**Государственный комитет РСФСР по делам науки и высшей школы**
**Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени**
**финансово-экономический институт**
**имени Н.А. Вознесенского**

**В.А. Хацкевич, Д.М. Шойхет**

# ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ

**Издательство Ленинградского финансово-экономического института**
**1991**

УДК 22.16
X 28

**Хацкевич В.А., Шойхет Д.М. Дифференцируемые операторы.** – Л.: Изд-во ЛФЭИ, 1991 г. – 150 с.

Предлагаемая монография содержит большой объем сведений по теории множеств, топологии, теории метрических пространств и отображений таких пространств. Она включает в себя основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления, а также основные положения теории голоморфных отображений в банаховом пространстве.

Монография может быть полезна специалистам в области комплексного и функционального анализа, прикладной математики и кибернетики, аспирантам и студентам старших курсов.

Рецензенты: д-р ф.-м. наук А.Г. Баскаков
д-р ф.-м. наук Н.А. Бобылев

X $\frac{1602080000-31}{186(02)-91}$ без объявл.

ISBN 5-7310-0067-0

# Содержание

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея написания настоящей книги возникла у авторов уже давно, как только стало ясно, что нет ни одного достаточно полного руководства по комплексному анализу в бесконечномерных пространствах. Хотя отдельные разделы такого анализа можно найти в математической литературе. Например, в книгах Э. Хилле, Р. Филлипса [21] и Л. Шварца [25] представлена элементарная теория голоморфных вектор-функций и отображений в банаховом пространстве, а в книгах У. Рудина [12, 13], Т. Като [6] изложены фрагменты теории голоморфных отображений банаховых алгебр и голоморфных оператор-функций.

По-видимому, впервые потребность изучения голоморфных отображений бесконечномерных пространств возникла с развитием нелинейного анализа.

В конце XIX – начале XX веков появляется цикл исследований интегральных уравнений с аналитическими нелинейностями (А. Ляпунов, Э. Шмидт, А. Некрасов и др.). Эти исследования были, в основном, посвящены теории нелинейных волн и использовали методы неопределенных коэффициентов и мажорантных степенных рядов. Наиболее полно эти методы сформулированы Н. Назаровым.

В 40-х – 50-х гг. внимание от аналитических методов Ляпунова – Шмидта было временно отвлечено методами вариационного исчисления (М. Голомб, А. Гаммерштейн и др.), а также бурно развивающейся теорией степени отображения (работы Ж. Лере, Ю. Шаудера, Г. Биркгофа, Кэллога и др.).

В этих методах привлекательным было то, что они позволяли изучать многие классы неаналитических уравнений. В связи с этим они получали на начальном этапе глубокое развитие (М. Красносельский, П. Забрейко, В. Опойцев, Ю. Борисович, Б. Садовский).

Однако, это повлекло некоторое отставание в развитии методов решений уравнений с аналитическими нелинейностями. А потому в 60-х годах некоторые математики, занимающиеся интегральными уравнениями и их приложениями, вернулись к аналитическим методам Ляпунова – Шмидта и Некрасова – Назарова (П. Рыбин, В. Покорный, М. Вайнберг, В. Треногин и др.).

В то же время теории функций одного и многих комплексных переменных наполнялись все более значительными и тонкими результатами.

Наряду с этим в работах А. Картана, Р. Филлипса, Л. Нагбина, Л. Харриса, Т. Софриджа, У. Рудина и многих других появляются первые результаты и о голоморфных отображениях бесконечномерных пространств.

Авторам представляется, что в настоящее время назрела потребность в “наведении мостов” между нелинейным анализом с одной стороны и теорией голоморфных отображений бесконечномерных пространств — с другой.

За исключением нулевой главы, которая носит справочный характер и содержит сведения из общей топологии и функционального анализа, все остальные главы мы постарались излагать достаточно подробно с определениями и полными доказательствами так, чтобы содержание было понятно не только специалистам, но и студентам, а также инженерам, использующим в практике решения интегральных и дифференциальных уравнений.

В заключение мы решили указать на интересные пересечения теории голоморфных отображений и теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Поэтому последняя глава представляет собой небольшой экскурс в теорию пространств с индефинитной метрикой и приложения к некоторым ее задачам теории голоморфных отображений.

Дадим также некоторые пояснения, связанные с чтением книги. На протяжении всей книги мы постарались использовать единообразное обозначение для одних и тех же объектов. Подробнее об этом в главе 0.

Вместо слов "доказательство" и "что требовалось доказать" и т. п. мы используем символы □, ■, означающие начало и конец в доказательстве того или иного утверждения.

Несмотря на желание экономить место в ссылках на литературу, мы все же сочли полезным и удобным для чтения сразу указывать авторов. Поэтому номер литературы, стоящий в тексте после фамилий авторов, означает номер книги или статьи именно данного автора. Фамилии авторов в списке литературы расположены в порядке, соответствующем русскому алфавиту. Поэтому в ссылках на зарубежных авторов мы указываем также русское написание их фамилий.

# ГЛАВА 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Эта глава носит вспомогательный характер: в ней собраны основные определения и теоремы, используемые в дальнейшем. При этом часть результатов приводится здесь для придания хотя бы относительной целостности и стройности изложению, а не только из чисто прагматических соображений.

## § 1. Множества и отношения

**1.** Мы будем иметь дело с множествами и их элементами. Для нас синонимами будут слова “множество”, “класс”, “совокупность”, “семейство”. Как правило, будем обозначать множества готическими, а их элементы, или, как еще говорят, точки, — малыми латинскими буквами. Тот факт, что элемент $x$ принадлежит множеству $X$, обозначается так: $x \in X$. Мы пишем $X = Y$, если $x \in X$ точно тогда, когда $x \in Y$. Запись $\{x|\ x \in X\}$ означает, что мы рассматриваем все элементы множества $X$. Подмножеством называется любая часть, не обязательно правильная, множества. Тот факт, что множество $\mathfrak{A}$ есть подмножество множества $X$, обозначается так: $\mathfrak{A} \subseteq X$. При этом пустое множество $\emptyset$ считается подмножеством любого множества. Объединение и пересечение множества $X$ и $Y$ обозначатся, как обычно, через $X \cup Y$ и $X \cap Y$ соответственно. Разность множеств $X$ и $Y$ (или дополнение $Y$ в $X$) обозначается $X \setminus Y$. Операции объединения и пересечения находятся в двойственности, выражаемой формулами де Моргана ($X$ множество, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — его подмножества):

$$X \setminus (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = (X \setminus \mathfrak{A}) \cap (X \setminus \mathfrak{B}), \qquad X \setminus (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = (X \setminus \mathfrak{A}) \cup (X \setminus \mathfrak{B}). \tag{1.1}$$

Формулы де Моргана справедливы не только для двух, но и для любого семейства подмножеств множества $X$.

Прямое или декартово произведение $X \times Y$ множеств $X$ и $Y$ — это множество всех пар $(x, y),\ x \in X,\ y \in Y$.

**2.** Отношением между множествами $X$ и $Y$ называется подмножество прямого произведения $X \times Y$. Если $R$ — отношение, то записи $xRy$ и $(x, y) \in R$ равносильны, при этом говорят, что $x$ находится в отношении $R$ к $y$. Областью определения $\mathfrak{D}(R)$ отношения $R$ называется множество всех первых координат входящих в $R$ элементов, а областью значений $\mathfrak{R}(R)$ называется множество их вторых координат.

Обратное отношение к отношению $R$ обозначается через $R^{-1}$ и определяется равенством $R^{-1} = \{(y, x)|\ (x, y) \in R\}$; так что $xRy$ точно тогда, когда $yR^{-1}x$. Композицией или произведением отношений $R$ и $S$ называется отношение $R \circ S$ (иногда обозначаемое $RS$), состоящее из всех пар $(x, z)$ таких, что для некоторого $y$ справедливы включения $(x, y) \in S$ и $(y, z) \in R$. Операция композиции не коммутативна, так как $R \circ S$ и $S \circ R$, вообще говоря, различны. Тождественное отношение на множестве $X$ (тождество на $X$) — это множество всех пар вида $(x, x)$, $x \in X$. Обозначается оно через $I$ или $Id$ и обладает тем свойством, что $R\ circI = I \circ R = R$ для любого отношения $R$, область определения и область значений которого являются подмножествами множества $X$. Легко видеть, что $R^{-1} \circ R \supseteq I_{\mathfrak{D}(R)}$, $R \circ R^{-1} \supseteq I_{\mathfrak{R}(R)}$ для любого отношения $R$, где через $I_{\mathfrak{D}(R)}$ и $I_{\mathfrak{R}(R)}$ обозначены тождества соответственно на $\mathfrak{D}(R)$ и $\mathfrak{R}(R)$. При работе с отношениями полезна

**Теорема 1.1.** *Пусть $R$, $S$ и $T$ — отношения. Тогда*

a) $(R^{-1})^{-1} = R$ *и* $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

b) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Рассмотрим несколько специальных типов отношений, которые играют весьма важную роль во всей математике.

Отношение $R$ рефлексивно, если $xRx$; другими словами, $I \subseteq R$ — отношение $R$ содержит диагональ. $R$ симметрично, если из $xRy$ следует $yRx$. Это значит, что $R = R^{-1}$. С другой стороны, отношение $R$ называется антисимметричным, если $xRy$ и $yRx$ не выполняются одновременно, т. е. $R \cap R^{-1} = \emptyset$. Отношение $R$ транзитивно, если из $xRy$ и $yRz$ следует $xRz$. В терминах композиции отношение $R$ транзитивно точно тогда, когда $R \circ R \subseteq R$. В этом случае $R^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1}$, значит, обратное к транзитивному отношение транзитивно. Если $R$ и транзитивно, и рефлексивно, то $R \circ R = R$.

Упорядочение (частичное упорядочение, отношение порядка) на $X$ — это транзитивное отношение. Оно часто обозначается символом $\geq$. Когда $x \geq y$, обычно говорят, что $x$ следует за $y$ ($y$ предшествует $x$) или $x$ больше $y$ ($y$ меньше $x$).

Пусть $\mathfrak{A}$ — подмножество множества $X$, упорядоченного отношением $\geq$. Элемент $x$ множества $\mathfrak{A}$ называется максимальным (в $\mathfrak{A}$), если для всех $y \in \mathfrak{A}$ либо $x$ следует за $y$, либо $x$ не предшествует $y$. В последнем случае $x$ не связан с $y$ отношением $\geq$ или, как говорят, $x$ не сравним с $y$. Элемент $x \in X$ называется верхней гранью множества $\mathfrak{A}$, если для любого $y \in \mathfrak{A}$ либо $x \geq y$, либо $x = y$.

Множество $\mathfrak{A}$ называется линейно упорядоченным, если все его элементы сравнимы, т. е. для любых $x$, $y \in \mathfrak{A}$ выполняется $x \geq y$ или $y \geq x$, и, кроме того, из $x \geq y$ и $y \geq x$ следует, что $x = y$.

**Лемма 1.1.** (Цорн) *Если у каждого линейно упорядоченного подмножества частично упорядоченного множества $X$ имеется верхняя грань, то в $X$ есть максимальный элемент.*

Направлением на $X$ называется рефлексивное отношение порядка, удовлетворяющее условию: для любых $x$, $y \in X$ найдется элемент $z \in X$ такой, что $z \geq x$, $z \geq y$.

Непустое множество $\mathcal{D}$ вместе с заданным на нем направлением $\geq$ называется направленным множеством и обозначается $(\mathcal{D}, \geq)$.

Отношение эквивалентности или эквивалентность на $X$ — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Таким образом, $R$ является эквивалентностью точно тогда, когда $R \circ R = I$.

**3.** Особо выделим класс отношений, называемых отображениями.

Отображение — это однозначное отношение. Другими словами, отношение $R$ между множествами $X$ и $Y$ есть отображение точно тогда, когда $xRy$ и $xRz$ влечет

$y = z$, где $x \in X$, $y,\ z \in Y$. Мы не отличаем отображение от его графика. Термины соответствие, преобразование, отображение, оператор имеют для нас одинаковый смысл. Отображение чаще всего обозначается буквой $f$. Если $f$ — отображение и $x \in \mathfrak{D}(f)$, то через $f(x)$ (или $fx$, или $\langle x, f\rangle$) обозначается тот единственный элемент $y \in \mathfrak{R}(f)$, который $xfy$, т. е. который отвечает $x$ при отношении $f$. Точка $f(x)$ называется значением $f$ в точке $x$ или образом $x$ при $f$, а $x$ — прообразом $f(x)$; говорят еще, что $f$ переводит $x$ в $y$. Говорят, что отображение $f$ определено на $X$, если $\mathfrak{D}(f) = X$, если же $\mathfrak{D}(f)$ есть лишь часть множества $X$, то говорят, что $f$ определено в $X$. Если отображение $f$ определено в $X$ и $\mathfrak{R}(f) \subseteq Y$, то говорят, что $f$ действует из $X$ в $Y$; в этом случае пишут $f : X \to Y$.

Мы будем употреблять термин функция для отображения, которое определено в множестве вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел, и функционал для отображения с областью значений в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Отображение $f : X \to Y$ называют инъективным (или инъекцией), если оно взаимно однозначно: $f(x) = f(y)$ влечет $x = y$ для всех $x,\ y \in \mathfrak{D}(f)$. Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным (или сюръекцией), если $\mathfrak{R}(f) = Y$; отображение, определенное на $X$, одновременно инъективное и сюръективное, назывется биективным или биекцией. В последнем случае отображение $f$ называют еще изоморфизмом $X$ в $Y$, а множества $X$ и $Y$ изоморфными. Множество $X$ называется счетным, если оно либо конечно, либо изоморфно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Заметим, что всякое инъективное отображение является изоморфизмом (биекцией) $\mathfrak{D}(f)$ и $\mathfrak{R}(f)$, а обратное отношение $f^{-1}$ — отображением $\mathfrak{R}(f)$ на $\mathfrak{D}(f)$. Изоморфизм часто обозначается символом $\leftrightarrow$.

Отображения — это множества, поэтому два отображения $f$ и $g$ совпадают точно тогда, когда $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(g)$ и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in \mathfrak{D}(f)$. Следовательно, отображение можно задать, указав его область определения и значение в каждой точке области определения. Если $f : X \to Y$ отображение и $\mathfrak{A} \subseteq X$, то $f \cap (\mathfrak{A} \times Y)$ тоже является отображением. Последнее называется сужением отображения $f$ на (множество) $\mathfrak{A}$ и обозначается через $f|\mathfrak{A}$. Отображение $g$ называется продолжением или расширением отображения $f$, если $f \subseteq g$. Другими словами, отображение $g$ есть продолжение отображения $f$ точно тогда, когда $f$ есть сужение $g$ на некоторое подмножество из $\mathfrak{D}(g)$.

Пусть $f : X \to Y$ — отображение и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}(f)$. Положим $f(\mathfrak{A}) = \{y|\ y \in f(x)$ для некоторого $x \in \mathfrak{A}\}$. Множество $f(\mathfrak{A})$ называется образом $\mathfrak{A}$ при $f$. Аналогично, если $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}(f)$, то положим $f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{x|\ x \in \mathfrak{D}(f), f(x) \in \mathfrak{B}\}$*). Множество $f^{-1}(\mathfrak{B})$ называется прообразом $\mathfrak{B}$ при $f$. Для любых множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеем: $f(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = f(\mathfrak{A}) \cup f(\mathfrak{B})$ и $f(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \subseteq f(\mathfrak{A}) \cap f(\mathfrak{B})$. Операция перехода к прообразу удовлетворяет следующим правилам.

**Теорема 1.2.** *Пусть $f : X \to Y$ — отображение, $\mathfrak{A},\ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}(f)$. Тогда*

a) $f^{-1}(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) \setminus f^{-1}(\mathfrak{B})$,

b) $f^{-1}(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) \cup f^{-1}(\mathfrak{B})$,

c) $f^{-1}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) \cap f^{-1}(\mathfrak{B})$.

*)Заметим, что $f^{-1}$ может не быть отображением.

*Правила* b) *и* c) *распространяются на объединения и пересечения любого семейства множеств.*

Композиция двух отображений — снова отображение. Для любого отображения $f$ соответствие $f^{-1} \circ f$ является отношением эквивалентности, а $f \circ f^{-1}$ является отображением-тождеством на $\mathfrak{R}(f)$.

**4.** В заключение параграфа покажем, как с помощью понятия отображения понятие прямого произведения распространяется на любое семейство сомножителей.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество, которое мы будем называть индексным, а его элементы — индексами, и пусть для каждого $a \in \mathfrak{A}$ задано некоторое множество $X_a$. Прямое произведение множеств $X_a$, обозначаемое $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a$, определяется как множество всех отображений $x$, заданных на $\mathfrak{A}$ и таких, что $x(a) \in X_a$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$. При этом принято аргумент записывать как индекс; так что $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a = \{x |\ x$ — отображение, определенное на $\mathfrak{A}$, такое, что $x_a \in X_a$ для каждого $a \in \mathfrak{A}\}$. Множество $X_a$ называется $a$-ым координатным множеством, а точка $x_a$ называется $a$-ой координатой точки $x$ произведения. Отображение $P_a$, сопоставляющее каждой точке $x$ произведения ее $a$-ую координату $x_a$, называется проектором или оператором проектирования, или координатным проектором на $a$-ое координатное множество.

Предположим, что все множества $X_a$ не пусты. Будет ли непустым их прямое произведение? Положительный ответ на этот вопрос следует из леммы Цорна.

**Аксиома выбора.** *Пусть $X_a$ — непустое множество для каждого элемента $a$ из индексного множества $\mathfrak{A}$. Тогда на $\mathfrak{A}$ существует отображение $c$ такое, что $c(a) \in X_a$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$.*

Особый интерес представляет случай одинаковых сомножителей. Пусть каждое координатное множество $X_a$ совпадает с некоторым фиксированным множеством $Y$. Тогда $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a = \prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} Y = \{x |\ x : \mathfrak{A} \to Y$ — отображение$\}$. Другими словами, в этом случае прямое произведение есть в точности множество всех отображений множества $\mathfrak{A}$ в $Y$; это множество часто обозначают через $Y^{\mathfrak{A}}$. Примером такого рода произведения является $n$-мерное евклидово пространство.

## § 2. Топологические пространства

**1.** Пусть $X$ — множество. Топология на $X$ — это непустое семейство $\tau$ подмножеств множества $X$, удовлетворяющее трем условиям:

a) пересечение любых двух элементов из $\tau$ есть элемент из $\tau$;

b) объединение элементов любого подсемейства семейства $\tau$ принадлежит $\tau$;

c) множество $X$ содержится в объединении элементов семейства $\tau$:

$$X \subseteq \bigcup \{\mathcal{W} |\ \mathcal{W} \in \tau\}.$$

Последнее условие, очевидно, равносильно равенству $X = \bigcup\{\mathcal{W}|\ \mathcal{W} \in \tau\}$, а потому (в силу b)) $X \in \tau$.

Множество $X$ называется пространством топологии $\tau$, а пара $(X, \tau)$ — топологическим пространством. Когда нет повода для недоразумений, будем просто писать: "$X$ — топологическое пространство". Элементы топологии $\tau$ называют $\tau$-открытыми или просто открытыми множествами. Примером топологического пространства может служить множество $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) вещественных (комплексных) чисел, обычная топология которого состоит из объединений и конечных пересечений открытых интервалов (открытых кругов).

Пространство топологии всегда открыто. Открыто всегда пустое множество (как объединение элементов пустого подсемейства семейства $\tau$ — см. b)). Топология $\tau$, состоящая лишь из множества $X$ и пустого множества $\emptyset$, называется антидискретной или тривиальной; при этом говорят, что $(X, \tau)$ — антидискретное (топологическое) пространство. Очевидно, антидискретная топология — наименьшая из всех возможных топологий на $X$. Наибольшей же топологией на $X$ является топология, состоящая из всех подмножеств множества $X$. Она называется дискретной, а пространство с дискретной топологией — дискретным. В дискретном пространстве всякое множество открыто.

Любая топология на $X$ содержит антидискретную топологию и содержится в дискретной топологии. Пусть $\tau_1$ и $\tau_2$ — две топологии на $X$. Говорят, что $\tau_1$ слабее (меньше, грубее) $\tau_2$ и что $\tau_2$ сильнее (больше, тоньше) $\tau_1$, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Для заданных на $X$ топологий $\tau_1$ и $\tau_2$ может оказаться, что ни одна из них не сильнее другой; в этом случае говорят, что топологии $\tau_1$ и $\tau_2$ несравнимы.

**2.** Окрестностью ($\tau$-окрестностью) точки $x$ топологического пространства $(X, \tau)$ называется любое подмножество этого пространства, содержащее такой элемент $\mathcal{W}$ топологии $\tau$, которому принадлежит $x$. Например, в случае пространства $\mathbb{C}$ комплексных чисел с обычной топологией окрестностью точки является любое множество из $\mathbb{C}$, содержащее какой-нибудь открытый круг, в котором находится рассматриваемая точка.

**Теорема 2.1.** *Множество $\mathfrak{A} \subseteq X$ открыто точно тогда, когда оно содержит окрестность каждой своей точки.*

Системой окрестностей точки называется семейство всех окрестностей этой точки. Подсемейство $\beta$ топологии $\tau$ называется базой топологии $\tau$, если любой элемент из $\tau$ является объединением элементов из $\beta$. Семейство $\beta_x$ окрестностей точки $x$ называется базой системы окрестностей точки $x$ или базой топологии в $x$, если в каждой окрестности этой точки содержится некоторая окрестность из $\beta_x$. Говорят, что топологическое пространство $(X, \tau)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, если система окрестностей произвольной его точки обладает счетной базой. Если же топология $\tau$ обладает счетной базой, то говорят, что пространство $X$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. Пространства, удовлетворяющие первой, а тем более второй аксиоме счетности, обладают рядом полезных свойств — на некоторых из них мы остановимся ниже.

**3.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ — его подмножество. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества $\mathfrak{A}$, если в любой ее окрестности содержатся точки множества $\mathfrak{A}$, и точкой накопления или предельной точкой множества $\mathfrak{A}$, если в любой ее окрестности содержатся точки множества $\mathfrak{A}$, отличные от $x$. Множество $\mathfrak{A} \subseteq X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Легко видеть, что всякая внутренняя точка множества есть его предельная точка, поэтому, например, в антидискретном пространстве $X$ замкнутыми множествами являются лишь $X$ и $\emptyset$. С другой стороны, в дискретном пространстве замкнуто всякое одноточечное множество $\{x\}$ (т. е. множество, состоящее из единственной точки $x$), где $x \in X$.

Связь между открытыми и замкнутыми множествами устанавливает

**Теорема 2.2.** *Подмножество $\mathfrak{A}$ топологического пространства $(X, \tau)$ открыто точно тогда, когда его дололнение $X \setminus \mathfrak{A}$ замкнуто.*

Замыканием множества $\mathfrak{A}$ топологического пространства $(X, \tau)$ называется объединение этого множества и множества его предельных точек. Легко видеть, что замыкание множества $\mathfrak{A}$, обычно обозначаемое через $\overline{\mathfrak{A}}$, замкнуто, и множество $\mathfrak{A}$ замкнуто точно тогда, когда $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$.

**4.** Внутренность и граница. Точка $x$ подмножества $\mathfrak{A}$ топологического пространства называется внутренней точкой (множества $\mathfrak{A}$), если $\mathfrak{A}$ является ее окрестностью. Множество всех внутренних точек множества $\mathfrak{A}$ называется его внутренностью и обозначается через $\mathfrak{A}^\circ$.

**Теорема 2.3.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — подмножество топологического пространства $X$. Тогда внутренность $\mathfrak{A}^\circ$ множества $\mathfrak{A}$ есть открытое множество, причем наибольшее открытое из всех, содержащихся в $\mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{A}$ открыто точно тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\circ$. Множество всех точек множества $\mathfrak{A}$, не являющихся предельными точками для $X \setminus \mathfrak{A}$, есть в точности $\mathfrak{A}^\circ$. Замыкание $\overline{X \setminus \mathfrak{A}}$ совпадает с $X \setminus \mathfrak{A}^\circ$.*

Граница подмножества $\mathfrak{A}$ топологического пространства $X$ — это множество всех точек $x \in X$, не являющихся внутренними ни для $\mathfrak{A}$, ни для $X \setminus \mathfrak{A}$. Ясно, что граница множества $\mathfrak{A}$ совпадает с границей множества $X \setminus \mathfrak{A}$. Например, в антидискретном пространстве границей любого его непустого подмножества является все $X$. В то же время в дискретном пространстве граница каждого множества пуста. В множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел с обычной топологией границей любого интервала (открытого, замкнутого или полуоткрытого) являются его концы, а границей множества всех рациональных чисел, так же как и границей множества всех иррациональных чисел, является все $\mathbb{R}$.

Соотношения между границей, замыканием и внутренностью дает

**Теорема 2.4.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — подмножество топологического пространства $X$ и $b(\mathfrak{A})$ — граница множества $\mathfrak{A}$. Тогда*

$$b(\mathfrak{A}) = \overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{(X \setminus \mathfrak{A})} = \overline{\mathfrak{A}} \setminus \mathfrak{A}^\circ, \qquad X \setminus b(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\circ \cup (X \setminus \mathfrak{A})^\circ, \qquad \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cup b(\mathfrak{A})$$

*и*

$$\mathfrak{A}^\circ = \mathfrak{A} \setminus b(\mathfrak{A}).$$

Множество замкнуто точно тогда, когда оно содержит свою границу; множество открыто точно тогда, когда оно не имеет общих точек со своей границей.

Множество $\mathfrak{A}$ называется плотным или всюду плотным в топологическом пространстве $X$, если его замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ есть все $X$. Пространство $X$ называют сепарабельным, если в нем есть счетное плотное множество.

Сепарабельное топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, однако второй аксиоме счетности оно может и не удовлетворять. С другой стороны, топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

**5.** Индуцированная топология. Пусть $(X, \tau)$ — топологическое пространство, $Y$ — его подмножество. Индуцированная топология $\alpha$ на множестве $Y$ определяется как семейство пересечений всевозможных элементов из $\tau$ с множеством $Y$. Таким образом, $\mathcal{W} \in \alpha$ точно тогда, когда $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap Y$ для некоторого $\mathcal{V} \in \tau$. Топологическое пространство $(Y, \alpha)$ называется подпространством пространства $(X, \tau)$.

Отметим, что если $(Y, \alpha)$ — подпространство пространства $(X, \tau)$, а $(Z, \beta)$ — подпространство пространства $(Y, \alpha)$, то $(Z, \beta)$ — подпространство пространства $(X, \tau)$.

**Теорема 2.5.** *Пусть $(X, \tau)$ — топологическое пространство, $(Y, \alpha)$ — его подпространство и $\mathfrak{A}$ — множество в $Y$. Тогда:*

a) *множество $\mathfrak{A}$ $\alpha$-замкнуто точно тогда, когда оно является пересечением множества $Y$ с некоторым $\tau$-замкнутым множеством;*

b) *точка $y \in Y$ является $\alpha$-предельной точкой для множества $\mathfrak{A}$ точно тогда, когда она является $\tau$-предельной для $\mathfrak{A}$;*

c) *$\alpha$-замыкание множества $\mathfrak{A}$ есть пересечение множества $Y$ и $\tau$-замыкания множества $\mathfrak{A}$.*

## § 3. Сходимость. Направленности

**1.** Топологию пространства можно описать в терминах сходимости. Пусть $(D, \geq)$ — направленное множество (см. § 1), $X$ — топологическое пространство. Направленность в $X$ — это отображение $S : D \to X$, заданное на всем $D$. Значение направленности $S$ в точке $d \in D$ обозначают часто через $S_d$, а саму направленность — через $\{S_d | \ d \in D\}$.

Говорят, что направленность $S$ находится в множестве $\mathfrak{A}$ с некоторого момента, если существует $m \in D$, для которого из $d \in D$ и $d \geq m$ следует, что $S_d \in \mathfrak{A}$. Направленность $S$ в пространстве $(X, \tau)$ сходится к точке $s$, если она с некоторого момента находится в произвольной $\tau$-окрестности точки $s$. Например, если $X$ — дискретное пространство, то направленность $S$ сходится к точке $s$ точно тогда, когда с некоторого момента она находится во множестве $\{s\}$, т. е. начиная с некоторого момента все значения направленности совпадают с $s$. Напротив, в антидискретном пространстве любая направленность сходится к каждой точке этого пространства. Таким образом, направленность может сходится ко многим различным точкам одновременно.

В терминах сходимости понятия предельной точки и замыкания множества характеризует

**Теорема 3.1.** *Пусть $X$ — топологическое пространство. Тогда:*

a) *Точка $s$ является предельной точкой множества $\mathfrak{A} \subseteq X$ точно тогда, когда в $\mathfrak{A} \setminus \{s\}$ есть направленность, сходящаяся к $s$.*

b) *Точка $s$ принадлежит замыканию множества $\mathfrak{A}$ ($s \in \overline{\mathfrak{A}}$) точно тогда, когда в $\mathfrak{A}$ есть направленность, сходящаяся к $s$.*

c) *Множество $\mathfrak{A}$ замкнуто в $X$ ($\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$) точно тогда, когда никакая направленность, содержащаяся в $\mathfrak{A}$, не сходится ни к какой точке из $X \setminus \mathfrak{A}$.*

Направленность $\{T_d | \ d \in D\}$ называется поднаправленностью направленности $\{S_e | \ e \in E\}$ тогда, когда существует отображение $M : D \to E$ такое, что:

a) $T = S \circ M$ или, что равносильно, $T_i = S_{M_i}$ для каждого $i \in D$;

b) для каждого $e \in E$ найдется $d \in D$ такое, что если $j \geq d$, то $M_j \geq e$.

**Теорема 3.2.** *Точка $s$ топологического пространства является предельной точкой некоторой направленности точно тогда, когда некоторая ее поднаправленность сходится к $s$.*

**2.** Важным является класс топологических пространств, сходимость в которых описывается в терминах последовательностей.

Последовательность — это отображение натурального ряда, т. е. последовательность — это направленность, для которой в качестве направленного множества $D$ выступает линейно упорядоченный натуральный ряд $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Подпоследовательность — это поднаправленность, для которой $M$ есть отображение $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ (т. е. $D = E = \mathbb{N}$.) Другими словами, подпоследовательность — это бесконечная часть последовательности. Отметим, что последовательность может иметь поднаправленности, не являющиеся подпоследовательностями.

В топологических пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, сходимость можно полностью описать в терминах последовательностей.

**Теорема 3.3.** *Пусть $X$ — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда:*

a) *Точка $s$ является предельной для множества $\mathfrak{A}$ точно тогда, когда существует последовательность в $\mathfrak{A} \setminus \{s\}$, сходящаяся к $s$.*

b) *Множество $\mathfrak{A}$ открыто точно тогда, когда каждая последовательность, сходящаяся к некоторой точке из $\mathfrak{A}$, находится в $\mathfrak{A}$ с некоторого момента.*

c) *Если $s$ — предельная точка некоторой последовательности, то в последней есть подпоследовательность, сходящаяся к $s$.*

**3.** Вернемся к общему случаю топологических пространств. Точка $s$ называется предельной точкой подмножества $\mathfrak{A}$ топологического пространства, если в $\mathfrak{A} \setminus \{s\}$ есть последовательность, сходящаяся к $s$. Множество $\mathfrak{A}$ называется секвенциально замкнутым, если оно содержит все свои $\omega$-предельные точки. Всякое замкнутое множество является секвенциально замкнутым. Однако существуют незамкнутые, но секвенциально замкнутые множества.

**4.** Весьма полезно свойство топологического пространства, выражаемое иногда термином отделимость — это возможность отделять различные точки, а также точки и множества. В связи с этим приведем одно определение.

Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если у любых двух различных его точек есть непересекающиеся окрестности. В терминах направленностей хаусдорфовость пространства характеризует

**Теорема 3.4.** *Топологическое пространство является хаусдорфовым точно тогда, когда никакая направленность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.*

**5.** Топологические произведения пространств. На прямом произведении (см. § 1) семейства топологических пространств стандартным способом определяется топология. Рассмотрим сначала случай двух топологических пространств $(X, \alpha)$ и $(Y, \beta)$. В качестве базы топологии $\tau$ в $X \times Y$ возьмем семейство всех прямых произведений вида $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}$ — $\alpha$-открытое множество в $X$, $\mathcal{V}$ — $\beta$-открытое множество в $Y$. Так построенная топология $\tau$ называется топологией произведения на $X \times Y$. Подмножество $\mathcal{W}$ множества $X \times Y$ открыто в топологии произведения точно тогда, когда для каждого элемента $(x, y) \in \mathcal{W}$ найдутся открытые окрестности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ точек $x$ и $y$ соответственно такие, что $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Пространство $X \times Y$ с топологией произведения называется топологическим произведением пространств $X$ и $Y$. Данное определение топологического произведения легко распространяется на случай любого конечного множества пространств.

Перейдем к общему случаю произвольного семейства топологических пространств. Пусть $\mathfrak{A} = \{a\}$ — индексное множество и пусть каждому $a \in \mathfrak{A}$ отвечает топологическое пространство $(X_a, \tau_a)$. В § 1 прямое произведение $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a$ множеств $X_a$ определено как множество всех таких отображений $x$ на $\mathfrak{A}$, что $x_a \in X_a$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$. В качестве базы топологии произведения $\tau$ на $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a$ возьмем семейство всех конечных пересечений множеств вида $p^{-1}(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — произвольное $\tau_a$-открытое множество пространства $X_a$, $P_a$ — проектор на $X_a$. Итак, $\left(\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a, \tau\right)$ — топологическое произведение пространств $X_a$.

На вопрос о том, какие свойства сомножителей наследует их топологическое произведение, отвечают две следующие теоремы.

**Теорема 3.5.** *Топологическое произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым. Каждый координатный проектор отображает всякое отрытое множество снова на открытое.*

**Теорема 3.6.** *Топологическое произведение пространств $X_a$, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, само удовлетворяет первой аксиоме счетности точно тогда, когда все, за исключением счетного множества, пространства $X_a$ антидискретны.*

На других свойствах произведения мы остановимся ниже.

**6.** Непрерывные отображения. Отображение $f$ топологического пространства $(X, \alpha)$ в топологическое пространство $(Y, \beta)$ называется непрерывным, если прообраз каждого $\beta$-открытого множества в $Y$ является $\alpha$-открытым в $X$. Легко проверяется, что композиция непрерывных отображений есть непрерывное отображение. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и $\mathfrak{A} \subseteq X$. Тогда сужение

$f|\mathfrak{A}$ тоже непрерывно. Отображение $f$, для которого $f|\mathfrak{A}$ непрерывно, называется непрерывным на множестве $\mathfrak{A}$.

Непрерывность отображения характеризует

**Теорема 3.7.** *Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства, $f : X \to Y$ — отображение. Следующие утверждения равносильны:*

a) *Отображение $f$ непрерывно.*

b) *Прообраз каждого замкнутого множества замкнут.*

c) *Для любой точки $x \in X$ прообраз произвольной окрестности точки $f(x)$ есть окрестность точки $x$.*

d) *Для каждой точки $x \in X$ и любой окрестности $\mathcal{U}$ точки $f(x)$ существует окрестность точки $x$ такая, что $f[\mathcal{V}] \subseteq \mathcal{U}$.*

e) *Для любой направленности $S$ в $X$, сходящейся к точке $s$, композиция $f \circ S$ сходится к точке $f(s)$.*

f) $f[\overline{\mathfrak{A}}] \subseteq \overline{f[\mathfrak{A}]}$ *для любого $\mathfrak{A} \subseteq X$.*

g) $\overline{f^{-1}[\mathfrak{B}]} \subseteq f^{-1}[\overline{\mathfrak{B}}]$ *для любого $\mathfrak{B} \subseteq Y$.*

Отображение $f$ топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ называется непрерывным в точке $x \in X$, если прообраз каждой окрестности точки $f(x)$ есть окрестность точки $x$. Очевидно, отображение $f$ непрерывно на множестве точно тогда, когда оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Приведем одно полезное свойство непрерывного отображения, область значений которого принадлежит некоторому топологическому произведению пространств.

**Теорема 3.8.** *Отображение $f$ топологического пространства в пространство произведения $\prod\limits_{a \in \mathfrak{A}} X_a$ непрерывно точно тогда, когда непрерывна каждая из композиций $P_a \circ f$, где $a \in \mathfrak{A}$.*

**7.** Гомеоморфизм или топологический изоморфизм топологических пространств $(X, \alpha)$ и $(Y, \beta)$ — это изоморфизм (см. § 1) множеств $X$ и $Y$, непрерывный вместе с обратным $f^{-1}$. Если между пространствами существует гомеоморфизм, то они называются гомеоморфными. Например, все изоморфные антидискретные пространства гомеоморфны. Тождественное отображение $I$ есть гомеоморфизм; обратное к гомеоморфизму отображение тоже является гомеоморфизмом. Ясно также, что композиция любых двух гомеоморфизмов — снова гомеоморфизм. Свойство топологического пространства, принадлежащее каждому пространству, гомеоморфному данному, называется топологическим инвариантом. Каждое свойство, которое определяется в терминах элементов пространства и его топологии, оказывается топологическим инвариантом. Таковыми, например, являются свойства пространства удовлетворять первой или второй аксиоме счетности, хаусдорфовость.

**8.** Компактность. Семейство $\gamma$ подмножеств топологического пространства называется покрытием множества $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} \subseteq \bigcup\{\mathcal{U} | \ \mathcal{U} \in \gamma\}$. Покрытие $\gamma$ называется открытым, если каждое множество $\mathcal{U} \in \gamma$ открыто. Подпокрытие покрытия

$\gamma$ — это такое его подсемейство, которое само является покрытием. Топологическое пространство называется компактным или компактом, если из каждого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Про подмножество $\mathfrak{A}$ топологического пространства говорят, что оно компактно, если оно компактно в индуцированной топологии (т. е. является компактом). Множество, замыкание которого компактно, называют предкомпактным (или относительно компактным).

**Теорема 3.9.** *Топологическое пространство $X$ компактно точно тогда, когда каждая направленность в $X$ имеет предельную точку.*

Топологическое пространство $X$ называется секвенциально компактным, если из всякой его последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $s \in X$. Для пространства $X$ с первой аксиомой счетности секвенциальная компактность эквивалентна тому, что каждое счетное открытое покрытие пространства содержат конечное подпокрытие.

**9.** Компактность и отделимость. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Обратное утверждение неверно: любое непустое собственное подмножество антидискретного пространства компактно, но не замкнуто. В случае хаусдорфовых пространств такая ситуация исключена.

**Теорема 3.10.** *Если $\mathfrak{A}$ — компактное подмножество хаусдорфова пространства $X$ и $x \in X \backslash \mathfrak{A}$, то у точки $x$ и множества $\mathfrak{A}$ существуют непересекающиеся окрестности.*

Следовательно, компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

**Теорема 3.11.** *У любых непересекающихся компактных подмножеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ хаусдорфова пространства существуют непересекающиеся окрестности.*

Рассмотрим отображения компактных пространств.

**Теорема 3.12.** *Пусть $f$ — непрерывное отображение компактного топологического пространства $X$ на топологическое пространство $Y$. Тогда пространство $Y$ компактно; если оно хаусдорфово, а $f$ — изоморфизм, то $f$ — гомеоморфизм.*

Следовательно, непрерывный на компактном множестве $\mathfrak{A}$ вещественный функционал ограничен и принимает на $\mathfrak{A}$ наибольшее и наименьшее значения.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим произведение компактных пространств.

**Теорема 3.13.** (А.Н. Тихонов) *Топологическое произведение компактных топологических пространств компактно.*

## § 4. Метрические пространства

**1.** Важный класс топологических пространств представляют пространства, топология которых определяется через расстояние. Метрика на множестве $X$ — это вещественный неотрицательный функционал $d$, определенный на прямом произведении $X \times X$ и удовлетворяющий при любых $x,\ y,\ z \in X$ следующим условиям (аксиомам метрики):

a) $d(x, y) = d(y, x)$;

b) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (неравенство треугольника);

c) $d(x, y) = 0$ точно тогда, когда $x = y$.

Метрическим пространством называется пара $(X, d)$, где $X$ — множество, $d$ — метрика на нем. Для $x, y \in X$ число $d(x, y)$ называют расстоянием между $x$ и $y$ (или $d$-расстоянием). Пусть $r > 0$. Множество $\{y| \ d(x, y) < r\}$ называется открытым $r$-шаром с центром в точке $x$ (около $x$); множество $\{y| \ d(x, y) \leq r\}$ — замкнутым $r$-шаром около $x$. Семейство всех открытых шаров есть база некоторой топологии $\tau$ на $X$, которую называют метрической топологией, или топологией, индуцированной на $X$ заданной метрикой. При этом каждый замкнутый $r$-шар замкнут в $(X, \tau)$. Например, пусть $X = \mathbb{C}$, $d(x, y) = |x - y|$; тогда $d$ есть метрика на $\mathbb{C}$ — она называется обычной метрикой комплексных чисел. Топология, индуцированная обычной метрикой, совпадает с обычной топологией комплексных чисел. Пусть теперь $X$ — некоторое множество. Положим $d(x, y) = 0$, если $x = y$ и $d(x, y) = 1$ в противном случае. Тогда $d$ — метрика на $X$, открытый $r$-шар около произвольной точки $x$ совпадает с $\{x\}$ при $r \leq 1$ и совпадает с $X$ при $r > 1$. Значит, порожденное $d$ топологическое пространство дискретно. Замкнутый $r$-шар около произвольной точки $x$ есть $\{x\}$ при $r < 1$ и $X$ при $r \geq 1$. Таким образом, открытый 1-шар около $x$ есть $\{x\}$, а его замыкание есть все $X$.

**2.** Метрические пространства обладают свойствами отделимости, определенными в § 3. Расстоянием от точки $x$ до множества $\mathfrak{A}$ наэывается $\inf\limits_{a \in \mathfrak{A}} d(x, a)$.

**Теорема 4.1.** *Замыкание множества $\mathfrak{A}$ в метрическом пространстве $X$ есть множество всех точек пространства, лежащих от $\mathfrak{A}$ на нулевом расстоянии.*

Следовательно, для каждого $x \in X$ одноточечное множество замкнуто.

