

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

С. И. Сыроватский

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| Введение . . . . .                                               | 247 |
| 1. Основные уравнения . . . . .                                  | 248 |
| 2. Распространение малых возмущений . . . . .                    | 255 |
| 3. Поверхности разрыва и ударные волны . . . . .                 | 260 |
| 4. Некоторые решения уравнений магнитной гидродинамики . . . . . | 268 |
| 5. Усиление магнитного поля. Гидромагнитное динамо . . . . .     | 275 |
| 6. Проблемы устойчивости . . . . .                               | 280 |
| 7. Магнитогидродинамическая турбулентность . . . . .             | 290 |
| Цитированная литература . . . . .                                | 301 |

## ВВЕДЕНИЕ

Магнитная гидродинамика изучает взаимодействие электромагнитного поля с жидким или газообразным проводником, рассматриваемым как сплошная среда. Ее теоретический фундамент составляют классические уравнения электромагнитного поля и гидродинамические уравнения движения сплошной среды. До недавнего времени этот круг вопросов оставался вне поля зрения физики. Дело в том, что характерные для магнитной гидродинамики явления могут быть обнаружены лишь в протяженной жидкой или газообразной среде, обладающей высокой электрической проводимостью. С такой средой, как правило, приходится иметь дело в астрофизике, однако ее трудно реализовать в лабораторных условиях.

Исключение составляют ртуть и расплавленные металлы. Изучение динамики ртути в магнитном поле<sup>74, 75</sup> как раз и явилось одним из первых исследований по магнитной гидродинамике. Эти работы были вызваны идеей электромагнитного ртутного насоса, но ввиду его недостаточной эффективности не получили дальнейшего развития. Лишь в последние годы, в связи с развитием техники ядерных реакторов с металлическим теплоносителем, вновь возник интерес к электромагнитным насосам и измерительным приборам, основанным на магнитогидродинамических эффектах<sup>123а, 135</sup>.

Некоторые магнитогидродинамические явления уже сравнительно давно рассматриваются в связи с теориями земного и звездного магнетизма<sup>56, 45</sup>. Однако фактически возникновение и быстрое развитие магнитной гидродинамики как самостоятельной отрасли физики целиком обусловлено рядом новых проблем астрофизики, среди которых первостепенное значение имеют проблемы движения космических газовых масс и происхождения космических лучей.

Необходимость привлечения к исследованию ряда проблем астрофизики теории взаимодействия проводящей среды с электромагнитным полем впервые была четко сформулирована Альфвеном<sup>5</sup>. Он обратил внимание на следующие хорошо известные обстоятельства. Во-первых, межзвездный газ, атмосферы звезд и вещество внутри звезд высоко ионизованы

и, следовательно, являются отличными электропроводниками. Во-вторых, многие космические объекты обладают электрическими и, в особенности, магнитными полями. Эти факты легли в основу целого ряда исследований по динамике космических газовых масс<sup>120, 121, 59</sup>, происхождению космических лучей<sup>128, 71</sup> и космического радиоизлучения<sup>71, 129</sup>, происхождению земного и звездного магнетизма<sup>56, 59</sup>, поляризации света удаленных звезд<sup>122</sup> и других. В настоящее время космические электромагнитные процессы составляют важный раздел астрофизики. Это вызвало необходимость интенсивного развития теории таких процессов.

Во многих практически важных случаях космические газовые массы, несмотря на крайне малую плотность, могут рассматриваться как сплошная среда. Дело в том, что линейные размеры рассматриваемых в астрофизике явлений, как правило, намного превосходят среднюю длину свободного пробега частиц газа, что делает вполне обоснованным гидродинамический подход к изучению этих явлений. Таким образом важный класс крупномасштабных процессов в космической физике может быть изучен методами магнитной гидродинамики.

В последнее время магнитогидродинамические явления наблюдались также в газовом разряде<sup>16-19, 7, 14</sup>. Изучение поведения плазмы в магнитном поле является, по-видимому, наиболее перспективным методом моделирования космических электромагнитных процессов и исследования магнитогидродинамических явлений в лабораторных условиях.

Несмотря на то, что магнитная гидродинамика представляет собой молодую, быстро развивающуюся область физики, в ней уже получен ряд важных результатов, позволяющих выявить характерные особенности рассматриваемого круга явлений. Основные из этих результатов приводятся в настоящем обзоре. За малым исключением, многочисленные приложения магнитной гидродинамики к конкретным вопросам физики и астрофизики ввиду недостатка места в обзоре не рассматриваются. Многие из этих приложений в настоящее время являются предметом специальных обзоров. По тем же причинам не рассматривается связь магнитной гидродинамики с микроскопической теорией ионизованного газа. Подробная библиография в конце обзора позволяет дополнить излагаемые ниже основные сведения.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения магнитной гидродинамики представляют собой совокупность уравнений Максвелла для электромагнитного поля и обычных гидродинамических уравнений, описывающих движение сплошной среды — жидкости или газа. Связь этих двух групп уравнений обусловлена, с одной стороны, возникновением тока индукции при движении проводящей среды в магнитном поле. Этот ток должен быть учтен в уравнениях Максвелла. С другой стороны, действие магнитного поля на токи в среде приводит к дополнительной электромагнитной объемной силе, которую следует учесть в гидродинамических уравнениях.

Таким образом, напряженности электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  подчиняются известным уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c_0} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon_0}{c_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1,2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1,3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \rho_e, \quad (1,4)$$

в которых  $\rho_e$  — плотность электрического заряда,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $c_0$  — электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме). В уравнениях (1,1)—(1,4) не делается различия между напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$  и вектором магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , так как во всех известных проводящих жидкостях и газах отличие магнитной проницаемости  $\mu$  от единицы пренебрежимо мало. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_0$  предполагается величиной постоянной.

Плотность тока  $\mathbf{j}$  складывается из конвекционного тока  $\rho_e \mathbf{v}$  и тока проводимости, который включает также индукционный ток, возникающий при движении электропроводящей среды со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c_0} [\mathbf{vH}] \right). \quad (1,5)$$

В этом выражении для плотности тока предполагается, что среда обладает однородной и изотропной проводимостью  $\sigma$ . Предположение об изотропности  $\sigma$  существенно ограничивает применимость магнитной гидродинамики к разреженному газу, находящемуся в сильном магнитном поле. Действительно, проводимость ионизованного газа в магнитном поле изотропна только в том случае, если радиус ларморовой орбиты электронов значительно больше их средней длины свободного пробега  $l$ , т. е. если  $mc_0/eH \gg l$ , где  $m$ ,  $e$  и  $u$  — масса, заряд и тепловая скорость электронов. Используя выражения для ларморовой частоты  $\omega_H = eH/mc_0$  и среднего времени свободного пробега  $\tau = l/u$ , найдем, что проводимость изотропна при условии

$$\omega_H \tau \ll 1. \quad (1,6)$$

Если условие (1,6) не выполняется, то проводимость поперек магнитного поля по порядку величины в  $1 + \omega_H^2 \tau^2$  раз меньше продольной проводимости<sup>121</sup> и пользоваться простым выражением (1,5) уже нельзя. Для этого случая анизотропный закон Ома, заменяющий выражение (1,5), сформулирован в работе<sup>68</sup>.

В предположении, что проводимость среды велика и рассматриваются не слишком быстрые электромагнитные процессы, в уравнениях (1,1) и (1,5) можно пренебречь током смещения и конвекционным током по сравнению с током проводимости. Это предположение, обычное для проводников металлического типа, является фундаментальным для магнитной гидродинамики<sup>57</sup>. Оно заведомо справедливо при условии

$$\frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\omega}{\sigma} \ll 1, \quad (1,7)$$

где  $\omega$  — частота электромагнитной волны или, в общем случае, характерное обратное время процесса. Проводимость сред, обычно рассматриваемых в магнитной гидродинамике, близка к проводимости металлических проводников, и поэтому соотношение (1,7) выполняется вплоть до частот, близких к оптическим. Опуская в силу условия (1,7) в уравнениях (1,1)—(1,5) ток смещения и конвекционный ток, получим

$$\mathbf{j} = \frac{c_0}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1,8)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c_0} [\mathbf{vH}] + \frac{c_0}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1,9)$$

$$\rho_e = -\frac{\epsilon_0}{4\pi c_0} \text{div } [\mathbf{vH}], \quad (1,10)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1,11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{vH}] + \frac{c_0^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (1,12)$$

При заданных  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  плотность тока  $\mathbf{j}$ , напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и плотность заряда  $\rho_e$  полностью определяются уравнениями (1,8)—(1,10). Таким образом, задача сводится к определению взаимодействия магнитного поля  $\mathbf{H}$  и гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{v}$ . Именно поэтому рассматриваемый круг вопросов получил название магнитной гидродинамики \*).

Движение среды подчиняется обычным гидродинамическим уравнениям, которые включена объемная электромагнитная сила  $\mathbf{f}_e$ :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \mathbf{f}_e + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1,13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1,14)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  и  $\rho$  — скорость и плотность среды,  $p$  — давление,  $\eta$  — вязкость,  $\zeta$  — второй коэффициент вязкости. Уравнения (1,13), (1,14) можно применять к разреженному газу лишь при условии, что средняя длина свободного пробега частиц  $l$  мала по сравнению с характерным размером задачи  $L$ :

$$\frac{l}{L} \ll 1. \quad (1,15)$$

Условия (1,6), (1,7) и (1,15) характеризуют область применимости магнитной гидродинамики.

Сила  $\mathbf{f}_e$  выражает действие электромагнитного поля на связанные со средой заряд и ток и, очевидно, равна

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c_0} [\mathbf{j} \mathbf{H}]. \quad (1,16)$$

Из уравнений (1,8)—(1,10) при условии (1,7) следует, что первый член правой части выражения (1,16) имеет порядок величины  $\frac{v^2}{c_0^2}$  по сравнению со вторым членом. Поскольку макроскопические скорости среды всегда значительно меньше скорости света, то во всех приложениях магнитной гидродинамики выполняется условие

$$\frac{v}{c_0} \ll 1, \quad (1,17)$$

которое позволяет ограничиться нерелятивистским приближением и опустить члены порядка  $v^2/c_0^2$ .

Релятивистское обобщение магнитной гидродинамики предпринято в работах <sup>79, 136, 137</sup>. Как следует из результатов работы <sup>79</sup>, учет релятивистских эффектов становится существенным в том случае, когда плотность магнитной энергии сравнима с плотностью полной энергии среды, включая энергию покоя, или, более строго, при условии \*\*)

$$\frac{H^2}{4\pi} \geq \rho c_0^2. \quad (1,18)$$

Для межзвездного газа ( $\rho \sim 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>) это соответствует напряженности магнитного поля порядка 0,15 эрстед. Поскольку известные в настоящее время магнитные поля значительно меньше требуемых условием (1,18), то мы ограничимся ниже нерелятивистской магнитной гидродинамикой \*\*\*).

\*) Менее удачен используемый иногда в качестве эквивалентного более краткий термин «гидромагнетизм».

\*\*\*) При этом условии скорость магнитогидродинамических волн (см. ниже) сравнима со скоростью света.

\*\*\*\*) В частности, в межзвездном пространстве магнитное поле едва ли превышает  $10^{-5}$  эрстед. В остальных известных случаях отличие полей, требуемых условием (1,18), от наблюдаемых еще больше.

Опуская в силу сказанного выше первый член в выражении электромагнитной силы (1,16) и используя уравнение (1,8), получим

$$\mathbf{f}_e = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]. \quad (1,19)$$

Уравнения (1,11)—(1,14) вместе с выражением (1,19) определяют поведение хорошо проводящей жидкой или газообразной среды и связанного с ней магнитного поля. Таким образом, система уравнений магнитной гидродинамики имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (1,20)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1,21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = & - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}] + \\ & + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \text{div } \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1,22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1,23)$$

где

$$\nu_m = \frac{c_0^2}{4\pi\sigma}. \quad (1,24)$$

Величина  $\nu_m$  играет в уравнении (1,20) ту же роль, что и кинематическая вязкость  $\nu = \eta/\rho$  в уравнении движения среды (1,22), и поэтому называется часто магнитной вязкостью. Вместе с уравнением состояния среды, взятым, например, в форме

$$p = p(\rho, T), \quad (1,25)$$

где  $T$  — температура, эта система содержит два векторных и два скалярных уравнения для величин  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  и должна быть дополнена еще одним уравнением. Таким уравнением служит уравнение энергии<sup>141</sup>. Так как полная энергия единицы объема равна \*)

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + \frac{H^2}{8\pi},$$

где  $\epsilon$  — внутренняя энергия на единицу массы среды, то уравнение энергии должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div } \mathbf{g}. \quad (1,26)$$

Плотность потока энергии  $\mathbf{g}$  складывается из плотности гидродинамического потока энергии  $\rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right)$ , где  $w$  — тепловая функция единицы массы среды, плотности потока электромагнитной энергии, выражаемой вектором Умова — Пойнтинга  $\frac{c_0}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , который в силу уравнения (1,9) равен  $\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} [\mathbf{vH}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}]$ , плотности потока энергии —  $(\mathbf{v}\sigma')$ , обусловленного процессами внутреннего трения, где

$$\sigma'_{ik} = \gamma_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1,27)$$

\*) Ввиду условий (1,7), (1,17) энергия электрического поля пренебрежимо мала по сравнению с магнитной энергией.

есть «вязкий» тензор напряжений \*), и, наконец, плотности теплового потока  $-\kappa \nabla T$ , где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности среды. Таким образом, плотность потока энергии в магнитной гидродинамике равна

$$\mathbf{g} = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}[\mathbf{vH}]] - \frac{\nu_m}{4\pi} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - (\mathbf{v}\sigma) - \kappa \nabla T. \quad (1,28)$$

С помощью уравнений (1,20)–(1,23) и термодинамического тождества

$$dw = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

равнение (1,26) может быть преобразовано в уравнение переноса тепла у

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\nu_m}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 + \operatorname{div} (\kappa \nabla T), \quad (1,29)$$

где  $s$  — энтропия единицы массы. Это уравнение показывает, что изменение количества тепла в движущемся элементе объема ( $dQ = \rho T ds$ ) определяется вязкостью, джоулевыми потерями и теплопроводностью.

Из уравнений (1,20)–(1,23) легко получить закон сохранения импульса для рассматриваемой системы в форме

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1,30)$$

где тензор плотности потока импульса  $\pi_{ik}$  равен

$$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{H^2}{2} \delta_{ik} - H_i H_k \right) - \sigma'_{ik}. \quad (1,31)$$

Импульс электромагнитного поля пренебрежимо мал и не входит в уравнение (1,30), так как в силу условий (1,7), (1,17) рассматриваются достаточно медленные процессы и ток смещения опущен.

С помощью известной формулы векторного анализа \*\*)

$$\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{H} - \operatorname{rot} [\mathbf{vH}] \right\} d\mathbf{S} \quad (1,32)$$

уравнение (1,20) с учетом (1,8) и (1,21) может быть преобразовано в интегральную форму<sup>54</sup>:

$$\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{S} = - \nu_m \int_{(L)} \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{l} = - \frac{c_0}{\sigma} \int_{(L)} \mathbf{j} d\mathbf{l}, \quad (1,33)$$

где поверхностный интеграл берется по «материальной», т. е. перемещающейся вместе с частицами среды, поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ . Из уравнения (1,33) следует, что изменение магнитного потока через связанную со средой поверхность определяется электрическим сопротивлением среды.

Относительное значение процессов диссипации магнитного поля за счет ограниченной проводимости среды можно оценить следующим образом. Если  $L$  и  $V$  — характерные для рассматриваемой задачи линейный размер и скорость, то первый член правой части уравнения (1,20) по отношению

\*) См., например, Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953, стр. 66.

\*\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, стр. 344, 1951.

ко второму имеет порядок величины

$$R_m = \frac{VL}{\nu_m}. \quad (1,34)$$

По аналогии с гидродинамическим числом Рейнольдса  $R = \frac{VL}{\nu}$  безразмерную комбинацию (1,34) принято называть магнитным числом Рейнольдса. При  $R_m \gg 1$  электросопротивлением среды и связанными с ним джоулевыми потерями и диссипацией магнитного поля можно пренебречь точно так же, как можно пренебречь вязкостью в гидродинамике при больших числах  $R$ . В лабораторных экспериментах с ртутью и жидким натрием  $R_m \sim 10^{-2} - 10^0$ . В этом случае сопротивление среды играет существенную роль. Напротив, в астрофизических приложениях магнитной гидродинамики  $R_m \sim 10^6$  и выше вследствие хорошей проводимости ионизованного газа и огромных размеров рассматриваемых объектов. Так как, кроме того, велики и обычные числа Рейнольдса, то во многих задачах достаточно ограничиться рассмотрением идеальной жидкости с бесконечной проводимостью. При этом подразумевается, что процессы теплообмена также несущественны, т. е. движение среды адиабатично. Заметим, однако, что в разреженном ионизованном газе существенную роль может играть лучистая теплопроводность. В последнем случае движение среды следует считать скорее изотермическим, чем адиабатичным<sup>83</sup>.

Для идеальной среды ( $\eta, \zeta, \kappa$  равны нулю, проводимость бесконечна) уравнения (1,20) — (1,23) и (1,30) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}], \quad (1,35)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1,36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}], \quad (1,37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1,38)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) s = 0. \quad (1,39)$$

Уравнение (1,39) выражает сохранение энтропии при адиабатическом движении идеальной среды. Вместе с уравнением состояния уравнения (1,35) — (1,39) образуют полную систему магнитогидродинамических уравнений для идеальной среды. Уравнения (1,37) — (1,39) могут быть записаны в форме законов сохранения энергии, импульса и массы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\text{div } \mathbf{g}, \quad (1,40)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1,41)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \rho \mathbf{v}, \quad (1,42)$$

где плотность потока энергии и тензор плотности потока импульса равны соответственно

$$\mathbf{g} = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} (H^2 \mathbf{v} - (\mathbf{Hv}) \mathbf{H}), \quad (1,43)$$

$$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{H^2}{2} - H_i H_k \right). \quad (1,44)$$

Уравнение (1,35) также выражает некоторый весьма характерный для магнитной гидродинамики закон сохранения, а именно сохранение магнитного потока через любую движущуюся вместе со средой поверхность<sup>144</sup>. Действительно, из уравнений (1,35), (1,36) и (1,32) или непосредственно из уравнения (1,33) при  $\sigma = \infty$  имеем

$$\frac{d}{dt} \iint \mathbf{H} d\mathbf{S} = 0, \quad (1,45)$$

где интеграл берется по произвольной материальной поверхности. Сохранение магнитного потока через произвольную материальную поверхность позволяет широко пользоваться в магнитной гидродинамике наглядным представлением о магнитном поле, как о совокупности силовых линий, скрепленных со средой, или, как говорят, «приклеенных» к среде, «замороженных» в ней. В самом деле, если в начальный момент времени отсутствует поток вектора  $\mathbf{H}$  через некоторую материальную поверхность, т. е. силовые линии лежат на этой поверхности, то ввиду условия (1,45) силовые линии и в дальнейшем останутся на этой поверхности. Поскольку пересечение двух материальных поверхностей, обладающих этим свойством, определяет силовую линию, то и сама магнитная силовая линия является материальной линией в том же смысле, в каком мы говорим о материальной поверхности: она связана всегда с определенными частицами среды и перемещается так же, как и эти частицы. (Разумеется, речь идет о поперечных смещениях, так как всякое смещение магнитной силовой линии вдоль самой себя лишено смысла.) Благодаря этому свойству любое изменение магнитного поля может рассматриваться как его движение, т. е. как перемещение силовых линий этого поля. Все сказанное справедливо лишь при бесконечной проводимости среды. Попытка распространить представление о движении магнитного поля на случай ограниченной проводимости предпринята в работах<sup>139, 52</sup>.

В случае несжимаемой жидкости уравнения магнитной гидродинамики могут быть записаны в простой симметричной форме для переменных<sup>55</sup>

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (1,46)$$

В этих переменных \*) система уравнений (1,20) — (1,23) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla\Phi + \nabla^2(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}), \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{w} &= -\nabla\Phi + \nabla^2(\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{u}), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1,47)$$

где

$$\Phi = \frac{p}{\rho} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{w})^2}{8}, \quad \alpha = \frac{\nu + \nu_m}{2}, \quad \beta = \frac{\nu - \nu_m}{2}. \quad (1,48)$$

Плотность полной энергии (кинетической плюс магнитной), выраженная через переменные (1,46), равна

$$\frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{4}(u^2 + w^2), \quad (1,49)$$

а разность между кинетической и магнитной энергиями равна

$$\frac{\rho v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{2} \mathbf{u}\mathbf{w}. \quad (1,50)$$

\*) Поскольку  $\mathbf{v}$  является вектором, а  $\mathbf{H}$  псевдовектором величины  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  не имеют определенных трансформационных свойств.



В заключение этого параграфа укажем, что в магнитной гидродинамике не выполняется классическая теорема Томсона о сохранении циркуляции скорости в идеальной жидкости<sup>84</sup>. В присутствии магнитного поля циркуляция скорости по материальному контуру сохраняется лишь в том случае, если отнесенная к единице массы электромагнитная сила (1,19) обладает потенциалом

$$\operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \right\} = 0, \quad (1,51)$$

что, вообще говоря, не имеет места.

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В результате взаимодействия электромагнитных и гидродинамических явлений малые возмущения в проводящей среде при наличии магнитного поля распространяются в виде волн, свойства которых отличаются от свойств обычных звуковых или электромагнитных волн. Прежде всего, проводящая среда в магнитном поле приобретает характерную анизотропию: скорость распространения волн зависит от направления распространения по отношению к магнитному полю. Кроме того, в отличие от звуковых и электромагнитных волн, в магнитной гидродинамике волны в общем случае не являются ни продольными, ни поперечными. Волны малой амплитуды в сжимаемой проводящей среде в присутствии магнитного поля рассматривались впервые в работах<sup>77, 80, 76</sup>. Помимо самостоятельного значения исследование поведения малых возмущений имеет непосредственное отношение к изучению волн конечной амплитуды и, в частности, ударных волн в магнитной гидродинамике.

