen beliebigen Körpers ACV (der auch eine Fläche sein kann). Der Schwerpunkt O habe die Abszisse ξ. Dann ist nach Torricelli

$$\frac{\xi}{b-\xi}=\frac{\int_0^b x\,dm}{\int_0^b (b-x)\,dm},$$

oder

$$b\,\xi\int_0^b dm-\xi\int_0^b x\,dm=b\int_0^b x\,dm-\xi\int_0^b x\,dm,$$

also

$$\xi\int_0^b dm=\int_0^b x\,dm,$$

unsere gebräuchliche Gleichung für den Schwerpunkt.

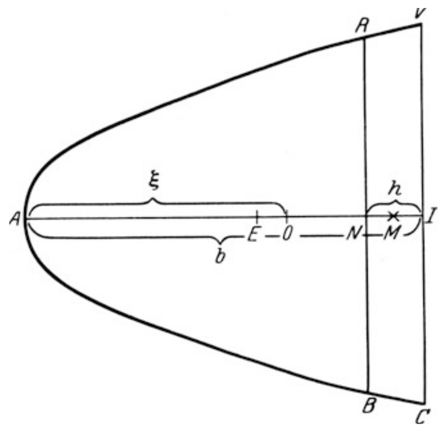

Fig. 8.

Unterdessen hatte Fermat spätestens 1638[33]) seine Methode der Maxima und Minima, die ja in allen einschlägigen Werken beschrieben wird, auch auf die Fragen des Schwerpunktes angewandt, und vor allem den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids bestimmt. Seine Art der Behandlung ist so eigenartig, daß sie wert ist, eigens angeführt zu werden, und ich will mit ihr meine Ausführungen beschließen. Ich gebrauche dabei allerdings die moderne Buchstabenrechnung, werde aber den Gedanken Fermats ganz getreu wiedergeben.

In obenstehender Figur 8 sei $AI=b$, O der Schwerpunkt des Körpers, also $\xi=AO$ gesucht. Nun wird der Körper um $NI=h$ gekürzt. Der

del centro di gravità di figure geometriche" von E. Bortolotti, Rend. R. Acc. Bologna (Sez. Fis.-Mat.), Anno acc. 1921/22. S.-A. 15 S. mit einer kleinen Ergänzung im Period. di mat. (4) 3 (1923) S. 429/30. Der Wortlaut ist bei Torricelli der folgende: „Centrum gravitatis ita secat axem sive diametrum tam in planis, quam in solidis figuris, ut pars versus verticem sit ad reliquam ut sunt omnes ductus applicatarum in omnes diametri portiones versus verticem abscissas ad omnes ductus eorumdem applicatarum in reliquas diametri portiones."

[33]) Œuvres, ed. Tannery-Henry, Bd. I, Paris 1891, S. 136—139, frz. in Bd. III, 1896, S. 124—126.

Schwerpunkt falle dann nach E. Fermat nimmt ohne weiteres an, daß E die Strecke AN in demselben Verhältnis teilt wie O die Strecke AI[34]). Daraus folgt

$$\frac{AE}{b-h}=\frac{\xi}{b}, \quad AE=\frac{\xi}{b}(b-h), \quad EO=\xi-\frac{\xi}{b}(b-h)=\xi\frac{h}{b}.$$

Nun sei M der Schwerpunkt des Stumpfes $[BCVR]$; dann besteht in bezug auf den Drehpunkt O die Momentengleichung

$$EO\cdot[ABR]=MO\cdot[BCVR].$$

Die Körper $[ABR]$ und $[ACV]$ verhalten sich aber wie AN^2 zu AI^2. Dies folgt ohne weiteres aus der Gleichung der Parabel. Statt der obigen Momentengleichung kann man also schreiben

$$EO\cdot(b-h)^2=MO\cdot[b^2-(b-h)^2].$$

Demnach ist

$$MO=\xi\cdot\frac{h}{b}\cdot\frac{(b-h)^2}{2bh-h^2}.$$

Wir würden nun hier einfach gleich mit h kürzen, und dann h gegen Null streben lassen. Dann wird $MO=IO=b-\xi$, und es ergibt sich

$$b-\xi=\frac{\xi}{2}, \quad \xi=\frac{2}{3}b.$$

Fermat setzt gemäß seinen Prinzipien MO angenähert gleich der rechten Seite, schafft ohne vorherige Kürzung den Nenner weg, dividiert dann erst mit h, läßt die Glieder, die noch h enthalten, weg, und was dann übrig ist, gibt, wenn man die angenäherte Gleichheit durch eine wirkliche ersetzt, genau, was wir viel einfacher herausgebracht haben. Ich betone, daß Fermat nicht nur nie von einem Grenzwert für $h=0$ redet, sondern

[34]) Bedingung dafür ist, daß in dem Ausdruck

$$\frac{\xi}{b}=\frac{\int_0^b x\,dm}{b\int_0^b dm}=\frac{\int_0^b x f(x)\,dx}{b\int_0^b f(x)\,dx}$$

die Größe b herausfällt. Das ist sicher der Fall für

$$f(x)=A\,x^k \begin{cases} k\neq-1 \\ k\neq-2 \end{cases}.$$

Denn dann ist

$$\frac{\xi}{b}=\frac{(k+1)\cdot b^{k+2}}{b\,(k+2)\cdot b^{k+1}}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Liegt ein Rotationskörper vor, so ist $y^2=f(x)$ die Meridianlinie. In unserem Falle ist $f(x)=Ax$, $dm=y^2\pi dx=A\pi x dx$, $k=1$, $\xi/b=2/3$. Im Falle der Parabelfläche wäre $y=f(x)=Ax^{\frac{1}{2}}$, $k=\frac{1}{2}$, $\xi/b=3/5$ (Archim. „Schwerpunkte" II, 8; Op. II², S. 186f.).

offenbar an so etwas nicht gedacht hat, wie die ausführliche Erläuterung seines Verfahrens zeigt, die erst neuerdings aufgefunden wurde[35]).

Auch tritt hier Fermats Verfahren nicht rein auf, indem er sonst immer die Unbekannte um eine Größe vermehrt oder vermindert, die er dann, wie wir sagen, Null setzt. Er hat das offenbar aus Versehen hier anders gemacht, und Roberval scheint ihn darauf aufmerksam gemacht zu haben. Fermat gab es zu, sagte aber, man könne es so oder so machen[36]). Auf alle Fälle ist auch Fermats Verfahren ein ganz allgemeines Prinzip (was er wußte), und damit sind wir aus den Einzelversuchen heraus auf die allgemeinen Methoden gekommen, die nur des rechnerischen Ausbaus harrten. Wie wichtig alle derartigen Schwerpunktsbetrachtungen nicht nur für die Vorgeschichte, sondern auch für die wirkliche Entdeckung der Infinitesimalrechnung waren, geht daraus hervor, daß Leibniz öfter, insbesondere aber in einer großen Abhandlung „Analysis tetragonistica ex centrobarycis" vom Oktober 1675, sich auf Schwerpunktsüberlegungen stützte. Hiermit kann ich mich aber nicht mehr befassen[37]).

Wenn ich bisher von Archimedischer Tradition gesprochen habe, mußte ich natürlich die in der „Methode", die erst 1906 wieder aufgefunden wurde, enthaltene Indivisibelnlehre ausschließen. Daß trotzdem die Indivisibelnvorstellung, d. h. also kurz gesagt und etwas roh ausgedrückt, die Zusammensetzung einer Strecke aus Punkten, einer Fläche aus Geraden, eines Körpers aus ebenen Schnitten, sofort bei Wiederaufnahme des Studiums von Archimedes wieder auftauchte und schon 1635 eine große zusammenfassende Darstellung erhielt[38]), ist nicht verwunderlich. Erstens ist es auch bei endlicher Schichtenzerlegung, wenn man die Schichten doch immer kleiner und kleiner denken muß, nicht sehr fernliegend, sie von vornherein in unendlicher Anzahl und „unend-

---

[35]) Brief an Brûlart de Saint Martin vom Jahre 1643. Œuvres, [Bd. V], Supplément aux Tomes I—IV, ed C. de Waard, Paris 1922, S. 120—125. Vgl. meinen Aufsatz „Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten", Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 38 (1929) S. 24—35.

[36]) S. denselben Bd. V der Œuvres, S. 85. Eine größere Beispielsammlung zur Anwendung der Methode auf Schwerpunkte, die Fermat gemacht hatte, ist nicht auf uns gekommen.

[37]) Die Abhandlung ist gedruckt bei C. I. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855, S. 116—131. Jüngst hat erst wieder D. Mahnke in seiner großen Abh. „Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis", Abh. Ak. Wiss. Berlin (math. phys. Kl. 1925, Nr. 1, S. 61) darauf aufmerksam gemacht.

[38]) Bonaventura Cavalieri, Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna 1635.

lich dünn" anzunehmen. Das war wohl bei Kepler der Fall, der die Archimedische Strenge nicht ausstehen konnte. Andererseits stammt diese Vorstellung sicher aus der altgriechischen Atomistik, deren Tradition sich nie ganz verlor. Man weiß, daß das Indivisibel (mit diesem Namen) die Grundlage der scholastischen Lehre vom Kontinuum bildete, die Galilei wahrscheinlich, Descartes und Cavalieri sicher kannten. Aber auf diese Seite des Themas will ich im Augenblick nicht eingehen[39]).

[39]) Vgl. C. Wallner, Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis. Bibl. math. (3) 4 (1903), S. 28—47. Dazu die Werke: Kurd Laßwitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton, 2 Bde., Hamburg und Leipzig 1890 (Neudruck 1926); Erich Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle 1923; Julius Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, Leipzig 1924.

Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes.

Von W. Stein in Altona*).