**Теорема 4.2.** *Каждое метрическое пространство нормально *).*

Из теорем 4.1 и 4.2 следует

**Теорема 4.3.** *Каждое метрическое пространство хаусдорфово.*

**Теорема 4.4.** *Каждое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Вторая аксиома счетности в метрическом пространстве выполняется точно тогда, когда оно сепарабельно.*

Из теорем 4.4 и 3.3 следует, что сходимость в метрическом пространстве можно полностью описать в терминах последовательностей.

**Теорема 4.5.** *Последовательность $\{s_n| \ n \in \mathbb{N}\}$ в метрическом пространстве $(X, d)$ сходится к точке $s$ точно тогда, когда последовательность $\{d(s_n, s)| \ n \in \mathbb{N}\}$ сходится к нулю.*

**3.** Рассмотрим вопрос о том, является ли топологическое произведение метрических пространств снова метрическим пространством, т. е. можно ли на произведении метрических пространств задать метрику так, чтобы индуцированная ею топология совпала с топологией произведения. Как следует из теорем 4.4 и 3.6, в случае произвольного семейства сомножителей ответ на этот вопрос отрицателен. В случае же счетного семейства справедлива

*) Т. е. каждые два непересекающиеся замкнутые множества содержатся в непересекающихся открытых множествах.

**Теорема 4.6.** *Пусть* $\{(X_n, d_n) | \ n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность метрических пространств. Для* $x = \{x_n | \ x_n \in X_n, \ n \in \mathbb{N}\}$, $y = \{y_n | \ y_n \in X_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *положим* $d(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, d_n(x_n, y_n)\}$. *Функционал* $d(x, y)$ *является метрикой на топологическом произведении пространств* $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *причем соответствующая метрическая топология совпадает с топологией произведения.*

**4.** Теперь зададимся общим вопросом: какими свойствами должна обладать топология пространства $(X, \tau)$, чтобы на множестве $X$ можно было задать метрику, которая бы индуцировала на $X$ топологию $\tau$? Если такая метрика существует, то говорят, что она метризует рассматриваемое топологическое пространство, которое в этом случае называется метризуемым. Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, нам нужно определить некоторые понятия. Семейство $\gamma$ подмножеств топологического пространства называется локально конечным, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов этого семейства. Семейство $\gamma$ называется дискретным, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся не более чем с одним элементом семейства $\gamma$. Очевидно, любое дискретное семейство локально конечно. Наконец, семейство $\gamma$ называют $\sigma$-локально конечным ($\sigma$-дискретным), если оно является объединением счетного числа локально конечных (дискретных) своих подсемейств.

**Теорема 4.7.** (метризационная) *Следующие три ограничения на топологическое пространство равносильны:*

a) *Пространство метризуемо.*

b) *Все одноточечные подмножества пространства замкнуты, пространство регулярно и обладает* $\sigma$*-локально конечной базой.*

c) *Все одноточечные подмножества пространства замкнуты, оно регулярно и обладает* $\sigma$*-дискретной базой.*

**5.** Полнота. Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство. Последовательность $\{s_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ называется последовательностью Коши или фундаментальной, если $d(s_n, s_m) \to 0$ при $n, \ m \to \infty$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l \in \mathbb{N}$ такое, что $d(s_n, s_m) < \varepsilon$ для всех $n, \ m > l$. Метрическое пространство называется полным, если в нем каждая последовательность Коши сходится к некоторой точке (или, что то же, имеет предел).

**Теорема 4.8.** *В метрическом пространстве каждая последовательность, сходящаяся относительно метрической топологии, есть последовательность Коши. Если последовательность Коши имеет предельную точку, то она сходится к этой точке.*

**Теорема 4.9.** *Замкнутое подпространство полного метрического пространства полно, полное подпространство метрического пространства замкнуто.*

По теореме 4.6 счетное топологическое произведение метрических пространств метризуемо. Рассмотрим вопрос о его полноте.

**Теорема 4.10.** *Метрическое пространство, являющееся произведением счетного числа метрических пространств, полно точно тогда, когда каждое координатное пространство полно.*

Последовательность в произведении фундаментальна точно тогда, когда каждая ее проекция в координатное пространство фундаментальна.

**6.** Компактность, монтелевость. В метрическом пространстве компактность некоторого множества равносильна его секвенциальной компактности. Именно, справедлива

**Теорема 4.11.** *Подмножество $\mathfrak{A}$ метрического пространства компактно точно тогда, когда из каждой его последовательности можно выделить сходящуюся к некоторой точке из $\mathfrak{A}$ подпоследовательность.*

Приведем другой критерий компактности подмножества метрического пространства. Для этого нам понадобится следующее определение:

Множество $\mathfrak{M}$ метрического пространства $(X, d)$ называется $\varepsilon$-сетью для множества $\mathfrak{A}$ того же пространства, если для любой точки $x \in \mathfrak{A}$ найдется точка $y \in \mathfrak{M}$ такая, что $d(x, y) < \varepsilon$.

**Теорема 4.12.** (Хаусдорф) *Для компактности множества $\mathfrak{A}$ метрического пространства $X$ необходимо, а в случае полноты $X$ и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала конечная $\varepsilon$-сеть для множества $\mathfrak{A}$.*

Подмножество $\mathfrak{A}$ метрического пространства $X$ называется ограниченным, если найдутся точка $x \in X$ и число $r > 0$ такие, что $\mathfrak{A}$ лежит в $r$-шаре около $x$. Из теоремы Хаусдорфа следует такое предложение.

Всякое компактное подмножество метрического пространства ограничено. Следовательно, по теореме 1.1 ограничено всякое предкомпактное подмножество метрического пространства. В частности, ограничена всякая сходящаяся последовательность. Метрическое пространство $X$ называется монтелевым, если каждое его ограниченное подмножество предкомпактно. Простым примером монтелева пространства является пространство $\mathbb{C}$ комплексных чисел с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Также монтелевым является пространство $\mathbb{C}^n$ — топологическое произведение $n$ пространств $\mathbb{C}$.

## § 5. Пространства отображений

**1.** Рассмотрим пространства, элементами которых являются отображения некоторого множества $X$ в фиксированное топологическое пространство $Y$, и некоторые специальные топологии на таких пространствах. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство отображений $X$ в $Y$. Как следует из определения прямого произведения (см. § 1), $\mathcal{F}$ является подмножеством пространства $Y^X = \prod\limits_{x \in X} Y$. Топология, индуцированная на $\mathcal{F}$ топологией прямого произведения, называется топологией поточечной сходимости (покоординатной сходимости, простой сходимости), или просто поточечной топологией. Направленность $\{f_d |\ d \in D\}$ сходится к $f$ точно тогда, когда $\{f_d(x) |\ d \in D\}$ сходится к $f(x)$ при любом $x \in X$. Если пространство $Y$ хаусдорфово или регулярно, то пространство $\mathcal{F}$ с поточечной топологией обладает теми же свойствами. Положим $\mathcal{F}(x) = \{f(x) |\ f \in \mathcal{F}\}$. Из теоремы 3.13 (А.Н. Тихонова) следует

**Теорема 5.1.** *Семейство $\mathcal{F}$ отображений множества $X$ в хаусдорфово пространство $Y$ компактно относительно поточечной топологии точно тогда, когда выполнены условия:*

a) *семейство $\mathcal{F}$ замкнуто в $Y^X$ относительно топологии прямого произведения;*

b) *множество $\mathcal{F}(x)$ предкомпактно в $Y$ для каждого $x \in X$.*

Если в предыдущей теореме отбросить условие a), оставив лишь одно условие b), то получим критерий предкомпактности семейства $\mathcal{F}$ в поточечной топологии.

**2.** Определение поточечной топологии не зависит от топологии множества $X$. По существу в этом определении $X$ играет роль индексного множества. Более тонкие топологии на $\mathcal{F}$ можно строить, используя топологию $X$. Итак, пусть $X$ — топологическое, а $(Y, \rho)$ — метрическое пространства. Говорят, что направленность $\{f_d |\ d \in D\}$ отображений $X$ в $Y$ сходится равномерно на множестве $\mathfrak{A}$ пространства $X$ к отображению $f : X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l \in D$ такое, что из $d \in D$ и $d \geq l$ следует $\rho(f_d(a), f(a)) < \varepsilon$ сразу для всех $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим через $C(X, Y)$ семейство всех непрерывных отображений $X$ в $Y$. Топология компактной сходимости (равномерной сходимости на компактах) определяется следующим образом: направленность $\{f_d |\ d \in D\}$ этого семейства сходится к $f \in C(X, Y)$, если она сходится равномерно на каждом компакте $\mathfrak{A} \subseteq X$.

Семейство $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ называется равностепенно непрерывным в точке $x$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\mathcal{U}$ точки $x$ такая, что $\rho(f(y), f(z)) < \varepsilon$ для всех $y,\ z \in \mathcal{U}$ и всех $f \in \mathcal{F}$.

**Теорема 5.2.** *На каждом равностепенно непрерывном семействе топология поточечной сходимости совпадает с топологией компактной сходимости.*

Из теорем 5.1 и 5.2 непосредственно следует

**Теорема 5.3.** *Для предкомпактности семейства $\mathcal{F} \in C(X, Y)$ в топологии компактной сходимости достаточно выполнения следующих двух условий:*

a) *семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно;*

b) *множество $\mathcal{F}(x)$ предкомпактно в $Y$ для каждого $x \in X$.*

Ниже в гл. III используется следующая

**Теорема 5.4.** *Пусть $\{F_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(X, Y)$ и для каждого $x'$ из плотного в $X$ множества $X'$ последовательность $\{F_n x |\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится. Тогда последовательность $\{F_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится в топологии компактной сходимости к некоторому $F \in C(X, Y)$.*

**3.** Пусть $X = \mathcal{G}$ — компактное топологическое пространство, $f \in C(\mathcal{G}, Y)$. Функционал $\rho(f(x), \theta)$ непрерывен на $\mathcal{G}$ при любом фиксированном $\theta \in Y$. По теореме 3.12 этот функционал ограничен: $\rho(f(x), \theta) \leq c_f < \infty$. Это позволяет ввести в $C(\mathcal{G}, Y)$ метрику $\widetilde{\rho}$ по формуле:

$$\widetilde{\rho}(f, g) = \sup_{x \in \mathcal{G}} \rho(f(x), g(x)).$$

Метрика $\widetilde{\rho}$ называется равномерной метрикой.

Семейство $\mathcal{F} \in C(\mathcal{G}, Y)$ будем называть равномерно ограниченным, если оно ограничено как подмножество метрического пространства $(C(\mathcal{G}, Y), \widetilde{\rho})$: найдутся $g \in C(\mathcal{G}, Y)$ и $r > 0$ такие, что $\sup\limits_{x \in \mathcal{G}} \rho(f(x), g(x)) \leq r < \infty$. Пусть теперь $Y = \mathfrak{M}$ — монтелево метрическое пространство. Тогда равномерная ограниченность семейства $\mathcal{F}$ из $C(\mathcal{G}, \mathfrak{M})$ эквивалентна его предкомпактности в поточечной топологии. Если семейство $\mathcal{F}$ к тому же равностепенно непрерывно, то по теореме 5.2 поточечная топология совпадает на $\mathcal{F}$ с топологией компактной сходимости, а последняя, как легко видеть, — с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{\rho}$. Отсюда на основании теоремы 5.1 получаем такой критерий предкомпактности семейства $\mathcal{F}$ в метрическом пространстве $(C(\mathcal{G}, \mathfrak{M}), \widetilde{\rho})$ (или, что то же, в пространстве $C(\mathcal{G}, \mathfrak{M})$ с топологией компактной сходимости):

**Теорема 5.5.** *Подмножество $\mathcal{F}$ пространства $C(\mathcal{G}, \mathfrak{M})$ предкомпактно в топологии равномерной метрики точно тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Теоремы такого типа (о предкомпактности семейств непрерывных отображений) называют обычно теоремами Асколи, иногда — Арцела – Асколи. Последнее название объясняется тем, что в случае $\mathcal{G} = [0, 1]$ и $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ с обычной метрикой вещественных чисел теорема 5.4 принадлежит Арцела.

Из теоремы 5.5 вытекает такое следствие:

Равностепенное непрерывное семейство отображений компактного пространства в монтелево метрическое пространство само есть монтелево метрические пространство относительно равномерной метрики.

## § 6. Линейные топологические пространства

**1.** Линейные пространства. Пусть $X$ — некоторое множество, $\mathfrak{K}$ — поле вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел. Множество $X$ называется линейным (или векторным) пространством, если заданы две операции: сложение элементов из $X$ и умножение их на скаляры, — удовлетворяющие следующим условиям ($x,\ y,\ z \in X$; $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{K}$):

I. Сложение.

1) Коммутативность: $x + y = y + x$.

2) Ассоциативность: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3) Существует единственный элемент $0 \in X$ такой, что $x + 0 = x$.

4) Для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Вместо $x + (-y)$ будем писать $x - y$. Элемент 0 называется нулевым элементом или нулем пространства $X$, элемент $-x$ называется противоположным $x$.

II. Умножение на скаляры.

1) Ассоциативность умножения: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

2) Дистрибутивность: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

3) $1 \cdot x = x$.

Условия I – II называются аксиомами линейного пространства. Линейное пространство называется вещественным или комплексным в зависимости от того, из какого поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ берутся скаляры. Например, множество $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) относительно обычных операций сложения и умножения есть вещественное (комплексное) линейное пространство. Здесь в качестве поля $\mathfrak{K}$ выступает само $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Из аксиом линейного пространства следуют также соотношения:

1. $0 \cdot x = 0$ (здесь слева символом 0 обозначен числовой нуль, а справа — нулевой вектор линейного пространства);

2. $(-1)x = -x$;

3. $\alpha \cdot 0 = 0$;

4. если $\alpha x = \beta x$ и $x \neq 0$, то $\alpha = \beta$; если $\alpha x = \alpha y$ и $\alpha \neq 0$, то $x = y$.

Будем говорить, что два линейных пространства $X$ и $X'$ линейно изоморфны, если между ними существует изоморфизм (см. § 1), сохраняющий алгебраические операции: если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$ и $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$.

**2.** Множество $\mathcal{E}$ векторов линейного пространства $X$ называется линейно независимым, если для любого его конечного подмножества $x_1, \ldots, x_n$ из равенства $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. В противном случае множество $\mathcal{E}$ называют линейно зависимым. В линейно зависимом множестве существует элемент, являющийся линейной комбинацией конечного числа отличных от него элементов из $\mathcal{E}$.

Линейным базисом или базисом Хамеля линейного пространства $X$ называется такое его линейно независимое подмножество $\mathcal{E}$, что для любого $x \in X$ найдется конечное подмножество $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathcal{E}$ такое, что $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{K}$. Если базис содержит $n$ элементов, то пространство $X$ называется $n$-мерным.

Непустое множество $\mathcal{L}$ векторов линейного пространства называется линеалом, если вместе с векторами $x_1, \ldots, x_n$ оно содержит и любую их линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Очевидно, всякий линеал содержит нулевой вектор.

**3.** Прямая сумма. Пусть $X$ — линейное пространство. $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$ — конечное семейство его линеалов. Если каждый вектор $x \in X$ однозначно представим в виде

$$x = x_1 + \ldots + x_m, \qquad x_i \in \mathcal{L}_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то говорят, что $X$ есть прямая сумма ($X$ разложено в прямую сумму) линеалов $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$. Будем в этом случае писать $X = \mathcal{L}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_m$, или $X = \sum\limits_{i=1}^{m} \dot{+} \mathcal{L}_i$. Легко видеть, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i = \{0\}$ и прямая сумма линейно изоморфна прямому произведению $\prod_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i$, если линейные операции в последнем задать покоординатно: для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ положить $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$, $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m)$, где $\alpha \in \mathfrak{K}$. Аналогично, прямая сумма линейных пространств $X_1, \ldots, X_m$ вводится как прямое произведение $\prod_{i=1}^{m} X_i$ с покоординатно заданными линейными операциями. Примером такой суммы может служить $n$-мерное пространство $\mathbb{C}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, так что $\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^{n} \dot{+} \mathbb{C}$.

**4.** Линейные топологические пространства. Если на линейном пространстве $X$ задана топология $\tau$, то для эффективного использования как алгебраической, так и топологической структур естественно предположить, чтобы линейные операции были непрерывными в топологии $\tau$. Если последнее условие выполнено, то $X$ называется линейным топологическим пространством (ЛТП).

Сформулируем некоторые определения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для $\lambda \in \mathfrak{K}$ и $\mathcal{U} \subseteq X$ через $\lambda\mathcal{U}$ обозначим множество $\{\lambda u | \ u \in \mathcal{U}\}$. Говорят, что множество $\mathcal{U} \subseteq X$ поглощает множество $\mathfrak{M} \subseteq X$, если найдется такое $\lambda_0 \in \mathfrak{K}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \lambda\mathcal{U}$ для всех $\lambda : \ |\lambda| \geq |\lambda_0|$.

Множество $\mathfrak{M} \subseteq X$ называется ограниченным, если его поглощает любая окрестность нуля.

Отображение $f$ топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ называется собственным, если прообраз $f^{-1}[\mathfrak{A}]$ всякого предкомпактного множества $\mathfrak{A} \subseteq Y$ есть предкомпактное множество в $X$. Отображение $g$ линейного топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ называется компактным, если образ $f(\mathfrak{A})$ всякого ограниченного в $X$ множества $\mathfrak{A}$ предкомпактен в $Y$. Компактное и непрерывное отображение называется вполне непрерывным.

Вернемся к вопросу о метризации топологии. Для случая ЛТП метризационная теорема § 2 допускает такое уточнение.

**Теорема 6.1.** *Хаусдорфово ЛТП метризуемо точно тогда, когда оно обладает счетной базой окрестностей нуля.*

Говорят, что ЛТП локально ограничено, если в нем есть ограниченная окрестность нуля.

**Теорема 6.2.** *Всякое локально ограниченное хаусдорфово ЛТП метризуемо.*

## § 7. Нормированные пространства

**1.** В линейном топологическом пространстве линейная структура согласована с топологией. Весьма выпукло такое согласование предстает в случае, когда топология $\tau$ индуцирована нормой. Норма в $X$ — это вещественный функционал, обозначаемый обычно через $\| \cdot \|$ и удовлетворяющий следующим условиям ($x, \ y \in X$, $\alpha \in \mathfrak{K}$):

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ точно тогда, когда $x = 0$;

2) неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.

Линейное пространство $X$ с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется нормированным пространством и обозначается $(X, \|\cdot\|)$. В нем можно ввести метрику по формуле: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Эта метрика индуцирует в $X$ топологию, называемую топологией нормы; сходимость относительно топологии называется сходимостью по норме. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на пространстве $X$ называются эквивалентными, если найдутся числа $c_1,\ c_2 > 0$ такие, что $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ для всех $x \in X$. Если нормированное пространство полно в смысле сходимости по норме, то его называют банаховым пространством.

**Примеры.** 7.1. $n$-мерное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ является банаховым пространством относительно любой из следующих норм:

$$(1)\ \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad (2)\ \ \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \qquad (3)\ \ \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Норму (2) называют чебышевской.

7.2. $m$-пространство всех ограниченных вещественных или комплексных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$ — бесконечномерное банахово пространство.

7.3. $L_p[a, b]$ — пространство всех абсолютно интегрируемых с $p$-ой степенью $(p \geq 1)$ на отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ комплексных функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$ — бесконечномерное банахово пространство.

7.4. Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство функций $x(t)$, определенных на отрезке $[a, b]$, непрерывных на нем вместе с производными до $k$-го порядка включительно. Введем в этом пространстве норму, полагая $\|x\| = \max\left\{\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|, \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|, \ldots, \max\limits_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|\right\}$. Получим банахово пространство, обозначаемое через $C^k[a, b]$.

**2.** Нормированное пространство является метрическим, поэтому для него справедливы все предложения, установленные для метрических пространств. Для удобства приведем некоторые из них.

Все одноточечные подмножества нормированного пространства замкнуты, оно нормально, а потому хаусдорфово.

Нормированное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Второй аксиоме счетности нормированное пространство удовлетворяет в точности тогда, когда оно сепарабельно.

Топология нормы допускает описанные в терминах последовательностей, последовательность $\{s_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится по норме к точке $s$ точно тогда, когда $\|s_n - s\| \to 0$, $n \to \infty$.

Всякое нормированное пространство $X$ изометрически изоморфно плотному подмножеству некоторого банахова пространства $\mathfrak{B}$ (являющегося пополнением $X$).

Понятие ограниченности множества в нормированном пространстве $X$ переформулируется в эквивалентной форме следующим образом: множество $\mathfrak{A}$ ограничено точно тогда, когда существует такое число $M > 0$, что $\|a\| \leq M$ для всех $a \in \mathfrak{A}$. Отрезком в $X$, соединяющим точки $x_1$ и $x_2$, называется множество элементов вида $y = (1-t)x_1 + tx_2$, $0 \leq t \leq 1$. Множество $\mathfrak{A} \subseteq X$ называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки из $\mathfrak{A}$, целиком лежит в $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что в нормированном пространстве всякий $r$-шар (открытый или замкнутый) около любой точки $s$ является выпуклым множеством.

Линеал $\mathcal{L}$, замкнутый в топологии нормы, называется подпространством нормированного пространства. Всякое подпространство, очевидно, выпукло. Всякий конечномерный линеал является подпространством.

**Теорема 7.1.** *Нормированное пространство монтелево точно тогда, когда оно конечномерно.*

**3.** Топологическая прямая сумма. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Предположим, что линейное пространство $X$ разложено в прямую сумму своих линеалов $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, m$: $X = \sum\limits_{i=1}^{m} \dot{+}\mathcal{L}_i$. Это означает, что каждый вектор $x \in X$ имеет однозначное представление в виде $x = x_1 + \ldots + x_m$, $x_i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Если координатные проекторы $P_i : X \to \mathcal{L}_i$ непрерывны в топологии нормы, то прямая сумма $\sum\limits_{i=1}^{m} \dot{+}\mathcal{L}_i$ называется топологической прямой суммой линеалов $\mathcal{L}_i$.

**Теорема 7.2.** *Пусть $X$ — банахово пространство, а линеалы $\mathcal{L}_i$ — подпространства, $i = 1, \ldots, m$. Если $X = \sum\limits_{i=1}^{m} \dot{+}\mathcal{L}_i$, то прямая сумма $\sum\limits_{i=1}^{m} \dot{+}\mathcal{L}_i$ является топологической.*

**4.** В заключение параграфа рассмотрим связь между вещественными и комплексными нормированными пространствами.

Пусть $X$ — вещественное нормированное пространство, $i$ — мнимая единица: $i^2 = -1$. Положим $iX = \{ix |\ x \in X\}$ и образуем топологическую прямую сумму $X \dot{+} iX$ векторов $x + iy$, где $x,\ y \in X$, задав в ней норму так: $\|x + iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Получим комплексное нормированное пространство, которое называют комплексирикацией пространства $X$. С другой стороны, во многих случаях можно представить комплексное нормированное пространство в виде прямой суммы двух вещественных нормированных пространств. Итак, пусть $X$ — комплексное нормированное пространство на котором задана полулинейная инволюция, т. е. такое биективное отображение $g : X \to X$, что $g(x+y) = g(x)+g(y)$, $g(\alpha x) = \overline{\alpha} g(x)$ и $g(g(x)) = x$ для всех $x,\ y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Элемент $u \in X$, для которого $g(u) = u$, назовем вещественным, а $v \in X$, для которого $g(v) = -v$ — чисто мнимым. Тогда всякий элемент $x \in X$ однозначно представляется в виде $x = u + iv$, где $u$ — вещественный, $v$ — чисто мнимый элементы: $u = \dfrac{1}{2}(x + g(x))$, $v = \dfrac{1}{2i}(x - g(x))$. Таким образом, $X = Z \dot{+} iZ$, где $Z = \{u \in X |\ g(u) = u\}$, т. е. комплексное пространство $X$ представлено в виде прямой суммы двух вещественных линейных пространств. Если инволюция $g$ непрерывна, то $Z$ — подпространство пространства $X$, а потому (в силу теоремы 7.2) указанная прямая сумма является топологической.

Например, рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$. В качестве инволюции $g$ в $\mathbb{C}^n$ можно взять операцию комплексного сопряжения: $g(x) = \overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Поэтому $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное вещественное пространство.

## § 8. Линейные операторы и функционалы

**1.** Линейные операторы. Следуя сложившейся традиции, применительно к отображениям нормированных пространств, как правило, будем использовать термин “оператор” вместо термина “отображение” (см. § 1). Операторы, как правило, будем обозначать латинскими заглавными буквами. Термины “функция” и “функционал” будут иметь прежний смысл.

Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства, оба вещественные или комплексные. Оператор $A : X \to Y$ называется линейным, если его область определения $\mathfrak{D}(A)$ есть линеал в $X$ и $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для всех $x,\ y \in \mathfrak{D}(A)$, $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{K}$. Линейный оператор $A$ называется ограниченным, если $\|Ax\| \le M < \infty$ всех $x \in \mathfrak{D}(A)$ таких, что $\|x\| = 1$. В этом случае число (конечное) $\sup\limits_{x \in \mathfrak{D}(A),\ \|x\|=1} \|Ax\|$ называют нормой оператора $A$ и обозначают $\|A\|$, так что $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathfrak{D}(A),\ \|x\|=1} \|Ax\|$.

**Теорема 8.1.** *Линейный оператор непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

**Примеры.** 8.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ примера 7.1 с любой из норм (1) – (3) и прямоугольную матрицу $(a_{ik})$ порядка $n \times m$: $i \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$; $a_{ik} \in \mathbb{C}$. Равенства

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \qquad i = 1, \ldots, m$$

определяют линейный непрерывный оператор $A :\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ такой, что $y = Ax$ для $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Заметим, что в конечномерном нормированном пространстве всякий линейный оператор непрерывен.

8.2. В пространстве $L_p[a, b]$ примера 7.3 при $p = 1$ рассмотрим интегральный оператор, задаваемый соотношением

$$y(t) = \int\limits_a^b K(t, s) x(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ — непрерывная в квадрате $a \le t, s \le b$ функция. Этот оператор линеен и непрерывен.

8.3. В пространстве $C^k[a, b]$ примера 7.4 рассмотрим дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$y(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} x(t).$$

Этот оператор задан на плотном в $C^k[a,b]$ линеале, состоящем из всех функций, имеющих непрерывные на $[a,b]$ производные до порядка $k+1$ включительно, линеен, но не ограничен.

**2.** Множество $\mathcal{L}(X,Y)$ всех линейных непрерывных операторов, заданных на всем нормированном пространстве $X$ и отображающих его в нормированное пространство $Y$, становится нормированным пространством, если в нем линейные операции задать соотношениями ($A,\ B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $x \in X$):

$$(1)\ \ (A+B)x = Ax + Bx, \qquad (2)\ \ (\alpha A)x = \alpha Ax,$$

а норму — по формуле $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. При этом, если $Y$ — банахово (т. е. полное) пространство, то и $\mathcal{L}(X,Y)$ — банахово пространство. Композицию $A \circ B$ операторов $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ и $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ будем называть произведением и обозначать $AB$. При этом $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$. Если $X = Y$, то вместо $\mathcal{L}(X,X)$ будем писать $\mathcal{L}(X)$.

Сходимость последовательности линейных ограниченных операторов по норме пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ называют равномерной сходимостью, а топологию этой сходимости — равномерной операторной топологией. Наряду с ней рассматривают более слабую сильную операторную топологию, сходимость направленности $\{A_d|\ d \in D\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ в которой определяется как сходимость направленностей $\{A_d x|\ d \in D\} \subseteq Y$ при всех $x \in X$. Эта топология совпадает с топологией, индуцированной в $\mathcal{L}(X,Y)$ топологией произведения $\prod\limits_{x \in X} Y = Y^X$, где на $Y$ рассматривается топология нормы.

Последовательность $\{A_n|\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ называют последовательностью Коши относительно сильной операторной топологии, если $\{A_n x|\ n \in \mathbb{N}\}$ есть последовательность Коши в $Y$ при каждом $x \in X$.

**Теорема 8.2.** *Если $X$ и $Y$ — банаховы пространства, то в $\mathcal{L}(X,Y)$ всякая последовательность Коши относительно сильной операторной топологии имеет предел.*

**3.** Обратные операторы. Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Если существует оператор $A^{-1}$, определенный на $\mathfrak{R}(A)$ со значениями в $\mathfrak{D}(A)$ такой, что

$$A^{-1}A = I_{\mathfrak{D}(A)}, \qquad AA^{-1} = I_{\mathfrak{R}(A)},$$

где $I_{\mathfrak{D}(A)}$ и $I_{\mathfrak{R}(A)}$ — тождественные операторы соответственно на $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{R}(A)$, то оператор $A$ называется обратимым, а $A$ и $A^{-1}$ — взаимно обратными*). Очевидно, $(A^{-1})^{-1} = A$ и $A^{-1}$ — линейный оператор. При этом справедливо такое предложение:

Линейный оператор $A$ обратим точно тогда, когда из $Ax = 0$ для некоторого $x \in \mathfrak{D}(A)$ следует, что $x = 0$.

Следующие три теоремы посвящены вопросу о существовании и непрерывности обратного оператора. При этом в первых двух из них непрерывность оператора $A$ не предполагается.

*) Данное определение есть частный случай общего определения обратного отношения (см. § 1).

**Теорема 8.3.** *Пусть линейный оператор $A : X \to Y$ для любого $x \in X$ удовлетворяет условию*

$$\|Ax\| \geq c\|x\|,$$

*где $c$ — некоторая положительная константа. Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор $A^{-1}$ и $\|A^{-1}\| \leq c^{-1}$.*

**Теорема 8.4.** *Пусть линейный оператор $A : X \to Y$ имеет непрерывный обратный $A^{-1}$, а оператор $B$ задан на $\mathfrak{D}(A)$, непрерывен и $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Тогда оператор $C = A + B$ имеет непрерывный обратный $C^{-1}: \ \mathfrak{R}(A) \to \mathfrak{D}(A)$ и*

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|A^{-1}\| \ \|B\|} \ \|A^{-1}\|^2.$$

**Теорема 8.5.** (Банах) *Непрерывный линейный изоморфизм банаховых пространств $X$ и $Y$ есть их гомеоморфизм.*

Если между двумя нормированными пространствами $X$ и $Y$ существует линейный изоморфизм, являющийся к тому же и гомеоморфизмом, то мы будем называть его линейным гомеоморфизмом.

**Теорема 8.6.** *Все конечномерные нормированные пространства данного числа измерения $n$ линейно гомеоморфны пространству $\mathbb{R}^n$, а потому линейно гомеоморфны друг другу.*

Следовательно, все нормы конечномерного пространства эквивалентны.

**4.** Линейные функционалы. Пусть $X$ — нормированное пространство, $\mathcal{L}$ — линеал в нем, $f$ — линейный функционал, заданный на $\mathcal{L}$. Нижеследующая теорема показывает возможность продолжения функционала $f$ без увеличения его нормы на все пространство $X$. Для вещественного пространства эта теорема была доказана Ханом и Банахом, а на случай комплексного пространства ее распространил Г.А. Сухомлинов.

**Теорема 8.7.** (Хан – Банах – Сухомлинов) *Всякий линейный функционал $f$, определенный на линеале $\mathcal{L}$ нормированного пространства $X$, можно с сохранением нормы продолжить на все $X$, т. е. можно построить линейный функционал $F$, определенный на всем $X$ и такой, что*

1) $F(x) = f(x)$ *для всех* $x \in \mathcal{L}$,

2) $\|F\| = \|f\|$.

**Следствие 8.1.** *Пусть $0 \neq x_0$ — произвольный элемент нормированного пространства. Тогда существует линейный функционал $f$, определенный на $X$ и такой, что*

1) $\|f\| = 1$,

2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

**Следствие 8.2.** *Пусть в нормированном пространстве заданы линеал $\mathcal{L}$ и элемент $x_0$, лежащий на расстоянии $d > 0$ от $\mathcal{L}$ ($d = \inf\limits_{x \in \mathcal{L}} \|x - x_0\|$). Тогда существует линейный функционал $f$, определенный всюду на $X$ и такой, что*

1) $f(x) = 0$ *для всех* $x \in \mathcal{L}$,

2) $f(x_0) = 1$,

3) $\|f\| = d^{-1}$.

Одним из основных результатов теории банаховых пространств является следующая

**Теорема 8.8.** (принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза) *Пусть $\{x_n | \; n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность векторов в $X$ такая, что числовая последовательность $\{|\langle x_n, f\rangle| \; n \in \mathbb{N}\}$ ограничена для каждого линейного непрерывного функционала $f$. Тогда $\|x_n\| \leq M$.*

## § 9. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор

**1.** Пусть $X$ — нормированное пространство. Пространство всех непрерывных на $X$ линейных функционалов называется сопряженным с $X$ и обозначается $X^*$. Таким образом, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathfrak{K})$, где $\mathfrak{K}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, соответственно вещественно или комплексно пространство $X$. В силу полноты $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ пространство $X^*$ — банахово.

**Примеры.** 9.1. На примере 8.1 при $m = 1$ видно, что любой линейный функционал $f$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ можно для всякого $x \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ записать следующим образом: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ при некотором наборе $a_1, \ldots, a_n$; $a_i \in \mathbb{C}$. Тем самым $f \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$, нормы (2) и (3) примера 7.1 индуцируют в сопряженном пространстве нормы (3) и (2) соответственно; норма же (1) индуцирует ту же норму (1), а потому в последнем случае $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)^* = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$.

9.2. Для пространства $L_p[a, b]$ примера 7.3 сопряженным является $L_q[a, b]$ — пространство всех абсолютно интегрируемых с $q$-ой степенью $\left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$ на отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ комплексных функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(s)|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$.

**2.** Нормированное пространство $X$ называется строго выпуклым, если из $x, \; y \in X$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ следует, что $x = \lambda y$, либо $y = \mu x$, $\lambda, \; \mu \in \mathfrak{K}$. Строго выпуклое нормированное пространство называется равномерно выпуклым, если из $x, \; y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ следует $\|x + y\| \leq 2 - \delta$ — при некотором $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

**Теорема 9.1.** *Пусть $X$ — строго выпуклое нормированное пространство, $x, \; y \in X$, $\|x\| = \|y\| > 0$, $\langle x, f\rangle = \langle y, f\rangle$ для всех $f \in X^*$. Тогда $x = y$.*

**3.** Пусть $X$ — нормированное пространство, $X^*$ — его сопряженное. Поскольку $X^*$ — снова нормированное пространство, можно построить $X^{**} = (X^*)^*$ и т. д. Пусть $f \in X^*$. Выражение $f(x)$ для фиксированного $x \in X$ можно рассматривать как непрерывный линейный функционал (при переменном $f$) на пространстве $X^*$: $F_x(f) = f(x)$ (исходя из этого обстоятельства будем ниже часто использовать выражение $\langle x, f\rangle$ (см. § 1) для обозначения значения функционала $f$ на элементе $x$).

При этом $\|F_x\| = \|x\|$. Таким образом, пространство $X$ изометрически линейно изоморфно некоторому подпространству пространства $X^{**}$. С точностью до этого изоморфизма можно считать, что $X \subseteq X^{**}$. Если при этом $X = X^{**}$, то пространство $X$ называется рефлексивным. В случае нерефлексивного пространства $X$ все пространства последовательности $X$, $X^*$, $X^{**}$, $X^{***}$, … различны. Например, пространства примеров 7.1 и 7.3 рефлексивны, а пространства примеров 7.2 и 7.4 нерефлексивны.

**4.** Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор с плотной в $X$ областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Для $y^* \in Y^*$ рассмотрим $\langle Ax, y^* \rangle$ — линейный функционал на $X$. Если найдется $x^* \in X^*$, для которого $\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ при всех $x \in X$, то говорят, что на элементе $y^*$ определен сопряженный оператор $A^*$, для которого $A^* y^* = x^*$. Множество таких $y^*$ составляет область определения $\mathfrak{D}(A^*)$ оператора $A^*$ (не исключено, что $\mathfrak{D}(A^*) = \{0\}$), так что $A^* : Y^* \to X^*$ — линейный оператор. Если, в частности, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. оператор $A$ задан на всем $X$ и ограничен, то $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$. Например, сопряженным с оператором $A$ примера 8.1, заданным матрицей $(a_{ik})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, является оператор $A^*$, задаваемый матрицей $(\overline{a}_{ki})$, т. е. транспонированной комплексно-сопряженной матрицей.

**5.** Ортогональность, ортогональное дополнение. Вернемся к выражению $\langle x, f \rangle$ — значению функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$. Потребуем, чтобы оно было полулинейным функционалом по второму аргументу при фиксированном первом, т. е. чтобы $\langle x, \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle x, f_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, f_2 \rangle$, $f_1,\ f_2 \in X^*$, $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{K}$. В результате получаем полуторалинейный (линейный по первому аргументу и полулинейный по второму) функционал, отображающий $X \times X^*$ в $\mathfrak{K}$. Такой функционал $\langle x, f \rangle$ называют скалярным или внутренним произведением $x \in X$ и $f \in X^*$.

Элементы $x \in X$ и $f \in X^*$ называют ортогональными, если $\langle x, f \rangle = 0$. Говорят, что множества $\mathfrak{M} \subseteq X$ и $\mathfrak{M}^* \subseteq X^*$ ортогональны, если все их элементы попарно ортогональны: $\langle x, f \rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathfrak{M}^*$. Множество $\mathfrak{M}^\perp$ всех элементов из $X^*$, ортогональных множеству $\mathfrak{M} \subseteq X$, называется ортогональным дополнением множества $\mathfrak{M}$. Множество ${}^\perp\mathfrak{M}^*$ всех элементов из $X$, ортогональных множеству $\mathfrak{M}^* \subseteq X^*$, называется $*$-ортогональным дополнением множества $\mathfrak{M}^*$.

**Теорема 9.2.** *Для любого $\mathfrak{M} \subseteq X$ ($\mathfrak{M}^* \subseteq X^*$) его ортогональное ($*$-ортогональное) дополнение есть подпространство пространства $X^*$ ($X$) и ${}^\perp\mathfrak{M}^\perp = \mathrm{CLin}\,\mathfrak{M}$*[*)] *(${}^\perp\mathfrak{M}^{*\perp} = \mathrm{CLin}\,\mathfrak{M}^*$).*

## § 10. Слабые топологии и рефлексивность

**1.** Слабые топологии. В нормированном пространстве $X$ наряду с топологией нормы рассматривают еще и топологии, индуцированные линейными функционалами. Слабая топология на $X$ — это топология, сходимость направленности $\{x_d |\, d \in D\}$ в которой эквивалента сходимости каждой направленности $\{\langle x_d, f \rangle |\, d \in D\}$, $f \in X^*$. Про направленность, сходящуюся в слабой топологии, говорят, что

[*)] См. обозначения в начале книги.

она слабо сходится. В общем случае нормированного пространства слабая топология слабее топологии нормы. Однако для случая конечномерного пространства они совпадают.

**Теорема 10.1.** *В конечномерном пространстве слабая топология совпадает с топологией нормы.*

Вернемся к общему случаю нормированного пространства.

**Теорема 10.2.** *Если последовательность $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ слабо сходится к $x$, то она ограничена по норме. При этом*

$$\|x_0\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

**2.** Пусть теперь $X$ сопряжено с некоторым нормированным пространством $Y$: $X = Y^*$. Ультраслабая ($*$-слабая) топология на $X$ — это топология, индуцированная топологией прямого произведения $\prod\limits_{y\in Y} \mathfrak{K}$: направленность $\{x_d|\ d \in D\} \subseteq X$ ультраслабо сходится, если сходится направленность $\{\langle y, x_d\rangle|\ d \in D\}$ при любом $y \in Y$. Другими словами, ультраслабая сходимость — это поточечная сходимость.

**Теорема 10.3.** *Ультраслабая топология слабее слабой, в случае рефлексивного пространства эти топологии совпадают.*

**Теорема 10.4.** (Алаоглу – Бурбаки) *Замкнутый единичный шар пространства $X^*$, сопряженного с нормированным пространством $X$, компактен в ультраслабой топологии. Этот шар компактен в слабой топологии точно тогда, когда пространство $X$ рефлексивно.*

**3.** Рассмотрим действие линейного оператора в нормированном пространстве, наделенном слабой топологией.

**Теорема 10.5.** *Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен точно тогда, когда он непрерывен относительно слабых топологий пространств $X$ и $Y$.*

Напомним, что оператор $A : X \to Y$ называется вполне непрерывным (см. п. 4, § 6) если он а) непрерывен и б) всякое ограниченное множество из $X$ переводит в предкомпактное множество в $Y$. Для линейного оператора $A$ условие а) следует из условия б): в силу б) образ единичного шара из $X$ ограничен в $Y$, значит, оператор $A$ ограничен, а по теореме 8.1 — непрерывен. Таким образом, справедлива

**Теорема 10.6.** *Линейный оператор $A : X \to Y$ вполне непрерывен точно тогда, когда он всякое ограниченное множество из $X$ переводит в предкомпактое множество в $Y$.*

**Теорема 10.7.** *Область значений вполне непрерывного оператора сепарабельна.*

Оператор $A : X \to Y$ называют усиленно непрерывным, если он всякую последовательность, слабо сходящуюся в $X$, переводит в последовательность, сходящуюся по норме пространства $Y$.

**Теорема 10.8.** *Всякий вполне непрерывный оператор усиленно непрерывен. Если пространство $X$ рефлексивно, то верно и обратное. Если $X$ сопряжено с некоторым нормированным пространством, то полная непрерывность оператора $A$ равносильна тому, что $A$ переводит всякую ультраслабо сходящуюся последовательность в сходящуюся по норме.*

Заметим, что в конечномерном пространстве $X$ всякий линейный оператор вполне непрерывен. Линейный оператор в банаховом пространстве называется конечномерным, если его область значений — конечномерное пространство. Очевидно, всякий ограниченный конечномерный линейный оператор вполне непрерывен.