Возможные в магнитной гидродинамике типы волн малой амплитуды легко установить, ограничиваясь случаем идеальной среды. Для общности рассмотрим стационарный однородный поток жидкости в постоянном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Легко видеть, что уравнения (1,35) — (1,39) удовлетворяются при любых постоянных  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ . Пусть исходное стационарное состояние подвергается малому возмущению, в результате которого скорость, напряженность магнитного поля, плотность, давление и энтропия испытывают малые отклонения

$$\mathbf{v}', \quad \mathbf{H}', \quad \rho', \quad p' \quad \text{и} \quad s' \quad (2,1)$$

от их стационарных значений. Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{H}'}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (2,2)$$

где  $\rho$  — постоянная во всем пространстве невозмущенная плотность среды. Из уравнений (1,35) — (1,39), пренебрегая произведениями малых величин (2,1) и используя обозначения (2,2), получим следующую систему линейных уравнений для величин, характеризующих малое возмущение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{u}' &= (\mathbf{u}\nabla) \mathbf{v}' - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}', \\ \operatorname{div} \mathbf{u}' &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho} \nabla(p' + \rho \mathbf{u}\mathbf{u}') + (\mathbf{u}\nabla) \mathbf{u}', \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \rho' &= -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}', \\ \frac{\partial s'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) s' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

С помощью уравнения состояния малое возмущение давления может быть выражено через возмущения плотности и энтропии

$$p' = c^2 \rho' + b s', \quad (2,4)$$

где  $c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$  — скорость звука в среде в отсутствие магнитного поля, а  $b = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho$ . В силу линейности уравнений (2,3) и (2,4) произвольное возмущение может быть представлено как суперпозиция плоских волн с зависимостью от координат и времени в виде

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2,5)$$

где  $\omega$  — частота волны,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. Для плоских волн (2,5) уравнения (2,3) и (2,4) сводятся к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{u}' + (\mathbf{k}\mathbf{u}) \mathbf{v}' - \mathbf{u} (\mathbf{k}\mathbf{v}') &= 0, \\ \mathbf{k}\mathbf{u}' &= 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{v}' + (\mathbf{k}\mathbf{u}) \mathbf{u}' - \frac{1}{\rho} (p' + \rho \mathbf{u}\mathbf{u}') \mathbf{k} &= 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \rho' - \rho (\mathbf{k}\mathbf{v}') &= 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) s' &= 0, \\ p' - c^2 \rho' - b s' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

Вычисляя детерминант системы (2,6) (для этого удобно одну из осей системы координат направить вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ ) и приравнявая его нулю, получим следующее условие существования нетривиальных решений:

$$\omega_0^2 [\omega_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{u})^2] [\omega_0^4 - k^2 (c^2 + u^2) \omega_0^2 + k^2 c^2 (\mathbf{k}\mathbf{u})^2] = 0. \quad (2,7)$$

Здесь через

$$\omega_0 = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v} \quad (2,8)$$

обозначена частота в системе координат, относительно которой жидкость неподвижна. Поэтому  $\frac{\omega_0}{k} = V$  есть фазовая скорость волны в неподвижной жидкости. Уравнение (2,7) определяет четыре различных по абсолютной величине значения  $\omega_0$  и, следовательно, четыре различных волны, каждая из которых обладает своей скоростью распространения относительно среды  $V = \frac{\omega_0}{k}$ . Рассмотрим подробнее свойства этих волн.

#### а) Энтропийная волна

Решение уравнения (2,7)

$$\omega_0 = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0 \quad (2,9)$$

соответствует возмущению, неподвижному относительно среды. Если среда движется, то возмущение этого типа переносится вместе с ней. Используя условие (2,9) в уравнениях (2,6), легко убедиться, что в такой волне возмущены лишь плотность и энтропия, связанные условием

$$\rho' = -\frac{b}{c^2} s'. \quad (2,10)$$

Остальные величины неизменны:

$$\mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{u}' = 0, \quad p' = 0. \quad (2,11)$$

Такие возмущения совпадают с известными в обычной гидродинамике энтропийными волнами. Их можно лишь условно назвать волнами, так как скорость распространения этих возмущений относительно среды равна нулю. Тем не менее в ряде случаев, например при исследовании поведения ударных волн при малых возмущениях, энтропийная волна должна учитываться наряду с рассматриваемыми ниже истинными волнами.

б) Магнитогиродинамическая волна

Уравнение (2,7) имеет решение

$$\omega_0 = \pm (\mathbf{k}\mathbf{u}), \tag{2,12}$$

которое соответствует волнам, распространяющимся со скоростью

$$V_A = \pm \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \vartheta, \tag{2,13}$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением распространения волны и напряженностью магнитного поля. Подставляя (2,12) в уравнения (2,6), нетрудно убедиться, что в таких волнах термодинамические характеристики среды остаются неизменными

$$\rho' = 0, \quad p' = 0, \quad s' = 0, \tag{2,14}$$

а возмущения скорости и напряженности магнитного поля подчиняются условиям

$$\mathbf{v}' = \mp \mathbf{u}', \quad \mathbf{k}\mathbf{u}' = 0, \quad \mathbf{u}\mathbf{u}' = 0. \tag{2,15}$$

В силу условий (2,15) волны рассматриваемого типа являются чисто поперечными, причем колебания происходят в направлении, перпендикулярном невозмущенному магнитному полю  $\mathbf{H}$ . Эти волны не имеют аналога в обычной гидродинамике. Они являются специфическими для магнитной гидродинамики и получили название магнитогиродинамических. Поперечность этих волн означает, что проводящая среда приобретает в магнитном поле своеобразную упругость по отношению к сдвигу соседних ее слоев. В этом состоит одна из существенных особенностей магнитной гидродинамики.

Магнитогиродинамические волны не сопровождаются изменением плотности и поэтому возможны как в сжимаемой, так и в несжимаемой среде. Для несжимаемой среды существование магнитогиродинамических волн было теоретически предсказано Альфвеном <sup>1, 2, 5</sup>. Впоследствии магнитогиродинамические волны были обнаружены в опытах с ртутью <sup>100, 101</sup>, жидким натрием <sup>94</sup> и газовым разрядом <sup>16, 17</sup>. Открытие нового вида волнового движения явилось одним из важнейших результатов магнитной гидродинамики и нашло многочисленные применения в первую очередь к ряду проблем астрофизики. В литературе магнитогиродинамические волны часто называются также волнами Альфвена.

С точки зрения микроскопической теории ионизованного газа магнитогиродинамические волны представляют собой предельный случай обычных электромагнитных волн в ионизованном газе, соответствующий частотам, значительно меньшим гирочастоты ионов:

$$\omega \ll \Omega = \frac{eH}{mc}, \tag{2,16}$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса тяжелых ионов. В этом случае учет движения ионов в поле электромагнитной волны в присутствии внешнего магнитного поля  $H$  приводит к выражению (2,13) для скорости распространения электромагнитной волны <sup>8, 9, 70 \*</sup>).

\* Подробное о распространении электромагнитных волн в ионизованном газе см. <sup>69</sup>.

## в) Магнитозвуковые волны

Помимо рассмотренных выше решений характеристическое уравнение (2,7) удовлетворяется при условии

$$\omega_0^4 - k^2 (u^2 + c^2) \omega_0^2 + k^2 c^2 (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 = 0. \quad (2,17)$$

Решениями биквадратного уравнения (2,17) служат два различных по абсолютной величине значения  $\omega_0$ . Им соответствуют две различные волны, скорости которых  $V_+$  и  $V_-$  определяются в силу (2,17) выражением

$$V_{\pm}^2 = \frac{\omega_0^2}{k^2} = \frac{1}{2} \{c^2 + u^2 \pm \sqrt{(c^2 + u^2)^2 - 4c^2 u^2 \cos^2 \vartheta}\}. \quad (2,18)$$

Здесь, как и прежде,  $\vartheta$  есть угол между направлением распространения волны и напряженностью магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Скорости  $V_+$  и  $V_-$ , отличающиеся знаком радикала в выражении (2,18), удовлетворяют следующим условиям:

$$\max(u^2, c^2) \leq V_+^2 \leq c^2 + u^2, \quad (2,19)$$

$$0 \leq V_-^2 \leq \min(u^2 \cos^2 \vartheta, c^2). \quad (2,20)$$

Здесь через  $\max$  и  $\min$  обозначены соответственно наибольшая и наименьшая из величин, стоящих в скобках. Так как  $c$  есть скорость звука в отсутствие магнитного поля, а  $u \cos \vartheta = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \vartheta$  — скорость магнито-гидродинамической волны в данном направлении, то решение  $V_+$  соответствует ускоренной волне, а решение  $V_-$  — замедленной волне по сравнению с звуковой или магнито-гидродинамической волнами.

При условии (2,17) из уравнений (2,6) следует, что энтропия среды неизменна ( $s' = 0$ ), а все остальные величины могут быть выражены через возмущение плотности:

$$\mathbf{v}' = -\frac{\omega_0}{\rho k^2} \frac{k^3 (\mathbf{k}\mathbf{u}) \mathbf{u} - \omega_0^2 \mathbf{k}}{\omega_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{u})^2} \rho', \quad (2,21)$$

$$u' = \frac{\omega_0^2}{\rho k^2} \frac{k^2 \mathbf{u} - (\mathbf{k}\mathbf{u}) \mathbf{k}}{\omega_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{u})^2} \rho', \quad (2,22)$$

$$p' = c^2 \rho'. \quad (2,23)$$

Выражения (2,21) и (2,22) показывают, что возмущения скорости и напряженности магнитного поля  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{u}'$ , в отличие от магнито-гидродинамической волны, лежат в плоскости  $(\mathbf{k}, \mathbf{H})$  и имеют составляющие как в направлении распространения волны, так и в перпендикулярном направлении. Это значит, что ускоренная и замедленная магнитозвуковые волны не являются ни продольными, ни поперечными\*).

Заметим, что в силу выражений (2,2), (2,22) и (2,23) возмущение магнитного давления  $p'_m = \frac{H^2}{8\pi} \rho'$  равно

$$p'_m = \rho \mathbf{u} \mathbf{u}' = \left( \frac{V_+^2}{c^2} - 1 \right) p'. \quad (2,24)$$

Отсюда следует, что для ускоренной волны ( $V_+^2 > c^2$ )  $p'_m$  и  $p'$  имеют одинаковые знаки, и, следовательно, максвелловы натяжения магнитного поля действуют в том же направлении, что и возмущение давления. Для замедленной волны ( $V_-^2 < c^2$ )  $p'_m$  и  $p'$  имеют противоположные знаки и частично компенсируют друг друга.

\* В ионизованном газе магнитозвуковые волны являются предельным случаем электромагнитных волн с частотами, удовлетворяющими (2,16)<sup>69</sup>.

Векторная диаграмма скоростей, определяемых выражениями (2,13) и (2,18), приведена на рис. 1 для двух случаев:  $u = 0,9c$  и  $u = 1,11c$ . Горизонтальная ось соответствует направлению невозмущенного магнитного поля. Скорость распространения возмущений в произвольном направлении, составляющем угол  $\vartheta$  с направлением магнитного поля, определяется длиной вектора, проведенного под этим углом из начала координат до пересечения с соответствующей кривой.

При  $\vartheta = 0$  ускоренная волна переходит в обычную звуковую, если  $c > u$ , или в магнитогидродинамическую, если  $u > c$ . Замедленная волна при тех же условиях переходит соответственно в магнитогидродинамическую или звуковую волну. При  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  скорость распространения магнитогидродинамической и замедленной магнитозвуковой волн обращается

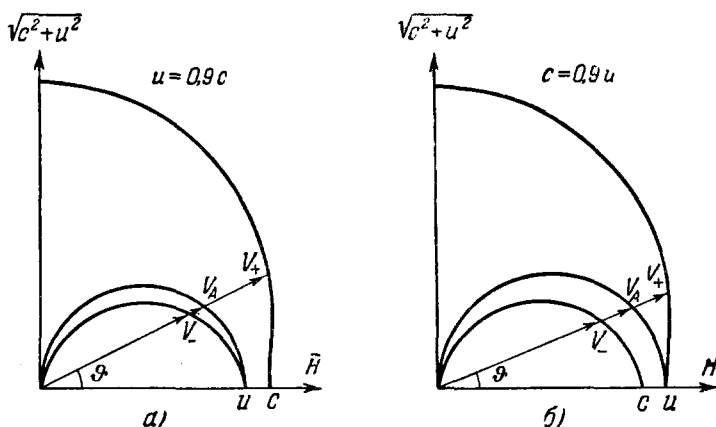


Рис. 1.

в нуль. При этом обе волны сводятся к слабому тангенциальному разрыву, в котором возмущения скорости и поля параллельны плоскости фронта.

Из уравнений (2,13) и (2,18) следует, что скорости  $V_+$ ,  $V_A$  и  $V_-$  не зависят от частоты волны  $\omega$ , т. е. в идеальной среде дисперсия отсутствует. Дисперсия появляется при учете затухания волн за счет ограниченной проводимости среды, как это показано для плоских магнитогидродинамических волн в работе<sup>125\*</sup>) и для цилиндрических (торсионных) магнитогидродинамических волн в работе<sup>101</sup> в связи с анализом выполненных в этой работе опытов, позволивших экспериментально осуществить торсионные магнитогидродинамические волны в ртути. В работе<sup>6</sup> подробно исследуется продольная магнитозвуковая волна (волна  $V_+$  при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , распространяющаяся в направлении, перпендикулярном к магнитному полю) с учетом слабого затухания за счет ограниченной проводимости среды. Зависимость затухания от длины волны здесь также приводит к дисперсии.

Распространение магнитогидродинамических волн во вращающейся несжимаемой жидкости рассмотрено в работах<sup>93, 95</sup>. Наличие силы Кориолиса приводит к появлению двух поляризованных по кругу магнитогидродинамических волн с противоположными направлениями вращения

\*) См. также<sup>117</sup>.

и различными фазовыми скоростями. Влияние силы Кориолиса характеризуется безразмерным параметром  $\Omega/kV_A$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения,  $k$  — волновое число. Ввиду зависимости эффекта от длины волны в этом случае также имеет место дисперсия.

Более общая задача о распространении плоских и цилиндрических (торсионных) волн в среде с ограниченной проводимостью при учете токов смещения рассмотрена в работах<sup>10, 11</sup> в предельных случаях слабого затухания и слабого магнитного поля.

В работе<sup>78</sup> исследуется распространение возмущений в несжимаемой вязкой жидкости, плотность которой неоднородна в направлении силы тяжести и параллельного ей магнитного поля. С помощью вариационного метода, развитого для слоистой жидкости конечной толщины, получены приближенные решения в предельных случаях однородной плотности и бесконечной проводимости.

Отражение и преломление плоских магнитогидродинамических волн на плоской поверхности раздела двух сред с разной плотностью рассмотрено в работе<sup>64</sup> для магнитогидродинамических волн, поляризованных перпендикулярно плоскости падения, и в работе<sup>124</sup> при произвольной поляризации \*).

### 3. ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Как и обычные гидродинамические уравнения, уравнения магнитной гидродинамики для идеальной среды ( $\eta = \zeta = \kappa = 0$ ,  $\sigma = \infty$ ) допускают разрывные решения, в которых характеристики среды и поля на некоторых поверхностях испытывают скачкообразное изменение. В обычной гидродинамике существует два типа таких поверхностей разрыва: тангенциальный разрыв и ударная волна. В магнитной гидродинамике картина значительно усложняется. Впервые ударные волны в магнитной гидродинамике рассматривались Гофманом и Теллером<sup>79 \*\*</sup>), исходя из релятивистского тензора энергии — импульса для среды и электромагнитного поля. Как следует из этой работы, релятивистское рассмотрение необходимо лишь в том случае, если плотность магнитной энергии по порядку величины сравнима с плотностью полной энергии среды, включая энергию покоя (ср. (1.18)). Во всех практически важных случаях энергия магнитного поля значительно меньше полной энергии среды, поэтому ниже будут рассмотрены только нерелятивистские ударные волны.

Возможные в магнитной гидродинамике типы поверхностей разрыва можно найти, рассматривая граничные уравнения на поверхности разрыва<sup>140, 141</sup>. Последние легко получить из уравнений (1.35), (1.36) и (1.40—1.42), воспользовавшись системой координат, в которой поверхность разрыва неподвижна и совпадает с плоскостью ( $y, z$ ). В этом случае полная система граничных уравнений на магнитогидродинамической поверхности разрыва имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \{[\mathbf{vH}]_y\} = 0, \quad \{[\mathbf{vH}]_z\} = 0, \quad \{H_x\} = 0, \\ \{g_x\} = 0, \quad \{\rho v_x\} = 0, \quad \{\pi_{ix}\} = 0 \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе фигурными скобками обозначена разность значений заключенной в них величины с обеих сторон поверхности разрыва. Смысл условий (3,1) очевиден. Первые три из них представляют собой обычные электродинамические условия непрерывно-

\*) См. также обзорную статью<sup>416</sup>.

\*\*\*) См. сборник<sup>109</sup>.

сти тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля, так как для среды с бесконечной проводимостью из уравнения (1,9) следует

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c_0} [\mathbf{vH}]. \quad (3,2)$$

Последние три из уравнений (3,1) выражают соответственно непрерывность потоков энергии, массы и импульса. Используя выражения (1,43) и (1,44) для плотности потоков энергии и импульса и раскрывая векторное произведение  $[\mathbf{vH}]$ , получим следующие граничные уравнения для поверхности разрыва в магнитной гидродинамике:

$$\{v_x H_y - v_y H_x\} = 0, \quad \{v_x H_z - v_z H_x\} = 0, \quad (3,3)$$

$$\{H_x\} = 0, \quad (3,4)$$

$$\left\{ \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} (H^2 v_x - (\mathbf{vH}) H_x) \right\} = 0, \quad (3,5)$$

$$\{\rho v_x\} = 0, \quad (3,6)$$

$$\left\{ p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (3,7)$$

$$\left\{ \rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi} H_x H_y \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi} H_x H_z \right\} = 0. \quad (3,8)$$

При  $H=0$  уравнения (3,3)–(3,8) сводятся к обычным гидродинамическим уравнениям на поверхности разрыва, которые допускают лишь два взаимоисключающих типа разрывов: либо  $\{v_y\} \neq 0$ , тогда  $v_x = 0$  — тангенциальный разрыв, либо  $v_x \neq 0$ , тогда  $\{v_y\} = 0$  — ударная волна. Вместе с существованием минимальной скорости распространения ударной волны (равной скорости звука) это означает, в частности, что в гидродинамике малые возмущения не могут перевести тангенциальный разрыв в ударную волну, и наоборот. Поэтому введение двух типов разрывов в обычной гидродинамике имеет глубокое физическое основание. Иное положение в магнитной гидродинамике. Уравнения (3,3)–(3,8) не распадаются на отдельные исключаящие друг друга группы и, как было показано в работе <sup>141</sup>, любой из допускаемых этими уравнениями разрывов может, вообще говоря, перейти в любой другой при непрерывном изменении условий движения. Это значит, что любая классификация магнитогидродинамических разрывов, в том числе и приведенная ниже, имеет лишь условный характер. Тем не менее такая классификация весьма удобна при исследовании свойств разрывов в магнитной гидродинамике и широко используется в литературе <sup>79, 76, 105 \*</sup>). В основу ее кладутся внешние признаки движения вблизи поверхности разрыва.

#### а) Тангенциальный разрыв

К этому типу относятся разрывы, в которых отсутствует нормальная составляющая скорости

$$v_x = 0, \quad (3,9)$$

т. е. поверхность разрыва неподвижна относительно жидкости. Если при этом  $H_x \neq 0$ , то из уравнений (3,3)–(3,8) следует непрерывность

\*) См. сборник <sup>109</sup>.

скорости, давления и напряженности магнитного поля. Такой разрыв может представлять собой лишь границу раздела двух различных сред. Будем считать, что

$$H_x = 0. \quad (3,10)$$

При этом скорость и напряженность магнитного поля параллельны поверхности разрыва и в силу условий (3,3), (3,5), (3,8) могут претерпевать произвольные скачки по величине и направлению. Давление и напряженность магнитного поля связаны условием

$$\left\{ p + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (3,11)$$

означающим непрерывность полного давления  $P = p + \frac{H^2}{8\pi}$ , складывающегося из обычного давления  $p$  и «бокового» напряжения магнитного поля  $\frac{H^2}{8\pi}$ . Условия (3,9), (3,10) и (3,11) полностью определяют тангенциальный разрыв. Такой разрыв возможен как в сжимаемой, так и в несжимаемой среде.

#### б) Перпендикулярная ударная волна

В разрывах этого типа

$$v_x \neq 0, \quad H_x = 0. \quad (3,12)$$

При этих условиях, как следует из уравнений (3,6) и (3,8), тангенциальная составляющая скорости должна быть непрерывной

$$\{v_y\} = 0, \quad \{v_z\} = 0. \quad (3,13)$$

Следовательно, можно перейти к такой системе координат, в которой по обе стороны от разрыва тангенциальная составляющая скорости отсутствует и, кроме того, магнитное поле направлено по оси  $y$ :

$$v = v_x, \quad H = H_y. \quad (3,14)$$

В такой системе координат перпендикулярная ударная волна, как следует из уравнений (3,3) — (3,8), подчиняется следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{H}{\rho} \right\} = 0, \quad \{\rho v\} = 0, \\ \left\{ \frac{v^2}{2} + w + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right\} = 0, \quad \left\{ p + \rho v^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,15)$$

Разрыв этого типа представляет собой продольную ударную волну сжатия, направление распространения которой перпендикулярно направлению магнитного поля. Первое из условий (3,15) выражает «замороженность» магнитного поля в среде: в разрыве сохраняется величина  $H/\rho$ . Остальные уравнения заменой

$$\epsilon^* = \epsilon + \frac{B^2}{8\pi\rho}, \quad p^* = p + \frac{H^2}{8\pi} \quad (3,16)$$

сводятся к обычным уравнениям ударной волны, в которых энергия



и давление содержат соответствующие магнитные члены. Характер движения в таком разрыве изображен на рис. 2.

