Н. И. Мусхелишвили

Некоторые основные задачи математической теории упругости

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПЛОСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

531
М91
УДК 539.30

2-4-2
164-66

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Подготовка настоящего (пятого) издания этой книги задержалась главным образом вследствие необходимости отразить в нем результаты большого числа работ, тесно связанных с содержанием книги, появившихся после выхода четвертого ее издания и первого издания английского ее перевода (Гронинген, 1953). Внесение, хотя бы краткого, упоминания этих результатов в основной текст книги вызвало бы значительную перестройку изложения и изменение нумерации параграфов. Последнее представлялось нежелательным, так как затруднило бы читателям отыскание соответствующих мест, на которые имеются ссылки в статьях различных авторов, пользовавшихся предыдущими изданиями.

Поэтому я решил оставить почти без изменений текст четвертого издания книги и добавить к нему новую (восьмую) главу, посвященную краткому обзору упомянутых выше результатов.

За составление этой главы охотно взялись мои коллеги Г. И. Баренблатт (Москва), А. И. Каландия (Тбилиси) и Г. Ф. Манджавидзе (Тбилиси), активно работающие в данной области и хорошо известные своими выдающимися результатами. Они самоотверженно проделали весьма трудоемкую работу (см. введение к гл. VIII), и я не нахожу слов, чтобы выразить им свою глубокую благодарность. Выражаю также глубокую благодарность профессору И. Р. М. Радоку (Австралия), переведшему третье и четвертое издания этой книги на английский язык и указавшему мне ряд опечаток, вкравшихся в предыдущее издание.

Как было сказано, текст четвертого издания (соответствующий первым семи главам настоящего) не подвергся сколько-нибудь существенным изменениям. Добавлены лишь немногие краткие замечания и весьма немногочисленные ссылки на некоторые новые работы, главным образом — монографического характера.

Новым является также Добавление IV в конце книги, в котором дается один вывод формул общего представления решения уравнений плоской теории упругости, охватывающий и случай наличия объемных сил.

Первоначально я намеревался исключить Добавления I—III вследствие их элементарного характера, в особенности Добавление I, написанное более 30 лет назад, когда понятие тензора еще не вошло в широкий обиход работ прикладного характера. Однако, по совету некоторых моих коллег, имеющих дело с начинающими инженерами-исследователями, я решил эти добавления оставить.

При подготовке к печати настоящего издания и при чтении корректур большую помощь оказал мне Г. И. Баренблатт. Выражаю ему самую сердечную признательность.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси,
январь 1966 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание отличается от предыдущего многочисленными добавлениями и изменениями в тексте, большей частью небольшими по объему, но иногда довольно существенными. При этом автор имел в виду как читателей, занимающихся главным образом практическими приложениями, так и читателей, интересующихся математической стороной вопроса.

Пользуюсь возможностью выразить глубокую благодарность Г. Ф. Манджавидзе, который с большим вниманием прочел корректуры всей книги, отметил ряд промахов и сделал некоторые критические замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Выражаю глубокую благодарность также А. Я. Горгидзе, который прочел корректуры первой и седьмой глав и проверил некоторые вычисления.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси,
декабрь 1953 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание настоящей книги, вышедшее в 1935 г., почти непосредственно вслед за первым (1933 г.), уже давно разошлось, но, будучи занят другими работами, я долгое время не мог приступить к подготовке нового издания. Теплый прием, оказанный книге, и высокая награда, которой она удостоилась, налагали на меня обязанность отнестись к ее переизданию с особым вниманием. К этому присоединилось еще то, также весьма отрадное для меня, обстоятельство, что уже вскоре после выхода в свет первых изданий появилось много работ, в которых изложенные мною методы применялись к различным конкретным задачам, а так же существенно дополнялись и обобщались. Естественно, что надо было отразить в новом издании хотя бы главнейшие результаты этих работ, так же как и некоторые результаты, полученные мною самим. Я постарался выполнить это, но опасаюсь, что некоторые работы все же остались мне неизвестными, за что приношу свои извинения их авторам.

Общий характер изложения остался в этом издании прежним. Однако текст книги, за исключением первых двух и последней [1]) глав, подвергся коренной переработке и значительно дополнен. Добавлены две новые главы, а именно главы четвертая и шестая. Содержание главы четвертой лишь в незначительной части заимствовано из предыдущего издания; в главе же шестой даны результаты, полученные мною, а также другими авторами после выхода в свет предыдущего издания [2]), если не считать немногих задач, решение которых было дано, но при помощи других методов, в предыдущем издании.

Не считая возможным и необходимым указывать все многочисленные изменения и дополнения, внесенные мною в текст предыдущих изданий,

---

[1]) Впрочем, значительно дополнен и отдел IV последней главы, что придало теории растяжения и изгиба составных брусьев вполне законченный вид.

[2]) Бóльшая часть этих результатов была внесена мною в книгу «Сингулярные интегральные уравнения» (1946), но теперь я нахожу, что естественное их место — в настоящей книге (в соответствии с этим они будут изъяты из следующего издания «Сингулярных интегральных уравнений»). Здесь изложение этих результатов переработано с целью сделать его независимым от упомянутой книги.

считаю нужным обратить внимание читателя на новое изложение отделов I—III главы пятой (отдел IV — новый). В этих отделах не содержится принципиально новых по сравнению с предыдущим изданием результатов, однако способ их получения заменен иным, более отвечающим, как мне кажется, сущности дела. Отмечу, впрочем, что новый способ (на который оказали влияние работы И. Племеля по теории функций комплексного переменного, опубликованные задолго до выхода в свет первых изданий моей книги, но, к сожалению, не знакомые мне тогда) приводит к тем же самым приемам вычисления, что и применявшиеся мною раньше. Вследствие этого, а также вследствие меньшей, пожалуй, элементарности нового способа изложения, я не совсем уверен, что поступил хорошо, произведя упомянутую замену. Как бы то ни было, сопоставление нового и старого подходов может принести известную пользу.

Добавлю в заключение, что тщательно, по мере возможности, называя авторов тех или иных изложенных мною чужих результатов, я делаю то же самое по отношению к некоторым своим результатам, иногда даже второстепенным, приводимым в качестве примеров. Последнее я делаю не потому, что придаю этим результатам преувеличенное значение, а лишь во избежание недоумения, могущего возникнуть у читателя, не знакомого с предыдущими изданиями моей книги и встретившего заимствованные из нее места без четкого указания источника в некоторых других публикациях (главным образом зарубежных).

Для упрощения ссылок цитируемые произведения перечислены отдельным списком в конце книги, в алфавитном порядке. При ссылках называется автор и номер его произведения по этому списку, заключенный в квадратные скобки.

Первому изданию этой книги было предпослано не мало способствовавшее ее успеху предисловие покойного академика Алексея Николаевича Крылова, крупнейшие научные и общественные заслуги которого хорошо всем известны и к которому я всегда буду питать чувства глубокой благодарности и уважения.

Предисловие А. Н. Крылова воспроизводится ниже без всяких изменений. Я не смог и в этом издании выполнить пожелания, высказанного А. Н. Крыловым в конце его предисловия, относительно развития методов численного решения, не потому, конечно, что недооцениваю его справедливости, а просто потому, что, к большому моему сожалению, я не умею это сделать достаточно хорошо. Зато пожелание А. Н. Крылова с успехом выполнено другими авторами, о чем даны указания в тексте книги.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси,
ноябрь 1948 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга эта воспроизводит в значительно переработанном и дополненном виде содержание цикла лекций, прочитанных мною весной 1931 г. по приглашению Сейсмологического института Академии Наук СССР для научных сотрудников Института, а также лекций, прочитанных в 1932 г. для аспирантов Физико-математического института Академии Наук и Института математики и механики при Ленинградском университете. Лекции предназначались для лиц, в большинстве уже знакомых

с основами теории упругости, и должны были быть посвящены отдельным основным вопросам, выбор которых в значительной мере предоставлялся мне; я, естественно, остановился на вопросах, в области которых работал лично.

Таким образом, в этой книге излагаются только немногие главы теории упругости, но каждая из них представляет собой довольно законченное целое. Не останавливаясь здесь на содержании книги, представление о котором можно получить по оглавлению, считаю необходимым отметить только следующее.

Ввиду того, что затронутые в книге вопросы могут, как я надеюсь, представить некоторый интерес для более широкого круга лиц, в частности для лиц, работающих в области технических приложений теории упругости, я старался сделать изложение по возможности доступным и для читателей, знакомых только с основами дифференциального и интегрального исчисления и с элементами теории функций комплексного переменного. Так, например, вопросы, где применяются интегральные уравнения, выделены в отдельные параграфы, которые можно пропустить при чтении без ущерба для понимания остального; глава I, в которой изложены основы математической теории упругости в объеме, достаточном для понимания дальнейшего (и даже несколько большем), предназначена для читателей, не специалистов по теории упругости. С целью сделать изложение более доступным, я отказался от применения тензорного исчисления, которым пользовался в своих лекциях в Сейсмологическом институте; элементарные сведения о тензорах даны в Добавлении I. Добавления II и III посвящены некоторым элементарным вопросам математики, необходимым для понимания изложенного в книге и обычно недостаточно освещенным в элементарных курсах анализа.

Н. Мусхелишвили

Ленинград,
весна 1933 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ[1])

Упругость есть основное свойство всех тел природы. Это свойство приходится приписывать даже тому воображаемому эфиру, самое существование которого то признается, то отрицается физикой и вместе с тем столь широко используется практикой.

Так и упругость тел, можно сказать, инстинктивно использовалась со времен доисторических для всех построек, начиная от хижин дикарей до Колизея, величественных дворцов и храмов, для всех орудий и инструментов обыденной жизни, для всякого рода оружия. Как первобытный человек каменного века или современный папуас, изготовляя лук для своих стрел с кремневым или костяным наконечником, пользуется упругостью материала, так Виккерс и Армстронг пользуются тем же свойством при изготовлении 150-тонных 16-дюймовых пушек для броненосцев «Нельсон» и «Родней» или для укреплений Дувра. Разница лишь в том, что папуас делает свой лук на основаниях, выработанных бесчисленными поколениями как бы естественным подбором, а Виккерс и Армстронг — свою пушку на основании точного математического расчета, разработанного нашим академиком Гадолиным всего лет шестьдесят назад.

Таким образом, если практическое использование человеком свойства упругости тел продолжается неисчислимые века и тысячелетия, то первая попытка научного его обоснования насчитывает всего 295 лет и дана Галилеем, изложившим ее в своих знаменитых «Беседах», изданных в 1638 г.

Через сорок лет англичанин Гук дал разгадку своей анаграммы: ceiiinosssttuv — ut tensio sic vis («яко растяжение, тако сила»), заключающей основной закон, которому свойство упругости материалов подчинено.

Проходит еще 60 лет, и в Записках Петербургской Академии Наук появляются труды Даниила Бернулли и Эйлера, где даны те уравнения, которыми и посейчас пользуются при большей части практических расчетов.

Проходит еще 80 лет, пока французский инженер Навье ставит совершенно по-новому задачу об изучении упругости тел, дает общую ее теорию и составляет общие дифференциальные уравнения равновесия и движения их. Эта теория развивается далее знаменитыми математиками Коши и Пуассоном, но они сперва прилагают ее к изучению распространения колебаний в упругой среде, т. е. звука, ибо в то время они еще

[1]) Предисловие академика А. Н. Крылова перепечатано без изменений из первого издания. Так как А. Н. Крылов разбирает содержание книги по главам, следует отметить, что глава III первого издания, значительно дополненная, составляет предмет главы V настоящего, а глава IV первого издания соответствует главе VII настоящего.

не признавали волновой теории света; в своем же курсе механики, изданном для Политехнической школы, Пуассон развивает теорию Бернулли и Эйлера.

В это же время в Институте инженеров путей сообщения, за несколько лет перед тем в Петербурге основанном, состояли профессорами, в чине подполковников русской службы, французские инженеры Ламе и Клапейрон, которые начали развивать теорию Навье в смысле приложений ее к строительному делу, но вскоре после своего воцарения Николай I исключил их из русской службы и выслал на родину.

Здесь в 1852 г. Ламе и издал первое руководство по теории упругости под заглавием «Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides», ставшее классическим и не утратившее своего значения и поныне.

С развитием постройки железных дорог, металлических для них мостов, громадных зданий, с развитием машиностроения и железного судостроения, с учреждением лабораторий как для научного исследования упругих свойств материалов, так и для проверки обусловленных контрактами их качеств, пошло быстрое развитие учения об упругих свойствах материалов и надлежащем их использовании для строительной практики.

Развитие это пошло по двум направлениям: с одной стороны, разрабатывалась математическая теория упругости в том виде, как ее создал Навье и впервые изложил Ламе; с другой стороны, развивалась упрощенная теория, получившая название «Учение о сопротивлении материалов», исходя из тех методов, основы которых были положены Бернулли и Эйлером.

Замечательно, что первое практическое приложение формулы и выводы Ламе получили, по почину Гадолина, в проектировании стальных орудий, скрепленных кольцами, которые начал изготовлять Крупп, а вскоре после него и наш, тогда только что основанный, Обуховский завод.

Зачастую сама практика заставляла проверять выводы упрощенной теории выводами теории более строгой и точной, чтобы ближе подойти к действительности и убедиться, что упрощения не слишком далеко завели от истины и что ими не упущена из виду самая сущность дела.

Здесь во многих случаях толчок давали или знаменитые крушения гигантских железнодорожных мостов, казалось бы, правильно сконструированных и рассчитанных по всем правилам и нормам, или трещины и разрывы листов палубы на океанских пароходах, или случаи гибели некоторых длинных пассажирских быстроходных пароходов, которые после столкновения с небольшими судами ломались пополам и тонули, причем о переломе их можно было ясно судить по скрещению их мачт, прежде чем они окончательно погружались под воду.

Теория упругости часто приходила на помощь, давала точное количественное объяснение причин катастрофы, а раз причины становились известными, то не трудно было находить и средства для предотвращения вредных от этих причин последствий.

Лет тридцать назад возникло применение железобетона в строительном деле и стало быстро развиваться, приобретя теперь громадную важность. Здесь возникли новые задачи, перед многими из которых упрощенные методы Бернулли и Эйлера были бессильны; теория упругости получила ряд новых применений.

Отсюда ясно, насколько важно изучение этого предмета ныне, при нашем колоссальном строительстве и бесчисленном разнообразии форм его, поэтому книга Н. И. Мусхелишвили отвечает насущной потребности.

В своем предисловии автор отсылает читателя для ознакомления с содержанием книги к оглавлению ее, но сухой перечень статей не дает достаточного представления не только о методе изложения, но даже и о самом содержании. Поэтому я постараюсь вкратце ознакомить с характером изложения, отметив прежде всего его оригинальность, благодаря которой получилась та сжатость, которая дозволила автору вместить в его небольшую книгу столь обширный и во многом совершенно новый материал и вместе с тем сохранить полную ясность изложения.

Книга проф. Мусхелишвили заключает четыре главы.

Глава I. Основные уравнения механики упругого тела. Здесь на 75 страницах изложены все общие основания теории упругости, а именно: а) учение о напряженном состоянии тела; б) учение о деформации; в) связь между напряжением и деформацией; г) выведены дифференциальные уравнения равновесия упругого тела и поставлены две основные задачи: 1° определить состояние тела, когда даны силы, на него действующие; 2° определить состояние тела, когда даны смещения точек поверхности, ограничивающей тело.

Глава II. Плоская задача. Общие формулы и простейшие приложения. Здесь на 100 страницах изложены как постановка плоской задачи, так и главные методы решения ее. Решение достигается при помощи функции напряжений и комплексного представления ее, причем сперва излагается общая теория методов, а затем они развиваются практически на ряде примеров. Из этих примеров отметим: а) растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием; б) действие сосредоточенной силы, приложенной в точке неограниченной плоскости; в) действие сосредоточенной пары; г) рассмотрение напряжений в кольце, вызываемых заданными силами; д) изгиб кругового бруса; е) общая теория температурных деформаций и вызываемых ими напряжений.

Глава III. Применение конформного отображения и комплексного интегрирования к плоской задаче. Здесь на 108 страницах сперва излагаются теория и примеры конформного отображения и прилагаются к преобразованию уравнений плоской задачи и граничных в ней условий, после чего показывается общий метод решения основных задач и поясняется примером решение этих задач для сплошного эллипса.

Затем автор излагает теорию интегралов Коши и дает здесь новые и обобщенные формулы, которыми и пользуется в дальнейшем.

Показав общее решение основных задач для областей, ограниченных одним контуром, и приведение этого решения к уравнениям Фредгольма, автор дает решения многих примеров для областей разного вида, причем особенно важны рассмотренные им случаи решения основных задач для плоскости с вырезами эллиптической формы, а также и со вставками в виде кругового ядра, а затем он дает решение обеих основных задач для полуплоскости и для областей более общего вида.

Все эти решения получаются не случайными частными приемами, а применением общего метода, основанного на выведенных автором свойствах интеграла Коши.

При чтении этой главы я невольно вспомнил весеннее собрание Общества корабельных инженеров в 1898 г. На этом собрании проф. Хел-Шоу (Hele-Shaw) показал в первый раз свой прибор, которым проектируется на экран с удивительной отчетливостью струйное течение жидкости и показывается обтекание этими струями разного рода препятствий. На следующий год я опять был в Лондоне на весеннем собрании Общества. Между прочими докладами норвежский инженер Брун (Bruhn) прочитал доклад о влиянии вырезов и отверстий в палубах на общую крепость судов, а так как незадолго перед этим переломился от столкновения с парусником громадный пароход City of Rome в нескольких милях от Нью-Йорка и катастрофа эта была у всех свежа в памяти, то доклад Бруна был прослушан с особенным интересом. Для изучения этого влияния он взял продолговатый лист резины, разграфил его проведенными параллельно и перпендикулярно длинной стороне прямыми на квадраты, сделал в нем вырезы разной формы и, растянув этот лист в продольном его направлении, зачерчивал форму тех кривых, в которые обращались первоначальные прямые линии, начерченные на листе. По этим линиям получалась картина распределения деформаций, а значит и напряжений. Брун предлагал, делая подобные модели, изучать на них решение той плоской задачи, которая так блестяще решена аналитически Н. И. Мусхелишвили.

Случайно один из вырезов у Бруна был взят совершенно такой же формы, как одно из препятствий в опытах Хел-Шоу, показанных за год перед тем. Получилось почти полное тождество кривых Бруна и струйных линий Хел-Шоу.

Так как никто на это не обратил внимания, то я достал сообщения Общества за предыдущий год, попросил слова и объяснил, что это совпадение отнюдь не случайное, что способ Бруна есть механическое, а способ Хел-Шоу — гидродинамическое решение той же самой обобщенной задачи Дирихле и что нет надобности делать сложных моделей Бруна и сложных обмеров и зачерчиваний получаемых кривых, а стоит только соответствующей формы препятствие вставить в прибор Хел-Шоу и сделать снимок струйных линий, проектируя их на обыкновенную светочувствительную бумагу,— и вся картина деформаций будет получена автоматически. Такое сопоставление явлений из совершенно разных областей было совершенно неожиданно для собрания, и председательствующий в нем старый, в высшей степени опытный, инженер Бенжамен Мартель в своем заключительном слове с особенной благодарностью отметил сказанное мною.

Струйное течение теперь изучается многими способами, как представляющими видоизменение способа Хел-Шоу, так и другими, ибо оно имеет очень важное значение для аэродинамики. Может быть, была бы хорошая задача сопоставить такой «аэродинамический спектр» с теми решениями, которые даны Н. И. Мусхелишвили, и, исходя отсюда, разработать экспериментальный метод решения плоской задачи теории упругости.

Невольно приходит на ум и другой метод, столь блестяще разработанный академиком Н. Н. Павловским,— решение гидродинамической задачи, так сказать «электрическое», по определению эквипотенциальных линий и линий тока в проводящей пластинке, снабженной вырезами данной формы.

Все это представляет осуществление конформных преобразований, столь изящно в аналитической форме развитых Н. И. Мусхелишвили,

и показывает взаимную связь через общность дифференциальных уравнений между вопросами из самых, казалось бы, далеких друг от друга областей физики.

Здесь кстати вспомнить, что и самая функция напряжений введена в рассмотрение вопросов теории упругости знаменитым королевским астрономом сэром Дж. Биддель Эри, который, кажется, более 50 лет был директором Гринвичской обсерватории. В начале 1860-х годов он устраивал для нее новый большой меридианный круг с трубой, имевшей 8-дюймовый объектив. Ему пришлось считаться с гнутием трубы под влиянием веса объектива и окулярной части ее с разными приспособлениями, что на Парижской обсерватории вызвало недопустимые при таких точных наблюдениях, где речь идет о десятых долях секунды, погрешности, доходившие до двух секунд дуги.

Глава IV. К р у ч е н и е и и з г и б о д н о р о д н ы х и с о с т а в н ы х б р у с ь е в. Здесь дается превосходное изложение задачи Сен-Венана, а затем изучаются брусья из разнородного материала, столь важные для железобетонных сооружений, по совершенно новым методам, впервые развитым Н. И. Мусхелишвили.

Даже при беглом чтении книги Н. И. Мусхелишвили бросается в глаза оригинальность решений не только совершенно новых задач, им поставленных, но и задач, уже давно решенных другими авторами. Так, в главе I, в которой по существу ее содержания излагаются вещи, давно известные, автор многим вопросам придает более полное и отчетливое освещение, нежели это ранее делалось, а новый вывод условий совместности в форме Сен-Венана и Бельтрами—Мичелла принадлежит автору.

В главе II автору принадлежит новый строгий вывод формул Г. В. Колосова и ряда других формул, представляющих результаты в простой форме; обстоятельное исследование аналитического характера решения плоской задачи для многосвязной и для бесконечной областей дает здесь возможность обнаружить у многих других авторов ошибочные заключения.

Также имеет значение принадлежащее автору общее исследование вопроса о действии сосредоточенных сил и получение самого общего для них выражения, причем им также обнаруживаются ошибки многих авторов.

Установление связи температурных напряжений с многозначными смещениями также принадлежит Н. И. Мусхелишвили.

Все примеры в этой главе впервые решены автором, а если и были решены ранее, то гораздо более сложными способами.

Глава III целиком принадлежит автору как по оригинальности и общности решенных в ней задач, так и по общности метода, для этого примененного, также принадлежащего автору. Насколько этот метод важен, видно по тому, что автор в § 68 [1]) общее решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием дает на двух страницах крупной печати. Частный случай этой задачи решен Л. Фепплем (L. Föppl) в «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», причем это решение занимает 5 больших страниц мельчайшей печати, которые, если бы их набрать нашим академическим шрифтом, заняли бы около 20 страниц; в § 69 [2]) в нескольких строках решен пример, от которого пример Феппля составляет простейший частный случай.

---

[1]) § 82 настоящего издания.
[2]) § 82а настоящего издания.

В главе IV, как уже сказано, все относящееся к телам разнородным, начиная от самой постановки задачи, принадлежит Н. И. Мусхелишвили.

Из этого беглого очерка видно как богатое содержание, так разнообразие и важность рассмотренных в книге вопросов, оригинальность и общность методов, примененных к их решению.

Остается высказать пожелание, чтобы в будущих изданиях, которые, несомненно, понадобятся, автор пояснил общие выводы и формулы численными примерами и схемами расположения вычислений и указаниями о числе ординат или подразделений при выполнении квадратур по приближенным формулам для достижения в результатах точности, скажем, до $^1/_2\%$. Этим он окажет большую услугу инженерному делу, сделав свою прекрасную книгу более доступной тем лицам, которые его выводы будут применять к решению чисто практических вопросов строительного дела.

Академик *А. Крылов*

Н. И. Мусхелишвили

Некоторые основные задачи математической теории упругости

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

В этой вводной главе мы напоминаем основные понятия математической теории упругости, даем вывод полной системы уравнений механики упругого изотропного тела и доказываем некоторые основные предложения относительно этих уравнений.

Предполагается, что читатель хотя бы отчасти знаком с физическими основами теории упругости, и потому мы не вдаемся подробно в эту сторону дела[1]). Все сказанное в отделах I и II настоящей главы относится ко всякого рода телам, которые можно, с достаточным приближением, рассматривать как «сплошные» (жидкости, упругие и пластические тела и пр.). Только начиная с отдела III вводятся предположения, характеризующие (идеальное) упругое тело как таковое.

Во всей этой главе координаты считаются прямоугольными, прямолинейными.

I. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 1. Объемные силы. В механике сплошных тел различают двоякого рода силы: *объемные силы*, относимые к элементам объема (или массы) тела, и *силы напряжения*, действующие на поверхностные элементы, которые можно (мысленно) провести внутри тела или выделить на его

[1]) Более подробное изложение физических основ, а также ряда общих теоретических и практических вопросов, не затронутых в этой книге, читатель может найти в курсах теории упругости, из которых назовем: Love [1] (эта вышедшая первым изданием в 1892—1893 гг. и во многих отношениях значительно устаревшая книга все же весьма полезна вследствие обилия материала), Папкович [1], Лейбензон [1], Тимошенко [1], Grammel [1], Burgatti [1], Sokolnikoff [1], Timoshenko a. Goodier [1], Green a. Zerna [1]; см. также Sneddon a. Berry [1]. Назовем еще курсы теоретической механики: Kirchhoff [1] и Webster [1], содержащие изложение основ теории упругости; первый из них, несмотря на более чем восьмидесятилетнюю давность, не утратил интереса и в настоящее время.

Краткий, но довольно обстоятельный очерк развития теории упругости дан в начале курса Лява (Love [1]). Очень подробная история теории упругости до 1893 г. с детальным анализом различных статей и книг дана Тодхёнтером и Пирсоном (Todhunter a. Pearson [1]). В книге Timoshenko [1] по истории сопротивления материалов имеются также краткие сведения по истории теории упругости вплоть до 1950 г.

поверхности. Чтобы пояснить это подробнее, вообразим себе, что из рассматриваемого сплошного тела выделена мысленно часть V произвольной формы, ограниченная поверхностью S. Мы принимаем, что совокупность внешних сил, действующих на выделенную часть V, можно представить состоящей из сил *объемных* (типичный пример — сила тяжести) и сил *поверхностных* (пример — давление).

Займемся сперва объемными силами. Объемные силы действуют на различные элементы объема тела, вернее — на массы, заключенные в этих элементах объема. При этом принимается, что сила, действующая на бесконечно малый элемент объема dV, имеет вид $\boldsymbol{\Phi}\, dV$, где $\boldsymbol{\Phi}$ — некоторый конечный вектор [1]); за точку приложения вектора $\boldsymbol{\Phi}$ можно принять любую точку (x, y, z) элемента.

Вектор $\boldsymbol{\Phi}$ называется *объемной силой*, рассчитанной на единицу объема. Если ϱ обозначает плотность в данном месте тела (количество массы в единице объема), то вектор $\boldsymbol{\Phi}/\varrho$ будет объемной силой, рассчитанной на единицу массы.

В случае силы тяжести вектор $\boldsymbol{\Phi}$ направлен вертикально вниз и равен по величине ϱg, где g — ускорение силы тяжести.

Вообще говоря, вектор $\boldsymbol{\Phi}$ зависит от положения в теле элемента объема, к которому он относится, или, иными словами, от координат x, y, z точки, около которой выделен элемент dV, считаемый бесконечно малым. Кроме того, в случае динамическом, $\boldsymbol{\Phi}$ зависит от времени.

З а м е ч а н и е. Математически утверждение, что объемная сила, действующая на элемент объема dV, может быть представлена вектором $\boldsymbol{\Phi}\, dV$, приложенным к некоторой точке элемента dV, надо понимать в том смысле, что главный вектор $\boldsymbol{\Psi}$ объемных сил, действующих на любой конечный объем V тела, можно представить в виде тройного интеграла

$$\boldsymbol{\Psi} = \iiint_V \boldsymbol{\Phi}\, dV = \iiint_V \boldsymbol{\Phi}\, dx\, dy\, dz, \tag{1}$$

а главные моменты тех же сил относительно осей Ox, Oy, Oz прямоугольной, прямолинейной системы координат — тройными интегралами:

$$M_x = \iiint_V (yZ - zY)\, dx\, dy\, dz, \quad M_y = \iiint_V (zX - xZ)\, dx\, dy\, dz,$$
$$M_z = \iiint_V (xY - yX)\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

где X, Y, Z обозначают компоненты [2]) вектора $\boldsymbol{\Phi}$.

---

[1]) Векторы мы будем обозначать жирными буквами, например, $\boldsymbol{P}$, или двумя буквами обычного шрифта с чертой наверху, например, $\overline{AB}$ (A — начало, B — конец вектора). Длины векторов $\boldsymbol{P}$ или $\overline{AB}$ будем обозначать через P или $|AB|$.

[2]) Под компонентами вектора мы всегда будем понимать *скалярные* величины. Многие авторы, например Love [1], через X, Y, Z обозначают компоненты объемной силы, отнесенной к единице массы. При этих обозначениях компоненты вектора $\boldsymbol{\Phi}$ будут: ϱX, ϱY, ϱZ, где ϱ — плотность.

§ 2. Напряжения. Поверхностные силы действуют на элементы поверхности S мысленно выделенной части V (см. § 1). Принимается, что сила, действующая на бесконечно малый элемент поверхности dS, имеет вид $\boldsymbol{F}\,dS$, где $\boldsymbol{F}$ — некоторый конечный вектор. Точкой приложения вектора $\boldsymbol{F}$ может считаться любая точка, принадлежащая элементу dS. Точное математическое содержание этого положения определяется совершенно аналогично тому, как это указано в замечании в конце § 1 относительно объемных сил.

Сила $\boldsymbol{F}\,dS$ называется *силой напряжения*, или *усилием*, действующим на элемент dS, а вектор $\boldsymbol{F}$ — усилием, рассчитанным на единицу площади, или *напряжением*. Часто также мы будем называть $\boldsymbol{F}$ *вектором напряжения*.

Усилие $\boldsymbol{F}\,dS$ выражает собой силу взаимодействия частей сплошного тела, примыкающих с одной и с другой стороны к поверхностному элементу dS. При этом $\boldsymbol{F}\,dS$ выражает силу, с которой часть, находящаяся вне V, действует на часть, принадлежащую V; сила же, с которой часть, находящаяся внутри, действует на часть, находящуюся вне V, будет на основании принципа равенства действия и противодействия равна $-\boldsymbol{F}\,dS$.

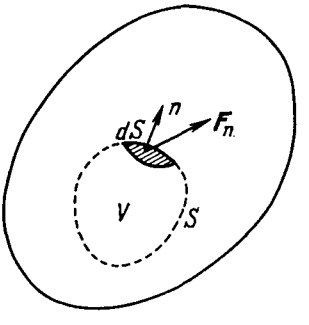


Рис. 1.

Вообще всякая площадка (т. е. поверхностный элемент), мысленно проведенная внутри тела, разграничивает два элемента тела, примыкающие к площадке с той и другой стороны. Для того, чтобы различить эти два элемента тела, проведем нормаль n к рассматриваемой площадке и будем приписывать ей определенное положительное направление (рис. 1). *Под усилием, действующим на площадку, мы всегда будем подразумевать силу, с которой часть тела, находящаяся с положительной стороны нормали, действует на часть, находящуюся с отрицательной стороны* (то же относится и к напряжениям, т. е. усилиям, рассчитанным на единицу площади). Таким образом, когда мы хотим рассматривать усилия, действующие со стороны окружающего тела на поверхность S выделенной части V, то мы должны рассматривать нормаль к S, *внешнюю* по отношению к V.

Вектор $\boldsymbol{F}$ зависит, как и объемная сила, от положения элемента dS и (в динамическом случае) от времени. Но, кроме того, он, очевидно, зависит от *ориентировки* площадки в теле, т. е. *от направления нормали* n. Поэтому, когда требуется указать, что напряжение $\boldsymbol{F}$ относится к площадке, нормаль к которой есть n, мы будем писать: $\boldsymbol{F}_n$. Компоненты этого вектора мы будем обозначать через X_n, Y_n, Z_n.

§ 3. Компоненты напряжения. Зависимость напряжения от ориентировки площадки. Имея в виду изучить зависимость напряжения от ориентировки площадки, возьмем какую-либо прямоугольную, прямолинейную

систему осей координат $Oxyz$. Пусть M — данная точка, через которую проводится площадка. Мы увидим, что достаточно знать напряжения, действующие на три взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через M, для того чтобы уметь вычислить напряжение, действующее на площадку, ориентированную любым образом (и проходящую через ту же точку). За упомянутые три площадки возьмем площадки, перпендикулярные к осям координат Ox, Oy, Oz, причем *за положительные направления нормалей* к этим площадкам примем *положительные направления соответствующих осей.*

Введем теперь следующие обозначения, которые будем применять во всем дальнейшем. Компоненты вектора напряжения, действующего на площадку, нормальную к оси Ox, обозначим через X_x, Y_x, Z_x; индекс x указывает на то, что рассматриваемая площадка нормальна к оси Ox. X_x измеряет *нормальную компоненту* напряжения, действующего на нашу площадку, а Y_x, Z_x — компоненты *касательного* или *скалывающего* напряжения. Аналогично обозначим компоненты вектора напряжения, действующего на площадку, нормальную к оси Oy, через X_y, Y_y, Z_y, а компоненты напряжения, действующего на площадку, нормальную к Oz,— через X_z, Y_z, Z_z. Величины

$$\left.\begin{matrix} X_x, & Y_x, & Z_x, \\ X_y, & Y_y, & Z_y, \\ X_z, & Y_z, & Z_z, \end{matrix}\right\} \tag{1}$$

вполне характеризуют, как мы увидим, напряженное состояние в окрестности рассматриваемой точки. Поэтому они называются *компонентами напряжения* (в данной точке, в данный момент времени). Эти компоненты изображены на рис. 2. Не надо упускать из виду, что, по нашему определению, они — *скалярные величины.* На рис. 2, например, изображена не сама величина X_x, а вектор, алгебраическое значение которого по оси Ox равно X_x.

Для того чтобы найти зависимость между величинами (1) и компонентами вектора напряжения $\boldsymbol{F}_n$, действующего на площадку с нормалью n, проходящую через данную точку M, прибегнем к следующему приему. Проведем через точку M три плоскости, параллельные плоскостям координат, и, кроме того, проведем на некотором расстоянии h от точки M плоскость, имеющую нормаль n. Упомянутые четыре плоскости образуют тетраэдр, три грани которого параллельны плоскостям координат, а четвертая ABC — рассматриваемой площадке (рис. 3).

Будем здесь, как и в дальнейшем, считать (если противное не оговорено особо), что объемные силы и напряжения изменяются непрерывно с положением точки, к которой они относятся. Будем, кроме того, считать, что мы имеем дело с *равновесием*, и выразим на основании известного принципа статики, что главный вектор совокупности внешних сил, действующих на рассматриваемый тетраэдр, равен нулю.

Имея в виду переход к пределу $h \to 0$, будем считать размеры тетраэдра бесконечно малыми.

Подсчитаем проекцию на ось Ox главного вектора всех внешних сил, действующих на тетраэдр.

Все рассуждения будем вести в предположении, что отрезки $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ направлены соответственно в те же стороны, что оси Ox, Oy, Oz.

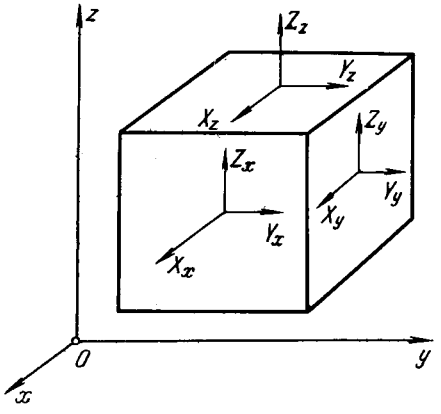


Рис. 2.

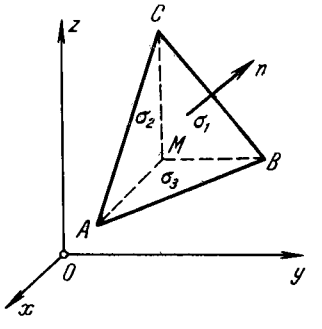


Рис. 3.

Читатель легко убедится, что результаты останутся справедливыми и для всех других случаев.

Проекция объемной силы равна $(X + \varepsilon)\,\Delta V$, где ΔV — объем тетраэдра. Значение X берется для точки M, а ε — бесконечно малая величина (в силу непрерывности величины X).

Далее, проекция усилия, действующего на площадку ABC, равна $(X_n + \varepsilon')\,\sigma$, где σ обозначает площадь треугольника ABC, а ε' — бесконечно малую величину; X_n, Y_n, Z_n обозначают, напоминаем, компоненты вектора напряжения, действующего на площадку с нормалью n в точке M.

Наконец, проекция внешнего усилия, действующего на площадку MBC, нормальную к оси Ox, равна $(-X_x + \varepsilon_1)\,\sigma_1$, где σ_1 — площадь треугольника MBC, а ε_1 — бесконечно малая величина. Здесь берется $-X_x$, а не $+X_x$, так как мы имеем дело с силой, действующей на площадку со стороны части тела, расположенной с отрицательной стороны нормали к площадке (вспомним, что при определении величины X_x за положительную нормаль была взята нормаль, направленная так же, как ось Ox). Для площадок MCA и MAB получаем, совершенно аналогично, величины $(-X_y + \varepsilon_2)\,\sigma_2$, $(-X_z + \varepsilon_3)\,\sigma_3$.

Итак, замечая, что

$$\Delta V = \frac{1}{3} h\sigma, \quad \sigma_1 = \sigma \cos(n, x), \quad \sigma_2 = \sigma \cos(n, y), \quad \sigma_3 = \sigma \cos(n, z),$$

имеем:

$$(X+\varepsilon)\frac{1}{3}h\sigma+(X_n+\varepsilon')\sigma+(-X_x+\varepsilon_1)\sigma\cos(n,x)+$$
$$+(-X_y+\varepsilon_2)\sigma\cos(n,y)+(-X_z+\varepsilon_3)\sigma\cos(n,z)=0.$$

Разделяя на σ и переходя к пределу $h\to 0$, получим окончательно формулы, из которых две последние написаны по аналогии с первой [1]):

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),\\ Y_n &= Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z),\\ Z_n &= Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 4. Уравнения, связывающие компоненты напряжения. Из элементов теоретической механики известно, что главный вектор и главный момент всех *внешних* сил, действующих на любое материальное тело, находящееся в равновесии, равны нулю. В случае абсолютно твердого (или, как мы кратко будем говорить, *жесткого*) тела это условие дает систему шести конечных уравнений, вполне характеризующих состояние равновесия. В случае же деформируемого тела упомянутое условие, если его применять ко всему телу как целому, далеко не дает *всех* элементов, характеризующих равновесие. Однако из этого условия можно и в нашем случае извлечь уравнения, дающие (в совокупности с законом, выражающим зависимость между напряжениями и деформацией, о чем будет речь впереди) все необходимые соотношения. Но для этого упомянутое условие следует применить не только ко всему телу, как целому, а к каждой части, которую можно мысленно из него выделить.