В заключение этого параграфа рассмотрим условия метризуемости слабой и ультраслабой топологий. Из теоремы 6.2 следует

**Теорема 10.9.** *Всякое ограниченное подмножество нормированного пространства, наделенное слабой топологией, метризуемо. Если пространство сопряжено с другим нормированным пространством, то же верно и относительно ультраслабой топологии.*

**Следствие 10.1.** *Слабая или ультраслабая сходимость во всяком ограниченном подмножестве нормированного пространства описывается в терминах последовательностей.*

## § 11. Гильбертовы пространства

**1.** Пусть $\mathfrak{H}$ — линейное пространство и на прямом произведении $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ задан функционал $(\cdot, \cdot)$, называемый скалярным или внутренним произведением, удовлетворяющий следующим условиям ($x,\ y,\ z \in \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathfrak{K}$):

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта вверху означает комплексное сопряжение);

b) $(x + y, z) = (x, y) + (y, z)$;

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

d) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ точно тогда, когда $x = 0$.

Пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением называется предгильбертовым. С помощью скалярного произведения в $\mathfrak{H}$ можно ввести норму, полагая $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. Если относительно нормы пространство полно, то оно называется гильбертовым пространством.

**Примеры.** 11.1. В пространстве $\mathbb{C}^n$ зададим скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

Тогда $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, т. е. построенная по скалярному произведению норма совпадает с нормой (1) примера 7.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ с так определенным скалярным произведением — гильбертово.

11.2. В линейном пространстве всех вещественных или комплексных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с покоординатными линейными операциями, для которых конечна величина $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$, рассмотрим скалярное произведение $(x, y) =$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$, где $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$. Получаем гильбертово пространство, которое обозначается через $\ell_2$.

11.3. Пространство $L_2[a, b]$ (пространство примера 7.3 при $p = 2$) является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

**2.** Множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$. Множество $\mathfrak{M}^\perp$ всех векторов из $\mathfrak{H}$, ортогональных множеству $\mathfrak{M}$, называется ортогональным дополнением множества $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$. Положим $\mathfrak{M}^{\perp\perp} = (\mathfrak{M}^\perp)^\perp$. Как и выше (см. теорему 9.2) справедливо предложение

**Теорема 11.1.** *Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Для любого $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{M}^\perp$ есть подпространство пространства $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}^{\perp\perp} = \mathrm{CLin}\,\mathfrak{M}$.*

Прямую сумму подпространства $\mathcal{L}$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ и его ортогонального дополнения $\mathcal{L}^\perp$ называют ортогональной прямой суммой и обозначают через $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$.

**Теорема 11.2.** *Если $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{L}$ — произвольное его подпространство, то $\mathfrak{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$.*

Разложение $\mathfrak{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$ порождает пару взаимно дополнительных проекторов $P_1,\ P_2$ $(P_2 = I - P_1)$ на подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$ соответственно. Эти проекторы называют ортопроекторами (так как их области значений ортогональны).

**3.** Пусть $\mathfrak{A}$ — индексное множество. Система векторов $\{e_a |\ a \in \mathfrak{A}\}$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется ортонормированной (или ортонормальной), если $(e_a, e_b) = \delta_{ab}$, где $\delta_{ab}$ — символ Кронекера: $\delta_{ab} = 1$, если $a = b$, $\delta_{ab} = 0$ при $a \neq b$. Ортонормированная система $\{e_a |\ a \in \mathfrak{A}\}$ называется полной, если в пространстве $\mathfrak{H}$ нет ненулевого вектора, ортогонального всем векторам системы, т. е. если из $x \in \mathfrak{H}$, $(x, e_a) = 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$ следует $x = 0$. Для любой ортонормированной системы $\{e_a |\ a \in \mathfrak{A}\}$ и любого $x \in \mathfrak{H}$ множество чисел вида $(x, e_a)$, отличных от нуля, не более чем счетно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. Последнее соотношение называется неравенством Бесселя. Для полной ортонормированной системы $\{e_a |\ a \in \mathfrak{A}\}$ справедливо равенство Парсеваля: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2$, где суммирование ведется для всех, отличных от нуля, чисел $(x, e_a)$, $a \in \mathfrak{A}$. Полная ортонормированная система называется базисом гильбертова пространства. Если гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то любая его полная ортонормированная система не более чем счетна, если же $\mathfrak{H}$ — бесконечномерное пространство, то всякая его ортонормированная система в точности счетна.

**4.** Выше было показано (теорема 8.6), что все конечномерные нормированные пространства данного числа измерений гомеоморфны. Для гильбертовых пространств справедливо более сильное утверждение:

**Теорема 11.3.** *Все конечномерные гильбертовы пространства данного числа измерений изометрически линейно изоморфны друг другу. Всякое вещественное (комплексное) бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство изометрически линейно изоморфно вещественному (комплексному) пространству* $\ell_2$, *и, следовательно, все вещественные (комплексные) бесконечномерные сепарабельные пространства изометрически линейно изоморфны между собой.*

**5.** Следующая теорема показывает, что всякое гильбертово пространство изометрически полулинейно изоморфно своему сопряженному.

**Теорема 11.4.** (Ф. Рисс) *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *гильбертово пространство,* $f \in \mathfrak{H}^*$. *Тогда существует вектор* $x_f \in \mathfrak{H}$, *такой, что* $\|f\| = \|x_f\|$ *и* $f(x) = (x, x_f)$ *для каждого* $x \in \mathfrak{H}$.

На основании теоремы Рисса всякое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ является самосопряженным, т. е. сопряженное пространство $\mathfrak{H}^*$ с точностью до изометрического полулинейного изоморфизма совпадает с $\mathfrak{H}$ (следовательно, всякое гильбертово пространство рефлексивно).

**6.** Если $A$ — плотно заданный в $\mathfrak{H}$ линейный оператор (т. е. $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{H}$), то определен сопряженный оператор $A^*$, который снова действует в $\mathfrak{H}$. Для него $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A^*)$. Если $A = A^*$, то оператор $A$ называется самосопряженным, и $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x,\ y \in \mathfrak{D}(A)$, а $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A^*)$. Самосопряженные операторы играют большую роль в различных разделах математики и в ее приложениях. Более подробно мы рассмотрим такие операторы в главе IV.

# ГЛАВА I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

## § 1. Понятие производной и дифференциала нелинейного оператора

Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства над полем $\mathcal{K}$ (комплексных или вещественных чисел). Оператор $F$ будем считать определенным на некотором открытом множестве $\mathcal{D} \subseteq X$ и действующим в пространство $Y$ $(\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}$, $\mathcal{R}(F) = Y)$. Будем писать при этом $F : \mathcal{D} \to Y$ (см. § 1 гл. 0).

Пусть элемент $x_0$ принадлежит $\mathcal{D}$.

**Определение 1.1.** Если для всех $h \in X$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0, h), \tag{1.1}$$

где $t \in \mathcal{K}$ выбрано так, что $x_0 + th \in \mathcal{D}$, то этот предел называется *первой вариацией оператора $F$ в точке $x_0 \in \mathcal{D}$*. Сам оператор $F$ будем называть *$\delta$-дифференцируемым в точке $x_0$*.

**Определение 1.2.** Пусть $\delta F(x_0, h) = Ah$, где $A$ — всюду заданный линейный непрерывный оператор, из $X$ в $Y$ $(A \in \mathcal{L}(X, Y))$. Тогда оператор $F$ называется *дифференцируемым по Гато* (*$\mathcal{G}$-дифференцируемым*). Оператор $A$ при этом называют производной Гато и обозначают $A = f'(x_0)$, а вариацию $\delta F(x_0, h)$ — *дифференциалом Гато* и обозначают через $DF(x_0, h)$.

Как показывает следующий пример, класс операторов $\mathcal{V}(x_0, Y)$, обладающих первой вариацией, шире класса операторов $\mathcal{G}(x_0, Y)$ дифференцируемых в точке $x_0 \in \mathcal{D}$ по Гато.

**Пример 1.1.** Рассмотрим оператор $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ F(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, для любого $h \in \mathbb{R}^2$, $h = (h_1, h_2) \neq 0$ выполняется равенство

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0, 0)}{t} = \frac{h_1^2}{h_1^2 + h_2^2} = F(h_1, h_2),$$

т. е. $\delta(0, h)$ существует, но является нелинейным оператором $(\delta(0, h) = Fh)$ и, следовательно, $F$ не дифференцируем по Гато.

Еще более узким является класс $\mathcal{F}(x_0, Y)$, так называемых $\mathcal{F}$-дифференцируемых операторов.

**Определение 1.3.** Оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ называется *дифференцируемым в точке $x_0$ по Фреше* (*$\mathcal{F}$-дифференцируемым*), если существует оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что для всех $h$, для которых $x_0 + h \in \mathcal{D}$, справедливо представление:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + \omega(x_0, h), \tag{1.2}$$

где $\omega(x, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.3}$$

В этом случае выражение $Ah$ называют *дифференциалом Фреше* и обозначают $Ah = dF(x_0, h)$.

Ясно, что оператор, дифференцируемый по Фреше в точке $x_0$, непрерывен в этой точке и дифференцируем по Гато. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Пример 1.2.** Пусть оператор $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определен равенствами

$$\begin{cases} F(x_1, x_2) &= &1, & \text{если } x_2 = x_1^2,\ x_1 \neq 0, \\ F(0, 0) &= &0 & \text{в остальных точках } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Этот оператор разрывен в точке $(0, 0)$ и потому не дифференцируем по Фреше. Однако, для любого $h \in \mathbb{R}^2$, $h = (h_1, h_2)$

$$\frac{F(th_1, th_2) - F(0, 0)}{t} = 0$$

при достаточно малых $t$. Следовательно, существует первая вариация $\delta F(0, h)$, являющаяся дифференциалом Гато.

Таким образом, в общем случае имеют место лишь строгие включения $\mathcal{F}(x_0, Y) \subset \mathcal{G}(x_0, Y) \subset \mathcal{V}(x_0, Y)$. Однако, справедлива следующая

**Теорема 1.1.** *Пусть оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ дифференцируем по Гато в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $x_0 \in \mathcal{D}$:*

$$F' : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(X, Y)$$

*и его производная по Гато представляет собой непрерывную в этой окрестности операторнозначную функцию. Тогда $F \in \mathcal{F}(x_0, Y)$ и $DF(x_0, h) = dF(x_0, h)$.*

$\square$ По условию существует предел (1.1) и $\delta(x_0, h) = F'(x_0)h = DF(x_0, h)$. Выберем $h$ так, чтобы $x_0 + th \in \mathcal{D}$ для всех $t \in [0, 1]$ и рассмотрим

$$\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - DF(x_0, h).$$

Для любого $y^* \in Y^*$, где $Y^*$ — пространство, сопряженное с $Y$ (см. § 4 гл. 0), имеем:

$$\langle \omega(x_0, h), y^* \rangle = \langle F(x_0 + h) - F(x_0) \rangle - \langle DF(x_0, h) \rangle.$$

Рассмотрим теперь вещественную функцию

$$\varphi(t) = \mathrm{Re}\, \langle F(x_0 + th), y^* \rangle.$$

Покажем, что она дифференцируема в интервале $(0, 1)$. Действительно

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} =$$

$$= \left\langle \frac{F(x_0 + th + \Delta th) - F(x_0 + th)}{\Delta t}, y^* \right\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\,\langle (DF(x_0+th),h),y^*\rangle.$$

Применив к функции $\varphi(t)$ формулу конечных приращений Лагранжа, получаем

$$|\mathrm{Re}\,\langle \omega(x_0,h),y^*\rangle| = |\varphi(1)-\varphi(0) - \mathrm{Re}\,\langle DF(x_0,h),y^*\rangle =$$

$$= |\varphi'(\tau) - \mathrm{Re}\,\langle DF(x_0,h),y^*\rangle =$$

$$= |\mathrm{Re}\,\langle DF(x_0+\tau h,h),y^*\rangle - \mathrm{Re}\,\langle DF(x_0,h),y^*\rangle| \le$$

$$\|DF(x_0+\tau h,h) - DF(x_0,h)\|\,\|y^*\| \le$$

$$\le \|F'(x_0+\tau h) - F'(x_0)\|\,\|h\|\,\|y^*\| \qquad (\tau\in[0,1]).$$

Согласно теореме Хана – Банаха – Сухомлинова (см. § 8 гл. 0) функционал $y^*$ можно выбрать так, чтобы $\langle \omega(x_0,h),y^*\rangle = \|\omega(x_0,h)\|$ и $\|y^*\|=1$. Тогда

$$\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|} \le \|F'(x_0+\tau h) - F'(x_0)\|.$$

Отсюда и из непрерывности $F'$ в $\mathcal{U}$ следует выполнение равенств (1.2) и (1.3). ■

Таким образом, непрерывная дифференцируемость по Гато в некоторой окрестности $\mathcal{U}\subseteq D$ влечет дифференцируемость по Фреше в это окрестности и совпадение в ней производных по Гато и по Фреше.

**Теорема 1.2.** *Пусть для оператора $F$ равенство* (1.1) *выполняется равномерно по $h$* ($\|h\|=1$), *$\delta F(x_0,h) = DF(x_0,h)$. Тогда $f\in\mathcal{F}(x_0,Y)$.*

□ По условию для всех $h$, $\|h\|=1$ и для любого $\varepsilon>0$ найдем $\delta>0$ такое, что при $0<|t|<\delta$ выполняется неравенство:

$$\left\|\frac{1}{t}\left(F(x_0+th) - F(x_0) - DF(x_0,h)\right\| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $h_1$, $\|h_1\|<\delta$ найдется $h$: $\|h|=1$ такое, что $h_1=th$ и $\|h_1\|=t$. Мы имеем $\|\omega(x_0,h_1)\|\,\|h_1\|<\varepsilon$, что ввиду произвольности $\varepsilon$ эквивалентно равенству (1.3). ■

**Замечание 1.1.** Отметим, что в теореме 1.2, в отличие от теоремы 1.1 не требуется дифференцируемости по Гато в некоторой окрестности точки $x_0$.

**Замечание 1.2.** Для случая комплексного пространства $X$ понятие первой вариации можно несколько обобщить, требуя в (1.1) существования предела лишь для вещественных $t$. В условиях теорем (1.1) и (1.2) отсюда следует существование предела (1.1) для любых комплексных $t$. Однако для общего случая вопрос остается пока открытым.

## § 2. Формула конечных приращений и условие Липшица

Пусть $X$, $Y$ — нормированные пространства, $\mathcal{D}$ — некоторое множество в $X$ и оператор $F$ действует из $\mathcal{D}$ в $Y$.

**Определение 2.1.** Будем говорить, что оператор $F$ удовлетворяет условию Липшица (с константой $l$) на $\mathcal{D}$, если для любых $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}$

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \le l\|x_1 - x_0\|. \tag{2.1}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое множество в $X$, оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ дифференцируем по Гато в каждой точке $x \in \mathcal{D}$ и $\|F'(x)\| \le l$. Тогда оператор $F$ удовлетворяет условию Липшица* (2.1).

☐ В виду выпуклости $\mathcal{D}$ для произвольных $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}$ элемент $tx_1+(1-t)x_2 \in \mathcal{D}$ при $0 \le t \le 1$. Поэтому для любого $y^* \in Y^*$ на $[0,1]$ определена и непрерывна скалярная функция

$$\varphi(t) = \langle F(tx_1 + (1-t)x_2), y^*\rangle.$$

Покажем, что она дифференцируема на интервале $(0,1)$. Действительно

$$\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \left\langle \frac{F(tx_1 + (1-t)x_2 + \Delta t(x_1 - x_2)) - F(tx_1 + (1-t)x_2)}{\Delta t}, y^* \right\rangle.$$

Поэтому $\varphi'(t)$ существует и $\varphi'(t) = \langle F'(tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2), y^*\rangle$.

В силу теоремы о среднем имеем:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| \le \sup_{0\le t\le 1} |\varphi'(t)|,$$

что равносильно

$$|\langle F(x_1) - F(x_2), y^*\rangle| \le \sup_{0\le t\le 1} |\langle F'(tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2), y^*\rangle \le$$

$$\le \sup_{0\le t\le 1} \|F'(tx_1 + (1-t)x_2)\|\,\|x_1 - x_2\|\,\|y^*\|.$$

Отсюда и из теоремы Хана – Банаха – Сухомлинова получаем, так называемую, формулу конечных приращений:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \le \sup_{0\le t\le 1} \|F'(tx_1 + (1-t)x_2)\|\,\|x_1 - x_2\|,$$

из которой с учетом $\|F'(x)\| \le l$, $x \in \mathcal{D}$ следует (2.1). ■

**Замечание 2.1.** Можно показать, что теорема 2.1 остается справедливой, если условие дифференцируемости по Гато заменить требованием существования равномерно ограниченной первой вариации

$$\|\partial F(x,h)\| \le l\|h\| \qquad (h \in X).$$

В заключение настоящего параграфа введем наиболее общее в нашей книге понятие дифференцируемости.

**Определение 2.2.** Будем говорить, что оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ слабо дифференцируем[*)] в точке $x_0 \in \mathcal{D}$, если для любого $y^* \in Y^*$ и любого $h \in X$ скалярная

[*)] В литературе часто слабо дифференцируемым оператором называется оператор, дифференцируемый по Гато (см., например, Вайнберг [1], [2]). Наша терминология представляется нам более удобной и естественной, поскольку основана на понятии слабой сходимости в банаховом пространстве, тем более, что ниже мы используем хорошо известное и тесно связанное с понятием слабой дифференцируемости понятием слабой аналитичности, опять таки базирующемся на понятии слабой сходимости.

функция $\varphi_h(t) = \langle F(x_0 + th), y^* \rangle$ дифференцируема в обычном смысле в точке $t = 0$. Если при этом для некоторого $h$ найдется элемент $y(x_0, h) \in Y$, для которого $\varphi_t'(0) = \langle y(x_0, h), y^* \rangle$, то $y(x_0, h)$ называют слабой вариацией оператора $F$ в точке $x_0$ в направлении $h$ и обозначают $\delta_w F(x_0, h)$. Класс операторов, имеющих слабую вариацию по всем направлениям $h \in X$, будем обозначать $\mathcal{V}_w(x_0, Y)$. Очевидно включение

$$\mathcal{V}(x_0, Y) \subseteq \mathcal{V}_w(x_0, Y). \tag{2.2}$$

Далее, если $\delta_w F(x_0, h) = Ah$, где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то оператор $F$ назовем слабо дифференцируемым по Гато и множество таких операторов $F$ обозначим $\mathcal{G}_w(x_0, Y)$.

Если, более того, равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_h(t) - \varphi_h(0)}{t} = \langle Ah, y^* \rangle$$

выполнено равномерно относительно $h$, $\|h\| = 1$, то оператор $F$ будем называть слабо дифференцируемым по Фреше, а множество таких операторов будем обозначать $\mathcal{F}_w(x_0, Y)$.

Очевидны включения

$$\mathcal{G}(x_0, Y) \subseteq \mathcal{G}_w(x_0, Y), \tag{2.3}$$

$$\mathcal{F}(x_0, Y) \subseteq \mathcal{F}_w(x_0, Y). \tag{2.4}$$

**Замечание 2.2.** Если пространство $Y$ конечномерно, то в силу эквивалентности сильной и слабой сходимости в соотношениях (2.2) – (2.4) выполняются равенства. В главе III будет доказано, что равенства в этих соотношениях выполняются и для случая бесконечномерных пространств $X$ и $Y$, при условии, что пространство $X$ комплексно и слабая вариация существует в некоторой окрестности точки $x_0$.

**Замечание 2.3.** При доказательстве теоремы 2.1 на самом деле установлено более общее предложение:

Пусть оператор $F$ задан на выпуклом пространстве $\mathcal{D}$, в каждой точке $x_0 \in \mathcal{D}$ имеет слабую вариацию $\delta_w F(x, h)$, для которой при всех $h \in X$

$$\|\delta_w F(x, h))\| \leq l\|h\|.$$

Тогда справедливо заключение теоремы 2.1.

## § 3. Примеры дифференцируемых по Фреше операторов

**Пример 3.1.** (оператор Урысона). Пусть функции $K(t, s, x)$, $K_x'(t, s, x)$ непрерывны по совокупности переменных, $a \leq t,\ s \leq b$, $|x| \leq r$. Тогда интегральный оператор $F$, задаваемый равенством:

$$Fx(t) = \int_a^b K(t, s, x(s)))\, ds \tag{3.1}$$

определен на шаре $\|x\| \le r$ пространства $C_{[a,b]}$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$ и дифференцируем по Фреше в этом шаре как оператор со значениями в $C_{[a,b]}$, причем для любого $x_0$, $\|x_0\| < r$, и любого $h \in C_{[a,b]}$

$$(F'(x_0)h)(t) = \int\limits_a^b K'_x(t,s,x_0(s)) \cdot h(s)\,ds. \tag{3.2}$$

Действительно, прежде всего заметим, что оператор, определяемый равенством (3.2), линеен и непрерывен в $C_{[a,b]}$. Далее

$$\|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)h\| \le$$

$$\le \int\limits_a^b \sup_{a\le t\le b} |K(t,s,x_0(s)+h(s)) - K(t,s,x_0(s)) - K'_x(t,s,x_0(s))h(s)|\,ds \le$$

$$\le \|h\| \int\limits_a^b \sup_{a\le t\le b} |K'_x(t,s,x_0(s)+\theta h(s)) - K'_x(t,s,x_0(s))|\,ds,$$

при котором $\theta = \theta(h) \in [0,1]$. Отсюда в силу непрерывности функции $K'_x(t,s,x)$ по переменной $x$ получаем:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}\, \|F(x_0+th) - F(x_0) - F'(x_0)h\| \le$$

$$\le \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_a^b \sup_{a\le t\le b} |K'_x(t,s,x_0(s)+\theta h(s)) - K'_x(t,s,x_0(s))|\,ds = 0.$$

Отметим, что оператор Урысона (3.1) дифференцируем по Фреше в комплексном пространстве $\widetilde{C}_{[a,b]}$ комплекснозначных функций, непрерывных на $[a,b]$, если ядро $K(t,s,x)$ непрерывно дифференцируемо по $x$ в круге $|x| < r$ комплексной плоскости.

**Пример 3.2.** (оператор Гаммерштейна). Частным случаем оператора (3.1) является оператор Гаммерштейна, определяемый равенством

$$Fx(t) = \int\limits_a^b K(t,s) f(s,x(s))\,ds, \tag{3.3}$$

где функции $K(t,s)$, $f(s,x)$, $f'_x(s,x)$ непрерывны по совокупности переменных при $a \le t,\ s \le b$, $|x| \le r$.

Производная Фреше, как следует из примера 3.1, определяется равенством

$$F'(x_0)h(t) = \int\limits_a^b K(t,s) f'_x(s,x_0(s)) h(s)\,ds. \tag{3.4}$$

**Пример 3.3.** (оператор Немыцкого). Пусть функции $f(s,x)$, $f'_x(s,x)$ непрерывны по совокупности переменных $a \le s \le b$, $|x| \le r$. Тогда оператор суперпозиции (Немыцкого)

$$\Phi x(s) = f(s, x(s)) \tag{3.5}$$

определен в пространстве $C_{[a,b]}$ ($\widetilde{C}_{[a,b]}$) и дифференцируем no Фреше, причем

$$\Psi'(x_0)h)(s) = f'_x(s, x(s)) \cdot h(s). \tag{3.6}$$

Действительно, оператор $\Phi'(x_0)$ в (3.6) линеен и непрерывен в $C_{[a,b]}$ ($\widetilde{C}_{[a,b]}$) и

$$\frac{1}{\|h\|}\,\|\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)h\| \le$$

$$\le \frac{1}{\|h\|}\sup_{a\le t\le b}|f(s, x_0(s)+h(s)) - f(s, x_0(s)) - f'_x(s, x_0(s)))\cdot h(s)| \le$$
$$\le \frac{1}{\|h\|}\sup_{a\le t\le b}|f'_x(s, x_0(s)+\theta h(s)) - f'_x(s, x_0(s))|\cdot|h(s)| \le$$
$$\le \sup_{a\le t\le b}|f'_x(s, x_0(s)+\theta h(s)) - f'_x(s, x_0(s))| \to 0$$

при $\|h\| \to 0$ $(\theta = \theta(h) \in [0,1])$.

**Пример 3.4.** Пусть функции $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)$ непрерывны в некоторой области евклидова пространства $E^n = \{x|\ x = (x_1,\dots,x_n)\}$ вместе со своими частными производными. Тогда оператор $F = (f_1,\dots,f_n) : E^n \to E^m$ дифференцируем по Фреше в этой области, причем

$$F'(x)h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Правую часть (3.7) следует понимать как умножение матрицы Якоби оператора $F$ на вектор $h = (h_1,\dots,h_n)$.

## § 4. Леммы о дифференцируемых операторах

Следующее утверждение очевидным образом вытекает из свойств линейного оператора.

**Лемма 4.1.** *Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Тогда для любого $x \in X$ оператор $A \in \mathcal{F}(x,Y)$ и*

$$A'(x) = A.$$

**Лемма 4.2.** (о производной суперпозиции операторов) *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — нормированные пространства. Предположим, что оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ определен в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$, а $G : Y \to Z$ — в некоторой окрестности точки $y_0 = Fx_0 \in Y$. Тогда, если $F \in \mathcal{G}(x_0, Y)$ $(\mathcal{F}(x_0, Y))$, а $G \in \mathcal{G}(y_0, Z)$ $(\mathcal{F}(x_0, Y))$, то $T = G \circ F \in \mathcal{G}(x_0, Z)$ $(\mathcal{F}(x_0, Z))$, причем*

$$T'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)^{*)}. \tag{4.1}$$

□ Для произвольных элементов $h \in X$, $u \in Y$ введем обозначения

$$\omega_1(x_0, th) = F(x_0 + th) - F(x_0) - F'(x_0)th,$$

$$\omega_2(y_0, tu) = G(y_0 + tu) - G(y_0) - G'(y_0)tu,$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|\omega_1(x_0, th)\|}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\|\omega_2(y_0, tu)\|}{t} = 0.$$

Далее, положим $u = F'(x_0)h + t^{-1}\omega_1(x_0, th)$ и рассмотрим разность

$$T(x_0 + th) - T(x_0) = GF(x_0 + th) - GF(x_0) =$$

$$G(F(x_0 + F'(x_0)th + \omega_1(x_0, th)) - G(y_0) =$$
$$G(y_0 + tu) - Gy_0 = \omega_2(y_0, tu) + G'(y_0)tu =$$
$$tG'(y_0)F'(x_0)h + G'(y_0)\omega_1(x_0, th) + \omega_2(x_0, tu).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(x_0 + th) - T(x_0)}{t} = G'(y_0)F'(x_0)h, \tag{4.2}$$

что равносильно (4.1) и включению $\mathcal{G}(x_0, Z)$. Если же $F \in \mathcal{F}(x_0, Y)$, а $G \in \mathcal{F}(y_0, Z)$, то равенство (4.2) выполняется равномерно относительно $h \in X$, $\|h\| = 1$, откуда согласно теореме следует $T \in \mathcal{F}(x_0, Z)$. ■

Из двух предшествующих лемм вытекает простое, но важное

**Следствие 4.1.** *Пусть $F \in \mathcal{G}(x_0, Y)$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда*

$$(AF)'(x_0) = AF'(x_0). \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) означает, что линейный оператор можно выносить за знак производной. Если (4.3) переписать в дифференциальной символике, то получаем равенство:

$$D(AF) = ADF, \tag{4.4}$$

которое означает, что оператор дифференцированный перестановочен с любым линейным оператором.

---

*) Производные в равенстве (4.1) следует понимать либо как производные Фреше, либо как производные Гато, в зависимости от того, к какому классу принадлежат операторы $F$ и $G$. Правую часть (4.1) при этом следует понимать как обычное произведение линейных операторов.

Например, оператор Гаммерштейна (3.3) можно представить как композицию линейного оператора $K$, определяемого формулой

$$Kx(t) = \int\limits_a^b K(s,t)x(s)\,ds,$$

и оператора Немыцкого (3.5), то есть $F = K\Phi$. Тогда из (4.3) и (3.6) следует (3.4).

**Следствие 4.2.** *Пусть $F \in \mathcal{G}(x_0, Y)$; в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки $y_0 = Fx_0$ существует оператор $G : Y \to Z$, удовлетворяющий соотношению*

$$GF = I\big|_{\mathcal{D}}, \tag{4.5}$$

*где $I$ — тождественный оператор в $X$, $\mathcal{D}$ — некоторая окрестность точки $x_0$ (в этом случае мы будем писать $G = F^{-1}$). Тогда, если $F^{-1} \in \mathcal{G}(y_0, X)$, то линейный оператор $F'(x_0)$ непрерывно обратим и*

$$[F'(x_0)]^{-1} = (F^{-1})'(y_0). \tag{4.6}$$

□ Равенство (4.6) немедленно следует из (4.1) и (4.5). ■

**Замечание 4.1.** Для комплексного пространства $X$, как будет показано ниже (гл. VI), следствие 4.2 справедливо при более слабых предположениях (для конечномерного случая она представляет собой содержание теоремы Осгуда (см., например, Шабат Б. [23])).

**Замечание 4.2.** В главе VI будет также показано, что в комплексных пространствах справедливо и обратное утверждение: из непрерывной обратимости оператора $F'(x)$ следует локальная обратимость оператора $F$ и равенство (4.6).

## § 5. Частные производные

В этом параграфе мы будем предполагать, что пространство разлагается в топологическую прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$ (см. § 7 гл. 0). Предположим, что в окрестности некоторой $a = (a_1, a_2)$, $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$, задан оператор $F \in \mathcal{V}(a, Y)$ со значениями в некотором нормированном пространстве $Y$. Выберем векторы $h^{(1)} = (h_1, 0)$ и $h^{(2)} = (0, h_2)$, где $h_i$ — произвольные векторы в пространствах $X_i$, $i = 1, 2$, и выражения $\delta_{h_1}F(a) = \delta F(a, h_1)$ и $\delta_{h_2}F(a) = \delta F(a, h_2)$ назовем вариациями оператора $F$ в точке $a$ по направлениям пространств $X_i$, или частными вариациями. Другими словами,

$$\delta_{h_1}F(a) = \lim_{t\to 0} \frac{F(a_1 + th_1, a_2) - F(a_1, a_2)}{t}, \tag{5.1}$$

$$\delta_{h_2}F(a) = \lim_{t\to 0} \frac{F(a_1, a_2 + th_2) - F(a_1, a_2)}{t}. \tag{5.2}$$

Заметим, что оба предала существуют в силу определения 1.1.

В частности, если $F \in \mathcal{G}(a, Y)$ $(\mathcal{F}(a, Y))$, то выражения (5.1), (5.2) являются линейными по $h_1$ и $h_2$ соответственно и называются частными дифференциалами Гато (Фреше). В этом случае мы будем использовать обозначения

$$\delta_{h_i} F(a) = F'_{x_i}(a) h_i,$$

и выражения $F'_{x_i}(a) \in \mathcal{G}(X, Y)$, $i = 1, 2$, называть частными производными оператора $F$ в точке $a$ (соответственно по Гато или по Фреше).

**Теорема 5.1.** *Если $F \in \mathcal{G}(a, Y)$ $(\mathcal{F}(a, Y))$, то частные производные существуют и*

$$F'(a)h = F'_{x_1}(a)h_1 + F'_{x_2}(a)h_2. \tag{5.3}$$

□ Существование частных производных, как отмечалось выше, следует непосредственно из определений 1.1 – 1.3. Из тех же определений следует и равенство (5.3), если заметить, что $F'_{x_i}(a)$ является сужением линейного оператора $F'(a)$ на подпространство $X_i$, $i = 1, 2$. ■

Обратное, вообще говоря, неверно: в примере 1.1 отображение $F$ имеет обе частные производные Фреше по $x_1$ и $x_2$, именно, $F'_{x_1}(0)h_1 \equiv 0$ и $F'_{x_2}(0)h_2 \equiv 0$, но это отображение не обладает даже производной Гато. Однако, справедлива

**Теорема 5.2.** *Пусть в некоторой окрестности $\mathcal{D}$ точки $a$ оператор $F : X \to Y$ имеет частные производные Гато, представляющие собой непрерывные в $\mathcal{D}$ операторнозначные отображения. Тогда $F \in \mathcal{F}(a, Y)$ и справедливо равенство (5.3), причем $F'(x)$ также является непрерывным отображенном $\mathcal{D}$ в $\mathcal{L}(X, Y)$.*

□ Согласно теореме 1.1 операторы $F'_{x_1}(a)$ и $F'_{x_2}(a)$ являются частными производными Фреше. Рассмотрим произвольный вектор $h = (h_1, h_2)$ такой, что $x + h \in \mathcal{D}$. Тогда

$$F(a+h) - F(a) = F(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - F(a_1 + h_1, a_2) - F(a_1, a_2 + h_2) + F(a_1, a_2) =$$

$$= F'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2) + \omega_2(a_1 + h_1, a_2; h_2) + F'_{x_1}(a_1, a_2)h_1 + \omega_1(a_1, a_2; h_1),$$

где $\omega_2 = o(\|h_2\|)$, $\omega_1 = o(\|h_1\|)$.

Вследствие непрерывности $F'_{x_i}(a) : \mathcal{D} \to \mathcal{L}(X, Y)$ в равномерной операторной топологии имеем:

$$\lim_{\|h_1\| \to 0} \|F'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2) - F'_{x_2}(a_1, a_2)\| = 0.$$

Тогда

$$F'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2)h_2 = F'_{x_2}(a_1, a_2)h_2 + \omega_3(a, h_1, h_2),$$

где $\omega_3 = o(\|h\|)$. Окончательно получаем

$$F(a+h) - F(a) = F'_{x_1}(a_1, a_2)h_1 + F'_{x_2}(a_1, a_2)h_2 + \omega(a, h),$$

где $\omega(a, h) = o(\|h\|)$. Отсюда непосредственно следуют все утверждения теоремы. ■

**Замечание 5.1.** Теорема 5.2 для случая комплексного пространства $X$ справедлива при менее жестких предположениях: достаточно требовать лишь существование частных производных Фреше в некоторой окрестности точки $a$, не требуя их непрерывности в операторной топологии (в конечномерном случае это утверждение является содержанием основной теоремы Хартогса (см., например, Б. Шабат [23])).

**Замечание 5.2.** Непосредственно по индукции утверждения теорем 5.1, 5.2 переносятся на случай, когда $X$ разложено в топологическую прямую сумму $n$ нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$. Формула (5.3) при этом принимает вид

$$F'(a)h = F'_{x_1}(a)h_1 + \ldots + F'_{x_n}(a)h_n. \tag{5.4}$$

Эту формулу называют *формулой полного дифференциала.*

## § 6. Мультилинейные операторы. Двойственность. Однородные формы

Рассмотрим пространства $X = X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_n$, где $X_i$ — нормированные пространства, $i = 1, \ldots, n$.

**Определение 6.1.** Оператор $G : X \to Y$, определенный во всем $X$ называется мультилинейным ($n$-линейным) непрерывным оператором, если он линеен по каждому из переменных $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$ при фиксированных остальных и непрерывен в совокупности.

**Теорема 6.1.** *Если оператор $G : X \to Y$ линеен по каждому из переменных $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, при фиксированных остальных, то он является мультилинейным непрерывным оператором точно тогда, когда*

$$\|G(x_1, \ldots, x_n)\| \le M \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \tag{6.1}$$

*для всех $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $0 < M < \infty$.*

□ Пусть $G$ — мультилинейный непрерывный оператор. Тогда при всех $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_n > 0$

$$G(\lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_n y_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \; G(y_1, \ldots, y_n) \tag{6.2}$$

и найдется $r > 0$ такое, что $G(y_1, \ldots, y_n)\| \le 1$ при $\|y_i\| \le r$, $i = 1, \ldots, n$. Для любых $x_i \in X_i$ выберем $\lambda_i > 0$ так, чтобы $\|\lambda_i^{-1} x_i\| = r$. Воспользовавшись равенством (6.2), получаем (6.1) с $M = r^{-n}$.

Обратно. Пусть выполнено неравенство (6.1) с некоторой неотрицательной постоянной $M < \infty$. Докажем непрерывность оператора оператора $G$ в произвольной точке $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство:

$$G(x) - G(a) = G(x_1, \ldots, x_n) - G(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= G(x_1, \ldots, x_n) - G(a_1, \ldots, x_n) + G(a_1, \ldots, x_n) - G(a_1, a_2, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$= G(a_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - G(a_1, \ldots, a_{n-1} x_n) + G(a_1, \ldots, x_n) - G(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= G(x_1 - a_1, \ldots, x_n) + G(a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n) + \ldots + G(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n - a_n). \tag{6.3}$$

Отсюда получаем неравенство:

$$\|G(x) - G(a)\| \le$$

$$\leq M(\|x-a_1\|\,\|x_2\|\cdot\ldots\cdot\|x_n\|+\|a_1\|\,\|x_2-a_2\|\,\|x_3\|\cdot\ldots\cdot\|x_n\|+\ldots+\|a_1\|\cdot\ldots\cdot\|a_{n-1}\|\,\|x_n-a_n\|),$$

из которого в силу ограниченности произведения $\|x_1\|\cdot\ldots\cdot\|x_n\|$ при $x$, близких к $a$, следует непрерывность оператора $G$ в точке $a$. ■

**Замечание 6.1.** Как следует из доказательства теоремы 6.1 для выполнения неравенства (6.1) достаточно требовать лишь непрерывности оператора $G$ в точке $(0,\ldots,0)\in X$. Поэтому непрерывность мультилинейного оператора в нуле влечет непрерывность его во всем пространстве.

**Замечание 6.2.** Из равенств (6.3) следует: если мультилинейный оператор непрерывен по каждой из переменных, то он непрерывен и в совокупности.

**Определение 6.2.** Наименьшее число $M$, при котором выполняется неравенство (6.1), называется нормой мультилинейного оператора $G$. Таким образом,

$$\|G\| = \sup_{\|x_i\|\leq 1,\ 1\leq i\leq n}\|G(x_1,\ldots,x_n)\|. \tag{6.4}$$

Очевидно, что норма $\|G\|$ определяет на множестве $\mathcal{L}_n(X_1,\ldots,X_n;Y)$ мультилинейных непрерывных операторов из $X_1\dot{+}\ldots\dot{+}X_n$ в $Y$ структуру нормированного пространства.

Рассмотрим более подробно пространство $\mathcal{L}_2(X_1,X_2;Y)$ билинейных непрерывных операторов из $X_1\dot{+}X_2$ в $Y$.

Согласно определению 6.1 оператор $G\in\mathcal{L}_2(X_1,X_2;Y)$ при фиксированном $x_1$ является линейным непрерывным оператором по $x_2$, действующим из $X_2$ в $Y$, то есть $G_{x_1}(=G(x_1,\cdot))\in\mathcal{L}(X_2;Y)$.

Причем, очевидно,

$$\sup_{\|x_1\|\leq 1}\|G_{x_1}\|\leq\|G\|. \tag{6.5}$$

В то же время, учитывая линейность оператора $G$ по $x_1$, можно рассматривать $G$ как линейный оператор, ставящий в соответствие элементу $x_1\in X_1$ элемент $G_{x_1}\in\mathcal{L}(X_2;Y)$, то есть $G\in\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;Y))$. Тогда $\|G\|\leq\sup\limits_{\|x_1\|\leq 1}\|G_{x_1}\|$. С учетом (6.5) последнее неравенство дает: пространства $\mathcal{L}_2(X_1,X_2;Y)$ и $\mathcal{L}(X_1;\mathcal{L}(X_2;Y))$ линейно изометричны.

Аналогичные утверждения справедливы и для случая $n\geq 2$. В силу равноправности пространств $X_i$, $i=1,\ldots,n$, нами доказана следующая

**Теорема 6.2.** (о двойственности) *Пространство $\mathcal{L}_n(X_1,\ldots,X_n;Y)$ и пространство $\mathcal{L}_p(X_1,\ldots,X_p;\mathcal{L}_{n-p}(X_{p+1},\ldots,X_n;Y))$, полученные всевозможными перестановками индексов, линейно изометричны, причем эта изометрия задается при помощи равенства:*

$$\widetilde{G}_{x_1,\ldots,x_p}(x_{p+1},\ldots,x_n)=G(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_n),$$

*где $\widetilde{G}\in\mathcal{L}_p(X_1,\ldots,X_p;\mathcal{L}_{n-p}(X_{p+1},\ldots,X_n;Y))$, а $G\in\mathcal{L}_n(X_1,\ldots,X_n;Y)$.*

Рассмотрим теперь частный случай $X_1=\ldots=X_n=X$. Пространство мультилинейных непрерывных операторов в этом случае будем обозначать $\mathcal{L}_n(X;Y)$.

**Определение 6.3.** Оператор $H: X\to Y$ называется однородной формой порядка $n$, если существует оператор $G\in\mathcal{L}_n(X;Y)$ такой, что

$$Hx=G(x,\ldots,x). \tag{6.6}$$

Без доказательства приведем следующие утверждения (см. А. Картан [5]).

**Теорема 6.3.** *Если оператор $H : X \to Y$ является однородной формой порядка $n$, то существует оператор $G \in \mathcal{L}_n(X;Y)$, симметричный относительно перестановки переменных, удовлетворяющих соотношению (6.6).*

Такой оператор $G$ называют полярной формой оператора $H$ и обозначают $\widetilde{H}$.

**Теорема 6.4.** *Если оператор $H$ задан равенством (6.6), где $G$ действует из $X_1 \dot{+} \ldots \dot{+} X_n$ в $Y$ и линеен по любой из переменных, то оператор $H$ непрерывен точно тогда, когда непрерывна его полярная форма.*

Основные свойства однородных форм выражаются следующими двумя очевидными соотношениями:

$$H(\lambda x) = \lambda^n H(x), \qquad x \in X \tag{6.7}$$

для любого $\lambda \in \mathfrak{K}$,

$$\|Hx\| \le \|\widetilde{H}\| \, \|x\|^n, \qquad x \in X. \tag{6.8}$$

Величину $\|\widetilde{H}\|$ при этом называют нормой оператора $H$*).

Множество однородных форм порядка $m$ будем обозначать $\mathcal{L}^m(X,Y)$. Ясно, что $\mathcal{L}^m(X,Y)$ относительно нормы $\|\widetilde{H}\|$ есть линейное нормированное пространство.

## § 7. Производные высших порядков

Один из способов определения производных и дифференциалов высших порядков состоит в следующем.