При  $H = 0$  перпендикулярная ударная волна вырождается в обычную. При  $H \neq 0$  скорость ее распространения зависит от напряженности магнитного поля. Как было показано в <sup>79</sup>, перпендикулярная ударная волна возможна лишь как волна сжатия. Магнитное поле уменьшает сжимаемость среды и соответственно увеличивает скорость распространения разрыва. Зависимость между параметрами этого разрыва подробно исследована в работах <sup>76, 107</sup>.

Перпендикулярная ударная волна слабой интенсивности совпадает с ускоренной магнитозвуковой волной, распространяющейся поперек магнитного поля ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  на рис. 1) со скоростью, определяемой из уравнения (2,18):

$$V_{\pm}^2 = c^2 + u^2. \quad (3,17)$$

При исследовании разрывов, для которых

$$v_x \neq 0, \quad H_x \neq 0, \quad (3,18)$$

удобно пользоваться системой координат, в которой векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  параллельны <sup>79</sup>. В силу уравнений (3,3) это может быть сделано сразу для обеих сторон от поверхности разрыва, если перейти к системе координат, движущейся относительно исходной параллельно поверхности разрыва со скоростью

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} - \frac{v_x}{H_x} \mathbf{H}, \quad (3,19)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость среды в исходной системе координат. Обозначим индексами 1 и 2 величины, относящиеся к разным сторонам поверхности разрыва. Тогда в выбранной системе координат

$$\mathbf{v}_1 = q_1 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{v}_2 = q_2 \mathbf{H}_2, \quad (3,20)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — некоторые коэффициенты пропорциональности. В этой системе координат линии тока жидкости параллельны магнитным силовым линиям и испытывают одинаковое с ними преломление на поверхности разрыва, как это показано на рис. 3. Заметим, что для перпендикулярной ударной волны и, в общем

случае, для тангенциального разрыва выбор такой системы координат невозможен.

При условиях (3,18) и (3,20) граничные уравнения (3,3)—(3,8) сводятся к следующим:

$$\{H_x\} = 0, \quad (3,21)$$

$$\left\{ \frac{v^2}{2} + w \right\} = 0, \quad (3,22)$$

$$\{\rho v_x\} = 0, \quad (3,23)$$

$$\left\{ p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right\} = 0, \quad (3,24)$$

$$\left\{ \rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi} H_x H_y \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi} H_x H_z \right\} = 0. \quad (3,25)$$

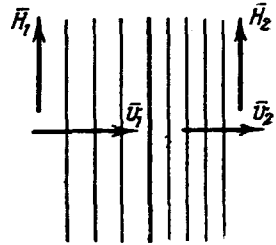


Рис. 2.

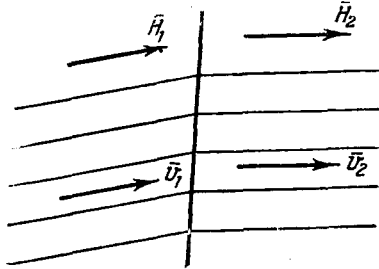


Рис. 3.

Из этих уравнений и соотношения (3,20) следует

$$\{pq\} = 0, \quad (3,26)$$

$$\left\{ \left( 1 - \frac{1}{4\pi\rho q^2} \right) v_y \right\} = 0, \quad \left\{ \left( 1 - \frac{1}{4\pi\rho q^2} \right) v_z \right\} = 0. \quad (3,27)$$

Уравнения (3,24) — (3,25) и вытекающие из них уравнения (3,26), (3,27) допускают два существенно различных типа разрывов в зависимости от того, непрерывна плотность среды или она терпит скачок на поверхности разрыва.

### в) Магнитогидродинамическая волна

Если плотность среды непрерывна

$$\{\rho\} = 0, \quad (3,28)$$

то в силу уравнения (3,26) непрерывна также величина  $q$ . Вместе с уравнением (3,27) это означает, что  $q = \pm \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}$ , так как по крайней мере одна из величин  $\{v_y\}$  или  $\{v_z\}$  отлична от нуля. Таким образом, в магнитогидродинамической волне вектор скорости связан с напряженностью магнитного поля в избранной системе координат соотношениями

$$\mathbf{v}_1 = \pm \frac{\mathbf{H}_1}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{v}_2 = \pm \frac{\mathbf{H}_2}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (3,29)$$

а на поверхности разрыва выполнены следующие условия:

$$\{v_x\} = 0, \quad \{H_x\} = 0, \quad \{\varepsilon\} = 0, \quad \{\rho\} = 0, \quad (3,30)$$

$$\left\{ p + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \right\} = 0. \quad (3,31)$$

Здесь использовано выражение  $w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$  для тепловой функции. Из соотношений (3,29) следует, что скорость распространения магнитогидродинамической волны относительно среды равна

$$V = \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H_x. \quad (3,32)$$

Характерная особенность такого разрыва состоит в том, что среда при прохождении через поверхность разрыва может приобрести произвольный по направлению тангенциальный импульс, так что в общем случае движение не является плоским.

В связи с условиями (3,30), (3,31) следует заметить, что поскольку с обеих сторон разрыва плотность и внутренняя энергия среды одинаковы, то должны быть одинаковыми и остальные термодинамические параметры, в том числе и давление  $p$ . Это значит, что в среде с однозначным уравнением состояния условие (3,31) сводится к двум следующим:

$$\{p\} = 0, \quad \{H_y^2 + H_z^2\} = 0, \quad (3,33)$$

т. е. наряду с непрерывностью всех термодинамических параметров непрерывны также нормальные составляющие и абсолютные значения тангенциальных составляющих магнитного поля и скорости. При заданных значениях  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{v}_1$  возможные значения  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{v}_2$  лежат на поверхности

конуса, образующая которого составляет с нормалью тот же угол, что и вектор  $H_1$ , как это изображено на рис. 4.

В несжимаемой жидкости условия (3,33) не следуют из условий (3,30), (3,31), так как давление уже не определяется плотностью и внутренней энергией. Тангенциальные составляющие могут испытывать произвольный скачок, связанный со скачком давления условием (3,31). В дальнейшем мы увидим, что разрывная магнитогидродинамическая волна является частным случаем общего решения, найденного впервые Альфвеном<sup>5</sup>.

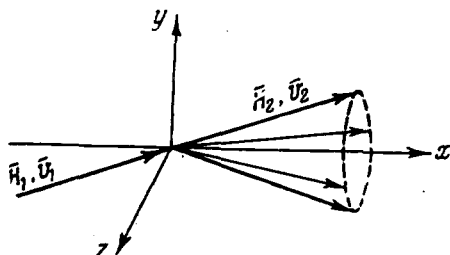


Рис. 4.

г) Наклонная ударная волна

Разрывы этого типа сопровождаются скачком плотности

$$\{\rho\} \neq 0. \quad (3,34)$$

Можно убедиться, что движение в этом случае должно быть плоским, т. е. систему координат можно выбрать так, чтобы

$$v_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (3,35)$$

В самом деле, в силу условий (3,20) поворотом системы координат вокруг оси  $x$  всегда можно сделать  $v_{1z} = 0$  и  $H_{1z} = 0$ . При этом из уравнений (3,27) следует либо  $v_{2z} = 0$  и  $H_{2z} = 0$ , т. е. мы непосредственно получаем условия (3,35), либо

$$q_2^2 = \frac{1}{4\pi\rho_2}, \quad q_1^2 \neq \frac{1}{4\pi\rho_1} \quad (3,36)$$

(одновременное равенство  $q_2^2 = \frac{1}{4\pi\rho_2}$  и  $q_1^2 = \frac{1}{4\pi\rho_1}$  противоречит условиям (3,26) и (3,34)). В последнем случае из условий (3,27) следует, что  $v_{1y} = 0$  и  $H_{1y} = 0$ , т. е. с одной стороны от разрыва тангенциальные составляющие поля и скорости вообще отсутствуют и систему координат остается выбрать так, чтобы  $v_{2z} = 0$  и  $H_{2z} = 0$ .

В силу условий (3,35) граничные уравнения (3,21)—(3,25) для наклонной ударной волны принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \{H_x\} = 0, \quad \{\rho v_x\} = 0, \quad \left\{w + \frac{v^2}{2}\right\} = 0, \\ \left\{p + \rho v_x^2 + \frac{H_y^2}{8\pi}\right\} = 0, \quad \left\{\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi} H_x H_y\right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,37)$$

В разрывах этого типа ударная волна сжатия сложным образом взаимодействует с магнитным полем. Зависимость между параметрами, определяющими состояние среды до и после прохождения наклонной ударной волны, вычислена в работах<sup>76, 107</sup> в предположении, что для среды справедливо уравнение состояния идеального газа. Для каждого значения напряженности магнитного поля, вообще говоря, могут реализоваться три различных ударных волны этого типа.

В случае  $H_y = 0$ , но  $H_x \neq 0$  наклонная ударная волна переходит в так называемую параллельную ударную волну<sup>79</sup>, распространяющуюся вдоль магнитного поля и не взаимодействующую с ним. В этом случае

связь между гидродинамическим движением и магнитным полем отсутствует и, как легко видеть из уравнений (3,37) при  $H_y = 0$ , ударная волна подчиняется обычным гидродинамическим уравнениям

$$\{p + \rho v_x^2\} = 0, \quad \left\{w + \frac{v^2}{2}\right\} = 0, \quad \{\rho v_x\} = 0. \quad (3,38)$$

Отметим особо разрыв, удовлетворяющий условиям (3,36). В таком разрыве

$$v_{1y} = 0, \quad H_{1y} = 0, \quad v_{2x} = \pm \frac{H_{2x}}{\sqrt{4\pi\rho_2}}, \quad v_{2y} = \pm \frac{H_{2y}}{\sqrt{4\pi\rho_2}} \quad (3,39)$$

и выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} H_{1x} &= H_{2x}, \\ \rho_1 v_{1x} &= \rho_2 v_{2x}, \\ w_1 + \frac{v_1^2}{2} &= w_2 + \frac{v_2^2}{2}, \\ \rho_1 + \rho_1 v_{1x}^2 &= \rho_2 + \rho_2 v_{2x}^2 + \frac{\rho_2 v_{2y}^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3,40)$$

По одну сторону от такого разрыва тангенциальные составляющие  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  отсутствуют, и движение происходит по типу параллельной ударной волны; по другую сторону движение происходит по типу магнитогидродинамической волны, причем допустимы произвольные тангенциальные составляющие поля и, соответственно условиям (3,39), скорости. Характер движения в таком разрыве изображен на рис. 5.

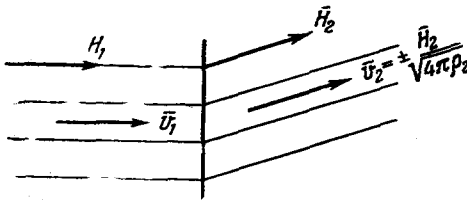
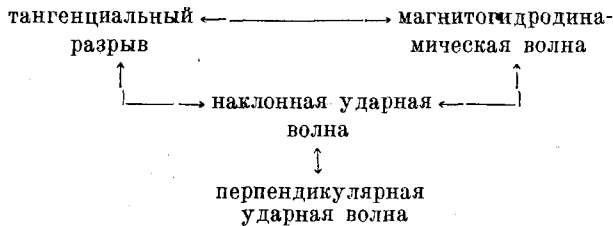


Рис. 5.

В предельном случае разрывов слабой интенсивности наклонные ударные волны вырождаются в одну из рассмотренных в разделе 2 магнитозвуковых волн — ускоренную или замедленную.

В работе <sup>141</sup> было показано, что между разрывами различных типов могут осуществляться непрерывные переходы по следующей схеме:



Такие переходы происходят через некоторые разрывы, которые можно назвать переходными и которые одновременно удовлетворяют граничным уравнениям для двух смежных типов разрывов, т. е. могут быть отнесены как к одному типу, так и к другому. Наличие таких переходных разрывов и означает, что разрыв одного типа может перейти в разрыв другого типа при непрерывном изменении параметров.

В существовании переходов между разрывами различных типов легко убедиться на примере разрывов слабой интенсивности, рассмотренных в разделе 2. Рис. 1 и уравнение (2,24) показывают, что ускоренная магнитозвуковая волна при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  переходит в слабую перпендикулярную ударную волну, а при  $\vartheta = 0$  — в звуковую или в магнитогидродинамическую. Замедленная магнитозвуковая волна при  $\vartheta = 0$  совпадает с магнитогидродинамической волной или со звуковой волной, если скорость последней меньше, а при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  представляет собой слабый тангенциальный разрыв, скорость распространения которого равна нулю. Точно так же магнитогидродинамическая волна при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  представляет собой просто тангенциальный разрыв, а при  $\vartheta = 0$  совпадает с одной из двух магнитозвуковых волн.

Понятие поверхности разрыва является известной идеализацией реального течения среды. В действительности разрыв представляет собой конечную область быстрого изменения параметров, характеризующих состояние среды. Ширина этой области определяется диссипативными процессами, обусловленными вязкостью, теплопроводностью и, при наличии магнитного поля, ограниченной проводимостью среды. Ограниченная проводимость среды делает невозможным резкий скачок напряженности магнитного поля и приводит к диссипации магнитной энергии в форме джоулева тепла.

Так, например, тангенциальный разрыв под влиянием вязкости и ограниченной проводимости должен размываться с течением времени. С помощью уравнений (1,19) и (1,24) легко показать, что на расстоянии  $L$  от места возникновения тангенциального разрыва изменение скорости происходит в слое толщины  $\delta_v$

$$\delta_v \sim \frac{L}{\sqrt{R}}, \quad (3,41)$$

а изменение напряженности магнитного поля в слое толщины

$$\delta_m \sim \frac{L}{\sqrt{R_m}}, \quad (3,42)$$

где  $R = \frac{VL}{\nu}$  и  $R_m = \frac{VL}{\nu_m}$  — обычное и магнитное числа Рейнольдса. Во многих астрофизических приложениях магнитной гидродинамики числа  $R$  и  $R_m$  очень велики, что позволяет пренебречь размыванием тангенциального разрыва.

Исследование структуры ударных волн в магнитной гидродинамике проведено в настоящее время только для перпендикулярной ударной волны. В работе <sup>141</sup> получено выражение для ширины перпендикулярной ударной волны слабой интенсивности, которое показывает, что в магнитном поле ширина разрыва уже не обязательно имеет порядок средней длины свободного пробега: при малой проводимости она может значительно превышать последнюю.

Подробное исследование структуры перпендикулярной ударной волны в среде, для которой справедливо уравнение состояния идеального газа, выполнено в работе <sup>110</sup> с учетом зависимости вязкости, теплопроводности и проводимости от температуры. Если проводимость среды велика, то ширина разрыва составляет несколько длин свободного пробега. В случае малой проводимости структура разрыва существенно зависит от напряженности магнитного поля. При малых значениях  $H$  перед разрывом имеется область, в которой магнитное поле, скорость

и температура среды меняются плавно. При значениях  $H$ , больших некоторого критического, резкий скачок вообще отсутствует: все величины плавно меняются в протяженной области. Это явление аналогично известному в обычной гидродинамике изотермическому скачку и связано с тем, что различны характерные длины для джоулевой диссипации в разрыве и для вязкой диссипации (т. е. средняя длина свободного пробега).

В работе <sup>133</sup> исследуется структура перпендикулярной ударной волны в плазме с бесконечной проводимостью. Как показано в работах <sup>110, 111</sup>, в ионизованном газе ввиду различной роли ионов и электронов (вязкость обусловлена в основном первыми, теплопроводность — вторыми) и большой разницы в их массах коэффициент теплопроводности существенно превышает коэффициент вязкости. Поэтому даже в отсутствие магнитного поля существуют условия возникновения обычного изотермического скачка.

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

##### а) Задачи магнитной гидростатики

Статическое магнитное поле в неподвижной среде при отсутствии внешних источников возможно лишь в том случае, если проводимость среды бесконечно велика, т. е. магнитное поле «заморожено» в среде. Ограниченная проводимость в силу уравнения (1,20) привела бы к диссипации магнитного поля, сопровождающейся превращением его энергии в джоулево тепло. Таким образом, магнитная гидростатика изучает условия равновесия проводящей среды под действием сил давления, натяжений «замороженного» в среде магнитного поля и, при необходимости их учета, сил гравитации.

В статическом случае  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \mathbf{v} = 0\right)$  система уравнений магнитной гидродинамики сводится к уравнениям

$$\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] = -\nabla p, \quad (4,1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4,2)$$

Из уравнения (4,1) следует, что для гидростатического равновесия проводящей среды в магнитном поле необходимо, чтобы сила Лоренца была всюду уравновешена градиентом давления. При этом силовые линии магнитного поля и линии тока  $\mathbf{j} = \frac{c_0}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$  расположены на поверхностях  $p = \text{const}$  <sup>102</sup>. При необходимости учета сил гравитации к правой части уравнения (4,1) должен быть добавлен член  $\rho \nabla U$ , где  $U$  — гравитационный потенциал. Так как сила Лоренца перпендикулярна напряженности магнитного поля, то изменение давления вдоль силовых линий целиком определяется силами гравитации.

В связи с теориями звездного магнетизма представляют интерес магнитные поля, которые не оказывают механического воздействия на среду, т. е. для которых сила Лоренца в гидродинамическом уравнении движения исчезает:

$$\frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = 0. \quad (4,3)$$

Это значит, что ток всюду параллелен магнитному полю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{H}. \quad (4,4)$$

Такие поля получили название бессиловых<sup>102</sup>. Частным решением уравнения (4,4) служит указанное в работе<sup>102</sup> винтовое поле в бесконечно длинном цилиндре, которое в цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  имеет вид

$$H_z = AJ_0(\alpha\rho), \quad H_\varphi = \alpha AJ_1(\alpha\rho), \quad (4,5)$$

где  $A$  и  $\alpha$  — постоянные, а  $J_0$  и  $J_1$  — бесселевы функции. Силовые линии такого поля имеют вид спиралей постоянного наклона\*). В случаях, когда нельзя пренебречь диссипацией магнитного поля за счет ограниченной проводимости среды, можно показать<sup>102</sup>, что при условии  $\alpha = \text{const}$  магнитное поле в процессе диссипации остается бессиловым, т. е. сохраняется гидростатическое равновесие.

Для приложений более интересны решения уравнения (4,4), убывающие или переходящие в однородное поле на бесконечности. При условии  $\alpha = \text{const}$  и в предположении цилиндрической симметрии задачи частное решение уравнений (4,2), (4,4) найдено в работе<sup>106</sup>. Этому решению соответствует поле, распадающееся на отдельные шаровые слои, внутри каждого из которых силовые линии замкнуты. На границе слоя возможно сшивание решений с различными  $\alpha$ , а также с решением, переходящим на бесконечности в однородное поле. При тех же предположениях в работе<sup>42</sup> получено в явном виде общее решение уравнений (4,2), (4,4), выраженное через цилиндрические функции от  $r$  и полиномы Гегенбауэра от  $\cos \vartheta$  в сферических координатах  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ . В обеих этих работах используется метод разложения цилиндрически симметричного поля на полярную и тороидальную части, для первой из которых вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  лежит в плоскости, проходящей через ось симметрии, для второй — перпендикулярен ей. Каждая из этих частей полностью определяется одной скалярной функцией от цилиндрических координат  $\rho$  и  $z$ . С помощью указанного разложения в работе<sup>43</sup> получено общее соотношение между определяющими скалярами цилиндрически симметричного магнитного поля, удовлетворяющего уравнению (4,1) с учетом сил гравитации.

В работе<sup>51</sup> найден класс двумерных статических решений для сжимаемой изотермической среды в однородном поле тяжести. Этот класс решений определяется семейством силовых линий, обладающим тем свойством, что произвольное магнитное поле, силовые линии которого относятся к этому семейству, может находиться в равновесии со средой при соответствующем распределении давления. Заметим, что при отсутствии силы тяжести таким семейством служит семейство концентрических окружностей. В этом случае смысл решения особенно прост: для любого магнитного поля с такими силовыми линиями, очевидно, существует распределение давления, уравновешивающее натяжения магнитного поля.

К задачам магнитной гидростатики относится также важный для теории магнитных звезд вопрос об устойчивой конфигурации гравитирующего жидкого шара в присутствии магнитного поля. В работах<sup>28, 73, 126, 6</sup> показано, что при наличии однородного внутреннего и дипольного внешнего магнитных полей шар не является равновесной конфигурацией тяготеющей жидкой массы. Под влиянием дополнительного «бокового» магнитного давления шар превратится в сфероид, сжатый в направлении магнитного поля. Если напряженность магнитного поля превышает некоторое критическое значение, то устойчивая конфигурация вообще

\*) Устойчивость статических винтовых полей подобного типа относительно малых деформаций рассматривается в работах<sup>103, 127, 52a, 128a, 142</sup>.

невозможна: магнитное поле растягивает сфероид в поперечных направлениях. Это происходит в том случае, если магнитная энергия превышает гравитационную энергию звезды.

