ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1937
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

А. М. ЖУРАВСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕННЫХ КРАТНЫХ КВАДРАТУРАХ[1]

В статье даются различные приближенные формулы для выполнения кратных квадратур. Рассматриваются случаи задания подинтегральной функции как в конечном, так и в бесконечном числе точек области интегрирования. Особое внимание уделяется случаю точек, расположенных на серии прямых или плоскостей в области интегрирования. Приводятся оценки приближенных формул.

В то время как вопрос о приближенном вычислении простого интеграла исследован исчерпывающим образом и в настоящее время мы имеем разнообразные способы для его решения, задача о приближенном вычислении кратного интеграла оставалась в тени. Тому, думается, две причины.

Первая состоит в том, что с чисто математической точки зрения задача представлялась мало интересной. Поскольку кратное интегрирование сводится к последовательному вычислению квадратур, для которых задача приближенного вычисления решена, вопрос о приближенном вычислении кратных квадратур может считаться принципиально решенным.

Вторая, более веская причина заключается в том, что практические проблемы, так сильно влияющие на развитие прикладной математики, а иногда и дающие ей новое направление, не предъявляли своих требований к разработке приемов практического выполнения кратных квадратур по приближению.

Не так обстоит дело в настоящее время. Ряд вопросов, имеющих большое практическое значение, приводится к приближенному вычислению кратного, обычно двойного или тройного интеграла.

В настоящем сообщении мы постараемся показать, что рассмотрение интеграла от функции нескольких переменных вносит некоторые специфические черты, не позволяющие всегда сразу же свести весь вопрос к приближенному выполнению простых квадратур.

Выводя формулы для выполнения приближенной кратной квадратуры, мы будем предполагать, что такие области интегрирования, в которых

[1] Доложено 22 марта 1936 г. на сессии Группы математики Академии Наук СССР.

задано значение подинтегральной функции, указаны наперед. Интересного вопроса о выборе этих точек в области интегрирования так, чтобы погрешность оказывалась минимальной, т. е. проблемы, аналогичной задаче механических квадратур, мы сейчас касаться не будем.

§ 1. Начнем с распространения простейших формул простых приближенных квадратур на кратные—прежде всего с аналога формулы трапеций. В формуле трапеций дается значение подинтегральной функции на границах интервала интегрирования и подинтегральная функция апроксимируется функцией линейной.

Положим, что в n-мерном пространстве дано значение функции

$$U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

в $n+1$-й точке пространства $M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ $(i = \overline{0, n})$. Эти точки являются вершинами многогранника в пространстве n измерений, если

$$\Delta = \| x_k^{(i)} \| \neq 0. \tag{2}$$

Обозначим область, занятую этим многогранником, через T. Формула

$$\underbrace{\int \cdots \int_T}_{n} \overbrace{f(x_1, \ldots, x_n)}^{U} \, dx_1 \ldots dx_n \approx |\Delta| \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n+1}, \tag{3}$$

где U_k $(k = \overline{0, n})$ обозначает значение, принимаемое функцией U в точке M_k, дает приближенное выражение интеграла. При построении этой формулы интерполирующая функция принималась линейной. Величина погрешности R формулы (3) характеризуется равенством:

$$R = -\frac{1}{2} \frac{|\Delta|}{(n+2)!} \sum_{i<k} d_{ik}^2 \left\{ \frac{d^2U}{dt^2} \right\}_{t=0}, \tag{3'}$$

где d_{ik} обозначает расстояние от точки M_i до точки M_k, а производная от функции U берется в некотором направлении в некоторой точке области T. Формула средних прямоугольников характерна тем, что при выводе ее подинтегральная функция принимается линейной, причем производная апроксимирующей функции совпадает с производной подинтегральной функции в точке, где значение подинтегральной функции задано. Значение подинтегральной функции задается в центре интервала интегрирования.

Рассматривая функцию n переменных, зададим ее значение в центре тяжести области интегрирования T, не делая никаких дальнейших предположений относительно области T.