**Определение 7.1.** Пусть для оператора $F : X \to Y$ в некоторой окрестности точки $x \in X$ существует первая вариация $\delta F(x, h_1)$ на любом элементе $h_1 \in X$. Тогда, если при любом фиксированном $h_1$ и любом $h_2$ в пространстве $Y$ существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{\delta F(x + th_2, h_1) - \delta F(x, h_1)}{t} = \delta_2 F(x, h_1, h_2), \tag{7.1}$$

то этот предел называется второй вариацией оператора $F$.

По индукции определяются $n$-ые вариации. Именно, если $\delta_{n-1}(x, h_1, \ldots, h_{n-1})$ существует при любых $h_1, \ldots, h_{n-1} \in X$ из некоторой окрестности точки $x$ и существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{\delta_n F(x + th_n, h_1, \ldots, h_{n-1}) - \delta_{n-1} F(x, h_1, \ldots, h_{n-1})}{t} = \delta_n(x, h_1, \ldots, h_n), \tag{7.2}$$

то этот предел называют $n$-ой вариацией оператора $F$.

---

*) Легко видеть, что $\|\widetilde{H}\|$ является наименьшей постоянной, для которой выполняется соотношение $\|\widetilde{H}x\| \le \mathrm{const}\, \|x\|^n$, $x \in X$.

Если оператор $F$ дифференцируем по Гато в некоторой окрестности точки $x$, то вариацию $\delta F$ можно рассматривать в этой окрестности как оператор, действующий из $X$ в $\mathcal{L}(X;Y)$. Действительно, равенство

$$\delta F(x,h) = A(x)h$$

ставит в соответствие каждому $x \in \mathcal{D}$ оператор $A(x) = F'(x) \in \mathcal{L}(X;Y)$. Если этот оператор, в свою очередь, дифференцируем по Гато в точке $x$, то есть существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{A(x+th_2) - Ax}{t} = B(x)h_2, \tag{7.3}$$

то, очевидно, на элементе $h_1$ этот предел совпадает со второй вариацией $\delta_2 F(x,h_1,h_2)$, определенной формулой (7.1). Таким образом, в этом том случае $\delta_2 F$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ и согласно теореме 6.2 как элемент пространства $\mathcal{L}_2(X;Y)$, то есть как билинейный относительно $h_1, h_2$ оператор, действующий из $X\dot{+}X$ в $Y$.

Этот оператор называют второй производной по Гато, а его значение на элементе $(h_1,h_2) \in X\dot{+}X$ — вторым дифференциалом Гато и обозначают $D^2F(x,h_1,h_2)$ $(= \delta_2 F(x,h_1,h_2))$.

По индукции определяется $n$-ая производная по Гато и $n$-ый дифференциал Гато оператора $F$ посредством рекуррентного соотношения

$$D^nF(x,h_1,\dots,h_n) = D(D^{n-1}F(x,h_1,\dots,h_{n-1});h_n).$$

В соответствии с определением 1.3 определяется $n$-ая производная и $n$-ый дифференциал Фреше оператора $F$*).

Предположим, что в некотрой точке точе $x_0 \in X$ и в каждой точке открытого отрезка $]x_0, x_0{+}h[$ существует $n{+}1$ вариация оператора $F$, причем $\|\delta_{n+1}F(x,h_1,\dots,h_{n+1})\| \le M$ при $x \in ]x_0,x_0{+}h[$, $\|h_1\| = \ldots = \|h_{n+1}\| = 1$, $M < \infty$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)\langle F(x{+}th), y^*\rangle$, определенную в полуинтервале $[0,1)$ и дифференцируемую в каждой точке этого отрезка, причем

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \frac{1}{\Delta t}(F(x_0+th+\Delta th) - F(x_0+th)), y^* \right\rangle = \langle \delta F(x_0+th,h), y^*\rangle.$$

Очевидно, что существует также

$$\varphi''(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \delta F(x_0+th+\Delta th,h) - \delta F(x_0+th,h)), y^*\rangle}{\Delta t} =$$

$$= \langle \delta_2 F(x_0+th,h,h), y^*\rangle.$$

*) Более удобно иногда было бы воспользоваться теоремой 1.2. Например, если для дифференцируемого по Фреше оператора $F$ равенство (7.3) выполняется равномерно относительно $h_2$, $\|h_2\| = 1$, где $B(x) \in \mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X;Y))$, то оператор $F$ назовем дважды дифференцируемым по Фреше.

Аналогично, существуют $\varphi^{(k)}(t)$, $k = 3, \dots, n+1$, на полуинтервале $[0, 1[$, причем $|\varphi^{(n+1)}(t)| \leq M < \infty$. Используя формулу Тейлора для функции $\varphi(t)$, получаем:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\zeta)t^{n+1},$$

где $\zeta \in [0, t]$, что равносильно

$$F(x_0 + th) = F(x_0) + \delta F(x_0, h)t + \frac{1}{2!}\delta_2 F(x_0, h, h)t^2 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\delta_n F(x_0, h, \ldots, h)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\delta_{n+1}F(x_0 + \zeta h); h, \ldots, h))t^{n+1}. \tag{7.4}$$

Последнюю формулу естественно назвать формулой Тейлора для оператора $F$.

В частности, если $F$ дифференцируем по Гато или Фреше $n$ раз, то, полагая в (7.4) $t = 1$, $d_k(x, h) = \dfrac{1}{k!}\zeta_k F(x, h)$, имеем:

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + A_1(x_0)h + A_2(x_0, h) + \ldots + A_n(x_0, h) + \omega(x_0, h), \tag{7.5}$$

где, очевидно, $A_i(x_0, \cdot)$ — однородные формы порядка $i: \ 1 \leq i \leq n$,

$$\|\omega(x_0, h)\| \leq M\|h\|^{n+1}. \tag{7.6}$$

Отметим также, что в случае дифференцируемости оператора $F$ по Фреше в некоторой окрестности точки $x_0$ представление (7.5) справедливо равномерно по $h$, $\|h\| \leq \varepsilon$, а число $M$ в (7.6) не зависит от $h$. В этом случае оператор $F$ называется дифференцируемым по Тейлору, а выражения $A_i(x_0, h)$ — производными Тейлора порядка $i: \ 1 \leq i \leq n$.

Справедливо и обратное утверждение: если оператор $F$ $n+1$-раз дифференцируем на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ и допускает представления (7.5) – (7.6), где $A_i(x_0, h)$ — однородные формы порядка $i$, $1 \leq i \leq n$, то

$$i!\,\widetilde{A}_i(h_1, \ldots, h_i) = \delta_i F(x_0, h_1, \ldots, h_i), \tag{7.7}$$

где $\widetilde{A}_i$ — полярные формы оператора $A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство этого утверждения содержится, например, в книге А. Картана [5].

**Замечание 7.1.** Предположение о существовании последовательных производных до $n+1$-го порядка включительно в последнем утверждении существенно, ибо, как показывает следующий пример, оператор $F$: $Fx = x^{n+1}\sin x^{-n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$ в точке 0 дифференцируем по Тейлору $n$-раз, т. е. допускает представление (7.5) – (7.6) (здесь $A_i(0, h) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\omega(0, h) = h^{n+1}\sin h^{-n-1}$), но не имеет производных выше первого порядка.

**Определение 7.2.** Оператор $F : X \to Y$, заданный в окрестности точки $x_0$, называется $\delta$-аналитическим в этой точке, если для любого $h \in X$ найдется число $r(x_0, h)$ такое, что при $t \in \mathfrak{K}$, $|t| < r(x_0, h)$ справедливо представление

$$F(x_0 + th) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x_0, h)t^n,$$

где ряд в правой части сходится нормально, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|B_n(x_0,h)\|\,|t|^n < \infty. \tag{7.8}$$

Оператор $F$ назовем $\mathcal{G}$-аналитическим (или аналитическим по Гато), если выражения $B_n(x_0,h)$ представляют собой значения однородных форм из $X^n$ в $Y$, заданных на элементе $h \in X$.

Пусть $\rho(x_0,h)$ — радиус сходимости степенного ряда в неравенстве (7.8). По формуле Коши-Адамара:

$$\rho(x_0,h) = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B_n(x_0,h)\|}}. \tag{7.9}$$

Оператор $F$ назовем $\mathcal{F}$-аналитическим (или просто аналитическим) в точке $x_0$, если он $\mathcal{G}$-аналитичен и для всех $h \in X$ с $\|h\| = 1$ существует $\rho > 0$ такое, что

$$\rho(x,h) \geq \rho,$$

где $\rho(x_0,h)$ определяется формулой (7.8).

Очевидно, если оператор $F$ аналитичен по Гато и

$$a = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B_n\|} < \infty^{*)},$$

то оператор $F$ является аналитическим и для всех $h$: $\|h\| < a$ справедливо пред- [Z]
ставление

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x_0,h), \tag{7.10}$$

где ряд в правой части сходится равномерно для всех $h$, $\|h\| \leq \widetilde{r} < r$. Обозначим множества $\delta$-аналитических (соответственно, $\mathcal{G}$-аналитических, аналитических) операторов в точке $x_0$ через $\mathcal{H}_\delta(x_0,Y)$ (соответственно $\mathcal{H}_\mathcal{G}(x_0,Y)$, $\mathcal{H}(x_0,Y)$). В соответствии с обозначениям § 1 очевидны включения

$$\mathcal{H}_\delta(x_0,Y) \subseteq \mathcal{V}(x_0,Y),$$
$$\mathcal{H}_\mathcal{G}(x_0,Y) \subseteq \mathcal{G}(x_0,Y),$$
$$\mathcal{H}(x_0,Y) \subseteq \mathcal{F}(x_0,Y).$$

В главе III будет показано, что для комплексных пространств в этих отношениях имеют места равенства. Для вещественных же справедливы лишь строгие включения.

На протяжении всей первой главы мы постоянно подчеркиваем особую роль комплексных пространств в теории дифференцирования. Действительно, те свойства дифференцируемых операторов в комплексных пространствах, о которых мы упоминаем в замечаниях, дают далеко идущие следствия. Так, например, некоторые локальные характеристики решений операторных уравнений в комплексных пространствах являются глобальными. Однако, для доказательства этого оказывается недостаточным только аппарата дифференцирования. Именно, аппарат интегрального исчисления, развиваемый в гл. II, в сочетании с дифференциальным дает эти результаты.

*) Символом $\|B_n\|$ здесь обозначается норма однородного оператора $B_n : X \to Y$ соответственно с определением § 6.

# § 8. Полная непрерывность оператора и его производных

Нас будет интересовать в этом параграфе такой вопрос: как свойство полной непрерывности дифференцируемого оператора*) влияет на свойство его производных. Предварительно нам понадобится

**Лемма 8.1.** *Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ вполне непрерывен в $X$ точно тогда, когда он вполне непрерывен в некотором ограниченном шаре с центром в нуле.*

□ Необходимость этого утверждения вытекает непосредственно из определения.

Достаточность. Пусть $\mathcal{D}$ произвольное ограниченное множество в $X$. Выберем любую последовательность $\{y_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq AD$, т. е. $y_n = Ax_n$, $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$. Поскольку шар $\mathcal{U}$ имеет центр в нуле, то он поглощает множество $\mathcal{D}$, т. е. найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda\mathcal{U} \supseteq \mathcal{D}$. Значит, последовательность $\{x'_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ лежит в $\mathcal{U}$, где $x'_n = \lambda^{-1}x_n$, а последовательность $\{y'_n |\ n \in \mathbb{N}\}$, $y'_n = Ax'_n$ предкомпактна в $Y$. Но $y_n = \lambda y'_n$, и поэтому последовательность $\{y_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ также предкомпактна. ■

**Пример 8.1.** Пусть $X = Y = \widetilde{C}_{[a,b]}$. Рассмотрим линейный интегральный оператор $A : X \to Y$, определяемый равенством

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds, \tag{8.1}$$

где $K(t,s)$ непрерывная, вообще говоря, комплекснозначная функция своих аргументов $(t,s) \in \Omega = [a,b] \times [a,b]$ (сравни (3.3)). Покажем, что оператор $A$ вполне непрерывен. Действительно, непрерывность этого оператора очевидна. Докажем его предкомпактность. Для этого согласно теореме Арцела – Асколи и лемме 8.1 достаточно установить равностепенную непрерывность функций $y(t) \in A\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — единичный шар в $X$. Мы имеем:

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds.$$

Поскольку функция $K(t,s)$ равномерно распределена на $\Omega$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon$ для любого $s \in [a,b]$ и любых $t_1,\ t_2 \in [a,b]$, как только $|t_1 - t_2| < \delta$. Учитывая, что

$$|x(s)| \le \|x(s)\| = \max_{[a,b]} |x(s)| \le 1,$$

получаем

$$|y(t_1) - y(t_2)| \le \varepsilon(b-a),$$

как только $|t_1 - t_2| < \delta$.

**Пример 8.2.** Рассмотрим оператор $A$, определяемый формулой (8.1), но действующий в пространстве $X = \widetilde{L}_2[a,b]$. Оказывается, что и в том случае, если ядро

*) По поводу определения и свойств вполне непрерывных операторов см. §§ 6, 10 гл. 0.

$K(t,s)$ непрерывно[*)] на $\Omega = [a,b] \times [a,b]$, то оператор $A$ вполне непрерывен. Для доказательства достаточно провести рассуждения, аналогичные предыдущим, и воспользоваться неравенством Коши-Буняковского:

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \int\limits_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \left( \int\limits_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int\limits_a^b |x(s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\sqrt{b-a}.$$

Используя неравенства Гельдера, можно показать, что оператор (8.1) с непрерывным ядром $K(t,s)$ вполне непрерывен в любом пространстве $\widetilde{L}_p[a,b]$ и более того, он вполне непрерывен и как оператор, действующий из $\widetilde{L}_p[a,b]$ в $\widetilde{C}_{[a,b]}$. Очевидна следующая

**Лемма 8.2.** *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — топологические пространства; операторы $F$, $G$ определены и непрерывны в областях $\mathcal{D} \subseteq X$ и $\mathcal{U} \subseteq Y$ соответственно, $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$, причем $F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{U}$. Тогда, если один из операторов $F$ или $G$ компактен, то оператор композиции $GF : X \to Z$ вполне непрерывен.*

Это свойство позволяет без труда устанавливать полную непрерывность многих операторов.

**Пример 8.3.** Пусть $X = Y = \widetilde{C}_{[a,b]}$. Рассмотрим оператор Гаммерштейна $F : X \to X$

$$Fx(t) = \int\limits_a^b K(t,s) f(s, x(s))\,ds,$$

где $K(t,s)$ непрерывна в квадрате $\Omega = [a,b] \times [a,b]$, а $f(s,y)$ непрерывна по совокупности переменных при $a \leq s \leq b$, $y \in \mathbb{C} :\ |y| \leq r$. Тогда оператор $F$ вполне непрерывен в шаре $\mathcal{D} = \{x \in X :\ \|x\| \leq r\}$. Действительно, достаточно заметить, что оператор $F$ представляет собой композицию оператора суперпозиции $f(s,x)$ и линейного вполне непрерывного оператора $A :\ Au(t) = \int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds$.

**Замечание 8.1.** Оператор суперпозиции, действующий в пространстве $\widetilde{C}_{[a,b]}$, свойством полной непрерывности не обладает, за исключением тривиального случая, когда $f(s,x)$ не зависит от $x$. Однако, тот же оператор, но действующий в другом пространстве, может этим свойством обладать. Например, оператор суперпозиции, непрерывный по своим аргументам, вполне непрерывен, если пространство, в котором он действует, является монтелевым (см. § 4, гл. 0) т. е. всякое его ограниченное множество предкомпактно. Заметим, что в силу теоремы 0.4.1 бесконечномерное нормированное пространство этим свойством не обладает.

Пусть теперь $X$, $Y$ — произвольные банаховы пространства, $\mathcal{D}$ — некоторая область в $X$.

---

[*)] На самом деле, достаточно предположить, что ядро $K(t,s)$ является так называемым ядром *Гильберта – Шмидта*, то есть $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K(t,s)\,dsdt < \infty$ (см., например, Красносельский [7]).

**Теорема 8.1.** (М.А. Красносельский [7]) *Пусть оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ вполне непрерывен в $\mathcal{D}$ и дифференцируем по Фреше в некоторой точке $x_0 \in X$. Тогда вполне непрерывен и оператор $A = F'(x_0) : X \to Y$.*

$\square$ Предположим противное. Пусть множество значений оператора $A$ на единичной сфере не предкомпактно: тогда найдется последовательность $\{h_n | \; n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, $\|h_n\| = 1$, и число $\delta > 0$, для которых $\|A(h_n - h_m)\| > 3\delta$, $n, m \in \mathbb{N}$. Положим $\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - Fx_0 - Ah$. Пусть $x_n = x_0 + \rho h_n$, где число $\rho > 0$ выбрано так, чтобы $x_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ и

$$\frac{1}{\rho}\,\|\omega(x_0, \rho h_n)\| = \frac{1}{\rho}\,\|F(x_0 + \rho h_n) - Fx_0 - \rho A h_n\| < \delta.$$

Тогда из равенства

$$Fx_n - Fx_m = \rho A(h_n - h_m) + \omega(x_0, \rho h_n) - \omega(x_0, \rho h_m)$$

следует оценка

$$\|Fx_n - Fx_m\| \geq \rho\|A(h_n - h_m)\| - \|\omega(x_0, \rho h_n)\| - \|\omega(x_0, \rho h_m)\| \geq \rho\delta, \qquad n,\ m \in \mathbb{N},$$

которая в силу ограниченности последовательности $\{x_n | \; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}$ означает, что оператор $F$ не является вполне непрерывным. $\blacksquare$

По индукции доказывается более общая

**Теорема 8.2.** *Пусть оператор $F : X \to Y$ вполне непрерывен в области $\mathcal{D}$ и допускает в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{D}$ представление Тейлора*

$$F(x_0 + h) = Fx_0 + A_1(x_0, h) + \ldots + A_n(x_0, h) + \omega(x_0, h),$$

*где $A_i(x_0, h)$ — однородные формы по $h$, порядка $i$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\|\omega(x_0, h)\| \leq M\|h\|^{n+1},$$

*где $M < \infty$ и не зависит от $h$. Тогда формы $A_i(x_0, h)$ вполне непрерывны как операторы, действующие из пространства $X$ в пространство $Y$.*

**Замечание 8.2.** В условиях теоремы 8.2 достаточно требовать, чтобы формы $A_i(x_0, h)$ порождались $i$-линейными не обязательно непрерывными операторами $\widetilde{A}_i(x_0, h_1, \ldots, h_i)$. Отсюда будет следовать непрерывность $A_i(x_0, h)$ по $h$.

$\square$ Действительно, поскольку оператор $F$ непрерывен, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r > 0$ такое, что при всех $h :\ \|h\| < r$ будем иметь $\|F(x_0 + h) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Тогда для всех таких $t$, что $0 \leq t \leq 1$, получим

$$\|\Phi(x_0, th)\| = \|tA_1(x_0, h) + \ldots + t^n A_n(x_0, h)\| \leq \varepsilon + Mr^{n+1} = N,$$

$(\Phi(x_0, th) = F(x_0 + th) - Fx_0) - \omega(x_0, th))$. Для любого линейного функционала $y^* \in Y^*$ выражение $\varphi(t) = \langle \Phi(x_0, th), y^* \rangle$ представляет собой многочлен степени $n$ по $t$, причем $|\varphi(t)| \leq N$ для всех $t$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда найдется число $l > 0$ такое, что коэффициенты этого многочлена не превосходят по модулю числа $lN$, т. е.

$$|\langle A_i(x_0, h), y^* \rangle| \leq Nl.$$

В силу произвольности $y^* \in Y^*$ получим

$$\|A_i(x_0, h)\| \leq Nl$$

для всех $h: \ \|h\| \leq r$, т. е. оператор $A_i(x_0, h)$ окажется ограниченным, а следовательно, и непрерывным. ■

**Пример 8.4.** Рассмотрим нелинейный оператор $F$ типа Вольтерра

$$(Fx)(t) = \int\limits_a^b K(t,s) f(s, x(s))\, ds,$$

где $K(t,s)$, $f(s,u)$ — непрерывные функции своих аргументов $a \leq t, \ s \leq b$, $|u| \leq R$, $u \in \mathbb{C}$, а $f(s,u)$ допускает представление

$$f(s,u) = \sum_{i=0}^{n} a_i(s) u^i + b(s,u),$$

где $\sup\limits_{a \leq s \leq b} |b(s,u)| \leq m|u|^{n+1}$.

Рассуждая так же, как в предыдущих примерах, легко показать, что оператор $F$ вполне непрерывен в $\widetilde{C}_{[a,b]}$ и, если функции $a_i(s)$ непрерывны на $[a,c]$, то он допускает представление Тейлора в нуле порядка $n$, с вполне непрерывными однородными формами

$$(A_i(0,h))(t) = \int\limits_a^b K(t,s) a_i(s) h^i(s)\, ds, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{8.2}$$

Однако, можно доказать полную непрерывность операторов (8.2) и без предположения о непрерывности функций $a_i(s)$. Для этого достаточно показать, что операторы (8.2) действуют из $\widetilde{C}_{[a,b]}$ в $\widetilde{C}_{[a,b]}$. Действительно, из замечания 8.2 следует, что функции $a_i(s)$ ограничены на отрезке $[a,b]$. Но тогда значения правой части (8.2) представляют собой непрерывную функцию по $t$ на отрезке $[a,b]$, что и требовалось.

# ГЛАВА II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

## § 1. Интегралы Римана – Стильтьеса от вектор-функции

Напомним, что функцией мы назвали (см. § 1, гл. 0) отображение, область определения которого лежит в скалярном поле $\mathfrak{K}$ вещественных или комплексных чисел. В этой главе рассматриваются функции, значения которых принадлежат нормированному пространству — они называются вектор-функциями — и функции со значениями в поле скаляров, называемые скалярными. При этом символом $f(t)$ обозначается как сама функция $f$, так и ее значение в точке $t$ — точный смысл будет ясен из контекста. Начиная с этой главы, термину "вектор-функция" придадим более широкое значение: всюду ниже вектор-функцией называется отображение $f : X \to Y$, где $X$ — конечномерное пространство.

В этом параграфе считаем, что $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$ и $Y$ — банахово, т. е. полное нормированное пространство.

**Определение 1.1.** Вектор-функция $y$, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$ называется вектор-функцией с ограниченным изменением, если существует такое число $M < \infty$, что при любом выборе конечного числа непересекающихся промежутков $(\alpha_i, \beta_i)$ в $(\alpha, \beta)$ справедливо соотношение

$$\left\|\sum_i [y(\beta_i) - y(\alpha_i)]\right\| \leq M. \tag{1.1}$$

Число $\mathrm{Var}\,[y] = \sup \left\|\sum\limits_i [y(\beta_i) - y(\alpha_i)]\right\|$ называют полной вариацией вектор-функции на отрезке $[\alpha, \beta]$.

**Замечание 1.1.** Если $y$ — вектор-функция с ограниченным изменением, то при каждом $y^* \in Y^*$ таковой же является и скалярная функция $\varphi_{y^*}(t) = \langle y(t), y^* \rangle$. Справедливо и обратное утверждение, принадлежащее независимо Данфорду и Гельфанду: если $\mathrm{Var}\,[\varphi_{y^*}(t)] \leq M(y^*) < \infty$ для всякого $y^* \in Y^*$: $\|y^*\| = 1$, то $y(t)$ — вектор-функция с ограниченным изменением.

**Определение 1.2.** Пусть $y$ — вектор-функция, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$, а $g$ — скалярная функция со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), определенная на том же промежутке.

Выражения

$$S_\pi(y, g) = \sum_{i=1}^{n} y(t_i)[g(\sigma_i) - g(\sigma_{i-1})]$$

и

$$s_\pi(y, g) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)[y(\sigma_i) - y(\sigma_{i-1})],$$

где $\alpha = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = \beta$, $\sigma_{i-1} \leq t_i \leq \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$, $|\pi| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i - \sigma_{i-1}|$, назовем интегральными суммами Римана – Стильтьеса.

**Теорема 1.1.** *Если в сильной, слабой или ультраслабой топологии пространства $Y$ существует один из пределов*

$$\lim_{|\pi|\to 0} S_\pi(y,g), \qquad \lim_{|\pi|\to 0} s_\pi(y,g),$$

*то существует и другой. Эти пределы называются интегралами Римана – Стильтьеса и обозначаются соответственно $(R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta y(t)\,dg(t)$ и $(R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dy(t)$. При этом справедливо равенство*

$$(R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta y(t)\,dg(t) = y(t)g(t)\Big|_\alpha^\beta - (R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dy(t). \tag{1.2}$$

□ Утверждение следует непосредственно из тождества

$$S_\pi(y,g) = y(\beta)g(\beta) - y(\alpha)g(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} g(\sigma_i)[y(t_{i+1}) - y(t_i)].\blacksquare$$

**Теорема 1.2.** *Предположим, что одна из функций $y$ или $g$ имеет ограниченное изменение, а другая непрерывна (для $y$ непрерывность понимается в сильном смысле). Тогда интегралы*

$$(R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta y(t)\,dg(t) \quad \text{и} \quad (R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dy(t)$$

*существуют в сильной топологии пространства $Y$. При этом, если $A$ — линейный непрерывный оператор, отображающий $Y$ в некоторое банахово пространство $Z$, то*

$$A\bigg((R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta y(t)\,dg(t)\bigg) = (R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta A(y(t))\,dg(t) \tag{1.3}$$

*и*

$$A\bigg((R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dy(t)\bigg) = (R\text{-}S)\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,dA(y(t)). \tag{1.4}$$

□ Предположим, что вектор-функция $y$ непрерывна в сильной топологии, а $g$ имеет ограниченное изменение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|y(t_1) - y(t_2)\| < \varepsilon$ как только $|t_1 - t_2| < \delta$. Выбрав $|\pi_1|,\ |\pi_2| < \frac{\delta}{2}$, имеем

$$\|S_{\pi_1} - S_{\pi_2}\| \le \mathrm{Var}\,[g]\cdot 2\varepsilon.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы. Перейдем к доказательству равенств (1.3), (1.4).

Если функция $y$ непрерывна или имеет ограниченное изменение, то в силу линейности и непрерывности оператора $S : Y \to Z$, таким же свойством обладает и вектор-функция $h = Ay : [\alpha, \beta] \to Z$. Потому интегралы в правых частях (1.3), (1.4) существуют. Далее, вновь в силу линейности $A$ справедливы тождества

$$S_\pi(A(y), g) \equiv AS_\pi(y, g),$$

$$s_\pi(A(y), g) \equiv As_\pi(y, g),$$

из которых, переходя к пределу, получаем (1.3) и (1.4). ■

**Следствие 1.1.** *Для вектор-функции $y$ и скалярной функции $g$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.2, справедливы следующие соотношения*

$$\left\langle (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, dg(t), y^* \right\rangle = (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta \langle y(t), y^* \rangle\, dg(t), \tag{1.5}$$

$$\left\langle (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta g(t)\, dy(t), y^* \right\rangle = (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta g(t)\, d\langle y(t), y^* \rangle, \tag{1.6}$$

*где $y^* \in Y^*$, а интегралы в правых частях (1.5), (1.6) являются обычными интегралами Римана-Стильтьеса от скалярных функций.*

**Следствие 1.2.** *Если вектор-функция $y$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а $g$ имеет ограниченное изменение, то*

1)
$$\left\| (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, dg(t) \right\| \leq \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|y(t)\| \cdot \mathrm{Var}\,[g] = M; \tag{1.7}$$

2) *если последовательность непрерывных вектор-функций $\{y_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ равномерно на $[\alpha, \beta]$ сходится к $y$ в норме пространства $Y$, то*

$$\lim_{n \to \infty} (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y_n(t)\, dg(t) = (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, dg(t) \tag{1.8}$$

*(предел в (1.8) понимается в сильном смысле).*

□ Из оценки $\|S_\pi(y, g)\| \leq M$ следует неравенство (1.7), а из него вытекает соотношение (1.8), поскольку

$$\left\| (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y_n(t)\, dg(t) - (R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, dg(t) \right\| \leq \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|y_n(t) - y(t)\| \cdot \mathrm{Var}\,[g].$$

■

**Замечание 1.2.** Формула (1.2) представляет собой обобщение классической формулы интегрирования по частям. Полагая в ней $g(t) \equiv 1$ получаем аналог формулы Ньютона – Лейбница.

$$(R\text{-}S) \int\limits_\alpha^\beta dy(t) = y(\beta) - y(\alpha). \tag{1.9}$$

В то же время, полагая в интеграле $(R\text{-}S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dg(t),\ g(t)\equiv t$, получаем обобщение классического интеграла Римана.

## § 2. Интеграл Петтиса и связь с интегралом Римана – Стильтьеса

В последующих главах важную роль играет интеграл, введенный Петтисом [10] в 1938 г. и являющийся одним из обобщений классического интеграла Лебега.

**Определение 2.1.** Пусть на некотором измеримом множество $\sigma$ задана вектор-функция $y(\sigma)$ со значениями в банаховом пространстве $Y$ такая, что для любого $y^* \in Y^*$ скалярная функция $\langle y(\sigma), y^*\rangle$ интегрируема в смысле Лебега. Тогда, если существует элемент $z \in Y$ такой, что

$$\langle z, y^*\rangle = \int\limits_{\sigma} \langle y(\sigma), y^*\rangle\, d\sigma$$

для всех $y^* \in Y^*$, то $z$ называется интегралом Петтиса и обозначается

$$z = (P)\int\limits_{\sigma} y(\sigma)\, d\sigma. \tag{2.1}$$

Отметим, что для случая рефлексивного пространства $Y$ интеграл Петтиса существует, если функция $\langle y(\sigma), y^*\rangle$ измерима и интегрируема по Лебегу при всех $y^* \in Y^*$ (см. Хилле и Филлипс [21]).

Нас будет интересовать случай, когда пространство $Y$ комплексно, а $\sigma$ — контур в $\mathbb{C}$. Установим для этого случая существование интеграла Петтиса и его связь с интегралом Римана – Стильтьеса.

Рассмотрим в качестве $\sigma$ какой-нибудь контур $\gamma$ в $\mathbb{C}$, заданный уравнением $\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C},\ \zeta = \zeta(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$, где $\zeta(t)$ — непрерывная функция с ограниченным изменением на $[\alpha, \beta]$. Пусть $y$ — сильно непрерывная вектор-функция, заданная на $\gamma$. Тогда скалярная функция $\varphi_{y^*}:\ \varphi_{y^*}(\tau) = \langle y(\tau), y^*\rangle,\ y^* \in Y^*$, интегрируема на $\gamma$ в смысле Лебега и

$$\int\limits_{\gamma} \varphi_{y^*}(\tau)\, d\tau = (R\text{-}S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi_{y^*}(\tau(t))\, d\tau(t) = (R\text{-}S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} \langle y(\tau(t)), y^*\rangle\, d\tau(t).$$

В то же время вектор-функция $\widetilde{y} = y \circ \zeta$ сильно непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и поэтому в силу теоремы 1.2 существует интеграл Римана – Стильтьеса

$$(R\text{-}S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} \widetilde{y}(t)\, d\tau(t) = (R\text{-}S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(\tau(t))\, d\tau(t) = z \in Y.$$

Согласно (1.5) для любого $y^* \in Y^*$ имеет место равенство

$$\langle z, y^* \rangle = (R\text{-}S) \int\limits_{\alpha}^{\beta} \langle y(\tau(t)), y^* \rangle \, d\tau(t) = \int\limits_{\gamma} \langle y(\tau), y^* \rangle \, d\tau,$$

которое означает, что функция $y$ интегрируема в смысле Петтиса на $\gamma$:

$$z = (P) \int\limits_{\gamma} y(\tau) \, d\tau = (R\text{-}S) \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(z(\tau)) \, d\tau(t).$$

При этом, если $\gamma$ — гладкий контур, т. е. существует функция $\zeta'(t)$ непрерывная на $[\alpha, \beta]$, то справедливо равенство

$$(P) \int\limits_{\gamma} y(\tau) \, d\tau = (R\text{-}S) \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(z(\tau)) \tau'(t) \, dt. \tag{2.2}$$

В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, мы будем опускать символ $(P)$ перед знаком интеграла и писать просто $\int y(\tau) \, d\tau$.

## § 3. Первообразные вектор-функции. Интегральное представление

**1.** В формуле (1.2) символ дифференциала, вообще говоря, является формальным, ибо эта формула справедлива для вектор-функций, не обязательно дифференцируемых — как следует из теоремы 1.2 достаточно, например, ограниченности полного изменения вектор-функции под знаком дифференциала.

Здесь мы покажем, что классическая формула Ньютона – Лейбница допускает прямое обобщение на случай вектор-функций, если дополнительно предположить их дифференцируемость. Предварительно, как это делается в классическом анализе, докажем следующее утверждение о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, представляющее также самостоятельный интерес.

**Лемма 3.1.** *Пусть вектор-функция $y$, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$ со значениями в банаховом пространстве $Y$, интегрируема в смысле Римана на отрезке $[\alpha, \beta]$ (см. Замечание 1.2) и непрерывна в точке $\nu \in [\alpha, \beta]$. Тогда вектор-функция $f : [\alpha, \beta] \to Y$, определенная равенством*

$$f(\tau) = (R) \int\limits_{\alpha}^{\tau} y(t) \, dt, \tag{3.1}$$

*дифференцируема в точке $\nu$ и*

$$f'(\nu) = y(\nu).$$

□ Рассмотрим разность

$$\frac{f(\nu+\varepsilon)-f(\nu)}{\varepsilon}-y(\nu)=\frac{1}{\varepsilon}\ (R)\int\limits_{\nu}^{\nu+\varepsilon}(y(t)-y(\nu))\,dt.$$

Согласно (1.7),

$$\left\|\frac{f(\nu+\varepsilon)-f(\nu)}{\varepsilon}-y(\nu)\right\|\le\sup_{\nu\le t\le\nu+\varepsilon}\|y(t)-y(\nu)\|.$$

Но правая часть последнего неравенства вследствие непрерывности $y(t)$ стремится к нулю, откуда и получаем требуемое. ■

**Следствие 3.1.** (формула Ньютона – Лейбница) *Пусть вектор-функция $g(t)$ определена и непрерывно-дифференцируема в каждой точке отрезка $[\alpha,\beta]$. Тогда справедлива формула*

$$g(\beta)-g(\alpha)=(R)\int\limits_{\alpha}^{\beta}g'(t)\,dt. \tag{3.2}$$

□ Рассмотрим функцию $f$ вида (3.1), где $y(t)=g'(t)$. Тогда $f(\beta)$ есть интеграл (3.2). Далее, для любого $y^*\in Y^*$ справедливо тождество

$$\langle f'(t),y^*\rangle=\langle g'(t),y^*\rangle,\qquad t\in(\alpha,\beta).$$

Следовательно, существует постоянная $c(y^*)$, для которой

$$\langle f(t),y^*\rangle=\langle g(t),y^*\rangle+c(y^*). \tag{3.3}$$

При этом $f(\alpha)=0$, следовательно,

$$c(y^*)=-\langle g(\alpha),y^*\rangle.$$

Подставляя $-\langle g(\alpha),y^*\rangle$ вместо $c(y^*)$ в (3.3) и полагая $t=\beta$, получаем для всякого $y^*\in Y^*$ равенство

$$\langle f(\beta)'(t),y^*\rangle=\langle g(\beta)-g(\alpha),y^*\rangle,$$

из которого и следует (3.2). ■

**2.** По аналогии с классическим анализом вектор-функцию $f$ из (3.1) естественно назвать первообразной для $y$. Если функция $y$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то ее первообразная вектор-функция существует и дифференцируема на этом отрезке, а потому непрерывна. Тогда $f_1=f$ также имеет первообразную $f_2$, непрерывную на $[\alpha,\beta]$. Рассуждая таким образом далее, получаем, что существуют и непрерывны последовательные первообразные $f_m$ любого порядка $m$ ($f'_m(t)=f_{m-1}(t)$, $f'_1(t)=f'(t)=y(t)$). При этом значение $f_1(t)$ может быть найдено повторным интегрированием

$$f_1(t)=(R)\int\limits_{\alpha}^{t}f(\tau)\,d\tau=(R)\int\limits_{\alpha}^{t}d\tau\int\limits_{\alpha}^{\tau}y(s)\,ds,$$

$\alpha \le s \le \tau \le t \le \beta$. Аналогично $f_m$ находится $m$-кратным интегрированием

$$f_m(t) = (R)\int\limits_{\alpha}^{t} dt_m \int\limits_{\alpha}^{t_m} dt_{m-1} \ldots \int\limits_{\alpha}^{t_1} y(t_1)\, dt_1$$

$(\alpha \le t_1 \le \ldots \le t_m \le t_m \le t \le \beta)$.

Покажем теперь, что $f_m$ может быть найдено с помощью однократного интегрирования.

**Теорема 3.1.** *Пусть вектор-функция* $y$ *определена и непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$. *Тогда вектор-функция* $f_m$, *задаваемая формулой*

$$f_m(t) = \frac{1}{(m-1)!}\ (R)\int\limits_{\alpha}^{t} (t-s)^{m-1} y(s)\, ds, \tag{3.3}$$

*является* $m$*-ой первообразной вектор-функцией для* $y$, *удовлетворяющей условиям*

$$f_m(\alpha) = f_m'(\alpha) = \ldots = f_m^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f_m^{(m)}(t) = y(t).$$

□ Будем доказывать теорему индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. При $m = 1$ утверждение следует из леммы 3.1. Предположим, что теорема доказана для функции $f_{m-1}(t)$. Рассмотрим ее первообразную вектор-функцию $F(t) = (R)\int\limits_{\alpha}^{t} f_{m-1}(\tau)\, d\tau$ и покажем, что она совпадает с вектор-функцией (3.3). Действительно

$$F(t) = (R)\int\limits_{\alpha}^{t} d\tau \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{(\tau - s)^{m-2}}{(m-2)!} y(s)\, ds.$$

Согласно следствию 1.1 для любого $y^* \in Y^*$

$$\langle F(t), y^* \rangle = (R)\int\limits_{\alpha}^{t} d\tau \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{(\tau - s)^{m-2}}{(m-2)!} \langle y(s), y^* \rangle\, ds.$$

По теореме Фубини в последнем интеграле можно изменить порядок интегрирования, после чего получаем соотношение

$$\langle F(t), y^* \rangle = (R)\int\limits_{\alpha}^{\tau} \langle y(s), y^* \rangle\, ds \cdot (R)\int\limits_{\alpha}^{t} \frac{(\tau - s)^{m-2}}{(m-2)!}\, d\tau.$$

Вычислив внутренний интеграл, имеем

$$\langle F(t), y^* \rangle = \frac{1}{(m-1)!} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{m-1} \langle y(s), y^* \rangle\, ds,$$

откуда из следствия 1.1 для каждого $y^* \in Y^*$ вытекает равенство

$$\langle F(t), y^* \rangle = \langle f_m(t), y^* \rangle,$$

которое и доказывает теорему. ■

Формулу (3.3) можно также понимать как восстановление некоторой функции по значениям ее производных порядка $0, 1, \ldots, m-1$ в некоторой точке и значениям $m$-ой производной в окрестности этой точки. Чтобы несколько обобщить формулу (3.3), рассмотрим следующую задачу.

Пусть задано дифференциальное уравнение $m$-го порядка

$$F^{(m)}(t) = y(t) \tag{3.4}$$

начальными условиями в некоторой точке $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F(\alpha) = y_0, \quad F'(\alpha) = y_1, \quad \ldots, \quad F^{(m-1)}(\alpha) = y_{m-1}, \tag{3.5}$$

где $y$ — непрерывная в окрестности точки $\alpha$ вектор-функция со значениями в $Y$, и пусть $y_0, \ \ldots, \ y_{m-1}$ — заданные элементы на $Y$. Тогда справедливо

**Следствие 3.2.** *Решение дифференциального уравнения* (3.4) *с начальными условиями* (3.5) *имеет вид:*

$$F(t) = y_0 + y_1(t-\alpha) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}(t-\alpha)^{m-1} y_{m-1} + (R)\int\limits_{\alpha}^{t} \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} y(s)\, ds. \tag{3.6}$$

□ Достаточно заметить, что последнее слагаемое в (3.6) есть первообразная $m$-го порядка для $y$, обращающаяся в нуль в точке $\alpha$ вместе со всеми производными, а сумма остальных слагаемых представляет собой многочлен порядка $m-1$, $m$ производная которого есть тождественный нуль, в $m-1$ первых производных принимает в точке $\alpha$ заданное значение $y_0, \ y_1, \ \ldots, \ y_{m-1}$. ■

Формула (3.6) есть ни что иное как формула Тейлора для функции $F$ с остаточным членом в интегральной форме. Ее отличие от обычной формулы Тейлора состоит в том, что интеграл $(R)\int$ дает иное представление остаточного члена*), что оказывается весьма полезным в ряде случаев.

В заключение рассмотрим вектор-функцию $f$, непрерывную в окрестности $\Omega$ точки $\zeta_0$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$, со значениями в банаховом пространстве $Y$. Пусть $\zeta_1$ — произвольная точка в $\Omega$ и $\gamma$ — гладкий контур, целиком лежащий в $\Omega$ и соединяющий точки $\zeta_0$ и $\zeta_1$:

$$\gamma = \{\zeta \in \Omega : \ \zeta = \zeta(t), \ \alpha \le t \le \beta, \ \zeta(\alpha) = \zeta_0, \ \zeta(\beta) = \zeta_1\}.$$

Рассмотрим теперь частичный контур $\gamma_\tau = \big\{\zeta \in \gamma : \ \zeta = \zeta(t), \ \alpha \le t \le \tau\big\}$ и $\int\limits_{\gamma_\tau} f(\zeta)\ d\zeta = \Phi(\zeta)$. Последний интеграл является функцией от $\zeta = \zeta(\tau)$, а $\zeta$ пробегает контур $\gamma$ от точки $\zeta_0$ до точки $\zeta(\tau)$. В то же время, согласно (2.2)

$$\Phi(\zeta) = \int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\zeta(t))\zeta'(t)\, dt = F(\tau),$$

*)Заметим, однако, что недостатком этой формулы является более четкое, чем в формуле (I.7.5.) ограничение, налагаемое на функцию: непрерывность $m$-производной в окрестности точки $\alpha$.