### б) Стационарные решения

Как следует из уравнений (1,35)–(1,39) стационарное движение проводящей среды в магнитном поле подчиняется следующим уравнениям:

$$\operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0, \quad (4,6)$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right), \quad (4,7)$$

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad (4,8)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (4,9)$$

$$\mathbf{v}\nabla s = 0. \quad (4,10)$$

Уравнение индукции (4,6) или эквивалентное ему уравнение

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}] = \operatorname{grad}\varphi, \quad (4,11)$$

где  $\varphi$  — произвольная функция координат, показывает, что для стационарности магнитного поля необходимо, чтобы электрическое поле  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c_0}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$  (см. (3,2)) было безвихревым. При этом  $\varphi$  лишь постоянным множителем  $c_0$  отличается от потенциала электрического поля. Условие (4,11) означает, что в стационарном случае векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны градиенту потенциала, т. е. магнитные силовые линии и линии тока жидкости лежат на эквипотенциальных поверхностях электрического поля.

Уравнение индукции (4,6), очевидно, удовлетворяется в следующих частных случаях<sup>106</sup>: при движении среды вдоль силовых линий магнитного поля

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}; \quad (4,12)$$

при твердом вращении вокруг оси симметрии в цилиндрически симметричном магнитном поле

$$\mathbf{v} = [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}], \quad (4,13)$$

где угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  есть постоянный вектор; для вращения, при котором  $\mathbf{H}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  цилиндрически симметричны, причем  $\boldsymbol{\omega}$  всюду параллельно оси симметрии и выполняется условие

$$\mathbf{H}\nabla\boldsymbol{\omega} = 0. \quad (4,14)$$

Последний случай в литературе называется изоротацией<sup>62, 3</sup>. Как следует из условия (4,14), при таком вращении силовые линии магнитного поля расположены на поверхностях  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ . Так как эти поверхности вследствие цилиндрической симметрии являются поверхностями вращения, то, очевидно, при таком движении магнитное поле остается неизменным. Случаи твердого вращения и изоротации широко обсуждаются в приложениях к физике звезд, поскольку предполагается, что вращение свойственно большинству звезд, обладающих сильными магнитными полями.

Обсуждавшиеся выше бессиловые поля, удовлетворяющие условиям (4,3) или (4,4), возможны не только в статическом случае, но и при



твердом вращении в несжимаемой или баротропной среде  $[\nabla p \cdot \nabla \rho] = 0$ , как это следует из оставшихся неиспользованными уравнений движения среды (4,7) и (4,8). Вопрос о совместимости общего случая изоротации с уравнениями движения среды (4,7) и (4,8) не исследован.

В случае несжимаемой среды уравнения магнитной гидродинамики имеют важный класс стационарных решений вида

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (4,15)$$

где  $\mathbf{H}$  — произвольное магнитное поле, подчиняющееся обычному условию

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (4,16)$$

Легко видеть, что это решение удовлетворяет всем уравнениям (4,6) — (4,9); при этом давление  $p$  связано с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0, \quad p + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const}, \quad (4,17)$$

вытекающим из уравнения (4,7). При таких движениях плотность кинетической энергии среды всюду равна плотности магнитной энергии, а максвелловы натяжения магнитного поля в точности уравновешены гидродинамическими силами.

Существование решений (4,15) означает, что произвольное магнитное поле и движущаяся проводящая среда находятся в равновесии, если движение среды происходит вдоль силовых линий этого поля со скоростью, зависящей в каждой точке от напряженности магнитного поля согласно выражению (4,15). Стационарные решения этого типа могут быть как непрерывными во всем пространстве, так и обладать поверхностями разрыва величин  $p$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ . Заметим, что в силу несжимаемости скачок плотности возможен лишь на границе раздела двух различных сред. Как следует из раздела 3, в несжимаемой среде возможны лишь два типа поверхностей разрыва: магнитогидродинамическая волна и тангенциальный разрыв. Первый из них является просто частным случаем решения (4,15), в котором вместо плавного имеет место резкое изменение направления силовых линий магнитного поля. Более интересен в связи с решением (4,15) случай поверхности тангенциального разрыва. В этом случае силовые линии и линии тока жидкости параллельны поверхности разрыва. На поверхности разрыва скорость и напряженность поля могут претерпевать произвольный скачок, оставаясь связанными условием (4,15), а полное «боковое» давление  $p + \frac{H^2}{8\pi}$  в силу уравнения (4,17) непрерывно

$$p_1 + \frac{H_1^2}{8\pi} = p_2 + \frac{H_2^2}{8\pi}. \quad (4,18)$$

В частности, такое разрывное решение может реализоваться в виде струи произвольной формы, текущей в неподвижной среде, в которой магнитное поле отсутствует, и отделенной от нее поверхностью тангенциального разрыва. Такие струи могут замыкаться в кольца и петли произвольного вида. Как будет показано в следующем параграфе, разрывные решения этого типа динамически устойчивы вследствие устойчивости тангенциального разрыва относительно малых возмущений. Решение (4,15) было указано в работах<sup>141</sup> и, независимо, в работе<sup>44</sup>.

В сжимаемой среде решения (4,15) возможны при условии, что вдоль силовых линий магнитного поля плотность среды, давление и абсолютное

значение напряженности магнитного поля остаются постоянными <sup>141 \*</sup>). Это значит, что каждая силовая трубка магнитного поля имеет постоянное сечение и движение жидкости вдоль нее происходит с постоянной скоростью.

При исследованиях магнитогидродинамических движений в лабораторных условиях, где существенно сказывается ограниченная проводимость среды (практически достижимые значения числа  $R_m$  меньше или порядка единицы), необходим учет диссипации магнитного поля. В этом случае стационарный процесс может осуществляться лишь под действием постоянной внешней силы, например градиента давления.

В частности, практически важен случай стационарного течения проводящей среды по трубам в присутствии поперечного магнитного поля. Измеряя разность потенциалов индуцированного электрического поля в разных точках сечения трубы, можно судить о скорости течения и полном расходе жидкости, что, например, важно при работе с металлическим теплоносителем в ядерных реакторах <sup>134, 135</sup>.

Задача о стационарном одномерном течении проводящей жидкости между двумя параллельными плоскостями в присутствии поперечного внешнего магнитного поля была решена в работе <sup>74</sup>. В этом случае уравнения магнитной гидродинамики (1,19) — (1,22) сводятся к следующим (ось  $z$  выбрана в направлении однородного внешнего магнитного поля  $H_0$ , ось  $x$  — в направлении скорости):

$$H_0 \frac{\partial v}{\partial z} + \nu_m \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0, \quad (4,19)$$

$$\rho \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4,20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{h^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (4,21)$$

В этих уравнениях  $H_0$  есть поперечная составляющая напряженности магнитного поля, которая в силу уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  не зависит от  $z$  и совпадает с напряженностью внешнего магнитного поля, а  $h$  — составляющая поля вдоль скорости. Из уравнений (4,19) и (4,20) следует

$$\frac{d^3 v}{dz^3} - \frac{H_0^2}{4\pi \rho \nu \nu_m} \frac{dv}{dz} = 0. \quad (4,22)$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль на граничных поверхностях  $z = \pm l$ , имеет вид

$$v = v_0 \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch} \frac{Mz}{l}}{\operatorname{ch} M - 1}, \quad (4,23)$$

где  $v_0$  — скорость в центре потока, а  $M$  — характерная для данного потока безразмерная комбинация

$$M = \frac{l H_0}{\sqrt{4\pi \rho \nu \nu_m}} = \frac{l H_0}{c_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}. \quad (4,24)$$

Влияние поперечного магнитного поля сказывается в появлении дополнительного сопротивления движению жидкости и в изменении профиля скорости. Профиль скорости при различных значениях  $M$  показан на

\*) См. также <sup>44</sup> а.

рис. 6. Вместо обычного параболического профиля скоростей в поперечном магнитном поле осуществляется профиль с более плавной центральной частью и более резким спадом скорости вблизи граничных поверхностей. При больших значениях  $M$  все изменение скорости практически происходит в приповерхностном слое толщины  $l/M$ .

Стационарные течения в поперечном магнитном поле в трубах прямоугольного и круглого сечений рассматривались в работах <sup>134, 135</sup>. Экспериментальное исследование таких течений проведено в работах <sup>75, 114</sup>, в которых в качестве проводящей жидкости была использована ртуть.

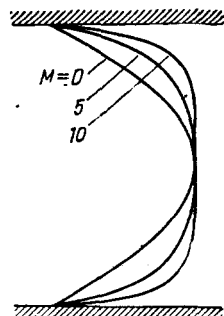


Рис. 6.

в) Магнитогидродинамические волны произвольной амплитуды

Альфвенем <sup>1, 2, 5</sup> было найдено нестационарное решение уравнений магнитной гидродинамики для несжимаемой жидкости в виде волны произвольной амплитуды, бегущей вдоль первоначально однородного магнитного поля  $H_0$  со скоростью  $V = \pm \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ . Такие волны получили название магнитогидродинамических. На их примере впервые было обнаружено своеобразие динамики проводящей среды в магнитном поле.

Полагая в уравнениях магнитной гидродинамики (1,35)–(1,38)  $\rho = \text{const}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ , где  $\mathbf{H}_0 = \{H_0, 0, 0\}$  — заданное постоянное магнитное поле, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{h} + (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{v}, \tag{4,25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} H_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}, \tag{4,26}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \tag{4,27}$$

В решении, найденном Альфвенем, скорость среды  $\mathbf{v}$  и отклонение магнитного поля  $\mathbf{h}$  от однородного связаны условием

$$\mathbf{v} = \mp \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{4,28}$$

Применяя к уравнению (26) операцию  $\text{div}$  и используя соотношения (4,27) и (4,28), получим

$$\nabla^2 \left( p + \frac{(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2}{8\pi} \right) = 0. \tag{4,29}$$

Так как всюду вне волны  $\mathbf{h} = 0$  и  $p = p_0$ , то

$$p + \frac{(\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})^2}{8\pi} = p_0 + \frac{H_0^2}{8\pi} = \text{const}. \tag{4,30}$$

Это уравнение показывает, что в магнитогидродинамической волне обычное давление  $p$  всюду уравновешено магнитным давлением  $\frac{H^2}{8\pi}$ . При этом из выражения силы Лоренца

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \equiv \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{8\pi} \nabla H^2 \tag{4,31}$$

следует, что движение происходит под действием ее некомпенсированной части  $\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}$ , которая соответствует максвелловым натяжениям вдоль силовых линий магнитного поля. Последнее обстоятельство позволяет провести аналогию между магнитогидродинамическими волнами и поперечными упругими волнами в струне<sup>5</sup>.

При условиях (4,28) и (4,30) уравнения (4,25) и (4,26) сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4,32)$$

Отсюда следует уравнение для скорости

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} = 0 \quad (4,33)$$

и аналогичное уравнение для  $\mathbf{h}$ . Уравнение (4,33) представляет собой одномерное волновое уравнение. Это значит, что произвольный начальный профиль скорости  $\mathbf{v}$  (и связанной с ней условием (4,28) напряженности магнитного поля  $\mathbf{h}$ ) распространяется вдоль постоянного начального поля  $H_0$  со скоростью

$$V = \pm \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (4,34)$$

Распределение скорости и напряженности магнитного поля в волне, разумеется, должно удовлетворять условиям (4,27). Магнитогидродинамические волны в несжимаемой жидкости и, в частности, распространяющиеся вдоль поля вихревые кольца подробно рассмотрены в<sup>145</sup>.

Как легко видеть, рассмотренная в разделе 3 ударная магнитогидродинамическая волна является частным случаем решения (4,28), (4,30), соответствующим разрывному профилю скорости.

### г) Нестационарные движения

Ввиду математической сложности уравнений магнитной гидродинамики отыскание точных нестационарных решений встречает серьезные трудности. В настоящее время подробно исследована лишь задача об одномерном движении идеальной среды<sup>85, 99</sup>. За исключением тривиального случая постоянного во всем пространстве магнитного поля, одномерное движение возможно только в поперечном магнитном поле, так как только при этом условии сила Лоренца направлена вдоль скорости. Пусть движение происходит вдоль оси  $x$ , все величины зависят только от координаты  $x$  и времени  $t$ , а магнитное поле направлено по оси  $y$ . Тогда уравнения (1,35) — (1,39) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad (4,35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4,36)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (4,37)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} = -H \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4,38)$$

Последние три уравнения сразу приводят к первому интегралу

$$H/\rho = b(s), \quad (4,39)$$

выражающему «приклеенность» силовых линий к среде: напряженность магнитного поля изменяется пропорционально плотности. Выражая с помощью (4,39)  $H$  через  $\rho$  и  $s$ , можно свести уравнения (4,35)—(4,37) к обычным гидродинамическим с новым уравнением состояния:

$$p_m(\rho, s) = p(\rho, s) + \frac{b^2(s)}{8\pi} \rho^2. \quad (4,40)$$

Решения соответствующей задачи для ряда случаев даны в <sup>85</sup>. В частности, скорость распространения малых возмущений выражается обычным образом:

$$c_m^2 = \left( \frac{\partial p_m}{\partial \rho} \right)_s = c^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \quad (4,41)$$

и совпадает с найденной нами ранее для магнитозвуковых волн, распространяющихся поперек поля (ср. уравнения (2,18), (3,17)). Таким образом, задача об одномерном движении в перпендикулярном поле сводится к обычной гидродинамической задаче с соответствующим образом измененным уравнением состояния, что мы уже видели на примере перпендикулярной ударной волны.

Для этой же задачи в работе <sup>99</sup> развит метод характеристик и дана схема численного решения.

В предположении цилиндрической симметрии задачи уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой невязкой жидкости с ограниченной проводимостью существенно упрощены в работе <sup>39</sup> с помощью разложения соленоидальных векторов на тороидальную и полоидальную части. Полученные здесь уравнения используются в работах <sup>40, 116</sup> для определения скорости диссипации магнитного поля в движущейся среде.

Ввиду сложности нахождения точных решений ряд задач магнитной гидродинамики решается в линейном приближении, путем исследования поведения малых отклонений от некоторого заданного состояния. В связи с такой постановкой задачи отметим работы <sup>131, 72, 63, 46, 123, 47, 90, 41</sup>, в которых исследуются магнитогидродинамические колебания гравитирующего жидкого шара, представляющие интерес для физики звезд.

## 5. УСИЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ГИДРОМАГНИТНОЕ ДИНАМО

Одной из важных проблем физики космических процессов является происхождение и сохранение в среднем на постоянном уровне космических магнитных полей. Принципиально эта проблема может быть решена в рамках магнитной гидродинамики. Из уравнений магнитной гидродинамики следует, что магнитное поле должно возрастать как при хаотическом турбулентном движении проводящей среды, так и при некоторых регулярных движениях. Турбулентность в магнитной гидродинамике будет рассмотрена в разделе 7. В настоящем параграфе рассматривается процесс усиления магнитного поля при регулярных движениях проводящей среды. Этот круг вопросов относится к теории так называемого гидромагнитного динамо, интенсивно разрабатываемой в настоящее время в применении к магнитным полям Земли и звезд.

Процесс усиления магнитного поля в гидромагнитном динамо, подобно обычной динамомашине, состоит в том, что движения в проводящей среде приводят к самовозбуждению и возрастанию слабого

начального магнитного поля, существование которого нетрудно допустить, исследуя более тонкие свойства динамики ионизованной среды<sup>130</sup>. При наличии самовозбуждения магнитное поле, несмотря на диссипацию, может поддерживаться на постоянном уровне за счет энергии, доставляемой гидродинамическим движением среды.

Строгое решение задачи о поведении магнитного поля, замороженного в движущейся проводящей среде, должно основываться на полной системе уравнений магнитной гидродинамики. Однако ввиду математической сложности этот путь, предполагающий нахождение общего решения магнитогидродинамических уравнений, практически безнадежен. Поэтому в настоящее время процесс усиления магнитного поля в движущейся проводящей среде рассматривается либо полуколичественно, при использовании основных качественных результатов магнитной гидродинамики\*), либо при нестрогой, чисто кинематической постановке задачи. Именно предполагается заданным некоторое более или менее разумное состояние движения среды и исследуется поведение связанного с этой средой магнитного поля. Нестрогость такой постановки задачи состоит в том, что магнитное поле оказывает обратное действие на движение среды, и поэтому без анализа полной системы магнитогидродинамических уравнений нельзя быть уверенным в том, что предполагаемое гидродинамическое движение среды может в действительности осуществляться.

Подробный обзор работ по теории гидромагнитного динамо приведен в<sup>60</sup> и<sup>58</sup> \*\*). Ниже мы лишь кратко остановимся на исходных предположениях и основных результатах этой теории.

Теория гидромагнитного динамо целиком основывается на уравнении индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (5,1)$$

в котором скорость среды предполагается заданной функцией координат (и времени). Умножая уравнение (5,1) на  $\mathbf{H}$  и используя тождество  $\text{div} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot} \mathbf{b}$ , легко получить

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H^2}{2} \right) = \mathbf{v} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}] - \nu_m (\text{rot} \mathbf{H})^2 - \text{div} \{ [\mathbf{H} [\mathbf{vH}]] - \nu_m [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}] \}. \quad (5,2)$$

Это уравнение представляет собой дифференциальную форму закона сохранения энергии для поля. Интегрируя по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{v} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}] dV - \frac{\nu_m}{4\pi} \int_V (\text{rot} \mathbf{H})^2 dV - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_S \{ [\mathbf{H} [\mathbf{vH}]] - \nu_m [\mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{H}] \} dS. \end{aligned} \quad (5,3)$$

Таким образом, изменение энергии магнитного поля в некотором объеме определяется работой, совершаемой силой Лоренца  $-\frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}]$  над жидкостью, джоулевыми потерями  $\frac{\nu_m}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{H})^2 = \mathbf{j}^2/\sigma$  и потоком электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую рассматриваемый

\*) См., например<sup>49</sup>, где дана грубая модель усиления поля в проводящем жидком шаре.

\*\*\*) См. также 23, 60а, 47а.

объем. Действительно, выражение, стоящее под знаком поверхностного интеграла, есть электромагнитная часть вектора потока энергии  $\mathbf{g}$ , определяемого выражением (1,28). Если вне рассматриваемого объема поле отсутствует, поверхностный интеграл в уравнении (5,3) исчезает.

Задача теории гидромагнитного динамо состоит в отыскании такого поля скоростей, при котором первый член правой части уравнения (5,3) больше второго или равен ему. Это обеспечивает рост или стационарность энергии магнитного поля. Как следует из уравнения (5,3), в таком поле скоростей гидродинамические силы должны совершать работу против силы Лоренца в среднем по объему жидкости. Ниже свойства такого поля скоростей будут рассмотрены подробнее.

Ограничимся пока чисто индукционными эффектами, пренебрегая диссипацией магнитного поля. Полагая в уравнении (5,1)  $v_m = 0$  и преобразуя первый член правой части, находим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5,4)$$

С помощью уравнения непрерывности (1,13) уравнение (4) легко преобразовать к следующему виду<sup>144</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}, \quad (5,5)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)$  есть производная по времени в точке, движущейся вместе со средой. Уравнение (5,5) по форме аналогично уравнению Гельмгольца для вихря в обычной гидродинамике и имеет общее решение

$$\frac{\mathbf{H}}{\rho} = \frac{\mathbf{H}_0}{\rho_0} + \left( \frac{\mathbf{H}_0}{\rho_0} \nabla_0 \right) \xi, \quad (5,6)$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\rho$  — напряженность магнитного поля и плотность среды для элемента объема, получившего за время  $t$  смещение  $\xi(\mathbf{r}_0, t)$  из начального положения  $\mathbf{r}_0$ , в котором напряженность поля и плотность были  $\mathbf{H}_0$  и  $\rho_0$ . Дифференцирование вектора  $\xi$  производится по координатам начальной точки, что обозначается индексом 0.

Уравнение (5,6) позволяет при заданном движении жидкости вычислить напряженность поля в любой момент времени, если известна начальная напряженность поля. Многие результаты, однако, можно получить непосредственно из теоремы (1,45) о сохранении магнитного потока через произвольную материальную поверхность.

Легко видеть, что существует целый ряд движений жидкости, при которых напряженность поля возрастает<sup>50</sup>. Так, например, при однородном сжатии среды сечение каждой жидкой частицы уменьшается в  $(\rho/\rho_0)^{2/3}$  раз и из сохранения магнитного потока следует, что напряженность поля растёт пропорционально  $\rho^{2/3}$ . Более интересны движения несжимаемой жидкости или движения, при которых жидкость, в среднем за длительное время, ведет себя как несжимаемая. В этом случае уравнение (5,6) сводится к следующему:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + (\mathbf{H}_0 \nabla_0) \xi. \quad (5,7)$$

Из уравнения (5,7) или непосредственно из теоремы о сохранении магнитного потока через материальную поверхность следует, что любое движение среды, при котором точки жидкости, расположенные на одной и той же силовой линии, удаляются друг от друга, приводит к росту напряженности магнитного поля, пропорциональному расстоянию между

этими точками. Действительно, удлинение жидкой частицы в  $l$  раз вдоль магнитного поля означает при неизменном объеме сокращение в  $l$  раз ее поперечного сечения. В силу неизменности потока через поперечное сечение это значит, что напряженность поля также возрастает в  $l$  раз, т. е. растет пропорционально удлинению элемента среды в направлении поля. Таким образом, к росту поля приводят такие движения, которые «растягивают» замороженные в среде силовые линии магнитного поля.

Если распределение скоростей не зависит от времени и проводник идеален ( $v_m = 0$ ), то стационарное состояние, вообще говоря, не может быть достигнуто, так как магнитное поле будет неограниченно возрастать<sup>15</sup>. Поэтому в теории стационарного гидромагнитного динамо необходим учет диссипации магнитного поля. Кроме того, для всякой теории гидромагнитного динамо важен не только рост поля, но и сглаживание его неоднородностей, в результате которого регенерируется первоначальное более или менее однородное поле. Это также делает необходимым рассмотрение диссипации магнитного поля. Если проводимость среды ограничена, то при заданном поле скоростей и начальном магнитном поле в результате диссипации магнитного поля всегда устанавливается некоторое стационарное состояние. Ряд простых примеров рассмотрен в<sup>4</sup>.