(Eingegangen am 3. 3. 1930.)

Einleitung.

In den mathematischen Arbeiten des Archimedes spielt der Schwerpunktsbegriff eine ganz besonders große Rolle. Nicht nur, daß Archimedes das Genre der Schwerpunktsbestimmungen ebener und räumlicher Gebilde sehr intensiv gepflegt hat; er hat auch die Mehrzahl seiner Flächeninhalts- und Volumenbestimmungen unter Benutzung des Hebelgesetzes ausgeführt, und seine Ephodos insbesondere, die uns einen Blick in seine Arbeitskammer hat tun lassen, zeigt, wie stark er gerade beim *Auffinden* der Tatsachen und Beweise sich dieses Hilfsmittels bedient hat.

Eine genauere Analyse dessen, was nun eigentlich Archimedes unter Schwerpunkt verstanden hat, erscheint aus doppeltem Grunde als belangreich. Einmal ist uns weder von Archimedes noch von einem seiner Vorgänger ein wirkliches Lehrbuch der Gleichgewichtstheorie erhalten, und was Archimedes in seinen verschiedenen Arbeiten von der Basis dieser Gleichgewichtslehre zum Vorschein bringt, erscheint auf den ersten Blick so wenig einheitlich, daß es zu einer systematischen Bearbeitung geradezu herausfordert. Dann aber ist die Zauberkraft, die der Schwerpunktsbegriff in den mathematischen Schöpfungen des Archimedes, aber auch in der heutigen Mathematik bei Aufgaben, zu deren Wesen er eigentlich gar nicht gehört, immer wieder entfaltet, eine so überraschende und geheimnisvolle, daß es auch rein mathematisch betrachtet und nicht nur vom Standpunkt des Historikers der Mathematik aus lohnend erscheint, den begrifflichen Untergrund dieses Mysteriums aufzudecken. Und bei der großartigen Feinheit und Geschliffenheit der archimedischen Gedankengänge tut man am besten, diese an sich rein mathematische Analyse nicht mit reiner mathematischer Spekulation, sondern mit dem Studium der in den archimedischen Gedankengängen investierten Begriffsbestimmungen zu beginnen. Das auszuführen ist das Ziel dieser Arbeit.

---

*) Die Arbeit ist ein Teil der Schrift, die ich im Februar 1930 der philos. Fak. der Univ. Kiel als Inaug.-Diss. eingereicht habe. Für Fragestellung und mannigfachen Rat bin ich Herrn Prof. Toeplitz verbunden. W. Stein.

Daß es Absicht der griechischen Mathematik war, unter Ausschaltung der geometrischen und auch jeder anderen Anschauung den mathematischen Beweis als eine lückenlose Gedankenkette zu gestalten und die wenigen Grundtatsachen (Axiome), deren Glaubwürdigkeit sich lediglich auf irgendeine Anschauung berufen kann, aus der ganzen Masse der mathematischen Tatsachen herauszupräparieren, bezeugt Plato am Ende des sechsten Buches der *πολιτεία* so ausdrücklich, daß auch die gelegentlichen Anleihen, die Euklid in seinen geometrischen Büchern stillschweigend bei der Anschauung macht, die *Absicht* reiner Gedanklichkeit nicht verdecken oder zweifelhaft erscheinen lassen können. Es ist in Anbetracht solcher „Anleihen" von besonderem Interesse, zu untersuchen, wie Euklid sich dort verhält, wo er nicht Geometrie, sondern, wie im fünften Buch seiner Elemente, eine abstrakte Größenlehre aufstellt, die bei der Allgemeinheit der *μεγέϑη* (Größen, d. h. Strecken oder Flächen oder Zeiten oder dergl.) und ihrer *λόγοι* (Verhältnisse zweier Größen derselben Art zueinander) eine Berufung auf eine bestimmte Anschauungssphäre a limine ausschließt. Herr O. Toeplitz hat bei der Durchführung dieser Analyse bemerkt, daß Euklid auch in diesem Teil seines Werkes stillschweigend gewisse Annahmen einflicht, die nicht nur unserem logischen Bewußtsein als Lücken erscheinen, sondern die sich zum Teil in der Stetigkeitslehre des Aristoteles in dessen Physik ausdrücklich formuliert finden, also an sich dem griechischen Bewußtsein nicht entgangen sind.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist in dem Sinne aufgefaßt worden, daß der Schwerpunktsbegriff bei Archimedes genau nach diesem bei der euklidischen Größenlehre aufgestellten Vorbild analysiert werden soll. Wir werden die sämtlichen Arbeiten des Archimedes, soweit in ihnen Schwerpunkt und Hebel vorkommen, auf jeden einzelnen ihrer Schlüsse hin durchzuprüfen haben, welche Aussagen über Schwerpunkte dabei explicite oder stillschweigend gemacht werden. Indem wir die von Archimedes ausdrücklich formulierten Axiome und diese stillschweigend gemachten Voraussetzungen zusammenstellen, erfahren wir auf die einzig unzweifelhafte Weise, was nun eigentlich Archimedes unter Schwerpunkt verstanden hat.

E. Mach[1]) hat gegen den Archimedischen Beweis des Hebelgesetzes den Vorwurf der petitio principii erhoben (Mechanik, pag. 14, Ende des 1. Absatzes). Er hat geltend gemacht, daß Archimedes beim Beweis des Hebelgesetzes stillschweigend ein anderes, ihm etwa gleichgeordnetes Prinzip benutze. Es handelt sich darum, diese Art der Kritik, die hier an Archimedes geübt wird, prinzipiell zu überwinden. Es geht nicht an, daß man

[1]) Die näheren Zitate findet man auf S. 230, Anm. 7.

irgendeine Voraussetzung, die Archimedes stillschweigend gemacht zu haben scheint, heraushebt und zum Protest gegen ihn benutzt. Man muß vielmehr *systematisch* analysieren, was *alles* Archimedes bewußt oder stillschweigend benutzt hat, wie es die Absicht dieser Arbeit ist. Und da stellt sich überraschenderweise heraus, daß gerade dasjenige Postulat, das Mach beanstandet hat, von Archimedes explicite als Axiom, nämlich als das 6. der der Abhandlung vom Gleichgewicht der Ebenen I vorangestellten 7 Axiome, ausgesprochen und benutzt worden ist, daß also Archimedes gerade das alles gewußt hat, was er hier eskamotiert haben soll. Man muß dazu nur die Art kennen, wie griechische Mathematiker Axiome oder andere Sätze zitieren, ohne deren Nummer oder Seitenzahl in Klammern zu schreiben.

Im übrigen sei wegen des Ergebnisses der hier zu gebenden Analyse auf die *Zusammenfassung* am Schluß (§ 8) verwiesen. Die einschlägigen Arbeiten des Archimedes werden der Reihe nach einzeln vorgenommen werden, um festzustellen, ob sich für alle der nämliche Kanon von Grundtatsachen den Schwerpunkt betreffend als letzter logischer Extrakt ergibt. Gerade die rein phänomenologische Betrachtungsweise, die jeden modernen Begriff wie Moment, Integral von der Untersuchung fernhält, hat die wesentlichsten Ergebnisse geliefert.

Im weiteren Sinne gehört es zur vollen Reinheit dieser Untersuchungsmethode, daß auch die anderen antiken Zeugnisse über die Schwerpunktslehre des Archimedes, wie wir sie bei Heron, Pappos, Eutokios finden, zunächst absichtlich beiseite gelassen worden sind; sie werden von anderer Seite auf der Basis des hier gewonnenen eindeutigen Ergebnisses untersucht werden[2]).

Desgleichen sind die sonstigen Zeugnisse des Altertums zum Schwerpunktsbegriff, die sich bei Platon, Aristoteles und dessen Kommentatoren vorfinden, absichtlich beiseite gelassen worden; sie werden von Herrn O. Toeplitz und mir gemeinsam weiterbearbeitet.

§ 1.

Übersicht über die Gesamtheit der Stellen bei Archimedes, die Schwerpunkte behandeln oder benutzen.

Von den uns überkommenen Arbeiten des Archimedes sind es lediglich fünf, die mit Schwerpunkten zu tun haben.

1. *Vom Gleichgewicht ebener Figuren I* bringt nach Aufführung von sieben *αἰτήματα* (Axiomen) das Hebelgesetz und den Schwerpunkt von Dreieck und ebenen Polygonen.

[2]) Dort wird auch die Auseinandersetzung mit Vailati (vgl. S. 230) zu vollziehen sein.

2. *Die Quadratur der Parabel* in dem ersten ihrer beiden deutlich voneinander abgehobenen Teile (Satz 1—17) leitet den Inhalt des Parabelsegments her, indem sie dieses an einer Wage aufgehängt denkt und das Hebelgesetz anwendet.

3. *Vom Gleichgewicht ebener Figuren II* behandelt den Schwerpunkt von Parabelsegment und Parabeltrapez.

4. *Die Ephodos* stellt 10 *προλαμβανόμενα* (Annahmen) betreffend den Schwerpunkt an die Spitze und gibt für viele Flächen- und Volumenbestimmungen, die Archimedes anderwärts mit genauem Exhaustionsbeweis und zumeist ohne Benutzung von Schwerpunkten publiziert hatte, eine Herleitung, die sich des Hebelgesetzes und außerdem statt des Exhaustionsschlusses in rein heuristischer Tendenz derjenigen Denkweise bedient, die wir seit Cavalieri als Methode der Indivisibilien zu bezeichnen pflegen, und die in Wahrheit auf Demokrit zurückzugehen scheint. Von den 16 Paragraphen der Ephodos sind außerdem fünf, nämlich die §§ 5, 6, 9, 10, 13 der Bestimmung nicht von Inhalten, sondern von Schwerpunkten gewidmet, und zwar durchweg der Bestimmung der Schwerpunkte solcher Gebilde, die in den uns erhaltenen Arbeiten des Archimedes in exhaustiver Form nicht vorkommen.