где $F(\tau)$ — первообразная для функций $y(\tau) = f(\zeta(\tau))\zeta'(\tau)$ и $F(\alpha) = 0$. Таким обрезом, $\Phi(\zeta(\tau)) = F(\tau)$.

Предположим, что вектор-функция $\Phi$ дифференцируема по $\tau$ в окрестности точки $\zeta_1$. Тогда, по формуле производной для сложной функции для $\tau$, достаточно близких к $\beta$,

$$\Phi'(\zeta(t)) = \Phi'(\tau)\zeta'(\tau) = F'(\tau) = f(\zeta(\tau))\zeta'(\tau).$$

Отсюда получаем $\Phi'(z_\tau) = f(z_1)$.

Таким образом, если интеграл

$$\int\limits_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z,\gamma),$$

взятый по некоторому гладкому контуру, соединяющему точки $z_0$ и $z_1$ представляет собой дифференцируемую в точке $z_1$ вектор-функцию, то

$$\Phi'_z(z,\gamma) = f(z)$$

и $\varphi'(z_1,\gamma)$ не зависит от $\gamma$, т. е. интеграл по любому контуру $\gamma$, соединяющему точки $z_0$ и $z_1$, дает значение первообразной функции для $f$ в точке $z_1$.

## § 4. Интегралы от операторов в банаховых пространствах

Теория абстрактного интегрирования вектор-функций во многом сходна с теорией интегрирования скалярных функций. По сути дела для абстрактных интегралов Римана – Стильтьеса достаточно доказывать их существование, большинство их свойств может быть выведено из свойств интегралов от скалярных функций с использованием следствия 1.1 и теорем типа Хана-Банаха. С аналогичной позиций может быть рассмотрена теория измеримых вектор-функций, теория интегралов типа Римана, Лебега и другие (см. например, Л. Шварц [25]). Здесь мы не будем касаться этих вопросов, ибо для наших целей достаточно изложенных в § 1 – 3 результатов.

Теория интегрирования оператора, действующего из одного линейного топологического пространства в другое, гораздо многообразней и сложнее. С одной стороны, понятие интеграла от оператора естественно строить таким образом, чтобы обобщались соответствующие понятия интегралов от скалярных и векторных функций. С другой, при построении этого понятия преследуются определенные прикладные цели. Один из распространенных подходов определения интеграла от оператора — это сведение к интегрированию на конечномерных сечениях (см. Э. Хилле, Р. Филлипс [21]). И хотя такой подход представляется естественным, в ряде случаев он оказывается для нас недостаточно эффективным. Например, сразу же возникают трудности при замене переменных интегрирования; далее с помощью такого подхода не удается построить теорию логарифмического вычета, аналогичную конечномерной теории, что затрудняет решение многих вопросов теории неподвижных точек некомпактных операторов, и т. п.

Придерживаясь все же традиционной схемы, в настоящем параграфе введем лишь два типа интегралов для операторов, действующих в пространствах $X$ и $Y$, наделенных специальными свойствами.

**1.** Пусть $X$, $Z$ — банаховы пространства, $Y = \mathcal{L}(X, Z)$ — пространство линейных операторов из $X$ в $Z$. Оператор $F : X \to Y$ определен в некоторой области $\mathcal{D}$, т. е. для каждого $x \in \mathcal{D}$ значение $F(x)$ есть линейный непрерывный оператор из $X$ в $Z$, зависящий от $x$ как от параметра.

**Определение 4.1.** Пусть вектор-функция $f(t) = F(x+th) \cdot h$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$. Тогда интегралом от оператора $F$ по отрезку $[x, x+h]$ назовем выражение

$$\int\limits_{x}^{x+h} F(x)\, dx = (R) \int\limits_{0}^{1} F(x+th)h\, dt. \tag{4.1}$$

Все линейные свойства интеграла (4.1) проверяются непосредственно с использованием результатов § 1. Далее, если $Z = X$, то $Y = \mathcal{L}(X, X)$ есть банахова алгебра с единицей $I$ ($I$ — тождественное отображение в $X$) и

$$\int\limits_{x}^{x+h} I\, dx = \int\limits_{x}^{x+h} dx = h.$$

Покажем, что для интегралов типа (4.1) справедлива формула восстановления значений дифференцируемого оператора по производной (аналог формулы Ньютона-Лейбница).

**Теорема 4.1.** *Пусть $X$, $Z$ — банаховы пространства и оператор $G : X \to Z$ определен в окрестности $\mathcal{D}$ точки $x_0$ и дифференцируем по Гато в каждой точке отрезка $[x_0, x_0+h]$, целиком лежащего в $\mathcal{D}$, причем производная $G'$ непрерывна в равномерной операторной топологии на этом отрезке. Тогда справедлива формула Ньютона – Лейбница*

$$G(x_0+h) - G(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} G'(x)\, dx. \tag{4.2}$$

☐ Рассмотрим вектор-функцию $g\ :\ \ g(t) = G(x_0+th)$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Она непрерывно дифференцируема на этом отрезке, ибо по формуле производной сложной функции:

$$g'(t) = G'_x(x_0+th)h.$$

По формуле (4.1) имеем:

$$(R) \int\limits_{0}^{1} G'_x(x_0+th)h\, dt = \int\limits_{x}^{x+h} G'(x)\, dx.$$

Отсюда и из

$$G(x_0+h) - G(x_0) = g(1) - g(0) = (R) \int\limits_{0}^{1} g'(t)\, dt = \int\limits_{0}^{1} G'(x_0+th)h\, dt$$

получаем равенство (4.2). ■

С другой стороны, точный аналог формулы Тейлора с остаточным членом в форме интеграла (4.1) получить не удается. Точнее, для $m$-раз непрерывно дифференцируемого в окрестности точки $x_0$ оператора $F$ применение формулы (3.6) дает представление

$$F(x_0+h) = F(x_0) + F'(x_0)h + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(x_0)h +$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!}\,(R)\int_0^1 (1-t)^{m-1}F^{(m)}(x_0+th)h^m\,dt, \qquad (4.3)$$

где символом $F^{(k)}(x_0)h^k$ обозначена однородная форма порядка $k$ из $X^k$ в $Y$ на элементе $(\underbrace{h,\ldots,h}_{k\text{ раз}})$. Интеграл в правой части (4.3) следует понимать как интеграл от вектор-функции $(1-t)F^{(m)}(x_0+\zeta h)h^m$.

**2.** Теперь рассмотрим случай, когда $X$ — банахова алгебра над полем $\mathfrak{K}$ и $F : X \to X$ — оператор, заданный в окрестности $\mathcal{D}$ точки $x_0$. Если $S$ — некоторые спрямляемый контур в $X$, т. е. $S$ определяется уравнением $x = x(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $x(t)$ — непрерывная вектор-функция с ограниченным изменением, то полагаем по определению

$$(T)\int\limits_S F(x)\,dx = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^n F(x(\tau_i))\,(x(\sigma_i) - x(\sigma_{i-1})),$$

где $\alpha = \sigma_0 \le \sigma_1 \le \ldots \le \sigma_n = \beta$, $\sigma_i \le \tau_i \le \sigma_{i+1}$.

Также, как в §1, доказывается существование этого интеграла, его линейные свойства, оценка его нормы и перестановочностью линейным непрерывным оператором, действующим из $X$ в $X$. Интеграл называют обобщенным интегралом Римана – Стильтьеса – Тейлора или, коротко, $T$-интегралом.

# ГЛАВА III. ГОЛОМОРФНЫЕ (АНАЛИТИЧЕСКИЕ) ОПЕРАТОРЫ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В главе 1 введены различные понятия дифференцируемости оператора $F : X \to Y$ в данной точке: $\delta$-дифференцируемость, $\mathcal{G}$-дифференцируемость и $\mathcal{F}$-дифференцируемость. Для каждого из этих понятий определены классы один раз дифференцируемых, $m$-раз дифференцируемых $1 \leq m \leq \infty$ и аналитических операторов. В общем случае каждый следующий класс является правильной частью предыдущего. Но для случая комплексных пространств $X$ и $Y$ и дифференцируемости оператора $F$ в целой окрестности данной точки указанные классы совпадают. Это позволяет развить стройную теорию комплексно-дифференцируемых операторов, наполненную глубокими результатами*). С другой стороны, многие операторные уравнения в вещественном пространстве удается путем комплексификации пространства и расширения оператора свести к случаю уравнений в комплексном пространстве. Чтобы, подчеркнуть важную роль комплексных пространств в теории дифференцируемых операторов, в дальнейшем для таких пространств, вместо термина “дифференцируемые”, мы будем использовать термин “голоморфные” (точные определения см. ниже) операторы, вектор-функции и т. д.

Теория голоморфных операторов и вектор-функций во многом схожи и различаются лишь в тех аспектах, в которых существенно конечномерность одного из пространств области определения или области значений оператора. Поэтому мы будем излагать эти теории с общих позиций.

## § 1. Дифференцируемость в комплексном и вещественном смысле. Условия Коши – Римана

Везде в дальнейшем будем считать $X$ и $Y$ комплексными нормированными пространствами. Пусть оператор $F : X \to Y$ дифференцируем в точке $x_0$, в соответствии с одним из определений I.1.1 – I.1.3 (будем говорить, что $F$ комплексно-дифференцируем). Тогда этот оператор дифференцируем в соответствии с тем же определением и относительно поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел (в случае определения I.1.3 это означает вещественную линейность производной Фреше). В этом случае, мы будем говорить, что оператор вещественно-дифференцируем в соответствии с данным определением. При этом первую вариацию оператора $F$ будем обозначать через $\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h)$.

*)Ниже мы увидим, что в ряде случаев изучение производной Фреше некоторого оператора в точке позволяет указать не только локальные, но и глобальные характеристики поведения этого оператора.

**Теорема 1.1.** *Если оператор $F : X \to Y$ непрерывно вещественно-дифференцируем в соответствии с одном из определений* I.1.1 – I.1.3 *в некоторой окрестности $\mathcal{D} \subseteq X$, то он комплексно-дифференцируем точно тогда, когда его первая вариация $\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h)$ удовлетворяет условию*

$$\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, ih) = i\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h), \tag{1.1}$$

*где $i$ — мнимая единица.*

$\square$ Необходимость условия (1.1) очевидна, ибо вариация $\delta F(x_0, h)$ как производная вектор-функции $f(\lambda) = F(x_0 + \lambda h)$ однородна по $\lambda$.

Достаточность. Пусть выполнено (1.1). Представим $\lambda \in \mathbb{C}$ в виде $\lambda = \tau + i\eta$, где $\tau,\ \eta \in \mathbb{R}$. При фиксированном $h$, вышеуказанная вектор-функция $f(\lambda)$, очевидно, имеет непрерывную частную производную по $\tau$ в точке $\lambda = 0$. Если мы установим, что существует частная непрерывная производная в нуле $f(\lambda)$ по направлению $i\eta$, то тем самым будет доказано существование полной производной $f'(0)$ вектор-функции $f(\lambda)$ как оператора, действующего из пространства $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, в пространство $Y$ (см. теорему I.5.2). Но тогда

$$f'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(x_0 + \lambda h) - F(x_0)}{\lambda} = \delta F(x_0, h)$$

и, в силу произвольности $h$, будет доказано существование первой вариации оператора $F$ в точке $x_0$.

Итак,

$$f_{i\eta}(0) = \lim_{i\eta \to 0} \frac{F(x_0 + i\eta h) - F(x_0)}{i\eta} =$$
$$= \frac{1}{i} \lim_{\eta \to 0} \frac{F(x_0 + \eta(ih)) - F(x_0)}{\lambda} = -i\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, ih) = \delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h).$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что если оператор $F$ вещественно-дифференцируем по Гато или Фреше, то вариация $\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h)$ вещественно-линейна по $h$. В силу (1.1) она также и комплексно-линейна по $h$, т. е. является производной по Гато или Фреше в комплексном смысле. $\blacksquare$

Предположим теперь, что пространство $Y$ есть комплексификация вещественного банахова пространства $V$ (см. § 4, гл. 0), т. е. $Y = V \dot{+} iV$ и топология в $Y$ совпадает с топологией произведения $V \times V$. Тогда оператор $F : X \to Y$ можно представить в виде $F = P + iQ$, где $P,\ Q : X \to V$. Предположим далее, что операторы $P$ и $Q$ вещественно-дифференцируемые в области $\mathcal{D} \ni x_0$. Тогда и оператор $F$ вещественно-дифференцируем, причем

$$\delta_{\mathbb{R}} F(x_0, h) = \lim_{t \to 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{P(x_0 + \lambda h) - P(x_0)}{t} + i \lim_{t \to 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{Q(x_0 + th) - Q(x_0)}{t} =$$
$$= \delta_{\mathbb{R}} P(x_0, h) + i\delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, h).$$

Если выполнено условие (1.1), то

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) + \delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, ih) = i\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, h) - \delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, h).$$

Отсюда, сравнивая действительные и мнимые части, получаем равенства

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) = -\delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, h), \qquad \delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, ih) = \delta_{\mathbb{R}} P(x_0, h), \tag{1.2}$$

которые обобщают известные условия Коши – Римана. Действительно, если $X = \mathbb{C} = \{\lambda = \tau + i\eta\}$, то $P$ и $Q$ можно рассматривать как вектор-функции двух действительных переменных $\tau,\ \eta \in \mathbb{R}$.

Полагая $x_0 = \tau_0 + i\eta_0$, $h = \Delta\tau + i\Delta\eta$, получаем

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) = \lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \frac{P(x_0 + tih) - P(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \frac{P(\tau_0 - t\Delta\eta + i(\eta_0 + t\Delta\tau)) - P(\tau_0 + i\eta_0)}{t}.$$

При $h = (\Delta\tau, 0)$ имеем

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) = \left.\frac{\partial P}{\partial \eta}\right|_{x_0 = (\tau_0, \eta_0)}.$$

В то же время, согласно первому из равенств (1.2) при том же $h$

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) = -\delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, h) =$$

$$= \lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{R}} \frac{Q(\tau_0 + t\Delta\tau + i\eta_0) - P(\tau_0 + i\eta_0)}{t} = \left.\frac{\partial Q}{\partial \tau}\right|_{x_0 = (\tau_0, \eta_0)}$$

Таким образом, мы получили первое из условий Коши-Римана

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{\partial Q}{\partial \tau}. \tag{1.3}$$

Аналогично получается и второе условие Коши-Римана

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \tau}. \tag{1.4}$$

**Замечание 1.1.** Обратим внимание на то, что при выводе соотношений (1.3), (1.4) комплексная одномерность пространства $X$ не существенна. Достаточно предполагать, что $X$ как и $Y$ есть комплексификация некоторого вещественного пространства $U$. В этом случае из теоремы (1.1) вытекает

**Следствие 1.1.** *Пусть $U$, $V$ — вещественные банаховы пространства и пусть в окрестности точки $x_0 = (p_0, q_0) \in U \times V$ заданы операторы $P$, $Q$ : $U \times V \to V$, имеющие непрерывные в этой окрестности частные производные Фреше. Тогда для того, чтобы оператор $F = P + iQ : X \to Y$, где $X = U \dot{+} iU$, $Y = V \dot{+} iV$ был комплексно-дифференцируем по Фреше в точке $x_0$, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$P'_p(x_0) = Q'_q(x_0), \qquad P'_q(x_0) = -Q'_p(x_0). \tag{1.5}$$

□ Необходимость нами была установлена выше при выводе (1.3), (1.4). Достаточность. Выберем произвольный вектор $h = \Delta p + i\Delta q$ и рассмотрим $\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih)$. Замечая, что в $U \times U$ вектор $ih$ имеет вид $ih = (-\Delta q, \Delta p)$, с учетом (1.5) имеем

$$\delta_{\mathbb{R}} P(x_0, ih) = \delta_{\mathbb{R}} P(p_0, q_0; (-\Delta q, \Delta p)) = P'_p(x_0)(-\Delta q) + P'_q(x_0)\Delta p =$$

$$= -Q'_q(x_0)\Delta q - Q'_p(x_0)\Delta p = -\delta_{\mathbb{R}} Q(x_0, h),$$

что совпадает с первым из равенств (1.2). Остальное доказывается аналогично. ■

**Следствие 1.2.** *Если в условиях предыдущего утверждения операторы* $P$ *и* $Q$ *дважды непрерывно дифференцируемы*$^{*)}$ *и выполнены условия* (1.5), *то для операторов* $F$, $P$, $Q$ *справедливы равенства*

$$\Delta F = \Delta P = \Delta Q = c,$$

*где символом* $\Delta$ *для любого оператора* $G : U \times U \to V \times V$ *обозначен оператор Лапласа*

$$\Delta G = G''_{pp} + G''_{qq}.$$

В заключение, дословно повторяя классические рассуждения, рассмотрим понятие комплексно-сопряженного дифференциала. Для этого в пространстве $X = U\dot{+}iU$ для любого элемента $x = p + iq$ введем понятие сопряженного элемента $\overline{x} = p - iq$. В этом случае $p = \dfrac{1}{2}(x + \overline{x})$, $q = \dfrac{1}{2}(x - \overline{x})$. Поэтому оператор $F : U \times U \to Y^{*)}$ порождает оператор $\widetilde{F}(x, \overline{x}) = F(p, q)$, если вместо $p$ и $q$ подставить их выражения через $x$ и $\overline{x}$. Далее, если оператор $F$ дифференцируем по Фреше в окрестности некоторой точки $x_0 = (p_0, q_0)$ (в вещественном смысле), то по формуле полного дифференциала

$$F'(x_0)h = F'_p(x_0)\Delta p + F'_q(x_0)\Delta q,$$

где $h = (\Delta p, \Delta q)$, или

$$F'(x_0)h = P'_p(x_0)\left[\frac{1}{2}(h + \overline{h})\right] + P'_q(x_0)\left[\frac{1}{2i}(h - \overline{h})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[F'_p(x_0) - iF'_q(x_0)]h + \frac{1}{2}[F'_p(x_0) + iF'_q(x_0)]\overline{h} = \widetilde{F}'_h(x_0)h + \widetilde{F}'_{\overline{h}}(x_0)\overline{h},$$

где $F'_h(x_0)h$ и $\widetilde{F}'_{\overline{h}}(x_0)\overline{h}$ — формальные производные оператора $\widetilde{F}$ по $h$ и $\overline{h}$, определяемые равенствами

$$\widetilde{F}_h(x_0) = \frac{1}{2}[F'_p(x_0) - iF'_q(x_0)], \qquad \widetilde{F}'_{\overline{h}} = \frac{1}{2}[F'_p(x_0) + iF'_q(x_0)].$$

Условия (1.5) для оператора $F = P + iQ$ непосредственно дают: *оператор* $F : U \times U \to Y$, *дифференцируемый по Фреше в вещественном смысле, дифференцируем по Фреше в комплексном смысле как оператор из* $X = U\dot{+}iU \to Y = V\dot{+}iV$ *точно тогда, когда* $\widetilde{F}'_{\overline{h}}(x) = 0$.

---

$^{*)}$В действительности, это требование излишне ибо, как уже отмечалось, из комплексной дифференцируемости оператора $F$ следует его бесконечная дифференцируемость, а значит и бесконечная дифференцируемость операторов $P$ и $Q$.

$^{*)}$Дело в том, что $F$ нельзя рассматривать как функцию двух независимых переменных, ибо с изменением $x$ одновременно меняется $\overline{x}$.

## § 2. $\rho$-топология и $\rho$-голоморфность

Как уже отмечалось, классы операторов, обладающих первой вариацией, дифференцируемых по Гато и дифференцируемых по Фреше, образуют строго убывающую по включению цепочку. Тем не менее, с точки зрения комплексного анализа эти классы имеют много общих свойств. Поэтому целесообразно ввести такую характеристику этих классов, которая позволила бы единообразно излагать эти свойства, различая в то же время сами классы операторов. Для операторов, дифференцируемых по Гато или по Фреше, такой характеристикой, по-видимому, можно считать связь области определения оператора с самим оператором. Точнее в области определения оператора можно ввести так называемую $\rho$ — топологию, более слабую, чем топология нормы, в которой оба класса дифференцируемых операторов будут обладать одинаковыми свойствами.

Отметим, что такой подход представляет интерес не только с точки зрения общности, но и с точки зрения получения новых результатов. Так например, в теории неявных операторов некоторые вырожденные задачи с операторами, дифференцируемыми по Фреше можно свести к невырожденным задачам, но с операторами, дифференцируемыми относительно упомянутой $\rho$-топологии (см. § 6, гл. VI).

В порядке изложения здесь материала и терминологии мы во многом будем следовать Э. Хилле и Р. Филлипсу [21].

**1.** Для множества $\mathcal{D} \subseteq X$ и элементов $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ введем следующую характеристику

$$\rho(x,h) = \sup\{\rho:\ x+\zeta h \in \mathcal{D},\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| < \rho\}. \tag{2.1}$$

Очевидно, $\rho(x,h) > 0$ для всех $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$, каково бы ни было множество $\mathcal{D} \subseteq X$.

Нам понадобятся следующее свойства характеристики $\rho(x,h)$:

**Лемма 2.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ — некоторое множество в $X$. Тогда для любых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, справедливо равенство:*

$$\rho(x, \lambda^{-1}h) = \rho(x,h)|\lambda|.$$

□ Равенство очевидно, если $\rho(x,h) = 0$. Предположим, что $\rho(x,h) > 0$ для некоторых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$. Обозначим $h_0 = \lambda^{-1}h$ и выберем произвольное $\rho_0$, $0 < \rho_0 < \rho(x,h)$. Тогда $x + \zeta h_0$ при $|\zeta| < \rho_0$. Полагая $t = \zeta\lambda^{-1}$, получаем $x + th \in \mathcal{D}$ [Z]
при всех $t$: $|t| < \rho_0$, $|\lambda^{-1}| = \rho_1$. Следовательно, $\rho_1 < \rho(x,h)$ или $\rho_0 \leq \rho(x,h)|\lambda|$. Отсюда $\rho(x,h_1) = \rho(x,\lambda^{-1}) = \rho(x,h)|\lambda|$.

Обратно, пусть $\rho_2 \leq \rho(x,h)|\lambda|$. Имеем $x + \zeta h_1 \in \mathcal{D}$ для всех $\zeta$ : $|\zeta| < \rho_2$ (поскольку $x + \zeta h_1 = x + th$, где $t = \zeta\lambda^{-1}$ и $|t| < \rho(x,h)$). Тогда $\rho_2 \leq \rho(x,h_1) = \rho(x,\lambda^{-1}h)$. ■

**Определение 2.1.** Множество $\mathcal{D}$ назовем $\rho$-открытым (одномерно-открытым), если $\rho(x,h) > 0$ для любых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$.

Ясно, что всякое открытое в норме пространства $X$ множества является $\rho$-открытым. Обратное, вообще говоря, неверно. Достаточно рассмотреть множество

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^2$, заданное следующим образом: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1$ — открытый шар в $\mathbb{C}^2$ с центром в нуле, а

$$\mathcal{D}_2 = \{x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\},\ x = (x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\}.$$

В то же время справедливо легко устанавливаемое

**Предложение 2.1.** *Множество $\mathcal{D}$ открыто в норме пространства точно тогда, когда*

$$\rho(x, h) \geq \delta(x) > 0 \tag{2.2}$$

*для всех $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$, $\|h\| = 1$.*

Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченное $\rho$-открытое множество в $X$. С помощью характеристики (2.1) определим в $\mathcal{D}$ сходимость следующим образом:

**Определение 2.2.** Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ из $\mathcal{D}$ $\rho$-сходится к элементу $x \in \mathcal{D}$, если для любого натурального $N$ найдется $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $\rho(x, x_\alpha - x) > N$ при всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ таких, что $\alpha > \alpha_0$. Топологию, определяемую $\rho$-сходимостью, будем называть $\rho$-топологией.

Из леммы 2.1 и соотношения 2.2 вытекает

**Следствие 2.1.** *Если множество $\mathcal{D}$ открыто и направленность $\{x_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ из $\mathcal{D}$ сходится к $x \in \mathcal{D}$ в топологии нормы, то она и $\rho$-сходится к $x$.*

□ Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 2.1, полагая $h = x_\alpha - x$, $\lambda = \|x_\alpha - x\|$ и предположением 2.1. ■

**Определение 2.3.** Для любых $x \in \mathcal{D}$ множество

$$\mathcal{D}_\rho(x, h) = \{z \in X :\ z = x + \zeta h,\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| < \rho,\ h \in X,\ \|h\| = 1\}$$

$$\big(\overline{\mathcal{D}}_\rho(x, h) = \{z \in X :\ z = x + \zeta h,\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| \leq \rho,\ h \in X,\ \|h\| = 1\}\big)$$

назовем открытым (замкнутым) диском с центром в точке $x$ в направлении $h$.

Ясно, что множество $\mathcal{D}$ является $\rho$-открытым точно тогда, когда с каждой точкой $x \in \mathcal{D}$ содержит некоторый открытий диск ненулевого радиуса в любом направлении $h$.

Покажем, что замкнутый диск $D_\rho(x, h)$, где $\rho < \rho(x, h)$ компактен в $\rho$-топологии $\rho$-открытого множества $\mathcal{D}$.

□ Пусть направленность $\{x_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\} \subseteq \overline{\mathcal{D}}_\rho(x, h)$. Тогда $x_\alpha = x + \zeta_\alpha h$, $|\zeta_\alpha| < \rho$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Выберем поднаправленность $\{\xi_\beta |\ \beta \in \mathfrak{A}\}$, $|\xi_\beta| \leq \rho$, сходящуюся к точке $\zeta_* \in \mathbb{C}$, и покажем, что соответствующая ей поднаправленность $\{\xi_\beta |\ \beta \in \mathfrak{A}\}$, $x_\beta = x + \zeta_\beta h$ $\rho$-сходится к элементу $x_* = x + \zeta_* h$. Прежде всего заметим, что, поскольку $x_* \in \overline{\mathcal{D}}_\rho(x, h)$, то (см. предложение 2.1) $\rho(x_*, h) > 0$ для любого $h \in X$, $\|h\| = 1$. Тогда по лемме 2.1 получаем

$$\rho(x_0, x_n - x_0) = \rho(x_0, (\zeta_n - \zeta_0)h) = \rho(x_0, h)|\zeta_n - \zeta_0|^{-1}. \tag{2.3}$$

Так как для любого $N > 0$ существует $\beta_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $|\zeta_* - \zeta_\beta| < \rho(x, h)N^{-1}$ для всех $\beta \in \mathfrak{A}$, $\beta > \beta_0$ (напомним, что элемент $h$ фиксирован), то из (2.3) следует

$$\rho(x_0, x_0 - x_0) > N,$$

что и требовалось доказать. ■

**2.** Теперь мы обратимся к понятиям голоморфности.

**Определение 2.4.** Пусть $\mathcal{D}$ является $\rho$-открытым множеством в $X$. Оператор $F : X \to Y$ назовем $\rho$-голоморфным в $X$ и будем писать $F \in \mathcal{H}_\rho(X, Y)$, если для любых $x \in \mathcal{D}$ и $h \in X$ вектор-функция $f(\zeta) = F(x + \zeta h)$ комплексно-дифференцируема в круге $\zeta : \ |\zeta| < \rho(x, h)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Таким образом, всякий $\rho$-голоморфный оператор имеет в каждой точке $x \in \mathcal{D}$ первую вариацию $\delta F(x, h)$.

**Определение 2.5.** Оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ назовем $\mathcal{G}$-голоморфным, если он является $\rho$-голоморфным и для любого $x \in \mathcal{D}$ существует линейный оператор $A(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что $\delta F(x, h) = A(x)h$. В этом случае будем писать $F \in \mathcal{G}(\mathcal{D}, Y)$.

Если множество $\mathcal{D}$ открыто, т. е. для всех $x \in \mathcal{D}$ выполнено условие (2.2), то $\mathcal{G}$-голоморфный оператор $F$ назовем $\mathcal{F}$-голоморфным или просто голоморфным.

Очевидно, что если $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$, то он дифференцируем по Гато в каждой точке $x \in \mathcal{D}$. Ниже, в § 3 мы убедимся, что если оператор $F$ является $\mathcal{F}$-голоморфным, т. е. множество $\mathcal{D}$ открыто, то $F$ дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{D}$ (этим и объясняется термин “$\mathcal{F}$-голоморфный оператор”).

Поскольку понятие голоморфности опираются на понятия сходимости, то естественным образом можно ввести понятия слабой голоморфности. Однако, в этом нет необходимости, ибо, как уже отмечалось, из слабой голоморфности следует сильная. Последний результат для вектор-функций был получен Н. Данфордом. Здесь мы докажем несколько более общее предложение.

Оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ называется локально ограниченным в $\mathcal{D}$, если для любого $x \in \mathcal{D}$ существует окрестность $\mathcal{U}$ точки $x$ такая, что $F$ ограничен на $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}$.

Предположим, что существует такое банахова пространство $Y_*$, что $(Y_*)^* = Y$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ есть $\rho$-открытое множество в $X$. Локально ограниченный в $\mathcal{D}$ оператор $F$ является $\rho$-голоморфным ($\mathcal{G}$-голоморфным) точно тогда, когда для любого $y_* \in Y_*$ справедливо включение $\langle y_*, F(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$**).

□ Необходимость этого утверждения очевидна.

Докажем достаточность. Пусть $\langle y_*, F(\cdot)\rangle \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$. Это означает, что функция $\varphi(\zeta) = \langle y_*, F(x+\zeta h)\rangle$ дифференцируема в круге $|\zeta| < \rho(x, h)$ при любых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$, $y_* \in Y_*$. Требуется доказать, что при любых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ дифференцируема в том же круге вектор-функция $\varphi(\zeta) = \langle y_*, F(x + \zeta h)\rangle$.

Для этого рассмотрим последовательность

$$\{\ell(t_n)\} = \left\{\frac{1}{t_n}(f(\zeta + t_n) - f(\zeta))\right\} \tag{2.4}$$

при $t_n \to 0$, $n \to \infty$, где $|\zeta|, \ |\zeta + t_n| < \rho(x, h)$ и покажем, что она фундаментальна. Действительно, для любого $y_* \in Y_*$

$$\frac{1}{t_n - t_m}\,\langle y_*, \ell(t_n) - \ell(t_m)\rangle =$$

$$= \frac{1}{t_n - t_m}\left[\frac{\varphi(\zeta + t_n) - \varphi(\zeta)}{t_n} - \frac{\varphi(\zeta + t_m) - \varphi(\zeta)}{t_n}\right] =$$

*) Поясним, что значение оператора $\langle y_*, F(\cdot)\rangle$ на элементе $x \in \mathcal{D}$ равно числу $\langle y_*, F(x)\rangle$, т. е. значению функционала $F(x) \in Y = (Y_*)^*$ на векторе $y_* \in Y_*$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\rho} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda-\zeta)(\lambda-\zeta+t_n)(\lambda-\zeta+t_m)}\, d\lambda,$$

где $\rho < \rho(x,h)$. Последнее равенство получается применением классической интегральной формулы Коши и разложением функции, стоящей под знаком интеграла, на простые дроби. Функция $\varphi(\lambda)(\lambda-\zeta)^{-1}(\lambda-\zeta+t_n)^{-1}(\lambda-\zeta+t_m)^{-1}$ в силу локальной ограниченности $F$ ограничена некоторой постоянной $M(y_*,\rho)$ на контуре $|\lambda| = \rho$. Тогда

$$|\langle y_*, \ell(t_n) - \ell(t_m)\rangle| \le M(y_*,\rho)\,|t_n - t_m|$$

для всех $t_n,\ t_m :\ |t_n|,\ |t_m| < \rho$.

Применяя принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза (теорема 0.8.8), получаем неравенство

$$\|\ell(t_n) - \ell(t_m)\| \le M(\rho)\,|t_n - t_m|$$

с некоторой константой $M(\rho)$, которое влечет фундаментальность последовательности (2.4). В силу полноты $Y$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\zeta+t_n) - f(\zeta)}{t_n} - f'(\zeta) = \delta F(x_0 + th, h)$$

при любом $\zeta :\ |\zeta| < \rho(x,h)$. Тем самым доказано включение $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$, то есть, существование вариации $\delta F(x,h)$. Если теперь предположить, что $\langle y_*, F(\cdot)\rangle \in \mathcal{G}(\mathcal{D},\mathbb{C})$, то это означает, что вариация $\delta\langle y_*, F(\cdot)\rangle(x,h) \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ при любом $y_* \in Y_*$ представляет собой линейный ограниченный оператор относительно $h$, действующий из $X$ в $\mathbb{C}$. В силу равенства

$$\langle y_*, \delta F(x,h)\rangle = \delta\langle y_*, F(\cdot)\rangle(x,h)$$

получаем $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$. ■

В качестве следствия мы докажем аналог классической теоремы Вейерштрасса о полноте пространств $\mathcal{H}_\rho(\mathcal{D},Y)$ и $\mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$ в топологии слабой равномерной сходимости на замкнутых дисках из $\mathcal{D}$.

**Теорема 2.2.** *Пусть последовательность операторов $\{F_n |\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D},Y)$ соответственно $\mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$, где $\mathcal{D}$ является открытым множеством в $X$, в слабой топологии пространства $Y$ сходится равномерно на каждом замкнутом диске из $\mathcal{D}$ к некоторому оператору $F : \mathcal{D} \to Y$. Тогда $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D},Y)$ $(\mathcal{H}(\mathcal{D},Y))$.*

□ Первое утверждение следует непосредственно из классической теоремы Вейерштрасса и теоремы 2.1. Действительно, для любых фиксированных $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ скалярные функции $\varphi_n(\zeta) = \langle F_n(x+\zeta h), y^*\rangle$ сходятся к $\varphi(\zeta) = \langle F(x+\zeta h), y^*\rangle$, равномерно на любом диске $\mathcal{D}_\rho(x,h)$, где $\rho < \rho(x,h)$. Отсюда $\langle F(\cdot), y^*\rangle \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D},Y)$ и, следовательно, $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D},Y)$. Если же $F_n \in \mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$, то $\delta F_n(x,h)$ есть линейные непрерывные операторы относительно $h$. При этом $\langle \delta F_n(x,h), y^*\rangle = \varphi_n'(0) \to \varphi'(0) = \langle \delta F(x,h), y^*\rangle$. Отсюда и из принципа равномерной ограниченности следует линейность и ограниченность оператора $\delta F(x,h)$, т. е. включение $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D},Y)$, что и требовалось. ■

## § 3. Интегральные теоремы Коши и их следствия

Как и в классическом комплексном анализе, интегральные теоремы Коши являются мощным инструментом исследования голоморфных операторов. Многие тонкие и интересные исследования, проводимые в последние годы применительно к конечномерным интегральным представлениям, пригодны и для бесконечномерных пространств. Здесь мы ограничимся самыми простыми результатами, достаточными для дальнейших рассмотрений.

Пусть $\mathcal{D}$, как и прежде, $\rho$-открытое множество в банаховом пространстве $X$.

**Теорема 3.1.** *Пусть оператор $F$ непрерывно действует из множества $\mathcal{D}$, наделенного $\rho$-топологией, в банахово пространство $Y$ с топологией нормы. Включение $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ справедливо точно тогда, когда для любых $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ и любых $\rho < \rho(x, h)$ справедливо равенство*

$$(P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} F(x + \lambda h)\, d\lambda = 0. \tag{3.1}$$

□ Вектор-функция $f(\zeta)$ непрерывна в круге $|\zeta| \leq \rho < \rho(x, h)$ при любых фиксированных $\mathcal{D}$, $h \in X$. Поэтому в левой части (3.1) существует (см. § 2, гл. II) и для всех $y^* \in Y^*$ имеет место равенство

$$\left\langle (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} F(x + \lambda h)\, d\lambda, y^* \right\rangle = \int\limits_{|\lambda|=\rho} \langle F(x + \lambda h)\, d\lambda, y^* \rangle.$$

Остается воспользоваться лишь теоремой 2.1 и классическими теоремами Коши и Мореры (см. Б. Шабат [22]). ■

Подобным образом получается аналог интегрального представления Коши:

**Теорема 3.2.** *Для оператора $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ при любых $\mathcal{D}$, $h \in X$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ : $|\zeta| \leq \rho < \rho(x, h)$ справедливо представление*

$$2\pi i F(x + \zeta h) = (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} F(x + \lambda h)(\lambda - \zeta)^{-1}\, d\lambda. \tag{3.2}$$

*В частности,*

$$2\pi i F(x) = (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} \lambda^{-1} F(x + \lambda h)\, d\lambda, \tag{3.3}$$

*то есть интеграл в правой части* (3.3) *не зависит от $h$ при малых $\rho$ и равен значению оператора $F$ в точке $x$, умноженному на $2\pi i$.*

**Следствие 3.1.** *Если оператор $F$ является $\rho$-голоморфным и локально ограниченным в $\mathcal{D}$, то он $\delta$-аналитичен в любой точке $\mathcal{D}$, т. е. допускает разложение в обобщенный степенной ряд*

$$F(x + \zeta h) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k F(x, h) \zeta^k, \tag{3.4}$$

*сходящийся нормально**) *при* $|\zeta| \le \rho < \rho(x,h)$, *и*

$$\delta^k F(x,h) = \frac{1}{2\pi i}(P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} \lambda^{-k-1} F(x+\lambda h)\, d\lambda. \tag{3.5}$$

$\square$ В самом деле, ядро $(\lambda-\zeta)^{-1}$ под знаком интеграла в (3.2) раскладывается в ряд

$$\frac{1}{\lambda-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{\lambda^{k+1}},$$

который сходится абсолютно при всех $\zeta: \ |\zeta| \le |\lambda| = \rho$. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} \zeta^k F(x+\lambda h)$$

сходится нормально ввиду ограниченности $F(x+\lambda h)$ при всех $x \in \mathcal{D}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = \rho < \rho(x,h)$. Осталось доказать перестановочность знака интеграла со знаком суммы. Для любого натурального $n$ имеем

$$(P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} \zeta^k F(x+\lambda h)\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \ (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} \lambda^{-(k+1)} F(x+\lambda h)\, d\lambda. \tag{3.6}$$

Обозначив выражение под знаком интеграла в левой части при фиксированных $\zeta$ через $P_n(\lambda)$, заметим, что $P_n(\lambda)$ сходится при $n \to \infty$ к $F(x+\lambda h)(\lambda-\zeta)^{-1}$ равномерно для всех $\lambda: \ |\lambda| = \rho$. В силу

$$\left\| (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} F(x+\lambda h) \lambda^{-(k+1)}\, d\lambda \right\| \le (P) \int\limits_{|\lambda|=\rho} \|F(x+\lambda h)\|\, |\lambda^{-(k+1)}|\, |d\lambda| \le$$

$$\le M\rho^{-(k+1)}\, 2\pi\rho = 2M\pi\rho^{-k}, \tag{3.7}$$

где $M \ge \sup\limits_{x' \in \mathcal{D}_\rho(x,h)} \|Fx'\|$, а $\mathcal{D}_\rho(x,h)$ — открытый диск с центром в точке $x$ в направлении $h$ (см. определение 2.3) частичные суммы в правой части (3.6) тоже сходятся при любом фиксированном $\zeta \in \mathbb{C}$. Поэтому наше утверждение вытекает из следствия II.1.2. $\blacksquare$

Непосредственно из (3.5) и (3.7) получаем обобщенные неравенства Коши:

**Следствие 3.2.** *Если* $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$ *и* $\|Fx\| \le M$ *для всех* $x \in \mathcal{D}$, *то для любых* $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ *и любых* $\rho < \rho(x,h)$

$$\|\delta^k F(x,h)\| \le M\rho^{-k}. \tag{3.8}$$

**Замечание 3.1.** В действительности из (3.5) следует более точное неравенство

$$\|\delta^k F(x,h)\| \le M(x,h)\rho^{-k}, \tag{3.8$'$}$$

где $M(x,h) \ge \sup\limits_{|\lambda| \le \rho(x,h)} \|F(x+\lambda h)\|$, полезное в ряде случаев.

---

*) Т. е. по норме пространства $Y$.