Во всем дальнейшем будем считать, если противное не оговорено особо, что компоненты напряжения не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка во всей области, занятой телом.

Пусть V — произвольная часть рассматриваемого тела (находящегося, по предположению, в равновесии), ограниченная замкнутой поверхностью S. Выразим сперва условие, что главный вектор всех *внешних* сил, действующих на часть V, равен нулю.

Проекция главного вектора объемных сил на ось Ox равна

$$\iiint_V X\,dV,$$

а проекция главного вектора усилий, действующих на поверхность S, равна

$$\iint_S X_n\,dS.$$

[1]) Соотношения (2), так же как и все соотношения, выведенные в § 4, были впервые найдены Коши (A. L. Cauchy, 1789—1857) в мемуаре, представленном Парижской Академии в 1822 г.; результаты этого мемуара были опубликованы частями в 1823—1828 гг.

Вводя в последнюю формулу, вместо X_n, выражение из (2) § 3 и приравнивая нулю сумму проекций на ось Ox объемных и поверхностных сил, получаем:

$$\iiint_V X\,dV + \iint_S [X_x\cos(n, x) + X_y\cos(n, y) + X_z\cos(n, z)]\,dS = 0,$$

где n обозначает внешнюю нормаль.

Но на основании известной формулы Остроградского — Грина

$$\iint_S [X_x\cos(n, x) + X_y\cos(n, y) + X_z\cos(n, z)]\,dS =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dV.$$

Внося это выражение в предыдущую формулу, получаем, наконец:

$$\iiint_V \left(X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dV = 0.$$

Вспомним теперь, что предыдущее равенство должно иметь место для *любой* области V, выделенной в теле, а это возможно только тогда, когда подынтегральная функция равна нулю в каждой точке тела [1]). Итак, мы получаем уравнения (два последних написаны по аналогии с первым):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти уравнения, на которые нам часто придется ссылаться, мы будем называть для краткости *уравнениями равновесия*.

Применим теперь условие равенства нулю главного момента внешних сил относительно начала координат или, что сводится к тому же, условие равенства нулю главных моментов относительно осей координат.

---

[1]) Если $F(x, y, z)$ — непрерывная функция в данной области и

$$\iiint_V F(x, y, z)\,dV = 0$$

для *любой* области V, выделенной из данной, то $F(x, y, z) = 0$ во всей области. Действительно, пусть, например, $F(x, y, z) > 0$ в какой-либо точке (x_0, y_0, z_0). Тогда, в силу непрерывности функции F, вокруг точки (x_0, y_0, z_0) можно выделить такую область V, что в ней $F(x, y, z) > \varepsilon$, где ε — положительная постоянная. Но тогда

$$\iiint_V F\,dV > \varepsilon V > 0,$$

что противоречит условию.

Написав, что главный момент относительно оси Ox объемных сил и напряжений, действующих на поверхность S выделенного объема V, равен нулю, получим:

$$\iiint_V (yZ - zY)\,dV + \iint_S (yZ_n - zY_n)\,dS = 0. \qquad \text{(a)}$$

Но в силу формул (2) § 3

$$\iint_S (yZ_n - zY_n)\,dS = \iint_S \{(yZ_x - zY_x)\cos(n, x) + (yZ_y - zY_y)\cos(n, y) + (yZ_z - zY_z)\cos(n, z)\}\,dS,$$

или, преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского — Грина,

$$\iint_S (yZ_n - zY_n)\,dS = \iiint_V \left\{y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + Z_y - Y_z\right\} dV.$$

Внося это значение в соотношение (а) и принимая во внимание уравнения (1), получаем

$$\iiint_V (Z_y - Y_z)\,dV = 0.$$

Так как область V произвольна, то отсюда следует (см. примечание на предыдущей странице):

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \qquad (2)$$

Две последние формулы получены из первой путем круговой перестановки букв (мы бы их получили непосредственно, применяя предыдущие выкладки к осям Oy и Oz).

Таким образом, мы видим, что в таблице компонент напряжения

$$\left.\begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

члены, симметричные относительно главной диагонали (идущей от верхнего левого угла к нижнему правому), попарно равны; иными словами, таблица (А) *симметрична*.

Среди девяти членов таблицы оказывается только шесть различных:

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z = Z_y,\ Z_x = X_z,\ X_y = Y_x.$$

Следовательно, можно сказать, что напряженное состояние в данной точке характеризуется *шестью* величинами (А).

Формулы (2) можно словесно высказать в виде следующего предложения. Пусть имеются две площадки, проходящие через одну и ту же точку; тогда *проекция напряжения, действующего на первую пло-*

щадку, на нормаль ко второй равна проекции напряжения, действующего на вторую площадку, на нормаль к первой. Собственно говоря, формулы (2) доказывают непосредственно это предложение только в случае, когда площадки взаимно перпендикулярны (параллельны двум из плоскостей координат). Но легко обобщить этот результат на случай двух любых площадок и получить таким образом только что формулированное предложение.

Действительно, пусть α', β', γ' — косинусы направления нормали n' к первой площадке, а α'', β'', γ'' — косинусы направления нормали n'' ко второй. Тогда компоненты вектора напряжения $\boldsymbol{F}_{n'}$, действующего на первую площадку, будут на основании формул (2) § 3 равны:

$$X_{n'} = X_x\alpha' + X_y\beta' + X_z\gamma', \qquad Y_{n'} = Y_x\alpha' + Y_y\beta' + Y_z\gamma',$$
$$Z_{n'} = Z_x\alpha' + Z_y\beta' + Z_z\gamma'.$$

Если принять во внимание соотношения (2), то проекция этого напряжения на нормаль ко второй площадке будет дана формулой:

$$\text{пр}_{n''}\boldsymbol{F}_{n'} = X_{n'}\alpha'' + Y_{n'}\beta'' + Z_{n'}\gamma'' = X_x\alpha'\alpha'' + Y_y\beta'\beta'' + Z_z\gamma'\gamma'' + \\ + Y_z(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') + Z_x(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') + X_y(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'). \qquad (3)$$

Полученное выражение, как мы видим, содержит совершенно симметрично величины α', β', γ' и α'', β'', γ'' и поэтому не изменится, если поменять ролями наши две площадки, а это и доказывает высказанное предложение.

Замечание относительно обозначений. Обозначения X_x, Y_y и т. д. для компонент напряжения, принятые нами, были впервые введены Ф. Нейманом (1841 г.) и получили большое распространение. Они приняты, например, в курсах Кирхгоффа (Kirchhoff [1]), Лява (Love [1]) и др. Кроме этих обозначений, применяются и некоторые другие. Мы упомянем только следующие:

$$\tau_{xx} = X_x, \quad \tau_{yy} = Y_y, \quad \tau_{zz} = Z_z, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = Y_z = Z_y,$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = Z_x = X_z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = X_y = Y_x,$$

которые, как и предыдущие, очень распространены (с теми или иными несущественными видоизменениями) в литературе, особенно современной. Они весьма удобны со многих точек зрения, главным образом потому, что согласуются с современными тензорными обозначениями. Часто вместо τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} пишут σ_x, σ_y, σ_z.

§ 5. Замена координат. Инвариантная квадратичная форма. Тензор напряжений. Формула (3) § 4 позволяет вычислить проекцию на любое направление вектора напряжения, действующего на данную площадку. В частности, мы можем применить эту формулу для вывода формул перехода от одной системы прямоугольных осей $Oxyz$ к другой системе $Ox'y'z'$.

Пусть косинусы направлений осей «новой» системы $Ox'y'z'$ по отношению к осям «старой» $Oxyz$ заданы следующей таблицей:

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

В этой таблице, например, α_1, β_1, γ_1 обозначают косинусы направления оси Ox' относительно старых осей, т. е.

$$\alpha_1 = \cos(x', x), \quad \beta_1 = \cos(x', y), \quad \gamma_1 = \cos(x', z).$$

Компоненты напряжения относительно новой системы осей обозначим через $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $Z'_{z'}$, $Y'_{z'}$, $Z'_{x'}$, $X'_{y'}$ и найдем формулы, выражающие эти «новые» компоненты через старые: X_x, Y_y, . . ., X_y.

Формула (3) § 4 сразу же дает требуемые выражения. Например, для $X'_{x'}$ получим:

$$X'_{x'} = \text{пр}_{x'} \boldsymbol{F}_{x'},$$

где $\boldsymbol{F}_{x'}$ обозначает вектор напряжения, действующего на площадку, нормальную к новой оси Ox'. Следовательно, в формуле (3) § 4 надо взять

$$\alpha' = \alpha'' = \alpha_1, \quad \beta' = \beta'' = \beta_1, \quad \gamma' = \gamma'' = \gamma_1,$$

что дает первую из следующих формул, которые мы выписываем для справок (остальные получаются совершенно аналогичным путем):

$$\left.\begin{aligned}
X'_{x'} &= X_x\alpha_1^2 + Y_y\beta_1^2 + Z_z\gamma_1^2 + 2Y_z\beta_1\gamma_1 + 2Z_x\gamma_1\alpha_1 + 2X_y\alpha_1\beta_1,\\
Y'_{y'} &= X_x\alpha_2^2 + Y_y\beta_2^2 + Z_z\gamma_2^2 + 2Y_z\beta_2\gamma_2 + 2Z_x\gamma_2\alpha_2 + 2X_y\alpha_2\beta_2,\\
Z'_{z'} &= X_x\alpha_3^2 + Y_y\beta_3^2 + Z_z\gamma_3^2 + 2Y_z\beta_3\gamma_3 + 2Z_x\gamma_3\alpha_3 + 2X_y\alpha_3\beta_3,\\
Y'_{z'} &= X_x\alpha_2\alpha_3 + Y_y\beta_2\beta_3 + Z_z\gamma_2\gamma_3 + Y_z(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + Z_x(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) + X_y(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2),\\
Z'_{x'} &= X_x\alpha_3\alpha_1 + Y_y\beta_3\beta_1 + Z_z\gamma_3\gamma_1 + Y_z(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + Z_x(\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) + X_y(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3),\\
X'_{y'} &= X_x\alpha_1\alpha_2 + Y_y\beta_1\beta_2 + Z_z\gamma_1\gamma_2 + Y_z(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + Z_x(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) + X_y(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Из этих формул, между прочим, следует одно важное соотношение. Именно, если сложим первые три из них и примем во внимание известные формулы

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

то получим:

$$X'_{x'} + Y'_{y'} + Z'_{z'} = X_x + Y_y + Z_z.$$

Предыдущую формулу можно высказать так: *выражение*

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z$$

инвариантно по отношению к преобразованию (прямоугольных, прямолинейных) координат. Можно дать еще следующую формулировку: сумма нормальных компонент напряжений, действующих на три взаимно перпендикулярные площадки, не зависит от ориентации этой тройки площадок.

Вернемся к формуле (3) § 4 и применим ее к вычислению нормальной компоненты напряжения $\boldsymbol{F}_n$, действующего на площадку с нормалью n.

Пусть N обозначает искомую нормальную компоненту, т. е. $N = \text{пр}_n \boldsymbol{F}_n$. При $N > 0$ будем иметь *растягивающее* нормальное напряжение, при $N < 0$ — *сжимающее* (давление).

Если α, β, γ — косинусы направления нормали n, то формула (3) § 4 даст простую и важную формулу:

$$N = X_x\alpha^2 + Y_y\beta^2 + Z_z\gamma^2 + 2Y_z\beta\gamma + 2Z_x\gamma\alpha + 2X_y\alpha\beta. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$2\Omega(\xi, \eta, \zeta) = X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2Y_z\eta\zeta + 2Z_x\zeta\xi + 2X_y\xi\eta. \tag{3}$$

Функция $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ есть однородная целая рациональная функция второго порядка от ξ, η, ζ, т. е., как говорят, *квадратичная форма* переменных ξ, η, ζ. Она имеет весьма простой геометрический смысл. Действительно, пусть $\boldsymbol{P} = (\xi, \eta, \zeta)$ обозначает вектор [1]), нормальный к рассматриваемой площадке, направленный в ту же сторону, что и положительная нормаль n. Тогда

$$\alpha = \frac{\xi}{P}, \qquad \beta = \frac{\eta}{P}, \qquad \gamma = \frac{\zeta}{P},$$

где P — длина вектора $\boldsymbol{P}$, и формула (2) дает

$$N \cdot P^2 = 2\Omega(\xi, \eta, \zeta). \tag{4}$$

Заметим теперь следующее. Величина N по нашему определению имеет непосредственный физический смысл и потому не должна зависеть от выбора осей координат. Так же точно величина P^2 (квадрат длины вектора) не зависит от выбора осей координат. Следовательно, квадратичная форма $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ не должна зависеть от выбора осей координат, т. е. должна быть инвариантной по отношению к преобразованию (прямоугольных, прямолинейных) координат.

Иными словами, если ξ', η', ζ' обозначают компоненты вектора $\boldsymbol{P}$ относительно новых осей, а $\Omega'(\xi', \eta', \zeta')$ — квадратичную форму, составленную из ξ', η', ζ' и $X_{x'}$, $Y_{y'}$, . . ., $X_{y'}$, таким же образом, как $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ составлена из ξ, η, ζ, X_x, Y_y, . . ., X_y, то мы должны иметь

$$\Omega'(\xi', \eta', \zeta') = \Omega(\xi, \eta, \zeta), \tag{5}$$

[1]) Вообще через (ξ, η, ζ) мы иногда будем обозначать вектор, имеющий компонентами ξ, η, ζ. Так же обозначается точка с координатами ξ, η, ζ, но смешение здесь невозможно.

или, подробнее,

$$X'_{x'}\xi'^2+Y'_{y'}\eta'^2+Z'_{z'}\zeta'^2+2Y'_{z'}\eta'\zeta'+2Z'_{x'}\zeta'\xi'+2X'_{y'}\xi'\eta'= \\ =X_x\xi^2+Y_y\eta^2+Z_z\zeta^2+2Y_z\eta\zeta+2Z_x\xi\xi+2X_y\xi\eta. \qquad (5')$$

Это равенство должно обратиться в тождество, если в левую часть вместо $X'_{x'}, \ldots, X'_{y'}$ подставить их выражения (1), а в правую вместо ξ, η, ζ — их выражения через новые компоненты, т. е. согласно известным формулам аналитической геометрии положить:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\alpha_1\xi'+\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta',\\ \eta&=\beta_1\xi'+\beta_2\eta'+\beta_3\zeta',\\ \zeta&=\gamma_1\xi'+\gamma_2\eta'+\gamma_3\zeta'.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Легко непосредственной проверкой убедиться, что это действительно так и будет. Для этого достаточно внести в правую часть формулы (5′) выражения (6) и сравнить в обеих частях полученной формулы коэффициенты при $\xi'^2, \eta'^2, \zeta'^2, \eta'\zeta', \zeta'\xi', \xi'\eta'$. Тогда увидим, что для $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$ и т. д. получатся как раз выражения (1).

Таким образом, для получения формул перехода (1) мы можем пользоваться только что указанным правилом, весьма удобным для практики. Именно, для получения этих формул достаточно написать формулу (5′), внести в правую часть (или левую, если мы хотим получить формулы перехода от новых компонент напряжения к старым) выражения ξ, η, ζ через ξ', η', ζ' (или обратные выражения ξ', η', ζ' через ξ, η, ζ) и сравнить коэффициенты при квадратах и произведениях переменных ξ', η', ζ' (или ξ, η, ζ).

Свойство инвариантности квадратичной формы $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ показывает, что компоненты напряжения $X_x, \ldots, X_y$ суть компоненты (симметричного) *тензора* второго ранга [1]); этот тензор называется *тензором напряжений*.

---

[1]) В основном тексте этой книги мы не будем предполагать у читателей знакомства с тензорным исчислением. Для понимания некоторых подстрочных примечаний достаточно прочесть Добавление I в конце книги. Для понимания же сказанного в основном тексте достаточно знать следующее.

Пусть имеется квадратичная форма

$$2\Omega(\xi, \eta, \zeta)=\tau_{xx}\xi^2+\tau_{yy}\eta^2+\tau_{zz}\zeta^2+2\tau_{yz}\eta\zeta+2\tau_{zx}\zeta\xi+2\tau_{xy}\xi\eta,$$

где ξ, η, ζ — компоненты некоторого вектора (произвольного), а коэффициенты $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{xy}$ — величины, не зависящие от ξ, η, ζ, но зависящие от направлений осей (прямоугольной, прямолинейной) системы координат. Если при переходе от одной системы осей к другой коэффициенты $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{xy}$ изменяются по такому закону, что квадратичная форма Ω остается инвариантной, то говорят, что совокупность величин $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{xy}$ (зависящих от *двух* индексов) представляет *симметричный тензор второго* (по числу индексов) *ранга*. Величины τ_{xx} и т. д. называются *компонентами* тензора.

При обозначениях, принятых в тексте, $\tau_{xx}=X_x$ и т. д. (см. замечание в конце § 4). Определение несимметричного тензора второго ранга см в Добавлении I.

§ 6. Поверхность напряжений. Главные напряжения. Рассмотрение квадратичной формы $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$, введенной в § 5, позволяет дать очень простое и наглядное геометрическое представление зависимости вектора напряжения от ориентировки площадки, к которой он относится; речь здесь идет о площадках, проходящих через какую-либо определенную точку тела.

Возьмем для сокращения письма начало координат в рассматриваемой точке. Формула (4) § 5

$$N \cdot P^2 = 2\Omega(\xi, \eta, \zeta)$$

позволяет вычислить нормальную компоненту напряжения, действующего на площадку, нормаль к которой имеет направление вектора $\boldsymbol{P} = (\xi, \eta, \zeta)$; длина P этого вектора может быть взята совершенно произвольно.

В дальнейшем мы будем считать, что форма $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ не равна тождественно нулю, ибо очевидно, что если эта форма равна тождественно нулю, то напряжения вообще отсутствуют (в данной точке).

Пользуясь произвольностью длины P, будем подбирать ее так, чтобы $N \cdot P^2 = \pm c^2$, где c — произвольная, но раз навсегда выбранная постоянная, отличная от нуля [1]); мы не исключаем случая, когда при некоторых ориентациях площадки $N = 0$; при $N = 0$ мы будем считать $P = \infty$.

Таким образом,

$$P = \sqrt{\frac{\pm c^2}{N}}, \quad N = \frac{\pm c^2}{P^2}, \tag{1}$$

причем знак перед c^2 будем подбирать так, чтобы $\pm c^2$ и N имели одинаковый знак (иными словами, будем брать $+c^2$, если имеем дело с растягивающим нормальным напряжением, и $-c^2$, если напряжение сжимающее).

Будем откладывать вектор $\boldsymbol{P} = \overline{OH}$ от начала координат O. Тогда конец $H(\xi, \eta, \zeta)$ вектора $\boldsymbol{P}$ будет находиться на поверхности

$$2\Omega(\xi, \eta, \zeta) = \pm c^2, \tag{2}$$

или, подробнее,

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + \ldots + 2X_y\xi\eta = \pm c^2. \tag{3}$$

При этом знак в правой части должен быть выбран вполне определенным образом, в зависимости от знака N, в соответствии со сказанным выше.

Поверхность (2) или (3) при определенном знаке в правой части есть, очевидно, центральная поверхность второго порядка (с центром в начале координат). Она называется *поверхностью напряжений*, относящейся к данной точке тела («квадрика напряжений Коши»). Мы увидим ниже, что возможны два случая: в одном — знак в правой части уравнения (2)

[1]) c^2 имеет размерность силы.

или (3) должен оставаться неизменным для всех возможных ориентаций площадки; в другом — приходится брать то один, то другой знак в зависимости от ориентации площадки. В последнем случае мы будем, таким образом, иметь в сущности дело не с одной, а с двумя поверхностями второго порядка [1]):

$$2\Omega = +c^2 \quad \text{и} \quad 2\Omega = -c^2;$$

эти две поверхности имеют, очевидно, общие оси (см. ниже).

Если поверхность напряжений построена, то нахождение нормального напряжения, действующего на данную площадку (проходящую через начало координат), никакого затруднения не представляет: достаточно найти пересечение H нормали n к площадке с поверхностью (3) [мы увидим ниже, что это пересечение всегда существует, но при вполне определенном выборе знака в правой части]. Тогда нормальное напряжение определится по формуле (1), где $P = |OH|$.

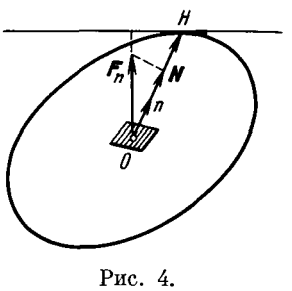


Рис. 4.

Далее, легко также построить *направление* вектора напряжения, действующего на площадку. Действительно, формулы (2) § 3 могут быть переписаны так, если вспомнить, что $\cos(n, x) = \frac{\xi}{P}$ и т. д.:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{P}(X_x\xi + X_y\eta + X_z\zeta) = \frac{1}{P}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ Y_n &= \frac{1}{P}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \quad Z_n = \frac{1}{P}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти формулы показывают, что вектор $\boldsymbol{F}_n$ параллелен нормали к поверхности (2), проведенной в точке H (ξ, η, ζ). Значит, чтобы найти направление $\boldsymbol{F}_n$, достаточно провести в точке H касательную плоскость к поверхности напряжений и опустить на нее перпендикуляр из начала координат. Вектор $\boldsymbol{F}_n$ расположен на этом перпендикуляре (рис. 4). Так как, далее, проекция N вектора $\boldsymbol{F}_n$ на нормаль n к рассматриваемой площадке уже известна, то построение самого вектора $\boldsymbol{F}_n$ никакого труда не представляет.

Вектор $\boldsymbol{F}_n$ будет направлен по нормали n к площадке только в том случае, если радиус-вектор $\overline{OH}$ перпендикулярен к касательной плоскости в точке H. Тогда на рассматриваемую площадку будет действовать только нормальное напряжение, скалывающего же (касательного) не будет.

Как известно, радиус-вектор $\overline{OH}$ может быть перпендикулярен к касательной плоскости в точке H только тогда, когда $\overline{OH}$, а следовательно,

[1]) Можно было бы раз навсегда зафиксировать знак перед c^2 и иметь всегда дело с *одной* поверхностью, но тогда пришлось бы ввести в рассмотрение мнимые геометрические элементы.

и нормаль n к площадке имеет направление одного из главных диаметров (осей) поверхности (3); тогда сама площадка совпадает с главной диаметральной плоскостью, нормальной к этой оси.

Таких главных диаметров (осей), как известно, имеется в общем случае три, и они взаимно перпендикулярны. Только в частном случае, когда поверхность напряжений есть поверхность вращения, таких диаметров будет бесчисленное множество: один из них совпадает с осью вращения, а все остальные перпендикулярны к ней. Наконец, если поверхность напряжений есть сфера, то каждый диаметр будет главным.

Направление, обладающее тем свойством, что на перпендикулярную к нему площадку действует только нормальное напряжение, называется *главным направлением напряжений* или *главной осью напряжений*, а соответствующее нормальное напряжение — *главным напряжением*.

Как мы сейчас видели, таких направлений всегда существует три (и в общем случае — только три), и они взаимно перпендикулярны; в частных случаях их может быть бесчисленное множество; из них, однако, всегда можно выбрать три взаимно перпендикулярных.

Если направить оси координат по трем главным осям напряжений, т. е. по осям поверхности (3), то в ее уравнении, как известно, исчезнут члены, содержащие произведения координат, и оно примет вид:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = \pm c^2. \tag{5}$$

Здесь через N_1, N_2, N_3 обозначены значения величин X_x, Y_y, Z_z для новых осей координат. Из этого уравнения (а также и на основании самого определения главных осей напряжений) видно, что относительно новых осей координат компоненты Y_z, Z_x, X_y обращаются в нуль, т. е. на площадки, расположенные в плоскостях координат, скалывающие напряжения не действуют [1]).

Величины N_1, N_2, N_3 суть по определению главные напряжения (в данной точке). Характер распределения напряжений вокруг точки O зависит от знаков этих величин; мы предполагаем пока, что все они отличны от нуля.

Рассмотрим сперва случай, когда все главные напряжения положительны:

$$N_1 > 0, \quad N_2 > 0, \quad N_3 > 0.$$

Тогда, очевидно, в правой части уравнения (5) необходимо взять знак $+$, и оно примет вид:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = +c^2. \tag{5a}$$

Поверхность, выражаемая этим уравнением, есть, следовательно, эллипсоид. Из формулы (1) следует:

$$N = +\frac{c^2}{|OH|^2},$$

[1]) Разумеется, речь идет все время о площадках, проходящих через данную точку (в нашем случае — через начало координат). При переходе от одной точки тела к другой главные направления, вообще говоря, изменяются.

откуда видно, что нормальная компонента напряжения, действующего на любую площадку (проходящую через O), будет *растягивающей*.

Рассмотрим теперь случай, когда все главные напряжения отрицательны ($N_1 < 0$, $N_2 < 0$, $N_3 < 0$). Тогда в уравнении (5) необходимо взять знак минус, и оно примет вид:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = -c^2. \tag{5б}$$

Поверхность напряжений есть опять эллипсоид, но нормальное напряжение вычисляется уже по формуле $N = -\frac{c^2}{|OH|^2}$, показывающей, что, в отличие от предыдущего случая, оно будет для всех площадок *сжимающим*.

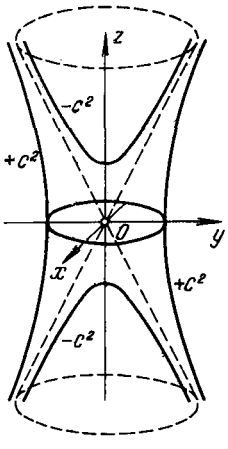


Рис. 5.

Наконец, рассмотрим случай, когда главные напряжения имеют различные знаки, например:

$$N_1 > 0, \quad N_2 > 0, \quad N_3 < 0.$$

Тогда уравнение (5) примет вид:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = +c^2 \tag{5в}$$

или

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = -c^2. \tag{5г}$$

Поверхность (5в) есть однополостный гиперболоид, поверхность (5г) —двуполостный. Обе поверхности разделены общим асимптотическим конусом

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 - |N_3|\zeta^2 = 0 \tag{6}$$

[см. рис. 5, на котором поверхность (5в) помечена $+c^2$, поверхность (5г) $-c^2$].

Если нормаль к площадке проходит вне асимптотического конуса, то она пересекает поверхность (5в); следовательно, для нормального напряжения получаем формулу

$$N = +\frac{c^2}{|OH|^2},$$

и оно будет растягивающим.

Если же эта нормаль проходит внутри асимптотического конуса, то она пересекает поверхность (5г); тогда для нормального напряжения находим

$$N = -\frac{c^2}{|OH|^2},$$

и оно будет сжимающим.

Наконец, если нормаль к площадке направлена по одной из образующих асимптотического конуса, то $|OH| = \infty$ и $N = 0$. Следовательно, на соответствующих площадках действуют только скалывающие напряжения.

Случай $N_1 < 0$, $N_2 < 0$, $N_3 > 0$ отличается от предыдущего лишь тем, что меняются ролями зона, где имеется растяжение, и зона сжатия.

Остальные случаи распределения знаков отличаются от двух предыдущих только тем, что меняются ролями оси координат.

Выше мы исключили случаи, когда одна или две из величин N_1, N_2, N_3 равны нулю [1]). В случае, когда равна нулю одна из величин N_1, N_2, N_3, поверхность напряжений вырождается в цилиндрическую, и мы имеем так называемое *плоское напряженное состояние* в данной точке, которое будет подробно рассмотрено в § 8. Случай же, когда две из этих величин обращаются в нуль, настолько прост, что читатель легко его разберет сам; в этом случае поверхность напряжений вырождается в совокупность двух параллельных плоскостей.

§ 7. Нахождение главных напряжений и главных осей. Вопрос о нахождении главных напряжений и соответствующих главных осей сводится, как мы видели, к отысканию такой системы координат, в которой квадратичная форма $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ принимает «канонический» вид:

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2.$$

Это эквивалентно нахождению главных диаметров поверхности напряжений, т. е. приведению ее уравнения к виду

$$N_1\xi^2 + N_2\eta^2 + N_3\zeta^2 = \pm c^2. \tag{1}$$

Решение этого вопроса можно найти в любом курсе аналитической геометрии или высшей алгебры. Оно дано также в Добавлении I в конце книги [2]).

Напомним, что значения коэффициентов N_1, N_2, N_3 уравнения (1), т. е. значения главных напряжений, являются корнями уравнения третьей степени [3]) относительно N:

$$\begin{vmatrix} X_x - N, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - N, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - N \end{vmatrix} = -N^3 + \Theta N^2 + AN + B = 0, \tag{2}$$

где для краткости введены обозначения:

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z, \tag{3}$$

$$A = Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2 - Y_yZ_z - Z_zX_x - X_xY_y,$$

$$B = \begin{vmatrix} X_x, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z \end{vmatrix}$$

или в раскрытом виде

$$B = X_xY_yZ_z + 2Y_zZ_xX_y - X_xY_z^2 - Y_yZ_x^2 - Z_zX_y^2.$$

Так как корни N_1, N_2, N_3 не зависят от выбора осей координат, то коэффициенты уравнения (2), т. е. величины Θ, A, B, также не должны зависеть от него. Иными словами, эти выражения инвариантны по

[1]) Случай $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ соответствует отсутствию напряжений.

[2]) В § 8 будет дано решение вопроса для случая плоского напряженного состояния.

[3]) См. Добавление I.

отношению к преобразованию прямоугольных, прямолинейных осей. Инвариантность выражения

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z$$

была уже доказана выше непосредственной проверкой. Это обстоятельство очевидно также на основании того, что сумма корней уравнения (2) должна равняться коэффициенту Θ, откуда следует:

$$N_1 + N_2 + N_3 = X_x + Y_y + Z_z. \tag{4}$$

§ 8. Случай плоского напряженного состояния. Напряженное состояние тела называется *плоским*, параллельным плоскости П, если, взяв эту последнюю плоскость за плоскость Oxy, будем иметь во всех точках тела

$$X_z = Y_z = Z_z = 0. \tag{1}$$

В этом случае будут отличны от нуля только три компоненты:

$$X_x,\ Y_y,\ X_y.$$

Если соотношения (1) имеют место не во всем теле, а в какой-либо данной точке, то говорят о плоском напряженном состоянии в *данной точке*.

Формулы (2) § 3 показывают, что для компонент вектора напряжения, действующего на любую площадку, проходящую через данную точку, будем иметь: $Z_n = 0$,

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y), \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из равенства $Z_n = 0$ следует, что при любой ориентации площадки действующее на нее напряжение будет параллельно плоскости Oxy.

Квадратичная форма $2\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ предыдущих параграфов в нашем случае принимает вид

$$2\Omega(\xi, \eta) = X_x\xi^2 + 2X_y\xi\eta + Y_y\eta^2, \tag{3}$$

и уравнение поверхности напряжений будет

$$X_x\xi^2 + 2X_y\xi\eta + Y_y\eta^2 = \pm c^2. \tag{4}$$

В нашем случае это — цилиндрическая поверхность, след которой на плоскости Oxy есть кривая второго порядка (4), имеющая центр в начале координат.

Если рассматривать площадки, нормальные к плоскости Oxy, то для всех построений, указанных в § 7, достаточно ограничиться рассмотрением этой кривой, а не всей цилиндрической поверхности.

Найдем теперь формулы перехода от компонент напряжения

$$X_x,\ Y_y,\ X_y$$

к компонентам

$$X'_{x'},\ Y'_{y'},\ X'_y.$$

относительно новой системы осей, получаемой из старой путем поворота системы осей Oxy в своей плоскости на угол α. Мы будем отсчитывать угол α (рис. 6) от старой оси Ox к новой Ox' в положительном направлении вращения на плоскости Oxy (т. е. ведущем кратчайшим путем от Ox к Oy).

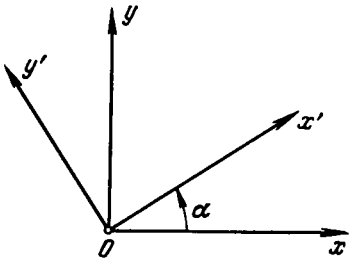


Рис. 6.

Формулы перехода можно получить из формул (1) § 5, но мы предпочтем вывести их заново, пользуясь свойством инвариантности квадратичной формы $\Omega(\xi, \eta)$ (см. конец § 5). Вспоминая известные формулы перехода от компонент вектора (ξ, η) к компонентам (ξ', η') того же вектора относительно новой системы:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos\alpha - \eta' \sin\alpha, \\ \eta &= \xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и внося эти выражения в правую часть равенства

$$X'_{x'}\xi'^2 + 2X'_{y'}\xi'\eta' + Y'_{y'}\eta'^2 = X_x\xi^2 + 2X_y\xi\eta + Y_y\eta^2, \tag{a}$$

получаем:

$$X'_{x'}\xi'^2 + 2X'_{y'}\xi'\eta' + Y'_{y'}\eta'^2 = X_x(\xi'\cos\alpha - \eta'\sin\alpha)^2 + \\ + 2X_y(\xi'\cos\alpha - \eta'\sin\alpha)(\xi'\sin\alpha + \eta'\cos\alpha) + Y_y(\xi'\sin\alpha + \eta'\cos\alpha)^2.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при ξ'^2, η'^2, $\xi'\eta'$, выводим:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= X_x\cos^2\alpha + Y_y\sin^2\alpha + 2X_y\sin\alpha\cos\alpha, \\ Y'_{y'} &= X_x\sin^2\alpha + Y_y\cos^2\alpha - 2X_y\sin\alpha\cos\alpha, \\ X'_{y'} &= (-X_x + Y_y)\sin\alpha\cos\alpha + X_y(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

После очевидных преобразований эти формулы можно переписать и так:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= \frac{X_x + Y_y}{2} + \frac{X_x - Y_y}{2}\cos 2\alpha + X_y\sin 2\alpha, \\ Y'_{y'} &= \frac{X_x + Y_y}{2} - \frac{X_x - Y_y}{2}\cos 2\alpha - X_y\sin 2\alpha, \\ X'_{y'} &= -\frac{X_x - Y_y}{2}\sin 2\alpha + X_y\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Непосредственная проверка показывает, что из предыдущих формул следует:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} + Y'_{y'} &= X_x + Y_y, \\ Y'_{y'} - X'_{x'} + 2iX'_{y'} &= (Y_y - X_x + 2iX_y)\,e^{2i\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Первая из этих формул давно известна и была доказана выше для более общего случая [см. формулу (2) § 5]. Вторая, весьма важная и удобная, формула была указана Мичеллом (Michell [3]) и найдена независимо от него Г. В. Колосовым [1].

Если внести в эту формулу $e^{2i\alpha} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$ и отделить действительные части от мнимых, то получим выражения для $Y'_{y'} - X'_{x'}$ и $X'_{y'}$ через старые компоненты. Комбинируя эти выражения с первой из формул (8), получим выражения для $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $X'_{y'}$ в отдельности, которые, как легко проверить, совпадают с выражениями (7).

Отметим еще одну формулу, получаемую вычитанием двух предыдущих:

$$2(X'_{x'} - iX'_{y'}) = X_x + Y_y - (Y_y - X_x + 2iX_y)\, e^{2i\alpha}. \tag{8'}$$

Вернемся к формулам (7). Они дают возможность весьма просто найти главные оси напряжений и главные напряжения.

Действительно, если Ox', Oy' суть искомые главные оси [1]), то должно быть $X'_{y'} = 0$, откуда на основании последней из формул (7) следует:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2X_y}{X_x - Y_y}. \tag{9}$$

Здесь α обозначает угол, отсчитываемый по указанному выше правилу, который главная ось Ox' составляет с осью Ox; мы исключаем случай, когда одновременно $X_x = Y_y$ и $X_y = 0$, ибо в этом случае всякое направление в плоскости Oxy является, очевидно, главным.

Предыдущая формула дает для α два значения; если одно из них обозначим через α_0, то второе будет $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$; остальные значения отличаются от предыдущих на кратное π. Для α можно, очевидно, взять любое из этих значений. Подставив это значение в первые две формулы (7), получим значения главных напряжений N_1, N_2; именно, первая формула дает значение главного напряжения N_1, соответствующего углу α, а вторая — значение N_2, соответствующее углу $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Если за старые оси координат взять главные оси, то получим

$$X_x = N_1,\ Y_y = N_2,\ X_y = 0,$$

и формулы (7) примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\alpha, \\ Y'_{y'} &= \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\alpha, \\ X'_{y'} &= -\frac{N_1 - N_2}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Последняя формула показывает, что максимальное по абсолютному значению скалывающее напряжение равно

$$|X'_{y'}|_{\max} = \frac{|N_1 - N_2|}{2},$$

[1]) Третья главная ось есть, очевидно, ось Oz.

т. е. равно абсолютному значению *полуразности главных напряжений*. Оно достигается для двух взаимно перпендикулярных площадок, делящих пополам углы между главными направлениями Ox, Oy (речь идет о площадках, перпендикулярных к плоскости Oxy).

Выпишем, наконец, формулы, по которым можно определить величины X_x, Y_y, X_y, если даны главные напряжения N_1 и N_2 и угол α, который главная ось, соответствующая N_1, образует с осью Ox. Эти формулы получим из формул (10), поменяв ролями старые и новые системы и заменив угол α на $-\alpha$. Именно, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X_x = \frac{N_1+N_2}{2} + \frac{N_1-N_2}{2}\cos 2\alpha, \quad Y_y = \frac{N_1+N_2}{2} - \frac{N_1-N_2}{2}\cos 2\alpha, \\ X_y = \frac{N_1-N_2}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Формулы (11) эквивалентны следующим, которые также вытекают непосредственно из формул (8):

$$X_x + Y_y = N_1 + N_2, \quad Y_y - X_x + 2iX_y = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}. \tag{12}$$

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что формулы перехода от компонент X_x, Y_y, X_y к компонентам $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $X'_{y'}$ при повороте осей Oxy в своей плоскости останутся теми же, что и приведенные выше, и в том случае, когда мы имеем дело с напряженным состоянием общего вида (а не только плоским), но при условии, что ось Oz является *одной из главных осей* (в рассматриваемой точке). Действительно, в этом случае

$$X_z = Y_z = X'_{z'} = Y'_{z'} = 0$$

(в рассматриваемой точке). Тождество (5′) § 5 примет в этом случае вид:

$$X_x\xi^2 + 2X_y\xi\eta + Y_y\eta^2 + N_3\zeta^2 = X'_{x'}\xi'^2 + 2X'_{y'}\xi'\eta' + Y'_{y'}\eta'^2 + N_3\zeta^2,$$

ибо по предположению ось Oz остается неизменной, а следовательно, $\zeta' = \zeta$; N_3 обозначает главное напряжение, соответствующее оси Oz, т. е.

$$N_3 = Z_z = Z'_{z'}.$$

Из предыдущего равенства следует равенство (а) настоящего параграфа, откуда и были выведены упомянутые выше формулы.