Получаем формулу, аналогичную формуле средних прямоугольников:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \approx f(c_1, \ldots, c_n) V, \tag{4}$$

где точка $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ есть центр тяжести области T, а V обозначает ее объем.

Погрешность R приближенного равенства (4) характеризуется формулой:

$$R = \frac{I}{2} \left\{\frac{d^2U}{dt^2}\right\}_{t=0}, \tag{5}$$

где I обозначает момент инерции области T относительно центра тяжести, а $\left\{\frac{d^2U}{dt^2}\right\}_{t=0}$ производную от функции

$$U = f(x_1 + t\cos\alpha_1, \dots, x_n + t\cos\alpha_n), \qquad (\cos^2\alpha_1 + \dots + \cos^2\alpha_n = 1),$$

вычисленную для некоторой точки в области интегрирования T.

Формула, аналогичная формуле Симпсона, получится путем задания значений подинтегральной функции в центре n-мерного параллелепипеда и в центрах его граней и ребер. Формула для приближенного вычисления интеграла представляется в следующем виде.

Обозначим значение подинтегральной функции в центре параллелепипеда через U_0 и в вершинах через

$$U_{1,1,\dots,1},\ U_{-1,1,\dots,1},\ U_{1,-1,1,\dots,1}, \dots,\ U_{-1,-1,\dots,-1}.$$

Значение функции в серединах ребер и граней будем обозначать

$$U_{1,0,\dots,1},\ U_{-1,0,\dots,1},\ U_{0,1,\dots,1},\ U_{0,-1,\dots,1}, \dots$$

Величина интеграла представляется равенством:

$$\underbrace{\int\dots\int}_{n} U\,dx_1\dots dx_n \approx$$

$$\approx \frac{V}{6^n}\left\{S_{1,1,\dots,1} + 4S_{0,1,\dots,1} + \dots + 4^n S_{0,0,\dots,0}\right\}, \tag{6}$$

где V обозначает объем параллелепипеда, а величины

$$S_{1,1,\dots,1},\ S_{0,1,\dots 1}, \dots,\ S_{0,0,\dots,0}$$

обозначают суммы, распространенные на значения U: первая на значение, не содержащее в указателях нулей, вторая на значение, содержащее среди указателей только один нуль, и т. д.

Погрешность R формулы (6) характеризуется равенством:

$$R = -\frac{V}{2880}\left(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4\right)\left\{\frac{d^4U}{dt^4}\right\}_{t=0}, \tag{7}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ обозначают длины ребер параллелепипеда, а $\left\{\frac{d^4U}{dt^4}\right\}_{t=0}$ — значение производной, взятой от подинтегральной функции в некотором направлении в некоторой точке области интегрирования T.

Наряду с отмеченными формулами можно указать серию формул, служащих для приближенного вычисления кратного интеграла.

Так, например, в случае, когда оказываются заданными только значения функции в вершинах прямоугольного параллелепипеда, имеем формулу

$$\underbrace{\int\dots\int}_{n} U\,dx_1\dots dx_n \approx \frac{V}{2^n} S_{1,1,\dots,1}, \tag{8}$$

где $S_{1,1,\ldots,1}$ имеет указанное выше значение, V обозначает объем области T.

Погрешность этой формулы характеризуется равенством:

$$R = -\frac{V}{12}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\left\{\frac{d^2U}{dt^2}\right\}_{t=0}, \tag{9}$$

где все величины имеют указанный выше смысл. Приведенные здесь формулы ни в какой мере не исчерпывают всех возможных формул, служащих для приближенного вычисления кратного интеграла, и являются лишь примерами их. В случае, когда в заданной области интегрирования имеется серия точек, где значение подинтегральной функции известно, область интегрирования подразделяется на части, к каждой из которых применяется одна из указанных нами формул. Само собой понятно, что в зависимости от разделения области на отдельные части получится то или иное числовое выражение величины интеграла.