5. Die Bücher *von den schwimmenden Körpern* verwenden nur *Resultate* der Schwerpunktstheorie. Bei Untersuchung der Stabilität schwimmender Körper wird nämlich der Schwerpunkt des ganzen und des eintauchenden Teils des Körpers benötigt.

§ 2.

Vom Gleichgewicht ebener Figuren I.

Archimedes stellt an die Spitze der Arbeit folgende sieben Postulate (*αἰτήματα*):

P_1 *Gleiche Gewichte (βάρεα) in gleichen Abständen (μάκεα) sind im Gleichgewicht (ἰσορροπεῖν); und gleiche Gewichte in ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern es tritt Sichneigen (ῥέπειν) ein nach der Seite des Gewichts im größeren Abstand hin.*

P_2 *Wenn irgendwelche Gewichte in irgendwelchen Abständen im Gleichgewicht sind und zu dem einen Gewicht etwas hinzugefügt wird, besteht kein Gleichgewicht mehr, sondern es tritt Sichneigen ein nach der Seite des Gewichtes hin, zu dem etwas hinzugefügt ist.*

P_3 *Ähnlich besteht, wenn von dem einen Gewicht etwas weggenommen wird, kein Gleichgewicht, sondern es tritt Sichneigen ein nach der Seite des Gewichts hin, von dem nichts fortgenommen ist.*

P_4 *Bringt man kongruente ebene Figuren zur Deckung, so decken sich auch die Schwerpunkte (κέντρα τῶν βαρέων).*

P_5 *In ungleichen, aber ähnlichen (ebenen) Figuren sind die Schwerpunkte ähnlich gelegen. Dabei heißen Punkte bezüglich ähnlicher Figuren ähnlich gelegen, wenn die von ihnen nach den Scheiteln entsprechend gleicher Winkel gezogenen Geraden mit entsprechenden Seiten gleiche Winkel bilden.*

P_6 *Wenn Größen (μεγέθεα) in irgendwelchen Abständen im Gleichgewicht sind, so sind ihnen gleiche (ἴσα) in denselben Abständen ebenfalls im Gleichgewicht.*

P_7 *Der Schwerpunkt jeder Figur, deren Begrenzung eine konvexe Kurve ist, liegt innerhalb der Figur.*

Außer einer Reihe von termini, die der allgemeinen Mathematik angehören und sich aus Euklid, bzw., wie die Konvexität, aus anderen Arbeiten des Archimedes bestimmen lassen, gehen hier in den Text insgesamt sieben Worte ein, die der Schwerpunktslehre angehören oder durch sie einen spezifischen Sinn erhalten:

βάρος	Gewicht
μᾶκος	Abstand
ἰσορροπεῖν	sich im Gleichgewicht befinden
ῥέπειν ἐπί τι	sich nach einer Seite neigen
μέγεθος	Größe
ἴσος	gleich, sowohl von Gewichten als auch von Abständen und von Größen
κέντρον τοῦ βάρεος	Schwerpunkt.

Um was für Abstände es sich hier handelt, offenbart sich erst aus dem Gebrauch, der im folgenden bei den Lehrsätzen und ihren Beweisen davon gemacht wird. Dieser Gebrauch und insbesondere die beigefügten Figuren lehren, daß es sich um einen Hebel handelt mit einem festen Drehpunkt (Unterstützungspunkt) um eine horizontale Achse, und daß mit „Abstand" die Länge des einen und des anderen Hebelarms gemeint ist. Ob es sich dabei um einen selbst masselosen Hebel handelt, an dessen Enden die schweren Figuren in ihren Schwerpunkten aufgehängt werden, so daß indifferentes Gleichgewicht eintritt, oder um einen Wagebalken, an dessen Enden Gewichte an Fäden angehängt werden und sich ein stabiles Gleichgewicht halten, bleibt in dieser Arbeit des Archimedes bis zum Schluß unentschieden. Ebenso unentschieden bleibt, ob die verschiedenen Massen homogen sein müssen oder auch inhomogen angenommen werden dürfen. Nur diese zwei negativen Feststellungen seien vorausgeschickt; im übrigen soll der objektiven Analyse der Beweisgänge nicht vorgegriffen werden.

Die 7 termini gelten uns sozusagen als 7 Unbekannte, für die wir vorläufig 7 Gleichungen, die 7 Postulate, besitzen und weitere suchen. Nur eine Unterscheidung sei hier schon erwähnt, damit wir im folgenden nicht mehr auf sie zurückzukommen brauchen: es scheint, das Archimedes die Worte *βάρος* und *μέγεθος* hier synonym gebraucht, und auch das folgende bringt keine klare Unterscheidung ihres durcheinander laufenden Gebrauchs, der im Wortlaut von Satz 6 und 7 (Hebelgesetz) besonders deutlich zum Vorschein kommt[3]).

Es gilt jetzt, aus dem Gang der 15 Lehrsätze und Beweise dasjenige herauszuarbeiten, was darin über den Gebrauch der sieben termini *an Prinzipiellem* zutage tritt.

Satz 1. Gewichte in gleichen Abständen, die im Gleichgewicht sind, sind gleich.

Beweis. Wären sie ungleich, und nähme man von dem größeren den Überschuß weg, so könnte der Rest nicht im Gleichgewicht sein, nach P_3.

Außer P_3 ist hierbei nur benutzt, daß man von einem Gewicht A soviel wegnehmen kann, daß der Rest gleich einem zweiten gegebenen Gewicht B ist. Dies ist aber ein Axiom (Subtraktionsaxiom), das nicht nur für Gewichte sondern für beliebige *μεγέθεα* der gleichen Sorte gilt und zu den Annahmen gehört, die in Euklid V stillschweigend gemacht sind.

Satz 2. Ungleiche Gewichte in gleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern es tritt Sichneigen ein nach der Seite des größeren hin.

Beweis. Nach Wegnahme des Überschusses sind sie im Gleichgewicht nach P_1. Wegen P_2 bewirkt also die Wiederhinzufügung des weggenommenen Überschusses Neigung nach der Seite des größeren hin.

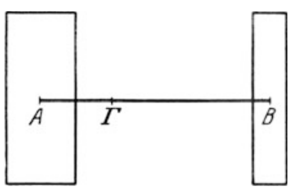

Fig. 1.

Satz 3. Ungleiche Gewichte können dann und nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie sich in ungleichen Abständen befinden, und zwar das größere im kleineren Abstand.

Beweis. Sei A das größere, B das kleinere der beiden Gewichte, $A\Gamma$ und $B\Gamma$ ihre Abstände vom Drehpunkt. Nach Hinwegnahme des Überschusses von A müßte nach P_3 Neigung nach B zu eintreten. Gesetzt nun, $A\Gamma$ wäre nicht der kleinere Abstand.

[3]) Man könnte daran denken, daß *μεγέθεα* im physikalischen Sinne homogene Flächen oder Raumteile oder dergleichen bedeuten, *βάρεα* dagegen Stücke von verschiedenem spezifischen Gewicht sein dürfen u. a. m. Doch hat das im folgenden weder eine Bedeutung, noch liefert das folgende eine klare Entscheidung darüber. Es sei erwähnt, daß beide Worte, ebenso wie das Wort *ἴσος* in der Parabelquadratur nirgends vorkommen, während sie in allen anderen hier in Betracht gezogenen Arbeiten häufige Verwendung finden.

Wäre es gleich $B\Gamma$, so würde nach P_1 Gleichgewicht herrschen; wäre $A\Gamma$ größer als $B\Gamma$, so würde, ebenfalls nach P_1, Neigen nach A eintreten. Beides widerspricht dem geforderten Neigen nach B. Also ist $A\Gamma$ kleiner als $B\Gamma$. — Der Beweis der Umkehrung wird mit einem bloßen Hinweis abgetan.

Soweit hielt sich alles im Rahmen der ersten 3 Postulate und war frei von stillschweigenden Annahmen.

Satz 4. Haben zwei gleiche Größen nicht den nämlichen Schwerpunkt, so wird der Schwerpunkt der aus beiden Größen zusammen bestehenden Größe (*τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκείμενον μέγεθος*) der Mittelpunkt der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der einzelnen Größen sein.

Indem hier erstmalig der Begriff Schwerpunkt in einem Satz verwandt wird, wird stillschweigend angenommen:

S_1 *Jede Größe hat einen wohlbestimmten Schwerpunkt.*

Es ist aber sogleich weiter davon die Rede, daß zwei Größen zusammen stets wieder eine Größe darstellen, die also nach S_1 ebenfalls einen Schwerpunkt hat. Ebenso wie das Subtraktionsaxiom gehört auch dieses, das man als Additionsaxiom bezeichnen könnte, der allgemeinen Größenlehre an, braucht also hier nicht besonders herausgehoben zu werden[4]).

Beweis. Sei A der Schwerpunkt der ersten, B der der zweiten Größe, Γ der Mittelpunkt der Strecke AB. Behauptet wird, daß Γ der Schwerpunkt des zusammengesetzten Systems $A+B$ ist. Gesetzt er wäre es nicht, sondern statt seiner ein anderer Punkt Δ der Strecke AB.