II. ДЕФОРМАЦИЯ

§ 9. Общие замечания. Под *деформацией* сплошного тела мы понимаем такое изменение положений точек тела, при котором изменяются взаимные расстояния между ними.

Отнесем рассматриваемое тело к прямоугольной, прямолинейной системе осей $Oxyz$ и будем обозначать через x, y, z координаты какой-либо точки тела до того, как произошла деформация, а через x^*, y^*, z^* — координаты той же точки после деформации.

Пусть V обозначает область, занятую телом до деформации. Каждая точка тела, занимавшая до деформации положение (x, y, z) в области V,

займет после деформации вполне определенное положение (x^*, y^*, z^*). Это есть наше основное предположение. Таким образом, координаты x^*, y^*, z^* должны быть определенными функциями координат x, y, z той же точки до деформации тела:

$$x^* = f_1(x, y, z),\ y^* = f_2(x, y, z),\ z^* = f_3(x, y, z). \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что функции f_1, f_2, f_3 непрерывны в области V (т. е. что деформация происходит без разрывов). Точки (x^*, y^*, z^*), соответствующие точкам (x, y, z) области V, заполнят некоторую область V^*; эта последняя есть область, занятая телом после деформации. Мы будем предполагать, что, обратно, координаты x, y, z суть определенные функции координат x^*, y^*, z^* [иными словами, что уравнения (1) однозначно разрешаются относительно величин x, y, z,] и что x, y, z — также непрерывные функции от x^*, y^*, z^* в области V^*.

Формулы (1), рассмотренные с геометрической точки зрения, характеризуют некоторое *преобразование* тела V в тело V^*. Заметим, что не всякое такое преобразование, т. е. не всякие соотношения вида (1), определяет деформацию тела в собственном смысле этого слова. Действительно, если мы переместим рассматриваемое тело как жесткое целое (такое перемещение мы будем называть *жестким*), то координаты x^*, y^*, z^* новых положений точек тела будут определенными функциями от x, y, z; однако здесь мы не имеем дела с *деформацией*, т. е. с *относительным* смещением точек тела друг относительно друга. Для дальнейшего весьма важно, имея заданными уравнения (1), уметь отделять собственно деформацию от жесткого перемещения; иными словами, важно найти величины, характеризующие *деформацию как таковую*.

§ 10. Аффинное преобразование. Преобразование вида (1) § 9 называется *аффинным*, если координаты x^*, y^*, z^* нового положения точки являются линейными функциями координат x, y, z старого положения, иными словами, если соотношения (1) § 9 принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= (1 + a_{11})\,x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y^* &= a_{21}x + (1 + a_{22})\,y + a_{23}z + b, \\ z^* &= a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})\,z + c, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, . . ., a, b, c — постоянные (по соображениям, которые станут ясными в дальнейшем, мы обозначили коэффициенты при диагональных членах через $1 + a_{11}$, $1 + a_{22}$, $1 + a_{33}$, а не просто через a_{11} и т. д.). На основании принятого в § 9 мы должны предположить, что эти уравнения однозначно разрешимы относительно x, y, z, т. е. что определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & 1 + a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & 1 + a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля.

Аффинное преобразование обладает многими простыми важными свойствами, из которых отметим только некоторые.

Прежде всего очевидно, что и обратное преобразование будет аффинным, так как, разрешив уравнения (1) относительно x, y, z, получим, очевидно, для x, y, z также линейные выражения относительно x^*, y^*, z^*:

$$\left.\begin{aligned} x &= (1+b_{11})\,x^* + b_{12}y^* + b_{13}z^* + a', \\ y &= b_{21}x^* + (1+b_{22})\,y^* + b_{23}z^* + b', \\ z &= b_{31}x^* + b_{32}y^* + (1+b_{33})\,z^* + c', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где b_{11}, b_{12}, . . ., a', b', c' — постоянные.

Далее, легко показать, что точки, находившиеся до преобразования на некоторой плоскости П, будут находиться и после преобразования на некоторой плоскости П*[1]). Действительно, пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ есть уравнение плоскости П. Подставив вместо x, y, z их выражения (3), увидим, что это уравнение преобразуется в уравнение, линейное относительно x^*, y^*, z^*, т. е. в уравнение вида $A^*x^* + B^*y^* + C^*z^* + D^* = 0$. Значит, мы опять получаем уравнение некоторой плоскости П*. В этой плоскости будут лежать точки, находившиеся до преобразования в плоскости П.

Из указанного свойства следует, что точки, находившиеся до преобразования на некоторой прямой Δ, перейдут в точки, находящиеся также на некоторой прямой Δ^*. Действительно, прямую Δ можно рассматривать как пересечение двух каких-то плоскостей Π_1, Π_2. После преобразования точки прямой Δ, т. е. точки, принадлежавшие одновременно плоскостям Π_1 и Π_2, обратятся в точки, принадлежащие одновременно плоскостям Π_1^* и Π_2^*, преобразованным из плоскостей Π_1 и Π_2, а это и доказывает наше утверждение.

Отсюда легко заключить также, что любой прямолинейный отрезок преобразуется в прямолинейный отрезок и любой вектор — в вектор.

Пусть вектор $\boldsymbol{P} = (\xi, \eta, \zeta)$ после преобразования обратился в вектор

$$\boldsymbol{P}^* = (\xi^*, \eta^*, \zeta^*).$$

Пусть, далее, начало и конец вектора $\boldsymbol{P}$ суть соответственно точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z), так что

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0.$$

Вектор $\boldsymbol{P}^*$ будет иметь компоненты:

$$\xi^* = x^* - x_0^*, \quad \eta^* = y^* - y_0^*, \quad \zeta^* = z^* - z_0^*,$$

где в силу формул (1), например,

$$x^* = (1+a_{11})\,x + a_{12}y + a_{13}z + a, \quad x_0^* = (1+a_{11})\,x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a.$$

[1]) Можно показать, что это свойство в соединении со свойством непрерывности преобразования (т. е. что точкам на конечном расстоянии соответствуют точки на конечном расстоянии и двум бесконечно близким — две бесконечно близкие) является характерным для аффинного преобразования, так что всякое преобразование, обладающее этими свойствами, будет аффинным.

Вычитая эти два равенства, получаем первую из нижеследующих формул (две другие написаны по аналогии):

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= (1+a_{11})\,\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ \eta^* &= a_{21}\xi + (1+a_{22})\,\eta + a_{23}\zeta, \\ \zeta^* &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + (1+a_{33})\,\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из этих формул [1]) непосредственно следует, что два равных вектора (т. е. имеющих одинаковые компоненты ξ, η, ζ) переходят после преобразования в два равных вектора и что два параллельных вектора переходят в два параллельных, причем отношение их длин остается неизменным [2]). Из первого свойства следует еще, что две одинаковые и одинаково ориентированные фигуры (расположенные в разных частях пространства), составленные из прямолинейных отрезков, преобразуются также в две одинаковые и одинаково ориентированные фигуры. Но так как всякая геометрическая фигура может быть рассматриваема как предел фигуры, составленной из прямолинейных отрезков, то указанное свойство имеет место для всяких фигур. Это значит, что все части тела, независимо от их положения, деформируются одинаковым образом. Поэтому деформация, производимая аффинным преобразованием, часто называется *однородной*.

Замечание 1. Легко видеть, что из формул преобразования вида (4) для компонент вектора вытекают формулы вида (1) для координат точки, т. е. что формулы (4) характеризуют аффинное преобразование в смысле первоначально данного нами определения.

Замечание 2. Мы условились всегда считать координаты не только прямолинейными, но и прямоугольными; однако очевидно, что все сказанное в настоящем параграфе остается в силе и в случае, когда рассматриваются прямолинейные косоугольные координаты.

Почти само собой очевидно, что характер соотношений (1) или (4) не изменится, т. е. эти соотношения останутся линейными, если вместо одной прямолинейной системы координат взять другую (также прямолинейную). Это непосредственно следует из линейности формул преобразования координат.

§ 11. Бесконечно малое аффинное преобразование. Преобразование, выражаемое формулами (1) § 10, будем называть *бесконечно малым*, если $a_{11}, \ldots, a_{33}$, a, b, c — бесконечно малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь по сравнению с самими

[1]) Формулы (4) выражают попросту (см. Добавление I, п. 5), что вектор (ξ^*, η^*, ζ^*) есть линейная вектор-функция вектора (ξ, η, ζ). Следовательно (см. там же), величины $1 + a_{11}$, a_{12}, a_{13}, a_{21}, $1 + a_{22}$ и т. д., или, короче, $a_{ij} + \delta_{ij}$, суть компоненты некоторого тензора. Но так как (δ_{ij}) есть тензор, то и (a_{ij}) есть тензор, получаемый из предыдущего вычитанием тензора (δ_{ij}).

[2]) Отношение длин непараллельных векторов, вообще говоря, изменяется.

этими величинами. Из упомянутых формул следует, что при этом предположении разности

$$\begin{aligned} x^* - x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y^* - y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \\ z^* - z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c \end{aligned}$$

между координатами одной и той же точки до и после преобразования будут бесконечно малыми величинами.

Рассмотрим результат двух последовательных бесконечно малых преобразований. Пусть совершается одно аффинное бесконечно малое преобразование

$$\left.\begin{aligned} x^* &= (1 + a_{11})\,x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y^* &= a_{21}x + (1 + a_{22})\,y + a_{23}z + b, \\ z^* &= a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})\,z + c, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

а вслед за ним над полученными координатами x^*, y^*, z^* — другое бесконечно малое преобразование

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= (1 + b_{11})\,x^* + b_{12}y^* + b_{13}z^* + a', \\ y^{**} &= b_{21}x^* + (1 + b_{22})\,y^* + b_{23}z^* + b', \\ z^{**} &= b_{31}x^* + b_{32}y^* + (1 + b_{33})\,z^* + c'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти два последовательных преобразования переводят в конечном счете точку (x, y, z) в точку (x^{**}, y^{**}, z^{**}). Зависимость между координатами этих точек получим, если внесем выражения (1) в выражения (2). Производя эту подстановку и отбрасывая произведения величин b_{ij}, a_{ij}, a, b, c, получаем без всякого труда:

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= (1 + c_{11})\,x + c_{12}y + c_{13}z + a'', \\ y^{**} &= c_{21}x + (1 + c_{22})\,y + c_{23}z + b'', \\ z^{**} &= c_{31}x + c_{32}y + (1 + c_{33})\,z + c'', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3); \quad a'' = a + a'; \quad b'' = b + b'; \quad c'' = c + c'. \tag{4}$$

Прежде всего эти формулы показывают, что результат двух аффинных преобразований есть также аффинное преобразование (которое мы будем называть «результирующим»). Этим свойством, как читатель легко сам проверит, обладают какие угодно аффинные преобразования (а не только бесконечно малые).

Однако *два свойства, непосредственно вытекающих из формул* (3) *и* (4), *справедливы, вообще говоря, только для бесконечно малых преобразований*. Это следующие свойства: а) результирующее преобразование не зависит от порядка, в котором производятся данные преобразования; б) коэффициенты c_{ij}, a'', b'', c'' суть суммы соответствующих коэффициентов данных преобразований.

Мы будем говорить, что результирующее преобразование получается путем *наложения* двух данных. Все сказанное непосредственно обобщается на случай наложения любого числа преобразований.

§ 12. Разложение бесконечно малого преобразования на чистую деформацию и жесткое перемещение. Так как нас интересует вопрос о *деформации*, то мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением формул преобразования (4) § 10 для компонент *вектора*. Если даны эти формулы, т. е. заданы величины $a_{11}, \ldots, a_{33}$, то формулы для преобразования координат *точки*, т. е. формулы (1) § 10, будут, правда, определены не вполне: останутся не заданными величины a, b, c. Но ведь эти величины, очевидно, не оказывают никакого влияния на деформацию, а влияют только на жесткое, притом *поступательное*, перемещение тела как целого. Формулы (4) § 10 перепишем так:

$$\begin{aligned} \delta\xi &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ \delta\eta &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ \delta\zeta &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\delta\xi = \xi^* - \xi, \quad \delta\eta = \eta^* - \eta, \quad \delta\zeta = \zeta^* - \zeta \tag{2}$$

обозначают компоненты векторной разности $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{P} = \delta\boldsymbol{P}$, т. е. *векторного приращения* вектора $\boldsymbol{P}$, произошедшего вследствие преобразования.

Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять величины:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

которые мы будем называть *коэффициентами* рассматриваемого *преобразования* [1]), для того чтобы преобразование (1) не сопровождалось никакой деформацией, т. е. выражало жесткое перемещение.

Условием, необходимым и достаточным для этого, является неизменность при преобразовании длины P любого вектора $\boldsymbol{P}$ или, что все равно, квадрата этой длины

$$P^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Ограничимся в дальнейшем бесконечно малыми преобразованиями и вычислим приращение δP длины P. Предыдущая формула вместе с (1) дает с точностью до величин высших порядков

$$\begin{aligned} P\delta P &= \xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = \\ &= a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + (a_{23} + a_{32})\,\eta\zeta + (a_{31} + a_{13})\,\zeta\xi + (a_{12} + a_{21})\,\xi\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Для того чтобы имело место равенство $\delta P = 0$, каковы бы ни были ξ, η, ζ, очевидно необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = a_{31} + a_{13} = a_{12} + a_{21} = 0. \tag{5}$$

[1]) Они, как было уже сказано (§ 10, примечание), представляют собой компоненты некоторого тензора второго ранга.

Это и есть искомое условие того, чтобы преобразование (1) сводилось к жесткому перемещению. Его можно кратко записать так [1]):

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3); \tag{5'}$$

действительно, при $i \neq j$ мы получаем вторую группу формул (5); при $i = j$ получаем $a_{ii} = -a_{ii}$, откуда $a_{ii} = 0$; это дает первую группу формул (5).

Таким образом, формулы (1) могут быть в нашем случае переписаны так:

$$\delta\xi = q\zeta - r\eta, \quad \delta\eta = r\xi - p\zeta, \quad \delta\zeta = p\eta - q\xi, \tag{6}$$

где введены обозначения:

$$p = a_{32} = -a_{23}, \quad q = a_{13} = -a_{31}, \quad r = a_{21} = -a_{12}. \tag{7}$$

Это — хорошо известные формулы кинематики, выражающие жесткое (бесконечно малое) перемещение тела. Величины p, q, r суть, как известно, бесконечно малые углы поворота вокруг осей координат и называются *компонентами вращения* [2]). Из этих формул выпали члены, выражающие поступательное перемещение, ибо здесь у нас речь идет о компонентах *вектора*, а поступательное перемещение не изменяет этих компонент.

Чтобы получить формулы преобразования для координат *точки*, занимавшей до перемещения положение $M(x, y, z)$, достаточно применить предыдущие формулы к вектору

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, \ y - y_0, \ z - z_0),$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная, но раз навсегда выбранная точка тела. Подставляя в формулы (6) $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ на место ξ, η, ζ, получим формулы, также хорошо известные из кинематики:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= a + q(z - z_0) - r(y - y_0), \\ \delta y &= b + r(x - x_0) - p(z - z_0), \\ \delta z &= c + p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь положено:

$$a = \delta x_0, \quad b = \delta y_0, \quad c = \delta z_0;$$

иными словами, вектор (a, b, c) выражает перемещение точки (x_0, y_0, z_0). Если в качестве точки M_0 возьмем начало координат, то формулы (8) несколько упростятся, а именно:

$$\delta x = a + qz - ry, \quad \delta y = b + rx - pz, \quad \delta z = c + py - qx, \tag{8'}$$

где вектор (a, b, c) выражает перемещение точки, находившейся до преобразования в начале координат.

---

[1]) Условие (5') выражает, как известно, что тензор (a_{ij}) — антисимметричный (см. Добавление I, п. 2).

[2]) Совокупность величин (p, q, r) можно рассматривать как вектор (см. Добавление I, п. 3); это есть то, что в кинематике называется вектором (бесконечно малого) вращения.

Вернемся к формуле (4). Она показывает, что изменение *длины* вектора $\boldsymbol{P}$ характеризуется величинами

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\quad a_{32}+a_{23},\quad a_{13}+a_{31},\quad a_{21}+a_{12},$$

для которых мы теперь введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=e_{xx},\quad a_{22}=e_{yy},\quad a_{33}=e_{zz},\quad \tfrac{1}{2}(a_{32}+a_{23})=e_{yz}=e_{zy},\\ &\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})=e_{zx}=e_{xz},\quad \tfrac{1}{2}(a_{21}+a_{12})=e_{xy}=e_{yx}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Собственно деформация характеризуется изменением расстояний между точками, т. е. изменением длин векторов. Значит, собственно деформация определяется величинами e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}, числом 6, которые поэтому и называются *компонентами деформации* [1]).

Введем далее обозначения [2]):

$$p=\tfrac{1}{2}(a_{32}-a_{23}),\quad q=\tfrac{1}{2}(a_{13}-a_{31}),\quad r=\tfrac{1}{2}(a_{21}-a_{12}). \tag{10}$$

При этих обозначениях будем, очевидно, иметь [3]):

$$\left.\begin{aligned} &a_{32}=e_{yz}+p,\ a_{13}=e_{zx}+q,\quad a_{21}=e_{xy}+r,\\ &a_{23}=e_{yz}-p,\ a_{31}=e_{zx}-q,\quad a_{12}=e_{xy}-r, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и формулы (1) могут быть переписаны так:

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi&=e_{xx}\xi+e_{xy}\eta+e_{xz}\zeta+q\zeta-r\eta,\\ \delta\eta&=e_{yx}\xi+e_{yy}\eta+e_{yz}\zeta+r\xi-p\zeta,\\ \delta\zeta&=e_{zx}\xi+e_{zy}\eta+e_{zz}\zeta+p\eta-q\xi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Эти формулы показывают, что наше аффинное преобразование может быть разбито на два: на преобразование вида

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi&=e_{xx}\xi+e_{xy}\eta+e_{xz}\zeta,\\ \delta\eta&=e_{yx}\xi+e_{yy}\eta+e_{yz}\zeta,\\ \delta\zeta&=e_{zx}\xi+e_{zy}\eta+e_{zz}\zeta \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и на преобразование вида (6), выражающее жесткое перемещение.

Преобразование вида (13), содержащее только компоненты деформации, мы будем называть *собственно деформацией*, или *чистой деформацией*, при этом *однородной* (см. выше).

---

[1]) Так как величины a_{ij} суть компоненты некоторого тензора второго ранга, то и величины e_{xx}, . . ., e_{xy} представляют собой компоненты симметричного тензора второго ранга на основании сказанного в Добавлении I (п. 3); это обстоятельство будет доказано ниже непосредственно.

[2]) Величины $\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ij})$ суть компоненты антисимметричного тензора второго ранга, который мы представляем при помощи вектора (p, q, r) (см. Добавление I).

[3]) Формулы (11) дают не что иное, как разбиение тензора (a_{ij}) на сумму симметричного и антисимметричного.

Характерной особенностью формул (13) является то, что *таблица коэффициентов*

$$e_{xx},\ e_{xy},\ e_{xz},$$
$$e_{yx},\ e_{yy},\ e_{yz},$$
$$e_{zx},\ e_{zy},\ e_{zz}$$

симметрична.

Каждая из компонент деформации имеет очень простое геометрическое значение.

Геометрическое значение компонент e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} можно непосредственно получить из формулы (4), которая при наших новых обозначениях напишется так:

$$P\delta P = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}\eta^2 + e_{zz}\zeta^2 + 2e_{yz}\eta\zeta + 2e_{zx}\zeta\xi + 2e_{xy}\xi\eta. \qquad (4')$$

Рассмотрим какой-либо вектор $\boldsymbol{P} = (\xi, 0, 0)$, параллельный до деформации оси Ox. Для этого вектора будем иметь:

$$P\delta P = e_{xx}\xi^2$$

или, замечая, что в нашем случае $\xi^2 = P^2$,

$$e_{xx} = \frac{\delta P}{P}. \qquad (14)$$

Итак, e_{xx} представляет собой относительное удлинение вектора (или отрезка), первоначально параллельного оси Ox. Аналогичные значения имеют компоненты e_{yy}, e_{zz}.

Если все компоненты деформации, за исключением одной e_{xx}, равны нулю и если мы рассматриваем чистую деформацию, т. е. если

$$p = q = r = 0,$$

то из формул (13) вытекает:

$$\delta\xi = e_{xx}\xi, \quad \delta\eta = \delta\zeta = 0.$$

Следовательно, в нашем случае все векторы, параллельные оси Ox, растягиваются в одном и том же отношении (относительное удлинение $\delta\xi/\xi = e_{xx}$); векторы же, перпендикулярные к этой оси, не изменяют не только направления, но и длины. Таким образом, мы имеем дело с *простым* и *однородным растяжением* в направлении оси Ox.

Аналогичные результаты получим для случаев, когда не равна нулю только одна из компонент e_{yy} или e_{zz}.

Для того чтобы выяснить значение компоненты e_{yz}, вычислим изменение угла, первоначально прямого, между двумя векторами $\boldsymbol{P}_1 = (0, \eta_1, 0)$ и $\boldsymbol{P}_2 = (0, 0, \zeta_2)$, направленными первоначально так, как оси Oy и Oz.

Обозначим значение угла между упомянутыми векторами после деформации через $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{yz}$. (Значит, $\varepsilon_{yz} > 0$, если угол уменьшился, и $\varepsilon_{yz} < 0$, если угол увеличился.)

По известной формуле для косинуса угла между двумя векторами:

$$(\delta\xi_1,\ \eta_1 + \delta\eta_1,\ \delta\zeta_1) \quad \text{и} \quad (\delta\xi_2,\ \delta\eta_2,\ \zeta_2 + \delta\zeta_2)$$

имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_{yz}\right)=\frac{\delta\xi_1\delta\xi_2+(\eta_1+\delta\eta_1)\,\delta\eta_2+\delta\zeta_1\,(\zeta_2+\delta\zeta_2)}{\sqrt{\delta\xi_1^2+(\eta_1+\delta\eta_1)^2+\delta\zeta_1^2}\cdot\sqrt{\delta\xi_2^2+\delta\eta_2^2+(\zeta_2+\delta\zeta_2)^2}}$$

Но с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_{yz}\right)=\varepsilon_{yz}.$$

Отбрасывая также в правой части бесконечно малые высших порядков, получаем:

$$\varepsilon_{yz}=\frac{\eta_1\delta\eta_2+\zeta_2\delta\zeta_1}{\eta_1\zeta_2}=\frac{\delta\zeta_1}{\eta_1}+\frac{\delta\eta_2}{\zeta_2}.$$

Но на основании формул (12), которые мы применим последовательно к векторам $\boldsymbol{P}_1=(0,\ \eta_1,\ 0)$ и $\boldsymbol{P}_2\,(0,\ 0,\ \zeta_2)$, будем иметь:

$$\delta\zeta_1=e_{zy}\eta_1+p\eta_1,\quad \delta\eta_2=e_{yz}\zeta_2-p\zeta_2;$$

внося эти значения в предыдущую формулу, получаем:

$$\varepsilon_{yz}=e_{zy}+e_{yz}=2e_{yz}. \tag{15}$$

Итак, величина $2e_{yz}$ представляет собой уменьшение угла, первоначально прямого, между двумя векторами, имевшими направления (положительных) осей Oy, Oz. Аналогичные значения получим для $2e_{zx}$ и $2e_{xy}$.

Рассмотрим чистую деформацию, при которой не равна нулю только одна компонента e_{yz}. Пусть $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ — два вектора, проведенные для наглядности из начала координат и направленные по осям Oy и Oz, и пусть $OBKC$ — прямоугольник, построенный на этих двух векторах (рис. 7). После деформации прямоугольник этот обратится в параллелограмм $OB'K'C'$ (мы предполагаем, что начало координат не сместилось [1])).

На основании формул (13) точка B перейдет в точку B' на прямой BK, а точка C — в точку C' на CK, причем

$$BB'=e_{zy}\cdot OB,\quad CC'=e_{yz}\cdot OC.$$

Так как с точностью до бесконечно малых высших порядков можно принять, что

$$\frac{BB'}{OB}=\operatorname{tg}\widehat{BOB'}=\widehat{BOB'},\quad \frac{CC'}{OC}=\operatorname{tg}\widehat{COC'}=\widehat{COC'},$$

предыдущие соотношения дают:

$$\widehat{BOB'}=\widehat{COC'}=e_{yz},$$

откуда еще раз получаем:

$$\varepsilon_{yz}=\widehat{BOB'}+\widehat{COC'}=2e_{yz}.$$

Если путем жесткого поворота вокруг оси Ox совместить отрезки OB' и OB (разность их длин есть, очевидно, бесконечно малая высшего поряд-

[1]) В противном случае мы можем вернуть начало координат на старое место жестким поступательным перемещением.

ка), то параллелограмм $OB'K'C'$ займет положение $OBK''C''$ (рис. 8), причем угол $\widehat{COC''}$ будет как раз равен углу ε_{yz} (мы считаем, что точка C'' находится на прямой CK, так как, очевидно, это будет соблюдено с точностью до бесконечно малых высшего порядка).

Значит, наша деформация представляет собой *сдвиг* плоскостей, параллельных плоскости Oxy в направлении оси Oy, причем смещение

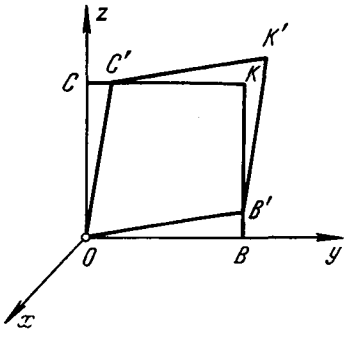


Рис. 7.

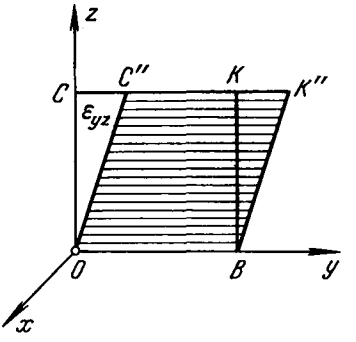


Рис. 8.

каждой плоскости пропорционально расстоянию до плоскости Oxy. Величина CC'' измеряет «абсолютный сдвиг», а величина

$$\frac{CC''}{OC} = \operatorname{tg} \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz} = 2e_{yz}$$

— «относительный сдвиг» или *угол сдвига*. Рассмотренная деформация носит название *простого* (и однородного) сдвига.

§ 13. Инвариантная квадратичная форма, связанная с деформацией. Поверхность деформаций, главные оси. Замена координат. Формула (4') § 12 может быть записана так:

$$P\delta P = 2F(\xi, \eta, \zeta), \tag{1}$$

где введено обозначение

$$2F(\xi, \eta, \zeta) = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}\eta^2 + e_{zz}\zeta^2 + 2e_{yz}\eta\zeta + 2e_{zx}\zeta\xi + 2e_{xy}\xi\eta; \tag{2}$$

F есть квадратичная форма переменных ξ, η, ζ. Так как левая часть формулы (1), т. е. величина $P\delta P$, имеет смысл, совершенно не зависящий от выбора осей координат, то, следовательно, квадратичная форма $F(\xi, \eta, \zeta)$ инвариантна по отношению к замене одной системы осей другой. Иными словами, если $e_{x'x'}, \ldots, e_{x'y'}$ суть компоненты деформации в новой системе координат, а ξ', η' ζ' — компоненты вектора $\boldsymbol{P}$ в той же новой системе, то будем иметь равенство

$$e_{x'x'}\xi'^2 + e_{y'y'}\eta'^2 + \ldots + 2e_{x'y'}\xi'\eta' = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}\eta^2 + \ldots + 2e_{xy}\xi\eta, \tag{3}$$

которое обратится в тождество относительно ξ', η', ζ', если в правой части заменить величины ξ, η, ζ их выражениями через ξ', η', ζ'.

Это показывает, что совокупность величин

$$e_{xx},\ e_{xy},\ e_{xz},$$
$$e_{yx},\ e_{yy},\ e_{yz},$$
$$e_{zx},\ e_{zy},\ e_{zz}$$

представляет собой симметричный тензор второго ранга (см. конец § 5, примечание). Отсюда следует (см. конец § 5), в частности, что компоненты деформации в новой системе координат связаны со старыми теми же формулами (1) § 5, что и новые компоненты напряжения со старыми (в упомянутых формулах надо теперь вместо X_x взять e_{xx}, вместо Y_z взять e_{yz} и т. д.).

Подобно тому, как в § 6 при изучении напряжений мы ввели в рассмотрение поверхность напряжений

$$2\Omega(\xi, \eta, \zeta) = \pm c^2,$$

можно и здесь ввести аналогичную поверхность.

Именно, формулу (1) мы можем переписать так:

$$P^2 \frac{\delta P}{P} = 2F(\xi, \eta, \zeta),$$

или

$$P^2 e = 2F(\xi, \eta, \zeta),$$

где $e = \delta P/P$ обозначает относительное удлинение вектора $\boldsymbol{P} = (\xi, \eta, \zeta)$. Эта величина, как мы знаем, не зависит от длины вектора $\boldsymbol{P}$, а только от его направления. Поэтому для каждого направления мы можем так выбирать длину P, чтобы $P^2 e = \pm c^2$, где c — произвольная, но раз навсегда выбранная постоянная, отличная от нуля; c имеет размерность длины.

Если взять начало вектора $\boldsymbol{P}$ в начале координат, то конец H этого вектора будет находиться на поверхности

$$2F(\xi, \eta, \zeta) = \pm c^2, \quad \text{или} \quad e_{xx}\xi^2 + \ldots + 2e_{xy}\xi\eta = \pm c^2, \tag{4}$$

называемой *поверхностью деформаций* (*квадрика деформаций Коши*).

Если эта поверхность построена, то можно сразу найти относительное удлинение e любого вектора. Для этого достаточно провести параллельную ему полупрямую OH из начала координат до пересечения H с нашей поверхностью; при этом для того, чтобы точка пересечения существовала (т. е. была действительной), необходимо определенным образом выбрать знак перед c^2 в правой части. Относительное удлинение рассматриваемого вектора будет равно

$$e = \pm \frac{c^2}{|OH|^2}. \tag{5}$$

Все это совершенно аналогично тому, что было сказано в § 6 относительно вычисления нормальной компоненты N напряжения, и поэтому мы здесь не повторяем сказанного.

Если за оси координат выбрать главные оси поверхности (4), то уравнение ее примет вид

$$e_1\xi^2 + e_2\eta^2 + e_3\zeta^2 = \pm c^2, \tag{4'}$$

где через e_1, e_2, e_3 обозначены значения e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} для новой системы; компоненты e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} в новой системе равны нулю.

Следовательно, новая система осей обладает тем свойством, что углы между осями и после деформации остаются прямыми. Значит, всегда существует такая тройка взаимно перпендикулярных прямых, что углы между ними остаются прямыми и после деформации. Такие три прямые называются *главными осями деформации*. Величины e_1, e_2, e_3 называются *главными удлинениями*.

В общем случае существует только одна такая тройка прямых. Но если поверхность (4) есть поверхность вращения (это имеет место тогда, когда две из величин e_1, e_2, e_3 равны между собой), таких троек будет бесчисленное множество.

Если за оси координат взять главные оси деформации, то формулы (13) § 12, выражающие чистую деформацию, примут вид:

$$\delta\xi = e_1\xi, \quad \delta\eta = e_2\eta, \quad \delta\zeta = e_3\zeta.$$

Следовательно, всякую *чистую* деформацию можно представить себе как результат трех простых растяжений по трем взаимно перпендикулярным направлениям, которые и суть направления главных осей деформации.

Заметим, наконец, что главные удлинения e_1, e_2, e_3 суть корни уравнения третьей степени относительно e (ср. § 7):

$$\begin{vmatrix} e_{xx}-e, & e_{xy}, & e_{xz} \\ e_{yx}, & e_{yy}-e, & e_{yz} \\ e_{zx}, & e_{zy}, & e_{zz}-e \end{vmatrix} = -e^3 + \theta e^2 + be + c = 0, \tag{6}$$

где, в частности, коэффициент θ определяется формулой:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \tag{7}$$

Так как коэффициенты уравнения (6) должны быть инвариантны (ср. § 7), то, в частности, θ есть инвариант. Очевидно, что θ представляет сумму корней уравнения (6), т. е.

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3. \tag{8}$$

Величина θ имеет очень простое геометрическое значение. В самом деле, рассмотрим прямоугольный параллелепипед, построенный на отрезках OA, OB, OC главных осей, имеющий объем

$$V = l_1 l_2 l_3,$$

где

$$l_1 = OA, \quad l_2 = OB, \quad l_3 = OC.$$

После деформации рассматриваемый параллелепипед обращается опять в прямоугольный параллелепипед со сторонами

$$l_1(1+e_1),\ l_2(1+e_2),\ l_3(1+e_3),$$

объем которого равен

$$V' = l_1 l_2 l_3 (1+e_1)(1+e_2)(1+e_3) = V(1+e_1+e_2+e_3).$$

Здесь мы отбросили бесконечно малые высших порядков.

Следовательно,

$$\frac{V'-V}{V} = e_1+e_2+e_3. \tag{9}$$

Эта формула показывает, что величина θ есть *относительное объемное расширение.*

§ 14. Деформация общего вида. Рассмотрим теперь деформацию сплошного тела самого общего вида. Пусть точка M тела, имевшая до деформации координаты x, y, z, переходит вследствие деформации в положение

$$M^*(x^*, y^*, z^*).$$

Положим:

$$x^* = x+u, \quad y^* = y+v, \quad z^* = z+w; \tag{1}$$

u, v, w обозначают компоненты вектора $\overline{MM^*}$, который выражает смещение точки M, происшедшее вследствие деформации. Этот вектор мы будем называть вектором смещения или просто *смещением*, а u, v, w — *компонентами смещения.* Так как различные точки тела смещаются, вообще говоря, различным образом, то u, v, w будут функциями координат x, y, z первоначального положения рассматриваемой точки [1]):

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \tag{2}$$

Во всем последующем (если противное не оговорено особо) мы будем считать, что функции u, v, w не только однозначны и непрерывны, но имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Выделим вокруг какой-либо точки M (x, y, z) рассматриваемого тела бесконечно малую его часть и посмотрим, как изменится она вследствие деформации. Для этого достаточно изучить изменение бесконечно малых векторов, имеющих начало (до деформации) в точке M. Пусть

$$\overline{MN} = \boldsymbol{P} = (\xi, \eta, \zeta)$$

один из таких векторов. После деформации точка M перейдет в M^*, а точка N — в N^*, так что вектор $\boldsymbol{P}$ обратится в вектор $\overline{M^*N^*} = \boldsymbol{P}^*$. Вычислим векторное приращение $\delta\boldsymbol{P}$ вектора $\boldsymbol{P}$, т. е. векторную разность $\delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{P}$.

---

[1]) Смещения могут зависеть также от времени; мы здесь рассматриваем деформированное состояние в какой-либо определенный момент.

Координаты точки M^* суть:

$$x+u(x, y, z), \quad y+v(x, y, z), \quad z+w(x, y, z),$$

координаты же точки N^*, имевшей до деформации координаты

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta,$$

будут:

$$x+\xi+u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta), \quad y+\eta+v(x+\xi, y+\eta, z+\zeta),$$
$$z+\zeta+w(x+\xi, y+\eta, z+\zeta).$$

Поэтому компоненты вектора $\boldsymbol{P}^*$ будут:

$$\xi+u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-u(x, y, z),$$
$$\eta+v(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-v(x, y, z),$$
$$\zeta+w(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-w(x, y, z).$$

Наконец, компоненты $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ вектора $\delta\boldsymbol{P}$ будут:

$$u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-u(x, y, z); \quad v(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-v(x, y, z),$$
$$w(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-w(x, y, z).$$

Но на основании известной формулы дифференциального исчисления имеем:

$$u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)-u(x, y, z)=\frac{\partial u}{\partial x}\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\eta+\frac{\partial u}{\partial z}\zeta+\varepsilon,$$

где ε обозначает бесконечно малую высшего порядка по сравнению с ξ, η, ζ. Отбрасывая ее и поступая аналогично с остальными компонентами, получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi&=\frac{\partial u}{\partial x}\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\eta+\frac{\partial u}{\partial z}\zeta,\\ \delta\eta&=\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{\partial v}{\partial y}\eta+\frac{\partial v}{\partial z}\zeta,\\ \delta\zeta&=\frac{\partial w}{\partial x}\xi+\frac{\partial w}{\partial y}\eta+\frac{\partial w}{\partial z}\zeta;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в этих формулах значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д. берутся для точки (x, y, z) и не зависят от ξ, η, ζ.

Эти формулы показывают, что с точностью до бесконечно малых высших порядков относительно линейных размеров рассматриваемого элемента тела изменение этого элемента выражается аффинным преобразованием с коэффициентами $a_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}$, $a_{12}=\frac{\partial u}{\partial y}$ и т. д.

До сих пор мы не делали никаких ограничительных предположений относительно порядка малости компонент смещения u, v, w. Будем теперь считать (*это условие мы принимаем раз навсегда*), что компоненты смещения u, v, w, а также их производные по x, y, z суть бесконечно малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь

по сравнению с самими этими величинами. Тогда преобразование (3) будет бесконечно малым преобразованием и к нему применимо все сказанное в предыдущих параграфах.

Мы знаем, что *чистая деформация* рассматриваемого элемента выражается формулами (§ 12):

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi &= e_{xx}\xi + e_{xy}\eta + e_{xz}\zeta, \\ \delta\eta &= e_{yx}\xi + e_{yy}\eta + e_{yz}\zeta, \\ \delta\zeta &= e_{zx}\xi + e_{zy}\eta + e_{zz}\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ суть компоненты деформации, определяемые формулами [1]):

$$\left.\begin{aligned} &e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

К чистой деформации присоединяется, вообще говоря, еще жесткое перемещение рассматриваемого элемента, состоящее из бесконечно малого вращения с компонентами:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6}$$

и поступательного перемещения, равного перемещению самой точки $M(x, y, z)$; компонентами этого поступательного перемещения будут значения u, v, w в точке $M(x, y, z)$.