§ 2. Кратное интегрирование сводится к последовательному выполнению приближенных простых квадратур. В том случае, когда значения подинтегральной функции задаются в точках правильной сети, рассмотрение вопроса приводится к непосредственному применению известных приемов. Однако в ряде случаев необходимы предварительные преобразования, на которых мы сейчас и остановимся. Для большей простоты письма ограничимся рассмотрением тройного интеграла.

Положим, что в области интегрирования T известна точка или определено приблизительное значение подинтегральной функции для точек серий плоскостей, друг друга не пересекающих.

Представим себе область T как происшедшую от перемещения некоторой фигуры, которая в отдельных своих положениях совпадает с данными сечениями области T. Будем рассматривать подинтегральную функцию как плотность различных точек массы, занимающей область T.

Для каждого положения перемещающейся фигуры отметим координаты центра тяжести. Обозначим их через X, Y, Z. Выберем на перемещающейся плоскости некоторые оси OU, OV, имеющие начало в центре тяжести перемещающейся фигуры.

Введем обозначения:

α, β, γ и α', β', γ' — углы, образуемые осями OU и OV с системой неподвижных осей;

s — длина дуги траектории центра тяжести фигуры;

$F(s)$ — поверхностная масса;

θ — угол между плоскостью сечения и нормальной плоскостью траектории центра тяжести.

Принимая во внимание соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x &= X + u\cos\alpha + v\cos\alpha', \\ y &= Y + u\cos\beta + v\cos\beta', \\ z &= Z + u\cos\gamma + v\cos\gamma', \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

можно привести интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

к виду:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^L F(s) \cos\theta\, ds, \tag{11}$$

где

$$F(s) = \int_S f(X + u\cos\alpha + v\cos\alpha', \ldots,)\, du\, dv \tag{12}$$

и интегрирование распространяется по площади сечения. Буквой L обозначена длина дуги траектории центра тяжести.

Преобразование (10) сводит таким образом приближенное вычисление тройного интеграла к последовательному выполнению двойного и простого интегрирования.

Отметим, что из равенства (11) вытекает любопытное обобщение теоремы Гюльдена. Если положить

$$f(x, y, z) = 1,$$

то тройной интеграл выражает объем V области T; $F(s)$ будет представлять собой площадь S переменного сечения, и равенство (10) обращается в

$$V = \int_0^L S\cos\theta\, ds. \tag{13}$$

В случае, когда S остается постоянной и $\theta = 0$, равенство (13) дает

$$V = S \cdot L. \tag{14}$$

Таким образом объем тела, образованного перемещением фигуры неизменной площади, перемещающейся таким образом, что плоскость фигуры остается нормальной к траектории центра тяжести, равняется произведению площади фигуры на длину траектории, описанной ее центром тяжести.

Возвращаясь к равенству (11), отметим еще, что аналогичное преобразование имеет место для интеграла любой кратности.

Так, например, в том случае, когда в двойном интеграле известны значения подинтегральной функции для ряда прямых в области интегрирования,

$$\iint_T f\overset{U}{\widehat{(x,\ y)}}\, dx\, dy = \int_0^L F(s)\cos\theta\, ds, \tag{15}$$

где

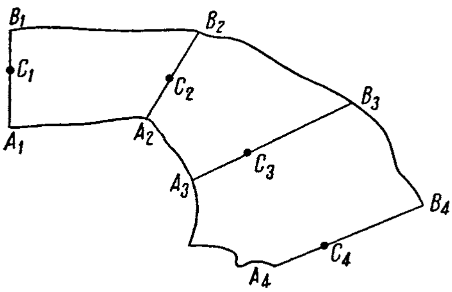
$$F(s) = \int_a^b f(x + u\cos\alpha,\ y + v\cos\beta)\, du \tag{16}$$

обозначает интегрирование, распространенное по прямой, а θ — угол между данной прямой и нормалью к траектории центра тяжести.

Посмотрим, как будет располагаться вычисление. На фиг. 1 изображена серия прямых, для точек которых указаны значения подинтегральной функции.