Для стационарного процесса уравнение (5,1) эквивалентно следующему:

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}] = v_m \operatorname{rot} \mathbf{H} + \nabla \varphi, \quad (5,8)$$

где произвольная функция  $\varphi$ , как легко видеть из выражения (1,8), лишь постоянным множителем  $c_0$  отличается от потенциала электростатического поля зарядов. Точки, в которых  $\mathbf{H} = 0$ , являются особыми для любого индукционного механизма усиления магнитного поля. В этих точках индукционный механизм не действует, и ток  $\mathbf{j} = \frac{c_0}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$  может быть обусловлен лишь электростатическим полем зарядов. Если последнее отсутствует (в ряде случаев этого требуют соображения пространственной симметрии), то в точках, где  $\mathbf{H} = 0$ , будет также  $\mathbf{j} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ . Последнее условие накладывает определенные ограничения на свойства стационарного поля в окрестности нулевой точки. Именно, силовые линии в окрестности такой точки не могут быть замкнутыми, так как в противном случае интеграл  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{H} ds$ , взятый вдоль силовой линии в окрестности нулевой точки, был бы отличен от нуля, что невозможно при  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ .

Из условия  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  в точках, где  $\mathbf{H} = 0$ , сразу следует невозможность стационарного гидромагнитного динамо в двумерном магнитном поле, исчезающем на бесконечности. Под двумерным магнитным полем в общем случае понимается поле, силовые линии которого лежат на произвольных поверхностях, разбивающих пространство на односвязные области, и, следовательно, в силу условия  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  либо замкнуты, либо заканчиваются на бесконечности. Если магнитное поле исчезает на бесконечности, то все его силовые линии замкнуты и, следовательно, существует по меньшей мере одна точка, в которой  $\mathbf{H} = 0$  и которая охватывается силовыми линиями. Как мы уже видели, в стационарной задаче при отсутствии токов, вызванных электростатическим полем зарядов, магнитное поле должно исчезать и в окрестности такой точки. Продолжая аналогичные рассуждения, мы приходим к выводу, что магнитное поле должно отсутствовать во всем пространстве. Таким образом, в двумерном магнитном поле при отсутствии токов, обусловленных электростатическим полем зарядов, стационарное динамо невозможно. Диссипация магнитного



поля в точках, в которых  $\mathbf{H} = 0$ , не компенсируется индукционным механизмом, так как последний в этих точках не действует, и, следовательно, магнитное поле затухает, стягиваясь в эти точки.

Эта теорема была впервые установлена Каулингом<sup>45</sup> для цилиндрически симметричного случая при условии, что векторы магнитного поля и скорости расположены в плоскостях, проходящих через ось симметрии. Отсутствие электростатического поля в этом случае следует непосредственно из соображений симметрии. В обзоре<sup>58</sup> высказывается утверждение, что принятое Каулингом ограничение, требующее чтобы скорость среды лежала в плоскостях, проходящих через ось симметрии, не является существенным. Это утверждение справедливо только в случае отсутствия пространственных зарядов, индуцированных движением жидкости, которые автор не рассматривает. Однако отсутствие таких зарядов при произвольном магнитогидродинамическом движении не очевидно. Напротив, уравнение (1.10) показывает, что в общем случае такие заряды существуют.

С помощью изложенного выше обобщения теоремы Каулинга нетрудно убедиться, что стационарное динамо невозможно также при произвольном плоском двумерном движении. Для этого достаточно показать, что при таком движении не может поддерживаться электростатическое поле и, следовательно, магнитное поле затухает в точках, где  $\mathbf{H} = 0$ . Пусть векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости  $(x, y)$  и не зависят от  $z$ . В этом случае, согласно (1.9),

$$\rho_e = -\frac{\epsilon_0}{4\pi c_0} \operatorname{div} [\mathbf{vH}] = 0, \quad (5.9)$$

так как  $[\mathbf{vH}]$  имеет составляющую лишь в направлении оси  $z$  и не зависит от  $z$ . Это значит, что заряды, а следовательно, и электростатическое поле отсутствуют во всем пространстве. Таким образом, двумерное гидромагнитное динамо оказывается невозможным.

Приведенные результаты показывают, что стационарный динамо-процесс невозможен при высокой пространственной симметрии магнитного поля и поля скоростей, и делают весьма правдоподобным утверждение, что гидромагнитное динамо должно быть существенно трехмерным<sup>58</sup>. Подчеркнем, однако, что это утверждение строго не доказано, так как не доказано, что в рассмотренном выше общем случае двумерного магнитного поля ток в нулевых точках не может поддерживаться электростатическим полем зарядов, возникающих при магнитогидродинамическом движении.

Что касается трехмерного динамо, то в его возможности едва ли можно сомневаться хотя бы из аналогии с обычными техническими генераторами из твердых проводников. Заметим, что топологически возможны ограниченные трехмерные магнитные поля без нулевых точек, поэтому трудности, встречающиеся в связи с наличием таких точек в двумерных задачах, здесь отсутствуют.

Имеющиеся в настоящее время работы по теории гидромагнитного динамо связаны, в основном, с теорией земного и звездного магнетизма. Укажем прежде всего работы<sup>53, 54, 21</sup> и особенно<sup>22</sup>, в которых стационарное уравнение индукции (5.8) исследуется при заданном поле скоростей, более или менее соответствующем предполагаемым движениям внутри звезд. Так как во всех этих работах рассматривается ограниченная масса жидкости, имеющая форму шара, то используется разложение векторных полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  по векторным ортогональным сферическим гармоникам. В согласии с вышеизложенным, анализ показывает, что при высокой симметрии векторных полей стационарный процесс невозможен. Поэтому

в рассмотрение включаются сферические гармоники высших порядков, нарушающие симметрию поля скоростей. В работе<sup>22</sup> полученная система уравнений численно решается для нескольких первых членов разложения поля. К сожалению, существование стационарного гидромагнитного динамо для принятого поля скоростей остается недоказанным, поскольку решение получено формально в виде ряда, сходимость которого не выяснена.

Иной подход к проблеме поддержания магнитного поля звезд в среднем на стационарном уровне принят в работе<sup>118</sup> и дополняющей ее работе<sup>119</sup>. В этих работах используются полуколичественные соображения, основанные на рассмотрении конкретных условий в металлическом ядре Земли и в звездах. Как было показано в<sup>20 21</sup>, неоднородное вращение звезд, которое само по себе может быть объяснено конвективными движениями, выравнивающими угловой момент во всех точках вращающейся звезды, должно приводить к образованию из начального дипольного поля тороидального поля (силовые линии которого охватывают ось вращения звезды). Этот процесс возможен только в одном направлении: обратный процесс образования дипольного поля из тороидального при цилиндрически симметричном распределении скорости не происходит. Для регенерации дипольного поля должна существовать некоторая асимметрия движения. Наиболее естественной причиной такой асимметрии следует считать радиальные конвективные потоки. В результате действия силы Кориолиса эти потоки имеют характер циклонов, которые деформируют силовые линии тороидального поля и образуют из них петли, дающие вклад в начальное дипольное поле. Наиболее полно такая схема регенерации дипольного поля в неоднородно вращающемся проводящем жидком шаре, содержащем конвективную зону, рассмотрена Паркером<sup>118, 119a</sup>.

## 6. ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ

### а) Гравитационная устойчивость

Вопросы устойчивости тех или иных конфигураций тяготеющей среды весьма важны для астрономии и астрофизики. Их рассмотрение необходимо в теориях звезд, туманностей, в теории строения Галактики, в которых тяготение и, по-видимому, магнитное поле играют первостепенную роль. Ниже кратко излагаются основные из результатов, полученных в этой области.

Известно, что однородное распределение неограниченного в пространстве тяготеющего газа неустойчиво относительно возмущений с длиной волны

$$\lambda^2 > \lambda_c^2 = \frac{\pi c^2}{G\rho}, \quad (6,1)$$

где  $c$  — скорость звука,  $G$  — гравитационная постоянная. При выполнении этого условия, называемого обычно критерием Джинса, однородное распределение газа под действием тяготения распадается на сгустки размером порядка  $\lambda_c$ . Критерий Джинса остается неизменным также при наличии однородного магнитного поля<sup>28</sup>. Этот результат очевиден, так как магнитное поле не оказывает влияния на перемещения среды вдоль поля. В работе<sup>31</sup> показано, что критерий Джинса сохраняется также при одновременном действии магнитного поля и сил Кориолиса, возникающих в результате однородного вращения среды.

Устойчивость образования проводящей средой бесконечного цилиндра в присутствии параллельного оси цилиндра магнитного поля рассматривалась в работе<sup>28</sup>. Эта задача является идеализацией условий в спиральных рукавах Галактики и позволяет оценить верхнюю грани-

цу напряженности галактического магнитного поля. С помощью полученного в этой работе обобщения вириальной теоремы, включающего учет магнитного поля, найдено необходимое условие устойчивости

$$\sqrt{\bar{H}^2} < 2\pi G\rho R, \quad (6,2)$$

где  $\bar{H}^2$  — средний квадрат напряженности магнитного поля в цилиндре,  $R$  — радиус цилиндра, а также указан метод определения периода малых адиабатических радиальных пульсаций цилиндра. Периоды таких пульсаций вычислены в работе <sup>108</sup>. Условие (6,2) приводит к значению  $6 \cdot 10^{-6}$  эрстед для напряженности магнитного поля в спиральных рукавах.

Устойчивость бесконечного однородного цилиндра из несжимаемой жидкости относительно возмущений, при которых радиус периодически меняется по закону

$$r = R + a \cos kz, \quad (6,3)$$

где  $z$  — координата по оси цилиндра,  $a$  — малая амплитуда возмущения ( $a \ll R$ ) и  $k$  — волновое число возмущения, исследована в <sup>28\*</sup>). Показано, что критическая длина волны возмущения, при которой цилиндрическое распределение вещества становится неустойчивым, и длина волны  $\lambda_m$ , для которой неустойчивость максимальна (время развития неустойчивости — наименьшее), монотонно растут с ростом напряженности магнитного поля. Применяя полученные результаты к спиральным рукавам Галактики, авторы нашли, что для того, чтобы время развития неустойчивости составляло по меньшей мере  $5 \cdot 10^9$  лет (возраст Галактики), магнитное поле должно быть порядка  $7 \cdot 10^{-6}$  эрстед. Это значение согласуется с другими оценками межзвездного магнитного поля.

Для ограниченной массы газа, находящегося в магнитном поле, в работе <sup>28</sup> получено следующее обобщение вириальной теоремы:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt^2} = 2T + 3(\gamma - 1)U + \mathfrak{M} + \Omega, \quad (6,4)$$

где  $I$  — момент инерции системы;  $T$ ,  $U$  и  $\Omega$  — кинетическая, тепловая и гравитационная энергии газа;  $\gamma$  — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме. Соотношение (6,4) отличается от обычной вириальной теоремы наличием члена  $\mathfrak{M} = \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 dV$ , выражающего магнитную энергию рассматриваемой системы. Для газа, находящегося в равновесии, из уравнения (6,4) следует:

$$3(\gamma - 1)U + \mathfrak{M} + \Omega = 0. \quad (6,5)$$

С помощью этого соотношения полная энергия системы  $\varepsilon = U + \mathfrak{M} + \Omega$  может быть выражена следующим образом:

$$\varepsilon = -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} (|\Omega| - \mathfrak{M}). \quad (6,6)$$

Поэтому необходимое условие динамической устойчивости системы, находящейся в равновесии,  $\varepsilon < 0$ , эквивалентно при  $\gamma > 4/3$  условию

$$|\Omega| - \mathfrak{M} > 0. \quad (6,7)$$

Это условие имеет простой смысл: при достаточно сильном магнитном

\*) Статья переведена в сборнике <sup>109</sup>.

поле тяготение не может уравновесить магнитное расталкивание частей системы. Условие (6,7) позволяет оценить верхний предел средней напряженности магнитного поля звезд. Подставляя в (6,7) в качестве  $\Omega$  гравитационную энергию однородного шара, найдем

$$\sqrt{\frac{H^2}{R^2}} < 2 \cdot 10^8 \frac{M}{R^2}, \quad (6,8)$$

где масса звезды  $M$  и ее радиус  $R$  выражены в солнечных единицах. Если магнитное поле внутри звезды однородно, то по мере приближения к пределу, устанавливаемому условием (6,8), форма звезды все более отличается от сферической: равновесной конфигурацией служит, как уже указывалось выше, сжатый в направлении поля сфероид<sup>28, 73, 126</sup>. При невыполнении условия (6,8) звезда под действием бокового давления магнитного поля принимает форму плоского диска и распадается. В этом отношении действие магнитного поля аналогично действию вращения<sup>65</sup>.

С помощью вириальной теоремы (6,4) в<sup>32</sup> получено выражение для частоты  $\sigma$  малых адиабатических радиальных пульсаций газовой звезды при наличии внутреннего магнитного поля

$$\sigma^2 = \frac{(3\gamma - 4)(|\Omega| - \mathfrak{M})}{I}. \quad (6,9)$$

Очевидно, частота пульсаций может быть сколь угодно малой при  $\mathfrak{M} \rightarrow |\Omega|$ , т. е. при приближении напряженности магнитного поля к пределу, за которым звезда становится неустойчивой. Используя этот результат, авторы интерпретируют медленные вариации магнитного поля магнитно-переменных звезд как адиабатические пульсации звезд, магнитное поле которых близко к предельному. Наблюдаемый период таких вариаций равен нескольким суткам, что по крайней мере на порядок превышает период адиабатических пульсаций, вычисленный без учета магнитного поля. В то же время известно, что для некоторых магнитно-переменных звезд напряженность магнитного поля на поверхности звезды всего на порядок меньше предельной, определяемой условием (6,8). Поэтому средняя напряженность поля может быть весьма близкой к предельной, а период адиабатических пульсаций — значительно больше вычисленного без учета магнитного поля<sup>27</sup>.

### б) Термоконвекция в магнитном поле

К проблеме устойчивости статических состояний проводящей среды в магнитном поле относится также задача о конвективной неустойчивости слоя жидкости, нагреваемого снизу. В обычной гидродинамике термоконвекция хорошо изучена как теоретически, так и экспериментально. Основные относящиеся сюда результаты состоят в следующем. Устойчивость слоя жидкости по отношению к термоконвекции характеризуется безразмерным числом Рэлея

$$\text{Re} = \frac{g\alpha|\beta|}{\chi\nu} d^4, \quad (6,10)$$

в котором  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения,  $\beta$  — градиент температуры (направленный против силы тяжести),  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\nu$  — кинематическая вязкость и  $d$  — глубина слоя жидкости. Термоконвекция наступает тогда, когда безразмерный параметр  $\text{Re}$  достигает некоторого определенного (зависящего от граничных условий) значения  $\text{Re}_{\text{кр}}$ , равного по порядку

величины  $10^3$ . При наступлении стационарной термоконвекции горизонтальный слой жидкости разбивается на отдельные ячейки, в каждой из которых движение протекает одинаковым образом (ячейки Бенарда).

Исследования аналогичной задачи в магнитной гидродинамике<sup>143, 26, 33</sup> свидетельствуют о том, что магнитное поле существенно затрудняет возникновение термоконвекции. Подробное рассмотрение термоконвекции в вязкой жидкости с ограниченной проводимостью в присутствии магнитного поля<sup>26, 33</sup> показывает, что критическое число Рэлея, при котором возникает термоконвекция, является монотонно возрастающей функцией безразмерного параметра

$$Q = \frac{H_1^2}{4\pi\rho} \frac{d^3}{\nu m}, \quad (6,11)$$

где  $H_1$  — вертикальная составляющая напряженности магнитного поля. Отсюда следует, что чем выше проводимость среды и чем больше вертикальная составляющая магнитного поля, тем более затруднено возникновение термоконвекции. Зависимость между  $Re_{кр}$  и  $Q$

определена в работе<sup>26</sup> для трех типов граничных условий: а) обе граничные поверхности слоя жидкости свободны, б) слой ограничен двумя твердыми поверхностями, в) с одной стороны слой жидкости ограничен твердой поверхностью, с другой — свободной. Соответствующие кривые приведены на рис. 7. При больших  $Q$  зависимость  $Re_{кр}$  от  $Q$  становится линейной.

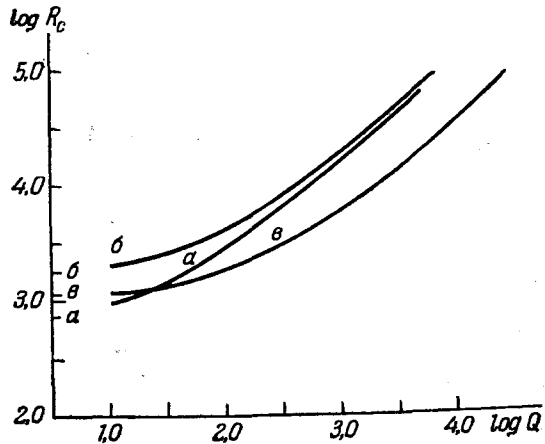


Рис. 7.

Если магнитное поле направлено по вертикали, то термоконвекция имеет обычную ячеистую структуру. Если же имеется горизонтальная составляющая магнитного поля, то на границе устойчивости термоконвекция возникает в форме «рулонов» с осями вдоль горизонтальной составляющей поля.

В обоих случаях  $Q$ , а следовательно и критическое число Рэлея, зависят лишь от вертикальной составляющей магнитного поля.

Экспериментальное изучение термоконвекции в ртути, помещенной в магнитное поле с напряженностью около 1500 эрстед<sup>115</sup>, показало хорошее согласие с теорией Чандрасекара<sup>26</sup>.

Теоретическое рассмотрение приводит к выводу, что конвективная неустойчивость может, вообще говоря, возникнуть как в форме стационарной конвекции, так и в виде колебаний нарастающей амплитуды. Последний случай называют также «сверхустойчивостью» (overstability). Этот термин принадлежит Эддингтону и имеет следующий смысл. При отклонении системы от устойчивого состояния возникают силы, возвращающие систему в исходное состояние. При «сверхустойчивости» эти силы чрезмерно велики: они не только возвращают систему в исходное состояние, но и вызывают отклонение противоположного знака с амплитудой большей первоначальной, т. е. приводят к возникновению колебаний нарастающей амплитуды. Указанные две возможности следуют просто из того обстоятельства, что при предполагаемой зависимости

возмущения от времени в виде  $e^{-i\omega t}$  переход от устойчивых состояний, которым соответствует  $\text{Im}(\omega) < 0$  (возмущение затухает со временем), к неустойчивым, для которых  $\text{Im}(\omega) > 0$  (возмущение нарастает со временем), возможен как через значение  $\omega = 0$ , так и, в общем случае, через значение  $\omega \neq 0$ , но  $\text{Im}(\omega) = 0$ . Первому случаю соответствует стационарное возмущение, второму — колебательное движение на границе устойчивости.

Как известно, термоконвекция в отсутствие магнитного поля возникает, при достижении  $\text{Re}_{\text{кр}}$ , в виде стационарной ячеистой конвекции. Возникновение неустойчивости в виде колебаний нарастающей амплитуды или, иначе говоря, сверхустойчивости оказывается невозможным. (Впрочем, как показано Чандрасекаром<sup>30, 35</sup> и экспериментально подтверждено в работе<sup>66</sup>, неустойчивость этого вида возможна во вращающейся жидкости.) В магнитной гидродинамике положение иное<sup>143, 26\*</sup>). При  $\nu_m > \kappa$  неустойчивость может возникнуть лишь в форме стационарной конвекции. Это условие выполняется с большим запасом в лабораторных экспериментах по магнитной гидродинамике. Например, для ртути  $\nu_m = 7,5 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$ ,  $\kappa = 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{сек}$ . Однако в астрофизике, как правило,  $\kappa \gg \nu_m$ . При этом условии неустойчивость возникает в виде стационарной конвекции при достижении  $\text{Re}_{\text{кр}}$ , если  $Q \leq \frac{27\pi\nu_m}{\nu}$ , или в форме колебаний нарастающей амплитуды при  $R \geq \frac{27\pi^4\nu_m}{4\nu}$ , если  $Q > \frac{27\pi\nu_m}{\nu}$ . В последнем случае частота колебаний на границе устойчивости равна  $\omega = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{H^2}{4\pi\rho}}$ .

В связи с проблемой термоконвекции укажем работы<sup>34, 38</sup>, в которых теоретически изучено влияние на конвективную неустойчивость одновременно действующих магнитного поля и вращения. Каждый из этих факторов сам по себе затрудняет наступление термоконвекции; их одновременное действие приводит к сложной зависимости  $\text{Re}_{\text{кр}}$  от  $Q$  и характеризующего вращение безразмерного числа Тэйлора

$$T = \frac{4\Omega^2}{\nu^2} d^4, \quad (6,12)$$

где  $\Omega$  — вертикальная составляющая угловой скорости среды.

Вопрос о возникновении термоконвекции весьма важен для приложений к физике атмосферы и астрофизике. В связи с этим следует отметить, что для ионосферы и верхних слоев атмосферы Солнца изложенные выше результаты, полученные в предположении изотропии проводимости и теплопроводности, оказываются непригодными<sup>67</sup>. Здесь становится существенной зависимость проводимости и теплопроводности от величины и направления магнитного поля. Соответствующее уточнение теории содержится в работе<sup>68</sup>.

#### в) Устойчивость простейших течений в магнитном поле

Своеобразие магнитной гидродинамики обнаруживается также при исследовании устойчивости течений проводящей среды в магнитном поле. Многие движения, которые при отсутствии магнитного поля неустойчивы и приводят к возникновению турбулентности, оказываются устой-

\* См. также<sup>142</sup>.