Существенная разница между рассматриваемой здесь деформацией и однородной (§ 10) заключается в том, что здесь компоненты деформации $e_{xx}, \ldots$ и т. д. зависят от положения рассматриваемого элемента тела, т. е. от координат x, y, z. В частности, направления главных осей деформации изменяются при переходе от одной точки к другой.

Так же точно, конечно, компоненты вращения зависят, вообще говоря, от x, y, z.

Напомним, наконец, что величина

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{7}$$

инвариантна по отношению к преобразованию прямоугольных координат и представляет собой относительное объемное расширение. Так как здесь мы имеем уже дело с неоднородной деформацией, то речь идет, конечно, о расширении элемента объема, выделенного в окрестности данной точки.

Существенная часть изложенных выше свойств деформации была впервые получена Коши [2]).

---

[1]) Обращаем внимание читателя на то, что в литературе иногда (например, у Лява) через e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} обозначаются величины $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ и аналогичные, а не *половины* этих величин, как принято в нашем изложении (а также у многих других авторов).

[2]) В упомянутом выше (конец § 3, примечание) мемуаре 1822 г.

§ 15. Определение смещений по компонентам деформации. Условия совместимости Сен-Венана. В § 14 мы вывели формулы, дающие возможность вычислять компоненты деформации по компонентам смещения, заданным как функции координат x, y, z. Мы ставим теперь *обратную задачу: вычислить компоненты* u, v, w *смещения, если заданы компоненты деформации* $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ *как функции* x, y, z. Решению этой задачи мы предпошлем несколько предварительных замечаний, позволяющих заранее предугадать некоторые результаты.

Компоненты деформации определяют, как мы видели, изменение формы бесконечно малого элемента тела вблизи данной точки. Таким образом, задание компонент деформации как функций координат x, y, z определяет изменение формы каждого бесконечно малого элемента тела. На основании сказанного почти очевидно, что указанное задание определит и деформацию всего тела как целого, т. е. определит значения смещений u, v, w как функций от x, y, z; ясно также, что определение u, v, w не может быть совершенно полным. Действительно, если найдены смещения, соответствующие данным компонентам деформации, то, присоединив произвольное (бесконечно малое) перемещение всего тела как жесткого целого, мы получим другие значения смещений, соответствующих тем же самым компонентам деформации, ибо жесткое перемещение всего тела никакого влияния на деформацию не оказывает. Чтобы сделать задачу определенной, можно, например, дополнительно задаться смещением какой-либо произвольно выбранной точки M_0 тела, а также компонентами вращения в этой точке.

Заметим еще следующее. По принятому выше условию компоненты u, v, w однозначны и имеют непрерывные производные до третьего порядка. Значит, задаваемые компоненты деформации $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ должны быть также однозначны и иметь непрерывные производные до второго порядка; это условие мы будем считать выполненным. Легко, однако, убедиться заранее, что величины $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ должны удовлетворять еще определенным соотношениям, для того чтобы задача имела решение. Это следует уже из такого грубого рассмотрения. Представим себе тело разбитым на бесконечно малые элементы, скажем, кубики (не считая элементов, примыкающих к границе). Если мы подвергнем каждый кубик деформации с заданными компонентами и затем попытаемся вновь сложить полученные бесконечно малые параллелепипеды так, чтобы точки их граней, соприкасавшихся до деформации, снова соприкасались, то это окажется, вообще говоря, невозможным: при попытке сложить отдельные элементы между некоторыми из них или образуются зазоры, или грани элементов, которые должны были бы совпасть, окажутся сдвинутыми друг относительно друга, или, наконец, для некоторых элементов не окажется достаточно места. Это и показывает, что компоненты деформации должны удовлетворять некоторым соотношениям, для того чтобы была возможна деформация без разрывов.

Все это мы сейчас строго докажем, фактически решая поставленную задачу. Итак, пусть требуется найти функции u, v, w, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}=e_{zz}, \\ &\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=2e_{yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=2e_{zx}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2e_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ — заданные однозначные функции от x, y, z, имеющие непрерывные производные до второго порядка.

У нас, таким образом, имеется *шесть* уравнений для определения *трех* неизвестных функций. Это еще раз указывает на то, что задача не может иметь решения, если заданные функции $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ не подчинены некоторым дополнительным условиям; эти условия мы найдем, решая нашу задачу.

Пусть V — область, первоначально занятая телом; это есть область изменения x, y, z, в которой заданы функции $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ и в которой ищутся функции u, v, w.

Мы будем предполагать пока, что область V *односвязна*. Напомним, что односвязной называется область, обладающая следующим свойством: всякий замкнутый контур, проведенный внутри области, может быть стянут в одну точку путем непрерывного изменения, не выводящего контур из области. Такою областью является, например, область, занятая шаром, кубом и пр. (подробнее об этом см. в Добавлении II).

Пусть M_0 (x_0, y_0, z_0) — какая-либо точка нашей области, u_0, v_0, w_0 — значения компонент смещения, а p_0, q_0, r_0 — значения компонент вращения в этой точке. Пусть M_1 (x_1, y_1, z_1) — какая-либо другая точка области V. Поставим себе задачей найти значения компонент смещения в этой точке.

Пусть M_0M_1 обозначает какую-либо линию, соединяющую точки M_0 и M_1 и находящуюся в области V. Если бы значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции u были нам известны во всей области V, мы смогли бы найти значение u_1 функции u в точке M_1 по формуле

$$u_1=u_0+\int\limits_{M_0M_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\frac{\partial u}{\partial z}\,dz\right), \tag{2}$$

где интеграл взят по кривой M_0M_1. Но мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=e_{xy}-r, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=e_{zx}+q; \tag{3}$$

q и r определяются формулами (6) предыдущего параграфа. Следовательно,

$$u_1=u_0+\int\limits_{M_0M_1}(e_{xx}\,dx+e_{xy}\,dy+e_{xz}\,dz)+\int\limits_{M_0M_1}(q\,dz-r\,dy). \tag{a}$$

Под знаком первого интеграла фигурируют исключительно заданные функции. Займемся теперь вторым. Имеем:

$$\int_{M_0M_1}(q\,dz - r\,dy) = \int_{M_0M_1}\{rd(y_1-y) - qd(z_1-z)\},$$

откуда, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_{M_0M_1}(q\,dz - r\,dy) = q_0(z_1-z_0) - r_0(y_1-y_0) - \int_{M_0M_1}\{(y_1-y)\,dr - (z_1-z)\,dq\}. \quad (б)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, необходимо знать выражения для dr, dq или, что все равно, выражения для частных производных первого порядка функций r и q. Но, как показывает непосредственная проверка,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial e_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}.$$

Подставляя эти значения в выражения

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}\,dx + \frac{\partial r}{\partial y}\,dy + \frac{\partial r}{\partial z}\,dz,$$
$$dq = \frac{\partial q}{\partial x}\,d + x\frac{\partial q}{\partial y}\,d + y\frac{\partial q}{\partial z}\,dz,$$

получаем на основании (а) и (б) первую из нижеследующих формул; две другие получены из первой путем круговой перестановки букв:

$$\left.\begin{aligned} u(x_1,y_1,z_1) &= u_0 + q_0(z_1-z_0) - r_0(y_1-y_0) + \int_{M_0M_1}(U_x\,dx + U_y\,dy + U_z\,dz),\\ v(x_1,y_1,z_1) &= v_0 + r_0(x_1-x_0) - p_0(z_1-z_0) + \int_{M_0M_1}(V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz),\\ w(x_1,y_1,z_1) &= w_0 + p_0(y_1-y_0) - q_0(x_1-x_0) + \int_{M_0M_1}(W_x\,dx + W_y\,dy + W_z\,dz), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где для краткости введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} U_x &= e_{xx} + (y_1-y)\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial x}\right) + (z_1-z)\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial x}\right),\\ U_y &= e_{xy} + (y_1-y)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yy}}{\partial x}\right) + (z_1-z)\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right),\\ U_z &= e_{xz} + (y_1-y)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right) + (z_1-z)\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Значения V_x, V_y, V_z и W_x, W_y, W_z получаются из предыдущих путем круговой перестановки букв (одновременно переставляются между собой буквы U, V, W и буквы x, y, z).

Формулы (4) по существу совпадают с формулами, найденными Вольтерра (V. Volterra) [1]) путем преобразования формул, данных Кирхгоффом [2]). Приведенный здесь вывод их принадлежит Чезаро (E. Cesaro) [3]), который придал формулам Вольтерра более симметричный вид.

Полученные формулы (4) определяют компоненты u_1, v_1, w_1 смещения в любой точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ тела, если даны компоненты смещения (u_0, v_0, w_0) и вращения (p_0, q_0, r_0) в какой-либо одной, раз навсегда выбранной, точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Выражения, полученные для смещений, содержат интегралы, взятые по некоторой линии, соединяющей точки M_0 и M_1. Но ведь u, v, w должны быть функциями от x_1, y_1, z_1 и не зависеть от пути интегрирования M_0M_1. Следовательно, для того чтобы наша задача имела решение, необходимо, чтобы интегралы, фигурирующие в формулах (4), не зависели от пути интегрирования.

Как легко видеть, для независимости интеграла

$$\int_{M_0M_1} (U_x\,dx + U_y\,dy + U_z\,dz)$$

от выбора пути необходимы и достаточны условия [4])

$$\frac{\partial U_z}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial y}.$$

Для двух других интегралов получим аналогичные условия путем круговой перестановки букв. Эти условия должны быть соблюдены во всех точках (x, y, z) в области V и для всех значений (x_1, y_1, z_1) в той же области.

Представляя эти условия в явной форме, увидим, что все они сводятся к шести следующим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Например, условие

$$\frac{\partial U_y}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{\partial y}$$

---

[1]) Volterra [1], p. 406.

[2]) Kirchhoff [1], XXVII Vorles., § 4.

[3]) Rendiconti d. R. Accademia di Napoli, 1906 (цитирую по мемуару [1] Volterra, где воспроизводится на стр. 416 и 417 вывод Чезаро).

[4]) См. Добавление II.

дает на основании формул (5) после некоторых сокращений

$$(y_1-y)\left(\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z}\right)+(z_1-z)\left(\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x\,\partial z}\right)=$$
$$=(y_1-y)\left(\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x\,\partial y}\right)+(z_1-z)\left(\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Так как это соотношение должно быть справедливо при всяких y_1, z_1 в данной области, то должно быть:

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}.$$

Эти соотношения совпадают с двумя последними соотношениями правого столбца формул (6). Таким же образом получим все остальные. Заметим, что формулы, фигурирующие во второй и третьей строках (6), могут быть получены из формул первой строки путем круговой перестановки.

Условия (6) называются *условиями совместимости* Сен-Венана (Barré de Saint-Venant, 1797—1886), так как были впервые найдены им [1]). Они дают нам математическое выражение тех соотношений, которым должны удовлетворять компоненты деформации, для того чтобы была возможна деформация без разрывов (см. начало настоящего параграфа), и потому называются иногда *условиями неразрывности.*

При соблюдении этих условий формулы (4) дают вполне определенные выражения для u, v, w, не зависящие от выбора пути интегрирования, и легко непосредственно проверить, что найденные таким образом смещения действительно удовлетворяют уравнениям (1). При этом постоянные

$$u_0,\ v_0,\ w_0,\ p_0,\ q_0,\ r_0$$

остаются совершенно произвольными, как мы и предвидели заранее. Изменяя эти постоянные, мы сообщим только жесткое перемещение всему телу, как это видно из формул (8) § 12.

В частности, если

$$e_{xx}=e_{yy}=\ldots=e_{xy}=0$$

во всей области, то мы получим, полагая для простоты $x_0=y_0=z_0=0$ и отбрасывая значки у x_1, y_1, z_1:

$$u=u_0+q_0z-r_0y,\quad v=v_0+r_0x-p_0z,\quad w=w_0+p_0y-q_0x,$$

т. е. только жесткое перемещение тела как целого.

До сих пор мы предполагали, что область V односвязна. Рассмотрим теперь случай *многосвязной* области, т. е. такой области, что внутри

[1]) Доложены Société Philomathique в 1860 г., опубликованы в 1861 г.

нее существуют замкнутые контуры, которые нельзя стянуть в одну точку, не разрывая их и не выводя из области. Примером многосвязной области может служить *тор*, т. е. тело, образованное вращением круга вокруг оси, лежащей в его плоскости и не пересекающей его (рис. 9).

Многосвязное тело можно превратить в односвязное, производя надлежащие разрезы [1]); например, в случае тора достаточно разрезать его по одному из меридиональных кругов, изображенных на рис. 9. К разрезанной таким образом области применимо все сказанное выше. Именно, при соблюдении условий совместимости Сен-Венана компоненты u, v, w, определяемые формулами (4), будут однозначными функциями координат точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$; при этом, конечно, мы предполагаем, что путь интегрирования M_0M_1 не выходит из *разрезанной* области, т. е. нигде не пересекает разрезов. Но при приближении точки M_1 к какой-либо точке разреза величины u, v, w будут, вообще говоря, принимать различные значения в зависимости от того, с какой стороны приближается точка M_1 к разрезу.

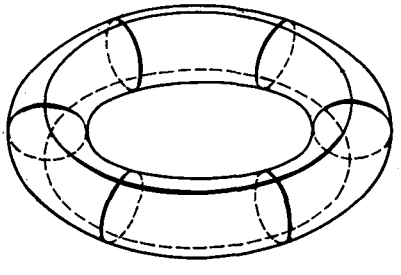


Рис. 9.

Пусть u^+, v^+, w^+ и u^-, v^-, w^- суть значения u, v, w, получаемые при приближении к некоторой точке разреза с той или с другой стороны. Условие неразрывности деформации для *всего тела в целом* будет выполнено только в том случае, если наряду с условиями совместимости (6) соблюдены и дополнительные условия:

$$u^+ = u^-,\ v^+ = v^-,\ w^+ = w^- \tag{7}$$

вдоль всех разрезов, мысленно проведенных в теле с целью сделать его односвязным. При несоблюдении добавочных условий (7) придется допустить наличие разрывов вдоль упомянутых разрезов и даже проникновение частей тела друг в друга в этих местах.

Из сказанного ясно, что если условия (7) не соблюдены и если мы станем определять функции u, v, w по формулам (4) в неразрезанной области, т. е. допускать, что линия интегрирования может пересекать разрезы, тогда функции u, v, w окажутся многозначными функциями от x_1, y_1, z_1: при обходе по некоторым замкнутым контурам функции u, v, w не будут возвращаться к своим исходным значениям; это может иметь место, как легко видеть, только в случае контуров, не сводимых к точке путем непрерывного изменения (см. также Добавление II).

На это обстоятельство впервые указал Мичелл (Michell [1]). Тимпе (Timpe [1]) указал для случая плоской задачи теории упругости возможность физической интерпретации многозначных смещений. Для общего

[1]) Подробнее см. в Добавлении II.

случая трех измерений вопрос о значении многозначных смещений был подробно исследован Вольтерра в ряде работ; сводка этих работ дана в его уже названном мемуаре [1]). Этот вопрос будет нами подробно изучен для двумерного случая в главе II (отдел III).

III. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все сказанное до сих пор может быть отнесено к любым сплошным телам. Для того, чтобы получить уравнения, характеризующие тела, которые мы называем *упругими* (вернее, *идеально упругими*) твердыми телами, необходимо еще иметь закон, выражающий связь между напряженным состоянием тела и вызванной им деформацией.

§ 16. Основной закон теории упругости (обобщенный закон Гука). 1. Первая, весьма неполная, формулировка закона, связывающего напряжение с деформацией, принадлежит Гуку (Robert Hooke, 1635—1702). Закон, называемый его именем, был найден им в 1660 г., опубликован в виде анаграммы в 1676 г., а в явном виде в 1678 г. В переводе на современный язык содержание, которое вкладывает Гук в свой закон, можно передать приблизительно так: «Деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию». В эту формулировку можно вложить определенное содержание в том только случае, когда «усилие», действующее на тело, и вызванная им деформация могут быть охарактеризованы одной величиной каждая.

Например, если мы имеем длинный и тонкий цилиндрический стержень, растягиваемый продольными силами, приложенными на концах, то можно принять, что усилие, которому подвержено тело, характеризуется заданием величины F растягивающей силы, а деформация — удлинением Δl стержня. В этом случае закон Гука дает $\Delta l = C \cdot F$, где C — постоянная зависящая только от первоначальной длины l стержня, формы и размеров поперечного сечения и материала стержня [2]). Можно привести еще много примеров подобного рода.

Эксперименты подтвердили, что закон Гука хорошо согласуется с действительностью для многих твердых тел, но всегда при условии достаточно малых деформаций. Начиная с определенной величины деформации, закон пропорциональности перестает быть даже приблизительно справедливым.

Однако и в случае малых деформаций, когда закон пропорциональности можно считать справедливым, приведенный выше закон Гука

[1]) Краткое изложение результатов Вольтерра имеется также в последнем издании курса Love [1] (добавление к главам VIII и IX) и в книге Burgatti [1].

[2]) Ниже будет показано, что в случае длинного и тонкого стержня $C = l/ES$, где l — длина стержня, S — площадь поперечного сечения, E — постоянная, зависящая только от свойств материала стержня (который мы предполагаем однородным и изотропным).

не может дать полной картины того, что в действительности происходит в деформированном теле. В самом деле, мы видели, что деформированное и напряженное состояния характеризуются *шестью* величинами каждое, причем эти величины изменяются от одной точки тела к другой, так что мы в действительности имеем дело с бесчисленным множеством величин, характеризующих состояние тела в целом.

Например, в приведенном выше случае мы говорили о растягивающих силах F, приложенных к концам цилиндрического стержня. На самом деле «сила» F выражает только суммарный эффект внешних напряжений, приложенных вблизи концов стержня. Эти напряжения могут быть распределены самым различным образом; например: могут быть распределены на основаниях или на участках боковой поверхности вблизи оснований; распределение может быть равномерным или неравномерным и пр.

Ясно, что от способа распределения внешних напряжений существенно зависит распределение напряжений и деформаций внутри стержня. Только в том случае, когда размеры поперечного сечения стержня малы в сравнении с длиной, способ распределения внешних усилий около концов не отражается заметно на состоянии стержня (и то только в частях, не очень близких к концам), и мы можем ограничиться рассмотрением только суммарной «силы» F (об этом см. также § 23).

Итак, очевидно, что если мы не хотим ограничиться грубым, примитивным описанием явлений, мы должны заменить закон Гука более общим, глубже проникающим в сущность дела.

Наиболее естественным обобщением закона простой пропорциональности двух величин можно считать закон *линейной зависимости* между несколькими величинами. Поэтому как наиболее естественное обобщение первоначального закона можно рассматривать следующий *основной закон теории упругости* или *обобщенный закон Гука*:

Компоненты напряжения в данной точке тела суть линейные и однородные функции компонент деформации в той же точке (*и обратно*).

Речь, конечно, идет о малых деформациях [1]).

В этом, по существу, виде закон был дан Коши в несколько уже раз упомянутом (см. стр. 18) мемуаре, доложенном Парижской Академии в 1822 г. В следующей работе, опубликованной в 1828 г., Коши выводит этот закон, базируясь на молекулярной теории, при простейших предположениях относительно сил взаимодействия между молекулами, которые рассматриваются им как материальные точки. Тот же результат был получен Пуассоном (S. D. Poisson, 1781—1840) аналогичным методом в мемуаре, доложенном Парижской Академии в 1828 г. и опубликованном в 1829 г.

Мы не станем здесь излагать выводов Коши и Пуассона, тем более что они оказались недостаточными (см. ниже), и примем обобщенный

[1]) О пределах применимости закона Гука см., например, Grammel [1].

закон Гука как исходный пункт нашей теории, базируясь на том, что закон этот при малых деформациях достаточно хорошо согласуется с действительностью для очень многих материалов.

2. Прежде, чем идти дальше, необходимо сделать следующее замечание. Так как вообще напряжения и деформации различны в различных местах тела, то можно говорить только об их компонентах в данной *точке*. Так мы и поступали выше. Однако выражение в «данной точке» мы понимали различным образом в применении к компонентам деформации и к компонентам напряжения. Именно, когда мы говорили, например, что e_{xx} есть функция координат x, y, z, мы под (x, y, z) понимали положение точки *до деформации*. Это же относится к компонентам u, v, w смещения. Когда же мы говорили, например, что X_x есть функция от x, y, z, мы под (x, y, z) понимали положение точки при окончательном (напряженном, а следовательно, и деформированном) состоянии тела.

Однако при рассматриваемых нами малых деформациях это различие несущественно, так как, например, значения величины X_x в точках (x_1, y_1, z_1) и (x, y, z), где (x, y, z) есть положение точки (x_1, y_1, z_1) до деформации, различаются на величину, малую по сравнению с X_x. Таким образом, значение функции X_x в данной точке (x_1, y_1, z_1) деформированного тела мы можем заменять значением этой функции в точке (x, y, z).

Во всем последующем мы будем брать значения всех рассматриваемых функций в (геометрических) точках, представляющих собой начальные положения точек деформированного тела.

В соответствии с этим, *говоря* в дальнейшем *об области V, занятой телом, и о ее границе S, мы всегда будем иметь в виду область, занятую телом до деформации, и ее границу*.

3. Вернемся к обобщенному закону Гука. Этот закон при помощи формул может быть записан следующим образом. Если X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y суть компоненты напряжения в данной точке тела, а e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} — компоненты деформации, то

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{zz} + 2c_{14}e_{yz} + 2c_{15}e_{zx} + 2c_{16}e_{xy},\\
Y_y &= c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{zz} + 2c_{24}e_{yz} + 2c_{25}e_{zx} + 2c_{26}e_{xy},\\
Z_z &= c_{31}e_{xx} + c_{32}e_{yy} + c_{33}e_{zz} + 2c_{34}e_{yz} + 2c_{35}e_{zx} + 2c_{36}e_{xy},\\
Y_z &= c_{41}e_{xx} + c_{42}e_{yy} + c_{43}e_{zz} + 2c_{44}e_{yz} + 2c_{45}e_{zx} + 2c_{46}e_{xy},\\
Z_x &= c_{51}e_{xx} + c_{52}e_{yy} + c_{53}e_{zz} + 2c_{54}e_{yz} + 2c_{55}e_{zx} + 2c_{56}e_{xy},\\
X_y &= c_{61}e_{xx} + c_{62}e_{yy} + c_{63}e_{zz} + 2c_{64}e_{yz} + 2c_{65}e_{zx} + 2c_{66}e_{xy};
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

множитель 2 в некоторых членах правых частей введен для удобства; см. ниже соотношения (2).

Так как на основании принятого основного закона компоненты деформации суть также определенные линейные функции от компонент напряжения, то предыдущие уравнения должны быть разрешимы относительно $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$, т. е. определитель, составленный из коэффициентов c_{ij}, должен быть отличен от нуля.

Величины c_{11}, c_{12}, . . ., c_{66} суть постоянные, характеризующие упругие свойства тела в данной точке. Они носят названия *упругих постоянных*. Слово «постоянные» надо понимать в том смысле, что эти величины не зависят от значений компонент деформации и соответствующего напряжения в данной точке. Однако они могут иметь различные значения в различных точках тела. Тогда мы будем говорить, что тело (в смысле упругих свойств) *неоднородно*. Если же упругие постоянные одни и те же для всех точек тела, то тело будет *однородным*.

Формулы (1) содержат, как мы видим, 36 упругих постоянных.

Однако при помощи соображений, основанных на законе сохранения энергии и на рассмотрении потенциальной энергии деформации, можно показать, что между этими постоянными должны существовать соотношения

$$c_{ij}=c_{ji} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, 6), \tag{2}$$

иначе говоря, что таблица коэффициентов c_{ij} симметрична [1]. Таким образом, число упругих постоянных в самом общем случае может быть сведено к 21.

Как мы увидим в следующем параграфе, в случае *изотропного* тела число упругих постоянных сводится к двум.

По старой теории Коши, основанной на рассмотрении молекулярных сил, число упругих постоянных в самом общем случае равно не 21, а 15; в случае же изотропного тела, по теории Коши, мы должны иметь всего одну упругую постоянную [2]. К тому же результату пришел Пуассон. Однако это не подтвердилось на опыте. Не надо, впрочем, думать, что к неправильному результату привела молекулярная теория и что, исходя из нее, нельзя получить должного числа постоянных. Дело только в том, что Коши и Пуассон применяли молекулярную теорию в слишком упрощенном виде. Основываясь на современных взглядах на строение материи, можно получить полный результат, т. е. все 21 постоянную. Это и было сделано сравнительно недавно Борном (M. Born) [3].

Мы не останавливаемся подробнее на всем этом, так как в дальнейшем будем изучать только изотропные тела. В этом же случае можно получить окончательные формулы при помощи очень простых соображений.

§ 17. Случай изотропного тела. Как известно, тело называется *изотропным*, если свойства его по всем направлениям одинаковы. Точнее,

[1]) Заслуга применения этих соображений, а также получения указанного результата (1837) принадлежит Грину (G. Green), мемуар которого опубликован в 1839 г.

Более полное обоснование этих результатов при помощи первого и второго законов термодинамики дал в 1855 г. Кельвин (В. Томсон) [Kelvin (W. Thomson)]. Более подробно см. Love [1].

[2]) В первом из упомянутых выше мемуаров, где Коши не базируется на молекулярной теории, он получает две постоянные для изотропного тела.

[3]) Born [1]; см. также Love [1] (Note B в конце книги).

если вырезать из изотропного тела объемный элемент определенной формы (например, кубик), то этот элемент будет не отличим от всякого другого элемента той же формы (вырезанного в том же месте тела), но ориентированного иначе, чем первый. Например, дерево не есть изотропное тело, так как брусок, вырезанный в продольном направлении (по волокнам), резко отличается, хотя бы в смысле сопротивления разрыву, от бруска, вырезанного в поперечном направлении. Неизотропными являются и все кристаллические тела. В природе нет идеально изотропных тел, но есть много важных в техническом отношении материалов, которые с известным приближением можно считать изотропными.

Многие такие материалы (например, металлы) состоят из мелких неизотропных частиц (кристалликов), беспорядочно расположенных друг относительно друга, и эта беспорядочность создает то, что не слишком малые тела из этих материалов ведут себя в среднем, как изотропные.

Тело называется не только изотропным, но и *однородным*, если свойства элементов объема, вырезанных в различных местах тела, одни и те же.

Надо еще отметить, что тело, изотропное или однородное относительно одних свойств, может быть неизотропным или неоднородным относительно других.

В дальнейшем мы будем рассматривать только изотропные и однородные тела, понимая под этим *однородность и изотропность в смысле упругих свойств.*

Математически это обстоятельство выразится, очевидно, следующим образом: *коэффициенты* $c_{11}, \ldots, c_{66}$ *в формулах* (1) § 16 *не должны зависеть от ориентации осей координат относительно тела и от положения рассматриваемой точки тела.* Благодаря этому свойству упомянутые формулы принимают очень простой вид, как это будет сейчас показано.

Легко прежде всего показать, что *в каждой точке изотропного тела главные оси деформации совпадают с главными осями напряжений.*

Действительно, примем временно главные оси деформации в данной точке за оси координат. Тогда будем иметь:

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0.$$

На основании обобщенного закона Гука будем иметь в частности:

$$Y_z = Ae_{xx} + Be_{yy} + Ce_{zz}, \qquad \text{(а)}$$

где A, B, C — постоянные. Введем теперь новую координатную систему $Ox'y'z'$, получаемую из старой путем простого поворота вокруг оси Oz на 180°. Ось Oz' новой системы будет совпадать с Oz, а оси Ox', Oy' примут направления, прямо противоположные осям Ox, Oy. Так как коэффициенты A, B, C не должны зависеть от выбора осей, будем иметь в новой системе:

$$Y'_{z'} = Ae_{x'x'} + Be_{y'y'} + Ce_{z'z'}. \qquad \text{(б)}$$

Но очевидно:

$$e_{x'x'} = e_{xx}, \quad e_{y'y'} = e_{yy}, \quad e_{z'z'} = e_{zz}, \quad Y'_{z'} = -Y_z.$$

Сопоставляя формулу (а) с (б), видим, что должно быть:

$$Ae_{xx}+Be_{yy}+Ce_{zz}=-Ae_{xx}-Be_{yy}-Ce_{zz},$$

откуда следует [1]):

$$A=B=C=0.$$

Значит, $Y_z=0$. Так же точно докажем, что $Z_x=X_y=0$. А это значит, что координатные оси суть главные оси напряжений. Таким образом, наше утверждение доказано.

Итак, в дальнейшем будет излишним различать главные оси напряжений и деформации: те и другие мы будем просто называть *главными осями*.

Будем продолжать считать, что за оси координат приняты главные оси. На основании обобщенного закона Гука можем, в частности, написать

$$X_x=ae_{xx}+be_{yy}+ce_{zz},$$

где a, b, c — постоянные.

Пусть $Ox'y'z'$ — оси новой системы координат, полученные из старых путем поворота на 90° вокруг оси Ox. В новой системе мы должны иметь снова

$$X'_{x'}=ae_{x'x'}+be_{y'y'}+ce_{z'z'}.$$

Но очевидно, что в нашем случае

$$X'_{x'}=X_x, \qquad e_{x'x'}=e_{xx}, \qquad e_{y'y'}=e_{zz}, \qquad e_{z'z'}=e_{yy},$$

откуда

$$X_x=ae_{xx}+be_{zz}+ce_{yy}.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, видим, что должно быть: $b=c$.

Итак, имеем:

$$X_x=ae_{xx}+b(e_{yy}+e_{zz})=b(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+(a-b)e_{xx}.$$

Введем, наконец, обозначения:

$$b=\lambda, \qquad a-b=2\mu.$$

Тогда предыдущая формула запишется так:

$$X_x=\lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+2\mu e_{xx}=\lambda\theta+2\mu e_{xx},$$

где введено обозначение

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}.$$

Ввиду изотропии из формулы для X_x мы можем получить формулы для Y_y, Z_z простой заменой всюду буквы x на y или на z.

Следовательно, будем окончательно иметь:

$$N_1=\lambda\theta+2\mu e_1, \qquad N_2=\lambda\theta+2\mu e_2, \qquad N_3=\lambda\theta+2\mu e_3. \qquad (в)$$

[1]) Мы используем здесь следующее положение, которое считаем очевидным (или доказанным экспериментально): компоненты $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ деформации в данной точке могут принимать произвольные (разумеется, достаточно малые) значения при надлежащем выборе внешних воздействий на рассматриваемый элемент тела.

Здесь мы ввели обозначения N_1, N_2, N_3 для главных напряжений и e_1, e_2, e_3 для главных удлинений. Выбранные оси координат мы теперь будем обозначать через Ox', Oy', Oz'. Не забудем, что они по условию главные оси.

Чтобы теперь найти формулы, связывающие компоненты X_x, . . ., X_y напряжения с компонентами e_{xx}, . . ., e_{xy} деформации в любой системе координат $Oxyz$, достаточно выразить по известным формулам перехода от одной системы осей к другой величины X_x, . . ., X_y через N_1, N_2, N_3. Тогда мы получим, при помощи формул (в) выражения для X_x, . . ., X_y через e_1, e_2, e_3. Выражая, наконец, e_1, e_2, e_3 через e_{xx}, . . ., e_{xy}, найдем требуемые формулы. Фактическое выполнение этого потребовало бы довольно громоздких выкладок, которых легко избежать при помощи следующего простого приема.

Совокупность формул (в) можно заменить одной-единственной, которую получим, умножив равенства (в) соответственно на ξ'^2, η'^2, ζ'^2, где ξ', η', ζ' обозначают компоненты некоторого произвольного вектора $\boldsymbol{P}$ относительно осей $Ox'y'z'$, и сложив, что дает:

$$N_1\xi'^2+N_2\eta'^2+N_3\zeta'^2=\lambda\theta(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+2\mu(e_1\xi'^2+e_2\eta'^2+e_3\zeta'^2). \quad (г)$$

Сделаем теперь переход от осей $Ox'y'z'$ к осям $Oxyz$. Мы знаем, что при этом квадратичная форма $N_1\xi'^2 + N_2\eta'^2 + N_3\zeta'^2$ обратится в квадратичную форму (см. § 5)

$$X_x\xi^2+Y_y\eta^2+Z_z\zeta^2+2Y_z\eta\zeta+2Z_x\zeta\xi+2X_y\xi\eta,$$

а квадратичная форма $e_1\xi'^2 + e_2\eta'^2 + e_3\zeta'^2$ — в форму (см. § 13)

$$e_{xx}\xi^2+e_{yy}\eta^2+e_{zz}\zeta^2+2e_{yz}\eta\zeta+2e_{zx}\zeta\xi+2e_{xy}\xi\eta.$$

Здесь ξ, η, ζ обозначают компоненты вектора $\boldsymbol{P}$ относительно осей $Oxyz$. Далее, очевидно,

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2.$$

Что касается величины

$$\theta=e_1+e_2+e_3,$$

то ее значение, выраженное через компоненты относительно новых осей, будет:

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}$$

(см. конец § 14). Следовательно, в новой системе координат равенство (г) перепишется так:

$$X_x\xi^2+Y_y\eta^2+Z_z\zeta^2+2Y_z\eta\zeta+2Z_x\zeta\xi+2X_y\xi\eta=\lambda\theta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+$$
$$+2\mu(e_{xx}\xi^2+e_{yy}\eta^2+e_{zz}\zeta^2+2e_{yz}\eta\zeta+2e_{zx}\zeta\xi+2e_{xy}\xi\eta).$$

Но так как предыдущее равенство справедливо для компонент любого вектора $\boldsymbol{P}$, т. е. при всяких значениях величин ξ, η, ζ, то коэффициенты при ξ^2, . . ., $\xi\eta$ должны быть равны между собой, и следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X_x=\lambda\theta+2\mu e_{xx},\quad Y_y=\lambda\theta+2\mu e_{yy},\quad Z_z=\lambda\theta+2\mu e_{zz},\\ Y_z=2\mu e_{yz},\quad Z_x=2\mu e_{zx},\quad X_y=2\mu e_{xy},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \tag{2}$$

представляет собой относительное объемное расширение.

Формулы (1) и дают искомую зависимость между компонентами напряжения и деформации в изотропном теле. Величины λ, μ представляют собой постоянные, характеризующие упругие свойства данного тела [1]). Обозначения эти были введены Ламе [2]) (G. Lamé, 1795—1870); поэтому λ и μ называются *постоянными Ламе*. Для каждого данного материала они должны быть определены экспериментально [3]).

По условию, высказанному в формулировке обобщенного закона Гука, уравнения (1) должны быть разрешимы относительно компонент деформации $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$. Посмотрим, каким условиям должны удовлетворять λ и μ, чтобы упомянутое условие было соблюдено. Для этого попытаемся фактически решить уравнение (1) относительно компонент деформации. Складывая три первых уравнения (1), получаем:

$$X_x + Y_y + Z_z = (3\lambda + 2\mu)\,\theta = (3\lambda + 2\mu)\,(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}). \tag{3}$$

Это уравнение будет разрешимо относительно $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ только в том случае, если $3\lambda + 2\mu \neq 0$. Далее, для разрешимости трех последних уравнений (1) относительно e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} должно быть $\mu \neq 0$ [4]).

Мы должны предполагать, что указанные условия выполнены. Внося значение θ, взятое из (3), в уравнения (1), получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} X_x - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(Y_y + Z_z),\\
e_{yy} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} Y_y - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(Z_z + X_x),\\
e_{zz} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} Z_z - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(X_x + Y_y),\\
e_{yz} &= \frac{1}{2\mu} Y_z, \quad e_{zx} = \frac{1}{2\mu} Z_x, \quad e_{xy} = \frac{1}{2\mu} X_y,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

выражающие компоненты деформации через компоненты напряжения.

§ 18. Основные уравнения статики упругого изотропного тела. Теперь мы имеем возможность выписать полную систему уравнений статики упругого тела. Эта система состоит из «уравнений равновесия»,

---

[1]) Формулы (1) остаются, очевидно, справедливыми и в случае, когда рассматриваемое тело, будучи изотропным, неоднородно. В этом случае величины λ и μ представляют собой функции координат x, y, z рассматриваемой точки. Некоторые формулы и предложения, выводимые ниже, также остаются в силе и для случая неоднородного тела, что читатель легко установит сам.

[2]) Lamé [1].

[3]) Экспериментально определяются не самые величины λ и μ, а другие величины, через которые они выражаются и которые поддаются непосредственно экспериментальному измерению.

[4]) Мы увидим в § 19, что для всех реальных тел $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

связывающих компоненты напряжения (§ 4), и из уравнений (1) § 17, связывающих напряжения с деформацией. Вот эта полная система [1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+Y=0,\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+Z=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_x=\lambda\theta+2\mu e_{xx},\quad Y_y=\lambda\theta+2\mu e_{yy},\quad Z_z=\lambda\theta+2\mu e_{zz},\\ Y_z=2\mu e_{yz},\quad Z_x=2\mu e_{zx},\quad X_y=2\mu e_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\\ e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где u, v, w обозначают компоненты смещения и для краткости введено обозначение

$$\theta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4}$$

К этим уравнениям следует присоединить еще формулы, дающие компоненты вектора напряжения, действующего на площадку с нормалью n (§ 3):

$$\left.\begin{aligned} X_n=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),\\ Y_n=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z),\\ Z_n=Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Сделаем теперь одно общее замечание относительно уравнений (1) и (2) статики упругого тела. Эти уравнения линейны и однородны относительно компонент смещения u, v, w, компонент напряжения X_x, . . ., X_y и компонент объемных сил X, Y, Z.

Отсюда следует, что если

$$u',\ v',\ w',\ X'_x,\ \ldots,\ X'_y \text{ и } u'',\ v'',\ w'',\ X''_x,\ \ldots,\ X''_y$$

суть два решения уравнений (1) и (2) при объемных силах X', Y', Z' для первого решения и X'', Y'', Z'' — для второго, то выражения

$$\left.\begin{aligned} u=u'+u'',\quad v=v'+v'',\quad w=w'+w'',\\ X_x=X'_x+X''_x,\ \ldots,\ X_y=X'_y+X''_y \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

дадут решение той же системы при объемных силах с компонентами

$$X=X'+X'',\quad Y=Y'+Y'',\quad Z=Z'+Z''. \tag{7}$$

Мы будем говорить, что решение (6) получается *наложением* двух данных. Формулы (5) показывают, что внешние напряжения, приложенные к поверхности тела (при этом под n в упомянутых формулах надо

[1]) То, что это действительно полная система, будет показано в § 20.