Выполняем для каждой прямой приближенную квадратуру

$$\int_{a_i}^{b_i} U\,du = F(s).$$



Фиг. 1

Если принять точку A_i за начало, а длину прямой назвать l_i, то

$$F(s_i) = \int_0^{l_i} U\,dt, \tag{17}$$

где t обозначает длину, отсчитываемую от точки A_i. Значения функции известны для ряда отдельных точек прямой или величина интеграла дается непосредственно. Приближенная квадратура выполняется по одной из известных формул.

Чтобы определить положение центра тяжести, выполняем приближенную квадратуру

$$\Phi(s_i) = \int_0^{l_i} Ut\,dt \tag{18}$$

по одной из известных формул.

Для выполнения приближенного вычисления интеграла, стоящего в правой части равенства (15), представим его в виде:

$$\int_0^L F(s)\cos\theta\,ds = \int_0^\alpha F\cdot R\,d\varphi, \tag{19}$$

где φ — угол, образуемый перемещающейся прямой с ее начальным положением, а R — расстояние от центра тяжести C до точки пересечения прямой со смежным ее положением.

Применяя простейшую формулу приближенных квадратур, получаем:

$$\int_0^\alpha F\cdot R\,d\varphi \approx \frac{1}{2}\left\{F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \ldots + F_n\sigma_n\right\}, \tag{20}$$

где σ_i обозначает длину дуги окружности радиуса R_i, имеющей центр на i-ом сечении в середине отрезка, концами которого служат точки пересечения i-ой прямой со смежными, и заключенной между прямыми, смежными с данной.

Правило построения дуги σ_i поясняется фиг. 2. Само собой разумеется, что определение длин дуг может быть выполнено как графически, так и аналитически.

В случае, когда углы, образуемые прямыми, не велики, точки G и H могут оказаться за пределом чертежа. В этом случае дугу окружности следует принять за прямую линию, проведенную через точку C_i, перпендикулярно A_iB_i.

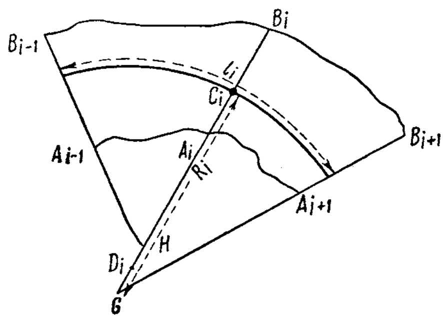
§ 3. Рассмотрим вкратце другое преобразование интеграла, имеющее целью дать базу для вывода формул приближенного вычисления тройного интеграла в том случае, когда известны значения подинтегральной функции в ряде точек, расположенных по серии прямых, заданных в области интегрирования T.

Будем, как и раньше, приписывать точкам области T плотность, равную

$$U = f(x, y, z).$$

Пусть через каждую точку области T проходит одна и только одна прямая конгруенции. Отметим на каждой прямой положение центра тяжести $C(X, Y, Z)$. Точки C заполняют некоторую поверхность S. Обозначим через u, v ортогональные координаты точки на поверхности S и через α, β, γ углы, образуемые прямой конгруенции с осями координат. Величины X, Y, Z; α, β, γ суть некоторые функции от u, v. Легко видеть, что

$$x = X + t\cos\alpha, \quad y = Y + t\cos\beta,$$
$$z = Z + t\cos\gamma. \qquad (21)$$



Фиг. 2

Обозначим через θ угол, образуемый нормалью к поверхности S с прямой конгруенции, проходящей через точку поверхности, где взята нормаль, и через I—момент инерции отрезка прямой, заключенного в области T, относительно его центра тяжести.

Рассмотрим шар с центром в начале координат и радиусом равным единице. Проведем через начало координат прямые, параллельные прямым конгруенции, и отметим точки пересечения этих прямых с шаровой поверхностью. Точки пересечения будем называть сферическим изображением соответствующих прямых конгруенции.