S_1 wird hier zum ersten Male faktisch angewandt und liefert, daß $A+B$ jedenfalls einen bestimmten Schwerpunkt hat. Aber es wird alsbald mehr benutzt: Daß dieser Schwerpunkt auf der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der einzelnen Größen irgendwo liegt. Ob man nun die hier folgenden Worte des Textes „daß Δ auf AB liegt, ist früher bewiesen worden" mit Heiberg[5]) für eine Interpolation, oder, da Eutokius sie in seinem Kommentar erwähnt, für echt hält: wir müssen jedenfalls die hierin gelegene Tatsache als eine nicht durch reines Schließen gedeckte Annahme verbuchen:

---

[4]) Die Frage, ob die Bestandteile eines solchen Systems von zwei oder mehr Größen miteinander starr verbunden sein sollen oder nicht, erfährt weder hier noch im folgenden eine Entscheidung, noch ist sie an irgendeiner Stelle relevant.

[5]) Archimedes ed. Heiberg 2. Aufl. II, pag. 129_3 und Jahrb. f. klass. Philol. XIII, Suppl.-Bd. (1884), pag. 569ff.

S_2 *Der Schwerpunkt einer aus zwei Größen zusammengesetzten Größe liegt auf der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der einzelnen Größen, wofern diese Schwerpunkte verschieden sind.*

Der Beweis fährt fort:

Dann würde das zusammengesetzte System im Gleichgewicht sein, wenn es im Punkt Δ unterstützt wird (*κατεχομένου τοῦ* Δ). Aber Gleiches in ungleichen Abständen aufgehängt kann nach P_1 nicht im Gleichgewicht sein. Also ist Γ der Schwerpunkt.

Hier ist die Annahme in vollem Umfange benutzt:

S_3. *Macht man den Schwerpunkt einer Größe zu ihrem Unterstützungspunkt, so ist sie im Gleichgewicht.*

Der Zusammenhang zwischen Schwerpunkt und Unterstützungspunkt, der bisher völlig offen geblieben war, wird hier — zwischen den Zeilen — zum erstenmal berührt. Man könnte leicht vermuten, daß Archimedes von vornherein beide Begriffe stillschweigend identifiziert. Was S_3 besagt, ist weniger als ein solches Identifizieren: Der Schwerpunkt ist stets auch Unterstützungspunkt für eine Gleichgewichtslage. Würde Archimedes auch die Umkehrung hiervon, also die Identität beider Begriffe stillschweigend postulieren, so würde darin enthalten sein, daß Satz 4 eine triviale Konsequenz von P_1 ist. Denn daß der Mittelpunkt der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte zweier gleicher Größen als *Unterstützungspunkt* der aus beiden Größen zusammen bestehenden Größe dienen kann, ist eben die Aussage von P_1, und wenn der Unterstützungspunkt stets auch Schwerpunkt bedeutete, so wäre damit Satz 4 unmittelbar gegeben. Der Beweis, den Archimedes hier führt, zeigt, daß das nicht nötig ist, sondern daß S_3 dafür ausreicht, und er wäre überflüssig, wenn er nicht diese Aufgabe hätte. Dies mußte hervorgehoben werden, weil eine prinzipiell so wesentliche Unterscheidung sich hier stillschweigend und doch notwendig vollzieht.

Das Gleichgewicht, von dem S_3 handelt, ist natürlich ein indifferentes; Archimedes hat also jedenfalls an indifferentes Gleichgewicht bei dem Wort „Gleichgewicht" mitgedacht. Daß er ausschließlich daran gedacht hat, wäre der Nebensinn einer Identifikation von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt. Wenn sich eben ergeben hat, daß er diese Identifikation offensichtlich nicht hat vornehmen wollen, so ergibt sich zugleich, daß für das Wort „Gleichgewicht" auch die Möglichkeit „stabiles Gleichgewicht an einer Wage" offen bleibt.

Satz 5. Liegen die Schwerpunkte dreier Größen von gleichem Gewicht auf einer geraden Linie in äquidistanten Punkten A, Γ, B, so ist Γ der Schwerpunkt des aus allen dreien bestehenden Systems.

Beweis. Nach Satz 4 ist Γ der Schwerpunkt der beiden äußeren Größen zusammen. Andererseits ist Γ auch der Schwerpunkt der mittleren Größe. Also ist Γ auch der Schwerpunkt des Gesamtsystems.

Ohne eine Bemerkung, daß früher bewiesen, wird hier die S_2 ergänzende Annahme stillschweigend eingeführt:

S_4. *Haben zwei Größen denselben Schwerpunkt, so ist dieser zugleich der Schwerpunkt der aus beiden zusammengesetzten Größe.*

Zwei *Korollare zu Satz 5* besagen:

Wenn die Schwerpunkte mehrerer Größen äquidistant auf einer Geraden verteilt sind, und wenn je zwei vom Mittelpunkt der ganzen Strecke gleichweit abstehende Größen gleiches Gewicht haben, so ist jener Mittelpunkt der Schwerpunkt des aus allen zusammen bestehenden Systems. Sowohl bei gerader als auch bei ungerader Zahl der Bestandteile.

Auf dieser Grundlage gelingt nun in Satz 6/7 der Beweis des Hebelgesetzes.

Satz 6. Kommensurable Größen stehen im Gleichgewicht, wenn ihre Abstände (vom Unterstützungspunkt) sich umgekehrt proportional zu ihren Gewichten verhalten.

Beweis[6]). Seien A, B die kommensurablen Größen (sie sind in Fig. 2 getrennt von dem Hauptteil der Figur irgendwo hingezeichnet), sei $E\Delta$ irgendeine geradlinige Strecke und teile Γ die Strecke $E\Delta$ so, daß $E\Gamma : \Gamma\Delta = B : A$, so wird dieses Verhältnis wegen der vorausgesetzten Kommensurabilität dem zweier ganzer Zahlen $p : q$ gleich sein.

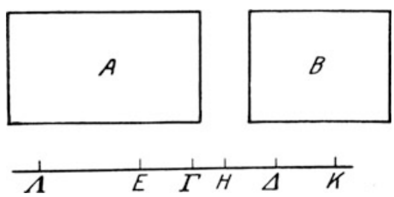

Fig. 2.

Werde $E\Gamma$ von Δ aus auf Γ zu abgetragen bis H, und sei ferner $\Lambda E = EH$ und $\Delta K = \Delta H$ gemacht, so ist, wie leicht bemerkt, Γ der Mittelpunkt der Strecke ΛK. Nun wird ΛH in $2q$ gleiche Teile geteilt, und in den Mitten der so entstehenden $2q$ Intervalle werden Größen angehängt, deren jede den q-ten Teil von A wiegt; ebenso wird HK in $2p$ gleiche Teile geteilt, und in den Mitten der so entstehenden $2p$ Intervalle werden Größen angebracht, deren jede den p-ten Teil von B wiegt. Beide Sorten von Gewichten $\frac{1}{q}A$ und $\frac{1}{p}B$

[6]) Der Beweis ist nicht in ganz wörtlicher Übertragung wiedergegeben, sondern einige Längen sind abgekürzt, um das hier wesentliche besser hervortreten zu lassen.

sind gleich schwer, und alle Teilintervalle, nämlich $\frac{1}{2q}\Lambda H$ und $\frac{1}{2p}HK$ sind gleich lang, wie sich aus der Voraussetzung nach einer einfachen elementargeometrischen Überlegung ergibt. Die Korollare zu Satz 5 ergeben daher, daß einerseits der Schwerpunkt der $2q$ Massen linkerhand in E, der der $2p$ Massen rechterhand in Δ liegt, andererseits daß der Schwerpunkt aller $(2p+2q)$ Massenteile zusammen im Mittelpunkt von ΛK, also in Γ liegt. „Also", so schließt der Beweis, „wenn der Schwerpunkt von A nach E gelegt wird, der von B nach Δ, werden sie mit Γ als Unterstützungspunkt im Gleichgewicht sein."

Dieser letzte Schluß ist es, den Mach angegriffen hat. Er sagt, hier würde die Größe $2A$ mit dem System der $2q$ Größen $\frac{1}{q}A$ identifiziert, die Größe $2B$ mit dem System der $2p$ Größen $\frac{1}{p}B$, und aus dem Gleichgewicht der letzteren bezüglich Γ auf das der ersten geschlossen. Ganz zu Unrecht wird hier eine stillschweigende Annahme gerade an einer Stelle dem Archimedes vorgeworfen, wo *keine* solche vorliegt, und zwar geschieht das, weil Mach das Postulat P_6 nicht beachtet oder nicht richtig gedeutet hat. In Wahrheit wird hier gerade P_6 angewandt. Denn wenn das Größensystem der $2p+2q$ Größen in Γ seinen Schwerpunkt hat, wie bewiesen war, so ist es bezüglich Γ als Unterstützungspunkt im Gleichgewicht nach S_3 — nur dies allein darf Archimedes hier als stillschweigende Annahme angerechnet werden — und das richtig verstandene P_6 ergibt danach, daß die dem System der $2q$ Größen links und der $2p$ Größen rechts „gleichen" und mit ihren Schwerpunkten in den nämlichen Stellen aufgehängten ungeteilten Größen $2A$, $2B$ bezüglich des nämlichen Unterstützungspunktes, also Γ, im Gleichgewicht sind, und das ist die Behauptung von Satz 6[7]).

Satz 7. Für inkommensurable Größen gilt das Gleiche.

Beweis. Gesetzt A wäre mit B bezüglich des Unterstützungspunktes Γ nicht im Gleichgewicht, sondern A wäre etwa zu schwer. So nehme man von A weniger weg als man wegnehmen müßte, um Gleichgewicht herzustellen, und zwar in der Weise weniger, daß der

---

[7]) E. Mach: „Die Mechanik in ihrer Entwickelung", 4. Aufl. 1908, S. 16/17. Seine Worte heißen: Die fragliche Voraussetzung werde „mehr oder weniger versteckt oder stillschweigend eingeführt". Vergl. auch O. Hölder: „Anschauung und Denken in der Geometrie" Leipzig 1900, pag. 21 und „Die mathematische Methode", Berlin 1924, pag. 39—45, sowie Vailati, Torino Atti 32, 1897, p. 742—758; Atti del Congr. Int. di sc. stor., Rom 1904, vol. XII = scritti, pag. 497—502. Auch Vailati ist es entgangen, daß das hier in Rede stehende Postulat das von Archimedes vorausgesetzte P_6 ist. Er ist lediglich bemüht, es aus anderen Postulaten heraus zu beweisen.