понимать внешнюю нормаль), соответствующие последнему решению, суть суммы внешних напряжений, соответствующих данным решениям.

В частности, если u'', v'', w'', X''_x, . . ., X''_y есть какое-либо решение, соответствующее отсутствию объемных сил ($X'' = Y'' = Z'' = 0$), то решение (6) будет удовлетворять тем же уравнениям с теми же объемными силами, что и решение u', v', w', X'_x, . . ., X'_y.

§ 19. Простейшие случаи упругого равновесия. Основные упругие постоянные. Прежде, чем идти дальше, остановимся на нескольких простейших случаях упругого равновесия, имея в виду определение физического смысла постоянных, характеризующих упругие свойства тела.

Заметим прежде всего, что при отсутствии объемных сил, т. е. при

$$X = Y = Z = 0, \tag{1}$$

уравнениям статики упругого тела можно, в частности, удовлетворить, считая компоненты деформации e_{xx}, . . ., e_{xy} постоянными (произвольно заданными), т. е. считая деформацию однородной. Действительно, на основании соотношений (2) § 18 компоненты напряжения также будут постоянными, и, следовательно, уравнения (1) § 18 будут тождественно удовлетворены (так как, по условию, $X = Y = Z = 0$). Далее, будут, очевидно, удовлетворены условия совместимости Сен-Венана (§ 15), так что всегда можно будет найти смещения u, v, w, соответствующие данным компонентам деформации. В нашем простом случае это можно показать непосредственно, найдя фактически выражения для смещений; именно, непосредственная подстановка показывает, что компоненты смещения, представляемые формулами

$$\left.\begin{aligned} u &= e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z + qz - ry + a, \\ v &= e_{yx}x + e_{yy}y + e_{yz}z + rx - pz + b, \\ w &= e_{zx}x + e_{zy}y + e_{zz}z + py - qx + c, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

удовлетворяют при постоянных e_{xx}, . . ., e_{xy} соотношениям (3) § 18. Здесь a, b, c, p, q, r — произвольные постоянные; члены, их содержащие, выражают поэтому жесткое перемещение тела как целого [1]).

На основании сказанного в § 15 решение (2) — единственное возможное при данных e_{xx}, . . . , e_{xy}.

Точно так же, очевидно, уравнениям статики упругого тела можно удовлетворить, полагая компоненты напряжения равными произвольно заданным постоянным. Действительно, уравнения (2) § 18 дадут для компонент деформации определенные постоянные значения, и мы получим предыдущий случай.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие частные случаи.

Положим сперва:

$$X_x = T = \text{const}, \quad Y_y = Z_z = Y_z = Z_x = X_y = 0. \tag{3}$$

[1]) Формулы (2) можно также сразу написать на основании формул (12) § 12.

Тогда уравнения (2) § 18 или, что все равно, уравнения (4) § 17 дадут

$$e_{xx} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}T, \quad e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}T, \tag{4}$$

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \tag{5}$$

Предположим, что рассматриваемое упругое тело есть призма или цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, и основаниями, перпендикулярными к ней.

На основании формул (5) § 18 очевидно, что на боковой поверхности $X_n = Y_n = Z_n = 0$, т. е. боковая поверхность свободна от внешних напряжений. На основании, обращенном в сторону положительной оси Ox, будем иметь: $Y_n = Z_n = 0$, $X_n = T$, а на другом основании $Y_n = Z_n = 0$, $X_n = -X_x = -T$.

Следовательно, внешние усилия, действующие на цилиндр, суть равномерно распределенные на основаниях растягивающие напряжения (если $T > 0$) или сжимающие (если $T < 0$). T обозначает растягивающее или сжимающее усилие, приходящееся на единицу площади основания.

Мы будем считать очевидным (или, если угодно, доказанным экспериментально), что при этих условиях и при $T > 0$ произойдет удлинение цилиндра в продольном направлении и сжатие в поперечном; это значит, что при $T > 0$ должно быть: $e_{xx} > 0$, $e_{yy} < 0$, $e_{zz} < 0$. На основании формул (4) это дает:

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} > 0, \quad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} > 0. \tag{6}$$

Значит, в частности, $\lambda + \mu \neq 0$; кроме того, из этих неравенств следует (если разделить одну на другую левые части):

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} > 0.$$

Введем обозначения:

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{7}$$

Величины E и σ на основании только что сказанного положительны для всех материалов.

Величина E называется *модулем упругости* или *модулем Юнга* (Th. Young, 1773—1829), а величина σ — *коэффициентом Пуассона*. Физическое значение величины E получаем из первой формулы (4):

$$T = E \cdot e_{xx}. \tag{8}$$

Значит, E есть отношение растягивающего напряжения к вызываемому им относительному продольному удлинению (или сжимающего напряжения к продольному относительному сжатию).

Физическое значение величины σ также следует из формул (4), показывающих, что

$$\frac{|e_{yy}|}{|e_{xx}|} = \frac{|e_{zz}|}{|e_{xx}|} = \sigma. \tag{9}$$

Значит, отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному удлинению (или при $T < 0$ отношение поперечного расширения к продольному сжатию) есть величина постоянная, не зависящая от формы сечения растягиваемого стержня и от величины растягивающего усилия. Это отношение σ и называется коэффициентом Пуассона.

Рассмотрим теперь другой частный случай. Пусть

$$Y_z = T = \text{const}, \quad X_x = Y_y = Z_z = Z_x = X_y = 0. \tag{10}$$

Тогда формулы (2) § 18 дают, очевидно,

$$e_{yz} = \frac{1}{2\mu} T, \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \tag{11}$$

Значит, соответствующая деформация есть простой сдвиг.

Если рассматриваемое тело в недеформированном состоянии представляет собою прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными плоскостям координат, то, как легко видеть на основании формул (10), грани, перпендикулярные оси Ox, не подвержены внешним усилиям. Усилия же, приложенные к другим граням, сводятся к скалывающим усилиям, приложенным при $T > 0$, как указано на рис. 10, где изображено только сечение тела плоскостью, параллельной Oyz.

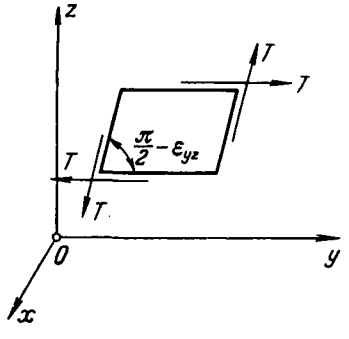


Рис. 10.

Угол, первоначально прямой, между гранями, первоначально параллельными плоскостям Oxy и Oxz, отмеченный на чертеже, уменьшается на величину ε_{yz}, равную $2e_{yz}$ (см. § 12). Следовательно, будем иметь на основании формул (11):

$$T = \mu \varepsilon_{yz}. \tag{12}$$

Значит, μ есть отношение величины скалывающего усилия T к углу вызванного сдвига. Поэтому μ называется *модулем сдвига*.

Рассмотрим, наконец, случай:

$$X_x = Y_y = Z_z = -p = \text{const}, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0. \tag{13}$$

В этом случае формулы (5) § 18 показывают, что напряжение, действующее на любую площадку с нормалью n, дается формулами:

$$X_n = -p \cos(n, x), \quad Y_n = -p \cos(n, y), \quad Z_n = -p \cos(n, z),$$

выражающими, что вектор напряжения параллелен нормали и имеет постоянную величину $|p|$. Следовательно, на каждую площадку действует только нормальное напряжение; если считать $p > 0$, то напряжение будет сжимающим. Поверхность любой части рассматриваемого тела будет подвергнута только равномерному нормальному внешнему давлению («гидростатическое давление»).

Сложение трех первых формул (2) § 18 приводит к формуле:

$$p = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta.$$

Так как θ представляет относительное объемное расширение (а следовательно,— θ есть объемное сжатие), то величина

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{14}$$

называется *модулем всестороннего сжатия*. Мы считаем очевидным (или доказанным экспериментально), что при $p > 0$ происходит действительно уменьшение объема, а это значит, что $k > 0$ для всех материалов.

Мы ввели в рассмотрение, кроме λ и μ, еще следующие постоянные: E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, k — модуль всестороннего сжатия. Величины λ и μ можно выразить через любые две из них. Например, решив уравнения (7) относительно λ и μ, получим:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{15}$$

а подставив эти значения в выражение (14), будем иметь

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \tag{16}$$

Последняя формула показывает, что для всех материалов должно быть

$$\sigma < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Формулы же (15) показывают, что [1])

$$\lambda > 0, \qquad \mu > 0.$$

Заметим, что по старой теории Коши и Пуассона для всех тел должно было бы быть: $\sigma = {}^1/_4$ или, что все равно, $\lambda = \mu$. Но это не подтвердилось на опыте. Все же для очень многих тел σ имеет приблизительно одно и то же значение, близкое к ${}^1/_3$ (а не к ${}^1/_4$).

Если вместо λ и μ внести в формулы (4) § 17 величины E и σ, они примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)], \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}[Y_y - \sigma(Z_z + X_x)], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}[Z_z - \sigma(X_x + Y_y)], \\ e_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}Y_z, \quad e_{zx} &= \frac{1+\sigma}{E}Z_x, \quad e_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}X_y. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Замечание. В литературе [2]) часто под «пуассоновым числом» понимают величину $1/\sigma$, обозначаемую часто через m.

---

[1]) То обстоятельство, что $\mu > 0$, можно было бы считать очевидным и на основании физического значения μ (модуль сдвига).

[2]) Например, Grammel [1].

Модуль сдвига μ часто обозначается через G. Новейшие численные данные относительно упругих постоянных для различных материалов можно найти, например, в книге Grammel [1].

§ 20. Основные граничные задачи статики упругого тела. Единственность решения. Вернемся к основным уравнениям статики упругого тела (§ 18), которые мы теперь перепишем так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+Y=0,\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+Z=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\ &Y_z=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad Z_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad X_y=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Уравнения (1), (2), числом девять, содержат столько же неизвестных функций u, v, w, X_x, . . ., X_y. Выше мы назвали систему (1), (2) полной системой уравнений статики упругого тела. Для того, чтобы убедиться, что это действительно так и есть, следует доказать, что система (1), (2) вполне определяет упругое равновесие [1]) тела, если известны те внешние воздействия, которым оно подвергнуто, а кроме того, внутренние [2]) объемные силы.

Внешние воздействия состоят, во-первых, из внешних объемных сил и, во-вторых, из внешних усилий, приложенных к поверхности тела.

В связи с этим возникает следующая первая основная граничная задача:

I. *Найти упругое равновесие тела, если заданы внешние напряжения, действующие на поверхность тела.* Здесь, как и во всем последующем, мы считаем, что *объемные силы* [3]) *заданы раз навсегда.*

[1]) Мы считаем, что упругое равновесие тела известно, если известны компоненты напряжения в каждой точке или, что сводится к тому же благодаря уравнениям (2), если известны компоненты деформации.

[2]) Не надо думать, что объемные силы суть исключительно внешние. Например, силы тяготения между частями упругого тела суть внутренние объемные силы.

[3]) На практике дело обстоит следующим образом: объемные силы, действующие на элемент объема, зависят обычно от массы, заключенной в этом элементе, и от положения этого элемента по отношению к другим массам (конкретные примеры: сила тяжести, центробежная сила при вращении тела и пр.). При деформации изменяется как положение элемента, так и плотность его, так что объемные силы (X, Y, Z), относимые к единице объема, вообще говоря, несколько изменяются при деформации. Но ввиду малости деформаций и смещений эти изменения ничтожно малы и ими можно пренебречь.

По отношению к уравнениям (1), (2) наша задача сводится к следующей: найти функции u, v, w, X_x, . . ., X_y, удовлетворяющие уравнениям (1), (2) в области V, занятой телом [1]), и, кроме того, на поверхности (границе) S тела следующим граничным условиям [см. формулы (5) § 18]:

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos(n, x)+X_y\cos(n, y)+X_z\cos(n, z)&=f_1,\\ Y_x\cos(n, x)+Y_y\cos(n, y)+Y_z\cos(n, z)&=f_2,\\ Z_x\cos(n, x)+Z_y\cos(n, y)+Z_z\cos(n, z)&=f_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где n обозначает внешнюю нормаль к поверхности тела, а f_1, f_2, f_3 — заданные на поверхности функции (представляющие собой компоненты заданного вектора напряжения, действующего на поверхность тела).

Кроме указанной выше первой основной задачи, представляет значительный интерес в т о р а я о с н о в н а я г р а н и ч н а я з а д а ч а:

II. *Найти упругое равновесие тела, если заданы смещения точек его поверхности.* Физически это соответствует случаю, когда подходящими усилиями, приложенными к точкам поверхности, этим точкам сообщают заданные смещения и закрепляют поверхность в этом виде. В отношении же уравнений (1), (2) это сводится к нахождению такого их решения, которое удовлетворяет на поверхности тела следующим граничным условиям:

$$u=g_1, \qquad v=g_2, \qquad w=g_3, \tag{4}$$

где g_1, g_2, g_3 — заданные на поверхности функции.

Наконец, во многих вопросах играет большую роль о с н о в н а я с м е ш а н н а я г р а н и ч н а я з а д а ч а, когда заданы смещения на одной части поверхности, на остальной же — внешние напряжения.

Кроме указанных задач, можно поставить ряд других, имеющих не меньшее значение для приложений; некоторые из этих задач будут рассмотрены ниже, в применении к плоскому случаю.

Во всем дальнейшем, если противное не оговорено особо, мы будем считать, что u, v, w — *однозначные* функции, имеющие внутри области, занятой телом, непрерывные производные до третьего порядка включительно. При этих условиях компоненты деформации и напряжения будут однозначными и непрерывными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка внутри той же области.

Мы будем предполагать, кроме того, что компоненты смещения и компоненты напряжения непрерывны вплоть до границы области V, занятой телом. Это предположение, не будучи высказано явно, имелось в виду и выше, например, когда мы писали формулы (3) и (4).

Относительно поверхности S тела, представляющей его границу, мы будем предполагать, что она удовлетворяет условиям, которые обычно принимаются для того, чтобы обеспечить справедливость известных формул интегрального исчисления, которыми мы будем пользоваться ниже.

[1]) Под областью V мы будем подразумевать область, первоначально занятую телом (см. § 16), а под S — границу этой области.

Имея в виду доказать «*теоремы единственности*», т. е. что система уравнений (1), (2) может иметь только одно определенное решение для каждой из названных основных задач, выведем сперва одну важную формулу.

Рассмотрим двойной интеграл, распространенный на поверхность S тела:

$$J = \iint_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, dS, \tag{5}$$

где X_n, Y_n, Z_n определяются формулами (5) § 18, в которых под n надо понимать внешнюю нормаль к поверхности.

Внося в интеграл (5) упомянутые выражения, получаем:

$$J = \iint_S [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\, dS,$$

где для краткости введены обозначения:

$$P = X_x u + Y_x v + Z_x w, \quad Q = X_y u + Y_y v + Z_y w,$$
$$R = X_z u + Y_z v + Z_z w.$$

На основании формулы Остроградского — Грина имеем:

$$J = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Но в нашем случае

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) +$$
$$+ w\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) + X_x\frac{\partial u}{\partial x} + Y_y\frac{\partial v}{\partial y} + Z_z\frac{\partial w}{\partial z} + Y_z\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$
$$+ Z_x\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + X_y\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

или на основании формул (1)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -(Xu + Yv + Zw) + 2W,$$

где положено:

$$2W = X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + 2Y_z e_{yz} + 2Z_x e_{zx} + 2X_y e_{xy}. \tag{6}$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$\iint_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, dS + \iiint_V (Xu + Yv + Zw)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= 2\iiint_V W\, dx\, dy\, dz. \tag{7}$$

Выражение W, вошедшее в эту формулу, представляет собой, как будет показано в § 24, *потенциальную энергию деформации тела, заключенную в единице объема*; но это в данный момент не имеет значения.

Внося в правую часть формулы (6), вместо компонент напряжения, их выражения (2) § 18 через компоненты деформации, получаем после очевидных упрощений формулу

$$2W = \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{yz}^2 + 2e_{zx}^2 + 2e_{xy}^2), \qquad (6')$$

показывающую, что W есть *положительная* квадратичная форма компонент деформации, притом *неособенная*, т. е. обращающаяся в нуль только тогда, когда все компоненты деформации равны нулю; это следует из того, что λ и μ — положительные величины, как было показано выше.

Можно также просто выразить W через компоненты напряжения; W будет, очевидно, также положительной квадратичной формой этих компонент.

Предположим теперь, что одна из поставленных выше задач допускает два решения. Пусть u', v', w', X_x', . . ., X_y' — компоненты смещений и напряжений, соответствующих первому решению, а u'', v'', w'', X_x'', . . ., X_y'' — аналогичные величины, соответствующие второму. Составим «разность» этих двух решений, т. е. положим:

$$u = u'' - u', \ \ldots, \ X_y = X_y'' - X_y'.$$

Очевидно, что (см. конец § 18) функции u, v, w, X_x, . . ., X_y удовлетворяют тем же уравнениям (1), (2), в которых надо только положить:

$$X = Y = Z = 0;$$

иными словами, наша «разность» решений удовлетворяет основным уравнениям статики упругого тела при отсутствии объемных сил.

Значит, для величин u, v, w, X_x, . . ., X_y будем иметь формулу, получаемую из (7) при $X = Y = Z = 0$:

$$\int\int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, dS = 2 \int\int\int_V W\, dx\, dy\, dz. \qquad (7')$$

Заметим теперь следующее: в случае задачи I величины X_n, Y_n, Z_n, составленные для «разности» двух решений, равны нулю на S, так как и то и другое решение по предположению удовлетворяет условиям (3) при одних и тех же значениях f_1, f_2, f_3 для обоих решений. Следовательно, для разности этих двух решений получим:

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = 0, \qquad Y_n = 0, \qquad Z_n = 0.$$

Далее, в случае задачи II будем подобным же образом иметь $u = v = w = 0$ на S. Наконец, в случае смешанной задачи на одной части поверхности равны нулю u, v, w, а на другой X_n, Y_n, Z_n. Во всех трех случаях выражение $X_n u + Y_n v + Z_n w$ равно 0 на S. Значит, формула (7') даст

$$\int\int\int_V W\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Но ведь всюду $W \geqslant 0$. Следовательно, предыдущее равенство возможно только в случае, если $W = 0$ во всех точках области V.

На основании сказанного выше это в свою очередь возможно только при соблюдении условия $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0$ во всем

теле. Но ведь $e_{xx} = e''_{xx} - e'_{xx}$ и т. д., где $e''_{xx}, \ldots, e''_{xy}, e'_{xx}, \ldots, e'_{xy}$ — компоненты деформаций, соответствующих двум рассматриваемым решениям. Значит, оба решения дают одинаковые компоненты деформации и, следовательно, одинаковые компоненты напряжения. Следовательно, *оба решения тождественны в том смысле, что они дают одинаковые напряженные состояния* (и деформации). Теорема единственности, таким образом, доказана [1]).

Заметим, однако, что смещения могут оказаться не вполне тождественными. Действительно, из равенства нулю $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ не следуют равенства $u = v = w = 0$, а только равенства

$$u = a + qz - ry, \quad v = b + rx - pz, \quad w = c + py - qx \tag{8}$$

(где a, b, c, p, q, r — постоянные), выражающие жесткое перемещение тела как целого. Значит, при решении первой основной задачи мы хотя и получим всегда одни и те же напряжения (и деформации), но можем получить для смещений различные значения, разнящиеся друг от друга только жестким перемещением тела как целого. Это, конечно, следовало предвидеть заранее, ибо такое перемещение никакого влияния на напряжения и деформацию не имеет. Такое различие решений мы будем считать несущественным.

В случаях же второй и смешанной задач и этого различия быть не может, так как смещения заранее заданы на всей или на части поверхности.

Заметим, наконец, что из доказанной теоремы единственности следует как частный случай предложение: Если объемные силы равны нулю и, кроме того, равны нулю: а) либо внешние напряжения, б) либо смещения точек поверхности, в) либо внешние напряжения на одной части поверхности и смещения на другой, то во всем теле напряжения равны нулю (следовательно, отсутствует и деформация).

Приведенное доказательство единственности справедливо как для односвязных, так и для многосвязных тел, ибо мы нигде не вводили предположения об односвязности [2]). При доказательстве весьма существенным является предположение, что компоненты смещения суть *однозначные* функции координат. Как мы уже сказали, в случае многосвязного тела можно допустить существование смещений и неоднозначных. При этом обобщенном рассмотрении вопроса приведенное выше доказательство единственности теряет силу и сама теорема несправедлива. О физической интерпретации указанного случая см. ниже (глава II).

Мы доказали только следующее: если названные выше основные задачи теории упругости допускают решение, то оно единственно. Но этим, конечно, далеко не доказано, что решение существует. Доказатель-

[1]) Теорема и приведенное здесь доказательство принадлежат Кирхгоффу (1858 г.).

[2]) Это доказательство применимо без всяких изменений и в случае неоднородных тел, т. е. когда λ и μ являются функциями координат x, y, z (ср. примечание 1 на стр. 64).

ство существования решения представляет гораздо больше трудностей, чем доказательство теоремы единственности, и требует применения самых могущественных средств современного анализа. Этим и объясняется факт, что доказательства существования решений основных задач найдены сравнительно недавно.

Рамки и характер настоящей книги не позволяют нам остановиться на этих вопросах [1]). Поэтому мы ограничимся указанием, что существование решения первой и второй основных задач доказано в настоящее время с полной математической строгостью при достаточно общих условиях. При этом для существования решения первой основной задачи должно быть соблюдено, очевидно, следующее условие: главный вектор и главный момент совокупности объемных сил и (заданных) внешних напряжений, приложенных к поверхности, должны равняться нулю. Это условие вытекает из основного принципа статики, а также может быть выведено из самих уравнений (1).

Действительно, проекция главного вектора упомянутых сил, например на ось Ox, равна

$$\iiint\limits_V X\,dx\,dy\,dz + \iint\limits_S X_n\,dS.$$

Но, как было показано в § 4, предыдущее выражение равно

$$\iiint\limits_V \left(X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz;$$

этот тройной интеграл равен нулю в силу уравнений (1).

Далее, главный момент упомянутых сил, например относительно оси Ox, равен

$$\iiint\limits_V (yZ - zY)\,dx\,dy\,dz + \iint\limits_S (yZ_n - zY_n)\,dS.$$

Предыдущее же выражение, как было показано в § 4, равно в силу уравнений (1)

$$\iiint\limits_V (Z_y - Y_z)\,dx\,dy\,dz,$$

т. е. равно нулю, так как $Z_y = Y_z$.

---

[1]) Интересующихся отсылаем к оригинальным работам, в которых даны упомянутые доказательства. Из довольно многочисленных работ этого рода укажем только некоторые. Для второй основной задачи: Fredholm [1], Lauricella [1, 2], Korn [1, 2], Lichtenstein [1], Шерман [21]. Для первой основной задачи: Korn [3], Weyl [1]. Доказательства для плоского случая будут указаны в главе V.

Отметим, что в литературе под первой основной задачей разумеют обычно ту, которую мы назвали второй, и наоборот.

Добавим, что после выхода предыдущего (четвертого) издания настоящей книги опубликованы работы: Купрадзе [1], Гегелия [1], Михлин [14], в которых изучаются пространственные задачи с помощью многомерных сингулярных интегральных уравнений.

§ 21. Основные уравнения в компонентах смещения. Система уравнений (1), (2) предыдущего параграфа содержит одновременно и компоненты смещения и компоненты напряжения. Можно, однако, составить систему, содержащую только те или другие компоненты. Проще всего составить систему, содержащую компоненты смещения. Для этого достаточно внести выражения (2) § 20 в уравнения (1) § 20; тогда после очевидных упрощений получим:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+X=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+Y=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w+Z=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где положено по-прежнему

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

а символ Δ обозначает операцию Лапласа, т. е.

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Навье (Navier, 1785—1836) еще в 1821 г. [1]) получил, исходя из представления упругого тела как системы материальных точек, уравнения, которым должны удовлетворять смещения точек упругого тела как в динамическом, так и в статическом случае.

Уравнения Навье, относящиеся к последнему случаю, совпадают по существу с уравнениями (1), если в этих последних положить: $\lambda = \mu$. Нахождение этих уравнений можно рассматривать как один из существеннейших этапов в развитии теории упругости, и поэтому Навье по справедливости причисляется к числу главнейших ее основателей.

Уравнения (1) весьма удобны по своей симметрии и еще потому, что содержат только три неизвестных.

§ 22. Уравнения в компонентах напряжения. Часто, однако, гораздо удобнее иметь дело с уравнениями, содержащими только напряжения. Не надо думать, что при этом можно ограничиться уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+X=0,\\\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+Y=0,\\\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+Z=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

которые мы называли «уравнениями равновесия».

[1]) Мемуар Навье, представленный Парижской Академии в 1821 г., был напечатан в 1827 г.

Действительно, если величины $X_x, \ldots, X_y$ удовлетворяют предыдущим уравнениям, это еще не значит, что они выражают некоторое возможное в действительности напряженное состояние, а именно: необходимо еще, чтобы можно было найти смещения (u, v, w), которые связаны с этими напряжениями соотношениями (2) § 20. А для этого в свою очередь необходимо и достаточно [1]), чтобы компоненты деформации, данные формулами (18) § 19, которые мы теперь перепишем так:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}=\frac{1+\sigma}{E}X_x-\frac{\sigma}{E}\Theta,\quad e_{yy}=\frac{1+\sigma}{E}Y_y-\frac{\sigma}{E}\Theta,\quad e_{zz}=\frac{1+\sigma}{E}Z_z-\frac{\sigma}{E}\Theta,\\ e_{yz}=\frac{1+\sigma}{E}Y_z,\quad e_{zx}=\frac{1+\sigma}{E}Z_x,\quad e_{xy}=\frac{1+\sigma}{E}X_y,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где для краткости положено: $\Theta = X_x + Y_y + Z_z$, удовлетворяли условиям совместимости Сен-Венана [§ 15, формулы (6)].

Подставляя значения (2) в формулы (6) § 15, после некоторых упрощений из формул первой строки получаем соответственно:

$$\frac{\partial^2 Y_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2}-\frac{\sigma}{1+\sigma}\left\{\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right\}=2\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y\,\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 X_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial Y_z}{\partial x}+\frac{\partial Z_x}{\partial y}+\frac{\partial X_y}{\partial z}\right\}; \tag{4}$$

круговой перестановкой получим еще четыре подобных соотношения, соответствующих остальным условиям совместимости.

Уравнения (3) и (4) можно несколько упростить, пользуясь уравнениями (1). Действительно, дифференцируя второе из уравнений (1) по y, а третье по z и складывая, получаем:

$$2\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right\}=-\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Но на основании первого из уравнений (1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2};$$

внося это значение в предыдущую формулу, будем иметь:

$$2\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial X}{\partial x},$$

а внося найденное выражение в правую часть уравнения (3), получаем после очевидных преобразований:

$$-\frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2(Y_y+Z_z)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2(Y_y+Z_z)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}=$$
$$=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Наконец, замечая, что $Y_y + Z_z = \Theta - X_x$, получаем после простых приведений

$$\frac{1}{1+\sigma}\Delta\Theta-\Delta X_x-\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\frac{\partial X}{\partial x}. \tag{a}$$

[1]) С некоторой оговоркой в случае многосвязности тела (см. конец настоящего параграфа).

Складывая последнее равенство с двумя аналогичными, получаемыми из него круговой перестановкой букв, находим формулу, которая важна сама по себе:

$$\Delta\Theta = -\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{1+\sigma}{1-\sigma}. \tag{5}$$

Внося это значение $\Delta\Theta$ в уравнение (а), получаем, наконец:

$$\Delta X_x+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial X}{\partial x}. \tag{6}$$

Это и есть одна из требуемых формул, из которых две аналогичные получим путем круговой перестановки.

Займемся теперь преобразованием соотношения (4). Дифференцируя второе из уравнений (1) по z, третье по y и складывая, получаем:

$$\frac{\partial^2 Y_x}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 Z_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Складывая это уравнение с уравнением (4), которое можно переписать так:

$$\frac{\partial^2 X_x}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}=0,$$

после очевидных приведений получаем:

$$\Delta Y_z+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Остальные уравнения этого типа получим круговой перестановкой.

Итак, мы видим, что компоненты напряжения должны удовлетворять девяти уравнениям: уравнениям (1), уравнению (6) и двум аналогичным и уравнению (7) и двум аналогичным.

Уравнения (6) и (7) были получены Мичеллом (Michell [1], стр. 112—113); для случая отсутствия объемных сил эти уравнения были найдены еще раньше Бельтрами (Beltrami) (1892 г.). Поэтому мы будем называть уравнения (6) и (7) и четыре аналогичных, получаемых круговой перестановкой, *условиями совместимости* Бельтрами — Мичелла.

Из самого приведенного вывода вытекает, что при соблюдении условий (6) и (7) (и аналогичных, получаемых круговой перестановкой) компоненты деформации, соответствующие компонентам напряжения, удовлетворяющим уравнениям равновесия (1), будут удовлетворять условиям совместимости Сен-Венана.

Таким образом, уравнения (1) вместе с уравнениями типа (6) и (7) не только необходимы, но и *достаточны*.

Некоторая оговорка нужна только в случае многосвязного тела, когда смещения, соответствующие компонентам напряжения, удовлетворяющим всем перечисленным условиям, могут оказаться многозначными. В этом случае надо либо поставить дополнительно условие однозначности смещений, либо допускать существование многозначных смещений, чему, как было уже сказано, можно приписать определенный физический смысл.

§ 23. Замечание о фактическом решении основных задач. Принцип Сен-Венана. Решение упомянутых выше основных граничных задач для общего случая представляет на практике громадные затруднения, если имеется в виду *фактическое* осуществление вычислений. Так называемые общие методы дают (в общем случае) только теоретическое решение, т. е. в конечном счете доказывают лишь существование его [1]).

Часто решение той или иной задачи значительно упрощается применением так называемого *принципа Сен-Венана* [2]), который можно формулировать следующим образом: если к *небольшому* участку поверхности тела приложена совокупность усилий, статически эквивалентная нулю [3]), то эта система усилий не оказывает заметного влияния на части тела, не находящиеся вблизи упомянутого участка. Принцип Сен-Венана можно выразить еще другими словами: если совокупность усилий, действующих на небольшой участок поверхности тела, заменить совокупностью усилий (приложенных к тому же участку), статически эквивалентной первой, то такая замена не вызовет заметного изменения в упругом равновесии частей тела, не находящихся вблизи упомянутого участка. Обе формы, в которых мы высказали принцип Сен-Венана, очевидно, вполне равносильны.

Принцип Сен-Венана позволяет, таким образом, изменять (при определенных, указанных выше, условиях) заданные на поверхности напряжения и этим упрощать задачу. Этим принципом мы широко воспользуемся в гл. VII.

§ 24. Динамические уравнения. Об основных задачах динамики упругого тела. Хотя в этой книге мы будем заниматься только вопросами равновесия, мы все же выведем уравнения динамики упругого тела, укажем постановку простейших основных задач относительно этих уравнений и докажем единственность решения этих задач. Попутно мы получим выражение для потенциальной энергии деформированного тела.

Вывод уравнений динамики упругого тела никаких затруднений не представляет. Эти уравнения могут быть сразу получены из уравнений статики на основании принципа Даламбера. Действительно, для этого достаточно написать уравнения статики, присоединив к объемным силам еще *силы инерции*.

В рассматриваемом теперь случае компоненты смещения, деформации и напряжения представляют собой функции не только координат x, y, z,

[1]) Эти общие методы даны в работах, указанных в примечании на стр. 75.

[2]) Высказан в 1855 г. в мемуаре Saint-Venant [1]. Принцип Сен-Венана очень хорошо согласуется с действительностью. Однако математическое обоснование его (которое должно заключаться в оценке влияния системы усилий, статически эквивалентной нулю) довольно затруднительно, по крайней мере в общем случае.

[3]) Под системой сил, статически эквивалентной нулю, понимается система, эквивалентная нулю с точки зрения статики абсолютно твердого тела, т. е. система, главный вектор и главный момент которой равны нулю. Статически эквивалентными системами называются системы, имеющие одинаковые главные векторы и моменты.

но и времени t. Компоненты ускорения точки, занимавшей при недеформированном состоянии тела положение (x, y, z), будут:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w(x, y, z, t)}{\partial t^2}.$$

Компоненты же силы инерции, приложенной к элементу объема dV, заключающему массу dm, будут:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dm, \quad -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dm, \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dm.$$

Но так как $dm = \varrho\, dV$, где ϱ — плотность [1]), то компоненты силы инерции, рассчитанной на единицу объема, будут:

$$-\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Присоединяя силу инерции к объемной силе, т. е. заменяя компоненты X, Y, Z последней на

$$X - \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y - \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z - \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

и внося эти значения в уравнения (1) § 18, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X &= \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y &= \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z &= \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Этими уравнениями и надо заменить «уравнения равновесия», т. е. уравнения (1) § 18. Уравнения же, связывающие напряжения с деформациями, выражающие обобщенный закон Гука, остаются без изменения, так как объемные силы в них не фигурируют. В случае изотропного тела — это уравнения (2) и (3) § 18. Без изменения остаются также формулы (5) § 18.

В рассматриваемом случае удобнее всего пользоваться уравнениями в смещениях, которые получаются совершенно тем же путем, как в § 21, и в случае изотропного тела имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + X &= \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + Y &= \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + Z &= \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Под V, как уже говорилось (§ 16), подразумевается область, занятая телом до деформации. В соответствии с этим dV обозначает первоначальный объем элемента тела, заключающий массу dm, а ϱ — плотность этого элемента до его деформации; эта плотность может зависеть от координат x, y, z рассматриваемой точки, но не от времени t.

Эти уравнения отличаются от уравнений Навье, полученных им в 1821 г. (см. § 21), тем, что в последних фигурирует только одна упругая постоянная. Уравнения Навье получаются из уравнений (2), если считать, что $\lambda = \mu$.

Относительно динамических уравнений можно поставить задачи, совершенно аналогичные тем основным задачам, которые были сформулированы выше (§ 20) для статического случая. Существенным различием является то, что к граничным условиям присоединяются еще и «начальные условия», т. е. задание смещений и скоростей точек тела в определенный «начальный» момент времени t_0. Математически эти задачи формулируются так:

Первая основная задача. *Найти функции* $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, *удовлетворяющие уравнениям* (2) *и следующим дополнительным условиям*:

$$X_n = f_1, \quad Y_n = f_2, \quad Z_n = f_3 \tag{3}$$

на поверхности S тела во все моменты времени, начиная с t_0, и

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}_0 \tag{4}$$

в области V, занятой телом при $t = t_0$.

В предыдущих формулах f_1, f_2, f_3 обозначают функции, заданные на поверхности S тела и зависящие, вообще говоря, также от времени. Далее, u_0, v_0, w_0, $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, $\dot{w}_0$ суть заданные функции от x, y, z. Равенства (3) выражают граничные условия, а равенства (4) — начальные условия.

Вторая основная задача отличается от первой только тем, что граничные условия (3) заменяются следующими:

$$u = g_1, \quad v = g_2, \quad w = g_3 \tag{5}$$

на поверхности S; g_1, g_2, g_3 — заданные функции на S, зависящие, вообще говоря, также от времени.

Смешанная задача отличается от двух предыдущих тем, что на части поверхности даются условия (3), а на другой части — условия (5).

Кроме этих основных задач, важное значение имеет ряд других, но на этом мы не останавливаемся.

Во всех перечисленных случаях мы считали, что объемные силы заданы во всех точках тела и во все моменты времени, начиная с t_0. Мы не будем здесь касаться трудного вопроса о математическом доказательстве существования решений этих задач, а докажем только, что *если решение данной задачи существует, то оно единственно.*

Прежде, чем приступить к доказательству, выведем одну формулу, представляющую значительный самостоятельный интерес и выражающую закон сохранения энергии в применении к рассматриваемому случаю.

Рассмотрим какое-либо определенное движение данного упругого тела и примем за начальный момент t_0 времени тот момент, когда тело

находилось в «естественном» состоянии равновесия, т. е. при отсутствии объемных сил и напряжений и, следовательно, при отсутствии деформации. Пусть $R\ (t)$ обозначает работу, произведенную внешними напряжениями и объемными силами, начиная от момента t_0 до рассматриваемого момента t. Подсчитаем эту работу и начнем с того, что вычислим работу dR упомянутых сил за промежуток времени $(t,\ t+dt)$, считая dt бесконечно малым.

Точка, занимавшая до деформации положение $(x,\ y,\ z)$, занимает в момент времени t положение, характеризуемое координатами:

$$x+u(x, y, z, t),\quad y+v(x, y, z, t),\quad z+w(x, y, z, t).$$

Смещение этой точки, происшедшее за промежуток времени $(t,\ t+dt)$, имеет, очевидно, следующие компоненты:

$$\dot{u}\,dt,\ \dot{v}\,dt,\ \dot{w}\,dt;$$

мы для краткости обозначаем точками частные производные по t, так что, например,

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad \ddot{u}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \text{и т. д.}$$

Работа внешних напряжений, приложенных к элементу dS поверхности тела, произведенная за промежуток $t,\ t+dt$, равна

$$(X_n\dot{u}+Y_n\dot{v}+Z_n\dot{w})\,dS\cdot dt,$$

а работа объемных сил, приложенных к элементу объема dV, равна

$$(X\dot{u}+Y\dot{v}+Z\dot{w})\,dV\cdot dt.$$

Значит, работа dR всех упомянутых сил за промежуток времени dt будет дана формулой

$$\frac{dR}{dt}=\int\int_S(X_n\dot{u}+Y_n\dot{v}+Z_n\dot{w})\,dS+\int\int\int_V(X\dot{u}+Y\dot{v}+Z\dot{w})\,dV. \qquad (а)$$

Внося в первый из предыдущих интегралов вместо X_n, Y_n, Z_n их выражения (5) § 18, преобразуя его совершенно аналогично тому, как мы преобразовали интеграл J в § 20, получаем, принимая во внимание уравнения (1):

$$\frac{dR}{dt}=\int\int\int_V\varrho(\dddot{u}\,u+\dddot{v}\,v+\dddot{w}\,w)\,dV+$$
$$+\int\int\int_V(X_x\dot{e}_{xx}+Y_y\dot{e}_{yy}+Z_z\dot{e}_{zz}+2Y_z\dot{e}_{yz}+2Z_x\dot{e}_{zx}+2X_y\dot{e}_{xy})\,dV. \qquad (б)$$

Но мы имеем

$$\int\int\int_V\varrho(\dddot{u}\,u+\dddot{v}\,v+\dddot{w}\,w)\,dV=\int\int\int_V\frac{1}{2}\varrho\frac{\partial}{\partial t}(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)\,dV=\frac{dT}{dt},$$

где

$$T=\frac{1}{2}\int\int\int_V\varrho(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)\,dV. \qquad (6)$$

Легко видеть, что T есть *кинетическая энергия* рассматриваемого тела, т. е. сумма живых сил отдельных его элементов. Действительно, по самому определению, живая сила элемента массы $dm = \varrho dV$ равна

$$\frac{1}{2} dm \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) = \frac{1}{2} \varrho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV.$$

Преобразуем теперь второй член правой части формулы (б).