**Замечание 3.2.** Выражения $\delta^k F(x,h)$ в (3.4) назовем коэффициентами Тейлора оператора $F$ в точке $x$ в направлении $h$. Отметим, что (3.1) является также разложением в ряд Тейлора вектор-функции $f(\zeta) = F(x+\zeta h)$ при фиксированных $x \in \mathcal{D}$, $h \in X$ и $\zeta : \ |\zeta| < \rho(x,h)$. Используя очевидные соотношения

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}\langle f(\zeta), y^*\rangle = \left\langle \frac{d^k}{d\zeta^k} f(\zeta), y^* \right\rangle, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

где $y^*$ — произвольный элемент из $Y^*$, для $\delta^n F(x,h)$ получаем представление

$$\delta^k F(x,h) = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{d\zeta^k} F(x+\zeta h)\bigg|_{\zeta=0}, \qquad k = 0,1,2,\dots.$$

В случае же голоморфного оператора $F$ для $\delta^n F(x,h)$ имеются и другие представления. Именно, справедлива

**Теорема 3.3.** *Пусть $\mathcal{D}$ — открытое множество в $X$. Тогда, если оператор $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$ локально ограничен в $\mathcal{D}$, то он бесконечно дифференцируем по Фреше. Причем, если $d_n F(x, h_1, \dots, h_n)$ — его $n$-ая производная, то справедливо равенство* [Z]

$$k!\, d_k F(x, h_1, \dots, h_k) = \delta^k F(x,h)^{*)}, \tag{3.9}$$

*то есть коэффициенты $\delta^n F(x,h)$ в разложении* (3.4) *являются однородными формами по $h$ при фиксированных $x \in \mathcal{D}$ (см. § 6, гл. I).*

□ Поскольку множество $\mathcal{D}$ открыто, в силу предложения 2.1 $\rho(x,h) \geq \delta(x) > 0$ для всех $h$, $\|h\| = 1$. Пусть в некоторой окрестности точки $x$ радиуса $\varepsilon(x)$ выполняется неравенство $\|F(x)\| \leq M$. Тогда для любого $u : \ 0 < \|u\| \leq \delta = \min\{\delta(x), \varepsilon(x)\}$, полагая $h = x\zeta^{-1}$, $\|h\| = 1$, из (3.4) выводим:

$$F(x+u) = \delta F(x,h)\zeta + \sum_{k=r}^{\infty} \delta^k(x,h)\zeta^k + F(x) = A(x)u + \omega(x,u) + F(x),$$

где $A(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$. Используя неравенства Коши (3.8) и формулу геометрической прогрессии, получаем [Z]

$$\|\omega(x,u)\| = \left\|\sum_{k=r}^{\infty} \delta^k F(x,h)\zeta^k\right\| \leq M\,\frac{\|u\|^r}{\sigma^r\left(1 - \dfrac{\|u\|}{\sigma}\right)}$$

для любых $u \in X$, $\|u\| \leq \delta$, что и доказывает дифференцируемость по Фреше оператора $F$. Отсюда следует, что вектор-функция $F(x + \zeta_1 h_1 + \ldots + \zeta_n h_n) : \mathbb{C}^n \to Y$ при фиксированных $h_1, \dots, h_n$ имеет непрерывные частные производные по $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ в некотором полицилиндре $\mathcal{U}$ достаточно малого радиуса, т. е. голоморфна в этом полицилиндре по каждому из переменных. По основной теореме Гартогса (см., например, Шабат [23]) функция $\left\langle F\left(x + \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k h_k\right), y^*\right\rangle$ голоморфна по совокупности переменных и, следовательно, имеет частные производные всех порядков. Из теоремы 2.2 следует, что этим же свойством обладает и вектор-функция $F(x + \zeta_1 h_1 + \ldots + \zeta_n h_n)$. Отсюда, в частности, следует существование

$$d_2 F(x, h_1, h_2) = d[dF(x,h_1); h_2] = d\left[\frac{\partial F(x + \zeta_1 h_1}{\partial \zeta_1}\bigg|_{\zeta_1=0}\right] =$$

---

$^{*)}$Здесь для удобства положено $\delta^k F(x,h)$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta_2}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta_1} F(x+\zeta_1 h_1+\zeta_2 h_2)\Big|_{\zeta_1=0}\right]\Big|_{\zeta_2=0} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} F(x+\zeta_1 h_1+\zeta_2 h_2)\Big|_{\zeta_1=0,\,\zeta_2=0}.$$

В силу симметрии $d_x F$ и линейности по $h_1$, следует линейность по $h_2$. Аналогично, получаются соотношения

$$d_k F(x, h_1, \ldots, h_k) = \frac{\partial^k}{\partial \zeta_1 \ldots \partial \zeta_k} F(x+\zeta_1 h_1+\ldots+\zeta_k h_k)\Big|_{\zeta_1=0,\ldots,\zeta_k=0} \tag{3.10}$$

при $k > 2$.

Учитывая единственность разложения Тейлора, получаем равенство (3.9). ■

Заметим, что из (3.9),(3.10) получаются следующие представления для форм $\delta^k F(\cdot,\cdot)$:

$$\delta^k F(x,h) = \frac{1}{k!}\ \frac{\partial^k}{\partial \zeta_1 \ldots \partial \zeta_k} F(x+\zeta_1 h_1+\ldots+\zeta_k h_k)\Big|_{\zeta_1=0,\ldots,\zeta_k=0,\ h_1=\ldots=h_k=h}. \tag{3.11}$$

**Следствие 3.3.** (аналог теоремы Лиувилля) *Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства, $F \in \mathcal{H}(X,Y)$ и для некоторой точки $x \in X$ найдется натуральное число $m > 0$ такое, что*

$$\|F(x+h)\| \le \|h\|^m \tag{3.12}$$

*для всех достаточно больших по норме элементов $h \in X$. Тогда оператор $F$ является полиномиальным отображением степени $\le m$, т. е. есть конечная сумма однородных по $h$ форм. В частности, если величина $\|Fx\|$ равномерно ограничена для всех $x \in X$, то $Fx$ принимает одно и тоже постоянное значение в $Y$.*

□ Полагая в представлении (3.3) $\zeta = 1$, (заметим, что $\rho(x,h) = \infty$) получим равенство:

$$F(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k F(x,h),$$

где согласно теореме (3.3) $\delta^k F(x,h)$ — однородные формы порядка $k$ относительно $h$. Полагая $\|h\| = \rho$, из неравенств (3.7), (3.12) получаем

$$\|\delta^k F(x,h)\| \le M\|\rho\|^{m-n}$$

при достаточно больших $\rho$. Устремляя $\rho$ к $\infty$, получаем $\delta^k F(x,h) = 0$ при $k > m$, тем и завершается доказательство первого утверждения. Второе утверждение получается из первого, если положить $m = 0$. ■

## § 4. Теоремы единственности и принципы максимума

Из представления (3.4), очевидным образом вытекает такая теорема

**Теорема 4.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ является $\rho$-открытым множеством, представляющим собой $\mathbb{C}$-звезду*) относительно некоторой точки $x_0 \in \mathcal{D}$. Тогда, если $\rho$-голоморфный оператор $F$ в точке $x_0$ обращается в нуль вместе со всеми своими коэффициентами Тейлора, то $F(x) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$.*

*) Т. е. вместе с каждой точкой $x$ в $\mathcal{D}$ содержится $\lambda x$ при $|\lambda| \le 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Для произвольной области $\mathcal{D}$, но голоморфного оператора $F$ справедлива

**Теорема 4.2.** *Пусть $\mathcal{D}$ — область в $X$, оператор $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$ локально ограничен. Если в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{D}$ оператор $F$ обращается в нуль вместе со своими производными всех порядков, то $F(x) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$.*

$\square$ Пусть $\mathcal{E}$ — множество точек из $\mathcal{D}$, в каждой из которых оператор $F$ обращается в нуль вместе со своими производными всех порядков. Покажем, что $\mathcal{E}$ замкнуто в $\mathcal{D}$. Положим $\mathcal{E}_n = \{x \in \mathcal{D} |\ \delta^n F(x,h) \equiv 0\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В силу непрерывности $\delta^n F(x,h)$ в $\mathcal{D}$ все множества $\mathcal{E}_n$ замкнуты. Но $\mathcal{E} = \bigcap \mathcal{E}_n$, откуда и следует замкнутость $\mathcal{E}$. Теперь покажем, что $\mathcal{E}$ открыто в $\mathcal{D}$. Пусть $x \in \mathcal{E}$. Согласно (3.9) $\delta^k(F(z,h) \equiv 0$ для всех $h \in X$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathcal{W}$ — некоторый шар с центром в точке $z$, целиком лежащий в $\mathcal{D}$ (напомним, что $\mathcal{D}$ отрыто). По теореме 4.1 $F(x) \equiv 0$ в $\mathcal{W}$. Значит $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$, т. е. $\mathcal{E}$ открыто.

Мы получили, что $\mathcal{E}$ одновременно открыто и замкнуто в связном множестве $\mathcal{D}$. Отсюда $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. $\blacksquare$

Из теорем 3.3 и 4.2 получаем такое

**Следствие 4.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ — область, а оператор $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$ локально ограничен. Если $F$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathcal{D}$, то $F(x) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$.*

Одним из наиболее плодотворных положений комплексного анализа является принцип максимума нормы голоморфного оператора. Сформулируем без доказательства одномерный вариант этого принципа.

**Теорема 4.3.** *Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и $\varphi(\zeta)$ — голоморфная в $\Omega$ функция со значениями в $\mathbb{C}$. Если в некоторой точке $a \in \Omega$ величина $|\varphi(\zeta)|$ достигает своего наибольшего значения, то $\varphi(\zeta) = \mathrm{const}$ для всех $\zeta \in \Omega$. Если $\varphi(\zeta)$ — голоморфна в $\Omega$ и непрерывна в $\overline{\Omega}$, то $|\varphi(\zeta)|$ достигает своего наибольшего значения в некоторой точке $\zeta \in \partial\Omega$.*

Рассмотрим теперь вектор-функцию $f(\zeta)$ со значениями в некотором банаховом пространстве $Y$, голоморфную в ограниченном множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$. Пусть в некоторой точке $a \in \Omega$ величина $\|f(\zeta)\|$ достигает своего наибольшего значения, т. е. $\|f(\zeta)\| \le \|f(a)\|$ для любого $\zeta \in \Omega$. Рассмотрим функцию $\varphi_{y^*}(\zeta) = \langle f(\zeta, y^* \rangle$, где $y^* \in Y^*$, также голоморфную в $\Omega$. Очевидно, $|\varphi_{y^*}(\zeta)| \le \|f(a)\|\,\|y^*\|$. В частности, при любом $y^* :\ \|y^*\| = 1$, $|\varphi_{y^*}(\zeta)| \le M$. Пусть $M(y^*) = \sup\limits_{\zeta \in \Omega} |\varphi_{y^*}(\zeta)|$; тогда $M(y^*) \le M$. В то же время по теореме Хана – Банаха найдется элемент $y_0^* \in Y^*$, ($\|y_0^*\| = 1$) такой, что $\varphi_{y_0^*}(a)\langle f(a), y_0^*\rangle = \|f(a)\| = M$. Отсюда по теореме 1.3 следует, что $\varphi_{y_0^*}(\zeta) = M = \mathrm{const}$ для всех $\zeta \in \Omega$, т. е.

$$\langle f(\zeta), y_0^*\rangle = \langle f(a), y_0^*\rangle. \tag{4.1}$$

Покажем, что $\|f(\zeta)\| = \|f(a)\|$. В противном случае найдется такое $b \in \Omega$, что $\|f(b)\| < M$. Но тогда $\varphi_{y^*}(b) < M$, что невозможно.

Если дополнительно предположить, что пространство $Y$ строго выпукло (см. § 4, гл. 0), то из (4.1) и равенства $\|f(\zeta)\| = \|f(a)\|$ следует: $f(\zeta) = f(a)$ для всех $\zeta \in \Omega$. Вернемся к общему случаю пространства $X$.

Пусть $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$, где $\mathcal{D}$ есть $\rho$-открытое множество в банаховом пространстве $X$. Предположим также, что для некоторой точки $a \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство $\|F(x)\| \ge \|F(a)\|$ для всех $x \in \mathcal{D}$. Тогда вектор-функция $f(\zeta) = F(a + \zeta h)$ :

$\mathbb{C} \to Y$ достигает своего наибольшего значение в точке $\zeta = 0$. Из доказанного следует, что $\|f(\zeta)\| = \mathrm{const}$ для всех $\zeta : \ |\zeta| < \rho(x, h)$. В следствии произвольности вектора $h \in X$ равенство $\|F(\zeta)\| = \|F(a)\|$ справедливо для любой $\mathbb{C}$-звезды $\mathcal{W}$ с центром в точке $a$, целиком лежащей в $\mathcal{D}$. Теперь, если, пространство $Y$ строго выпукло, то опять таки из $\|F(\zeta)\| = \|F(a)\|$ следует, что $F(x) = F(a)$ для любого $x \in \mathcal{W}$. Если к тому же $\mathcal{D}$ — область, то из следствия 4.1 вытекает равенство $F(x) = F(a)$ для всех $x \in \mathcal{D}$.

Таким образом, нами получено следующее обобщение принципа максимума:

**Теорема 4.4.** *Пусть множество $\mathcal{D}$ является $\rho$-открытым множеством в $\mathcal{D}$ и оператор $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$, где $Y$ — банахово пространство. Если для некоторой точки $a \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство $\|Fx\| \leq \|F(a)\|$ для всех $x \in \mathcal{D}$, то:*

1) *норма оператора $F$ принимает постоянное значение на любой $\mathbb{C}$-звездной компоненте $\mathcal{W}(a)$ множества $\mathcal{D}$ с центром в точке $x$:*

$$\|F(x)\| = \|F(a)\| \qquad (x \in W(a));$$

2) *если к тому же пространство $Y$ строго выпукло, то*

$$F(x) = F(a) \qquad (x \in W(a)).$$

**Следствие 4.2.** *Если множество $\mathcal{D}$ открыто в $X$ и ограничено, а оператор $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$ непрерывен в $\overline{\mathcal{D}}$, то справедливы соотношения*

$$\sup_{x \in \mathcal{D}} \|F(x)\| = \sup_{x \in \partial\mathcal{D}} \|F(x)\| = \sup_{x \in \overline{\mathcal{D}}} \|F(x)\|.$$

**Замечание 4.1.** Предположение о строгой выпуклости пространства $Y$ в утверждении 2) теоремы 4.4 является существенным. В самом деле, положим $Y = \mathbb{C}^2$ с чебышевской нормой $\|y\| = \max\{|y_1|, |y_2|\}$ $(y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2)$ и рассмотрим вектор-функцию $\varphi(\zeta) = (1, \zeta)$, голоморфную в единичном круге $|\zeta| \leq 1$. Очевидно, $\|f(0)\| = \|f(\zeta)\| = 1$ для любых $\zeta$ с $|\zeta| = 1$. В то же время $f(\zeta) \neq f(0)$ при $\zeta \neq 0$.

## § 5. Лемма Шварца и ее обобщения

Лемма Шварца, столь значимая в теории функций комплексного переменного, играет большую роль и в многомерном, и в бесконечномерном случае, как в качественном, так и в количественном смысле (последнее подразумевает получение различных оценок, например, области существования решения некоторого функционального уравнения, или скорости сходимости аппроксимационного процесса и т. п.).

Классический вариант леммы Шварца гласит следующее:

Пусть функция $f$ голоморфна в единичном круге $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq 1\}$ и отображает $\Delta$ в себя $f(\Delta) \subseteq \Delta$. Тогда, если $f(0) = 0$, то при всех $\lambda \in \Delta$ справедливы неравенства

a) $|f(\lambda)| \leq |\lambda|$;

b) $|f'(0)| \leq 1$;

c) равенства в обоих пунктах а) и б) выполняются точно тогда, когда $f(\lambda) = f(0)\lambda$.

Каждое из утверждений а) и b) допускает различные обобщения. Рассмотрим некоторые из них.

**Теорема 5.1.** *Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства, $\mathcal{D}$ — $\rho$-открытое множество в $X$, оператор $F : \mathcal{D} \to Y$ $\rho$-голоморфен в $\mathcal{D}$ и для некоторого $m \geq 0$ и для всех $\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho(x, h)$ допускает представление*

$$F(x + \zeta h) = \sum_{k=m}^{\infty} \zeta^k \delta^k F(x, h). \tag{5.1}$$

*Тогда, если $M_\rho(x, h) = \sup\limits_{z \in \mathcal{D}_\rho(x,h)} \|F(z)\|$, где $\rho < \rho(x, h)$, то*

$$\|F(x + \zeta h)\| \leq M_\rho(x, h)|\zeta|^m \varrho^{-m}$$

*для всех $\zeta : |\zeta| \leq \rho$.*

□ Возьмем произвольный функционал $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$ и рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) = \zeta^{-m}\langle F(x + \zeta h, y^*\rangle$, голоморфную в замкнутой круге $|\zeta| \leq \rho < \rho(x, h)$. Тогда, согласно принципу максимума, для всех $\zeta : |\zeta| \leq \rho$

$$|\varphi(\zeta)| = \max_{|\zeta|=\rho} |\varphi(\zeta)| \leq M_\rho(x, h)\rho^{-m},$$

или, что то же самое,

$$|\langle F(x + \zeta h), y^*\rangle| \leq M_\rho(x, h)|\zeta|^m \rho^{-m}$$

для всех $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$.

Для полного доказательства осталось воспользоваться следствием 0.4.1 из теоремы Хана – Банаха. ■

Отсюда, в частности, вытекает такой аналог утверждения а) классической леммы Шварца.

**Следствие 5.1.** *Пусть оператор $F$ дифференцируем по Фреше в шаре $\mathcal{D}$ с центром в нуле и выполняются два условия: $F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, $F(0) = 0$. Тогда $\|F(x)\| \leq \|x\|$ для любого $x \in \mathcal{D}$.*

□ Для доказательства достаточно положить $z = \zeta h$, где $\|h\| = 1$, и заметить, что оператор $F$ допускает представление (5.1) для всех $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < 1$ при $m = 1$. ■

Утверждение b) также просто переносится на общий случай банаховых пространств, а именно, в условиях следствия 5.1 выполняется неравенство

$$\|F'(0)\| \leq 1. \tag{5.2}$$

Это следует непосредственно на неравенств Коши (3.8) при $k = 1$.

Что касается утверждения c), то здесь ситуация значительно сложнее. Все зависит от того, каким образом понимать в общем случае правую часть равенства в утверждении c) и какими свойствами обладает норма пространства $X$.

Если отображение $f'(0)x$ понимать как линейный оператор, примененный к $x$, то утверждение c) в общем случае перестает быть верным.

$\square$ Действительно, рассмотрим пространство $\mathbb{C}^2$ с чебышевской нормой и оператор $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, заданный по формуле $Fz=(z_1,z_2^2)$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, отображающий единичный полицилиндр $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C}^2:\ \|z\|<1\}$ в себя. Ясно, что $F(0)=0$ и

$$\|F'(0)\|=\left\|\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\|=1.$$

Но оператор $F$, очевидно, нелинеен. $\blacksquare$

Если же дополнительно предположить, что оператор $F'(0)$ является линейной изометрией, то утверждение c) становится справедливым в общей случае. Это вытекает из следующего обобщения конечномерной теоремы А. Картана.

**Теорема 5.2.** *) *Пусть $\mathcal{D}$ ограниченная область в банаховом пространстве $X$, оператор $F\in\mathcal{H}(\mathcal{D},X)$ удовлетворяет условиям:*

$$F(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D} \tag{5.3}$$

*и*

$$F(z)=z \tag{5.4}$$

*для некоторого $z\in\mathcal{D}$. Тогда, если $F'(z)=I$ — тождественный оператор в $X$, то $F$ есть сужение оператора $I$ на $\mathcal{D}$, т. е. $Fx=x$ для всех $x\in\mathcal{D}$.*

$\square$ В силу условия (5.3) в области $\mathcal{D}$ определены операторы $F^n=F\circ F^{n-1}$, $n=1,2,\ldots$, $F=I$, причем $F^n\in\mathcal{H}(\mathcal{D},X)$ и $F^n(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D}$. Кроме того, из (5.4) вытекает, что $F^nz=z$ и $(F^n)'(z)=I$. Поэтому операторы $F^n$ допускает представления (см. 3.4):

$$F^n(z+h)=z+Ih+\sum_{k=m_n}^{\infty}\delta^kF^n(z,h),\qquad m_n\geq 2, \tag{5.5}$$

для всех $h$ таких, что $\|h\|<\operatorname{dist}(z,\partial\mathcal{D})=\inf\limits_{z\in\partial D}\|z-y\|=\mu$.

Покажем, что $\delta^kF(z,h)\equiv 0$ для всех $h$, $\|h\|\leq\mu$ и $k=2,3,\ldots$. Если предположить противное, то найдется номер $m$, такой, что форма $\delta^mF(z,h)$ — первая отличная от нуля в разложении (5.5) оператора $F$. Так как область $\mathcal{D}$ ограничена, то из неравенства Коши (3.8) следует, что

$$\|\delta^kF^n(x,h)\|\leq M(k)<\infty\ \text{ при }\ \|h\|\leq\rho$$

для всех $n=1,2,\ldots$.

Непосредственным вычислением по индукции проверяется равенство:

$$\delta_{m_n}F^n(z,h)=n\delta^{m_1}F(z,h),$$

*) По-видимому, впервые бесконечномерный вариант этой теоремы был получен в 1969 г. Л. Харрисом [17] в предположении, что $\mathcal{D}$ является шаром с центром в точке $x$. Доказательство, предложенное Харрисом, существенно опиралось на это предположение, которое в ряде вопросов является слишком существенным.

откуда

$$\|\delta^{m_1} F(z,h)\| \le M(m_1) n^{-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

А это означает, что $\delta^m F(z,h) \equiv 0$, вопреки предположению. Поэтому $F(z+h) = z+h$ для всех $h$. По теореме единственности $F(x) = x$ для всех $x \in \mathcal{D}$. ■

**Следствие 5.2.** *Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства и оператор $F$ переводит единичный шар $\mathcal{D}_X$ с центром в нуле пространства $X$ в единичный шар $\mathcal{D}_Y$ с центром в нуле пространства $Y$. Тогда, если $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_X, Y)$, $F(0) = 0$ и $F'(0)$ — линейная изометрия из $X$ в $Y$, то $F(x) = F'(0)x$ для всех $x \in \mathcal{D}$.*

□ Обозначим $A = F'(0)$. По условию оператор $A$ имеет непрерывный обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$, причем, так как $\|Ax\| = \|x\|$, то $\|A^{-1}y\| = \|y\|$. Отсюда следует, что оператор $\Phi = A^{-1}F$ отображает $\mathcal{D}_X$ в $\mathcal{D}_X$ и $\Phi \in \mathcal{H}(\mathcal{D}_X, Y)$. Кроме того, $\Phi'(0) = A^{-1} = I_X$. Отсюда по теореме 5.2 получаем, что $\Phi(x) = x$ для всех $x \in \mathcal{D}_X$. Тогда $Fx = A\Phi(x) = Ax$. ■

Оператор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ назовем биголоморфным, если он голоморфен, осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$ и обратный оператор $F^{-1}$ голоморфен в $\mathcal{D}$.

**Следствие 5.3.** *Если оператор $F$ биголоморфен в единичном шаре $\mathcal{D}$ с центром в нуле пространства $X$ и $F(0) = 0$, то $F(x) = Ax$, $x \in \mathcal{D}$, где $A$ — линейная изометрия пространства $X$.*

□ Рассмотрим линейный непрерывный оператор $B = (F^{-1}{}'(0)$. Поскольку $F^{-1} \circ F = I$, из (1.4.1) получаем: $B \circ F'(0) = I$. А это означает, что оператор $A = F'(0)$ непрерывно обратим и $B = A^{-1}$. Кроме того, из (5.2) следует, что $\|A\| \le 1$ и $\|A^{-1}\| \le 1$. Отсюда для любого $x \in X$: $\|Ax\| = \|x\|$, т. е. $A$ — линейная изометрия. Теперь наше утверждение вытекает из следствия 5.2. ■

Пространство $X$ будем называть пространством с обобщенным преобразованием Крейна – Филлипса или проще К-Ф-пространством, если для любой точки $a$ в единичном шаре $\mathcal{D}$ с центром в нуле существует биголоморфный в $\mathcal{D}$ оператор $\Phi_a$, такой, что $\Phi_a(a) = 0$. Примерами К-Ф-пространств могут служить пространства $\mathbb{C}^n$ с чебышевской или евклидовой нормой, гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, алгебра линейных операторов над гильбертовым пространством и другие; в частности, в одномерном пространстве $\mathbb{C}$ оператор $\Phi_a$ имеет вид

$$\Phi_a \lambda = \frac{\lambda - a}{\lambda \overline{a} - 1}, \tag{5.6}$$

где $\overline{a}$ – число, комплексно-сопряженное с $a$.

**Следствие 5.4.** *Пусть $X$ является К-Ф-пространством и $F : X \to X$ — биголоморфный оператор в шаре $\mathcal{D}$ с центром в нуле пространства $X$. Тогда оператор $F$ допускает представление*

$$F = \Phi_b^{-1} \Lambda \Phi_a, \tag{5.7}$$

*где $\Lambda$ — линейная изометрия в $X$, $a$ — произвольная точка в $\mathcal{D}$, $b = F(a)$.*

□ Действительно, для любой точки $a \in \mathcal{D}$ оператор $\Phi_b F \Phi_a^{-1}$ биголоморфен в $\mathcal{D}$ и удовлетворяет условию $\Phi_b F \Phi_a^{-1}(0) = 0$. Остается воспользоваться следствием (5.3). ■

Наконец, заметим, что неравенство (5.2) дает оценку производной Фреше оператора $F$ лишь в одной точке. Как уже отмечалось в гл. I, равномерной оценки производной во всей области $\mathcal{D}$ не существует. Однако, лемма Шварца позволяет оценивать производную Фреше равномерно на любом замкнутом подмножестве области $\mathcal{D}$. Справедлива

**Теорема 5.3.** $^{*)}$ *Пусть $\mathcal{D}$ — единичный шар пространства $X$ с центром в нуле, оператор $F \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, X)$ удовлетворяет условию*

$$F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

*Тогда для любого $x \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство*

$$\|F'(x)x\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|^2}.$$

$\square$ Зафиксируем $x \in \mathcal{D}$ и выберем линейный функционал $x^* \in X^*$ такой, что $\|x^*\| = 1$ и $\langle F'(x)x, x^* \rangle = \|F'(x)x\|$. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \langle F(\lambda x \|x\|^{-1}), x^* \rangle$, голоморфную в $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C}^2 : \ |\lambda| < 1\}$. Очевидно, $|f(\lambda)| \leq 1$ при $\lambda \in \Delta$. Поскольку $\|x\| < 1$, то $f(\|x\|) = \langle F(x), x^* \rangle = a$, где $|a| < 1$. Функции

$$\zeta = \varphi(\lambda) = \frac{\lambda - \|x\|}{\lambda \|x\| - 1}$$

и

$$\psi(w) = \frac{w - f(\|x\|)}{w\overline{f(\|x\|)} - 1}$$

биголоморфны в $\Delta$ (см. (5.6)), а функция $g(\zeta) = \psi(f^{-1}(\zeta))$ удовлетворяет условиям леммы Шварца: $|g(\zeta)| < 1$ и $g(0) = 0$. Следовательно, $|g(\zeta)| \leq |\zeta|$ или, что то же самое,

$$\left| \frac{f(\lambda) - f(\|x\|)}{f(\lambda)\overline{f(\|x\|)} - 1} \right| \leq \left| \frac{\lambda - \|x\|}{\lambda \|x\| - 1} \right|.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\left| \frac{f(\lambda) - f(\|x\|)}{\lambda \|x\|} \right| \leq \left| \frac{f(\lambda)\overline{f(\|x\|)} - 1}{\lambda \|x\| - 1} \right|.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \|x\|$, имеем:

$$|f(\|x\|)| \leq \frac{1 - |f(\|x\|)|^2}{1 - \|x\|^2} \leq \frac{1}{1 - \|x\|^2}.$$

Но $f'(\lambda) = \langle F'(\lambda x \|x\|^{-1}) \circ x \|x\|^{-1}, x^* \rangle$, значит,

$$f'(\|x\|) = \langle F'(x)x, x^* \rangle \, \|x\|^{-1} = \|F'(x)x\| \, \|x\|^{-1},$$

откуда

$$\|F'(x)x\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|^2}. \qquad \blacksquare$$

---

$^{*)}$В неявной форме эта теорема содержится в работе Т. Хайдена и Т. Соффриджа [15].

## § 6. Равномерно ограниченные семейства $\rho$-голоморфных (голоморфных) операторов. Свойство Монтеля

Пусть $\mathcal{D}$ есть $\rho$-открытое множество в $X$. До сих пор мы не использовали тот факт, что $\mathcal{D}$ можно рассматривать, как топологическое пространство с $\rho$-топологией, определенной в § 2. Напомним, что в исходной топологии пространства $X$ $\rho$-голоморфный оператор может иметь разрывы (см. пример I.1.2). Однако, для $\rho$-топологии справедливо утверждение:

Всякий $\rho$-голоморфный ограниченный оператор $\rho$-непрерывен. Мы доказали более сильное утверждение:

**Теорема 6.1.** *Пусть $\mathcal{D}$ есть $\rho$-открытое множество и семейство $\mathcal{F} = \{F_\alpha|\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $F_\alpha \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ равномерно ограничено по норме пространства $Y$: $\|F_\alpha(x)\| \le M < \infty$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно как семейство операторов, действующих из множества $\mathcal{D}$ с $\rho$-топологией в пространстве $Y$ с топологией нормы.*

□ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, возьмем $N \ge \max\{\varepsilon^{-1}M, 1\}$ и пусть $x$, $x'$ таковы, что $\rho(x, x' - x) > N$. Тогда, полагая $x' = x + \zeta h$, $\|h\| = 1$, $\zeta \in \mathbb{C}$, с помощью леммы 2.1 получаем:

$$\rho(x, \zeta h) = \rho(x, h)|\zeta|^{-1} > N,$$

$$|\zeta| < N^{-1}\rho(x, h) \le \rho(x, h),$$

откуда следует, что $F_\alpha(x') = F_\alpha(x + \zeta h)$ допускает представление Тейлора (1.4). Тогда по теореме 5.1 имеем:

$$\|F_\alpha(x') - F_\alpha(x)\| \le \|F_\alpha(x + \zeta h) - F_\alpha(x)\| \le 2M|\zeta|[\rho(x, h)]^{-1}, \qquad (6.1)$$

Учитывая равенства $h = \zeta^{-1}(x' - x)$, окончательно получаем

$$\|F_\alpha(x') - F_\alpha(x)\| \le 2M[\rho(x, x' - x)]^{-1} \le 2MN^{-1} < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

**Следствие 6.1.** *Если множество $\mathcal{D}$ открыто, то равномерно ограниченное семейство $\mathcal{F} = \{F_\alpha :\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ голоморфных в $\mathcal{D}$ операторов со значениями в банаховом пространстве $Y$ локально удовлетворяет условию Липшица равномерно по $\alpha \in \mathfrak{A}$.*

□ Поскольку $\rho(x, h) \ge \delta(x) > 0$ (см. 2.2), где $h \in X$, из (6.1) получаем

$$\|F_\alpha(x') - F_\alpha(x)\| \le 2M|\zeta|[\delta(x)]^{-1} \le 2M[\delta(x)]^{-1}\|x' - x\|$$

для всех $x'$ таких, что $\|x' - x\| \le \delta(x)$. ■

Заметим, что из последнего соотношения следует локальная равномерная ограниченность производных Фреше операторов $F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Вернемся теперь к общему случаю. Рассмотрим вновь класс $\mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$, где $\mathcal{D}$ есть $\rho$-открытое множество в $X$. Рассматривая $\mathcal{D}$ как топологическое пространство с $\alpha$-топологией, введем на множестве всех непрерывных отображений из $\mathcal{D}$ в $Y$ топологию компактной сходимости (равномерной сходимости на компактных $\rho$-топологии множествах из $\mathcal{D}$ (см. § 5, гл. 0)). Применяя теоремы 6.1 и 0.5.4, получаем аналог свойства Монтеля:

**Теорема 6.2.** *Пусть $\mathcal{F}_N$ — ограниченное подмножество в $\mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$, $\mathcal{U}_M = \{F_\alpha \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y) : \|F_\alpha\| \leq M < \infty\}$ для всех $x \in \mathcal{D}$ и пусть орбита $\mathcal{F}_M(x) = \{y \in \mathfrak{Y} : \ y = F(x), \ F \in \mathcal{F}_M\}$ каждой точки $x \in \mathcal{D}$, секвенциально компактна в $Y$. Тогда множество $\mathcal{F}_N$ секвенциально компактно в топологии $\tau_\rho(\mathcal{D}, Y)$.* [Z]

**Замечание 6.1.** В отличие от классической формулировки теоремы Монтеля ($X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$), в теореме 6.2 мы дополнительно предполагаем компактность орбиты, что для $\mathbb{C}^m$ непосредственно следует из ограниченности множества $\mathcal{F}_M$.

Необходимость нашего предположения показывает следующий пример. Пусть $X = Y = \ell_2$. Рассмотрим семейство линейных ограниченных, а стало быть, голоморфных операторов $\{B_k\}_1^\infty$, заданных на множестве $\{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 | \ \|x\| \leq R < \infty\}$ и определяемых равенством $B_k x = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, x_1, \ldots, x_n, \ldots)\}$. Очевидно, $\|B_k x\| < R$ для всех $x$, $\|x\| < R$, $k = 1, 2, \ldots$, однако последовательность $\{B_k | \ k \in \mathbb{N}\}$ не является компактной, например, для точки $x = (1, 0, 0, \ldots)$.

Предположим теперь, что $Y$ сопряжено с некоторым банаховым пространством и в ультраслабой топологии метризуемо (так будет, например, если $Y$ сепарабельно). Тогда по теореме Алаоглу – Бурбаки (см. § 10, гл. 0) всякое ограниченное множество в $Y$ секвенциально компактно в ультраслабой топологии. Следовательно, можно воспользоваться теоремами 0.5.4 и 6.1, откуда получается

**Теорема 6.3.** *Пусть пространство $Y$ метризуемо в ультраслабой топологии. Тогда всякое ограниченное множество $\mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ является секвенциально компактным в топологии $\tau_\rho(\mathcal{D}, Y)$.*

Если пространство $Y$ рефлексивно, то в теореме 6.3, вместо ультраслабой, можно говорить о слабой топологии пространства $Y$.

Как следствие из теорем 6.1 – 6.3 вытекает аналог теоремы Банаха – Штейнгауза*) (см. § 8, гл. 0).

**Теорема 6.4.** *Пусть $Y$ наделено топологией нормы (ультраслабой топологией). Для того, чтобы последовательность ограниченных операторов $\{F_n | \ n \in \mathbb{N}\}$, $F_n \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ сходилась к ограниченному в $\mathcal{D}$ оператору $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ в топологии $\tau_\rho(\mathcal{D}, Y)$, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий:*

1) *семейство $\{F_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ равномерно ограничено в $\mathcal{D}$;*

2) *последовательность $\{F_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна (ультраслабо фундаментальна) для каждого $x \in \mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}'$ — плотное в $\mathcal{D}$ $\rho$-топологии множества из $\mathcal{D}$.*

В заключение этого параграфа мы приведем два обобщения теоремы Витали.

**Теорема 6.5.** *Пусть $\mathcal{D}$ $\rho$-открытое, $\mathbb{C}^2$-звездное относительно точки $x_0 \in \mathcal{D}$ множество, последовательность $\{F_n | \ n \in \mathbb{N}\}$, $F_n \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$ равномерно ограничена в $\mathcal{D}$, и при любом $h \in X$, $\|h\| = 1$, фундаментальна на каждом диске $\mathcal{D}_\rho(x, h) \subseteq \mathcal{D}$ в нормальном пространстве $Y$. Тогда эта последовательность фундаментальна в $\mathcal{D}$ по норме $Y$, а следовательно, сильно сходится к некоторому оператору $F \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{D}, Y)$.*

*) В дальнейшем мы не раз будем наблюдать некоторое сходство геометрических свойств голоморфных ограниченных операторов и линейных ограниченных операторов.

$\square$ Пусть $u$ — произвольная точка из $\mathcal{D}$. В силу свойств множества $\mathcal{D}$ найдутся $h \in X$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le 1$ такие, что $x_0 + h \in \mathcal{D}$. Кроме того, $\rho(x, h) \ge 1$. Тогда вектор-функции $f_n(\zeta) = F(x_0 + \zeta h)$ голоморфны в единичном круге $|\zeta| < 1$ и ограничены в этом круге по норме $Y$ одной и той же постоянной $M \le 1$. По условию найдется число $d > 0$ такое, что последовательность $\{f_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна в круге $|\zeta| \le d$*).

В силу теоремы 6.4 эта последовательность равномерно сходится, т. е. для любого наперед заданного положительного числа $\delta$ найдется номер $N(\delta)$ такой, что как только $n > N(\delta)$, то

$$\|f_n(\zeta) - f_{n+m}(\zeta)\| \le \delta, \qquad |\zeta| \le d, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

отсюда, и из неравенства Коши (3.8) получаем

$$\|\delta^k_{nm} F(x, h)\| \le \delta d^{-n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\delta^k_{nm}$ — коэффициенты Тейлора оператора $F_{nm} = F_n - F_{n+m}$. Отметим также равномерное относительно $k = 0, 1, 2, \ldots$, неравенство:

$$\|\delta^k_{nm} F(x, h)\| \le 2M.$$

Тогда, полагая $|\lambda| = r$ $(< 1)$, получаем

$$\|F_n(u) - F_{n+m}(u)\| = \|f_n(\lambda) - f_{n+m}(\lambda)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|\delta^k_{nm} F(x, h)\lambda^k\|.$$

Применяя формулу геометрической прогрессии к остатку последнего ряда имеем

$$\|F_n(u) - F_{n+m}(u)\| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{p-1} \|\delta^k_{nm} F(x, h)\| r^k + 2M\,\frac{r^p}{1-r} \le \sum_{k=0}^{p-1} \delta\left(\frac{r}{d}\right)^k + 2M\,\frac{r^p}{1-r} =$$

$$= \delta\left(1 - \frac{r}{d}\right)^{-1}\left(1 - \left(\frac{r}{p}\right)^p\right) + 2Mr^p(1-r)^{-1}.$$

Теперь для любых $\delta > 0$ и $q:\ 0 < q < 1$, выбираем

$$p > \ln(\delta(1-r)(1-q)(2M)^{-1})(\ln r)^{-1} \tag{6.2}$$

и

$$\delta < \varepsilon q(rd)d^{p-1}(r^p - d^p)^{-1}, \tag{6.3}$$

получаем: $\|F_n(u) - F_{n+m}(u)\| < \varepsilon$ как только $n > N(\delta)$. $\blacksquare$

Для случая ультраслабой сходимости доказательство аналогичного утверждения может быть несколько упрощено, если использовать свойство Монтеля. Однако нас будет в основном интересовать случай голоморфных операторов. [Z]

*) Дальнейшее рассуждение почти дословно воспроизводит классическое доказательство. Однако, нам понадобятся некоторые получающиеся при этом оценки. Поэтому мы приводим это доказательство полностью.

**Теорема 6.6.** *Пусть пространство $\mathfrak{Y}$ метризусемо в ульраслабой топологии и пусть $\mathfrak{D}$ — область в $\mathfrak{X}$. Пусть равномерно ограниченная последовательность $\{F_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ голоморфных в $\mathfrak{D}$ операторов сходится в ультраслабой топологии к оператору $\mathcal{H}(\mathfrak{D}', \mathfrak{Y})$ для любого элемента некоторого открытого множества $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{D}$. Тогда $F$ допускает голоморфное продолжение на все $\mathfrak{D}$ и последовательность $\{F_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится к этому продолжению в ультраслабой топологии на каждом элементе $\mathfrak{D}$.* [Z]

☐ Согласно теореме 6.3 последовательность $\{F_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ содержит подпоследовательность $\{F_{n_k}|\ k \in \mathbb{N}\}$, сходящуюся в ультраслабой топологии на каждом элементе из $\mathcal{D}$ к некоторому оператору $\widetilde{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{D}, Y)$, который можно рассматривать как голоморфное продолжение оператора $F$, т. е. $\widetilde{F}|\mathcal{D}' = F$. В силу теоремы единственности любая другая сходящаяся подпоследовательность $\{F_{n_m}|\ m \in \mathbb{N}\}$ имеет своим ультраслабым пределом также оператор $\widetilde{F}$, что завершает доказательство. ■

Отметим, что несмотря на простоту, это доказательство не носит конструктивного характера, ибо не дает оценок, аналогичных оценкам (6.2), (6.3), которые могут быть эффективно использованы в ряде прикладных вопросов (см. ниже § 2, гл. VI).

# ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Эта глава, как и глава 0, в основном, носит вспомогательный характер. Однако, в отличие от главы 0, рассматриваемые здесь вопросы, с одной стороны, являются более специальными, а с другой — не все они вошли в монографии, некоторые содержатся лишь в журнальных статьях. Поэтому изложение мы ведем здесь подробное, с доказательствами.

## § 1. Спектр и резольвента линейного оператора

**1.** Замкнутые операторы. Пусть $X$, $Y$ — комплексные банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор (определения см. в § 8, гл. 0). Напомним, что оператор $A$ понимается как множество пар $(x, Ax)$, $x \in \mathfrak{D}(A) \subseteq X$. Оператор $A$ обратим (т. е. имеет обратный оператор) точно тогда, когда его ядро $\mathfrak{A}$ $(= \{x \in \mathfrak{D}(A) : \ Ax = 0\})$ состоит лишь из одного нулевого вектора. В этом случае оператор $A^{-1}$ определен на $\mathfrak{R}(A)$, действует в $\mathfrak{D}(A)$ и $A^{-1}Ax = x$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, $AA^{-1}y = y$ для всех $y \in \mathfrak{R}(A)$.

Оператор $A$ называется замкнутым, если он замкнут как подмножество топологического произведения $X \times Y$ (из $x_n \in \mathfrak{D}(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \mathfrak{D}(A)$ и $y = Ax$). Если замкнут оператор $A$, то, очевидно, замкнут и оператор $A^{-1}$. Если оператор $A$ ограничен и определен всюду в $X$, а $B$ замкнут, то и оператор $A + B$, определенный в $\mathfrak{D}(A)$, тоже замкнут.

**Теорема 1.1.** *Ограниченный линейный оператор замкнут точно тогда, когда замкнута его область определения $\mathfrak{D}(A)$.*

□ Если оператор $A$ ограничен и $x_n \in \mathfrak{D}(A)$, $x_n \to x$, $n \to \infty$, то $Ax_n \to Ax$. Поэтому замкнутость $A$ равносильна замкнутости $\mathfrak{D}(A)$. ■

В частности, замкнут всякий оператор из $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е. ограниченный, заданный, на всем $X$. Верно и обратное утверждение, которое мы приведем без доказательства.

**Теорема 1.2.** (О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ) *Всякий замкнутый линейный оператор $A$ с областью определения $\mathfrak{D}(A) = X$ ограничен.*

**2.** Спектр и резольвента. В этом пункте будем считать $X = Y$. Пусть $A$ — линейный оператор в $X$. Точку $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, определен всюду в $X$ и ограничен, называют регулярной точкой оператора $A$. Множество всех регулярных точек оператора $A$ обозначается через $\varrho(A)$.

**Теорема 1.3.** *Линейный оператор $A$, имеющий хотя бы одну регулярную точку, замкнут.*

□ Если $\lambda \in \varrho(A)$, то по теореме 1.1 оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ замкнут, а потому замкнут и оператор $A - \lambda I$. Поскольку $A = \lambda I + (A - \lambda I)$, то замкнут и оператор $A$. ■

Дополнение к множеству $\varrho(A)$ в $\mathbb{C}$ называют спектром оператора $A$ и обозначают через $\sigma(A)$. Согласно теореме 1.3 спектр незамкнутого оператора совпадает с множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а его множество регулярных точек пусто. Поэтому всюду ниже в этом параграфе рассматриваются замкнутые линейные операторы, действующие в комплексном банаховом пространстве $X$.