Rest A' zu B kommensurabel ist[8]). Dann sind auch A', B noch nicht im Gleichgewicht (da A' immer noch zu schwer sein soll) und es tritt Neigen nach A' ein. Andererseits ist $A:B = \Delta\Gamma : E\Gamma$ nach Voraussetzung, also, weil $A' < A$, $A':B < \Delta\Gamma : E\Gamma$. Nach Satz 6 sind also A' und B nicht im Gleichgewicht, sondern es tritt Sichneigen nach B hin ein, im Widerspruch zum Obigen. Analog wenn nicht A, sondern B zu groß wäre.

Der Beweis, den wir in seinem Ende schon reguliert haben, ist auch so noch merkwürdig knapp, fast skizzenhaft und sticht von dem Stil der übrigen Arbeit auffallend ab. Er redet nahezu explizite von

S_5. *Ist A zu schwer, um mit B im Gleichgewicht zu sein, so kann man von A soviel wegnehmen, daß der Rest mit B im Gleichgewicht ist.*

Denn er redet davon, daß A' zwar kleiner als A, aber immer noch größer sein soll als der in S_5 beschriebene Rest. Und indem er ihn auf solche Art erwähnt (Heiberg, 2. Aufl., p. 138_1), postuliert er immerhin seine Existenz, wenn man vielleicht auch noch fragen könnte, ob er sein Ziel nicht auch unter Umgehung dieser Existenzaussage erreichen konnte.

Wie aus S_5 nun wirklich die Existenz von A' gefolgert wird, sagt Archimedes nicht, und es überrascht die Kürze, mit der die ganze Exhaustion in an sich vorbildlicher Art angedeutet wird. Wir verweilen nicht eingehender bei dieser vom Standpunkt der Exhaustionsmethode sehr interessanten Sache, da sie der allgemeinen Größenlehre als solcher angehört und keine besondere Bedeutung für den Begriff des Schwerpunktes hat.

Nur muß noch erwähnt werden, daß beim Beweise nicht genau der Satz 6 in der oben formulierten und bewiesenen Gestalt benutzt worden ist, sondern in der folgenden Form: „Ist $A':B < \Delta\Gamma : E\Gamma$, so tritt Sichneigen nach B ein.“ Diese Variante folgt aus Satz 6 selbst vermöge P_2, wenn man aus der allgemeinen Größenlehre noch die im Euklid (besonders in Buch XII der Elemente) stillschweigend gemachte und auch von Archimedes anderwärts stillschweigend benutzte Annahme von der Existenz der vierten Proportionalen macht[9]). Um so mehr fällt es auf, daß die Umkehrung des allgemeinen Hebelsatzes weder ausgesprochen noch bewiesen wird, nachdem sie für den kommensurablen Fall zwar nicht formuliert, aber benutzt worden ist.

---

[8]) Die Bezeichnung ist gegenüber dem Original geändert.

[9]) Die Frage, ob diese Annahme sachlich hier entbehrt werden könnte, kann um so mehr unerörtert bleiben, als aus dem Beweiswortlaut des Archimedes bei seiner skizzenhaften Natur darüber nichts herausgezogen werden kann, wie er es gemeint hat.

Satz 8 wirft auf den wenig ausgearbeiteten Charakter von Satz 7 (nebst Beweis) neues Licht. Beim Beweise von Satz 8 wird nämlich statt Satz 7 folgende Aussage benutzt: der Schwerpunkt Γ einer aus zwei Größen zusammen bestehenden Größe teilt die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte AB der Einzelgrößen im umgekehrten Verhältnis von deren Gewichten. Diese Aussage steht zu Satz 7 in einem ähnlichen Verhältnis wie Satz 4 zu P_1, und kann daraus in analoger Weise mit Hilfe von S_2 und S_3 gefolgert werden. Es fällt natürlich von neuem auf, daß die besondere Sorgfalt, die bei Satz 4 festgestellt werden konnte, hier zwischen Satz 7 und Satz 8 gänzlich fehlt. Satz 8 selbst kehrt die in Rede stehende Aussage um: ist A der Schwerpunkt des einen Teiles, Γ der der ganzen Größe, und wird $A\Gamma$ so bis B verlängert, daß sich $A\Gamma : \Gamma B$ umgekehrt verhalten wie die Gewichte der beiden Teile, so ist B der Schwerpunkt des anderen Teiles. Es ist klar, daß eine solche Umkehrung ohne das Hinüberwechseln von der Gleichgewichtsaussage zur Schwerpunktsaussage nicht möglich wäre.

Dieses Hinüberwechseln wird von Satz 8 ab zu einem endgültigen und teilt solchermaßen die ganze Arbeit in zwei durch ihren Stil deutlich voneinander abgehobene Teile. „Vom Gleichgewicht der Ebenen II" hält den Charakter der Partie von Satz 8 ab dann unverändert inne. Die Abhandlung „Vom Gleichgewicht der Ebenen" hat ihrem Stil nach ihre Zäsur nicht dort, wo sie in I und II abgeteilt ist, sondern schon nach I, Satz 7. Nach dieser Teilung soll im folgenden „Gl. A" und „Gl. B" unterschieden werden.

Satz 9 beweist, daß in einem Parallelogramm nur der Mittelpunkt der Schwerpunkt sein kann, durch eine Exhaustion, deren Ausführung in ihrer Präzision von der des Satzes 7 auffallend absticht. Abgesehen von diesem Moment, dessen Einzelausführung in diesem Zusammenhang nicht so sehr interessiert, zeigt der Beweis besonders deutlich, in welcher Art die Aussagen $P_1, \ldots, P_7$; $S_1, \ldots, S_5$ hier Verwendung finden. Die fundamentale Rolle, die z. B. P_4 für den Aufbau der „*στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν*" (Elemente der Statik, wie es in „Schwimmende Körper" bei einem Zitat auf Satz 8 heißt) hat, tritt in einer zweiten Form des Beweises, die unter *ἄλλως* beigefügt ist und ohne Exhaustion auskommt, in noch größerer Reinheit hervor; dieser zweite Beweis sei deshalb kurz hier wiedergegeben.

$AB\Gamma\Delta$ sei das Parallelogramm, Θ sein Mittelpunkt. E sei der Schwerpunkt des Dreiecks $AB\Delta$. Wo er gelegen ist, darüber kann vorderhand nicht das mindeste ausgesagt werden; denn der Satz vom Schwerpunkt im Dreieck soll erst nachher aus dem Satz 9 gefolgert werden. Aber nach P_4 ist sicher, daß Z, der Schwerpunkt von $\Gamma\Delta B$, an der homologen Stelle dieses dem ersten kongruenten Dreiecks liegen muß. Elementargeometrisch ist klar, daß Θ der Mittelpunkt der Strecke EZ sein muß. Nach Satz 4 ist also Θ, der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Teildreiecke, der Schwerpunkt der ganzen Figur, d. h. des Parallelogramms.

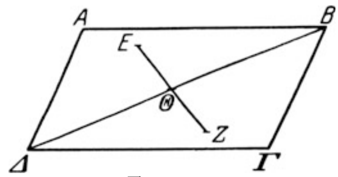

Fig. 3.

Aus Satz 9 folgt dann durch eine weitere Exhaustion, die das Dreieck aus Parallelogrammen aufbaut, der Schwerpunkt des Dreiecks und damit eines jeden Polygons. Es ist damit für die Lehre vom Schwerpunkt soviel erreicht, wie Euklid im Buch VI für die Lehre vom Flächeninhalt erreicht hat.

Zum Schluß sei in einer Tabelle zusammengestellt, welche Postulate, Annahmen oder Sätze beim Beweise der einzelnen Lehrsätze benutzt worden sind.

Tabelle 1.

Satz:	Es werden benutzt:
1	P_3, P_1, S_1
2	S_1, P_1, P_2
3	S_1, P_3, P_1, P_1
4	S_1, S_2, S_3, P_1
5	Satz 4, S_4
6	S_1, Satz 5 Kor., P_6, S_3
7	S_4, S_5, Satz 6
8	S_1, Satz 6/7
9	Stetigkeitsaxiom[10]), P_4, Satz 5 Kor., P_7
10	a) Satz 9, S_2; b) P_4, Satz 4
11	P_5
12	Satz 11
13	a) Stetigkeitsaxiom[10]), Satz 9, Satz 4, S_2, Satz 8, P_7; b) Satz 11, Satz 4, Satz 10, Satz 4
14	Satz 13, S_1
15	Satz 13, Satz 8, Satz 14, Satz 13, S_2, S_1, Satz 6/7

§ 3.

Vom Gleichgewicht ebener Figuren II.

Vom Standpunkt der Prinzipienfragen der Statik tritt in der ganzen Arbeit, die nur von Schwerpunkten, nirgends von Gleichgewicht handelt, nichts Neues auf. Die Arbeit setzt die Tatsache der Parabelquadratur voraus. Diese erlaubt, ein Parabelsegment durch ein gleich schweres

---

[10]) In der Gestalt von Euklid X_1.

Rechteck zu ersetzen. Zitiert wird sie in Satz 1 in den ersten Zeilen und wesentlicher im Beweise von Satz 8 (Heibergsche Ausgabe, 2. Auflage, II, pag. 190_{13}); aber es handelt sich dabei *nur* um die Tatsache, auf ihre Beweise wird nicht angespielt.