чивыми в достаточно сильном магнитном поле. Результаты имеющихся в настоящее время исследований позволяют сделать следующий общий вывод о влиянии магнитного поля на устойчивость гидродинамических движений проводящей среды: магнитное поле может лишь увеличить устойчивость данного распределения скоростей по сравнению с тем же распределением скоростей при отсутствии магнитного поля. Этот вывод становится физически очевидным, если учесть, что всякая турбулизация потока ввиду «приклеенности» магнитного поля должна сопровождаться (см. раздел 5) ростом магнитной энергии, что затрудняет такую турбулизацию. Отметим, что возможны случаи, когда магнитное поле существенно изменяет первоначальное распределение скоростей в потоке, в результате чего движение становится неустойчивым, как это, например, наблюдалось в опытах с ртутью в работах<sup>91, 92, 96</sup>. Однако такое измененное распределение скоростей, в согласии с высказанным выше утверждением, неустойчиво и в отсутствие магнитного поля.

Простейшей задачей, позволяющей получить строгий и достаточно общий результат, оказывается задача об устойчивости тангенциального разрыва<sup>140</sup>. Рассмотрим эту задачу для несжимаемой жидкости. Пусть поверхность тангенциального разрыва, совпадающая с плоскостью  $x = 0$ , подвергается малому возмущению, в результате которого  $x = \text{Re}(\xi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})$ , где  $\mathbf{k}_0 = \{0, k_y, k_z\}$  — вещественный вектор, а  $\xi$  — амплитуда возмущения, малая по сравнению с длиной волны возмущения  $\frac{2\pi}{k_0}$ . Произвольное воз-

мущение поверхности разрыва, очевидно, может быть представлено как суперпозиция возмущений этого вида. Так как возмущение предполагается малым, то в каждом из полупространств  $x > 0$  и  $x < 0$ , разделенных поверхностью разрыва, можно воспользоваться линеаризованной системой магнитогидродинамических уравнений (2,3). Ищутся решения этой системы, зависимость которых от координат и времени имеет вид

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{6,13}$$

где  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Решения этого вида должны удовлетворять уравнениям (2,6), которые для несжимаемой жидкости сводятся к следующим уравнениям:

$$(\omega - \mathbf{k}_0\mathbf{v}) \mathbf{u}' + (\mathbf{k}_0\mathbf{u}) \mathbf{v}' = 0, \tag{6,14}$$

$$(\omega - \mathbf{k}_0\mathbf{v}) \mathbf{v}' + (\mathbf{k}_0\mathbf{u}) \mathbf{u}' - \frac{1}{\rho} (\rho' + \rho \mathbf{u}\mathbf{u}') \mathbf{k} = 0, \tag{6,15}$$

$$(\mathbf{k}\mathbf{u}') = 0, \quad (\mathbf{k}\mathbf{v}') = 0. \tag{6,16}$$

Здесь учтено, что в тангенциальном разрыве  $v_x = 0$  и  $u_x = 0$ , следовательно  $(\mathbf{k}\mathbf{v}) = (\mathbf{k}_0\mathbf{v})$  и  $(\mathbf{k}\mathbf{u}) = (\mathbf{k}_0\mathbf{u})$ . Умножив уравнение (6,15) скалярно на  $\mathbf{k}$ , имеем

$$k^2 (\rho' + \rho \mathbf{u}\mathbf{u}') = 0. \tag{6,17}$$

Отсюда следует, что либо  $k^2 = 0$ , либо  $\rho' + \rho \mathbf{u}\mathbf{u}' = 0$ . В последнем случае из уравнений (6,14) и (6,15) следует

$$(\omega - \mathbf{k}_0\mathbf{v})^2 - (\mathbf{k}_0\mathbf{u})^2 = 0. \tag{6,18}$$

Так как это уравнение определяет вещественные значения  $\omega$ , а неустойчивость может быть связана только с комплексностью  $\omega$ , то будем считать

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_0^2 = 0, \quad k_x = \pm ik_0. \tag{6,19}$$

Знак  $k_x$  выбирается в соответствии с требованием ограниченности возмущения вдали от разрыва: минус в области  $x < 0$  и плюс в области  $x > 0$ . Величины, относящиеся к этим областям, в дальнейшем обозначаются индексами 1 и 2 соответственно.

На поверхности разрыва решения уравнений (6,14) — (6,16), взятые для обеих областей, сшиваются с помощью следующих граничных уравнений при  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} u'_{1x} - i(k_0 u_1) \xi &= 0, \\ u'_{2x} - i(k_0 u_2) \xi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6,20)$$

$$p'_1 + \rho_1 u_1 u'_1 = p_2 + \rho_2 u_2 u'_2.$$

Эти условия выражают отсутствие нормальных составляющих напряженности магнитного поля и непрерывность «полного» давления на возмущенной поверхности тангенциального разрыва. Исключая из уравнений (6,14)—(6,16), (6,19) и (6,20) величины  $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$ ,  $k_x$  и  $\xi$ , получим следующее уравнение для  $\omega$ :

$$\rho_1 (\omega - k_0 v_1)^2 + \rho_2 (\omega - k_0 v_2)^2 - \rho_1 (k_0 u_1)^2 - \rho_2 (k_0 u_2)^2 = 0. \quad (6,21)$$

Квадратное относительно  $\omega$  уравнение (6,21) имеет два комплексно сопряженных корня при условии

$$\rho_1 (k_0 u_1)^2 + \rho_2 (k_0 u_2)^2 - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \{k_0 (v_2 - v_1)\}^2 < 0 \quad (6,22)$$

и два вещественных корня в противном случае. Как видно из выражения (6,13), наличие комплексного корня  $\omega$  с положительной мнимой частью означает неограниченное возрастание возмущения со временем и, следовательно, неустойчивость тангенциального разрыва. Таким образом, учитывая, что  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ , обнаруживаем, что условие устойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой среде имеет вид

$$(k_0 H_1)^2 + (k_0 H_2)^2 - \frac{4\pi\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (k_0 v_0)^2 \geq 0, \quad (6,23)$$

где  $H_1$ ,  $\rho_1$  и  $H_2$ ,  $\rho_2$  — напряженность магнитного поля и плотность среды с разных сторон от поверхности разрыва,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  — скачок скорости на разрыве,  $k_0$  — волновой вектор возмущения, характеризующий направление «ряби» на поверхности разрыва. Как следует из условия (6,23), магнитное поле дает положительный вклад в левую часть неравенства и, следовательно, оказывает стабилизирующее действие на течение. Условие (6,23) не зависит от абсолютной величины волнового вектора  $k_0$ , (т. е. от длины волны возмущения, но существенно зависит от его направления). Например, разрыв всегда устойчив по отношению к возмущениям, для которых  $k_0 v_0 = 0$ , т. е. «рябь» на поверхности разрыва расположена вдоль относительной скорости  $\mathbf{v}_0$ . Из условия (6,23) следует также, что стабилизирующее действие оказывают лишь составляющие магнитного поля по направлению вектора  $k_0$ . Этого и следовало ожидать, так как только эти составляющие подвергаются «растяжению» при деформации поверхности разрыва.

В общем случае непараллельных  $H_1$ ,  $H_2$  и  $\mathbf{v}_0$  наиболее «опасное» возмущение, а следовательно, и условие устойчивости тангенциального разрыва относительно произвольных малых возмущений определяются



минимумом левой части выражения (6,23) по всем возможным значениям вектора  $k_0$ . В системе координат, ось  $y$  которой направлена вдоль скачка скорости  $v_0$ , это условие имеет вид

$$\frac{(H_{1y} H_{2z} - H_{2y} H_{1z})^2}{H_{1z}^2 + H_{2z}^2} - \frac{4\pi\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} v_0^2 \geq 0. \quad (6,24)$$

Если же магнитное поле с обеих сторон разрыва направлено вдоль скачка скорости, то условие (6,23) вообще не зависит от  $k_0$  и, следовательно, разрыв устойчив относительно произвольных малых возмущений, если

$$H_1^2 + H_2^2 - \frac{4\pi\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} v_0^2 \geq 0. \quad (6,25)$$

Последний случай наиболее интересен, так как движение среды вдоль магнитного поля, как мы уже видели, может быть стационарным и при неоднородных магнитном поле и поле скоростей. В частности, если плотность среды и напряженность магнитного поля непрерывны, т. е. разрыв претерпевает лишь тангенциальная составляющая скорости, то условие (6,25) сводится к следующему:

$$\frac{H^2}{8\pi} \geq \frac{1}{4} \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (6,26)$$

Это значит, что разрыв становится устойчивым относительно малых возмущений, если плотность магнитной энергии достигает  $1/4$  плотности кинетической энергии относительного движения среды в разрыве.

Как показано в <sup>141</sup>, условие устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой среде при наличии продольного магнитного поля совпадает с условием (6,26) всюду, кроме области околосвуковых скоростей, где оно лишь незначительно отличается от последнего.

В разделе 4 были рассмотрены точные стационарные решения уравнений магнитной гидродинамики, в которых скорость и напряженность магнитного поля связаны соотношением

$$v = \pm \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (6,27)$$

Как отмечалось, такие решения могут реализоваться, в частности, в виде струй, петель или аналогичных, ограниченных поверхностью тангенциального разрыва, течений. Покажем теперь, что такие течения устойчивы вследствие устойчивости поверхности тангенциального разрыва. Используя (6,27) в общем условии устойчивости (6,23), получим следующее условие устойчивости разрывных стационарных решений, подчиняющихся соотношению (6,27):

$$\{ \sqrt{\rho_1} (k_0 H_1) \pm \sqrt{\rho_2} (k_0 H_2) \}^2 \geq 0. \quad (6,28)$$

Это условие, очевидно, всегда выполнено. Устойчивость непрерывных решений вида (6,27) рассматривалась в работе <sup>44</sup>.

Исследование более сложных, чем тангенциальный разрыв, течений весьма громоздко и, вообще говоря, может быть выполнено лишь численными методами. Однако некоторые качественные следствия могут быть получены уже из результатов исследования устойчивости тангенциального разрыва. Так, например, очевидно, что продольное магнитное поле, обеспечивающее устойчивость тангенциального разрыва, будет стабилизировать и любой другой более плавный профиль скоростей с тем же максимальным изменением скорости. Поэтому любое плоскопараллельное

течение вдоль постоянного магнитного поля будет устойчивым, если выполнено условие (6,26), в котором в качестве  $u_0$  следует взять максимальную разность скоростей в потоке.

Приведенные выше результаты относятся к идеальной среде, вязкостью и электрическим сопротивлением которой можно пренебречь. Теоретические и экспериментальные исследования устойчивости плоскопараллельных течений реальной жидкости подтверждают общий вывод о стабилизирующем действии магнитного поля.

В работе <sup>112</sup> показано, что, как и в обычной гидродинамике, для плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости в продольном магнитном поле наиболее «опасными» являются продольные возмущения, т. е. возмущения с волновым вектором, направленным вдоль скорости жидкости. Такие возмущения приводят к неустойчивости при наименьших числах Рейнольдса.

Устойчивость плоскопараллельного течения между двумя параллельными плоскостями при наличии продольного магнитного поля рассмотрена в работе <sup>138</sup> в предположении, что магнитное число Рейнольдса  $R_m \ll 1$ . В этой работе показано, что критическое число Рейнольдса  $R_{кр}$ , при котором течение становится неустойчивым, монотонно растет с ростом напряженности магнитного поля или, более строго, с ростом безразмерного параметра

$$q = \frac{H^2 d \sigma'}{\rho U_0}, \quad (6,29)$$

где  $\sigma' = \frac{\sigma}{c_0^2}$  — проводимость в электромагнитных единицах,  $d$  — полуширина потока,  $U_0$  — скорость в центре потока. Легко убедиться, что безразмерный параметр  $q$  выражается через число Рейнольдса  $R$  и введенные выше числа  $Q$  (уравнение (6,11)) или  $M$  (уравнение (4,24)):

$$q = \frac{Q}{R} = \frac{M^2}{R}. \quad (6,30)$$

Для сравнения с результатами других исследований, а также с целью единообразия удобно вместо чисел  $q$  и  $Q$  всюду пользоваться безразмерным параметром

$$M = Hd \sqrt{\frac{\sigma}{\rho c_0^2}}. \quad (6,31)$$

Зависимость  $R_{кр}$  от  $M$  для рассмотренной в <sup>138</sup> задачи об устойчивости течения между параллельными плоскостями при наличии продольного магнитного поля изображена пунктирной линией на рис. 8.

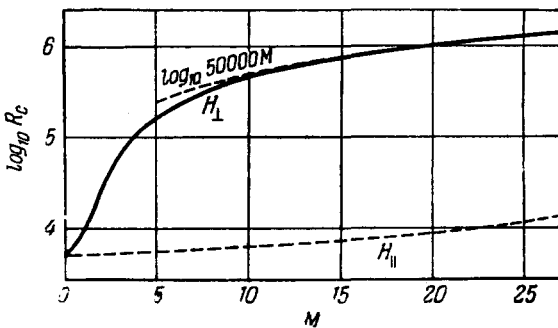


Рис. 8.

Исследование устойчивости аналогичного течения в поперечном (перпендикулярном граничным плоскостям) поле выполнено в работе <sup>98</sup> также в предположении  $R_m \ll 1$ . В этом случае основной эффект магнитного поля состоит в изменении профиля скорости — по сравнению с этим эффектом непосредственным влиянием магнитного поля на устойчивость течения пренебрегается. Как уже было отмечено в разделе 4, в поперечном поле вместо параболического профиля скорости осуществ-

вляется профиль с почти однородной скоростью в центре потока и узким переходным слоем вблизи стенок. Так как переходный слой имеет толщину порядка  $d/M$ , то с ростом напряженности магнитного поля эффективное число Рейнольдса для рассматриваемого течения быстро падает. Поэтому естественно ожидать, что устойчивость такого течения возрастает с увеличением напряженности поля<sup>104</sup>. Вычисления, выполненные в работе<sup>98</sup>, подтверждают этот вывод. В этом случае стабилизирующее действие магнитного поля оказывается еще более сильным, чем в продольном поле. Зависимость  $R_{кр}$  от  $M$  изображена на рис. 8 сплошной линией.

Экспериментальные исследования течений ртути в прямоугольных каналах и трубах в поперечном магнитном поле, выполненные в работах<sup>75, 113, 114</sup>, свидетельствуют о том, что достаточно сильное магнитное поле подавляет турбулентность. Так, в работе<sup>114</sup> было экспериментально установлено, что при  $M > R/900$  течение становится ламинарным. В этих экспериментах удавалось получать ламинарное течение вплоть до значений числа Рейнольдса  $R = 10^5$ . Таким образом, стабилизирующее действие магнитного поля подтверждается также прямыми экспериментами.

Магнитное поле стабилизирует также течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами. Эта задача была рассмотрена в работе<sup>29</sup> для случая, когда магнитное поле направлено вдоль оси цилиндров и цилиндры вращаются в одинаковом направлении. В предположении, что разность радиусов цилиндров мала по сравнению с самими радиусами, получена зависимость между критическим числом Тэйлора, при котором движение становится неустойчивым, и определенным выше безразмерным параметром  $Q = M^2$ . Критическое число Тэйлора быстро растет с ростом параметра  $Q$ . Стабилизирующее действие магнитного поля, согласно результатам этой работы, настолько велико, что в поле с напряженностью около  $10^4$  эрстед может быть обнаружено уже в электролитах.

В заключение отметим, что влияние магнитного поля на устойчивость всех рассмотренных течений несжимаемой вязкой жидкости, обладающей конечной проводимостью, характеризуется одним и тем же безразмерным параметром  $M$ . Этот параметр может быть записан в виде

$$M = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \sqrt{\frac{L^2}{\nu\nu_m}}, \quad (6,32)$$

где  $L$  — характерный размер системы, и имеет смысл отношения магнитогидродинамической скорости  $H/\sqrt{4\pi\rho}$  к среднему квадратичному из скоростей  $\nu_m/L$  и  $\nu/L$ , которые характеризуют выравнивание неоднородностей магнитного поля и поля скоростей в результате джоулевых потерь и вязкой диссипации. Безразмерный параметр  $M$  служит численной характеристикой влияния магнитного поля на динамическое поведение проводящей жидкости. Условие  $M \gg 1$  является условием сильного взаимодействия магнитного поля и гидродинамического движения, как это следует из выражения (4,24) для профиля скорости в поперечном магнитном поле, а также из результатов исследования устойчивости течений, приведенных в настоящем параграфе. Поэтому в тех случаях, когда нельзя пренебречь вязкостью среды, для характеристики относительной роли магнитогидродинамических эффектов следует пользоваться параметром  $M$  вместо предложенного в работе<sup>104</sup> безразмерного параметра  $HL/\nu_m\sqrt{4\pi\rho}$ . Последний характеризует влияние магнитного поля на те процессы, для которых вязкость несущественна.

## 7. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

В разделе 5 было показано, что всякое движение проводящей среды, при котором жидкие точки, расположенные на одной и той же силовой линии, удаляются друг от друга, приводит к росту напряженности магнитного поля (если, конечно, диссипация не погашает поле раньше, чем оно успеет возрасти). Таким свойством, в частности, обладает турбулентное движение, так как в турбулентной среде расстояние между любыми двумя жидкими частицами, в среднем, растет со временем. Поэтому турбулентность в проводящей среде служит одним из возможных механизмов усиления слабого начального магнитного поля. Этот механизм привлекает особое внимание в связи с происхождением космических магнитных полей, так как проводимость космических газовых масс вследствие высокой степени ионизации близка к проводимости металлических проводников и ввиду огромных масштабов естественным состоянием движения как раз и должно быть турбулентное движение.

К сожалению, в настоящее время не только нет строгой теории магнитной турбулентности — такая теория отсутствует и для обычной турбулентности, — но нет даже надежных качественных представлений о характере турбулентного движения проводящей среды в присутствии магнитного поля. Это обусловлено не столько сложностью проблемы, не поддающейся последовательному теоретическому анализу, сколько практически полным отсутствием экспериментальных данных. Как будет видно из дальнейшего, ртуть и расплавленные металлы не позволяют осуществить условия, необходимые для лабораторного исследования наиболее существенных свойств магнитной турбулентности. Эти свойства, по-видимому, обнаруживаются в космических условиях. Однако непосредственное получение данных о космической магнитной турбулентности представляет весьма сложную наблюдательную проблему астрофизики, еще далекую от решения. Поэтому в настоящее время, несмотря на большой интерес и значительное число работ, относящихся к магнитной турбулентности, имеются лишь довольно разрозненные и часто противоречивые соображения качественного характера или исследования, представляющие собой формальное распространение известных методов теории обычной турбулентности, применимость которых к этой существенно новой области в ряде случаев вызывает сомнение.

Остановимся подробнее на основных вопросах теории магнитной турбулентности.

#### а) Условие роста магнитного поля в турбулентной среде

Наименее сложной является проблема усиления слабого начального магнитного поля в турбулентной проводящей среде (хотя и здесь, как мы увидим, имеются различные точки зрения), поскольку при достаточно слабом магнитном поле турбулентность должна иметь обычный характер. В самом деле, в уравнение движения среды (1,22) магнитное поле входит в виде квадратичных по  $H$  членов, влияние которых при малых  $H$  пренебрежимо мало\*).

Свойства обычной турбулентности при больших числах Рейнольдса хорошо известны. Движение в масштабах турбулентности, значительно меньших основного, обозначаемого ниже через  $l$ , изотропно и его свой-

\* Строго говоря, влиянием поля можно пренебрегать лишь в течение конечно-го, зависящего от напряженности поля, промежутка времени. За большие промежутки времени влияние даже слабого магнитного поля может оказаться существенным. Это важно иметь в виду при рассмотрении стационарных процессов.

ства полностью определяются величиной диссипации энергии  $\varepsilon$  в единицу времени на единицу массы среды. Вязкость существенна лишь в масштабах турбулентности, близких к наименьшему, «внутреннему», масштабу  $\lambda_0$ . Малое число параметров, определяющих свойства турбулентности в масштабах, меньших основного, позволяет использовать соображения подобия, основанные на размерности рассматриваемых величин. Так, относительная скорость двух точек, находящихся на расстоянии  $\lambda$  ( $\lambda_0 \ll \ll \lambda \ll l$ ), по порядку величины определяется выражением

$$v_\lambda \cong (\varepsilon \lambda)^{1/3}. \quad (7,1)$$

В конкретных случаях постоянную  $\varepsilon$  можно с достаточной для практических целей точностью выразить через характеристики внешнего масштаба турбулентности

$$\varepsilon \cong \frac{v^3}{l}, \quad (7,2)$$

где  $v$  — изменение скорости на протяжении наибольшего масштаба турбулентности  $l$ . Внутренний масштаб турбулентности и характерная для этого масштаба скорость  $v_0$  определяются по порядку величины выражениями

$$\lambda_0 \cong \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad \text{и} \quad v_0 \cong (\varepsilon v)^{1/4}. \quad (7,3)$$

Пусть в турбулентной проводящей жидкости каким-либо образом появилось слабое магнитное поле. Существует ряд механизмов (на которых мы не будем останавливаться), позволяющих объяснить возникновение такого поля за счет токов в неравномерно нагретой или неоднородно движущейся среде<sup>130</sup>. Нас интересует дальнейшая судьба этого поля. Будем считать жидкость несжимаемой. Поведение магнитного поля определяется уравнением индукции (1,20), которое в случае несжимаемой среды после скалярного умножения обеих частей на  $\mathbf{H}$ , может быть записано в виде (ср. (5,4))

$$\frac{1}{2} \frac{dH^2}{dt} = \mathbf{H}(\mathbf{H}\nabla) \mathbf{v} + \nu_m \mathbf{H} \Delta \mathbf{H}. \quad (7,4)$$

Как уже указывалось выше, выражаемые первым членом правой части индукционные эффекты, которые только и могут привести к росту энергии магнитного поля, играют существенную роль лишь при условии  $R_m > 1$ . В противном случае основную роль играет диссипативный член уравнения (7,4), и индукционное усиление поля невозможно. Отсюда сразу следует, что магнитное поле, характеризуемое масштабом  $\lambda$ , будет усиливаться турбулентностью лишь при условии

$$R_m(\lambda) = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu_m} > 1, \quad (7,5)$$

где  $v_\lambda$  — турбулентная скорость вихрей масштаба  $\lambda$ . Используя выражения (7,1) — (7,3), получим следующий критерий роста поля, масштаб неоднородностей которого равен  $\lambda$ :

$$\lambda > \lambda_0 \left( \frac{\nu_m}{v} \right)^{3/4} = l / R_m^{3/4}. \quad (7,6)$$

Здесь  $R_m = \frac{vl}{\nu_m}$  — магнитное число Рейнольдса турбулентного движения в целом. Так как  $\lambda$  во всяком случае не больше внешнего масштаба турбулентности  $l$ , то необходимым условием усиления поля турбулентностью является условие  $R_m > 1$ . В лабораторных экспериментах с ртутью

число  $R_m$  было порядка  $10^{-2}$ , с жидким натрием  $\leq 1$ . В этих условиях диссипация подавляет индукционные эффекты и наблюдать усиление слабого поля нельзя.