Пусть $A$ — линейный оператор в $X$. На множестве $\sigma(A)$ его регулярных точек определим резольвенту $\Gamma_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \varrho(A)$. Если из текста ясно, о каком операторе идет речь, будем просто писать $\Gamma(\lambda)$. Из соотношений

$$\Gamma(\mu)(A - \lambda I)\Gamma(\lambda) - \Gamma(\mu)(A - \mu I)\Gamma(\lambda) = (\mu - \lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda) \qquad (\lambda,\ \mu \in \varrho(A)$$

следует тождество Гильберта

$$\Gamma(\mu) - \Gamma(\lambda) = (\mu - \lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda). \tag{1.1}$$

которое влечет коммутативность значений оператор-функции $\Gamma(\lambda)$.

**Теорема 1.4.** *Множество регулярных точек $\varrho(A)$ оператора $A$ открыто, резольвента $\Gamma(\lambda)$ аналитична в $\varrho(A)$.*

□ Пусть $\lambda \in \varrho(A)$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда $A - \mu I = A - \lambda I - (\mu - \lambda)I$. Если $|\mu - \lambda| < \|\Gamma(\lambda)\|^{-1}$, то по теореме 0.4.6 существует, ограничен и задан на всем $A$ оператор $(A - \mu I)^{-1}$. Значит, $\mu \in \varrho(A)$ и $\Gamma(\mu) = (I - (\mu - \lambda)\Gamma(\lambda))^{-1}\Gamma(\lambda)$. Отсюда $\Gamma(\mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^n\Gamma^{n+1}(\lambda)$, где ряд сходится при всех $\mu$, для которых $|\mu - \lambda| < \|\Gamma(\lambda)\|^{-1}$. Таким образом, $\Gamma(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция. ■

**Следствие 1.1.** *Спектр $\sigma(A)$ замкнут.*

□ Заключение непосредственно вытекает из теоремы 1.4 и формул де Моргана (см. § 1, гл. 0). ■

Заметим, что заключение следствия 1.1 справедливо и для незамкнутого оператора $A$, так как в этом случае $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Итак, спектр замкнутого линейного оператора $A$ в комплексном банаховом пространстве, есть замкнутое (возможно, пустое) подмножество множества $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Спектр $\sigma(A)$, если он пуст, распадается на 3 части:

1) $\sigma_1(A)$ состоит из всех $\lambda \in \sigma(A)$, для которых оператор $A - \lambda I$ имеет ненулевое ядро $\mathfrak{N}(A - \lambda I)$;

2) $\sigma_2(A)$ — это те $\lambda \in \sigma(A)$, для которых $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \{0\}$ и найдется последовательность $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, а
$$(A - \lambda I)x_n \to 0, \qquad n \to \infty;$$

3) $\sigma_3(A)$ состоит из всех $\lambda \in \sigma(A)$ таких, что $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \{0\}$, и
$$\overline{\mathfrak{R}(A - \lambda I)} = \mathfrak{R}(A - \lambda I).$$

Легко видеть, что все три части $\sigma_1(A)$, $\sigma_2(A)$ и $\sigma_3(A)$ спектра попарно не пересекается и $\sigma(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{3}\sigma_i(A)$.

Множество $\sigma_1(A)$ состоит из собственных значений оператора $A$: если $\lambda \in \sigma_1(A)$, то найдется $x \in X$, $x \neq 0$ такое, что $Ax = \lambda x$.

Множество $X_\lambda$ всех собственных векторов $x$, отвечающих собственному значению $\lambda$, вместе с нулем пространства $X$ образует подпространство, называемое собственным. Кратностью собственного значения $\lambda$ называется размерность собственного подпространства $X_\lambda$.

Рассмотрим вопрос о расположении спектра на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для случая неограниченного оператора не исключено, что его спектр заполняет всю комплексную плоскость. Обратимся к ограниченным замкнутым операторам $A$. В этом случае по теореме 1.1 область определения $\mathfrak{D}(A)$ замкнута в $X$. Ниже в этом параграфе будем считать, что $\mathfrak{D}(A) = X$, т. е. $A \in \mathcal{L}(X)$ $(= \mathcal{L}(X, X))$.

**Следствие 1.2.** *Спектр $\sigma(A)$ не пуст и ограничен.*

Предположим противное: $\varrho(A) = \mathbb{C}$. Полагая $\lambda = 0$, из тождества Гильберта получаем $\Gamma(\mu) = \mu^{-1}\Gamma(0)(\mu^{-1}I - \Gamma(0))^{-1}$. Отсюда $\|\Gamma(\mu)\| \to 0$ при $\mu \to \infty$. Поэтому резольвента ограничена. Мы получили, что $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X)$ — аналитическая ограниченная всюду в $\mathbb{C}$ оператор-функция. Поэтому для любого $f \in (\mathcal{L}(X))^*$ функция $f \circ \Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитична и ограничена. По теореме Лиувилля $f \circ \Gamma(\lambda) = \mathrm{const}$ для любого $f \in (\mathcal{L}(X))^*$, а потому и $\Gamma(\lambda) = \mathrm{const}$. Поскольку $\Gamma(\infty) = 0$ то, получаем, что $\Gamma(\lambda) \equiv 0$ вопреки определению резольвенты.

При $|\lambda| > \|A\|$ по теореме 0.8.4 оператор $A - \lambda I = -\lambda\left(I - \dfrac{1}{\lambda}A\right)$ гомеоморфно отображает $X$ на $X$. Поэтому спектр $\sigma(A)$ заключен в круге $|\lambda| \geq \|A\|$.

**Лемма 1.1.** *Множество $\sigma_3(A)$ открыто.*

$\square$ По определению для $\lambda \in \sigma_3(A)$ линеал $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ замкнут и $\mathfrak{N}(A - \lambda I) = \{0\}$. По теореме 0.8.5 оператор $(A - \lambda I)^{-1} : \mathfrak{R}(A - \lambda I) \to X$ ограничен. Для любого $\mu \in \mathbb{C}$, для которого $|\mu - \lambda| < \|(A - \lambda I)^{-1}\|^{-1}$ по теореме 0.8.4 оператор $I + (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1}$ — гомеоморфизм $X$ на $X$. Отсюда

$$A - \mu I = (A - \lambda I)(I + (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1})$$

есть гомеоморфизм $X$ на $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$, т. е. $\mu \in \sigma_3(A)$. $\blacksquare$

Для $\lambda \in \sigma_1(A)$ рассмотрим неубывающую последовательность

$$\{0\},\ \mathfrak{N}(A - \lambda I),\ \mathfrak{N}((A - \lambda I)^2), \ldots, \mathfrak{N}((A - \lambda I)^n),\ \ldots$$

Если найдется число $m \geq 0$, для которого $\mathfrak{N}((A - \lambda I)^m) = \mathfrak{N}((A - \lambda I)^{m+j})$ при любом $j \in \mathbb{N}$, то пространство $\mathfrak{N}((A - \lambda I)^m)$ называется корневым подпространством, отвечающим собственному значению $\lambda$, а число $m$ называется рангом собственного значения $\lambda$.

Пусть $P$ — ограниченный проектор в $X$ (т. е. линейный ограниченный оператор со свойством $P^2 = P$), коммутирующий с $A$. Тогда подпространства $X_1 = PX$ и $X_2 = (I - P)X$ инвариантны относительно оператора $A$, т. е. $AX_1 \subseteq X_1$ и $AX_2 \subseteq X_2$. В самом деле, полагая $P_1 = P$, $P_2 = I - P$ для $x_i \in X$ имеем

$$Ax_i = AP_i x_i = P_i A x_i \in X_i, \qquad i = 1,\ 2.$$

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ распадается на две непересекающиеся части $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Тогда существует спрямляемая простая (т. е. без самопересечений) замкнутая кривая $\gamma$, во внутренней части которой содержится $\sigma_1$, а во внешней — $\sigma_2$. В этом случае справедлива

**Теорема 1.5.** *Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ допускает описанное выше разбиение на части $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Тогда пространство $X$ разлагается в топологическую прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$ банаховых пространств, $X_1,\ X_2$, инвариантных относительно $A : AX_i \subseteq X_i$; спектры сужений $A|X_i$ совпадают с $\sigma_i$, $i = 1,\ 2$.*

$\square$ Положим

$$P_1 = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Gamma(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.2}$$

Оператор $P_1$ ограничен и $P_1^2 = P_1$:

$$P_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_\gamma \int\limits_\gamma \Gamma(\xi)\Gamma(\zeta)\, d\xi d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_\gamma \int\limits_\gamma (\xi - \zeta)^{-1}(\Gamma(\xi) - \Gamma(\zeta))\, d\xi d\zeta =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Gamma(\zeta)\, d\zeta$$

(в процессе вычислений использовано тождество Гильберта и интегральная теорема Коши). Поэтому $P_1$ — проектор, а вместе с ним проектором является $P_2 = I - P_1$. Значит, $X = X_1 \dot{+} X_2$, где $X_i = P_i X$, $i = 1,\ 2$. Далее, при любом $\lambda \in \varrho(A)$

$$P_1\Gamma(\lambda) = \Gamma(\lambda)P_1,$$

откуда $AP_1 = P_1A$. Поэтому подпространства $X_1$ и $X_2$ инвариантны относительно $A$. Положим $A|X_i = A_i$, $i = 1,\ 2$. Нетрудно проверить, что $\Gamma_{A_i}(\lambda) = \Gamma(\lambda)|X_i$. Отсюда $\varrho(A_1) \supseteq \varrho(A)$. Кроме того, $\varrho(A_1)$ содержит $\sigma_2$. Действительно, $\Gamma_{A_1}(\lambda)u = \Gamma(\lambda)P_1u$ для всех $u \in X$, $\lambda \in \varrho(A)$. Для любого $\lambda \notin \gamma$ согласно (1.2) и тождеству Гильберта (1.1) имеем

$$\Gamma(\lambda)P_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Gamma(\lambda)\Gamma(\zeta)\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\Gamma(\lambda) - \Gamma(\zeta))\, \frac{d\zeta}{\lambda - \zeta}. \tag{1.3}$$

Если $\lambda$ лежит вне контура $\gamma$, то

$$\Gamma(\lambda)P_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{\lambda - \zeta}\Gamma(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.4}$$

Поскольку правая часть в (1.4) голоморфна вне контура $\gamma$, то $\Gamma(\lambda)P_1$ и следовательно $\Gamma_{A_1}(\lambda)$ имеют аналитические продолжения, голоморфные вне контура $\gamma$. Это аналитическое продолжение $\Gamma_{A_1}(\lambda)$ и является резольвентой оператора $A_1$. Поэтому $\varrho(A_1)$ содержит внешность контура $\gamma$, значит, $\sigma(A_i) \subseteq \sigma_1$. Аналогично из (1.3) следует, что

$$\Gamma(\lambda)P_1 = \Gamma(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Gamma(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\lambda - \zeta},$$

если $\lambda$ лежит внутри контура $\gamma$. Значит, $\Gamma(\lambda)(I - P_1)$ $(= \Gamma(\lambda)P_2)$ имеет аналитическое продолжение, голоморфное внутри $\gamma$. Как и выше, заключаем, что $\sigma(A_2) \subseteq \sigma_2$.

С другой стороны, точка $\lambda \in \sigma(A)$ не может принадлежать одновременно $\varrho(A_1)$ и $\varrho(A_2)$: в противном случае она принадлежала бы $\varrho(A)$, так как оператор $\Gamma_{A_1}(\lambda)P_1 + \Gamma_{A_2}(\lambda)P_2$ является обратным к $A - \lambda I$. Отсюда следует, что $\sigma(A_i) = \sigma_i$, $i = 1,\ 2$. ■

## § 2. Спектральный радиус

Удобным инструментом изучения вопроса о локализации спектра оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ является ряд Неймана

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i+1} A^i, \tag{2.1}$$

где $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Радиус сходимости этого степенного ряда с операторными коэффициентами вычисляется по формуле

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{2.2}$$

Существование предела в (2.2) обосновывается следующими рассуждениями.

□ Положим $\inf\limits_{n\geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r$. Покажем, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$, где символ $\overline{\lim}$ означает верхний предел. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $\|A^m\|^{\frac{1}{m}} \leq r + \varepsilon$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеем: $n = pm + q$, где $0 \leq q \leq m - 1$. Тогда

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^m\|^{\frac{p}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q}{n}} \leq (r+\varepsilon)^{\frac{mp}{n}} \|A\|^{\frac{q}{n}}.$$

Легко видеть, что $pmn^{-1} \to 1$ и $qn \to 0$ при $n \to \infty$ ($m$ — фиксированно), поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ получаем: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$, откуда и следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A). \qquad ■$$

**Теорема 2.1.** *Для всякого $A \in \mathcal{L}(X)$ справедлива формула*

$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|. \tag{2.3}$$

□ Как показано выше, $r(A) \geq \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$. Покажем, что $r(A) \leq \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$. Положим $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = r$. По теореме IV.1.4 резольвента $\Gamma(\lambda)$ аналитична вне круга радиуса $r$, значит, разлагается там в сходящийся по операторной норме ряд Лорана, который по теореме единственности совпадает с рядом Неймана. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\lambda^n A^n\| = 0$ при $|\lambda| > r$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m\ (= m(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ такое, что $\|A^n\| \leq (r+\varepsilon)^n$ при всех $n \geq m$. Отсюда

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \qquad ■$$

**Следствие 2.1.** *Если $|\lambda| < r(A)$, то ряд Неймана расходится.*

При $|\lambda| > r(A)$ ряд Неймона сходится по операторной норме и $-\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda^{1-i} A^i = \Gamma(\lambda)$. В силу теоремы 2.1 и следствий 1.1 и 1.2 на границе круга радиуса $r(A)$ всегда есть точка спектра оператора $A$. Поэтому число $r(A)$ называют спектральным радиусом оператора $A$, так что $r(A)$ — радиус наименьшего замкнутого круга с центром в нуле комплексной плоскости $\mathbb{C}$, содержащего спектр оператора $A$. Из неравенств $\|A^n\| \le \|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что $r(A) \le \|A\|$.

Нетрудно привести пример оператора $A$, для которого $r(A) < \|A\|$.

**Пример 2.1.** Пусть $X$ — двумерное комплексное или вещественное пространство с базисом $\{e_1, e_2\}$, $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, в котором оператор $A$ задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу $A^n = 0$ при $n \ge 2$ получаем, что $r(A) = 0$, в то время как $\|A\| = 1$. В этой связи интересно следующие предложение.

**Теорема 2.2.** (Я.Б. Рутицкий) *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ в пространстве $X$ можно ввести эквивалентную исходной норму $\|\cdot\|_\varepsilon$ так, что*

$$r(A) \le \|A\|_\varepsilon \le r(A) + \varepsilon. \tag{2.4}$$

□ Выберем $n$ так, чтобы $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} < r(A) + \varepsilon$ и положим

$$\|x\|_\varepsilon = (r+\varepsilon)^{n-1}\|x\| + (r+\varepsilon)^{n-2}\|Ax\| + \ldots + \|A^{n-1}x\|.$$

Из неравенств

$$(r+\varepsilon)^{n-1}\|x\| \le \|x\|_\varepsilon \le ((r+\varepsilon)^{n-1} + (r+\varepsilon)^{n-2}\|A\| + \ldots + \|A^{n-1}\|)\|x\|$$

следует, что нормы $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\varepsilon$ эквивалентны в $X$. Далее

$$\|A\|_\varepsilon = \sup_{\|x\|_\varepsilon = 1} \|Ax\|_\varepsilon = \sup_{\|x\|_\varepsilon = 1} ((r+\varepsilon)^{n-1}\|Ax\| + (r+\varepsilon)^{n-1}\|Ax\| + \ldots + \|A^n x\|).$$

Из выбора числа $n$ следует, что $\|A^n x\| \le (r+\varepsilon)^n \|x\|$. Отсюда, переставляя слагаемые, получаем

$$\|A\|_\varepsilon \le ((r+\varepsilon) \sup_{\|x\|_\varepsilon = 1} (r+\varepsilon)^{n-1}\|x\| + (r+\varepsilon)^{n-2}\|Ax\| + \ldots + \|A^{n-1}x\|) =$$

$$= (r+\varepsilon) \sup_{\|x\|_\varepsilon = 1} \|x\|_\varepsilon = r + \varepsilon,$$

что доказывает правую часть неравенств (2.4).

В силу (2.3) величина $r(A)$ не меняется при замене нормы $\|\cdot\|$ в $X$ на эквивалентную ей норму $\|\cdot\|_\varepsilon$. Отсюда и из формулы (2.2), заменяя в ней $\|A^n\|$ на $\|A^n\|_\varepsilon$ получаем:

$$r(A) \le \|A\|_\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

В заключение параграфа рассмотрим семейство линейных ограниченных операторов $A(\lambda)$ в $X$, аналитически зависящих от параметра $\lambda$[*)] и спектральный радиус $r(A(\lambda)) = r(\lambda)$ как функцию этого параметра. Справедлива

---

[*)] Такое семейство называется аналитическим операторным пучком (см., например, А.С. Маркус [9]).

**Теорема 2.3.** (E. Vesentini [4]) *Пусть в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ задан аналитический операторный пучок $A(\lambda)$. Тогда спектральный радиус $r(\lambda)$ — субгармоническая функция.*

$\square$ По интегральной формуле Коши для любых $f \in (\mathcal{L}(X))^*$, $\lambda \in \mathcal{D}$, и окружности радиуса $r$, целиком содержащейся в $\mathcal{D}$, имеем

$$\langle A^n(\lambda), f\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \langle A(\lambda + e^{i\varphi}\eta), f\rangle\, d\varphi.$$

Отсюда

$$\|A(\lambda)\| = \sup_{\|f\|=1} \langle A(\lambda), f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|A(\lambda + e^{i\varphi}\eta)\|\, d\varphi,$$

т. е. $\|A(\lambda)\|$ — субгармоническая функция. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ операторный пучок $A^n(\lambda)$ также аналитичен, то субгармонической является и функция $\|A^n(\lambda)\|$. Поэтому

$$\|A^n(\lambda)\|^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|A^n(\lambda + e^{i\varphi}\eta)\|\, d\varphi\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \|A(\lambda + e^{i\varphi}\eta)\|^{\frac{1}{n}}\, d\varphi.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое. $\blacksquare$

**Следствие 2.2.** (принцип максимума) *Спектральный радиус аналитического операторного пучка достигает максимума лишь на границе области $\mathcal{D}$.*

## § 3. Резольвента и спектр сопряженного оператора

Пусть $A$ — линейный оператор с плотной в банаховом пространстве $X$ областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Тогда (см. § 9, гл. 0) существует сопряженный оператор $A^* : X^* \to X^*$.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на $X \times X^*$ (см. § 9, гл. 0). Если $A^* f = 0$ при некотором $f \in \mathfrak{D}(A^*)$, то $\langle x, A^* f\rangle = \langle Ax, f\rangle$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, значит $f \in \mathfrak{R}(A)^{\perp}$. Поэтому из $\overline{\mathfrak{R}(A)} = X$ следует $f = 0$. С другой стороны, если $y \in \overline{\mathfrak{R}(A)}$, то по теореме 0.6.7 существует такой функционал $f \in X^*$, что $f(y) = 1$ и $f(\overline{\mathfrak{R}(A)}) = 0$. Следовательно, $\langle Ax, f\rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, а потому $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ и $A^* f = 0$. Таким образом, доказана

**Лемма 3.1.** *Если $A$ — линейный оператор в $X$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$, то оператор $(A^*)^{-1}$ существует точно тогда, когда $\overline{\mathfrak{R}(A)} = X$.*

**Теорема 3.1.** *Пусть линейный оператор $A$ имеет обратный и $X = \overline{\mathfrak{D}(A^{-1})} = \overline{\mathfrak{R}(A)}$. Тогда $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. При этом оператор $A^{-1}$ всюду в $X$ определен и ограничен точно тогда, когда оператор $A$ замкнут и $(A^*)^{-1}$ всюду в $X$ определен и ограничен.*

$\square$ По лемме 3.1 существует оператор $(A^*)^{-1}$. Из $\overline{\mathfrak{D}(A^{-1})} = \overline{\mathfrak{R}(A)} = X$ следует существование оператора $(A^{-1})^*$. Если $y \in \mathfrak{R}(A)$, $f \in \mathfrak{D}(A)$, то

$$\langle y, f\rangle = \langle AA^{-1}y, f\rangle = \langle A^{-1}y, A^*f\rangle,$$

откуда $\mathfrak{R}(A^*) = \mathfrak{D}((A^{-1})^*)$ и $(A^{-1})^*(A^*f) = f$ для всех $f \in \mathfrak{D}(A^*)$. Значит, $(A^*)^{-1} \subseteq (A^{-1})^*$. Далее, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то $\langle x, f\rangle = \langle A^{-1}Ax, f\rangle = \langle Ax, (A^{-1})^*f\rangle$ для всех $f \in \mathcal{D}((A^{-1})^*)$. Поэтому $\mathfrak{R}((A^{-1})^*) \subseteq \mathfrak{D}(A^*)$, $A^*(A^{-1})^*f = f$ для всех $f \in \mathfrak{D}((A^{-1})^*)$. Следовательно, $(A^{-1})^* \subseteq (A^*)^{-1}$, откуда с учетом обратного включения $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Если, кроме того, оператор $A^{-1}$ всюду в $X$ определен и ограничен, то ограничен и $(A^{-1})^*$, значит и $(A^*)^{-1}$. По теореме 1.1 оператор $A^{-1}$ замкнут, а потому замкнут и оператор $(A^*)^{-1}$. Обратно, если оператор $(A^*)^{-1}$ всюду в $X^*$ определен и ограничен, а оператор $A$ замкнут, то для всех $x \in \mathfrak{R}(A)$ и $f \in X^*$ имеем

$$|\langle A^{-1}x, f\rangle| = |\langle x, (A^{-1})^*f\rangle| = |\langle x, (A^*)^{-1}f\rangle| \leq \|(A^*)^{-1}\| \, \|f\| \, \|x\|$$

т. е. оператор $A^{-1}$ ограничен. $\blacksquare$

Отсюда в силу замкнутости оператора $A^{-1}$ и $\overline{\mathfrak{D}(A^{-1})} = \overline{\mathfrak{R}(A)} = X$ по теореме 1.1 следует

**Теорема 3.2.** *Пусть $A$ — замкнутый линейный оператор в $X$, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$. Тогда $\varrho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \overline{\lambda} \in \varrho(A)\}$; $\Gamma_{A^*}(\lambda) = \Gamma_A(\overline{\lambda})^*$.*

$\square$ Пусть $\lambda \in \varrho(A)$, т. е. всюду в $X$ определен и ограничен оператор $(A-\lambda I)^{-1}$. По теореме 1.1 всюду в $X^*$ определен оператор $((A-\lambda I)^*)^{-1}$. Но $(A-\lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$, поэтому $\overline{\lambda} \in \varrho(A^*)$. Обратно, пусть $\lambda \in \varrho(A^*)$, т. е. всюду определен и ограничен оператор $(A^* - \lambda I)^{-1}$. Покажем, что существует $(A - \overline{\lambda} I)^{-1}$. Пусть $(A - \overline{\lambda} I)x_0 = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$. Тогда $\langle x_0, (A^* - \lambda I)f\rangle = \langle (A^* - \overline{\lambda} I)x_0, f\rangle$ для всех $f \in \mathcal{D}(A^* - \lambda I)$, а $\mathfrak{R}(A^* - \lambda I) = X$. Отсюда $x_0 \in^{\perp} X^* = \{0\}$. Таким образом, оператор $A - \overline{\lambda} I$ имеет обратный $(A^* - \overline{\lambda} I)^{-1}$ и оба эти оператора замкнуты. По лемме 3.1 $\overline{\mathcal{D}(A - \overline{\lambda} I)^{-1}}$ $(= \overline{\mathfrak{R}(A - \overline{\lambda} I)}) = X$. Отсюда и из теоремы следует $\overline{\lambda} \in \varrho(A)$. $\blacksquare$

С помощью формул де Моргана получаем

**Следствие 3.1.** *В условиях теоремы 3.2 спектр сопряженного оператора $A^*$ сопряжен со спектром оператора $A$, т. е.*

$$\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \ \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}.$$

Рассмотрим случай, когда линейный оператор действует в гильбертовом пространстве $X = \mathfrak{H}$. В этом случае сопряженный оператор действует снова в $\mathfrak{H}$, поэтому имеет смысл понятие самосопряженного оператора, т. е. такого линейного оператора $A$, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$, что $A = A^*$. Тогда $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in \mathfrak{D}(A)$ $(= \mathfrak{D}(A^*))$. В силу следствия 3.1 спектр самосопряженного оператора $A$ вещественен: $\sigma(A) \in \mathbb{R}$, а для резольвенты справедлива

**Теорема 3.3.** *Пусть $A$ — самосопряженный оператор, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$. Тогда*

$$\|\Gamma_A(\lambda))\| \leq \frac{1}{|\beta|}. \tag{3.1}$$

$\square$ Очевидно,

$$\|(A - \lambda)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x - i\beta x\|^2 = \|(A - \lambda I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$. Отсюда и следует (3.1). ■

Замечательным свойством самосопряженного оператора является наличие у него спектрального разложения. Без доказательства приведем теорему о спектральном разложении. Нам понадобится такое определение:

Пусть $B$, $C$ — ограниченные самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Будем писать $B \leq C$, если $\langle Bx, x\rangle \leq \langle Cx, x\rangle$ для всех $x \in \mathfrak{H}$.

**Теорема 3.4.** *Пусть $A$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Тогда существует семейство ортопроекторов (см. § 11, гл. 0) $E_\lambda$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающее свойствами:*

1) *$E_\lambda \leq E_\mu$ для всех $\lambda, \mu$ таких, что $\lambda < \mu$;*

2) *$E_\lambda$ сильно непрерывен слева: $E_{\lambda-\alpha}x \to E_\lambda x$ при $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$, и при всех $x \in \mathfrak{H}$;*

3) *$E_{-\infty} = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$, $E_{+\infty} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = 0$;*

4) *$BE_\lambda = E_\lambda B$, если $B$ — любой ограниченный оператор, коммутирующий с $A$. При этом ограниченный оператор $B$ в $\mathfrak{H}$ называется коммутирующим с $A$, если из $x \in \mathfrak{D}(A)$ следует $Bx \in \mathfrak{D}(A)$ и $ABx = BAx$.*

*Элемент $x$ принадлежит $\mathfrak{D}(A)$ точно тогда, когда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty$$

*для таких $x$*

$$Ax = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda x, \qquad \|Ax\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d\langle E_\lambda x, x\rangle.$$

*При этом интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda x$ понимают как предел интеграла $\int\limits_a^b \lambda\, dE_\lambda x$ при $a \to -\infty$, $b \to \infty$.*

Семейство $E_\lambda$, о котором идет речь в теореме 3.4, называется спектральной функцией самосопряженного оператора $A$.

## § 4. Спектр вполне непрерывного оператора

Пусть $X$ — комплексное банахово пространство. Рассмотрим вполне непрерывный линейный оператор $A$ в $X$, заданный на всем $X$. В силу теоремы 0.10.6 полная непрерывность оператора $A$ эквивалентна предкомпактности образа $AS$ единичного шара $S$ $(= \{x \in X : \|x\| \leq 1\})$. Как отмечалось в § 10, гл. 0 в конечномерном пространстве всякий линейный оператор $A$ вполне непрерывен. Его спектр $\sigma(A)$ совпадает с точечным спектром $A$ и содержит конечное число собственных значений ($\leq$ размерности пространства), кратности которых, разумеется, конечны. Спектр вполне непрерывного оператора в бесконечномерном пространстве по своей структуре близок спектру оператора в конечномерном пространстве. Предварительно установим такое предложение:

**Теорема 4.1.** *Оператор, сопряженный с вполне непрерывным линейным оператором, вполне непрерывен.*

$\square$ По теореме 0.10.7 область значений вполне непрерывного оператора $A$ сепарабельна. Пусть $\{f_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ — ограниченная последовательность в $X^*$. Покажем, что из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_j} |\ j \in \mathbb{N}\}$, что $\{A^* f_{n_j} |\ j \in \mathbb{N}\}$ — последовательность Коши в $X^*$. Пусть $\{v_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ — последовательность, плотная в $\mathfrak{R}(A)$. При каждом $k$ числовая последовательность $\{\langle v_k, f_n\rangle |\ n \in \mathbb{N}\}$ ограничена, а потому с помощью диагонального метода из нее можно выделить последовательность $\{\langle v_k, f_{n_j}\rangle |\ j \in \mathbb{N}\}$, являющуюся последовательностью Коши при каждом $k \in \mathbb{N}$. Поскольку последовательность $\{v_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ плотна в $\mathfrak{R}(A)$, то $\{\langle v_k, f_{n_j}\rangle |\ j \in \mathbb{N}\}$ — последовательность Коши для каждого $v \in \mathfrak{R}(A)$.

Функционал $\lim\limits_{j\to\infty} \langle v, f_{n_j}\rangle$ линеен по $v$ на $\mathfrak{R}(A)$. По теореме 0.8.7 у него есть продолжение на все $X$ без увеличения нормы; обозначим его через $f$. Тогда для всех $v \in \mathfrak{R}(A)$ имеем: $(j \to \infty)$

$$\langle v, f_{n_j}\rangle \to \langle v, f\rangle, \text{ т. е. для всех } x \in X \ \langle Ax, f_{n_j}\rangle \to \langle Ax, f\rangle. \tag{4.1}$$

Покажем, что $A^* f_{n_j} \to A^* f$ при $j \to \infty$. Предположим противное. Тогда полагая $f_{n_j} - f = h_j$, получаем $\|A^k h_l\| \geq \delta > 0$ для некоторой подпоследовательности $\{h_{j_l} |\ l \in \mathbb{N}\}$ последовательности $\{h_j |\ j \in \mathbb{N}\}$. Поскольку $\|A^* h_{j+l}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x, A^* h_{j_l}\rangle|$, для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_l \in X$ такой, что $|\langle Ax_l, h_{j_l}\rangle| \geq \dfrac{\delta}{2}$. Из полной непрерывности $A$ следует, что $\{Ax_l |\ l \in \mathbb{N}\}$ содержит последовательность Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m = m(\varepsilon)$ такое, что $\|Ax_l - Ax_s\| < \varepsilon$ при $l,\ s > m$. Тогда

$$\frac{\delta}{2} \leq |\langle Ax_l, h_l\rangle| \leq M\varepsilon + |\langle Ax_s, h_l\rangle|,$$

где $M = \sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \|H_l\|$. Переходя к пределу при $l \to \infty$ при фиксированном $s$, с учетом (4.1) получаем $\dfrac{\delta}{2} \leq M\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует, что $\delta = 0$, вопреки предположению. $\blacksquare$

**Теорема 4.2.** *Пусть $A$, $B$ — вполне непрерывные линейные операторы в $X$. Тогда любая их линейная комбинация вполне непрерывна. Если $C \in \mathcal{L}(X)$, то операторы $AC$ и $CA$ вполне непрерывны. Если $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, где $A_n$ — вполне непрерывные линейные операторы в $X$ и предел понимается в смысле сходимости по норме в $\mathcal{L}(X)$, то оператор $A$ вполне непрерывен.*

$\square$ Полная непрерывность любой линейной комбинации $A$ и $B$ очевидна. Поскольку ограниченный линейный оператор преобразует ограниченные множества в ограниченные, полная непрерывность $CA$ и $AC$ следует из определения полной непрерывности. Пусть $A_n \in \mathcal{L}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \to A$. Если $\{x_j |\ j \in \mathbb{N}\}$ — ограниченная последовательность в $X$, то каждая последовательность $\{A_n x_j |\ j \in \mathbb{N}\}$

предкомпактна. Применяя диагональный процесс, устанавливаем предкомпактность последовательности $\{Ax_j|\ j \in \mathbb{N}\}$. ■

Установим основную в настоящем параграфе теорему о структуре спектра вполне непрерывного оператора.

Нам понадобится

**Лемма 4.1.** *Ограниченный проектор в банахавом пространстве конечномерен точно тогда, когда он вполне непрерывен.*

□ Как отмечалось в § 10 гл. 0 всякий ограниченный линейный конечномерный оператор вполне непрерывен. Обратно, пусть $P$ — вполне непрерывный проектор в банаховом пространстве.

Пусть $\dim PX = \infty$. По индукции построим последовательность $\{v_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ так, что $v_n \in PX$, $\|v_n - v_m\| = 1$ при $n \neq m$. Пусть векторы $v_1, \ldots, v_n$ построены. Положим $\mathfrak{M}_n = \mathrm{CLin}\,\{v_1, \ldots, v_n\}$. Существует вектор $u \in PX$ такой, что $u \notin \mathfrak{M}_n$. Рассмотрим $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathrm{CLin}\,\{v_1, \ldots, v_n, u\}$. Имеем: $d = \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}_n} \|u - x\|$. Найдется последовательность $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $d = \lim\limits_{n\to\infty} \|u - x_n\|$. Последовательность $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}$ ограничена и поэтому поэтому предкомпактна, так как пространство $\mathfrak{M}_n$ конечномерно. Будем поэтому считать, что $x_n \to z$, $z \in \mathfrak{M}_n$, $n \to \infty$. Тогда $d = \|u - z\|$. Положим $v_{n+1} = d^{-1}(u - z)$. Тогда $\|v_{n+1}\| = 1$, $\inf\limits_{x \in \mathfrak{M}_n} \|v_{n+1} - x\| = \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}_n} \|\frac{u-z-dx}{d}\| = \dfrac{1}{d}\|u - z\| = 1$. Далее, $\|v_{n+1} - v_n\| \geq \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}_n} \|v_{n+1} - x\| \geq 1$ при $m = 1, \ldots, n$.

Итак, последовательность $\{v_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ с требуемыми свойствами построена. Никакая ее подпоследовательность не является сходящейся. С другой стороны, $Pv_n = v_n$, $n \in \mathbb{N}$, вопреки полной непрерывности оператора $P$. Значит, $\dim PX < \infty$. ■

**Теорема 4.3.** *Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ вполне непрерывен. Тогда $\sigma(A)$ не более чем счетное множество, не имеющее отличных от нуля предельных точек. Каждое $\lambda \in \sigma(A)$ является собственным значением конечной кратности для $A$, а $\overline{\lambda}$ — собственным значением той же кратности для $A^*$.*

□ I. Пусть $\lambda$ — предельная точка собственных значений оператора $A$. Если мы предположим, что $\lambda \neq 0$, то существует последовательность $\{\lambda_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ собственных значений оператора $A$ таких, что $\lambda_n \neq 0$, $\lambda_n \to \lambda$. Пусть $u_n$ — собственный вектор оператора $A$, отвечающий собственному значению $\lambda_n$, и $\mathfrak{M}_n = \mathrm{CLin}\,\{u_1, \ldots, u_n\}$. Подпространство $\mathfrak{M}_n$ инвариантно относительно оператора $A$. Поскольку векторы $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ линейно независимы, подпространство $\mathfrak{M}_{n-1}$ является собственным в $\mathfrak{M}_n$ размерности на единицу меньшей, чем размерность $\mathfrak{M}_n$, а потому (см. доказательство леммы 4.1) существует вектор $v_n \in \mathfrak{M}_n$ с нормой $\|v_n\| = 1$ и такой, что $d_n = \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}_{n-1}} \|v_n - x\| = 1$. Таким образом, существует последовательность $\{v_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $v_n \in \mathfrak{M}_n$, $\|v_n\| = 1$, $d_n = 1$. Покажем, что последовательность $\{\lambda_n^{-1}Av_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ не содержит подпоследовательности Коши. В самом деле, при $m < n$

$$\lambda_n^{-1}Av_n - \lambda_m^{-1}Av_m = v_n - (\lambda_m^{-1}Av_m - \lambda_n^{-1}(A - \lambda_n I)v_n).$$

Второй член последнего равенства, как нетрудно проверить, принадлежит $\mathfrak{M}_{n-1}$. Поэтому норма правой части не меньше единицы, а это значит, что члены последовательности $\{\lambda_n^{-1}Av_n|\ n \in \mathbb{N}\}$, находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем единицы, т. е. никакая подпоследовательность этой последовательности не является сходящейся. Но это противоречит полной непрерывности оператора $A$, так как последовательность $\|\lambda_n^{-1}v_n\|$ ограничена: $\|\lambda_n^{-1}v_n\| \le \left(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n|^{-1}\right)^{-1} < \infty$.

Таким образом, предельной точкой собственных значений оператора $A$ может быть лишь точка $\lambda = 0$.

II. Докажем, что линеал $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ замкнут, если $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \sigma_1(A)$. Пусть $(A-\lambda I)x_n \to y$, $n \to \infty$. Покажем, что последовательность $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ ограничена. В противном случае можно считать (выбрав, если необходимо, подпоследовательность), что $\|x_n\| \to \infty$, $n \to \infty$. Положим $u_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$. Тогда $\|u_n\| = 1$, $(A-\lambda I)u_n \to 0$. В силу полной непрерывности $A$ можно считать, что $Au_n \to u$, $u \neq 0$. Тогда $Au = \lambda u$, вопреки предположению, а потому $\|x_n\| \le C < \infty$. Значит, можно считать, что $Ax_n \to x$. Тогда $x_n \to \lambda^{-1}(y-x)$. Следовательно, $y = \lambda^{-1}(A-\lambda I)(y-x) \in \mathfrak{R}(A-\lambda I)$.

III. Рассмотрим множество $\sigma'$ всех точек $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что либо $\lambda \in \sigma_1(A)$, либо $\overline{\lambda} \in \sigma_1(A^*)$. По теореме 3.2 $\sigma' \subseteq \sigma(A)$. С другой стороны, $\mathbb{C} \setminus \sigma' \subseteq \varrho(A)$. Действительно, так как $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ замкнуто для всех $\lambda \in \sigma' \subseteq \varrho(A)$, то достаточно заметить, что $\mathfrak{N}(A^*-\lambda I) = \mathfrak{R}(A-\lambda I)^{\perp}$. Значит, $\sigma' = \sigma(A)$. Осталось показать, что собственное подпространство, отвечающее числу $\lambda \in \sigma(A)$, конечномерно. В силу леммы 4.1 для этого достаточно установить полную непрерывность проектора $P$ на это подпространство.

Как и в теореме 1.5, рассмотрим проектор $P = (2\pi i)^{-1}\int\limits_{\gamma}\Gamma(\zeta)\,d\zeta$, где $\gamma$ — окружность с центром в точке $\lambda$ достаточно малого радиуса такого, чтобы 0 лежал вне этой окружности.

Мы имеем: $A\Gamma(\zeta) = I + \zeta\Gamma(\zeta)$, откуда $\zeta^{-1}A\Gamma(\zeta) = \zeta^{-1}I + \Gamma(\zeta)$. Поскольку $\int\limits_{\gamma}\Gamma(\zeta)\,d\zeta = 0$, то $P = -(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\gamma}A\Gamma(\zeta)\,d\zeta$. По теореме 3.2 оператор $A\Gamma(\zeta)$ вполне непрерывен при каждом $\zeta \in \gamma$. По той же теореме 4.2 вполне непрерывен проектор $P$ как равномерный предел интегральных сумм, являющихся вполне непрерывными операторами.

Из теорем 3.2 и 4.1 следует, что ненулевой спектр оператора $A^*$ состоит из собственных значений конечной кратности $\overline{\lambda}$, где $\lambda \in \sigma(A)$. Образом проектора $P^*$, сопряженного с $P$, является собственные подпространства, отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}$. В силу равенства размерности $P$ и $P^*$ кратности чисел $\lambda$ и $\overline{\lambda}$ совпадают. ■

**Следствие 4.1.** (первая альтернатива Фредгольма) *Если $A$ — вполне непрерывный оператор в $X$, то либо $(I-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, либо имеет ненулевое решение уравнение $Ax = x$.*

## § 5. Нормально разрешимые операторы

Пусть $X$, $Y$ — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор: $\mathfrak{D}(A) \subseteq X$, $\mathfrak{R}(A) \subseteq Y$. Пусть $\mathfrak{N}(A)$ ($= \operatorname{Ker} A$) — ядро оператора $A$. Напомним (см. § 9 гл. 0), что через $\mathfrak{M}^{\perp}$, ${}^{\perp}\mathfrak{M}^*$ обозначаются соответственно ортогональное и $*$-ортогональное дополнения множеств $\mathfrak{M} \subseteq X$, $\mathfrak{M}^* \subseteq X^*$.

**Теорема 5.1.** *Пусть оператор $A$ плотно определен, т. е. $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$. Тогда определен оператор $A^* : Y^* \to X^*$ и*

$$(1) \quad \mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{R}(A)^{\perp}, \qquad (2) \quad \overline{\mathfrak{R}(A)} = {}^{\perp}\mathfrak{N}(A^*) \tag{5.1}$$

*Если к тому же $\mathfrak{D}(A) = X$ и оператор $A^*$ плотно определен, то $A \in \mathcal{L}(X)$ и*

$$(3) \quad \mathfrak{D}(A) = X, \quad \mathfrak{N}(A) = {}^{\perp}\mathfrak{R}(A^*), \qquad (4) \quad \overline{\mathfrak{R}(A^*)} = \mathfrak{N}(A)^{\perp}. \tag{5.2}$$

□ Если $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$, то (см. § 9 гл. 0) определен сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ и $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^*f\rangle$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, $f \in \mathfrak{D}(A^*)$. Пусть $f \in \mathfrak{N}(A^*)$. Тогда $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^*f\rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, откуда $f \in \mathfrak{R}(A)^{\perp}$. Значит $\mathfrak{N}(A^*) \subseteq \mathfrak{R}(A)^{\perp}$.

Обратно, пусть $f \in \mathfrak{R}(A)^{\perp}$. Тогда $\langle Ax, f\rangle = 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A)$, следовательно, $f \in \mathfrak{D}(A^*)$. Поэтому справедливо равенство $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^*f\rangle = 0$, из которого в силу плотности $\mathfrak{D}(A)$ в $X$ получаем $A^*f = 0$, т.е $f \in \mathfrak{N}(A^*)$. Отсюда $\mathfrak{R}(A)^{\perp} \subseteq \mathfrak{N}(A^*)$ и соотношение (1) доказано.

Равенство (2) по теореме 0.9.2 получается из (1) переходом к $*$-ортогональным дополнениям.