Es genügt im übrigen, die Verwendung der Postulate und Lehrsätze vom Teil I tabellarisch nachzuweisen.

Tabelle 2.

Satz	Es werden benutzt:
1	I Satz 10, I Satz 10, P_6
2	I Satz 15, I Satz 13, S_2
3	I Satz 15, I Satz 14, S_2, P_5
4	S_1, II Satz 2, I Satz 8, P_7
5	I Satz 14, II Satz 4, I Satz 4, S_2, I Satz 14, I Satz 6/7
6	S_1, I Satz 8, P_7
7	II Satz 6, II Satz 5
8	S_1, I Satz 4, I Satz 14, I Satz 6/7 (Umkehrung)
9	rein geometrisch
10	II Satz 8, I Satz 8, II Satz 9

§ 4.

Die Quadratur der Parabel.

Der erste Teil der Arbeit, der vom Standpunkt der Statik allein in Betracht kommt, berührt deren Prinzipien im wesentlichen in Satz 6 und 7, vorher stehen rein geometrische Sätze der Parabellehre, nachher nichts prinzipiell Neues mehr.

Satz 6. Die vorliegende ebene Figur werde senkrecht zum Horizont vorgestellt, und alles, was mit Δ auf derselben Seite der Geraden AB ist, heiße unten, was auf der andern, oben. Das Dreieck $B\Delta\Gamma$ sei ein rechtwinkliges mit dem rechten Winkel bei B und die Seite $B\Gamma$ sei die Hälfte des Wagebalkens (ζυγοῦ). Das Dreieck werde an den Punkten B, Γ aufgehängt (κρεμάσθω) und ein anderes Flächenstück werde an dem andern Arm (μέρος) des Hebels in A angehängt, und die in A angehängte Fläche Z möge dem in der geschilderten Lage befindlichen Dreieck $B\Delta\Gamma$ das Gleichgewicht halten. Ich behaupte, die Fläche Z ist der dritte Teil des Dreiecks $B\Delta\Gamma$.

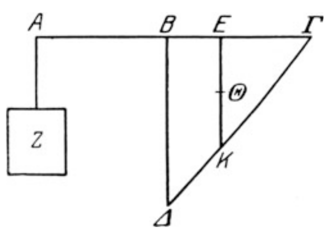

Fig. 4.

Da die Wage im Gleichgewicht vorausgesetzt ist, wird $A\Gamma$ dem Horizont parallel sein, und die Lote auf $A\Gamma$ in der Vertikalebene werden auf dem Horizont senkrecht stehen. Die Strecke $B\Gamma$ werde durch E so geteilt, daß ΓE das Doppelte von BE ist; EK werde parallel zu $B\Delta$ gezogen und in Θ halbiert. Dann ist Θ der Schwerpunkt des Dreiecks $B\Delta\Gamma$. Das ist in der Statik bewiesen (*δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς*). Wird nun die Aufhängung des Dreiecks $B\Delta\Gamma$ an den Punkten B und Γ gelöst, und wird es statt dessen an E angehängt, so behält das Dreieck seine Lage. Denn jeder an einem Punkte aufgehängte Gegenstand verharrt in einer solchen Lage, daß Aufhängepunkt und Schwerpunkt auf derselben Vertikalen liegen; auch das ist bewiesen worden (*δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο*). Da nun das Dreieck $B\Delta\Gamma$ dieselbe Lage in bezug auf den Wagebalken beibehalten hat, wird ihm die Fläche in gleicher Art das Gleichgewicht halten. Da nun Z in A aufgehängt und $B\Delta\Gamma$ in E aufgehängt im Gleichgewicht sind, ist es klar, daß sie im umgekehrten Verhältnis ihrer Abstände stehen. Das heißt $AB:BE = B\Delta\Gamma:Z$. Nun ist aber AB das Dreifache von BE; also ist auch das Dreieck $B\Delta\Gamma$ das Dreifache der Fläche Z.

Rein äußerlich fällt an der Redaktion dieses Satzes wie der umliegenden auf, daß der im „Gleichgewicht ebener Figuren" eingehaltene Euklidische Lehrbuchstil (Formulierung des Lehrsatzes in Worten, Demonstration der Behauptung an der Figur, Beweis, Wiederholung der nun bewiesenen Behauptung) gänzlich verlassen ist. Es handelt sich hier um eine Abhandlung, kein Lehrbuch [11]).

Aber auch sachlich weicht der Stil der Gleichgewichtsaussagen hier erheblich von dem im „Gleichgewicht ebener Figuren" ab. Es ist von einer Wage (*ζυγός*) die Rede, die Gewichte hängen nicht in ihrem Schwerpunkt, sondern hängen vertikal herab, das Gleichgewicht ist zweifellos ein stabiles. Auf den ersten Blick möchte man annehmen, das Elementenbuch der Statik, das hier vorausgesetzt wird, sei von ganz anderer Natur gewesen als das „Gleichgewicht ebener Figuren" [12]).

Analysieren wir genau, welche Vorstellungen und Tatsachen hier be-

[11]) Der 2. Teil der „Parabelquadratur", der mit Satz 18 beginnt und den 2., rein-geometrischen Beweis des Satzes vom Parabelinhalt bringt, kehrt wieder zum Lehrbuchstil zurück. Beide Teile der Schrift werden nur durch das ganz lose Band des letzten Satzes der Vorrede zusammengehalten. Ebenso wie im Gl. d. Eb. drängt sich aber auch hier eine stilkritische Zerlegung auf, die auf die Frage der Redaktion, der Chronologie und der verlorenen Schriften neues Licht werfen könnte. Indessen sind hierzu stilistische Untersuchungen weitergreifender Art nötig, die über den Bereich der Begriffe der Schwerpunktslehre hinaus ausgedehnt werden müssen.

[12]) Das Wort *ζυγός*, das hier verwendet wird, fehlt gänzlich in Gl. d. Eb. In der Ephodos aber kommt es im Sinne indifferenten Gleichgewichtes vor, so daß es gewiß nicht nur Wage bedeutet hat, sondern auch Hebel.

wußt oder stillschweigend vorausgesetzt werden. Der Beginn des Beweises setzt voraus:

S'_1 *Der Wagebalken muß im Gleichgewicht horizontal sein.*

Sodann wird der Satz vom Schwerpunkt des Dreiecks benutzt, und die *Μηχανικά*, die dafür zitiert werden, können natürlich „Gleichgewicht ebener Figuren I" (Satz 14) sein. Die nächste Annahme, deren Archimedes im Verlauf des Beweises bedarf, formuliert er selbst:

S'_2 *Jeder in einem Punkte aufgehängte Gegenstand verharrt in einer solchen Lage, daß Aufhängungspunkt und Schwerpunkt auf derselben Vertikalen liegen.*

Die Notiz über den Beweis, die Archimedes beifügt, legt es nahe, daß dieser im gleichen Elementenbuch gestanden habe. In „Gleichgewicht ebener Figuren" steht er aber nicht.

Endlich wird im Schlußteil des Beweises das Hebelgesetz für die Wage (mit stabilem Gleichgewicht) angewandt. Ist das mit der Vorstellung vereinbar, das „Gleichgewicht ebener Figuren" sei das auch hier zugrunde gelegte Elementenbuch? Hier bewährt sich die Analyse von § 2, die unter genauer Vermeidung alles dessen, was sich nicht zwangsläufig aus dem Text ergab, die Möglichkeit offen gelassen hat, das „Gleichgewicht" sei dort in einem ganz allgemeinen Sinne aufgefaßt, der sowohl für indifferentes als auch für stabiles Gleichgewicht gültig ist. Wenn man P_6 in diesem weiten Sinne interpretiert, liefert es ohne weiteres das Hebelgesetz in einem so allgemeinen Sinne, daß das hier Erforderliche mit darin enthalten ist. Und noch mehr: es klärt sich dabei ein Nebenumstand im Beweise von „Gleichgewicht ebener Figuren I" Satz 6 auf, der dort unaufgeklärt gelassen werden mußte: daß die Größen A, B in der Figur nicht von vornherein in E, Δ aufgehängt, sondern nebenbei irgendwohin gezeichnet sind. Eben dadurch ist die Möglichkeit offen gehalten, daß der Satz 6 nicht nur indifferentes Gleichgewicht umfaßt, sondern auch stabiles; und um nichts festzulegen und die möglichste Allgemeinheit und Abstraktheit innezuhalten, sind A, B irgendwohin daneben gezeichnet. Der Einwand, daß die Figur späteren Ursprungs sein könnte, wird dadurch hinfällig, daß der Text die Schwerpunkte von A und B zuerst scheinbar ganz überflüssig mit A, B benennt und erst am Schluß des Beweises ihre Verlagerung nach E, Δ vollzieht.

Zusammen mit den Argumenten von § 2 ergibt diese Überlegung die Möglichkeit, daß das Elementenbuch der Statik, das hier vorausgesetzt wird, doch mehr oder weniger in „Gleichgewicht ebener Figuren I" zu suchen ist. Das einzige Hindernis, das der Annahme einer solchen These entgegensteht, ist S'_2, das eben in der uns vorliegenden Redaktion von „Gleichgewicht ebener Figuren I" nicht steht. Das Ergebnis der ganzen

Untersuchung sei so formuliert: Das Elementenbuch der Statik, das in der Quadratur der Parabel vorausgesetzt wird, braucht von „Gleichgewicht ebener Figuren I“ nicht prinzipiell sehr stark verschieden gewesen zu sein, sondern könnte eine andere Redaktion davon gewesen sein, von der irgendwelche Stücke, welche für Gl. *B* unwesentlich waren, in der uns vorliegenden Ausgabe weggelassen sind.