Оценим скорость роста магнитной энергии, считая, что  $R_m(\lambda) \gg 1$  вплоть до наименьших масштабов турбулентности (это соответствует условиям межзвездном газе) и плотность магнитной энергии мала по сравнению с плотностью кинетической энергии наименьших масштабов турбулентности, т. е.  $H^2 \ll \rho(\epsilon\nu)^{1/2}$ . Это позволяет пренебречь диссипацией поля и обратным влиянием магнитного поля на турбулентное движение. При этих предположениях из уравнения (7,4) после усреднения находим

$$\frac{1}{2H^2} \frac{dH^2}{dt} = \frac{H^2 \overline{\partial v_H / \partial x_H}}{H^2} \approx \frac{\overline{\partial v_H}}{\partial x_H} \approx \left( \frac{v_\lambda}{\lambda} \right), \quad (7,7)$$

где  $\partial v_H / \partial x_H$  означает производную в направлении поля от составляющей скорости в том же направлении. Легко видеть, что эта оценка соответствует представлению о растягивании магнитных силовых линий турбулентно движущейся средой, поскольку стоящая в правой части величина выражает среднюю скорость удлинения произвольной, связанной со средой линии. Основной вклад в эту величину дают наименьшие масштабы турбулентности. Поэтому, учитывая (7,3) имеем  $\left( \frac{v_\lambda}{\lambda} \right) \approx \frac{v_0}{\lambda_0} \approx \left( \frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2}$ . Таким образом, начальное магнитное поле, пока его энергия еще мала, экспоненциально растет со временем с коэффициентом порядка  $(\epsilon/\nu)^{1/2}$  в показателе экспоненты:

$$\overline{H^2} = \overline{H_0^2} e^{\alpha \left( \frac{\epsilon}{\nu} \right)^{1/2} t}. \quad (7,8)$$

Здесь  $\alpha$  — безразмерная постоянная порядка единицы. Экспоненциальный характер роста поля следует непосредственно из линейности относительно  $H$  уравнения индукции в предположении независимости распределения турбулентной скорости от напряженности поля.

Быстрее всего происходит увеличение той части магнитной энергии, которая связана с наименьшими масштабами магнитного поля, так как в силу свойств турбулентности  $v_\lambda/\lambda$  для этих масштабов максимально. При этом, однако, поле растет и в больших масштабах, хотя и более медленно<sup>130, 120</sup>. Скорость роста в масштабе  $\lambda \gg \lambda_0$  определяется согласно (7,7) отношением  $v_\lambda/\lambda$  для этого масштаба. Это отношение в силу (7,1) равно  $(\epsilon/\lambda^2)^{1/3}$ , т. е. обратно пропорционально размеру однородного участка поля в степени  $2/3$ . В частности, в том случае, когда  $v_m > \nu$  и условие (7,6) для наименьших масштабов не выполнено, рост поля возможен лишь в тех масштабах, для которых  $R_m(\lambda) > 1$  и его скорость определяется отношением  $v_\lambda/\lambda$  для наименьшего из этих масштабов.

Рост поля в турбулентной проводящей среде был впервые рассмотрен Бэтчелором<sup>12</sup>. Так как его выводы в ряде пунктов существенно отличаются от приведенных выше, то мы остановимся на них подробнее. Бэтчелор исходил из аналогии между уравнением индукции и уравнением обычной гидродинамики для вихря  $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ . Последнее, подобно уравнению (7,4), также может быть приведено к виду (для несжимаемой жидкости)

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = \omega (\omega \nabla) \mathbf{v} + \nu \omega \Delta \omega. \quad (7,9)$$

В случае однородной турбулентности отсюда следует уравнение для сред-

него квадрата вихря

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\omega}^2}{dt} = \overline{\omega^2 \frac{\partial v_\omega}{\partial x_\omega}} - \nu (\nabla \omega_l)^2. \quad (7,10)$$

Первый член правой части уравнения (7,10) выражает обычный механизм роста вихря в турбулентности за счет растяжения вихревых трубок, совпадающий с механизмом роста напряженности магнитного поля при растяжении его силовых линий. Опыт показывает, что в обычной турбулентности всегда  $\overline{\omega^2 \frac{\partial v_\omega}{\partial x_\omega}} > 0$ . Кроме того, при больших  $R$  оба члена правой части уравнения (7,10) велики по сравнению с их разностью, т. е. затухание вихрей под действием вязкости приблизительно компенсируется их ростом в результате растягивания вихревых нитей.

Уравнение для среднего квадрата напряженности поля, аналогичное уравнению (7,10), может быть получено из (7,4) в предположении, что в результате турбулентного перемешивания магнитное поле быстро становится статистически однородно распределенным в пространстве (является стационарной случайной функцией координат):

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{H}^2}{dt} = \overline{H^2 \frac{\partial v_H}{\partial x_H}} - \nu_m (\nabla H_l)^2. \quad (7,11)$$

Бэтчелор делает следующее существенное предположение: статистические распределения  $\omega$  и  $H$  (исключая их абсолютные значения) одинаковы или становятся такими быстро по сравнению с временем заметного изменения среднего квадрата поля. При этом предположении из сравнения уравнений (7,10) и (7,11) следует, что в стационарной турбулентности оба члена правой части уравнения (7,11) компенсируют друг друга, если  $\nu_m = \nu^*$ . При  $\nu_m > \nu$  преобладает диссипация, и поле затухает. При  $\nu_m < \nu$  преобладает индукционное усиление поля. Таким образом, по Бэтчелору, условие роста поля при турбулентном движении есть

$$\nu_m < \nu. \quad (7,12)$$

Это условие отличается от приведенного выше условия (7,6). Оно совпадает с последним лишь в том случае, если масштаб неоднородностей магнитного поля совпадает с внутренним масштабом турбулентности или, иначе говоря, если среднее поле в масштабах, больших  $\lambda_0$ , пренебрежимо мало. В общем случае критерий Бэтчелора, не содержащий характерной длины неоднородностей поля, неприменим. Действительно, в больших масштабах влияние джоулевой диссипации меньше, и поле будет возрастать при менее жестком, чем (7,12), условии (7,6).

Бэтчелор считает условие (7,12) справедливым для произвольного начального поля. Его аргументация в пользу сходства статистических свойств  $H$  и  $\omega$  основана на предположении, что процесс растягивания силовых линий магнитного поля переносит магнитную энергию из крупномасштабных пульсаций  $H$  в маломасштабные, приближая, таким образом, распределение  $H$  к распределению  $\omega$ . По поводу этого предположения

\*) При соответствующих граничных условиях для турбулентной скорости и магнитного поля это означало бы стационарность как турбулентности, так и магнитного поля. Заметим, однако, что в стационарном состоянии нельзя пренебрегать обратным влиянием магнитного поля на турбулентность (см. предыдущее примечание). Поэтому поведение  $H$  и  $\omega$  в конечном счете не совпадают даже в наиболее благоприятном случае, когда начальное магнитное поле всюду пропорционально вихрю и  $\nu$  и  $\nu_m$ .

следует заметить, что ввиду линейности уравнения индукции относительно  $H$ , непосредственный перенос магнитной энергии от больших масштабов к меньшим отсутствует. Энергия магнитного поля, связанного с малыми масштабами, растет не за счет энергии крупномасштабного поля, а за счет кинетической энергии маломасштабных движений среды. С другой стороны, энергия крупномасштабных неоднородностей поля может убывать лишь за счет диссипации или в результате перехода магнитной энергии в кинетическую энергию среды. Последний механизм дает возможность косвенного переноса магнитной энергии от больших масштабов к меньшим через кинетическую энергию среды, однако в рассматриваемом случае такой перенос невозможен хотя бы по той причине, что поле предполагается слабым и не может влиять на движение среды. Этим поведение магнитного поля при турбулентном движении существенно отличается от поведения вихря. Таким образом, предполагаемое Бэтчелором быстрое приближение распределения поля к распределению вихря в действительности не имеет места.

Формально это различие проявляется и в неполноте аналогии уравнений для вихря и для напряженности магнитного поля. Аналогия была бы достаточно глубокой, если бы зависимость вихря от скорости определялась только уравнением (7,9). В действительности это не так. Распределение вихря непосредственно кинематически связано с распределением скорости соотношением  $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } v$ . Это приводит к фактической нелинейности уравнения (7,9) для вихря и связанному с этой нелинейностью процессу переноса вихря от больших масштабов к меньшим, который является наиболее существенным свойством обычной турбулентности. Для магнитного поля такая дополнительная связь с полем скоростей, очевидно, отсутствует, а вместе с тем отсутствует и непосредственный перенос магнитной энергии от одних масштабов к другим. Таким образом, поведение неупорядоченного, хаотического магнитного поля и поведение турбулентной скорости существенно отличаются друг от друга, что часто не учитывается при попытках построения теории магнитной турбулентности.

### б) Проблема стационарного состояния

Важным вопросом теории магнитной турбулентности является проблема стационарного состояния, т. е. вопрос о том, до какого предела продолжается рассмотренный выше рост магнитной энергии, если внешние причины, вызывающие турбулентность, действуют неизменно во времени? До настоящего времени этот вопрос не решен<sup>13</sup>. Существуют две существенно различные точки зрения, каждая из которых встречает серьезные возражения.

Предположение, высказанное Бэтчелором<sup>12, 13</sup>, состоит в том, что рост энергии магнитного поля продолжается до тех пор, пока средняя плотность магнитной энергии не становится сравнимой с плотностью кинетической энергии для наименьших масштабов турбулентности. Так как в силу (7,3) последняя равна  $\rho(\epsilon v)^{1/2}$ , то, по Бэтчелору, в стационарном состоянии

$$\frac{H^2}{8\pi} \cong \rho(\epsilon v)^{1/2} \cong \frac{\rho v^2}{2} R^{-1/2}. \quad (7,13)$$

Это состояние достигается за время, определяемое по порядку величины из выражения (7,8):

$$\tau \cong \left(\frac{v}{\epsilon}\right)^{1/2} \ln \frac{8\pi\rho(\epsilon v)^{1/2}}{H_0^2}. \quad (7,14)$$

Гипотеза Бэтчелора основана на рассмотренной выше формальной аналогии уравнений для вихря и напряженности магнитного поля и предполо-



жении об одинаковости статистических свойств  $\omega$  и  $H$ . Как уже указывалось выше, аналогия между вихрем и напряженностью поля не полна, а предположение о совпадении их статистических свойств при ближайшем рассмотрении не оправдывается. Фактически дело сводится к тому, что предположение Бэтчелора игнорирует рост поля в масштабах турбулентности, больших внутреннего. Так как кинетическая энергия, связанная с движениями в этих масштабах, больше выражаемой соотношением (7,13), то не видно причин, препятствующих росту средней магнитной энергии до больших, чем в (7,13) значений.

В настоящее время более распространена гипотеза о равномерном распределении энергии в магнитной турбулентности между ее магнитной и кинетической частями в стационарном состоянии (см., например, <sup>61, 120, 57</sup>). Так как кинетическая энергия турбулентности связана в основном с наибольшими масштабами турбулентности и по порядку величины равна  $\frac{\rho v^2}{2}$ , где  $v$  — пульсационная скорость, то согласно этой гипотезе в стационарном состоянии

$$\frac{\overline{H^2}}{8\pi} \sim \frac{\rho v^2}{2}. \quad (7,15)$$

Отношение оценок (7,13) и (7,15) по порядку величины равно

$$\frac{v^2}{(\epsilon v)^{1/2}} \cong \left(\frac{vl}{v}\right)^{1/2} \cong R^{1/2} \quad (7,16)$$

и для межзвездного газа, где  $R \cong 10^9$ , весьма велико.

Эта гипотеза также встречается с серьезными трудностями. В самом деле, энергия магнитного поля, удовлетворяющая условию (7,15), намного превышает кинетическую энергию маломасштабных пульсаций. Это значит, что максвелловы натяжения магнитного поля значительно превосходят гидродинамические силы, вызывающие движение в малых масштабах турбулентности и, следовательно, полностью определяют движение в этих масштабах. Если обратиться к уравнению движения среды (1,22), то из условия (7,15) следует, что натяжения магнитного поля в среднем компенсируют действие нелинейного инерциального члена  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , с которым связан основной для турбулентного движения процесс переноса кинетической энергии от больших масштабов движения к меньшим. Таким образом, в том случае, когда энергия магнитного поля сравнима с кинетической энергией жидкости, говорить о турбулентном движении в обычном смысле уже нельзя. Магнитное поле подавляет движение в малых масштабах и, следовательно, нарушает нормальный процесс диссипации энергии в стационарной турбулентности. Это значит, что при постоянном притоке энергии извне необходим какой-либо иной механизм диссипации энергии для того, чтобы было возможным стационарное состояние.

Таким образом, если гипотеза о равенстве магнитной и кинетической энергий соответствует действительности, то мы с неизбежностью приходим к выводу, что магнитное поле существенно видоизменяет турбулентное движение, если не подавляет его полностью.

Этот вывод следует также из рассмотренных в разделе 6 исследований устойчивости движения проводящей среды в присутствии магнитного поля. Вопросы устойчивости имеют непосредственное отношение к проблеме магнитной турбулентности, так как известно, что турбулентное движение развивается в результате неустойчивости тех или иных ламинарных течений. Кроме того, основной для турбулентного движения механизм переноса энергии от движений больших масштабов к движениям меньших масштабов также может быть истолкован как неустойчивость крупномасштабных движений, приводящая к возникновению

движений малых масштабов, поскольку формально и механизм переноса энергии в маломасштабную часть спектра турбулентности и неустойчивость обусловлены одним и тем же нелинейным членом уравнения Навье—Стокса  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ .

Исследование устойчивости тангенциального разрыва и других рассмотренных выше течений показывает, что магнитное поле стабилизирует движение проводящей среды и, следовательно, затрудняет развитие турбулентности. В работе<sup>84</sup> высказывается противоположное утверждение о том, что магнитное поле должно облегчать развитие турбулентности\*), так как в магнитной гидродинамике не выполнена теорема о сохранении циркуляции скорости (ср. уравнение (1,51)), основано на недоразумении. Теорема о сохранении вихря не позволяет судить об устойчивости: в обычной гидродинамике выполнение этой теоремы не обеспечивает устойчивость тех или иных течений. С другой стороны, непосредственный анализ показывает, что во всех рассмотренных случаях магнитное поле лишь увеличивает устойчивость движения.

В соответствии с условием (6,26) продольное магнитное поле стабилизирует тангенциальный разрыв, если плотность его энергии по порядку величины сравнима или больше плотности кинетической энергии среды. Так как сглаживание профиля скорости, очевидно, может лишь увеличить устойчивость, то эта оценка сохраняется и для более плавных, чем тангенциальный разрыв, профилей скоростей. Эта же оценка непосредственно следует из качественных энергетических соображений. Поскольку характерная скорость пульсаций масштаба  $\lambda$  выражается соотношением (7,1), то можно утверждать, что магнитное поле подавляет турбулентность или, по меньшей мере, делает ее существенно не изотропной во всех масштабах, удовлетворяющих условию

$$\frac{\rho v_{\lambda}^2}{2} \cong \rho(\varepsilon\lambda)^{2/3} \ll \frac{H^2}{8\pi}. \quad (7,17)$$

Эти соображения хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными по течению ртути в трубах и прямоугольных каналах в поперечном магнитном поле. Опыты, выполненные в работах<sup>75</sup> и<sup>113, 114</sup>, показывают, что при турбулентном режиме увеличение поперечного магнитного поля приводит, вначале, к уменьшению градиента давления, необходимого для поддержания постоянного расхода жидкости. Затем градиент давления растет пропорционально  $M/R$ , где  $M$  — безразмерный параметр (6,32), в хорошем согласии с теоретическим результатом, полученным в работе<sup>74</sup> для ламинарного течения в поперечном поле. Это свидетельствует о подавлении турбулентности и переходе от турбулентного закона сопротивления к ламинарному. Согласно<sup>114</sup> ламинарное течение наступает при  $900M > R$ , причем течение удавалось стабилизировать вплоть до максимальных осуществленных в опыте значений  $R = 10^5$ . Так как переход от турбулентного движения к ламинарному при всех использованных значениях  $R$  определяется лишь отношением  $M/R$  и не зависит от  $R$  непосредственно, то естественно предположить, что этот переход определяется безразмерным параметром, не зависящим от характеристик жидкости  $\nu$  и  $\nu_m$ . Таким параметром служит

$$Q = \frac{M}{R \sqrt{\nu/\nu_m}} = \frac{H}{v \sqrt{4\pi\rho}}. \quad (7,18)$$

Легко видеть, что  $Q^2$  выражает отношение магнитной энергии системы

\*) Аналогичное предположение делается в работе<sup>85a</sup>.

к ее кинетической энергии. Так как переход к ламинарному течению, согласно<sup>114</sup>, наступает для ртути при  $M/R \geq 1/900$ , причем для ртути  $\nu/\nu_m = 1,5 \cdot 10^{-7}$ , то критическое значение параметра  $Q$ , соответствующее полному подавлению турбулентности при течении в поперечном поле, равно  $Q_{кр} = 1/900 \sqrt{1,5 \cdot 10^{-7}} \cong 3$ . Это значение в пределах одного порядка согласуется с приведенной выше оценкой (7,17) стабилизирующего значения магнитного поля. Согласие следует считать удовлетворительным, так как, во-первых, в отличие от тангенциального разрыва речь идет о поперечном поле и, во-вторых, полученное значение параметра  $Q$  соответствует полному подавлению турбулентности, которое, по-видимому, должно происходить при более жестких условиях, чем возникновение турбулентности в результате неустойчивости. Таким образом, как теоретическое рассмотрение, так и результаты имеющихся экспериментов приводят к выводу, что при условии  $Q > 1$  магнитная турбулентность невозможна.

в) Двумерная турбулентность

В связи с проблемой усиления магнитного поля в турбулентной среде представляют интерес работы<sup>139, 132</sup>, в которых рассматривается поведение магнитного поля в несжимаемой проводящей жидкости при двумерном турбулентном движении. Вообще говоря, не очевидно, что обычные представления о турбулентности могут быть сохранены и в случае двумерного движения. Важно, однако, то, что проблема усиления магнитного поля при двумерном движении может быть рассмотрена в общем виде произвольного поля скоростей, причем удастся получить ряд строгих результатов.

Остановимся подробнее на плоских двумерных движениях, при которых скорость не зависит от одной из координат, скажем  $z$ , и параллельна плоскости  $(x, y)$ <sup>132</sup>. Прежде всего легко убедиться, что механизм усиления не действует на компоненту магнитного поля  $H_z$ , перпендикулярную плоскости движения. Эта компонента может лишь убывать в результате диссипации за счет ограниченной проводимости среды. В самом деле, в случае двумерного движения для компоненты поля  $H_z$  из уравнения (5,1) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla H_z = \nu_m \Delta H_z. \tag{7,19}$$

Это уравнение аналогично уравнению теплопроводности в движущейся среде. Из него следует, что при отсутствии внешнего поля  $H_z$  на границах рассматриваемой двумерной области  $H_z$  с течением времени исчезает во всем пространстве. Таким образом,  $H_z$  для дальнейшего не представляет интереса и может считаться равным нулю.

Воспользовавшись соотношением  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , преобразуем уравнение индукции (5,1) в уравнение для вектор-потенциала магнитного поля  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}] + \nu_m \Delta \mathbf{A}. \tag{7,20}$$

Градиент произвольной функции, появляющийся при переходе от уравнения (5,1) к уравнению (7,14), может быть устранен соответствующим калибровочным преобразованием. Для интересующего нас двумерного магнитного поля ( $H_z = 0$ ) вектор-потенциал можно выбрать в виде  $\mathbf{A} = (0, 0, A)$ , так что

$$\mathbf{H} = \left( \frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right), \quad H^2 = (\nabla A)^2. \tag{7,21}$$

В силу уравнения (7,20)  $A$  подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)A = \nu_m \Delta A. \quad (7,22)$$

Это уравнение, так же как и уравнение (7,19) для  $H_z$ , означает убывание  $A^2$ , если на границах области  $A = 0$  (внешние поля отсутствуют). В самом деле, умножив уравнение (7,22) на  $A$ , интегрируя по всему пространству и опуская при условии отсутствия внешних полей поверхностные интегралы, находим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int A^2 dV = -\nu_m \int (\nabla A)^2 dV = -\nu_m \int H^2 dV. \quad (7,23)$$

Отсюда следует, что  $A^2$  монотонно убывает до тех пор, пока магнитное поле не становится равным нулю во всем пространстве. Это значит, что непрерывное усиление поля или стационарный в среднем процесс невозможны ни при каком двумерном движении. Этот результат является по существу иной формулировкой приведенного в разделе 5 доказательства невозможности двумерного стационарного динамо.