Вычисление тройного интеграла

$$\iiint\limits_T U\,dx\,dy\,dz$$

может быть произведено согласно равенству:

$$\iiint\limits_T U\,dx\,dy\,dz = \int\limits_S F\cos\theta\,dS + \int\limits_\sigma I\,d\sigma, \qquad (22)$$

где

$$F = \int\limits_a^b U\,dt, \qquad (23)$$

$$I = \int_a^b U t^2 \, dt. \tag{24}$$

Интегрирование производится вдоль прямой конгруенции, причем за начало координат принят соответствующий центр тяжести отрезка. Пределы интегрирования суть функции от u и v. Буква σ обозначает площадь сферического изображения.

Равенство (22) сводит вычисление тройного интеграла к вычислению простого интеграла с последующим вычислением двойного. В тех случаях, когда заданы значения функции, стоящей под знаком тройного интеграла, для ряда точек, находящихся на прямых, указанным образом расположенных в области интегрирования, величины интегралов (23) и (24) легко устанавливаются по формулам приближенных простых квадратур. Из равенства (22) можно вывести правила для приближенного вычисления тройного интеграла подобно тому, как это было сделано на базе равенства (10).

Отметим интересное обстоятельство. В случае

$$U = f(x, y, z) = 1$$

тройной интеграл выражает объем. Практические приемы определения объема, применяемые при подсчете запасов угольных месторождений, например углей Донбасса, равносильны формуле (22) без учета второго члена.

§ 4. Формулы для выполнения приближенных кратных квадратур, указанные в § 1, дают простейшие решения задачи. При построении функции, апроксимирующей подинтегральную, принималось лишь небольшое количество значений подинтегральной функции. Можно построить серию формул для выполнения приближенных квадратур, принимая во внимание всю совокупность точек в области интегрирования. Для простоты письма ограничимся рассмотрением функции двух переменных. Пусть будет известно значение функции U в ряде точек $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_s(x_s, y_s)$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначают серию различных значений, принимаемых абсциссами точек. Положим, что точки с абсциссой x_i имеют ординаты $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{n_i}^{(i)}$.

Построим полином

$$\varphi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

и полиномы

$$\varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_i)\,\varphi'(x_i)} \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Одновременно с этим построим полиномы

$$\psi_i(y) = (y - y_1^{(i)}) \ldots (y - y_{n_i}^{(i)})$$

и полиномы

$$\psi_{ik}(y) = \frac{\psi_i(y)}{(y - y_k^{(i)})\,\psi_i'(y_k^{(i)})}.$$

Многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x) \sum_{k=1}^{n_i} f(x_i, y_k^{(i)}) \psi_{ik}(y) \tag{25}$$

принимает в данных точках наперед указанные значения. Можно однако получить апроксимирующий многочлен и иначе, определив его коэффициенты так, чтобы в данных точках получились наперед указанные значения.

Во всех случаях интегрирующий полином представляется в виде:

$$P(x, y) = U_1 P_1(x, y) + U_2 P_2(x, y) + \ldots + U_n P_n(x, y). \tag{26}$$

Формула для выполнения приближенной квадратуры примет вид:

$$\iint_T U\,dx\,dy \approx A_1 U_1 + \ldots + A_n U_n, \tag{27}$$

где

$$A_i = \iint_T P_i(x, y)\,dx\,dy \qquad (i = \overline{1, n}).$$

В случае, когда значения подинтегральной функции заданы в точках правильной сети и область интегрирования имеет прямоугольную форму, коэффициенты A_i выражаются через коэффициенты формулы Котеса, если принять апроксимирующий многочлен по формуле (25). Условимся обозначать коэффициенты формулы Котеса через C_{1n}, $C_{2n}, \ldots, C_{nn}$.

В таком случае равенство (27) примет вид:

$$\iint_T U\,dx\,dy \approx \sum C_{im} C_{kn} U_{ik} S.$$

Здесь

$$U_{ik} = f(x_i, y_k) \qquad (i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n});$$

S обозначает площадь основного параллелограма сети, а точка $M_{ik}(x_i, y_k)$ является одной из точек сети.