Satz 7 der Parabelquadratur enthält noch einen Punkt, der uns prinzipiell angeht. Es handelt sich diesmal um das Dreieck $\Gamma\Delta H$, dessen obere Seite nicht mit dem Hebelarm identisch ist; Archimedes geht von diesem Dreieck dann in weiteren Sätzen zu Trapezen über und baut aus solchen schließlich das Parabelsegment auf.

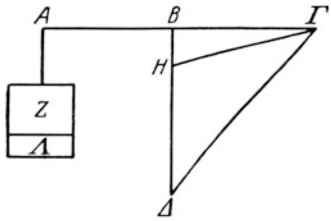

Fig. 5.

Zum Beweise hängt er außer dem zu betrachtenden Dreieck das andere $B\Gamma H$ noch an den rechten Wagebalken, und eine Fläche Λ, die ein Drittel so groß ist, an den linken zu Z hinzu. Er macht nun den Schluß: Wenn Z mit $H\Gamma\Delta$ im Gleichgewicht ist (nach Voraussetzung), und Λ mit $HB\Gamma$ (was nach Satz 6 der Fall ist), so halten Z und Λ zusammen dem Dreieck $B\Gamma\Delta$ das Gleichgewicht — woraus sich durch nochmalige Anwendung von Satz 6 die Behauptung ergibt.

Hier ist also benutzt

S'_3. *Fügt man zu zwei Größen, die sich an einer Wage das Gleichgewicht halten, zwei andere hinzu, die für sich allein an dieser Wage ebenfalls im Gleichgewicht sein würden, so halten auch die beiderseitigen Summen sich das Gleichgewicht.*

Auch diese Aussage ist in den Gedankenzusammenhang von „Gleichgewicht ebener Figuren I“ leicht einzuordnen. Denn wenn zwei Gewichte A_1 und B_1 an einer Wage sich das Gleichgewicht halten, so liegt der Schwerpunkt Σ_1 des Systems, das sie zusammen darstellen, vertikal unter dem Drehpunkt der Wage gemäß S'_2. Wenn A_2-und B_2 das gleiche tun, liegt auch ihr Schwerpunkt Σ_2 in derselben Vertikalen. S_2 ergibt dann aber, daß auch der Schwerpunkt Σ des aus A_1+A_2 und B_1+B_2 bestehenden Systems in derselben Geraden gelegen sein muß; S'_2, sofern man es so interpretiert, daß es seine Umkehrung mit in sich begreift, liefert dann das Gleichgewicht der Summe. Man kann sich leicht vorstellen, daß in einem weggefallenen Paragraphen, der von der Wage handelte und in dem S'_2 als besonderes Postulat aufgeführt war, aus S'_2 auch noch dieses Korollar S'_3 gefolgert war.

Wieder folge eine genaue Tabelle der benutzten Sätze und Postulate.

Tabelle 3.

Satz	Es werden benutzt:
6	S'_1, Gl. I 14[13]), S'_2, Gl. I 6/7 (Umkehrung)
7	Q. 6, S'_3
8/9	Gl. I 6/7 (Umkehrung), S'_2, Gl. I 14
10/11	Gl. I 15, S'_2, Gl. I 6/7 (Umkehrung)
12/13	Gl. I 15, S'_2, Gl. I 6/7 (Umkehrung)
14	Q. 6, S'_3, Q. 5, Q. 10, Q. 12, Q. 8, Q 6
15	Q. 7, S'_3, Q. 11, Q. 13, Q. 9, Q. 7

§ 5.

Ephodos.

An der Spitze stehen elf Lemmata (*προλαμβανόμενα*), deren letztes der allgemeinen Größenlehre angehört, die übrigen zehn der Statik.

L_1. Wird von einer Größe eine andere fortgenommen, die denselben Schwerpunkt hat wie die ganze Größe, so hat auch der Rest den nämlichen Schwerpunkt. (L_1 ist mit dem in „Gleichgewicht ebener Figuren I“ stillschweigend benutzten S_4 verwandt, aber nicht identisch, insofern jenes von Addition, dieses von Subtraktion handelt.)

L_2 = Gleichgewicht ebener Figuren I, Satz 8. (Starke Abweichung im Wortlaut, aber sachlich nur geringe Unterschiede.)

L_3. Liegt der Schwerpunkt beliebig vieler Größen auf einer und derselben Geraden, so liegt auch der Schwerpunkt der aus allen zusammengesetzten Größe auf derselben Geraden. (Sachlich ist $L_3 = S_2$.)

L_4. Der Schwerpunkt einer Strecke ist ihr Mittelpunkt.

L_5 = Gleichgewicht ebener Figuren I, 14, bis auf zwei Worte auch im Wortlaut übereinstimmend.

L_6 = Gleichgewicht ebener Figuren I, 10, fast wörtlich.

L_7. Der Schwerpunkt des Kreises ist sein Mittelpunkt.

L_8. Der Schwerpunkt jedes Zylinders ist der Mittelpunkt der Achse.

L_9. Der Schwerpunkt jedes Prismas ist der Mittelpunkt der Achse.

L_{10}. Der Schwerpunkt jedes Kegels ist der Punkt, welcher die Achse so teilt, daß der Abschnitt an der Spitze das Dreifache des anderen Abschnitts ist.

---

[13]) Gl. I 14 bedeutet: Gleichgewicht ebener Figuren Buch I Satz 14.

Die Mehrzahl dieser Aussagen sind Lehrsätze, die teils noch in „Gleichgewicht ebener Figuren I" erhalten sind, teils offensichtlich einem oder mehreren verlorenen Werken angehören. Sodann hat sich S_2 und eine S_4 sehr ähnliche Aussage vorgefunden. Das erlaubt einen Rückschluß auf die Gesamtheit der stillschweigenden Annahmen von „Gleichgewicht ebener Figuren I": S_2 und S_4 sind dem Bewußtsein des Archimedes nicht entgangen und fehlen aus unerfindlichen Gründen in der uns vorliegenden Redaktion — von hier aus gesehen könnte man an eine Korruption derselben denken. S_1 zu formulieren, ist nicht griechische Gewohnheit — Euklid formuliert beim Flächeninhalt auch kein derartiges Axiom. S_3 betrifft den Unterschied von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt; daß es etwa bei einer Neuredaktion, die nur auf „Gleichgewicht ebener Figuren II", also nur auf indifferentes Gleichgewicht, zugeschnitten ist, weggefallen ist, ist plausibel. S_5 ist dem Postulat von der Existenz einer vierten Proportionalen in der allgemeinen Größenlehre sehr ähnlich, und es ist natürlich, daß Archimedes es nach simile mit Stillschweigen übergeht.

Damit sind alle fünf Aussagen erschöpft und es ergibt sich: Die Urredaktion der Elemente der Statik hat nur solche Annahmen *stillschweigend* enthalten, deren genaue Analoga in der allgemeinen Größenlehre des Euklid ebenfalls stillschweigend übergangen wurden.

Im Gegensatz zur Quadratur der Parabel handelt es sich in der Ephodos stets um indifferentes Gleichgewicht und um Schwerpunkte, nie um die Wage. Das Hebelgesetz wird darum auch in der am Ende von § 2 erwähnten Formulierung für Schwerpunkte benutzt, alsbald in Lehrsatz 1, der abgesehen hiervon (Heibergsche Ausgabe, 2. Auflage, II, pag. 436_{18}) nichts für uns Wesentliches enthält. Er betrifft die Parabelquadratur und enthält das nicht exhaustiv, sondern mit Indivisibilien arbeitende heuristische Gerippe des im ersten Teil der Quadratur der Parabel gegebenen exhaustiven, mechanischen Beweises; abgesehen von der Verschiedenheit der exhaustiven Form unterscheidet er sich von jener Version lediglich darin, daß nicht am Wagebalken, sondern mit indifferentem Gleichgewicht gearbeitet wird.

Zu erwähnen ist noch Satz 6, dessen Beweis uns nur verstümmelt erhalten ist, aber nach dem ganz erhaltenen Beweis des allgemeineren Satz 9 ergänzt werden kann. Hier wird am Schluß Gl. Eb. I, Satz 8 benutzt.

Zusammenfassend ist über die Schwerpunktstheorie der Ephodos folgendes zu bemerken. Die geometrischen Sätze (Inhalts-, Volumenbestimmungen), die darin mit Mitteln der Schwerpunktstheorie und inexhaustiv gegeben werden, finden sich zum Teil in den erhaltenen Arbeiten des Archimedes rein-geometrisch und exhaustiv bewiesen; der andere Teil mag in den verlorenen Schriften ebenso behandelt gewesen sein. Dagegen findet sich kein Anhaltspunkt dafür, daß Archimedes auch die Schwerpunktbestimmungen, die er in der Ephodos vornimmt, anderwärts nochmals exhaustiv dargestellt hat. Dies legt die Vermutung nahe, daß die exhaustive Durchführung eines Beweises aus dem inexhaustiven Gerippe heraus für ihn keine Leistung von Rang, sondern eine Technik war, die er souverän beherrschte. Wenn er aber in der Vorrede zur Ephodos hervorhebt, daß die hier zu gebenden „mechanischen" Beweise geometrischer Sätze keine wahrhaften Beweise seien, so muß er ihren wesentlichen Mangel nicht in der fehlenden Exhaustion, die leicht zu ergänzen ist, gesehen haben, sondern in der *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος*, wie es Aristoteles nennen würde, in dem Hereinziehen eines fremden Axiomsystems (cf. Schlußbemerkung von § 6).

Tabelle 4.