Монотонное убывание  $A^2$  еще не означает, что  $H^2$  также должно монотонно убывать. Действительно, так как  $H^2 = (\nabla A)^2$ , то магнитное поле может расти несмотря на убывание  $A$ , если в результате сильного перемешивания растут градиенты  $A$ . Однако рост градиентов  $A$  ограничен диссипацией и в конечном счете  $(\nabla A)^2$  будет убывать вместе с  $A$ . Таким образом, рост поля возможен лишь в начальной стадии процесса при условии, что начальное поле достаточно однородно. Максимальное значение поля и время, в течение которого это значение достигается, можно оценить следующим образом<sup>132</sup>. Пусть начальное поле характеризуется масштабом  $\lambda$ , большим внешнего масштаба турбулентности  $l$ , и амплитудой  $A_0$  вектор-потенциала

$$H_0 \cong \frac{A_0}{\lambda}.$$

Время макроскопического выравнивания поля в результате турбулентного перемешивания может быть выражено через турбулентную вязкость  $\nu_{\text{турб}} \cong lw$ , где  $v$  — пульсационная скорость:

$$\tau \cong \frac{\lambda^2}{\nu_{\text{турб}}} \cong \frac{\lambda^2}{lw}. \quad (7,24)$$

По истечении этого времени  $H^2 = (\nabla A)^2$  будет лишь убывать. Поэтому из уравнения (7,17)

$$\overline{H^2} \cong \frac{1}{\nu_m} \frac{\overline{A^2}}{\tau} \cong \frac{1}{\nu_m} A_0^2 \frac{lw}{\lambda^2} \cong \frac{lw}{\nu_m} \left( \frac{A_0}{\lambda} \right)^2$$

или

$$\sqrt{\overline{H^2}} \cong \sqrt{R_m} H_0, \quad (7,25)$$

где  $R_m = \frac{vl}{\nu_m}$  — магнитное число турбулентности. Таким образом, рост поля в двумерной турбулентности продолжается лишь в течение времени  $\tau$  и лишь при условии  $R_m > 1$ , которое совпадает с полученным выше необходимым условием усиления магнитного поля в турбулентной среде.

Аналогичный результат получен в работе<sup>139</sup>, в которой рассматривается магнитная турбулентность в предположении цилиндрической сим-

метрии задачи: поле и турбулентная скорость лежат в плоскостях, проходящих через ось симметрии. Результаты этой работы относятся также только к двумерному движению, хотя в работе это и не оговорено. Действительно, автор исходит из предположения, что рост поля в результате запутывания силовых линий неизбежно связан с уменьшением масштаба неоднородностей поля и, следовательно, с увеличением диссипации, ограничивающей в конечном счете рост поля. Рассматриваемый в этой работе процесс схематически изображен на рис. 9, где  $l$  — первоначальный масштаб поля,  $d$  — масштаб его неоднородностей в результате запутывания силовых линий. Рассуждения автора справедливы лишь в случае двумерной турбулентности, так как при трехмерном движении рост поля может происходить без уменьшения его масштабов и, следовательно, без

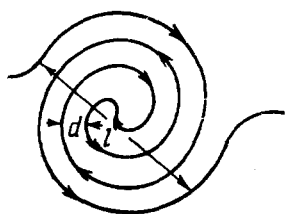


Рис. 9.

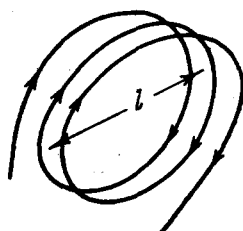


Рис. 10.

увеличения относительной роли диссипации, как легко видеть из рис. 10. Вместе с тем, для реальной трехмерной турбулентности неубедительно также введение «турбулентной проводимости», которая согласно<sup>139, 48</sup> должна приводить к более быстрой диссипации магнитного поля в турбулентной среде. Таким образом, утверждение о том, что рост поля при турбулентном движении ограничен чисто диссипативными процессами, справедливое для двумерного движения, не распространяется на реальную трехмерную турбулентность. Здесь обнаруживается та же ситуация, что и во взаимоотношении между двумерным и трехмерным динамо. Естественно считать, что к хаотическому трехмерному турбулентному магнитному полю не применимы результаты, полученные в предположении высокой симметрии магнитного поля и поля скоростей.

### г) Применение методов теории однородной изотропной турбулентности в магнитной гидродинамике

Помимо изложенного выше полуколичественного рассмотрения магнитной турбулентности, имеется значительное число работ, в которых методы обычной теории турбулентности применяются к магнитной турбулентности. Сюда относятся прежде всего работы<sup>24, 25, 104</sup>, в которых получены уравнения для тензоров одновременных корреляций значений скорости и напряженности магнитного поля в двух точках несжимаемой жидкости в предположении, что магнитная турбулентность однородна и изотропна. Аналогичный метод применяется в работах<sup>86, 87</sup> для изотропной турбулентности в сжимаемой среде. Как и в обычной теории турбулентности, этот метод не позволяет получить замкнутую систему уравнений, поскольку число неизвестных корреляций растет быстрее числа уравнений, получаемых для этих корреляций из уравнений магнитной гидродинамики. Здесь эта трудность еще более резко выражена, чем в обычной гидродинамике. Решение может быть получено лишь для

последней стадии вырождения турбулентности, когда числа Рейнольдса малы и нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь<sup>104, 88, 97</sup>. Конечная стадия вырождения магнитной турбулентности в присутствии однородного внешнего магнитного поля рассмотрена в работе<sup>97</sup> в линейном приближении. Показано, что турбулентность обладает резко выраженной анизотропией: гармоники турбулентности с волновым вектором вдоль внешнего поля затухают значительно быстрее остальных. В этой работе рассмотрено также влияние силы Кориолиса в случае, если магнитная турбулентность имеет место во вращающейся системе координат.

В работе<sup>89</sup> рассмотрена генерация звуковых волн изотропной магнитной турбулентностью, а также возбуждение магнитозвуковых и магнито-гидродинамических волн турбулентностью в присутствии постоянного внешнего магнитного поля. Анализ проведен в предположении, что корреляции четвертого порядка выражаются через корреляции второго порядка в соответствии с нормальным законом, причем для корреляций второго порядка предполагается простая гауссова зависимость от расстояния. В этих предположениях найдено, что в магнитной турбулентности генерация звуковых волн существенно возрастает по сравнению с обычной. Целью работы является показать возможность объяснения нагревания солнечной короны звуковыми возмущениями, генерируемыми турбулентностью в конвективной зоне.

Чандрасекару<sup>36</sup> удалось получить замкнутую систему уравнений для тензоров корреляций изотропной магнитной турбулентности, вычисляемых как средние от произведений значений скорости или напряженности магнитного поля в двух разных точках в различные моменты времени. Использование разновременных корреляций и предположение, что корреляции четвертого порядка выражаются через корреляции второго порядка в соответствии с нормальным законом, принятое Чандрасекаром, позволяют преодолеть упоминавшуюся выше трудность, связанную с неполнотой системы. Однако это решение проблемы является в известном смысле кажущимся, так как начальными условиями для задачи определения корреляций в разные моменты времени являются неизвестные одновременные корреляции.

Вторым методом теории турбулентности, который применен в работах<sup>81, 82</sup> и позднее в работе<sup>37</sup> к изотропной магнитной турбулентности, является построение уравнения для спектральной плотности кинетической и магнитной энергии путем приближенного учета нелинейных эффектов некоторыми феноменологическими членами, выбираемыми интуитивно при соблюдении необходимых требований размерности. Уже в обычной теории турбулентности этот метод, развитый независимо Обуховым и Гейзенбергом, приводит к существенному расхождению с опытом. В магнитной турбулентности произвол в выборе нелинейных членов еще больше ввиду наличия многих параметров одинаковой размерности. В частности, в работах<sup>82</sup> и<sup>37</sup> постулированы различные выражения для нелинейных членов. Результаты этих работ также существенно различны. Произвол в выборе той или иной формы нелинейных членов в уравнениях для спектральных функций лишает этот метод убедительности, тем более, что в настоящее время отсутствует возможность экспериментальной проверки тех или иных следствий теории.

По поводу рассмотренных выше работ, в которых методы обычной теории турбулентности применяются к магнитной турбулентности, должно быть сделано следующее общее замечание. Эти работы существенно основаны на предположении, что принципиальное различие между обычной и магнитной турбулентностью отсутствует. В частности, предпола-

гается, что естественным состоянием движения в масштабах, меньших основного, является состояние локальной изотропии. Выше мы видели, что магнитное поле подавляет турбулентность или, по меньшей мере, приводит к ее анизотропности во всех масштабах, кинетическая энергия которых мала по сравнению с плотностью магнитной энергии. Это делает весьма сомнительной аналогию между обычной и магнитной турбулентностью и, по-видимому, требует качественно новых представлений.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Alfvén H., *Nature* **150**, 405 (1942).
2. Alfvén H., *Arkiv f. Mat. Astr. o Fys.* **29B**, № 2, (1942).
3. Alfvén H., *Arkiv f. Mat. Astr. o Fys.* **29A**, № 12 (1943).
4. Alfvén H., *Tellus* **2**, 74 (1950).
5. Alfvén H., *Cosmic Electrodynamics*, Oxford (1950). Есть русский перевод: Альфвен Х., *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.
6. Anderson N. S., *Journ. Acoust. Soc. Amer.* **25**, 529 (1953).
7. Арцимович Л. А., Андрианов А. М. и др., *Атомная энергия* № 3, 76, 1956.
8. Åström E., *Nature* **165**, 1019 (1950).
9. Åström E., *Arkiv f. Fys.* **2**, 443 (1950).
10. Baños A., *Phys. Rev.* **97**, 1435 (1955).
11. Baños A., *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 350 (1955).
12. Batchelor G. K., *Proc. Roy. Soc.* **A201**, 405, (1950) (см. 109).
13. Batchelor G. K., *Gas dynamics of cosmic clouds*. Amsterdam, стр. 117 (1955).
14. Безбатченко А. Л., Головин И. Н. и др., *ДАН* **111**, 319 (1956).
15. Bondi H., Gold T., *Monthly Notices* **110**, 607 (1950).
16. Bostic W. H., Levine M. A., *Phys. Rev.* **87**, 671 (1952).
17. Bostic W. H., Levine M. A., *Phys. Rev.* **97**, 13 (1955).
18. Bostic W. H., *Phys. Rev.* **104**, 292 (1956).
19. Bostic W. H., *Phys. Rev.* **104**, 1191 (1956).
20. Bullard E. C., *Proc. Roy. Soc.* **A197**, 433 (1949).
21. Bullard E. C., *Proc. Roy. Soc.* **A199**, 413 (1949).
22. Bullard E. C., Gellman H., *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A247**, 213 (1954).
23. Bullard E. C., *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 289 (1955).
24. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A204**, 435 (1951) (см. 109).
25. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A207**, 301 (1951) (см. 109).
26. Chandrasekhar S., *Phil. Mag.* **43**, 501 (1952).
27. Chandrasekhar S., *Monthly Notices* **113**, 667 (1953).
28. Chandrasekhar S., Fermi E., *Astrophys. J.* **118**, 116 (1953) (см. 109).
29. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A216**, 293 (1953) (см. 109).
30. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A217**, 306 (1953).
31. Chandrasekhar S., *Astrophys. J.* **119**, 7 (1954).
32. Chandrasekhar S., Limber D., *Astrophys. J.* **119**, 10 (1954).
33. Chandrasekhar S., *Phil. Mag.* **45**, 1177 (1954).
34. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A225**, 173 (1954).
35. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A231**, 198 (1955).
36. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 322 (1955).
37. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 350 (1955).
38. Chandrasekhar S., *Proc. Roy. Soc.* **A237**, 476 (1956).
39. Chandrasekhar S., *Astrophys. J.* **124**, № 1, 232 (1956).
40. Chandrasekhar S., *Astrophys. J.* **124**, № 1, 244 (1956).
41. Chandrasekhar S., *Astrophys. J.* **124**, № 3, 571 (1956).
42. Chandrasekhar S., *Proc. N. Acad. of Science USA* **42**, 1 (1956).
43. Chandrasekhar S., Prendergast K., *Proc. Nat. Acad. of Science USA* **42**, № 1, 5 (1956).
44. Chandrasekhar S., *Proc. Nat. Acad. of Science USA* **42**, 273 (1956).
- 44 a. Chandrasekhar S., *Proc. Nat. Acad. Sci USA* **43**, 24 (1957).
- 44 b. Cole G. H. A., *Advances in Physics* **5**, 453 (1956).
45. Cowling T. G., *Monthly Notices* **94**, 39 (1933/1934).
46. Cowling T. G., *Monthly Notices* **112**, 527 (1952).
47. Cowling T. G., *Proc. Roy. Soc.* **A233**, 319 (1955).
- 47 a. Cowling T. G., *Magnetohydrodynamics*, New York (1957).
48. Csada I. K., *Acta Physica Hungaricae* **1**, 235 (1952).
49. Davis L., *Phys. Rev.* **102**, 939 (1956).
50. Dungey J. W., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **46**, 651 (1950).

51. Dungey J. W., Monthly Notices **113**, 180 (1953).
52. Dungey J. W., Monthly Notices **113**, 678 (1953).
- 52a. Dungey J. W., Loughhead R. E., Australian J. of Physics **7**, 5 (1954).
53. Elsasser W. M., Phys. Rev. **69**, 106; **70**, 202 (1946).
54. Elsasser W. M., Phys. Rev. **72**, 821 (1947).
55. Elsasser W. M., Phys. Rev. **79**, 183 (1950).
56. Elsasser W. M., Rev. Mod. Phys. **22**, 1 (1950).
57. Elsasser W. M., Phys. Rev. **95**, 1 (1954).
58. Elsasser W. M., Am. J. Phys. **23**, 590 (1955).
59. Elsasser W. M., Am. J. Phys. **24**, 85 (1956).
60. Elsasser W. M., Rev. Mod. Phys. **28**, № 2, 135 (1956).
- 60a. Elsasser W. M., Proc. Nat. Acad. Sci USA **43**, 14 (1957).
61. Fermi E., Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
62. Ferraro V. C. A., Monthly Notices **97**, 458 (1937).
63. Ferraro V. C. A., Memory D. J., Monthly Notices of RAS **112**, 361 (1952).
64. Ferraro V. C. A., Astrophys. J. **119**, 393 (1954).
65. Ferraro V. C. A., Astrophys. J. **119**, 407 (1954).
66. Fultz D., Nakagawa Y., Proc. Roy. Soc. **A231**, 241 (1955).
67. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., ДАН **100**, 647 (1955).
68. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Астр. журн. **32**, № 3, 201 (1955).
69. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г., УФН **61**, 561 (1957).
70. Гинзбург В. Л., ЖЭТФ **21**, 788 (1951).
71. Гинзбург В. Л., УФН **51**, 343 (1953).
72. Gjellestad G., Ann. d'astrophysique **15**, 276 (1952).
73. Gjellestad G., Astrophys. J. **119**, 14 (1954).
74. Hartmann J., Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. (Math. — fys. Medd.) **15**, № 6 (1937).
75. Hartmann J., Lasarus F., Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. (Math. — fys. Medd.) **15**, № 7 (1937).
76. Helfer H. F., Astrophys. J. **117**, № 1, 177 (1953) (см. 109).
77. Herlofson N., Nature **165**, 1020 (1950).
78. Hide R., Proc. Roy. Soc. **A233**, 376 (1955).
79. Hoffmann F., Teller E., Phys. Rev. **80**, 692 (1950) (см. 109).
80. Hulst Van de H. C., Problems of cosmical aerodynamics. Dayton, Ohio, chap. 6 (1951). См. сборник «Проблемы космической аэродинамики», ИЛ, 1953.
81. Каплан С. А., ДАН **94**, № 1, 33 (1954).
82. Каплан С. А., ЖЭТФ **27**, 699 (1954).
83. Каплан С. А., Астр. журн. **31**, 358 (1954).
84. Каплан С. А., Астр. журн. **31**, 360 (1954).
85. Каплан С. А., Станюкович К. П., ДАН **95**, 769 (1954).
- 85a. Киппер А. Я., Труды IV совещания по вопросам космогонии, стр. 425, М., 1955.
86. Krzywoblozki, Acta Physica Austriaca **6**, 157 (1952).
87. Krzywoblozki, Acta Physica Austriaca **6**, 250 (1953).
88. Кудиковский А. Г., Приклад. матем. и мех. **19**, 551 (1955).
89. Kulsrud R. M., Astrophys. J. **121**, 461 (1955).
90. Layzer D., Krook M., Menzel P. H., Proc. Roy. Soc. **A233**, 302 (1955).
91. Lehnert B., Tellus (Stockholm) **4**, 63 (1952).
92. Lehnert B., Arkiv för Fysik **5**, 69 (1952).
93. Lehnert B., Astrophys. J. **119**, 647 (1954).
94. Lehnert B., Phys. Rev. **94**, 815 (1954).
95. Lehnert B., Astrophys. J. **121**, 481 (1955).
96. Lehnert B., Proc. Roy. Soc. **233**, 299 (1955).
97. Lehnert B., Quart. Appl. Math. **12**, 321 (1955).
98. Lock R. C., Proc. Roy. Soc. **A233**, 105 (1955).
99. Loughhead R. E., Phys. Rev. **99**, 1678 (1955).
100. Lundquist S., Nature **164**, 145 (1949).
101. Lundquist S., Phys. Rev. **76**, 1805 (1949).
102. Lundquist S., Arkiv för Fysik **2**, 361 (1950).
103. Lundquist S., Phys. Rev. **83**, 307 (1951).
104. Lundquist S., Arkiv för Fysik **5**, 297 (1952) (см. 109).
105. Lüst R., Zs. f. Naturforsch. **8a**, 277 (1953).
106. Lüst R., Schlüter A., Zeits. f. Astrophys. **34**, 263 (1954).
107. Lüst R., Zeits. f. Naturforsch. **10a**, 125 (1955).
108. Lyttkens E., Astrophys. J. **119**, 413 (1954).
109. Магнитная гидродинамика. Сборник «Проблемы соврем. физики» № 2 (1954).
110. Marshall W., Proc. Roy. Soc. **233**, 367 (1955).
111. Marshall W., Phys. Rev. **103**, 1900 (1956).



112. Michael D. H., Proc. Camb. Phil. Soc. **49**, 166 (1953).
  113. Murgatroyd W., Nature **171**, 217 (1953).
  114. Murgatroyd W., Phil. Mag. **44**, 1348 (1953).
  115. Nakagawa J., Nature. Lond **175**, 417 (1955).
  116. Pao S. C., Astrophys. J. **124**, 266 (1956).
  117. Parker E. N., Phys. Rev. **99**, 241 (1955).
  118. Parker E. N., Astrophys. J. **122**, 293 (1955).
  119. Parker E. N., Krook M., Astrophys. J. **124**, 214 (1956).
  - 119a. Parker E. N., Proc. Nat. Acad. Sci. USA **43**, 8 (1957).
  120. Пикельнер С. Б., Изв. крым. астрофиз. обсер. **10**, 74 (1953).
  121. Пикельнер С. Б., Успехи астроном. наук **6**, 281 (1954).
  122. Пикельнер С. Б., УФН **58**, 285 (1956).
  123. Plumpton C., Ferraro V. C. A., Astrophys. J. **121**, 168 (1955).
  - 123a. Прикладная магнитогидродинамика. Труды Института физики АН Латвийской ССР, т. 8, 1956.
  124. Roberts P. H., Astrophys. J. **121**, 720 (1955).
  125. Roberts P. H., Astrophys. J. **122**, 315 (1955).
  126. Roberts P. H., Astrophys. J. **122**, 508 (1955).
  127. Roberts P. H., Astrophys. J. **124**, 430 (1956).
  128. Rossi B., Suppl. Nuovo Cim. № 1, 275 (1955).
  - 128a. Шафранов В. Д., Атомная энергия № 5, 38 (1956).
  129. Шкловский И. С., Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, 1957.
  130. Schlüter A., Bierman L., Zeits. f. Naturforsch. **5a**, 237 (1950) (см. 109).
  131. Schwarzschild M., Ann. d'astrophysique **12**, 148 (1949).
  132. Зельдович Я. Б., ЖЭТФ **31**, 154 (1956).
  133. Sen H. K., Phys. Rev. **102**, 5 (1956).
  134. Shercliff J. A., Proc. Camb. Phil. Soc. **49**, 136 (1953).
  135. Shercliff J. A., Proc. Roy. Soc. **A233**, 396 (1955).
  136. Станюкович К. П., ДАН **103**, 73 (1955).
  137. Станюкович К. П., Изв. АН, сер. физ. **19**, 639 (1955).
  138. Stuart J. T., Proc. Roy. Soc. **A221**, 189 (1954).
  139. Sweet P. A., Monthly Notices **110**, 69 (1950).
  140. Сыроватский С. И., ЖЭТФ **24**, 622 (1953).
  141. Сыроватский С. И., Диссертация (1954) (см. труды ФИАН, т. 8, 13 (1956)).
  142. Tayler R. I., Phil. Mag. **2**, 33 (1957).
  143. Thompson W. B., Phil. Mag. **42**, 1417 (1951).
  144. Truesdell, Phys. Rev. **78**, 823 (1950).
  145. Wallen C., Arkiv f. Math. Astr. o Fys. **30A**, № 15 (1944).
-