§ 5. Вычисление двойного интеграла может быть проведено и графоаналитическим приемом. Если представить себе функцию двух переменных в виде поверхности, то на плоскости она может быть представлена в виде серии горизонталей. Когда дается ряд отдельных точек этой поверхности, по этой серии может быть произведено построение горизонталей. Обычно это достигается посредством предварительного построения серий точек, имеющих определенную числовую отметку.

Такой способ не отличается большой точностью и вносит известный произвол. Но такой же произвол мы имеем и при чисто аналитическом решении задачи. Он сказывается в выборе вида интерполирующей функции.

После того как изображение функции построено, вычисление двойного интеграла не представляет никакого труда.

Измеряем площади, ограниченные отдельными горизонталями. Пусть эти площади будут равны соответственно s_1, $s_2, \ldots, s_n$, а разность отметок горизонталей равна h. Отметка нижней горизонтали H.

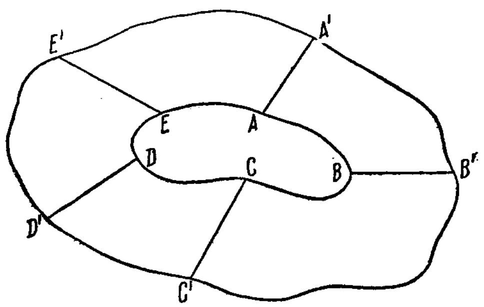
Двойной интеграл находится по приближенной формуле:

$$\iint U\,dx\,dy \approx H \cdot s_0 + h\left(\frac{1}{2}s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} + \frac{1}{2}s_n\right). \qquad (28)$$

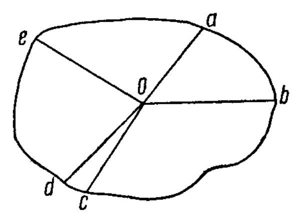
Вместо этой может быть взята и иная формула для выполнения приближенной простой квадратуры. Интересно отметить, что приближенное вычисление объема по площади двух смежных горизонталей с помощью формулы

$$V \approx \frac{1}{2}(s_0 + s_1)\,h \qquad (29)$$

может быть уточнено. Это уточнение достигается за счет использования данных о взаимном положении горизонталей и о виде боковой поверх-



Фиг. 3



Фиг. 4

ности. Если предположить, что боковая поверхность линейчатая, то дополнительный член формулы (29) имеет вид:

$$-\frac{1}{6}h \cdot s_2,$$

где s_2—площадь, ограниченная некоторым контуром, построение которого может быть произведено следующим образом.

Пусть фиг. 3 дает изображение двух рассматриваемых горизонталей. Отрезки AA', BB', CC', DD' и EE' представляют собой проекции образующей на плоскость горизонталей. Из некоторой точки O (фиг. 4) проводим серию прямых Oa, Ob, Oc, Od, Oe, параллельных линиям AA', BB', CC', DD', EE'. Концы этих прямых располагаются на кривой, ограничивающей площадь s_2.

Введение указанного поправочного члена не имеет значения в тех случаях, когда горизонтали мало разнятся одна от другой, т. е. когда серия горизонталей проводится достаточно часто. Учет дополнительного члена позволяет увеличить расстояние между горизонталями и тем уменьшить объем необходимых графических работ.

Поправочный член формулы (29) был указан В. И. Бауманом. В случае, когда боковая поверхность не линейная, в равенстве

$$V \approx \left(\frac{1}{2}s_0 + \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{6}s_2\right)h \qquad (30)$$

коэффициенты получают другие значения, которые каждый раз можно устанавливать, зная закон образования боковой поверхности.

В заключение скажем несколько слов относительно применения графоаналитического приема в условиях резко изменяющейся подинтегральной функции. В этом случае построение горизонталей, хотя бы в какой-либо мере отвечающих действительности, представляется мало надежным. Равным образом интерполяционные формулы, сглаживающие в известной мере резкость изменений апроксимируемой функции, связаны в этом случае со значительными погрешностями.