Satz	Es werden benutzt:
1	L_4, S_2, Gl. I 6/7, L_3, Gl. I 15, S'_2
2	L_7, L_3, L_8, Gl. I 6/7 und Umkehrung
3	L_7, L_3, Gl. I 6/7 und Umkehrung, L_8
4	L_7, L_3, L_8, Gl. I 6/7 und Umkehrung
5	L_7, L_3, L_2, Gl. I 6/7, Gl. I 8
6	Gl. I 6/7, L_7, L_8, L_3, P_6, L_1 $(+ S_3)$, L_{10}, Gl. I 8.
7	L_8, Gl. I 6/7 und Umkehrung
8	ohne Beweis
9	L_{10}, L_1 $(+ S_3)$, Gl. I 6/7, P_6, Gl. I 8
10	ohne Beweis
11	ohne Beweis
12	Gl. I 6/7, L_6
13	Eph. 12, L_3, L_9, L_5

§ 6.

Schwimmende Körper.

Es bleibt nun noch übrig, die Anwendungen der Theorie auf physikalische Probleme im Buche über die „Schwimmenden Körper" zu analysieren. In die Untersuchungen dieser Arbeit kommt die Schwerpunktstheorie hinein durch das nach „Schwimmende Körper I", Satz 7 (Schlußbemerkung) formulierte Prinzip, daß jeder Körper im Wasser aufwärts getrieben wird längs einer Vertikalen durch den Schwerpunkt des Körpers. Es wird also nur die Lage des Schwerpunkts des Körpers, des ins Wasser eintauchenden Teils der untersuchten Segmente und desjenigen des Restkörpers benötigt. Es zeigt sich, daß nur die Lage des

Schwerpunktes eines Paraboloidsegmentes und der Satz 8 aus „Gleichgewicht ebener Figuren I" zur Feststellung der Lage des Schwerpunktes des Restkörpers benutzt wird, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 5.

Satz		Es wird benutzt:
Buch I	8	Gl. I 8
	9	Gl. I 8
Buch II	1	—
	2	Schwerpunkt des Paraboloidsegments, der Wortlaut von Gl. I 8 wird zitiert
	3	Segmentschwerpunkt, Gl. I 8
	4	Gl. I 8
	5	Gl. I 8
	6	Gl. I 8
	7	—
	8	Gl. I 8, Gl. I 8
	9	Gl. I 8
	10	Gl. I 8 viermal

Der Schwerpunkt des Paraboloidsegmentes findet sich nicht in den uns überlieferten Werken des Archimedes.

Im Satz 8 des ersten Buches wird noch die folgende Aussage gemacht, die uns zeigt, daß Archimedes sich auch Rechenschaft über die Art der hier auftretenden Kräfte ablegt:

Die Erdschwere wirkt auf einen Körper in der Weise, daß er sich, frei beweglich, auf einer Geraden durch den Schwerpunkt und den Erdmittelpunkt bewegt.

Es geht daraus hervor, daß Archimedes sich über die prinzipiellen Einwände völlig im klaren war, die man gegen den mechanischen Beweis der Parabelquadratur vorbringen kann. Denn dieser Beweis operiert an der Wage und setzt die absolute Parallelität der Fäden, an denen die Gewichte aufgehängt sind, voraus, also eine idealisierte Gleichgewichtslehre mit unendlichfernem Schwerezentrum.

§ 7.

Die Gegentabellen.

Es sei der Arbeit vor der Zusammenfassung ihrer Ergebnisse eine Gesamtliste beigefügt, welche als Umkehrung der früheren Tabellen das Vorkommen jeder der aufgetretenen P_n, S_n, L_n und der Sätze nachweist.

		Wird benutzt in den folgenden Sätzen:
	P_1	Gl. I 1, Gl. I 2, Gl. I 3, Gl. I 4
	P_2	Gl. I 2
	P_3	Gl. I 1, Gl. I 3
	P_4	Gl. I 9, Gl. I 10
	P_5	Gl. I 11, Gl. II 3
	P_6	Gl. I 6, Gl. II 1, Eph. 6, Eph. 9
	P_7	Gl. I 9, Gl. I 13, Gl. II 4, Gl. II 6
	S_1	Gl. I 1, Gl. I 2, Gl. I 3, Gl. I 4, Gl. I 6, Gl. I 8, Gl. I 14, Gl. I 15, Gl. II 4, Gl. II 6, Gl. II 8
	S_2	Gl. I 4, Gl. I 10, Gl. I 13, Gl. I 15, Gl. II 2, Gl. II 3, Gl. II 5, Ep. 1
	S_3	Gl. I 4, Gl. I 6, (Eph. 6, Eph. 9)
	S_4	Gl. I 5, Gl. I 7
	S_5	Gl. I 7
	S'_1	Q. 6
	S'_2	Q. 6, Q. 8/9, Q. 10/11, Q. 12/13, Eph. 1
	S'_3	Q. 7, Q. 14, Q. 15
	L_1	Eph. 6, Eph. 9
	L_2	Eph. 5
	L_3	Eph. 1, Eph. 2, Eph. 3, Eph. 4, Eph. 5, Eph. 6, Eph. 13
	L_4	Eph. 1
	L_5	Eph. 13
	L_6	Eph. 12
	L_7	Eph. 2, Eph. 3, Eph. 4, Eph. 5, Eph. 6
	L_8	Eph. 2, Eph. 3, Eph. 4, Eph. 6, Eph. 7
	L_9	Eph. 13
	L_{10}	Eph. 6, Eph. 9
Gl. I	1	—
	2	—
	3	—
	4	Gl. I 5, Gl. I 10, Gl. I 13, Gl. II 5, Gl. II 8
	5	Gl. I 6, Gl. I 9
	6	Gl. I 7, { Gl. I 8, Gl. I 15, Gl. II 5
	7	{ Eph. 1, Eph. 2, Eph. 3, Eph. 4, Eph. 5, Eph. 6, Eph. 7, Eph. 9, Eph. 12
	6/7	Umkehrung: Gl. II 8, Q. 6, Q. 8/9, Q. 10/11, Q. 12/13, Eph. 2, Eph. 3, Eph, 4, Eph. 7
	8	Gl. I 13, Gl. I 15, Gl. II 4, Gl. II 6, Gl. II 10, Eph. 5, Eph. 6, Eph. 9, Schw. K. I: 8, 9, Schw. K. II: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10
	9	Gl. I 10, Gl. I 13
	10	Gl. I 13, Gl. II 1
	11	Gl. I 12, Gl. I 13
	12	—
	13	Gl. I 14, Gl. I 15, Gl. II 2
	14	Gl. I 15, Gl. II 3, Gl. II 5, Gl. II 8, Q. 6, Q. 8/9
	15	Gl. II 2, Gl. II 3, Eph. 1, Q. 10/11, Q. 12/13

Gl. II 1	–
2	Gl. II 4
3	–
4	Gl. II 5
5	Gl. II 7
6	Gl. II 7
7	–
8	Gl. II 10
9	Gl. II 10
10	–
Q. d. P. 5	Q. 14
6	Q. 7, Q. 14, Q. 14
7	Q. 15, Q. 15
8	Q. 14
9	Q. 15
10	Q. 14
11	Q. 15
12	Q. 14
13	Q. 15
Eph. 12	Eph. 13

§ 8.

Zusammenfassung.

1. *Archimedes benutzt in seinen Untersuchungen, die den Schwerpunkt betreffen, keine anderen Axiome als diejenigen Aussagen, die im vorstehenden durch kursiven Druck gekennzeichnet worden sind, d. h. die 7 Postulate* $P_1, \ldots, P_7$ *sowie die stillschweigend gemachten Annahmen* $S_1, \ldots, S_5$; S'_1, S'_2, S'_3. *Alles andere folgt daraus rein logisch.*

Wenn in der Ephodos L_4, L_7 bis L_{10} ohne Beweis stehen, so sind sie zwar durch den überlieferten Gedankengang des Archimedes nicht logisch gedeckt, aber es ist ganz offensichtlich, daß er in ihnen keine Axiome gesehen hat, sondern daß er sie aus Schriften, die uns verloren sind und die den Beweis enthielten, herübernimmt; denn sie sind natürlich ohne besondere Schwierigkeit auf Grund des obigen Kanons von Axiomen beweisbar.

2. *Nur „Quadratur der Parabel" redet von der Wage (also von stabilem Gleichgewicht); alle anderen erhaltenen Arbeiten handeln nur von indifferentem Gleichgewicht; eine Ausnahmestellung nimmt Gl. A ein, indem es allgemeingültig für beide Arten von Gleichgewicht zusammen formuliert ist.* S'_1, S'_2, S'_3 kommen demgemäß nur in der Parabelquadratur vor. S'_2 wird explicite aus einem Elementenbuch (*μηχανικά*) zitiert, das auch

Gl. I 14 enthalten haben muß. Dieses Elementenbuch kann also nicht mit Gl. I identisch gewesen sein. *Aber es besteht die Möglichkeit, daß Gl. A lediglich eine andere Fassung dieses Elementenbuches ist, die alles herausgelassen hat, was nicht allgemeingültig und für Gl. B nicht erforderlich war.*

3. In einer ähnlichen Weise läßt die Ephodos erkennen, daß S_2, S_3, S_4 in einer anderen Redaktion formuliert gewesen sein müssen. S_1, S_5, die somit allein als *stillschweigend* gemachte Annahmen übrigbleiben, sind genau von der Art, wie die von Euklid in seiner Proportionenlehre mit Stillschweigen übergangenen Postulate. *Damit ist das Axiomensystem der Schwerpunktslehre des Archimedes scharf umrissen, und es ist nachgewiesen, daß es dem der Euklidischen Proportionenlehre gleichwertig an die Seite tritt.*