Считая рассматриваемое тело изотропным [1]) и вводя в рассмотрение функцию

$$W = \frac{1}{2} \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + \mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{yz}^2 + 2e_{zx}^2 + 2e_{xy}^2), \qquad (7)$$

сразу убеждаемся, что

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \quad Y_y = \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, \quad Z_z = \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}, \\ 2Y_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, \quad 2Z_x = \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, \quad 2X_y = \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

откуда следует, что выражение под знаком второго интеграла в формуле (б) равно $\frac{\partial W}{\partial t}$, а сам интеграл равен

$$\iiint\limits_V \frac{\partial W}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint\limits_V W dV.$$

Таким образом, формула (б) принимает вид:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt} \iiint\limits_V W dV. \qquad (9)$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от t_0 до t и принимая во внимание, что в начальный момент тело находилось в естественном состоянии покоя (и, значит, $T = W = 0$ в этот момент), получим для работы R, произведенной внешними напряжениями и объемными силами за промежуток времени (t_0, t), выражение

$$R = T + U, \qquad (10)$$

где

$$U = \iiint\limits_V W dV. \qquad (11)$$

Формула (7) показывает, что W зависит исключительно от состояния деформации в данный момент в данной точке; следовательно, U зависит от состояния деформации рассматриваемого тела в данный момент t. Величина U представляет собой *потенциальную энергию деформации* тела, т. е. работу, которую должны затратить объемные силы и внешние напряжения, чтобы вызвать данное состояние деформации. Действительно, если под воздействием этих сил тело перешло из «естественного» состояния покоя в новое, деформированное состояние покоя, то согласно формуле (10) будем иметь: $R = U$, ибо при состоянии покоя $T = 0$.

[1]) При выводе формулы (б) не было надобности считать тело изотропным.

Формула (10) показывает нам, что работа объемных сил и внешних напряжений затрачивается на создание кинетической энергии T и потенциальной энергии деформации; это и выражает закон сохранения энергии.

Величина W, определяемая формулой (7), есть потенциальная энергия деформации, рассчитанная на единицу объема. Действительно, из формулы (11) следует, что количество потенциальной энергии, приходящейся на элемент объема dV, равно $W \cdot dV$. Выражение W было нами введено еще в § 20; напомним, что W есть неособенная положительная квадратичная форма компонент деформации; это непосредственно следует из формулы (7).

Вернемся теперь к вопросу о единственности решения наших основных задач. Пусть какая-либо из них допускает два решения с одинаковыми граничными и начальными условиями и одинаковыми объемными силами. Составим «разность» этих двух решений (ср. § 20). Полученное новое решение (u, v, w) будет удовлетворять тем же уравнениям, что и два данных, но *при отсутствии объемных сил*; кроме того, в случае первой задачи будем иметь:

$$X_n = Y_n = Z_n = 0 \text{ на } S, \tag{3'}$$

а в случае второй задачи:

$$u = v = w = 0 \text{ на } S; \tag{5'}$$

в случае смешанной задачи на одной части поверхности будут соблюдены условия (3'), а на другой — условия (5').

Во всех случаях будем иметь, что

$$X_n\dot{u} + Y_n\dot{v} + Z_n\dot{w} = 0 \text{ на } S.$$

Действительно, в случае (3') $X_n = Y_n = Z_n = 0$; в случае же (5') $u = v = w = 0$ (на S) во все моменты времени, начиная с t_0, и, следовательно, также

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ на } S;$$

аналогично для смешанной задачи.

Далее, в начальный момент мы должны, очевидно, иметь

$$u = v = w = \dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0,$$

ибо оба данных решения удовлетворяют одинаковым начальным условиям.

Из сказанного следует, что работа R, вычисленная для решения u, v, w, равна нулю, и, значит, на основании формулы (10)

$$T + U = 0.$$

Но это возможно, очевидно, только тогда, когда $T = 0$, $U = 0$, и, следовательно, во все моменты времени, начиная с t_0, будем иметь:

$$\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0, \quad e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0.$$

Первая группа этих равенств показывает, что смещения не зависят от времени, т. е. что мы должны иметь статический случай. Из второй

группы следует, что деформация равна нулю и, значит, решение u, v, w может выражать только жесткое перемещение тела. Наконец, из условия, что в начальный момент все смещения равны нулю, следует, что отсутствует и это жесткое перемещение. Таким образом, будем иметь во всех точках тела и во все моменты времени $u = v = w = 0$. Отсюда следует, что два решения, о которых шла речь, должны совпадать полностью, а это и требовалось доказать.

Замечание. Из формулы (7) § 20 вытекает, что *потенциальная энергия*

$$U = \iiint_V W\,dx\,dy\,dz$$

деформированного тела, находящегося в равновесии, может быть вычислена по формуле

$$U = \frac{1}{2}\iint_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,dS + \frac{1}{2}\iiint_V (Xu + Yv + Zw)\,dV, \qquad (12)$$

а при отсутствии объемных сил — по формуле

$$U = \frac{1}{2}\iint_S (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,dS, \qquad (13)$$

где двойной интеграл берется по всей поверхности тела.

Напомним, что в силу соотношений (11) и (7) *при наличии* (не нулевой) *деформации всегда* $U > 0$.

Формулы (12), (13) легко запомнить: они показывают, что потенциальная энергия деформированного тела равна *половине* той работы, которую затратили бы внешние напряжения и объемные силы, если бы они с самого начала имели те значения, которые они фактически принимают, когда устанавливается упругое равновесие (на самом же деле начальные их значения равны нулю).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Значительные трудности практического характера, связанные с решением основных задач теории упругости, заставляют искать эффективные методы решения для более или менее широких классов частных случаев, имеющих значение на практике. Один из важнейших классов такого типа охватывается так называемой «плоской теорией упругости», или «плоской задачей теории упругости», которой посвящены главы II—VI этой книги.

Наше изложение основано главным образом на комплексном представлении общего решения уравнений плоской теории упругости, которое будет указано ниже. Это комплексное представление, главная заслуга введения которого, безусловно, принадлежит Г. В. Колосову [1]), оказалось весьма плодотворным для эффективного решения основных граничных задач, а также для исследований общего характера, что подтверждается большим числом важных работ, опубликованных у нас за последнее время [2]). Некоторые из этих работ будут изложены или упомянуты ниже

---

[1]) Основные результаты Г. В. Колосова изложены в его работах [1, 2], а также в позднее вышедшей его книге [6].

Необходимо отметить, что среди рукописей и черновых материалов, разобранных после смерти С. А. Чаплыгина, были обнаружены его работы по теории упругости, относящиеся приблизительно к 1900 г., в которых содержатся некоторые результаты, полученные впоследствии Г. В. Колосовым, а также другими авторами. См. Чаплыгин [1], стр. 420 (статья Н. В. Зволинского и Д. Ю. Панова).

[2]) Нельзя сказать того же об иностранной литературе, где время от времени появляются работы, в которых используются комплексные представления решений (зачастую весьма несовершенного вида) и приводятся результаты, большей частью либо содержащиеся в работах наших авторов, либо непосредственно вытекающие из результатов последних. К разряду таких работ относятся, например, обширные статьи Stevenson [1], Poritsky [2]; см. также примечание на стр. 112.

Предыдущий текст сноски перенесен без изменений из третьего и четвертого изданий книги. За последнее время в зарубежной печати появилось значительное число весьма интересных работ, в которых, за немногими исключениями, отдается должное нашим авторам. К таким исключениям принадлежит недавно вышедшая книга Milne-Thomson [1].

в соответствующих местах. Здесь же ограничимся упоминанием, что некоторые методы, основанные на комплексном представлении, могут быть с успехом обобщены на случай анизотропных тел, о чем будет кратко сказано в § 104.

Отметим, наконец, что главную сущность излагаемых ниже результатов из области плоской теории упругости (главы II—VI) следует видеть, конечно, не в новом выводе формул Г. В. Колосова [1]) и аналогичных, а в применении этих формул к решению основных граничных задач при систематическом использовании свойств интегралов типа Коши и конформного отображения [2]).

I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Уравнения плоской теории упругости непосредственно применяются к двум случаям равновесия упругого тела, представляющим большой интерес для практики, а именно: к случаю *плоской деформации* и к случаю *деформации тонкой пластинки* силами, приложенными к ее обводу и действующими в ее плоскости [3]). Эти два случая подробно охарактеризованы в двух следующих параграфах.

§ 25. Плоская деформация. Мы будем говорить, что тело подвержено *плоской деформации*, параллельной плоскости Oxy, если компонента смещения w равна нулю, а компоненты u, v зависят только от x, y, но не от z. В этом случае будем иметь:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

и из формул (2) § 20 получим выражения для компонент напряжения:

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$Z_z = \lambda\theta, \quad X_z = Y_z = 0.$$

Предыдущие уравнения показывают, что компоненты напряжения также не зависят от координаты z (так как u, v от нее не зависят).

---

[1]) Эти формулы можно вывести многими способами, в том числе чрезвычайно простыми. Избранный нами способ, хотя и вполне элементарный, требует несколько более длинных выкладок, чем некоторые другие выводы; но мы остановимся на нем, так как он дает попутно ряд формул, полезных для дальнейшего, гарантирует полную общность полученного решения и не предполагает заранее аналитичности этого решения. См. также Добавление IV в конце книги.

[2]) Отметим, что и до Г. В. Колосова некоторые авторы [например, Файлон L. N. G. Filon)] получали те или иные комплексные представления решения, но никакой (или почти никакой) пользы из этого не извлекали.

[3]) Результаты, связанные с уравнениями плоской теории упругости, применяются также к задаче равновесия упругой пластинки, нагруженной нормальными к ее плоскости усилиями, о чем будет сказано в гл. V.

Недавно И. Н. Векуа [6] показал, что эти же результаты могут быть использованы для эффективного решения граничных задач теории упругих оболочек.

Далее, первые два уравнения (1) того же § 20 примут вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+X=0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+Y=0,$$

а третье обратится в равенство $Z = 0$, показывающее, что при плоской деформации компонента объемной силы по направлению, перпендикулярному к плоскости деформации, должна быть равна нулю. Предыдущие же уравнения показывают, что компоненты X, Y объемной силы не зависят от z.

Итак, в конечном счете, уравнения статики упругого тела в случае плоской деформации, параллельной плоскости Oxy, сводятся к следующим:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+X=0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+Y=0, \tag{1}$$

$$X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

причем все входящие в эти уравнения величины не зависят от координаты z; компонента Z_z (также не зависящая от z) дается формулой $Z_z = \lambda\theta$ или, замечая, что в силу уравнений (2)

$$X_x+Y_y=2(\lambda+\mu)\theta, \quad \theta=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y),$$

формулой

$$Z_z=\lambda\theta=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y)=\sigma(X_x+Y_y), \tag{3}$$

где σ — коэффициент Пуассона.

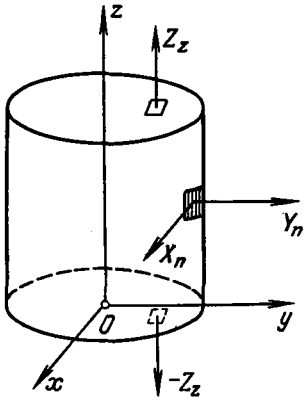


Рис. 11.

Мы намеренно выделили уравнение (3), определяющее Z_z, так как решение системы (1) и (2) представляет собой *основную задачу*, а Z_z определяется по формуле (3) после ее решения.

Остается теперь указать те случаи, когда может иметь место только что охарактеризованная плоская деформация.

Предположим, что мы имеем дело с цилиндрическим (призматическим) телом, образующие боковой поверхности которого параллельны оси Oz, ограниченным с двух сторон плоскостями (основаниями), нормальными к боковой поверхности (рис. 11).

Предположим, далее, что внешние напряжения, приложенные к боковой поверхности, параллельны плоскости Oxy и не зависят от координаты z и что тому же условию удовлетворяют объемные силы. Объемные силы, а также внешние напряжения на боковой поверхности будем считать заданными.

Посмотрим, возможна ли при этих условиях плоская деформация нашего цилиндра. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнения 1) и (2) имели решение u, v, X_x, Y_y, X_y, удовлетворяющее на боковой

поверхности цилиндра граничным условиям:

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= X_n, \\ Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= Y_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где X_n, Y_n — заданные компоненты вектора внешнего напряжения, действующего на боковую поверхность, а n обозначает внешнюю нормаль; условия (4) получаются из формул (2) § 3, определяющих вектор напряжения, действующего на площадку с нормалью n [1]). Мы пришли, таким образом, к задаче, вполне аналогичной первой основной граничной задаче теории упругости для общего случая (§ 20); здесь мы имеем только более простой случай, так как неизвестные функции u, v, X_x, Y_y, X_y зависят лишь от двух переменных x, y и вместо рассмотрения всей области, занятой телом, можно ограничиться рассмотрением лишь одного из его сечений плоскостью, параллельной плоскости Oxy. Иными словами, мы имеем дело с двумерным аналогом задачи § 20.

При некоторых условиях общего характера можно показать (см. гл. V), что наша двумерная задача всегда имеет решение, притом единственное (с точностью до жесткого перемещения тела, параллельного плоскости Oxy), если только совокупность объемных сил и сил, приложенных к боковой поверхности, статически эквивалентна нулю.

Пусть u, v, X_x, Y_y, X_y — решение нашей двумерной задачи. Вычислив Z_z по формуле (3) и считая $w = Z_x = Z_y = 0$, мы получим решение, отвечающее всем поставленным условиям.

Мы видим, что при этом основания цилиндра не свободны от напряжений, но подвержены нормальным усилиям, а именно: на верхнее основание [2]) действует нормальное напряжение Z_z, определяемое формулой (3), а на нижнее — напряжение $(-Z_z)$. Приложение этих напряжений, как мы видим, необходимо для поддержания деформации плоской.

Как было сказано, задание объемных сил и напряжений, действующих на боковую поверхность, определяет функции [3]) u, v, X_x, Y_y, X_y и, следовательно, и Z_z. Таким образом, выбор напряжений, приложенных к основаниям, уже от нас не зависит.

Это обстоятельство на первый взгляд умаляет значение рассмотрения плоской деформации. Но на самом деле это неудобство очень легко устранить в случае *длинного* цилиндра (цилиндра, высота которого велика по сравнению с поперечными размерами). Действительно, для устранения упомянутых напряжений, действующих на основания, достаточно на полученное решение наложить решение задачи равновесия нашего цилиндра

[1]) Третья из упомянутых формул дает тождество, так как, по условию, на боковой поверхности $Z_n = 0$, $Z_x = Z_y = 0$ и $\cos(n, z) = 0$.

[2]) Для краткости мы называем «верхним» основание, обращенное в сторону положительных z.

[3]) Функции u, v определяются с точностью до слагаемых, выражающих произвольное жесткое перемещение тела, параллельное плоскости Oxy, но эти слагаемые не существенны.

в предположении, что объемные силы отсутствуют и что его боковая поверхность свободна от внешних напряжений, а основания подвержены усилиям, равным по величине и противоположным тем, которые мы желаем устранить.

Рассмотрим эти последние усилия, приложенные к одному из оснований. Так как все они параллельны оси Oz, то совокупность их статически эквивалентна одной силе, параллельной той же оси, приложенной, скажем, в (геометрическом) центре тяжести основания, и паре, плоскость которой также параллельна оси Oz. Совокупность напряжений, приложенных к другому основанию, статически эквивалентна силе и паре, статически уравновешивающим предыдущие.

Но вопрос об упругом равновесии (длинного) цилиндра под влиянием усилий, приложенных к основаниям и статически эквивалентных растягивающим силам и изгибающим парам, принадлежит к числу наиболее простых вопросов теории упругости и решается элементарным путем (см. главу VII). Поэтому всегда весьма простым приемом мы можем устранить усилия, приложенные к основаниям.

Тогда из полученного решения задачи о плоской деформации цилиндра усилиями указанного выше типа, приложенными к боковой поверхности, получим решение задачи равновесия цилиндра под влиянием тех же усилий, но в предположении, что основания свободны от напряжений; в этом последнем случае деформация уже, вообще говоря, не будет плоской.

§ 26. Деформация тонкой пластинки силами, действующими в ее плоскости. Уравнения плоской теории упругости применяются и в другом, важном для практики, случае, именно в случае тонкой пластинки при определенных видах нагрузки.

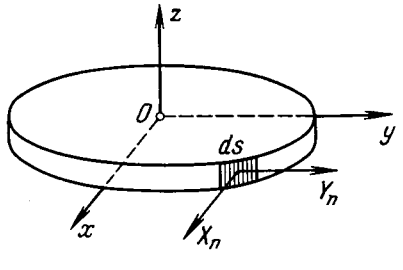


Рис. 12.

Под пластинкой мы подразумеваем цилиндр весьма малой высоты, которую мы обозначим через $2h$ и будем называть толщиной. Примем среднюю плоскость пластинки (т. е. плоскость, параллельную основаниям и находящуюся по середине высоты) за плоскость Oxy (рис. 12).

Будем считать основания свободными от внешних напряжений и предположим, что внешние напряжения, приложенные к боковой поверхности, параллельны основаниям и распределены симметрично относительно средней плоскости. То же будем предполагать относительно объемных сил. С практической точки зрения достаточно предположить относительно внешних напряжений, действующих на боковую поверхность, что совокупность этих напряжений, приложенных к любому элементу боковой

поверхности, заключенному между двумя образующими, статически эквивалентна силе, приложенной на середине высоты элемента и расположенной в средней плоскости; в самом деле, на основании принципа Сен-Венана (§ 23) каждую такую совокупность можно заменить статически ей эквивалентной совокупностью, удовлетворяющей поставленным вначале условиям.

По соображениям симметрии очевидно, что точки средней плоскости после деформации останутся на ней [1]), что компонента смещения w будет весьма мала и что изменения компонент u, v по толщине пластинки будут незначительны. Поэтому ясно, что возможно получить вполне достаточное представление об упругом равновесии пластинки, рассматривая не сами величины u, v, а их средние значения по толщине; эти средние значения, которые мы обозначим через u^*, v^*, определяются равенствами:

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} u(x, y, z)\,dz, \quad v^*(x, y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} v(x, y, z)\,dz.$$

По условию, функции $X_z(x, y, z)$, $Y_z(x, y, z)$ и $Z_z(x, y, z)$ обращаются в нуль на основаниях, т. е. при $z = \pm h$ (так как, по условию, основания свободны от внешних напряжений). Поэтому из уравнения

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

при $z = \pm h$. Действительно, из условия $Z_x(x, y, \pm h) = 0$ следует:

$$\frac{\partial Z_x(x, y, \pm h)}{\partial x} = 0;$$

аналогично

$$\frac{\partial Z_y(x, y, \pm h)}{\partial y} = 0.$$

Итак, величина $Z_z(x, y, z)$ не только сама обращается в нуль при $z = \pm h$, но обращается в нуль при этих значениях и ее производная по z. Поэтому очевидно, что Z_z будет весьма малой величиной по всей толщине пластинки, и мы с большим приближением можем считать, что $Z_z = 0$ всюду.

Напишем теперь уравнения:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0$$

---

[1]) Мы отвлекаемся от жесткого перемещения, которое можно сообщить всему телу.

и возьмем средние значения (по толщине) обеих частей каждого из них, т. е. проинтегрируем по z от $-h$ до $+h$ и разделим на $2h$. Имеем:

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial X_z}{\partial z}\,dz=\frac{1}{2h}[X_z]_{-h}^{+h}=0,\quad \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial Y_z}{\partial z}\,dz=\frac{1}{2h}[Y_z]_{-h}^{+h}=0.$$

Следовательно, из предыдущих уравнений получим (звездочкой, как выше, обозначается среднее значение соответствующей величины, взятое по толщине):

$$\frac{\partial X_x^*}{\partial x}+\frac{\partial X_y^*}{\partial y}+X^*=0,\quad \frac{\partial Y_x^*}{\partial x}+\frac{\partial Y_y^*}{\partial y}+Y^*=0. \tag{1}$$

Далее, из соотношения

$$\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=Z_z=0$$

следует:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Внося это значение $\frac{\partial w}{\partial z}$ в уравнения

$$X_x=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y_y=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

получаем:

$$X_x=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y_y=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Переходя в этих уравнениях, а также в уравнении

$$X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

к средним значениям, получаем, наконец:

$$X_x^*=\lambda^*\theta^*+2\mu\frac{\partial u^*}{\partial x},\quad Y_y^*=\lambda^*\theta^*+2\mu\frac{\partial v^*}{\partial y},\quad X_y^*=\mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где введены обозначения:

$$\lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-\sigma)},\qquad \theta^*=\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial y}. \tag{3}$$

Сравнивая уравнения (1) и (2) настоящего параграфа с уравнениями (1) и (2) предыдущего, убеждаемся, что средние значения компонент смещения u, v и компонент напряжения X_x, Y_y, X_y удовлетворяют точно таким же уравнениям, что и в случае плоской деформации, с той только разницей, что, вместо постоянной Ламе λ, надо взять постоянную, определяемую формулой (3).

Напряженное состояние пластинки, при котором $Z_z=0$ повсюду, а X_z, Y_z обращаются в нуль на основаниях, мы, следуя Ляву [1]), будем называть «обобщенным плоским напряженным состоянием». Такое состояние было впервые рассмотрено Файлоном [2]), который и установил приве-

[1]) Love [1], § 94 и 146.

[2]) Filon [1]; см. также Filon [2] и Coker a. Filon [1].

денные выше уравнения для средних значений. Эти уравнения, разумеется, пригодны и для пластинок конечной толщины. Мы видели, что если толщина пластинки мала, то при соблюдении указанных вначале условий напряженное состояние ее может считаться с большим приближением обобщенным плоским состоянием [1]).

Пусть ds — линейный элемент на плоскости Oxy. Рассмотрим принадлежащую пластинке, перпендикулярную к плоскости Oxy прямоугольную площадку высоты $2h$, след которой на плоскости Oxy есть элемент ds (рис. 12). Проекции на оси Ox, Oy среднего значения напряжения (по толщине), действующего на эту площадку, равны

$$X_n^*,\ Y_n^*,$$

где

$$X_n^* = X_x^* \cos(n, x) + X_y^* \cos(n, y), \quad Y_n^* = Y_x^* \cos(n, x) + Y_y^* \cos(n, y), \quad (4)$$

а n обозначает положительную нормаль к площадке. Проекции же усилия, действующего на эту площадку, равны $2hX_n^*ds$, $2hY_n^*ds$. Величины X_n^*ds, Y_n^*ds мы можем назвать проекциями среднего значения усилия, рассчитанного на единицу высоты (толщины) пластинки, действующего со стороны нормали n к элементу ds.

§ 27. Основные уравнения плоской теории упругости. Мы видели, что в обоих случаях, рассмотренных в двух предыдущих параграфах, дело сводится к рассмотрению системы уравнений:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + Y = 0, \quad (1)$$

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (2)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3)$$

Только в случае § 26 («обобщенное плоское напряженное состояние») следует заменить компоненты смещения, напряжения и объемной силы, входящие в эти уравнения, их средними значениями по толщине пластинки, а постоянную λ — величиной λ^*, определяемой формулой (3) § 26.

Все сказанное в дальнейшем относится к обоим упомянутым случаям.

Так как все величины зависят только от x, y, то мы, конечно, можем ограничиться рассмотрением точек, расположенных в плоскости Oxy, которую мы считаем плоскостью одного из нормальных сечений рассматриваемого цилиндра, в частности средней плоскостью в случае § 26. Поэтому, когда мы будем говорить, например, об области, занятой телом, мы будем обычно подразумевать двумерную область, а именно: сечение S тела плоскостью Oxy.

[1]) Обоснование того, что в рассматриваемом нами случае тонкой пластинки можно с достаточной точностью считать $Z_z = 0$, заимствовано нами у Мичелла (Michell [1]), который приводит еще дополнительные соображения по этому поводу.

Далее, вместо того, чтобы говорить об усилиях, приложенных к площадкам, перпендикулярным к плоскости Oxy, мы будем говорить об усилиях, приложенных к линейным элементам ds сечения S. Так, в случае § 25 мы будем говорить, что к линейному элементу ds приложено усилие с компонентами $X_n ds$, $Y_n ds$, где n — нормаль к элементу ds; на самом же деле это — компоненты по осям Ox, Oy усилия, приложенного к прямоугольной площадке, перпендикулярной к плоскости Oxy, с основанием ds и высотой, равной единице (компонента по оси Oz этого усилия равна нулю). В случае же § 26 под $X_n ds$, $Y_n ds$ мы будем подразумевать величины, обозначенные в конце § 26 через $X_n^* ds$, $Y_n^* ds$.

Будем считать, как и в главе I, что компоненты смещения — однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные производные вплоть до третьего порядка внутри области, занятой телом. Тогда на основании формул (2) компоненты напряжения будут однозначными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка.

Так же, как и в общем случае (глава I, § 21), систему (1), (2) можно заменить системой, содержащей только смещения. Для этого достаточно положить $w = 0$ в уравнениях § 21 или же просто подставить значения (2) в уравнения (1), что дает так же, как в § 21:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + X = 0, \qquad (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + Y = 0, \tag{4}$$

где Δ обозначает операцию Лапласа для двух переменных, т. е., например,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Если найдено какое-либо решение этой системы, то соответствующие напряжения найдутся по формулам (2) простым дифференцированием.

Нетрудно также составить *уравнения, содержащие только напряжения*. Мы увидим сейчас, что уравнения эти состоят из уравнений (1) и из *одного* дополнительного уравнения, заменяющего в нашем случае шесть условий совместимости Бельтрами — Мичелла. Это дополнительное уравнение выражает условие, которое должно быть соблюдено для того, чтобы к функциям X_x, Y_y, X_y, удовлетворяющим уравнениям (1), можно было подобрать функции u, v, связанные с X_x, Y_y, X_y соотношениями (2).

Условие это можно было бы, разумеется, получить как частный случай из упомянутых условий совместимости, но мы предпочитаем вывести его заново. Мы приведем два вывода.

Первый вывод, как и вывод условий Бельтрами — Мичелла для общего случая, основан на условиях совместимости Сен-Венана.

В случае плоской деформации, когда e_{xx}, e_{yy} и e_{xy} не зависят от z, а $e_{yz} = e_{zx} = e_{zz} = 0$, условия эти [§ 15, формулы (6)] сводятся, очевидно, к одному следующему:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Подставляя сюда значения

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{2\mu}\left\{X_x - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y)\right\}, \\ e_{yy} &= \frac{1}{2\mu}\left\{Y_y - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y)\right\}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2\mu}X_y, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

выводимые из формул (2), легко получаем:

$$\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta(X_x+Y_y) - 2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{6}$$

Это и есть искомое условие. Его можно значительно упростить, если принять во внимание, что X_x, Y_y, X_y удовлетворяют уравнениям (1). Именно, дифференцируя первое из упомянутых уравнений по x, а второе по y и складывая, получаем:

$$-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Внося это значение для $-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y}$ в предыдущее уравнение, будем иметь после очевидных упрощений:

$$\Delta(X_x+Y_y) = -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Это и есть то дополнительное уравнение, которое следует присоединить к уравнениям (1) и которое выражает условие совместимости в плоской теории упругости.

При выводе мы исходили из условий совместимости Сен-Венана. Приведем еще один вывод, основанный непосредственно на уравнениях (1) и (2) плоской теории упругости, дающий попутно способ вычисления смещений по заданным компонентам напряжения (или, что все равно, по компонентам деформации), более элементарный и практически более удобный, чем указанный в § 15 для общего случая.

Так как вопрос заключается в нахождении условий, которым должны удовлетворять компоненты напряжения X_x, Y_y, X_y для того, чтобы существовали функции u, v, связанные с ними уравнениями (2), то попытаемся действительно вычислить u, v по соотношениям (2), предполагая, что X_x, Y_y, X_y есть данное решение системы (1).

Первые два уравнения (2) могут быть переписаны так, если решить их относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= X_x - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y), \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= Y_y - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y). \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Пусть (a, b) некоторая (произвольная) точка тела. Ограничимся пока рассмотрением только тех точек (x, y), которые расположены внутри некоторого прямоугольника с центром в (a, b), не выходящего за пределы тела.

Уравнения (5′) дают, если для краткости ввести обозначение $P = X_x + Y_y$:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u(x, y) &= \int_a^x \left\{X_x - \frac{\lambda P}{2(\lambda+\mu)}\right\} dx + f_1(y), \\ 2\mu v(x, y) &= \int_b^y \left\{Y_y - \frac{\lambda P}{2(\lambda+\mu)}\right\} dy + f_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $f_1(y)$, $f_2(x)$ — не известные пока функции указанных аргументов. Полученные выражения удовлетворяют условиям (5′), т. е. первым двум соотношениям (2).

Остается удовлетворить третьему из них. Подставляя в него найденные выражения (8), получаем, дифференцируя под знаком интеграла:

$$\int_a^x \left\{\frac{\partial X_x}{\partial y} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial P}{\partial y}\right\} dx + \int_b^y \left\{\frac{\partial Y_y}{\partial x} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial P}{\partial x}\right\} dy - 2X_y = \\ = -f_1'(y) - f_2'(x). \tag{9}$$

Этому соотношению можно удовлетворить только тогда, когда левая часть его может быть представлена как сумма двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая — только от y. А для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$ левой части была тождественно равна нулю [1]). Дифференцируя левую часть один раз по x, а другой раз по y и приравнивая результат нулю, получаем как раз уравнение (6), откуда в свою очередь следует соотношение (7).

Если условие (7) соблюдено, то левая часть формулы (9) имеет вид

$$F_1(y) + F_2(x),$$

и условие (9) сводится к условию

$$F_2(x) + f_2'(x) = -F_1(y) - f_1'(y),$$

которое может иметь место только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $2\mu\varepsilon$.

---

[1]) Если $F(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$, то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

и обратно. При соблюдении последнего условия будем, как легко видеть, иметь

$$F(x, y) = F(x, b) + F(a, y) - F(a, b).$$

Тогда из предыдущего равенства получаем:

$$\left.\begin{aligned} f_1(y) &= -\int_b^y F_1(y)\,dy - 2\mu\varepsilon y + 2\mu\alpha, \\ f_2(x) &= -\int_a^x F_2(x)\,dx + 2\mu\varepsilon x + 2\mu\beta, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где α, β — произвольные постоянные. Внося эти выражения в (8), найдем выражения для u и v, определенные с точностью до слагаемых вида:

$$u' = -\varepsilon y + \alpha, \quad v' = \varepsilon x + \beta, \tag{11}$$

где α, β, ε — произвольные постоянные.

Эти слагаемые выражают только жесткое перемещение тела (в своей плоскости) и никакого влияния на деформацию и напряжения не имеют. Постоянные α, β, ε получат вполне определенные значения, если задать значения компонент смещения u, v и компоненты вращения

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{12}$$

в какой-либо определенной точке рассматриваемой области, например в (a, b).

Мы ограничились рассмотрением точек (x, y), расположенных в прямоугольнике с центром в (a, b), не выходящем из области, занятой телом. Для нахождения значений u, v в других точках области возьмем какую-либо точку (a', b') внутри нашего прямоугольника, вблизи его границы, и построим второй прямоугольник с центром в (a', b'), *частично выходящий за пределы первого прямоугольника*, но не выходящий из области, занятой телом. Тогда мы сможем найти значения u, v во всех точках второго прямоугольника (частично выходящего за пределы первого) по указанному выше способу, заменяя точку (a, b) точкой (a', b'). Для того, чтобы полученные таким образом значения u, v совпадали в части, общей обоим прямоугольникам, со значениями, вычисленными раньше, мы должны так подобрать произвольные постоянные, входящие в формулы для второго прямоугольника, чтобы значения u, v и r в точке (a', b') совпадали со значениями этих величин, полученными из формул для первого прямоугольника. Таким образом, формулы для второго прямоугольника не будут содержать никаких новых произвольных постоянных. Повторяя этот прием достаточное число раз, мы сможем вычислить смещения для любой точки тела [1]).

Здесь, однако, возникает следующий вопрос. Пусть (x_1, y_1) какая-либо точка тела, отличная от исходной точки (a, b). Для того, чтобы

[1]) Ср. хорошо известный процесс аналитического продолжения функции комплексного переменного.

вычислить значения u, v в точке (x_1, y_1), мы должны согласно указанному способу построить цепь частично перекрывающих друг друга прямоугольников, первым звеном которой является прямоугольник с центром в (a, b), а последним — прямоугольник, содержащий (x_1, y_1). Но таких цепей можно построить бесчисленное множество; спрашивается, будет ли выбор той или иной цепи влиять на значения u, v в точке (x_1, y_1); иначе говоря, будут ли u, v *однозначными* функциями положения (x_1, y_1).

На этот вопрос в данный момент легче всего ответить, опираясь не на формулы, выведенные в настоящем параграфе, а на формулы, выражающие компоненты смещения u, v через компоненты напряжения X_x, Y_y, X_y при помощи криволинейных интегралов, взятых по произвольным линиям, соединяющим точки (a, b) и (x_1, y_1). Эти формулы легко получить из формул (4) § 15 (формулы Вольтерра), положив в них $w = e_{yz} = e_{zx} = e_{zz} = 0$ и заменив компоненты деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} их выражениями через компоненты напряжения X_x, Y_y, X_y по формулам (5).

Совершенно аналогично тому, что было сказано в § 15, легко убедиться, что u, v будут необходимо однозначными функциями, если область, занятая телом, *односвязна*.

В случае многосвязной области компоненты u, v могут оказаться многозначными функциями, несмотря на соблюдение условия (7). Поэтому в случае многосвязной области к условию (7) следует отдельно присоединить *условие однозначности смещений* [1]). Ниже мы еще вернемся к этому вопросу и рассмотрим его более подробно.

З а м е ч а н и е. Необходимость условия (7) может быть выведена еще так: дифференцируя первое из уравнений (4) по x, а второе по y и складывая, получаем

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\theta+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=0.$$

Замечая, далее, что на основании двух первых уравнений (2)

$$\theta=\frac{X_x+Y_y}{2(\lambda+\mu)},$$

и внося это значение θ в предыдущее уравнение, снова получаем уравнение (7).

§ 28. Приведение к случаю отсутствия объемных сил. Решение уравнений плоской теории упругости значительно упрощается в случае отсутствия объемных сил, т. е. когда $X = Y = 0$. С другой стороны, общий случай всегда можно свести к этому последнему: для этого достаточно найти *одно какое-нибудь* частное решение системы уравнений (1), (2) § 27. Пусть $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $X_y^{(0)}$, $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ — это частное решение. Полагая

$$X_x=X_x^{(1)}+X_x^{(0)} \text{ и т. д.}, \qquad u=u^{(1)}+u^{(0)} \text{ и т. д.}, \tag{1}$$

[1]) Мы, разумеется, считаем, что компоненты напряжения—всегда однозначные функции.

видим, что функции $X_x^{(1)}, \ldots, v^{(1)}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и $X_x, \ldots, v$, но при $X = Y = 0$.

Что касается нахождения частного решения $X_x^{(0)}, \ldots, v^{(0)}$, то мы укажем здесь такие решения лишь для двух видов объемных сил, которые почти исключительно и встречаются на практике: это случаи *силы тяжести* и *силы инерции* при (равномерном) вращении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости деформации [1]).

При отыскании частных решений можно, смотря по удобству, пользоваться или системой уравнений в напряжениях (1), (7) § 27, или системой уравнений в смещениях (4) § 27. Для примера мы прибегнем к первому способу в случае силы тяжести и ко второму в случае силы инерции.

Рассмотрим сперва случай силы тяжести. Считая, что ось Oy направлена вертикально вверх, будем иметь: $X = 0$, $Y = -g\varrho$, где g — ускорение силы тяжести, ϱ — плотность, которую мы считаем постоянной.

Поэтому уравнения (1) и (7) § 27 примут вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \varrho g, \quad \Delta (X_x + Y_y) = 0.$$

Ясно, что предыдущим уравнениям можно удовлетворить, полагая, например,

$$X_x = X_y = 0, \quad Y_y = \varrho g y. \tag{2}$$

Смещения, соответствующие этому частному решению, вычисляются по указанному выше правилу. Именно, формулы (8) § 27 дают:

$$2\mu u = \int -\frac{\lambda \varrho g y}{2(\lambda+\mu)}\, dx = -\frac{\lambda \varrho g}{2(\lambda+\mu)}\, xy + f_1(y),$$

$$2\mu v = \int \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\, \varrho g y\, dy = \frac{\lambda+2\mu}{4(\lambda+\mu)}\, \varrho g y^2 + f_2(x).$$

Подставляя эти значения в соотношение

$$\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = X_y = 0,$$

получаем уравнение

$$-\frac{\lambda \varrho g}{2(\lambda+\mu)}\, x + f_1'(y) + f_2'(x) = 0,$$

которому можно удовлетворить, полагая, например,

$$f_1(y) = 0, \quad f_2(x) = \frac{\lambda \varrho g}{4(\lambda+\mu)}\, x^2.$$

Таким образом, для смещений получим:

$$u = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\, \varrho g x y, \qquad v = \frac{\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}\, \varrho g y^2 + \frac{\lambda}{8\mu(\lambda+\mu)}\, \varrho g x^2. \tag{3}$$

[1]) Нахождение частного решения для произвольно заданных объемных сил также не представляет принципиальных затруднений; см. § 57а, а также Добавление IV в конце книги.

Перейдем теперь ко второму из намеченных случаев и воспользуемся на этот раз системой (4) § 27.