Предположим дополнительно, что $\mathfrak{D}(A) = X$ и $\overline{\mathfrak{D}(A^*)} = Y^*$. Покажем, что оператор $A$ замкнут. В самом деле, пусть $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ при $n \to \infty$. При каждом $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Ax_n, f\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, A^*f\rangle = \langle x, A^*f\rangle$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Ax_n, f\rangle = \langle y, f\rangle$. Отсюда $y = Ax$ и замкнутость $A$ установлена. По теореме 1.2 оператор $A$ ограничен. Следовательно, его ядро $\mathfrak{N}(A)$ замкнуто. Сопряженный оператор $A^*$ ограничен и всюду определен (см. § 4 гл. 0).

Докажем теперь равенство (3). Включение $\mathfrak{N}(A) \subseteq^{\perp} \mathfrak{R}(A)$ устанавливается подобно тому, как это сделано при доказательстве равенства (1). Пусть $x \in {}^{\perp}\mathfrak{R}(A^*)$. Тогда $\langle x, A^*f\rangle = 0$ для всех $f \in Y^*$. Отсюда $Ax = 0$, т. е. $x \in \mathfrak{N}(A)$, а потому ${}^{\perp}\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{N}(A)$.

Равенство (4), как и выше, следует из (3) по теореме 0.1.8. ■

Плотно определенный линейный оператор $A$ называется нормально разрешимым, если

$$\mathfrak{R}(A) = {}^{\perp}\mathfrak{N}(A^*). \tag{5.3}$$

Из пункта (2) формулы (5.1) следует

**Теорема 5.2.** (Хаусдорф) *Плотно определенный оператор $A$ нормально разрешим точно тогда, когда его область значений замкнута, т. е.*

$$\mathfrak{R}(A) = \overline{\mathfrak{R}(A)}.$$

**Следствие 5.1.** *Если оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ вполне непрерывен, то оператор $A = I - B$ нормально разрешим.*

□ Если $1 \in \varrho(B)$, то $\mathfrak{R}(A) = Y$ $(= \mathfrak{R}(I - B))$ замкнуто.

Пусть $1 \in \sigma(A)$. Тогда по теореме 4.3 число 1 — собственное значение оператора $B$ конечной кратности, т. е. отвечающее ему собственное подпространство $X_1$ конечномерно. Пусть $P_1$ — проектор $X$ на $X_1$ вида (1.1). Тогда $X_1 = PX_1$,

$X = P_1X \dot{+} (I - P_1)X$. Полагая $X_2 = (I - P_1)X$ для $B_2 = B|X_2$ получаем: $1 \in \varrho(B_2)$. Поэтому $(I - B_2)X_2 = X_2$ следовательно, $\mathfrak{R}(A) = (I - B)X = (I - B_2)X_2 = X_2$ — замкнутое подпространство в $X$. ■

Из (5.3) вытекает такое предложение

**Теорема 5.3.** *Если оператор $A : X \to Y$ нормально разрешим, то уравнение*

$$Ax = y \tag{5.4}$$

*имеет решение точно для тех $y$, для которых $\langle y, f\rangle$ при всех решениях $f$ уравнения*

$$A^* f = 0. \qquad ■ \tag{5.5}$$

**Следствие 5.2.** *Если уравнение* (5.5) *имеет лишь нулевое решение, то уравнение* (5.4) *разрешимо при любых $y \in Y$.*

## § 6. Нётеровы и Фредгольмовы операторы

Важную роль в теории линейных уравнений с нормально разрешимыми операторами играют операторы двух следующих классов. Нормально разрешимый оператор $A$ называется нётеровым, или $N$-оператором, если пространства $\mathfrak{N}(A)$ и $\mathfrak{N}(A^*)$ конечномерны. При этом $n(A) = \dim \mathfrak{N}(A)$ называется числом нулей, а $m(A) = \dim \mathfrak{N}(A^*)$ — дефектом оператора $A$; число $\varkappa(A) = n(A) - m(A)$ называется индексом оператора $A$. Нётеров оператор $A$, для которого индекс $\varkappa(A) = 0$, т. е. называется фредгольмовым или $F$-оператором.

Пусть $A : X \to Y$ — нётеров оператор. Если $\{g_k\}_{k=1}^m$ — базис $\mathfrak{N}(A^*)$, то условие разрешимости уравнения (5.4) можно записать в виде системы равенств

$$\langle y, g_k\rangle = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Если же $A$ — фредгольмов оператор, то для него с помощью следствия 5.2 устанавливается предложение, называемое второй альтернативой Фредгольма.

**Теорема 6.1.** *Если $A : X \to Y$ есть $F$-оператор, то либо уравнение* (5.4) *имеет единственное решение при любой правой части, либо уравнение* (5.5) *имеет ненулевое решение.*

□ Разрешимость уравнения (5.4) при любой правой части в силу (5.3) эквивалентна равенству $Y =^{\perp} \mathfrak{N}(A^*)$, из которого следует $\mathfrak{N}(A^*) = \{0\}$. Отсюда и из $\dim \mathfrak{N}(A) = \dim \mathfrak{N}(A^*)$ получаем $\mathfrak{N}(A) = \{0\}$.

С другой стороны, пусть уравнение (5.5) имеет лишь нулевое решение, т. е. $\mathfrak{N}(A^*) = \{0\}$ (тогда и $\mathfrak{N}(A) = \{0\}$). Отсюда снова в силу (5.3) получаем $\mathfrak{R}(A) = Y$, т. е. уравнение (5.4) при любой правой части имеет единственное решение. ■

Пусть теперь $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Если оператор $A$ — фредгольмов и имеет нулевое ядро $\mathfrak{N}(A)$, то по теореме 6.1 его область значений $\mathfrak{R}(A)$ совпадает со всем пространством $Y$ и в силу теоремы Банаха об обратном операторе $A$ является линейным гомеоморфизмом банаховых пространств $X$ и $Y$. Если же $\mathfrak{N}(A) \neq \{0\}$, то оператор $A$ можно возмутить конечномерным оператором $K$ так, чтобы возмущенный оператор $B = A + K$ стал гомеоморфизмом пространств $X$ и $Y$.

Приводимая ниже конструкция такого возмущения применительно к интегральным оператором впервые была осуществлена Э. Шмидтом [24].

Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — фредгольмов оператор с $k = n(A) \leq 1$. Пусть $\{a_i\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathfrak{N}(A)$, а $\{g_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathfrak{N}(A^*)$. По теореме Хана – Банаха – Сухомлинова в пространстве $X^*$ и $Y$ можно выбрать соответственно биортогональные к этим базисам системы $\{f_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$, так что

$$\langle a_i, f_j \rangle = \langle b_i, g_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Зададим линейный оператор $K$ по формуле

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle b_i, \qquad x \in X. \tag{6.2}$$

Оператор $K$ действует из пространства $X$ в конечномерное подпространство $L = \mathrm{CLin}\,\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq Y$ и удовлетворяет условию

$$Ka_i = b_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

**Лемма 6.1.** (Э. Шмидт) *Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — фредгольмов оператор с $n(A) \geq 1$. Тогда оператор $B = A + K$, где $K$ определяется формулой* (6.2), *имеет всюду в $Y$ заданный ограниченный обратный оператор $B^{-1}$, т. е. является гомеоморфизмом пространств $X$ и $Y$.*

$\square$ Предположим, что $Bx = 0$ при некотором $x \in X$. Тогда в силу (6.2)

$$Ax = -\sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle b_i. \tag{6.4}$$

Отсюда и из $\mathfrak{N}(A^*) = \mathfrak{R}(A)^{\perp}$ (см. теорему 5.1) для любого $g_k \in \mathfrak{N}(A^*)$, $k = 1, \ldots, n$ получаем, что $\langle Ax, g_k \rangle = 0$. Следовательно,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle \, \langle b_i, g_k \rangle = \langle x, f_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (6.5) получаем $Ax = 0$, т. е. $x \in \mathfrak{N}(A)$, а потому $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$. Но тогда из (6.5) следует, что $\alpha_k = \langle x, f_k \rangle = 0$, значит, $x = 0$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N}(B) = \{A\}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{R}(B) = Y$. Пусть $y \in Y$. Рассмотрим элемент $\widetilde{y} = y + \sum\limits_{k=1}^{n} \langle y, g_i \rangle$. В силу (6.1) $\langle \widetilde{y}, g_i \rangle = 0$, следовательно, $\widetilde{y} \in^{\perp} \mathfrak{N}(A^*) = R(A)$. Значит, найдется элемент $\widetilde{x} \in X$ такой, что $\widetilde{y} = A\widetilde{x}$. Положим

$$x = \widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} (\langle y, g_i \rangle - \langle \widetilde{x}, f_i \rangle) a_i.$$

Тогда $Ax = A\widetilde{x}$ и, используя (6.1), получаем

$$Bx = Ax + Kx = A\widetilde{x} + K\widetilde{x} + \left( \sum_{i=1}^{n} (\langle y, g_i \rangle - \langle \widetilde{x}, f_i \rangle) a_i \right) =$$

$$= \widetilde{y} + \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{x}, f_i \rangle b_i + \sum_{i=1}^{n} (\langle y, g_i \rangle - \langle \widetilde{x}, f_i \rangle) b_i = \widetilde{y} + \sum_{i=1}^{n} \langle y, g_i \rangle = y.$$

Таким образом, равенство $\mathfrak{R}(B) = Y$ доказано. Теперь заключение леммы следует из теоремы Банаха об обратном операторе. ■

## § 7. Проекторы. Расщепляемые операторы

**1.** Проекторы. С проекторами мы уже встречались при определении прямой суммы пространств (см. § 7 гл. 0). Напомним, что проектором в банаховом пространстве $X$ называется всюду в $X$ заданный линейный оператор $P$ со свойством $P^2 = P$. Ниже мы будем рассматривать лишь непрерывные проекторы, которые для краткости будем называть просто проекторами.

Если $P$ — проектор, то $Q = I - P$ — тоже проектор, так как оператор $P$ линеен, всюду в $X$ задан, непрерывен вместе с $P$ и $Q^2 = (I - P)^2 = I - P = Q$. Сужение проектора $P$ на его область значений $\mathfrak{R}(P) = PX$ является тождественным оператором, а потому $\|P\| \geq 1$.

Отсюда следует, что линеал $\mathfrak{R}(P)$ замкнут, т. е. является подпространством в $X$. Каждый элемент $x \in X$ однозначно представляется в виде $x = u+v$, где $u = Px$, $v = Qx$. Поэтому пространство $X$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathfrak{R}(P)$ и $\mathfrak{R}(Q)$: $X = \mathfrak{R}(P) \dot{+} \mathfrak{R}(Q)$. По теореме 0.4.2. эта прямая сумма является топологической.

Таким образом, всякий проектор $P$ порождает разложение пространства $X$ в топологическую прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$, где $X_1 = \mathfrak{R}(P)$ — подпространство, на которое проектирует оператор $P$, а $X_2 = \mathfrak{R}(I - P)$ — подпространство, по направлению которого проектирует $P$. При этом $\mathfrak{R}(I - P) = \mathfrak{N}(P)$, а $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{N}(I - P)$. Проекторы $P$ и $Q = I - P$ называются взаимно дополнительными.

В соответствии с вышеизложенным подпространство $\mathcal{L}$ банахово пространства $X$ назовем топологически дополняемым, если существует проектор $P$ в $X$ такой, что $\mathfrak{R}(P) = \mathcal{L}$. Вообще говоря, не всякое подпространство банахова пространства обладает указанным свойством — вопросу топологической дополняемости посвящена довольно обширная литература (см., например, М. Кадец, Б. Митягин).

Однако, для случая гильбертова пространства $X = \mathfrak{H}$, как показывает теорема 0.11.2, всякое подпространство $\mathcal{L}$ не только топологически дополняемо, а более того, ортогонально дополняемо, т. е. служит областью значений проектора $P$ с минимальной нормой $\|P\| = 1$, так что подпространства $\mathfrak{R}(P)$ и $\mathfrak{R}(I - P)$ ортогональны. Возвращаясь к общему случаю банахова пространства $X$ будем называть проектор $P$ в $X$ правильным, если $\|P\| = 1$.

Общую роль в вопросах проектирования в банаховых пространствах играют конечномерные подпространства; они всегда топологически дополняемы. Действительно, пусть $X$ — банахово пространство, $E$ — его конечномерное подпространство, $\dim E = n$. Выберем в $E$ базис $\{a_i\}_{i=1}^n$ и определим линейные функционалы $f_i$ следующим образом. Для $u = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ положим $f_i(u) = \alpha_i$, так что

$\langle a_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Очевидно, функционалы $f_j$, $j = 1, \ldots, n$ определены на подпространстве $E$, а потому ограничены. По теореме 0.6.7 они допускают продолжение на все $X$ с сохранением нормы. Для $x \in X$ положим

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle a_i. \tag{7.1}$$

Тогда оператор $P$ является проектором в $X$ с $\mathfrak{R}(P) = E$. В самом деле,

$$P^2 x = PPx = \sum_{i=1}^{n} \langle Px, f_i \rangle a_i = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle a_k, f_i \right\rangle a_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle a_i = Px$$

для любого $x \in X$, так что $P^2 = P$. Далее, очевидно, $\mathfrak{R}(p) \subseteq E$. С другой стороны, для всякого $u = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ имеем: $Pu = u$. Поэтому $E \subseteq \mathfrak{R}(P)$, следовательно $E = \mathfrak{R}(P)$.

**2.** Расщепляемые операторы. Пусть в банаховых пространствах $X$ и $Y$ заданы проекторы $P_1$ и $E_1$ соответственно. Положим

$$P_2 = I - P_1, \qquad E_2 = I - E_1,$$

$$\mathcal{L}_1 = P_1 X, \qquad \mathcal{L}_2 = P_2 X, \qquad \mathcal{M}_1 = E_1 Y, \qquad \mathcal{M}_2 = E_2 Y.$$

Тогда для любого линейного оператора $A : X \to Y$, заданного на всем $X$, справедливо представление

$$Ax = E_1 A P_1 x + E_1 A P_2 x + E_2 A P_1 x + E_2 A P_2 x. \tag{7.2}$$

Согласно представлению (7.2) оператор $A$ удобно записывать в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

где $A_{ij}$ — сужение оператора $E_i A P_j$ на подпространство $\mathcal{L}_j$, $i, j = 1, 2$; при этом $A_{ij} : \mathcal{L}_j \to \mathfrak{M}_i$.

Представление оператора $A$ матрицей (7.3) называется невырожденным, если оператор $A_{22}$, есть гомеоморфизм пространств $\mathcal{L}_2$ и $\mathfrak{M}_2$; если при этом еще и

$$A_{11} = A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \tag{7.4}$$

то представление (7.3) называется правильным.

Всюду заданный оператор $A : X \to Y$ называется расщепляемым, если он допускает правильное представление (7.3).

**Теорема 7.1.** *Нормально разрешимый оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ расщепляем точно тогда, когда его ядро $\mathfrak{N}(A)$ и область значений $\mathfrak{R}(A)$ топологически дополняемы.*

□ Допустим, что подпространства $\mathfrak{R}(A)$ и $\mathfrak{N}(A)$ топологически дополняемы, т. е. существуют проекторы $P_1$ в $X$ и $E_1$ в $Y$ такие, что $\mathfrak{R}(P_1) = \mathfrak{N}(A)$, $\mathfrak{R}(E_1) = \mathfrak{R}(A)$. Положим $P_2 = I - P_1$, $E_2 = I - E_1$. Тогда для всех $x \in X$ справедлива формула (7.2). Поскольку $P_1 x \in \mathfrak{N}(A)$, то $E_1 A P_1 x = E_2 A P_1 x = 0$ и $Ax = E_1 A P_2 x +$

$E_2AP_2x$. Далее $y = AP_2x \in \mathfrak{R}(A)$, поэтому $E_2y = 0$, значит, $Ax = E_2AP_2x$. Таким образом, в нашем случае представление (7.3) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

где $A_{22}$ — сужение оператора $E_2AP_2$ на топологическое дополнение $\mathfrak{R}(I - P_1)$ подпространства $\mathfrak{N}(A)$. При этом $\mathfrak{R}(A_{22}) = \mathfrak{R}(A)$, $\mathfrak{N}(A_{22}) = \{0\}$, откуда по теореме Банаха об обратном операторе следует, что $A_{22}$ — гомеоморфизм. Очевидно, выполняется равенство (7.1). Таким образом, достаточная часть теоремы доказана.

Обратно, пусть существуют проекторы $P_1$ в $X$ и $E_1$ в $Y$, для которых представление (7.3) является правильным. Тогда уравнение $Ax = 0$ эквивалентно системе

$$\left.\begin{array}{lll} A_{11}P_1x & +A_{12}P_2x & = & 0, \\ A_{21}P_1x & +A_{22}P_2x & = & 0. \end{array}\right\} \tag{7.6}$$

Второе из этих уравнений, в свою очередь, эквивалентно уравнению

$$P_2x = -A_{22}^{-1}A_{21}P_1x. \tag{7.7}$$

Отсюда и из (7.4) следует, что первое из уравнений (7.6) есть тождество.

Итак, ядро $\mathfrak{N}(A)$ состоит из тех и только тех элементов, для которых выполнено (7.7). Зададим линейный оператор $P$ в $X$ формуой

$$Px = P_1x - A_{22}^{-1}A_{21}P_1x, \qquad x \in X. \tag{7.8}$$

Мы имеем: $P^2 = (P_1 - A_{22}^{-1}A_{21}P_1)^2 = P_1^2 - A_{22}^{-1}A_{21}P_1^2 = P_1 - A_{22}^{-1}A_{21}P_1 = P$, т. е. $P$ — проектор (напомним, что $A_{22}^{-1} : \mathcal{L}_2 \to \mathfrak{M}_2$, а $P_1\mathfrak{M}_2 = \{0\}$). Если $x \in \mathfrak{N}(A)$, то в силу (7.7) получаем: $Px = (P_1 + P_2)x = x$, откуда $\mathfrak{N}(A) \subseteq \mathfrak{R}(P)$. Покажем, что $\mathfrak{R}(P) \subseteq \mathfrak{N}(A)$. Для любого $x \in X$

$$P_1Px = P_1(P_1 - A_{22}^{-1}A_{21}P_1)x = P_1x.$$

Поэтому, если положить $y = Px$, то $P_1y = P_1x$, и в силу (7.8)

$$P_2y = P_2(P_1 - A_{22}^{-1}A_{21}P_1)x = -A_{22}^{-1}P_1x = -A_{22}^{-1}A_{21}P_1y.$$

Отсюда на основании (7.7) следует, что $y \in \mathfrak{R}(A)$, значат $\mathfrak{R}(P) \subseteq \mathfrak{N}(A)$. С учетом обратного включения получаем, что $P$ — проектор на $\mathfrak{N}(A)$, а потому $\mathfrak{N}(A)$ дополняемо.

Пусть теперь $y \in \mathfrak{R}(A)$, т. е. уравнение $Ax = y$ разрешимо или, что то же, разрешима система уравнений

$$\left.\begin{array}{lll} A_{11}P_1x & +A_{12}P_2x & = & E_1y, \\ A_{21}P_1x & +A_{22}P_2x & = & E_2y. \end{array}\right\} \tag{7.9}$$

Второе из уравнений (7.9) дает

$$P_2x = -A_{22}^{-1}A_{21}P_1x + A_{22}^{-1}E_2y.$$

Подставляя правую часть последнего равенства вместо $P_2x$ в первое уравнение системы (7.9), с учетом (7.4) получаем, что $\mathfrak{R}(A)$ состоит в точности из тех же элементов $y \in Y$, для которых выполняется соотношение $P_1 y = A_{12} A_{22}^{-1} P_2 y$. Положим $E = E_1 - A_{12} A_{22}^{-1} P_2$. Как и выше устанавливается, что $E$ — проектор на $\mathfrak{R}(A)$. Следовательно, $\mathfrak{R}(A)$ дополняемо. ■

**Следствие 7.1.** *Всякий нётеров, а тем более, фредгольмов оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ расщепляем.*

В заключение этого параграфа для фредгольмова оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ установим связь между использованным в лемме 6.1 оператором $B = A + K$, где $K$ имеет вид (6.2) и представлением (7.3).

Итак, пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов, $n = n(A) \geq 1$, $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ — базисы соответственно в $\mathfrak{N}(A)$ и $\mathfrak{N}(A^*)$, $\{f_k\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\}_{k=1}^n$ — биортогональные системы соответственно для $\{a_k\}_{k=1}^n$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ (см. § 6). Положим $\mathfrak{L}_n = \operatorname{CLin}\{b_1, \ldots, b_n\}$ и зададим проектор $P_1$ в $X$ формулой (7.1), а проектор $E_1$ в $Y$ — формулой $E_1 y = \sum\limits_{k=1}^n \langle y, g_k \rangle b_k$. Тогда проектор $E_2 = I - E_1$ отображает $Y$ в $\mathfrak{R}(A)$. Действительно, для любого $y \in Y$

$$E_1 y = \sum_{i=1}^n \langle y, g_k \rangle b_k,$$

откуда $E_2 y = y - \sum\limits_{k=1}^n \langle y, g_k \rangle b_k$ и $\langle E_2 y, g_j \rangle = \langle y, g_j \rangle - \sum\limits_{k=1}^n \langle y, g_k \rangle \langle b_k, g_k \rangle = 0$. Значит, $E_2 y \in \mathfrak{R}(A)$. Кроме того, в силу (5.3) и биортогональности систем $\{b_k\}_{k=1}^n$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ имеем: $\mathfrak{L}_n \cap \mathfrak{R}(A) = \{0\}$. Поэтому $Y = \mathfrak{L}_n \dot{+} \mathfrak{R}(A)$. Аналогично, $X = \mathfrak{N}(A) \dot{+} \mathfrak{M}_n$, где $\mathfrak{M}_n$ состоит в точности из тех векторов $x \in X$, для которых $\langle x, f_k \rangle = 0$, $k = 1, \ldots, n$. При этом в силу теоремы 0.4.7 $n$-мерные пространства $\mathfrak{L}_n$ и $\mathfrak{N}(A)$ линейно гомеоморфны.

Теперь рассмотрим оператор $B = A + K$, где $K$ имеет вид (6.2). В силу (6.3) оператор $K|\mathfrak{N}(A)$ осуществляет гомеоморфизм пространств $\mathfrak{N}(A)$ и $\mathfrak{L}_n$. Легко видеть, что относительно четверки проекторов $P_1$, $P_2$, $E_1$, $E_2$ оператору $B$ имеет матричное представление

$$B = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

где $K_{11} = K|\mathfrak{N}(A)$, $A_{22} = A|\mathfrak{M}_n$ (см. (7.5)). Значит, оператор $B$ является расширением оператора $A_{22}$ на всем пространстве $X$. При этом существующий в силу леммы Шмидта обратный оператор $B^{-1}$ имеет вид

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} K_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Отметим, что представления (7.10), (7.11) не является правильными, ибо не выполнено условие (7.4).

## § 8. Инвариантные подпространства

В этом параграфе рассматриваются операторы $A \in \mathcal{L}(X)$, т. е. ограниченные линейные операторы $A : X \to X$ с $\mathfrak{D}(X) = X$. Подпространство $\mathcal{L} \subseteq X$ называется инвариантным относительно $A$, если $A\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$.

**1.** Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Предположим, что ядро $\mathfrak{N}(A)$ топологически дополняемо, т. е. $X = \mathfrak{N}(A) \dot{+} \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство в $X$. Зададимся вопросом: при каких условиях топологическое дополнение $\mathfrak{M}$ ядра $\mathfrak{N}(A)$ инвариантно относительно $A$? Если в частности оператор $A$ расщепляем, то из теоремы (7.1) следует, что существуют два разложения пространства $X$:

$$X = \mathfrak{N}(A) \dot{+} \mathfrak{M}, \qquad X = \mathfrak{L} \dot{+} \mathfrak{R}(A).$$

Если эти два разложения совпадают, т. е. $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{M}$, то подпространство $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно оператора $A$ и $X = \mathfrak{N}(A) \dot{+} \mathfrak{R}(A)$.

Пусть теперь $A$ — произвольный оператор из $\mathcal{L}(X)$. Рассмотрим две последовательности линеалов

$$\{0\},\ \mathfrak{N}(A),\ \mathfrak{N}(A^2),\ \ldots, \mathfrak{N}(A^k),\ \ldots, \tag{8.1}$$

$$X,\ \mathfrak{R}(A),\ \mathfrak{R}(A^2),\ \ldots, \mathfrak{R}(A^k),\ \ldots. \tag{8.2}$$

Относительно отношения $\subseteq$ последовательность (8.1) не убывает, а подпоследовательность (8.2) не возрастает: $\mathfrak{N}(A^k) \subseteq \mathfrak{N}(A^{k+1})$, $\mathfrak{R}(A^k) \supseteq \mathfrak{R}(A^{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$. Если найдется число $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$\mathfrak{N}(A^m) = \mathfrak{N}(A^{m+1}), \qquad \mathfrak{N}(A^i) \neq \mathfrak{N}(A^{i+1}), \quad i = 0, \ldots, m-1, \tag{8.3}$$

то говорят, что оператор $A$ имеет конечный подъем, равный $m$. Если для некоторого $r \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\mathfrak{R}(A^r) = \mathfrak{R}(A^{r+1}), \qquad \mathfrak{N}(A^j) \neq \mathfrak{N}(A^{j+1}), \quad j = 0, \ldots, r-1, \tag{8.4}$$

то говорят, что оператор $A$ имеет конечный спуск, равный $r$.

Легко проверяется, что условие (8.3) влечет равенство $\mathfrak{N}(A^m) = \mathfrak{N}(A^k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, а условие (8.4) — равенство $\mathfrak{R}(A^r) = \mathfrak{R}(A^l)$ при всех $l \geq r$. Более того, ниже будет показано, что одновременное наличие у нормально разрешимого оператора конечного подъема $m$ и конечного спуска $r$ влечет их совпадение $m = r$.

**Теорема 8.1.** *Пусть нормально разрешимый оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ имеет конечный подъем $m$ и конечный спуск $r$. Тогда:*

1) *Подпространство $\mathfrak{R}(A^r)$ инвариантно относительно $A$ и сужение $A|\mathfrak{R}(A^r)$ является гомеоморфизмом;*

2) *Пространство $X$ разлагается в прямую сумму*

$$X = \mathfrak{N}(A^r) \dot{+} \mathfrak{R}(A^r); \tag{8.5}$$

3) *Оператор $A$ имеет одинаковые подъем и спуск, т. е. $m = r$.*

□ 1) Из $\mathfrak{R}(A^r) = \mathfrak{R}(A^{r+1})$ и $A\mathfrak{R}(A^r) = \mathfrak{R}(A^{r+1})$ следует $A\mathfrak{R}(A^r) = \mathfrak{R}(A^{r+1})$. Покажем, что $\mathfrak{N}(A|\mathfrak{R}(A^r)) = \{0\}$. Положим $A|\mathfrak{R}(A^r) = \widehat{A}$. Пусть $x \in \mathfrak{R}(A^r)$, $\widehat{A}x = 0$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $n \geq \max\,\{m, r\}$. Тогда $x \in \mathfrak{R}(A^n)$, т. е. $x = A^n z$, $z \in X$. Но $A^{n+1}z = Ax - \widehat{A}x = 0$, откуда $z \in \mathfrak{R}(A^{n+1}) = \mathfrak{R}(A^n)$. Значит $x\ (= A^n z) = 0$.

Из теоремы 5.2 следует, что $\mathfrak{R}(A^r)$ — подпространство в $X$, откуда и из теоремы 0.8.5 получаем, что $A|\mathfrak{R}(A^r)$ — гомеоморфизм.

2) Пусть $x$ — произвольный элемент из $X$. Положим $v = \widehat{A}^{-r}A^r x$, $u = x - v$. Тогда $v \in \mathfrak{R}(A^r)$ и, поскольку $A^r u = A^r x - A^r v = A^r x - A^r\widehat{A}^{-r}A^r x = A^r x - A^r x = 0$, $u \in \mathfrak{N}(A^r)$. Если найдутся другие элементы $u' \in \mathfrak{N}(A^r)$ и $v' \in \mathfrak{R}(A^r)$, для которых $x = u' + v'$, то

$$A^r x = A^r x' + A^r c' = A^r c',$$

а так как $v' \in \mathfrak{R}(A^r)$, то $A^r v' = \widetilde{A}^r v'$, т. е. $v' = \widetilde{A}^{-r}A^r x = x$. Отсюда $u' = u$, $v' = v$ и утверждение 2) доказано.

3) Установим теперь, что $m = r$. Согласно 2) произвольный элемент $x \in \mathfrak{N}(A^{r+1})$ имеет вид $x = u + v$, где $u \in \mathfrak{N}(A^r)$, $v \in \mathfrak{R}(A^r)$. Тогда $0 = A^{r+1}x = A^{r+1}u + A^{r+1}v$ и из $A^{r+1}u = 0$ следует $A^{r+1}v = 0$, откуда в силу 1) получаем $v = 0$. Значит, $x = u \in \mathfrak{N}(A^r)$, а поэтому $\mathfrak{N}(A^{r+1}) = \mathfrak{N}(A^r)$, т. е. $m \leq r$.

С другой стороны, если $y \in \mathfrak{R}(A^m)$, т. е. $y = A^m x$ при некотором $x \in X$, то, представив $x$ в виде $x = u+v$, где $u \in \mathfrak{N}(A^r)$, $v \in \mathfrak{R}(A^r)$, получаем: $y = A^m u + A^m v$. Так как $\mathfrak{N}(A^m) = \ldots = \mathfrak{N}(A^r)$, то $u \in \mathfrak{N}(A^m)$, значит $A^m u = 0$, т. е.

$$y = A^m v = A^{m+1}\widehat{A}^{-1}v \in \mathfrak{R}(A^{m+1}).$$

Тем самым, $m \geq r$, что и требовалось. ■

**Замечание 8.1.** Если оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 8.1 и $A = I - B$, то пространство $\mathfrak{N}(A^m)$ является корневым подпространством оператора $B$, отвечающим собственному значению $\lambda = 1$ (см. § 1), а само число $m$ есть ранг этого родственного значения.

**Следствие 8.1.** *Пусть $B \in \mathcal{L}(X)$ и оператор $A = I - B$ нормально разрешим. Если $\lambda = 1$ — собственное значение ранга 1 для оператора $B$ и собственное значение конечного ранга $m^*$ для оператора $B^*$, то оператор $I - B$ расщепляем и*

$$X = \mathfrak{N}(I - B)\dot{+}\mathfrak{R}(I - B). \tag{8.6}$$

□ В силу замечания 8.1 оператор $A = I - B$ имеет конечный подъем $m = 1$, а оператор $A^* = I - B^*$ — конечный подъем, равный $m^*$. Поэтому $\mathfrak{N}((A^*)^{m^*}) = \mathfrak{N}((A^*)^{m^*+1})$. Отсюда и из 5.1 следует, что $\mathfrak{R}(A^{m^*}) = \mathfrak{R}(A^{m^*+1})$. Значит, оператор $A$ имеет конечный спуск $r = m^*$. По теореме 3.1 справедливо равенство $m = r = 1$, из которого и из (8.5) следует (8.6). ■

В заключение этого пункта приведем пример нормально разрешимого оператора с конечным подъемом, не имеющего конечного спуска.

**Пример 8.1.** Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$. Зададим в $\mathfrak{H}$ линейный оператор $A$ равенствами: $Ae_0 = 0$, $Ae_i = e_{i-1}$, $i \geq 1$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}(A^k) = \mathrm{CLin}\,\{e_0, \ldots, e_k\}$, $\mathfrak{R}(A^k) = \mathrm{CLin}\,\{e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots\}$. Таким образом, оператор $A$ имеет конечный подъем $m = 1$ и не имеет конечного спуска. При этом оператор $A^*$ имеет конечный спуск $r^* = 1$ и не имеет конечного подъема.

**2.** В этом подпункте рассмотрим другой подход к задаче о разложении пространства $X$ в прямую сумму вида (8.6). Ключевым в этом подходе является следующее условие:

$(UB)$ Семейство итераций оператора $B$ равномерно ограничено:

$$\|B^n\| \le M < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Предварительно установим такое предложение

**Лемма 8.1.** *Пусть оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет условию $(UB)$. Тогда ядро и область значений оператора $A = I - B$ имеет нулевое пересечение, т. е.*

$$\mathfrak{R}(A) \cap \mathfrak{N}(A) = \{0\}. \tag{8.7}$$

$\square$ Рассмотрим операторы

$$B_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} B^k, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{8.8}$$

Из равенства $B^n A = n^{-1}\bigl(\sum\limits_{k=1}^{n} B^k - \sum\limits_{k=1}^{n} B^{k+1}\bigr) = n^{-1}(B - B^{n+1})$ и условия $(UB)$ следует, что для любого $y \in \mathfrak{R}(A)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} B_n y = 0. \tag{8.9}$$

Если же $y \in \mathfrak{N}(A)$, то $B_n y = y$ и равенство (8.9) для $0 \ne y \in \mathfrak{N}(A)$ не выполняется. $\blacksquare$

**Следствие 8.2.** *Если оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет условию $(UB)$, а оператор $A = I - B$ фредгольмов, то верно равенство* (8.6).

$\square$ Поскольку оператор $A$ фредгольмов, то $\mathfrak{N}(A)$ — конечномерное подпространство в $X$. Пусть $\dim \mathfrak{N}(A) = n$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathfrak{N}(A)$. С помощью теоремы Хана – Банаха – Сухомлинова и леммы 8.1 построим систему векторов $\{f_k\}_{k=1}^n$ со свойствами:

$$\langle a_i, f_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{8.10}$$

$$\langle y, f_k \rangle = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{8.11}$$

Условия (8.10) означают, что система $\{f_k\}_{k=1}^n$ линейно независима, а из равенств (8.11) вкупе с (IV.5.1) следует, что она является базисом в $\mathfrak{R}(A^*)$ (напомним, что $\dim \mathfrak{N}(A^*) = n$). Построенный по формуле (7.1) оператор $P$ является проектором из $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{N}(A)$, а $I - P$ — проектором на $\mathfrak{R} =^{\perp} \mathfrak{N}(A^*)$. $\blacksquare$

Обратимся к более общей ситуации, когда оператор $A$ лишь нормально разрешим. В этом случае справедлива

**Теорема 8.2.** *Пусть оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет условию $(UB)$, а оператор $A = I - B$ нормально разрешим. Тогда равенство* (8.6) *верно точно тогда, когда существует сильный**) *предел операторов, определенных соотношениями* (8.8). *При этом оператор*

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} A^m \tag{8.12}$$

*является проектором на $\mathfrak{N}(A)$ и $\|P\| = M$, где $M$ — число, фигурирующее в условии $(UB)$.*

*) Т. е. в сильной операторной топологии — см. § 8 гл. 0.

□ Необходимость. Из (8.6) следует, что всякий элемент $x \in X$ можно представить в виде

$$x = y + z.$$

Отсюда, из (8.8), (8.9) и условия $(UB)$ вытекает, что $\|B_n\| \le M$, $n \in \mathbb{N}$; и

$$\lim_{n\to\infty} B_n x = \lim_{n\to\infty} \; n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (I - A)^m z + z. \tag{8.13}$$

Вследствие принципа равномерной ограниченности формула (3.12) определяет ограниченный линейный оператор $P$, $\|P\| \le M$, в силу (8.13) являющийся проектором на $\mathfrak{N}(A)$.

Достаточность. Пусть существует оператор $P$, определенный равенством (8.12). Вновь вследствие принципа равномерной ограниченности оператор $P$ линеен, ограничен и $\|P\| \le M$. Для любого $z \in \mathfrak{N}(A)$ получаем (см. 8.13) $Pz = z$, откуда $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{R}(P)$. С другой стороны, если $u \in \mathfrak{R}(P)$, то найдется $v \in X$, для которого $u - Pv = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\big(\sum\limits_{m=1}^{n} B^m v\big)$. Тогда в силу $(UB)$ имеем: $Au = (I - B)u = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\big(\sum\limits_{m=1}^{n} B^m v - B^{m+1} v\big) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}(Bv - B^{n+1}v) = 0$, откуда $u \in \mathfrak{N}(A)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{N}(A)$ и $P|\mathfrak{R}(P)$ — тождественный оператор. Следовательно, $P$ — проектор на $\mathfrak{N}(A)$. Покажем, что $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{R}(A)$. Этим будет доказано справедливость представления (3.6).

Итак, пусть $y \in \mathfrak{N}(P)$. Тогда в силу (8.12) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\|B_n y\| < \varepsilon$. Мы имеем:

$$y - B_n y \in \mathfrak{R}(A); y - B_n y = (I - n^{-1} \sum_{m=1}^{n} B^m) y =$$

$$= n^{-1} \sum_{m=1}^{n} y = n^{-1}(I - B) \sum_{m=1}^{n} (I + B + B^2 + \ldots + B^{m-1}) y = (I - B) y_n,$$

где $y_n = n^{-1} \sum\limits_{m=0}^{n} (I + B + \ldots + B^{m-1}) y$.

Поэтому $y - B_n y \in \mathfrak{R}(A)$. В силу замкнутости $\mathfrak{R}(A)$ и произвольности $\varepsilon$ получаем $y \in \mathfrak{R}(A)$, т. е. $\mathfrak{N}(P) \subseteq \mathfrak{R}(A)$. Обратное включение $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{N}(P)$ непосредственно следует из (8.9).

**Замечание 8.2.** Рассуждения, проведенные нами при доказательстве теоремы 8.2, является некоторой модификацией рассуждений, использованных К. Иосида при установлении статистической эргодической теоремы и ее следствий (см., например, K. Yosida). Указанная теорема утверждает следующее: если оператор $B$ удовлетворяет условию $(UB)$, операторы $B_n$ определены формулой (8.8) и последовательность $\{B_n x |\; n \in \mathbb{N}\}$ слабо компактна, то она сходится в норме пространства $X$.

Отсюда и из теоремы 8.2 получаем простое, но важное

**Следствие 8.3.** [*] *Пусть пространство $X$ рефлексивно, а оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет условию $(UB)$ и оператор $I - B$ нормально разрешим. Тогда справедливо равенство* (8.6).

[*] Некоторые авторы (см., например, F. Riesz [11]) именно это утверждение называют статистической эргодической теоремой.

## Список литературы


[1] **Вайнберг М.М.** *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972.

[2] **Вайнберг М.М., Айзенгендлер П.Г.** *Методы исследования в теории разветвления решений.* – В кн.: Итоги науки. Математический анализ 1965. – М.: ВИНИТИ, 1966, с. 7-70.

[3] **Вайнберг М.М., Треногин В.А.** *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969.

[4] **Везентини Е. (Vesentini E.)** *On the subharmonicity of the spectral radius.* – Boll. Un. Math. Ital., № 4, 1968, p. 427-429.

[5] **Картан А.** *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – М.: Мир, 1971.

[6] **Като Т. (Kato T.) Теория возмущения линейных операторов**. – М.: Мир, 1972.

[7] **Красносельский М.А.** *Некоторые задачи нелинейного анализа.* – Успехи матем. наук, 1954, т. 9, № 3, с. 57-114.

[8] **Красносельский М.А.** *О нескольких новых принципах неподвижной точки.* – Докл. АН СССР, ???

[9] **Маркус А.С., Мацаев В.И.** *О спектральных свойствах голоморфных оператор-функций в гильбертовом пространстве.* – Мат. исслед., 1974, т. 9, № 4, с. 79-91.

[10] **Петтис Б. (Pettis B.)** *On Integration in vector spaces.* – Trans. Amer. Math. Soc., vol. 44, 1938, p. 277-304.

[11] **Рисс Ф. (Riesz F.)** *Some mean ergodic theorem.* – J. London Math. Soc., 13, 1938, p. 274-278.

[12] **Рудин У.** *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ (Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$).* – М.: Мир, 1984 (Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1980).

[13] **Рудин У.** *The fixed point sets of some holomorphlc maps.* – Bull. Malaysian Math. Soc., 1, p. 25-28, 1978.

[14] **Рудин У.** *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1975.

[15] **Хайден Т., Соффридж Т. (Haiden T., Suffridge T.)** *Fixed points of holomorphic maps in Banach spaces.* – Proc. Amer. Math. Soc., vol. 60, 1976, p. 95-105.

[16] **Хайден Т., Соффридж Т. (Haiden T., Suffridge T.)** *Biholomorphic maps in Hilbert spaces have a fixed point.* – Pac. J. of Math., Vol. 58, 1971, p. 419-422.

[17] **Харрис Л. (Harris L.)** *Schwarz's lemma in normed linear spaces.* – Proc. of National Acad. of Sciences. USA, vol. 62, 1969, p. 1014-1017.

[18] **Харрис Л. (Harris L.)** *A continuous form of Schwarz's lemma in normed linear spaces.* – Pac. J. of Math., vol. 38, 1971.

[19] **Харрис Л. (Harris L.)** *The numerical Range of Holomorphic Functions in Banach spaces.* – Amer. J. of Math., vol. 93, 1971, p. 1005-1019.

[20] **Харрис Л. (Harris L.)** *Schwarz – Pick systems of pseudometrics for domains in a normed linear spaces.* – Advanced in Holomorphy. North-Holland, 1979, p. 345-406.

[21] **Хилле Э., Филиппс Р.** *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: ИЛ, 1962.

[22] **Шабат Б.В.** *Введение в комплексный анализ.* – М.: Наука, 1969.

[23] **Шабат Б.В.** *Введение в комплексный анализ.* Ч. II – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1976.

[24] **Шмидт Э. (Shmidt E.)** *Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen 3. Theil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integragleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen.* – Math. Ann., 1908, 65, p. 370-399.

[25] **Шварц Л.** *Анализ.* В 2-х т. – М.: Мир, 1972.

Научное издание

Виктор Анатольевич Хацкевич
Давид Михайлович Шойхет

Дифференцируемые операторы

Редактор Е.А. Полещук
ИБ № 67

Подписано в печать 24.04.91. Формат 60x84 1/16. Б. оберт.
Печ. л. 9,4. Б.л. 4,7. Тираж 300. Зак. 298. РТП изд-ва ЛФЭИ.
Цена 2 руб.

Издательство Ленинградского финансово-экономического института
191023, Ленинград, Садовая ул., д. 21.