Для получения результатов, заслуживающих доверия, в этом случае можно поступать следующим образом. Вместо функции U будем рассматривать функцию

$$F(x, y) = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{31}$$

Возьмем интеграл

$$\iint_T F(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\iint_{T_{\xi,\eta}} f(x, y)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta. \tag{32}$$

Область $T_{\xi,\eta}$ получится смещением области T в направлении вектора с составляющими ξ, η.

Представляя данный интеграл в виде

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T F(x, y)\, dx\, dy + R, \tag{33}$$

нетрудно установить, что

$$|R| < M \cdot L \cdot h, \tag{34}$$

где M обозначает максимальную величину $f(x, y)$ в полосе шириной $2h$, прилегающей с той и с другой стороны к контуру области T; L—длина этого контура. Разность R будет небольшой при небольшом h. Относительная погрешность будет мала во всех случаях, когда h невелико по сравнению с размерами области.

Практическое использование функции $F(x, y)$ сводится к усреднению ее значений, находящихся внутри квадрата со стороной $2h$. Это дает возможность получить функцию с плавными изменениями, к которой уже можно приложить обычные приемы апроксимации. Выбор величины h зависит от характера функции $f(x, y)$ и резкости ее изменения.

Приложение этого приема на практике дало возможность произвести действительные вычисления в ряде случаев, представлявших значительные затруднения.

Академия Наук СССР.
Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Москва.

A. JOURAVSKY. SUR LES QUADRATURES APPROCHÉES MULTIPLES

RÉSUMÉ

Jusqu'à présent le problème du calcul approché des intégrales multiples n'a pas attiré beaucoup d'attention. Il nous semble qu'il y a deux raisons qui expliquent ce fait. La première est la suivante: dans les cas usuels les quadratures multiples approchées se reduisent facilement aux quadratures simples approchées et le problème du calcul approché ne donne pas lieu aux recherches nouvelles.

La seconde est plus profonde. Les applications pratiques n'avaient besoin du calcul approché des intégrales multiples que dans les cas les plus simples et leur influence sur les recherches abstraites ne s'étendait pas aux cas plus compliqués. A l'heure actuelle la question se pose autrement.

Beaucoup de problèmes pratiques importants se réduisent aux quadratures multiples approchées en exigeant des recherches nouvelles. Le but de l'article présent est de montrer que le champ des recherches sur les quadratures multiples approchées est loin d'être épuisé est que l'on peut trouver sur cette voie beaucoup de nouveaux problèmes.

Le § 1 est consacré à l'extension des formules connues des quadratures simples approchées au cas des quadratures multiples approchées.

Le § 2 donne la solution du problème suivant: Trouver la valeur approchée de l'intégrale triple connaissant les valeurs de la fonction à intégrer sur un système de sections planes du domaine en question. Comme une conséquence des résultats du § 2 nous obtenons une généralisation du théorème de Pappus-Guldin.

Si une figure de l'aire constante se déforme et se déplace dans l'espace de telle manière que le plan de la figure reste normal à la trajectoire de son centre de gravité, le volume engendré est égal au produit de l'aire de cette figure et de la longueur de la trajectoire de son centre de gravité.

Le problème suivant analogue à celui du § 2 est étudié dans le § 3.

Trouver la valeur approchée de l'intégrale, les valeurs de la fonction intégrée étant données pour une suite de droites dont la position dans le domaine d'intégration est connue. Le problème général du calcul approché de l'intégrale multiple, quand les valeurs de la fonction à intégrer sont données en un nombre fini de points du domaine d'intégration, est résolu dans le § 4. La formule

$$V = \int_0^h s\, dx \approx \frac{1}{2}(s_1 + s_2)\cdot h$$

donne la valeur approchée du volume V quand on connait les valeurs des aires s_1 et s_2 de deux sections planes à distance h. Si l'on connait non seulement les valeurs des aires s_1 et s_2, mais aussi leur forme et leur position, la formule peut être précisée.

Une règle pour la construction du terme complémentaire est établie au § 5. Le § 6 traite la question du calcul approché de l'intégrale multiple dans le cas où la variation de la fonction à intégrer est très rapide.