Если тело равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy, проходящей через O, то сила инерции (центробежная сила), отнесенная к единице объема, будет дана формулами

$$X = \rho\omega^2 x, \qquad Y = \rho\omega^2 y,$$

где ω — угловая скорость. Поэтому система (4) § 27 примет вид:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho\omega^2 x = 0, \qquad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho\omega^2 y = 0.$$

Легко догадаться, что этим уравнениям можно удовлетворить выражениями вида:

$$u = ax^3 + bxy^2, \quad v = ay^3 + bx^2 y.$$

Действительно, подставляя эти выражения в предыдущие уравнения, увидим, что оба будут удовлетворены, если

$$2(3a+b)(\lambda+2\mu) + \rho\omega^2 = 0,$$

или

$$3a + b = -\frac{\rho\omega^2}{2(\lambda+2\mu)}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что мы можем еще произвольно распорядиться одной из величин a, b. Мы можем, например, положить [1]):

$$a = b = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)},$$

и тогда будет:

$$u = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)}(x^2+y^2)x, \qquad v = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)}(x^2+y^2)y. \tag{5}$$

Соответствующие напряжения будут даны формулами:

$$\begin{aligned} X_x &= -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2 x^2, \\ Y_y &= -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\rho\omega^2 y^2, \\ X_y &= -\frac{\mu\rho\omega^2}{2(\lambda+2\mu)}xy. \end{aligned} \tag{6}$$

II. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 29. Некоторые термины и предложения. Переходя к основному для нас вопросу комплексного представления общего решения уравнений плоской теории упругости, мы уточним некоторые термины, которыми будем пользоваться (и отчасти уже пользовались), и напомним несколько простых предложений.

[1]) При этом смещения станут чисто радиальными.

1. В дальнейшем, говоря о *линиях* (*дугах*, *контурах*), мы будем иметь в виду (если противное не оговорено) *простые* (т. е. не пересекающие самих себя) разомкнутые или замкнутые непрерывные линии. Далее, мы будем считать, часто не оговаривая особо, что рассматриваемые линии *гладкие* или, более обще, *кусочно-гладкие*. Напомним, что линия называется гладкой, если она обладает непрерывно изменяющейся касательной; линия называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких дуг [1]).

2. Мы будем считать (если противное не оговорено), что область, занятая телом, представляет собой связную, конечную или бесконечную, часть S плоскости, ограниченную одним или несколькими (простыми, гладкими или кусочно-гладкими) замкнутыми контурами. Граница области S, если эта область конечна, состоит, таким образом, из конечного числа замкнутых контуров L_1, L_2, . . . , L_m, L_{m+1}, не имеющих общих точек, из которых один, скажем L_{m+1}, охватывает все остальные; эти же последние не охватывают друг друга (пластинка с отверстиями; рис. 13).

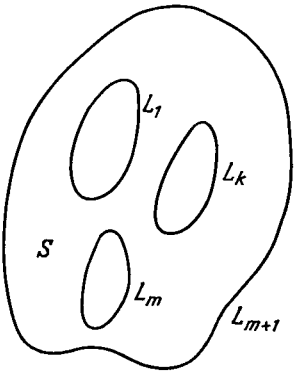


Рис. 13.

При $m = 0$ граница состоит из одного замкнутого контура и область S односвязна; при $m \geqslant 1$ область S многосвязна [2]), именно $m + 1$-связна.

В случае бесконечной области внешний контур L_{m+1} отсутствует (или, как часто говорят, удален в бесконечность). В этом случае область S представляет собой бесконечную плоскость с отверстиями [3]).

Вообще, во всем дальнейшем (если противное не оговорено) под *областью* мы будем подразумевать (конечную или бесконечную) область указанного выше вида.

Границу L области S мы не будем причислять к S. Если же какое-либо свойство справедливо не только для точек области S, но и для точек границы L или для точек некоторой части L' границы, то мы будем говорить, что свойство это справедливо для $S + L$ или соответственно для $S + L'$.

Под *частью границы* мы всегда будем подразумевать часть, состоящую из одной или нескольких непрерывных дуг или контуров.

[1]) Мы считаем излишним давать здесь более детальные определения этих хорошо известных понятий.

[2]) Определение односвязной и многосвязной областей дано в § 15; подробнее см. Добавление II.

[3]) Бесконечную область S, ограниченную одним (простым) замкнутым контуром (бесконечная плоскость с одним отверстием), можно с одинаковым правом считать односвязной или многосвязной (двусвязной) в зависимости от того, причисляем ли мы бесконечно удаленную точку к области S или нет.

3. Пусть $F(x, y)$ — некоторая функция, заданная в области S (но не на ее границе L) и непрерывная в S.

Мы будем говорить, что функция $F(x, y)$ *непрерывно продолжима* на часть L' границы L (L' может совпадать с L), если возможно приписать функции $F(x, y)$ такие значения на L', чтобы полученная в результате этого функция была непрерывна в $S + L'$. В этом случае мы будем часто просто говорить, что функция $F(x, y)$ непрерывна в $S + L'$ или *непрерывна в области S вплоть до L'*, подразумевая таким образом, что функции $F(x, y)$ приписаны надлежащие значения на L'.

Введем еще следующий термин. Пусть (x_0, y_0) — некоторая точка границы L и пусть $F(x, y)$ стремится к определенному пределу, когда точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0), оставаясь внутри S, а в остальном произвольно [1]). Тогда мы будем говорить, что $F(x, y)$ имеет (или принимает) определенное граничное значение в точке (x_0, y_0) или что $F(x, y)$ *непрерывно продолжима на точку* (x_0, y_0). Под граничным значением мы будем понимать упомянутый выше предел.

Легко показать, что если функция $F(x, y)$ непрерывно продолжима на все точки (x_0, y_0) некоторой части L' границы L (L' может быть всей границей) и если обозначить через $F(x_0, y_0)$ граничное значение $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0), то $F(x_0, y_0)$ будет непрерывной функцией точки (x_0, y_0) на L'.

Из самого определения непрерывности следует тогда, что если $F(x, y)$ непрерывно продолжима на все точки части L' границы L, то $F(x, y)$ будет непрерывна в $S + L'$, т. е. непрерывна в S вплоть до L', если под $F(x, y)$ при (x, y) на L' подразумевать соответствующее граничное значение.

В дальнейшем, говоря, что $F(x_0, y_0)$ есть *граничное значение* функции $F(x, y)$ или что $F(x, y)$ *принимает граничное значение* $F(x_0, y_0)$, мы *всегда* будем подразумевать, что $F(x_0, y_0)$ есть предел, к которому стремится $F(x, y)$, когда точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0) произвольно, подчиняясь лишь требованию оставаться внутри S. Иначе говоря, применяя термин *граничное значение в данной точке* или *на данной части границы*, мы *всегда* будем подразумевать, что рассматриваемая функция непрерывно продолжима на данную точку или на данную часть границы.

4. Пусть границы двух неперекрывающихся областей S_1 и S_2 имеют общую часть L, представляющую собой простую гладкую (или кусочно-гладкую) дугу или замкнутый контур, и пусть $F_1(z)$, $F_2(z)$ — функции комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные [2]) соответственно

---

[1]) Это часто выражают, говоря, что точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0) *по любому пути*, оставаясь внутри S; не следует при этом считать, что «путь»— обязательно непрерывная линия: он может состоять, например, из ряда отдельных точек.

[2]) Сведения из теории функций комплексного переменного, достаточные для понимания дальнейшего, читатель найдет, например, в курсе В. И. Смирнова [1], т. III. Термин «голоморфный» эквивалентен термину «регулярный», применяемому в названной книге. *Голоморфная в данной области* (односвязной или многосвязной)

в S_1 и S_2 и непрерывные вплоть до L (рис. 14). Пусть, далее, $F_1(z) = F_2(z)$ на L. Тогда функция $F(z)$, определенная следующим образом:

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) \text{ при } z \text{ в } S_1 \text{ и на } L \\ F_2(z) \text{ при } z \text{ в } S_2 \text{ и на } L \end{cases}$$

будет голоморфной в области S, получаемой соединением областей S_1 и S_2, включая L. Доказательство этой теоремы можно найти в курсах теории функций комплексного переменного.

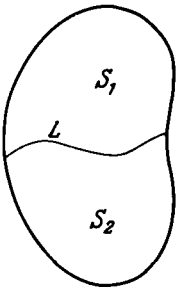


Рис. 14.

Из этой теоремы вытекает, в частности, следующее заключение. Пусть функция $F(z)$ голоморфна в некоторой области S и пусть на некоторой части L' границы этой области функция $F(z)$ имеет граничное значение, равное нулю. Тогда $F(z) = 0$ во всей области S.

В самом деле, присоединим к области S некоторую часть S' плоскости, примыкающую к L' с другой стороны, и положим $F(z) = 0$ в S'. Тогда на основании предыдущего функция $F(z)$ будет голоморфна в области, получаемой соединением областей S и S', и так как она равна нулю в S', она будет равна нулю всюду, ибо аналитическая функция, равная нулю в части области [1]), равна нулю во всей области.

Если при тех же обозначениях и условиях, что выше, граничное значение $F(z)$ на L' имеет постоянное значение C, не обязательно равное нулю, то $F(z) = C$ во всей области S. Это вытекает из предыдущего заключения, если применить его к функции $F(z) - C$.

§ 30. Функция напряжений. 1. В дальнейшем (если противное не оговорено особо) мы будем заниматься уравнениями плоской теории упругости *при отсутствии объемных сил*. В этом случае напряжения могут быть выражены через одну вспомогательную функцию, называемую *функцией напряжений* или *функцией* Эри, играющую большую роль в плоской теории упругости.

функция всегда предполагается однозначной. В дальнейшем под аналитической функцией комплексного переменного z в данной области S подразумевается функция, которая может быть многозначной, но каждая непрерывно изменяющаяся ветвь которой голоморфна (следовательно, и однозначна) в любой конечной односвязной части области S.

Слово «аналитическая» обозначает, что такая функция (вернее, каждая ее ветвь) может быть разложена в окрестности любой точки a области S в ряд вида

$$A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

Иногда под аналитической в S функцией мы будем подразумевать функцию, аналитическую (в указанном выше смысле) в области, получаемой из S исключением некоторых отдельных точек; в этих случаях мы всегда будем делать соответствующую оговорку.

[1]) Под частью области мы подразумеваем также некоторую область.

Действительно, в рассматриваемом случае имеем:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Первое из этих уравнений представляет собой необходимое и достаточное условие того, чтобы существовала некоторая функция $B(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial B}{\partial x}=-X_y, \quad \frac{\partial B}{\partial y}=X_x.$$

Второе же из уравнений (1) есть необходимое и достаточное условие существования некоторой функции $A(x, y)$, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial A}{\partial x}=Y_y, \quad \frac{\partial A}{\partial y}=-X_y.$$

Сравнение двух выражений для X_y показывает, что должно быть

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x},$$

откуда в свою очередь следует существование некоторой функции $U(x, y)$, такой, что

$$A=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Подставляя эти значения A и B в предыдущие соотношения, убеждаемся, что (при отсутствии объемных сил) всегда существует некоторая функция $U(x, y)$, через которую напряжения выражаются следующим образом:

$$X_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad X_y=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}, \quad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Этот факт был впервые отмечен Эри (G. B. Airy) в 1862 г.

Функция U и называется *функцией напряжений* или *функцией* Эри.

Так как по принятому нами раньше (§ 27) условию функции X_x, Y_y, X_y однозначны и непрерывны вместе со своими производными вплоть до второго порядка, то функция U должна иметь непрерывные производные вплоть до четвертого порядка, причем эти производные, начиная со вторых, должны быть однозначными функциями во всей области, занятой телом.

Очевидно и обратное: если функция U обладает указанными свойствами, то величины X_x, X_y, Y_y, определяемые равенствами (2), будут удовлетворять уравнениям (1). Однако, как мы знаем, это еще не значит, что эти величины соответствуют некоторой действительной деформации. Для этого надо еще, чтобы было соблюдено условие (7) § 27, которое в случае отсутствия объемных сил сводится к следующему:

$$\Delta(X_x+Y_y)=0, \tag{3}$$

или, замечая, что

$$X_x+Y_y=\Delta U,$$

к уравнению

$$\Delta\Delta U = 0 \text{ или } \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (4)$$

Предыдущее уравнение называется *бигармоническим* [1]), а всякое его решение — *бигармонической функцией*.

Однако под *бигармоническими функциями* в дальнейшем мы будем понимать только такие *функции*, удовлетворяющие бигармоническому уравнению, *производные которых вплоть до четвертого порядка непрерывны, а производные, начиная со второго порядка, однозначны во всей рассматриваемой области*.

Если рассматриваемая область односвязна, то однозначность вторых производных влечет за собой однозначность и самой функции. В многосвязной же области это не обязательно, как мы увидим ниже.

Итак, мы доказали, что функция напряжений должна быть бигармонической. Мы знаем, что это условие, которое есть не что иное, как условие (7) § 27, также достаточно для того, чтобы ей соответствовала некоторая действительная деформация, если временно не придавать значения факту, что соответствующие смещения могут оказаться (в случае многосвязной области) многозначными.

2. Выше (§ 27) мы заранее наложили некоторые ограничительные условия на рассматриваемые смещения и напряжения, а именно: мы условились считать, что функции u, v однозначны и имеют непрерывные производные вплоть до третьего порядка; непрерывность и однозначность компонент напряжения и их производных до второго порядка являются при этом непосредственным следствием соотношений

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (5)$$

С точки зрения некоторых выводов общего характера удобно слегка видоизменить эти условия, заменяя их несколько менее ограничительными. А именно, все сказанное ниже останется справедливым, если начиная с этого момента считать, что в области S, занятой телом, соблюдены следующие условия:

а) *Условия относительно напряжений.* Компоненты X_x, Y_y, X_y — однозначные, непрерывные функции, имеющие непрерывные производные вплоть до второго порядка и удовлетворяющие уравнениям (1) и (3). Следствием этих условий является то, что функция U — бигармоническая (в указанном выше смысле).

б) *Условия относительно смещений.* Компоненты u, v — непрерывные однозначные функции, имеющие частные производные первого порядка, связанные с компонентами напряжения соотношениями (5).

---

[1]) То, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению (4), было впервые отмечено Максвеллом.

Мы увидим ниже, что условия а) гарантируют существование производных любого порядка функций X_x, Y_y, X_y; больше того, мы увидим, что функции эти — аналитические (см. § 32).

Точно так же условия б) совместно с условиями а) гарантируют существование производных любого порядка (и даже аналитичность) функций u, v (см. в том же § 32). Заметим еще, что во многих случаях достаточно принять предыдущие условия, отбросив условие однозначности функций u, v. Например, в случае односвязной области эта однозначность является необходимым следствием остальных условий, перечисленных в а) и б); это следует из сказанного в следующем параграфе.

3. Если дана (бигармоническая) функция напряжений U, то соответствующие напряжения даются формулами (2); смещения, соответствующие этим напряжениям, могут быть найдены по правилу § 27. Однако мы приведем здесь другие формулы, значительно более удобные, чем предыдущие. Эти формулы были впервые указаны Лявом (Love [1]), который получил их несколько иным путем.

Область S, занятую телом, мы будем пока (вплоть до § 35) *считать односвязной.*

Наша задача состоит в нахождении функций u, v по уравнениям:

$$\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}. \tag{6}$$

Первые два из этих уравнений, решенные относительно

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

дают:

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta U, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta U.$$

Вводя обозначение

$$\Delta U = P, \tag{7}$$

заменяя в первом уравнении $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ через $P - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и поступая аналогично со вторым, получаем:

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}P, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}P. \tag{8}$$

Функция P, как видно из формулы (3), гармоническая, ибо

$$\Delta P = \Delta\Delta U = 0.$$

Пусть Q обозначает гармоническую функцию, сопряженную с P, т. е. удовлетворяющую условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$

эта функция определяется при заданном P с точностью до произвольного постоянного слагаемого [1]).

Тогда выражение

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{9}$$

будет функцией комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфной в области S, занятой телом. Положим далее:

$$\varphi(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz. \tag{10}$$

Имеем, очевидно

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4}(P + iQ),$$

откуда, замечая еще, что в силу условий Коши — Римана

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4}Q. \tag{11}$$

Таким образом,

$$P = 4\frac{\partial p}{\partial x} = 4\frac{\partial q}{\partial y},$$

и поэтому уравнения (8) можно написать так:

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Интегрируя, получаем:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p + f_1(y),$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q + f_2(x),$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — некоторые функции, соответственно, только от y и только от x. Подставляя эти значения в третье из уравнений (6) и замечая, что

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

получаем:

$$f_1'(y) + f_2'(x) = 0,$$

откуда следует (ср. § 27), что функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ имеют вид:

$$f_1 = 2\mu(-\varepsilon y + \alpha), \quad f_2 = 2\mu(\varepsilon x + \beta),$$

где α, β, ε — произвольные постоянные (множитель 2μ введен для удобства). Отбрасывая эти выражения, дающие только жесткое перемещение, получаем формулы, по существу совпадающие с формулами Лява (Love [1]):

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q. \tag{12}$$

[1]) См. Добавление III.

Так как функция $\varphi(z)$, определяемая равенством (10), очевидно голоморфна [1]) в области S (которую, напоминаем, считаем односвязной), то u и v оказываются однозначными функциями во всей области.

Таким образом, мы видим, что всякая бигармоническая функция [2]) определяет некоторую деформацию, удовлетворяющую всем требуемым условиям.

Заметим в заключение, что, отбросив в правых частях формул (12) слагаемые, выражающие жесткое перемещение, мы ничего не теряем в общности, ибо, как легко видеть, сами функции, фигурирующие в правых частях формул (12), определяются по заданным компонентам напряжения не вполне, а лишь с точностью до некоторых слагаемых, которые и дают произвольное жесткое перемещение тела как целого (см. об этом в § 34).

§ 31. Комплексное представление бигармонической функции. Как сейчас будет показано, всякая бигармоническая функция $U(x, y)$ двух переменных x, y может быть весьма просто представлена при помощи двух функций комплексного переменного $z = x + iy$. Это обстоятельство имеет громадное значение для теории бигармонического уравнения и, в частности, для плоской теории упругости, так как свойства функций комплексного переменного хорошо изучены вообще.

В § 30 уже была введена формулой (10) функция комплексного переменного

$$\varphi(z) = p + iq.$$

Легко непосредственно проверить на основании формул (11) § 30, что функция $U - px - qy$ гармоническая, т. е. что

$$\Delta(U - px - qy) = 0.$$

Поэтому

$$U = px + qy + p_1,$$

где p_1 — некоторая гармоническая функция в рассматриваемой области S. Пусть теперь $\chi(z)$ обозначает аналитическую функцию комплексного переменного z, действительной частью которой является p_1 [3]). Если область S, как мы пока предполагаем, односвязна, то функция $\chi(z)$ будет голоморфной в этой области.

Тогда, очевидно, можем написать:

$$U = \operatorname{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}, \tag{1}$$

где Re заменяет слова «действительная часть», а

$$\bar{z} = x - iy;$$

---

[1]) См. Добавление III.

[2]) Удовлетворяющая раз навсегда поставленным выше условиям.

[3]) Чтобы найти $\chi(z)$, надо вычислить гармоническую функцию q_1, сопряженную с p_1. Тогда $p_1 + iq_1 = \chi(z)$.

вообще, если A обозначает некоторое комплексное число $a + ib$, то через $\bar{A}$ мы будем обозначать комплексно сопряженное число $a - ib$, так что, например,

$$\overline{\varphi(z)} = p - iq.$$

При этих обозначениях формулу (1) можно написать так:

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{2}$$

Это и есть искомое выражение. Оно было впервые дано Гурса (Goursat [2]) в несколько ином виде и получено совершенно иным путем [1]). Однако в дальнейшем нам придется пользоваться не этим выражением для функции U, а выражениями для ее частных производных, так как именно производные функции U имеют непосредственное физическое значение.

Легко вычислить, что

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial U}{\partial x} &= \varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) + \overline{\chi'(z)}, \\ 2\frac{\partial U}{\partial y} &= i\left[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При первом взгляде на эти формулы убеждаемся, что вместо рассмотрения выражений для

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

удобнее рассматривать выражение для комплексной комбинации

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y},$$

которое гораздо проще. Именно ясно, что

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{4}$$

---

[1]) Вывод Гурса состоит в следующем. Пусть дано уравнение

$$\Delta\Delta U = 0.$$

Введем вместо x и y новые переменные: $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$; тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0,$$

откуда непосредственно вытекает:

$$U = \varphi_1(z) + \varphi_2(\bar{z}) + \bar{z}\chi_1(z) + z\chi_2(\bar{z}),$$

где φ_1, φ_2, χ_1, χ_2 —«произвольные» функции своих аргументов. Для обоснования этого формального вывода требуются дополнительные рассуждения, довольно, впрочем, простые; ср. сказанное в Добавлении IV в конце книги.

Если U — действительная функция, то, как легко видеть, следует положить:

$$\varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)}, \quad \chi_2(\bar{z}) = \overline{\chi_1(z)},$$

и мы получим формулу (2).

Доказательство, приведенное в тексте, было дано автором [4].

где для краткости положено:

$$\psi(z) = \frac{d\chi}{dz}. \tag{5}$$

Возвращаясь к выражению (2), заметим, что, обратно, всякое выражение вида (2) представляет собой бигармоническую функцию, если $\varphi(z)$, $\chi(z)$ — голоморфные функции комплексного переменного z.

Действительно, дифференцируя первое из уравнений (3) по x, а второе по y, и складывая, получаем сразу:

$$\Delta U = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\,\mathrm{Re}\,[\varphi'(z)], \tag{6}$$

откуда следует, что ΔU — гармоническая функция. Следовательно,

$$\Delta\Delta U = 0.$$

Формула (6) показывает кроме того, что задание выражения ΔU вполне определяет действительную часть функции $\varphi'(z)$.

§ 32. Комплексное представление смещений и напряжений. Умножая вторую из формул (12) § 30 на i и складывая с первой, получаем:

$$2\mu(u+iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z),$$

откуда на основании (4) § 31 следует весьма важная и удобная формула:

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{1}$$

которая по существу совпадает с формулой, впервые указанной Г. В. Колосовым [1] и полученной иным путем; здесь введено обозначение

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\sigma. \tag{2}$$

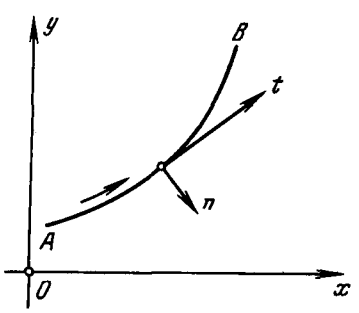


Рис. 15.

В случае тонкой пластинки («обобщенное плоское напряженное состояние»; § 26) вместо $\varkappa$ надо брать величину $\varkappa^*$, получаемую из предыдущей при замене λ на λ^*, т. е.

$$\varkappa^* = \frac{\lambda^*+3\mu}{\lambda^*+\mu} = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}. \tag{2'}$$

Очевидно, что $\varkappa > 1$, $\varkappa^* > 1$.

Перейдем теперь к представлению компонент напряжения при помощи тех же функций φ, ψ. С этой целью найдем выражение для усилия, действующего на элемент какого-либо профиля, проведенного в плоскости Oxy.

Рассмотрим на этой плоскости какую-либо дугу AB. Для определенности припишем ей некоторое положительное направление, а именно от A к B, и будем проводить нормаль n к ней *вправо* по отношению к наблюдателю, движущемуся в положительном направлении. Иными словами,

предположим, что положительные направления нормали и касательной расположены друг относительно друга так же, как направления осей Ox, Oy (рис. 15).

Под усилием $(X_n ds,\ Y_n ds)$, действующим на элемент ds дуги контура, будем, как всегда, подразумевать усилие, действующее со стороны положительной нормали. Имеем:

$$X_n = X_x \cos(n,\ x) + X_y \cos(n,\ y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos(n,\ x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \cos(n,\ y),$$

$$Y_n = Y_x \cos(n,\ x) + Y_y \cos(n,\ y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos(n,\ y) - \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \cos(n,\ x).$$

Но, как легко видеть,

$$\cos(n,\ x) = \cos(t,\ y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n,\ y) = -\cos(t,\ x) = -\frac{dx}{ds},$$

где t — положительное направление касательной. Внося эти значения в предыдущие формулы, получаем:

$$X_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{3}$$

или в комплексной форме

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right), \tag{4}$$

или еще

$$(X_n + iY_n)\, ds = -id\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Внося в эту формулу выражение (4) § 31, получаем:

$$(X_n + iY_n)\, ds = -id\{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\}. \tag{6}$$

Придадим элементу ds сперва направление оси Oy. Тогда

$$ds = dy, \quad dz = i\, dy, \quad d\bar{z} = -i\, dy, \quad X_n = X_x, \quad Y_n = Y_y,$$

и из предыдущей формулы следует:

$$X_x + iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}. \tag{7}$$

Придадим затем ds направление оси Ox. Тогда

$$ds = dx, \quad dz = d\bar{z} = dx, \quad X_n = -X_y, \quad Y_n = -Y_y$$

и из формулы (5) после умножения на i получаем:

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) дают искомые выражения для компонент напряжения. Их можно заменить более простыми. Именно, складывая и вычитая равенства (7) и (8) и заменяя во втором результате i на $-i$, получаем:

$$X_x + Y_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{9}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \tag{10}$$

где для краткости введены обозначения:

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z). \tag{11}$$

Весьма полезные формулы (9) и (10) также принадлежат Г. В. Колосову [1], который получил их иным путем, без посредства функций напряжений [1]).

Полученные выражения для компонент смещения и напряжения показывают, что эти компоненты при принятых выше условиях являются *аналитическими функциями* [2]) переменных x, y внутри рассматриваемой области, ибо этим свойством обладают функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$.

Замечание. В ряде работ можно встретить ссылки на «полуобратный метод Вестергарда». Вестергард в 1939 г. опубликовал работу (Westergaard [1]), в которой показал, что в ряде случаев плоской деформации нормальные и касательные напряжения выражаются через одну аналитическую функцию $Z(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ следующим образом:

$$X_x = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \quad Y_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \quad X_y = -y \operatorname{Re} Z', \qquad (12)$$

[1]) В недавно опубликованной статье Стевенсона (Stevenson [1]) выводятся формулы, совпадающие по существу с формулами Г. В. Колосова, а также с некоторыми моими, опубликованными значительно раньше (не только у нас, но также в весьма распространенных заграничных журналах); однако никаких ссылок на работы Г. В. Колосова и мои автор не делает.

В опубликованной еще позднее статье Поритский (Poritsky [2]) существенно использует формулы, лишь по виду отличающиеся от некоторых выведенных выше формул; в довольно неясной ссылке автор приписывает часть этих формул мне, цитируя мою статью [8] 1933 г. О более ранних моих работах и о работах Г. В. Колосова автор вовсе не упоминает, хотя эти работы (содержащие формулы, о которых идет речь, и опубликованные значительно раньше) названы мною в той самой статье, которую цитирует автор.

К предыдущему тексту сноски, перешедшему без изменений из третьего и четвертого изданий, считаю долгом добавить следующее. В промежутке между поступлением статьи Stevenson [1] (1940) и ее опубликованием (1945) вышла другая статья того же автора Stevenson [2] (1943), в которой автор упоминает работы Г. В. Колосова и мои, давая им высокую оценку. Я, разумеется, сделал упущение, не ознакомившись своевременно с этой последней статьей.

Некоторым оправданием мне может служить то обстоятельство, что в статье Стевенсона, опубликованной в 1945 г., нет никакого упоминания (хотя бы в виде краткого примечания при чтении корректур) ни о его статье 1943 г., ни о работах, с которыми автор ознакомился после представления первой статьи.

[2]) Напомним, что функция действительных переменных x, y называется аналитической в данной области S, если вблизи каждой точки (x_0, y_0) внутри этой области она может быть разложена в (двойной) ряд по целым неотрицательным степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, т. е. в ряд вида $\sum_{p,q} a_{p,q} (x - x_0)^p (y - y_0)^q$. (Это определение распространяется на любое число переменных.)

Как известно, всякая функция комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфная в данной области, является аналитической в том смысле, что разлагается в ряд по целым неотрицательным степеням $(z - z_0)$ вблизи любой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ области. С другой стороны, легко показать (см., например, Goursat [1]), что всякая аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ является аналитической функцией переменных x, y.

где Im заменяет слова «мнимая часть». Подбирая функцию Z, Вестергард получил решения ряда задач (задача о плоскости с разрезом, растягиваемой на бесконечности перпендикулярно к линии разреза, задача о штампе и т. д.). Нетрудно видеть, что решение Вестергарда представляет собой простейший частный случай указанного выше общего решения, соответствующий

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}Z, \quad \Psi(z)=-\frac{1}{2}zZ'. \tag{13}$$

Все решения, которые можно получить по методу Вестергарда, должны на линии $y=0$ удовлетворять условиям $X_y=0$ и $X_x=Y_y$.

В отделе II гл. VI (§ 112—120) рассмотрено много подобных и более общих задач; решения задач, полученные Вестергардом, содержатся в этом отделе в качестве простейших частных случаев. Заметим, что решения этих задач были уже приведены во втором издании настоящей книги, опубликованном в 1935 г. и, по-видимому, оставшемся неизвестным Вестергарду.

§ 33. Механическое значение функции f. Выражения для главного вектора и главного момента. 1. Введенная в § 31 функция

$$f(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \tag{1}$$

имеет весьма простое механическое значение, которое мы выясним, найдя выражение для главного вектора усилий, приложенных к данной дуге AB, расположенной в области S, занятой телом. Мы будем иметь в виду усилия, действующие на элементы дуги AB справа, если двигаться по этой дуге в направлении от A к B,— иначе говоря, действующие со стороны положительной нормали n, проведенной так, как в предыдущем параграфе (рис. 15).

Обозначим через (X, Y) упомянутый главный вектор. Из формул (5), (6) предыдущего параграфа следует:

$$X+iY=\int\limits_{AB}(X_n+iY_n)\,ds=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B=$$
$$=-i\left[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\right]_A^B, \tag{2}$$

где символ $[\ ]_A^B$ обозначает, как обычно, приращение выражения, заключенного в скобки, при перемещении по дуге AB из A в B.

Если в предыдущей формуле считать точку A зафиксированной раз навсегда, а точку B — переменной, и обозначить ее аффикс через $z=x+iy$, то получим:

$$f(x, y)=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=$$
$$=i\int\limits_{AB}(X_n+iY_n)\,ds+\text{const}=i(X+iY)+\text{const}, \tag{3}$$

где (X, Y) представляет собой главный вектор усилий, приложенных со стороны положительной нормали к произвольной дуге, соединяющей фиксированную точку A с переменной точкой $B(x, y)$, причем положительная нормаль считается обращенной вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся по рассматриваемой дуге от A к B.

Этот главный вектор, как следует из предыдущего, а также из механических соображений (см. п. 3), не зависит от формы дуги, соединяющей A и B, лишь бы, разумеется, эта дуга не выходила из области S.

Формула (3) и определяет механическое значение функции $f(x, y)$.

2. Выведем теперь формулу, аналогичную формуле (2), для главного момента M рассматриваемых усилий относительно начала координат.

Имеем:

$$M = \int_{AB} (xY_n - yX_n)\, ds.$$

На основании формул (3) § 32 эту формулу можно переписать так:

$$M = -\int_{AB} \left\{ x d\frac{\partial U}{\partial x} + y d\frac{\partial U}{\partial y} \right\},$$

откуда, интегрируя по частям, выводим:

$$M = -\left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B + \int_{AB} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right\},$$

или, наконец,

$$M = -\left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B + [U]_A^B \tag{4}$$

Заметим теперь, что

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = \operatorname{Re}\left\{ z\left(\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\}$$

и что на основании формулы (4) § 31

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z).$$

Внося это выражение в предыдущую формулу и вспоминая еще, что

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)],$$

получаем окончательно:

$$M = \operatorname{Re}[\chi(z) - z\psi(z) - zz\varphi'(z)]_A^B. \tag{5}$$

Формулы эти были указаны в моей работе [11].

3. Если, как мы предполагали до сих пор, рассматриваемая область S односвязна, то функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ однозначны в ней. Поэтому если точка B совпадает с A, т. е. если рассматриваемый профиль — замкнутая кривая, то значения этих функций в точках B и A совпадают, и мы будем иметь, как и следовало ожидать,

$$X = Y = M = 0. \tag{6}$$

Формулы (6) выражают не что иное, как тот факт, что совокупность внешних усилий, действующих на часть находящегося в равновесии тела, заключенную внутри какого-либо замкнутого контура, статически эквивалентна нулю.

§ 34. Степень определенности введенных функций. Перейдем теперь к изучению важного вопроса о том, насколько определены функции Φ, Ψ, φ, ψ заданием напряженного состояния тела или же заданием смещений точек тела.

Начнем с вопроса о степени определенности этих функций *при заданном напряженном состоянии*. Выражаясь более подробно, вопрос заключается в следующем. Пусть X_x, Y_y, X_y — компоненты напряжения при некотором заданном состоянии упругого равновесия тела. Как было показано в § 32, существуют функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного z, связанные с X_x, Y_y, X_y соотношениями

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z); \tag{1}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \tag{2}$$

Мы спрашиваем себя: определяются ли вполне функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, а также функции

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)\, dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z)\, dz \tag{3}$$

заданием компонент X_x, Y_y, X_y, или в выборе их остается некоторый произвол? Какова степень этого произвола?

Ответить на эти вопросы не представляет никакого затруднения. Пусть Φ_1, Ψ_1, φ_1, ψ_1 — какая-либо другая система функций, связанных с заданными компонентами X_x, Y_y, X_y и друг с другом теми же соотношениями (1), (2), (3), что и функции Φ, Ψ, φ, ψ, т. е.:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi_1(z); \tag{1'}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)], \tag{2'}$$

$$\varphi_1(z) = \int \Phi_1(z)\, dz, \quad \psi_1(z) = \int \Psi_1(z)\, dz. \tag{3'}$$

Посмотрим, чем могут отличаться функции Φ_1, Ψ_1, φ_1, ψ_1 от функций Φ, Ψ, φ, ψ.

Сопоставляя соотношение (1) с (1'), убеждаемся, что функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi(z)$ имеют одинаковые действительные части; значит, функции эти могут различаться только произвольной, чисто мнимой постоянной [1]) Ci, так что

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + Ci, \tag{4}$$

где C — действительная постоянная.

[1]) См. Добавление III.

Отсюда на основании соотношений (3) и (3′) следует:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + Ciz + \gamma, \tag{5}$$

где $\gamma = \alpha + i\beta$ — произвольная комплексная постоянная.

Замечая дальше, что в силу (4) $\Phi_1'(z) = \Phi'(z)$, и сопоставляя соотношения (2) и (2′), получаем очевидно:

$$\Psi_1(z) = \Psi(z), \tag{6}$$

и, наконец, на основании (3) и (3′)

$$\psi_1(z) = \psi(z) + \gamma', \tag{7}$$

где $\gamma' = \alpha' + i\beta'$ — произвольная комплексная постоянная. Таким образом, мы имеем следующий результат.

При заданном напряженном состоянии функция $\Psi(z)$ определена вполне, функция $\Phi(z)$ — с точностью до слагаемого Ci, функция $\varphi(z)$ — с точностью до слагаемого $Ciz + \gamma$ и функция $\psi(z)$ — с точностью до слагаемого γ', где C — действительная, а γ, γ' — произвольные комплексные постоянные.

Очевидно, что, обратно, напряженное состояние не изменится, если

$$\left.\begin{array}{l} \text{функцию } \varphi(z) \text{ заменить на } \varphi(z) + Ciz + \gamma, \\ \text{» } \quad \psi(z) \quad \text{» } \quad \text{» } \psi(z) + \gamma', \end{array}\right\} \tag{A}$$

где C — действительная, а γ, γ' — комплексные произвольные постоянные. При этом функция $\Phi(z) = \varphi'(z)$, очевидно, заменяется на $\Phi(z) + Ci$, а $\Psi(z)$ остается без изменения.

Перейдем теперь к выяснению вопроса о том, в какой мере уменьшается произвол в выборе рассматриваемых функций, *если заданы компоненты смещения* u, v.

Задание компонент смещения вполне определяет компоненты напряжения. Поэтому ясно, что при заданных компонентах смещения мы не можем производить замены, отличной от замены типа (A). Посмотрим, влияет ли эта замена на компоненты смещения, определяемые, как мы видели в § 32, формулой

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Непосредственная подстановка показывает, что при указанной замене

$$2\mu(u + iv) \quad \text{переходит в} \quad 2\mu(u_1 + iv_1),$$

где

$$2\mu(u_1 + iv_1) = 2\mu(u + iv) + (\varkappa + 1)Ciz + \varkappa\gamma - \bar{\gamma}'. \tag{8}$$

Следовательно, полагая $\gamma = \alpha + i\beta$, $\gamma' = \alpha' + i\beta'$, имеем:

$$u_1 = u + u_0, \quad v_1 = v + v_0. \tag{9}$$

Здесь

$$u_0 = -\frac{(\varkappa+1)C}{2\mu}y + \frac{\varkappa\alpha - \alpha'}{2\mu}, \quad v_0 = \frac{(\varkappa+1)C}{2\mu}x + \frac{\varkappa\beta + \beta'}{2\mu}. \tag{10}$$

Мы видим, что добавочные члены имеют вид:

$$u_0 = -\varepsilon y + \alpha_0, \quad v_0 = \varepsilon x + \beta_0, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon = \frac{(\varkappa+1)C}{2\mu}, \quad \alpha_0 = \frac{\varkappa\alpha - \alpha'}{2\mu}, \quad \beta_0 = \frac{\varkappa\beta + \beta'}{2\mu}, \tag{12}$$

и выражают попросту жесткое перемещение тела как целого. Этот результат следовало, конечно, предвидеть заранее, так как смещения, соответствующие данному напряженному состоянию, определены с точностью до жесткого перемещения тела как целого.

Формула (8) показывает, что замена вида (A) может быть произведена без изменения смещений только в том случае, если

$$C = 0, \quad \varkappa\gamma - \bar{\gamma}' = 0. \tag{13}$$

Следовательно, *при заданных смещениях* нельзя произвольно задавать постоянные C, γ, γ'; если, например, произвольно задать *одну* из постоянных γ, γ', то этим исчерпывается весь произвол.

Произвольным постоянным, входящим в наши функции, можно придавать, в зависимости от удобства, те или иные определенные значения.

Предполагая для определенности, что начало координат находится в области S, занятой телом, мы можем выбирать эти произвольные постоянные, например, следующим образом.

При *заданных напряжениях*, когда все три постоянные C, γ, γ' находятся в нашем распоряжении, мы можем выбирать их так, чтобы

$$\varphi(0) = 0, \text{ мнимая часть } \varphi'(0) = 0, \ \psi(0) = 0. \tag{14}$$

Первое достигается подходящим выбором γ, второе — подходящим выбором C, третье — подходящим выбором γ'.

Условия (14), очевидно, не оставляют уже никакого произвола в выборе функций φ и ψ.

При *заданных смещениях* мы можем подходящим выбором постоянных γ или γ' достигнуть того, чтобы по произволу

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(0) = 0. \tag{15}$$

Любым из этих двух условий вполне фиксируются обе функции φ и ψ.

Заметим еще следующее. Очевидно, что задание выражения

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \tag{16}$$

вполне определяет напряженное состояние тела [1]).

Выясним теперь вопрос, какому условию должны удовлетворять постоянные C, γ, γ' для того, чтобы при замене (A) не изменялось не только напряженное состояние, но и значение выражения (16).

---

[1]) Действительно, этим вполне определяются величины $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, а значит, и вторые производные функции U, характеризующие компоненты напряжения.

Легко убедиться, что при замене (A) выражение это заменяется на

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma+\bar{\gamma}'.$$

Следовательно, если выражение $\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}$ задано, то мы должны иметь $\gamma+\bar{\gamma}'=0$. Значит, мы можем произвольно выбрать C и одну из величин γ, γ'. Мы можем, например, положить:

$$\varphi(0)=0 \quad \text{или} \quad \psi(0)=0, \quad \text{мнимая часть } \varphi'(0)=0, \tag{17}$$

и это вполне фиксирует функции φ и ψ.

§ 35. Общие формулы для конечной многосвязной области. Обратимся теперь к случаю, когда область S, занятая телом, *многосвязна*, и начнем с рассмотрения конечной области.

Согласно сказанному в § 29 (п. 2) мы будем предполагать, что область ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами L_1, L_2, ... , L_m, L_{m+1}, из которых последний охватывает все предыдущие, как показано на рис. 16 (пластинка с отверстиями); предполагается, что эти контуры не имеют общих точек [1]).

Напомним, что по условию компоненты напряжения и смещения — однозначные функции. Несмотря на это, функции φ, ψ могут оказаться в нашем случае многозначными. Заметим, однако, что на основании сказанного в предыдущих параграфах эти функции будут голоморфны и, следовательно, однозначны в любой односвязной части, выделенной из области S, занятой телом [2]). Таким образом, функции φ, ψ являются аналитическими (см. § 29, п. 4, примечание) в области S.

Исследуем теперь характер многозначности наших функций. Прежде всего формула

$$X_x+Y_y=4\operatorname{Re}\Phi(z)$$

показывает, что действительная часть функции $\Phi(z)$ однозначна (так как однозначна, по условию, левая часть равенства). Но это еще не значит,

---

[1]) Согласно условию, принятому в том же § 29, мы считаем, что контуры эти гладкие или кусочно-гладкие.

[2]) Поясним это подробнее. Пусть S' — какая-либо односвязная часть тела S. Мы можем определить функции φ, ψ, соответствующие данному состоянию упругого равновесия части S', зафиксировав (произвольно) те неопределенные постоянные, которые входят в эти функции (§ 34). Эти функции, как было показано выше, будут голоморфными в S'. Но если мы станем аналитически продолжать эти функции за область S' (оставаясь, разумеется, все время в S), то, описав замкнутый путь и вернувшись в S', мы можем уже не вернуться к прежним значениям функций φ, ψ. Легко, однако, видеть, что новые значения этих функций могут отличаться от старых только членами указанного в § 34 вида, ибо и те и другие значения соответствуют одному и тому же упругому равновесию. Это также следует из формул (10) и (11) настоящего параграфа.

что и мнимая часть ее однозначна. А именно, при однократном обходе (например, против часовой стрелки) какого-либо замкнутого контура L'_k, охватывающего один из контуров L_k, эта мнимая часть может испытать приращение вида $B_k i$, где B_k — действительная постоянная [1]). Вместо постоянных B_k мы введем другие действительные постоянные A_k, полагая

$$B_k = 2\pi A_k.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k), \qquad (1)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ обозначают постоянные точки, произвольно выбранные внутри контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$ (т. е. вне области S; рис. 16).

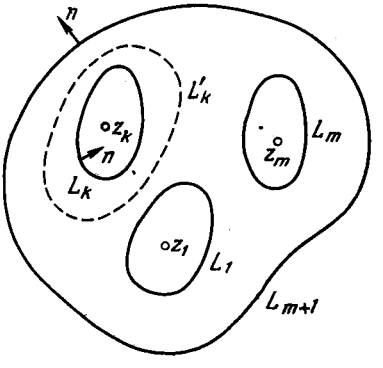


Рис. 16.

Так как $\ln(z - z_k)$ при обходе (против часовой стрелки) вокруг контура L_k получает приращение $2\pi i$, то выражение $A_k \ln(z - z_k)$ прирастает как раз на величину $2\pi i A_k$; остальные же члены под знаком суммы в формуле (1) возвращаются к прежним значениям. Следовательно, функция $\Phi^*(z)$ вернется к прежнему значению при обходе по любому замкнутому контуру в области S.

Итак, имеем:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \Phi^*(z), \qquad (2)$$

где $\Phi^*(z)$ — голоморфная и, следовательно, однозначная функция в области S.

Далее, для функции $\varphi(z)$ получаем:

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} \Phi(z)\,dz + \text{const} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_k \{(z - z_k)\ln(z - z_k) - (z - z_k)\} + \int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)\,dz + \text{const},$$

где z_0 — произвольная постоянная точка области S.

Но интеграл

$$\int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)\,dz$$

представляет собой функцию комплексного переменного z, которая при обходе вокруг одного из контуров L_k может получить приращение вида

$$2\pi i c_k,$$

[1]) См. Добавление III.

где c_k — постоянная, вообще комплексная (множитель $2\pi i$ введен для удобства). Следовательно, аналогично предыдущему можно написать:

$$\int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \ln(z - z_k) + \text{однозначная функция}.$$

Внося это выражение в предыдущую формулу и соединяя вместе члены вида $A_k z_k \ln(z - z_k)$ и $c_k \ln(z - z_k)$, получаем:

$$\varphi(z) = z\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{3}$$

где $\varphi^*(z)$ — функция, голоморфная в области S, а γ_k — некоторые (вообще комплексные) постоянные.

Наконец, на основании формулы

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

убеждаемся, что $\Psi(z)$ — голоморфная функция. Отсюда для функции

$$\psi(z) = \int \Psi(z)\,dz$$

следует аналогично предыдущему, что

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{4}$$

где γ_k' — некоторые (вообще комплексные) постоянные, а $\psi^*(z)$ — голоморфная функция.

Напишем еще формулу для

$$\chi(z) = \int \psi(z)\,dz.$$

Совершенно аналогично предыдущему будем иметь:

$$\chi(z) = z\sum_{k=1}^{m} \gamma_k' \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k'' \ln(z - z_k) + \chi^*(z), \tag{5}$$

где γ_k'' — вообще комплексные постоянные, а $\chi^*(z)$ — голоморфная функция в области S.

До сих пор мы не обращали внимания на *условие однозначности смещений*. Выразим теперь это условие. По формуле (1) § 32 имеем:

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Подставляя в эту формулу найденные выше выражения для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, непосредственно убеждаемся, что

$$2\mu[u + iv]_{L_k'} = 2\pi i\{(\varkappa + 1)A_k z + \varkappa\gamma_k + \overline{\gamma_k'}\}, \tag{6}$$

где символ $[\ ]_{L_k'}$ означает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе контура L_k' против часовой стрелки.

Значит, для однозначности смещений необходимо и достаточно, чтобы в формулах (1)—(5) было

$$A_k = 0, \quad \varkappa\gamma_k + \overline{\gamma_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Покажем теперь, что величины γ_k, γ_k' могут быть очень просто выражены через величины X_k, Y_k, где (X_k, Y_k) означает главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), т. е. усилий, приложенных к L_k со стороны внешней по отношению к S нормали n (рис. 16).

Вычислим этот главный вектор. С этой целью мы можем воспользоваться формулой (2) § 33, которая очевидно справедлива и в рассматриваемом здесь случае многосвязной области S, лишь бы контур AB, фигурирующий в упомянутой формуле, был целиком расположен в S. Формулу эту можно применять и в случае, когда контур AB целиком или частично принадлежит границе области, если сделать некоторые предположения относительно поведения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ вблизи границы (об этом будет подробно сказано в § 42).

Здесь же мы можем обойтись без каких-либо дополнительных предположений, заменив рассмотрение усилий, приложенных к L_k, рассмотрением усилий, приложенных с надлежащей стороны (а именно, со стороны, обращенной в сторону контура L_k) к любому замкнутому контуру L_k', расположенному в S, охватывающему контур L_k и не охватывающему других контуров, составляющих границу (рис. 16). Главный вектор (X_k, Y_k) последних усилий не зависит от выбора контура L_k', если только контур этот удовлетворяет указанным условиям. Это очевидно по механическим соображениям и вытекает также из приводимой ниже формулы (8). В частности контур L_k' может быть взят сколь угодно близким к контуру L_k.

Исходя из этого, естественно, не налагая никаких условий на поведение функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ вблизи контура L_k, принять, что *по определению* главный вектор внешних усилий, приложенных к L_k, есть главный вектор усилий, приложенных к L_k' с надлежащей стороны.

Аналогичное определение можно дать и для главного момента.

Формула (2) § 33, примененная к замкнутому контуру L_k', дает

$$X_k + iY_k = -i\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_{L_k'},$$

где на этот раз контур L_k' обходится в направлении часовой стрелки, так как направление обхода должно быть выбрано так, чтобы рассматриваемые усилия действовали на контур L_k' справа.

Приняв это во внимание, легко получим на основании формул (3) и (4):

$$X_k + iY_k = -2\pi(\gamma_k - \overline{\gamma_k'}). \tag{8}$$

Мы видим, что, как и следовало ожидать, главный вектор (X_k, Y_k) не зависит от выбора контура L_k', если этот контур один раз охватывает контур L_k и не охватывает других контуров, составляющих границу области S.

Из формул (7) и (8) получаем:

$$\gamma_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad \gamma_k' = \frac{\varkappa(X_k - iY_k)}{2\pi(1+\varkappa)}. \tag{9}$$

Принимая во внимание предыдущие формулы (а также и то, что $A_k = 0$), можем написать формулы (3) и (4) в следующем окончательном виде:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{m} (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{10}$$

$$\psi(z) = \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{m} (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \psi^*(z). \tag{11}$$

§ 36. Случай бесконечной области. С точки зрения приложений представляет большой интерес также рассмотрение бесконечной области. Мы ограничимся пока изучением случая, когда область S состоит из всей плоскости Oxy, из которой удалены конечные части, ограниченные простыми замкнутыми контурами (бесконечная пластинка с отверстиями).

Граница такой области состоит из одного или нескольких простых замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Такая область есть предельный случай области, рассмотренной в предыдущем параграфе, когда контур L_{m+1} целиком уходит в бесконечность.

Формулы, выведенные в предыдущем параграфе, разумеется, справедливы для любой конечной части области S. Остается изучить поведение наших функций в окрестности бесконечно удаленной точки плоскости Oxy.

Опишем из начала координат, как из центра, окружность L_R радиуса R, достаточно большого для того, чтобы все контуры L_k находились внутри L_R. Для всякой точки z, находящейся вне L_R, будем, очевидно, иметь:

$$|z| > |z_k|,$$

и, следовательно,

$$\ln(z - z_k) = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) = \ln z - \frac{z_k}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_k}{z}\right)^2 - \ldots =$$
$$= \ln z + \text{функция, голоморфная вне } L_R.$$

Поэтому из формул (10) и (11) предыдущего параграфа получаем:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + \varphi^{**}(z), \quad \psi(z) = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + \psi^{**}(z), \tag{1}$$

где

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_k, \quad Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k, \tag{2}$$

а $\varphi^{**}(z)$, $\psi^{**}(z)$ обозначают функции, голоморфные вне L_R, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки [1]).

[1]) Функция называется голоморфной в точке $z = \infty$, если в окрестности этой точки (т. е. при достаточно больших $|z|$) она представляется рядом вида

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

Величины X и Y, очевидно, представляют собой компоненты главного вектора всех внешних усилий, приложенных к границе области S, т. е. к совокупности контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$.

Согласно теореме Лорана [1]) функции $\varphi^{**}(z)$ и $\psi^{**}(z)$ могут быть представлены вне L_R рядами:

$$\varphi^{**}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \psi^{**}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n z^n, \tag{3}$$

причем эти ряды равномерно сходятся во всякой конечной области, лежащей вне L_R. Это — все, что можно сказать о функциях φ и ψ, если не введены добавочные условия относительно распределения напряжений в бесконечно удаленных частях плоскости.

Введем теперь следующее условие: *компоненты напряжения остаются ограниченными во всей области S*. Посмотрим, каковы должны быть функции φ и ψ для того, чтобы было соблюдено это условие.

По формулам (9) и (10) § 32 имеем:

$$X_x + Y_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \tag{а}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]. \tag{б}$$

Внося в первую из этих формул выражение (1) для $\varphi(z)$ и заменяя $\varphi^{**}(z)$ рядом (3), получаем очевидно:

$$X_x + Y_y = 2\left\{ -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} - \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{\bar{z}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n\left(a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}\right)\right\}.$$

Единственные члены, которые могут неограниченно расти вместе с $|z|$, происходят от ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n r^{n-1}\left[a_n e^{(n-1)i\vartheta} + \bar{a}_n e^{-(n-1)i\vartheta}\right],$$

где введено обозначение $z = re^{i\vartheta}$. Отсюда, очевидно, следует, что для того чтобы сумма $X_x + Y_y$ оставалась ограниченной при r, стремящемся к ∞, должно быть

$$a_n = \bar{a}_n = 0 \quad (n \geqslant 2).$$

---

[1]) Теорема Лорана заключается в следующем. Если функция $f(z)$ голоморфна внутри кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями L_1 и L_2, то в этой области она разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k;$$

мы считаем здесь, что начало координат взято в центре окружностей.

В частности, окружность L_1 может сводиться к одной точке, а окружность L_2 быть бесконечно большой. В тексте мы имеем как раз последний случай: роль L_1 исполняет L_R, а роль L_2 — бесконечно большая окружность.

Доказательство теоремы Лорана можно найти, например, в книге В. И. Смирнова [1], т. III.

Считая это условие соблюденным, легко убедиться подобным же образом на основании формулы (б), что для ограниченности выражения

$$Y_y - X_x + 2iX_y$$

необходимо и достаточно, чтобы оставался ограниченным ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}a'_n e^{(n-1)i\theta},$$

откуда следует:

$$a'_n = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Обратно, если эти условия соблюдены, то, очевидно, X_x, Y_y, X_y будут ограниченными.

Следовательно, будем иметь окончательно:

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z), \tag{4}$$

$$\psi(z) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z), \tag{5}$$

где

$$\Gamma = B + iC, \quad \Gamma' = B' + iC' \tag{6}$$

— постоянные [1]), вообще комплексные, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные вне L_R, *включая бесконечно удаленную точку*, т. е. имеющие при достаточно больших $|z|$ разложения вида [2])

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots, \quad \psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \ldots \tag{7}$$

На основании сказанного в § 34, не изменяя напряженного состояния, всегда можем считать:

$$a_0 = a'_0 = 0,$$

т. е.

$$\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0$$

и, кроме того, $C = 0$.

Действительные постоянные B, B', C', вошедшие в формулы (4) и (5), через посредство Γ, Γ', имеют весьма простой физический смысл. Действительно, из формул (а) и (б) следует непосредственно, что при $z|$, стремящемся к ∞, будем иметь:

$$\lim(X_x + Y_y) = 4\operatorname{Re}\Gamma = 4B, \quad \lim(Y_y - X_x + 2iX_y) = 2\Gamma' = 2(B' + iC'), \tag{8}$$

откуда следует, что X_x, Y_y, X_y стремятся к определенным пределам:

$$X_x^{(\infty)} = 2B - B', \quad Y_y^{(\infty)} = 2B + B', \quad X_y^{(\infty)} = C'. \tag{9}$$

Значит, в бесконечно удаленных частях плоскости мы имеем равномерное распределение напряжений (вернее, распределение, бесконечно мало отличающееся от равномерного). Пусть N_1, N_2 — значения главных

[1]) Мы ввели обозначения:

$$a_1 = \Gamma = B + iC, \quad a'_1 = \Gamma' = B' + iC'.$$

[2]) Вместо a_{-1}, a_{-2} и т. д. мы теперь пишем a_1, a_2 и т. д.

напряжений на бесконечности, а α — угол, который главная ось, соответствующая N_1, составляет с осью Ox.

Сравнивая формулы (8) с формулами (12) § 8, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}\Gamma = B &= \tfrac{1}{4}(N_1+N_2), \\ \Gamma' = B' + iC' &= -\tfrac{1}{2}(N_1-N_2)\,e^{-2i\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Постоянная C, не влияющая на напряжения, может быть выражена через *вращение* бесконечно удаленной части плоскости.

Действительно, значение вращения ε [1]) определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{11}$$

откуда, хотя бы на основании формул (12) § 30, получаем [2]):

$$\varepsilon = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{1+\varkappa}{4\mu}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{1+\varkappa}{2\mu}\cdot\frac{\varphi'(z)-\overline{\varphi'(z)}}{2i}. \tag{11'}$$

Из этой формулы и из формул (4), (7) сразу выводим, что предел ε при $z \to \infty$ равен

$$\varepsilon_\infty = \frac{1+\varkappa}{2\mu}C,$$

и, значит,

$$C = \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa}. \tag{12}$$

Отметим кстати, что напряженное состояние, характеризуемое линейными функциями

$$\varphi(z) = (B+iC)z + \text{const}, \quad \psi(z) = (B'+iC')z + \text{const},$$

является *однородным*: напряжения распределены равномерно, т. е. компоненты напряжения (а следовательно, и компоненты деформации) — постоянные величины. А именно, компоненты напряжения выражаются формулами (9), если отбросить значок ∞.

Возвращаясь к общему случаю, выясним поведение смещений на бесконечности при принятых нами условиях. Для этого воспользуемся формулой (1) § 32, из которой на основании формул (4) и (5) следует:

$$2\mu(u+iv) = -\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(z\bar{z}) + (\varkappa\Gamma - \bar{\Gamma})z - \bar{\Gamma}'\bar{z} + \ldots, \tag{13}$$

---

[1]) Через ε мы обозначаем то, что в § 14 было обозначено через r.

[2]) Вспомним, что

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

и что

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi'(z);$$

отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial q}{\partial x} = \overline{\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{2i}[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}].$$

где не выписаны величины, остающиеся ограниченными при сколь угодно больших значениях $|z|$.

Отсюда видно, что *при принятых нами условиях смещения, вообще говоря, не остаются ограниченными на бесконечности.* Чтобы они оставались ограниченными, должны быть, очевидно, соблюдены еще следующие условия:

$$X = Y = 0, \quad \Gamma = \Gamma' = 0. \tag{14}$$

Первая группа этих условий требует, чтобы главный вектор всех внешних усилий, приложенных к границе области, равнялся нулю, а вторая группа — чтобы напряжения равнялись нулю на бесконечности, и, кроме того, чтобы бесконечно удаленная часть плоскости не испытывала вращения.

Обратим внимание на то, что даже в случае обращения напряжений в нуль на бесконечности и отсутствия вращения ($C = 0$) смещения все же возрастают, как $\ln(z\bar{z}) = 2\ln r$, если главный вектор (X, Y) не равен нулю.

Замечание 1. В формулах (4) и (5) функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ голоморфны вне любой окружности, охватывающей все контуры $L_1, L_2, \ldots, L_m$.

Если имеется лишь *один* такой контур L_1 (плоскость с одним отверстием), то легко видеть, что $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ будут голоморфны во *всей* области S, если только начало координат взято вне области S (т. е. внутри отверстия). Действительно, в этом случае формулы (10) и (11) предыдущего параграфа совпадают с формулами (1) настоящего параграфа, если в первых взять

$$z_1 = 0,$$

вместо $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ написать соответственно $\varphi^{**}(z)$, $\psi^{**}(z)$. Но функции $^*(z)$, $\psi^*(z)$ формул предыдущего параграфа, как мы знаем, голоморфны во *всей* области S, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, а отсюда легко следует наше утверждение.

Замечание 2. Само собою разумеется, что рассмотрение тел, занимающих бесконечную область, является лишь *математическим приемом.* Этот прием (которым широко и с успехом пользуются на практике) позволяет при надлежащем его применении значительно упростить (приближенное) решение ряда конкретных задач для тел конечных размеров (которые только и мыслимы с физической точки зрения).

Имея в виду, что тело, занимающее бесконечную область, является лишь математической идеализацией, не следует считать, например, парадоксальным то обстоятельство, что смещения не остаются ограниченными на бесконечности, если не соблюдены условия (14). Это обстоятельство указывает лишь, что полученные для бесконечной области формулы следует применять на практике только к той части области, в которой смещения достаточно малы. Ср. аналогичное замечание в конце § 57.

§ 37. Некоторые свойства, вытекающие из аналитического характера решения. Об аналитическом продолжении через данный контур. Из аналитического характера общего решения уравнений плоской теории упругости вытекает ряд важных свойств, на которых мы остановимся в настоящем параграфе.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, через которые выражается это общее решение, являются аналитическими функциями z во всей области, занятой телом, и в том случае, когда эта область многосвязна. Это следует из выражений для названных функций, выведенных в предыдущих параграфах. Разница со случаем односвязной области только та, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут оказаться неоднозначными вследствие присутствия логарифмических членов [1]). Так как аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ является в то же время аналитической функцией действительных переменных x, y (см. § 32, примечание), то, как и в случае односвязной области, компоненты напряжения X_x, Y_y, X_y и компоненты смещения u, v суть аналитические функции переменных x, y во всей области, занятой телом.

Из этого свойства решений непосредственно вытекает предложение, которое с первого взгляда может показаться несколько неожиданным.

Если какая-либо часть [2]) *тела (даже сколь угодно малая) находится в «естественном» состоянии, т. е. в ней отсутствуют напряжения, то и все тело находится в естественном состоянии, иначе говоря, напряжения отсутствуют всюду.*

Действительно, если $X_x = Y_y = X_y = 0$ в какой-либо части области S, занятой телом, то это будет иметь место во всем теле, ибо аналитическая функция не может быть равна нулю в части области, не будучи равной нулю во всей области.

Перейдем теперь к доказательству одного простого и важного предложения, касающегося аналитического продолжения решения через данный контур.

Пусть имеются две области S^+ и S^-, не перекрывающие друг друга, но границы которых имеют общую часть, представляющую собой некоторую (разомкнутую или замкнутую) гладкую линию L. Предположим, что компоненты смещения и напряжения удовлетворяют в каждой из областей S^+ и S^- принятым в § 27 условиям. Тогда, как было сказано выше, они будут аналитическими функциями в каждой из отдельных областей S^+ и S^-.

Выясним теперь необходимые и достаточные условия того, чтобы они были аналитическими в области S, получаемой соединением S^+ и S^- (включая L).

---

[1]) Если допускаются многозначные смещения, то может оказаться многозначной и функция $\Phi(z)$.

[2]) Под частью мы понимаем часть, представляющую собой некоторую область.

Если компоненты смещения и напряжения u, v, X_x, Y_y, X_y — аналитические во всей области S, то, очевидно, они непрерывно продолжимы на L как из S^+, так и из S^-, причем их граничные значения с той и другой стороны от L равны между собой. Отмечая граничные значения, получаемые переходом к пределу из S^+ и из S^-, соответственно значками (+) и (—), будем иметь, в частности, *необходимые условия*

$$u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad X_n^+ = X_n^-, \quad Y_n^+ = Y_n^- \text{ на } L, \tag{1}$$

где (X_n^+, Y_n^+) и (X_n^-, Y_n^-) обозначают соответственно векторы напряжений, приложенных в данной точке на L к элементу этой линии, вычисленные соответственно в предположении, что элемент принадлежит соответственно части S^+ и части S^-, т. е. точнее:

$$X_n^+ = X_x^+ \cos(n, x) + X_y^+ \cos(n, y), \quad Y_n^+ = X_y^+ \cos(n, x) + Y_y^+ \cos(n, y), \tag{2}$$

и аналогично для X_n^-, Y_n^-, причем n обозначает нормаль к L в данной точке, направленную в определенную сторону (выбранную произвольно). Докажем теперь, что условия (1) *достаточны* [1]) (в предположении, что существуют граничные значения компонент смещения и напряжения с той и другой стороны). В самом деле, из первых двух равенств (1) следует, что выражение

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{3}$$

непрерывно продолжимо на L с той и другой стороны и что граничные значения с обеих сторон равны между собой. Далее, из двух последних равенств (1) следует, что тем же свойством обладает выражение

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{4}$$

если только надлежащим образом выбрать произвольные постоянные, которые можно прибавить, не изменяя смещений, к функциям φ, ψ в областях S^+ и S^-. Это станет очевидным, если принять во внимание формулу (3) § 33, которая показывает, что значения предыдущего выражения как в S^+, так и в S^- можно при надлежащем выборе упомянутых постоянных представить в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = i\int_a^z (X_n + iY_n)\, ds, \tag{5}$$

где интеграл взят по произвольной линии l, остающейся целиком (кроме точки a) в S^+ или S^- и соединяющей некоторую постоянную точку a линии L с точкой z в S^+ или S^-; приближая из S^+ или из S^- точку z к какой-либо точке t линии L, мы можем выбрать линию l настолько

[1]) Эти условия выражают попросту, что смещения остаются непрерывными при переходе через линию раздела, а напряжения, приложенные к элементам этой линии с той и другой стороны, удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

близкой [1]) к L, чтобы интеграл в правой части (5) был сколь угодно близок к интегралу (при надлежащем выборе направления нормали n к L)

$$i\int_a^t (X_n^+ + iY_n^+)\,ds = i\int_a^t (X_n^- + iY_n^-)\,ds,$$

взятому по дуге линии L, соединяющей a и t.

Путем сложения выражений (3) и (4) непосредственно убеждаемся, что и функция $\varphi(z)$ непрерывно продолжима на L из S^+ и из S^- и что ее граничные значения с той и другой стороны равны. Следовательно, на основании сказанного в § 29 (п. 4) функция $\varphi(z)$ будет аналитической в S; значит, и $\varphi'(z)$ будет аналитической. После этого становится очевидным, что и функция $\psi(z)$ непрерывно продолжима на L с обеих сторон и что граничные ее значения равны между собой. Значит, $\psi(z)$ так же, как и $\varphi(z)$, будет аналитической во всей области S. Это доказывает наше утверждение.

Из сказанного выше легко вывести еще следующее предложение: *Если на какой-либо части (сколь угодно малой) границы тела*

$$X_n = Y_n = u = v = 0, \tag{6}$$

то напряжения отсутствуют во всем теле [2]).

Действительно, пусть S — область, занятая телом, а L' — та часть границы, на которой соблюдено условие (6). Возьмем какую-либо область S', примыкающую к L' и расположенную вне S. На основании сказанного выше и на основании условия (6) мы можем аналитически продолжить функции X_x, Y_y, X_y, u, v из области S в область S', положив попросту, что X_x, Y_y, X_y, u, v равны нулю в S'. Но тогда на основании сказанного в начале этого параграфа мы получим, что $X_x = Y_y = X_y = u = v = 0$, ибо эти функции, аналитические в области, полученной соединением S и S', равны нулю в части S'.

Замечание. Доказанное выше предложение об аналитическом продолжении через данный контур можно несколько обобщить. А именно, оставляя в силе требование, чтобы компоненты смещения были непрерывно продолжимы на L как из S^+, так и из S^-, мы можем заменить аналогичное требование относительно компонент напряжения менее сильным и более естественным с физической точки зрения требованием, чтобы было непрерывно продолжимо на линию L выражение (4). Это требование, как легко видеть, сводится к следующему. Возьмем какую-нибудь (гладкую) дугу l^+ (или l^-), целиком расположенную в S^+ (или S^-), близкую к L, и предположим, что эта дуга стремится к некоторой дуге l линии L; пусть, далее, (X, Y)— главный вектор усилий, приложенных к дуге l^+

[1]) Мы подразумеваем близость не только в смысле расстояний, но и в смысле направлений касательных.

[2]) Это предложение принадлежит Альманзи (Almansi [3]), который доказал его иным путем для общего случая трех измерений.

(или l^-) со стороны, обращенной к S^+ (или S^-). Тогда при приближении l^+ (или l^-) к l этот главный вектор стремится к определенному вектору (X^+, Y^+) [или (X^-, Y^-)], который представляет собой по определению главный вектор усилий, приложенных со стороны тела S^+ (или S^-) к дуге l границы этого тела.

При соблюдении указанных требований условия (1) можно, как легко видеть, заменить следующими:

$$u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad X^+ + X^- = 0, \quad Y^+ + Y^- = 0, \tag{1'}$$

где (X^+, Y^+) и (X^-, Y^-) обозначают соответственно главные векторы усилий, приложенных со стороны тел S^+ и S^- к произвольной дуге l линии раздела L.

Точно так же условия (6) можно заменить следующими:

$$X = Y = u = v = 0, \tag{6'}$$

где (X, Y)— главный вектор усилий, приложенных к произвольной дуге рассматриваемой части границы.

§ 38. Замена прямоугольных координат. Посмотрим теперь, как изменяются введенные нами функции, *соответствующие данному напряженному состоянию тела*, при переходе от одной системы прямоугольных прямолинейных координат к другой.

Рассмотрим сперва эффект переноса начала в новую точку (x_0, y_0). Пусть (x, y) и (x_1, y_1)— координаты одной и той же точки относительно старой и новой систем и пусть

$$z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1.$$

Очевидно,

$$z = z_1 + z_0, \tag{1}$$

где

$$z_0 = x_0 + iy_0.$$

Будем исходить из формул

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \tag{2}$$

Обозначим через $\Phi_1(z_1)$ и $\Psi_1(z_1)$ функции, играющие ту же роль в новой системе, что функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — в старой.

Так как при переносе начала компоненты напряжения не изменяются, то мы должны иметь на основании первой из формул (2)

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \operatorname{Re} \Phi_1(z_1) = \operatorname{Re} \Phi_1(z - z_0),$$

откуда

$$\Phi(z) = \Phi_1(z - z_0); \tag{3}$$

в правой части можно было бы прибавить любую чисто мнимую постоянную, которая никакого влияния на распределение напряжений не имеет.

Далее, согласно второй из формул (2) получим:

$$\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)=\bar{z}_1\Phi_1'(z_1)+\Psi_1(z_1)=(\bar{z}-\bar{z}_0)\Phi_1'(z-z_0)+\Psi_1(z-z_0)=$$
$$=\bar{z}\Phi_1'(z-z_0)+\Psi_1(z-z_0)-\bar{z}_0\Phi_1'(z-z_0),$$

откуда, принимая во внимание равенство (3),

$$\Psi(z)=\Psi_1(z-z_0)-\bar{z}_0\Phi_1'(z-z_0). \tag{4}$$

Интегрируя по z равенства (3) и (4), получаем также

$$\varphi(z)=\varphi_1(z-z_0),\quad \psi(z)=\psi_1(z-z_0)-\bar{z}_0\varphi_1'(z-z_0); \tag{5}$$

в предыдущих формулах отброшены произвольные постоянные, не влияющие на распределение напряжений.

Мы видим, что функция $\psi(z)$ *не инвариантна* по отношению к переносу начала, т. е. значение для старых координат не получается простой заменой в $\psi_1(z_1)$ переменной z_1 через $z-z_0$. Наоборот, функция $\varphi(z)$ инвариантна по отношению к переносу начала.

Рассмотрим теперь эффект поворота осей без переноса начала. Если новая ось Ox_1 повернута относительно старой Ox на угол α, то

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,$$
$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha,$$

откуда

$$x+iy=(x_1+iy_1)e^{i\alpha},$$

т. е.

$$z=z_1e^{i\alpha},\quad z_1=ze^{-i\alpha}. \tag{6}$$

Ввиду инвариантности суммы X_x+Y_y будем на основании первого из равенств (2) иметь:

$$\operatorname{Re}\Phi(z)=\operatorname{Re}\Phi_1(z_1)=\operatorname{Re}\Phi_1(ze^{-i\alpha}),$$

откуда, отбрасывая чисто мнимое постоянное слагаемое, получаем:

$$\Phi(z)=\Phi_1(ze^{-i\alpha}). \tag{7}$$

Далее, выражение, аналогичное выражению

$$Y_y-X_x+2iX_y,$$

но составленное для новой системы координат, будет на основании формулы (8) § 8 равно

$$(Y_y-X_x+2iX_y)e^{2i\alpha}.$$

Значит, из формулы, аналогичной второй формуле (2), составленной для новой системы, следует:

$$\bar{z}_1\Phi_1'(z_1)+\Psi_1(z_1)=[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]e^{2i\alpha},$$

откуда

$$\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)=[\bar{z}e^{i\alpha}\Phi_1'(ze^{-i\alpha})+\Psi_1(ze^{-i\alpha})]e^{-2i\alpha}.$$

Замечая, далее, что на основании (7) $\Phi'(z)=e^{-i\alpha}\Phi_1'(ze^{-i\alpha})$, получаем:

$$\Psi(z)=\Psi_1(ze^{-i\alpha})e^{-2i\alpha}. \tag{8}$$

Интегрируя обе части равенств (7) и (8) по z и отбрасывая произвольные постоянные, не влияющие на распределение напряжений, получаем еще:

$$\varphi(z) = \varphi_1(ze^{-i\alpha})\,e^{i\alpha}, \quad \psi(z) = \psi_1(ze^{-i\alpha})\,e^{-i\alpha}. \tag{9}$$

Наконец, интегрируя второе из предыдущих равенств, получим:

$$\chi(z) = \chi_1(ze^{-i\alpha}), \tag{10}$$

причем опять отброшена произвольная постоянная.

Замечание. Если бы мы не отбрасывали произвольные постоянные, то, например, вместо формул (9) получили бы:

$$\varphi(z) = \varphi_1(ze^{-i\alpha})\,e^{i\alpha} + Ciz + a + ib, \quad \psi(z) = \psi_1(ze^{-i\alpha})\,e^{-i\alpha} + a' + ib',$$

где C, a, b, a', b' — произвольные действительные постоянные, не влияющие на распределение напряжений. Мы приняли выше, что

$$C = a = b = a' = b' = 0.$$

Благодаря такому подбору постоянных, не только напряжения, соответствующие новым и старым функциям, будут одними и теми же, но и смещения не будут отличаться друг от друга (они могли бы отличаться жестким перемещением). Далее, благодаря тому, что мы отбросили произвольную постоянную в формуле (10), функция напряжений U, составленная при помощи новых и старых функций, будет одна и та же. При другом подборе постоянных это могло бы не иметь места, так как функции напряжений, соответствующие одному и тому же напряженному состоянию, могут отличаться друг от друга произвольным слагаемым вида $Ax + By + C$.

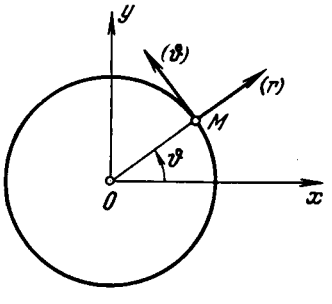


Рис. 17.

§ 39. Полярные координаты. Во многих случаях удобно представлять напряжения и смещения в полярных координатах.

Примем начало O системы Oxy за полюс, а Ox — за полярную ось. Тогда, если r и ϑ суть полярные координаты какой-либо точки $M(x, y)$ на плоскости, будем иметь при обычном правиле отсчета углов:

$$z = x + iy = re^{i\vartheta}. \tag{1}$$

Проведем через точку M две оси: одну (r), являющуюся продолжением радиуса-вектора (в сторону возрастания r), а другую (ϑ) перпендикулярно к первой (в сторону возрастания ϑ) (рис. 17).

Пусть v_r и v_ϑ обозначают проекции смещения в точке M на оси (r) и (ϑ). Эти величины называются компонентами смещения в полярных координатах. На основании известных формул аналитической геометрии

$$u = v_r\cos\vartheta - v_\vartheta\sin\vartheta, \qquad v = v_r\sin\vartheta + v_\vartheta\cos\vartheta,$$

где (u, v) суть компоненты того же смещения в декартовых координатах Oxy, будем, очевидно, иметь:

$$u+iv=(v_r+iv_\vartheta)\,e^{i\vartheta},\quad v_r+iv_\vartheta=(u+iv)\,e^{-i\vartheta}, \tag{2}$$

откуда на основании формулы (1) § 32 следует

$$2\mu\,(v_r+iv_\vartheta)=e^{-i\vartheta}\,[\varkappa\varphi\,(z)-z\overline{\varphi'\,(z)}-\overline{\psi\,(z)}]. \tag{3}$$

Эта формула даст выражения для v_r и v_ϑ в полярных координатах, если в правую часть внести на место z выражение $re^{i\vartheta}$ и отделить действительную и мнимую части.

Компонентами напряжения в полярных координатах называются компоненты, которые определяются совершенно так, как компоненты в декартовых координатах, с той разницей, что роль осей Ox и Oy играют оси (r) и (ϑ), проходящие через точку M, в которой рассматриваются напряжения.

Если временно обозначить ось (r) через Mx', а ось (ϑ) через My', то упомянутые компоненты будут:

$$X'_{x'},\ Y'_{y'},\ X'_{y'}.$$

Для них мы примем обозначения, распространенные в литературе:

$$\widehat{rr}=X'_{x'},\ \widehat{\vartheta\vartheta}=Y'_{y'},\ \widehat{r\vartheta}=X'_{y'}.$$

Таким образом, $\widehat{rr}$ обозначает проекцию на ось (r) напряжения, действующего на площадку, нормальную к (r); $\widehat{\vartheta\vartheta}$ обозначает проекцию на ось (ϑ) напряжения, действующего на площадку, нормальную к (ϑ). Наконец, $\widehat{r\vartheta}$ есть проекция на ось (ϑ) напряжения, действующего на площадку, нормальную к (r), или же проекция на ось (r) напряжения, действующего на площадку, нормальную к (ϑ).

На основании формул (8) § 8 имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{rr}+\widehat{\vartheta\vartheta}=4\operatorname{Re}\Phi(z)=2\,[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}],\\&\widehat{\vartheta\vartheta}-\widehat{rr}+2i\widehat{r\vartheta}=2\,[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]\,e^{2i\vartheta}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти формулы позволяют вычислить компоненты напряжения в полярных координатах.

Из соотношений (4) вычитанием получаем еще одну полезную формулу

$$\widehat{rr}-i\widehat{r\vartheta}=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}-e^{2i\vartheta}\,[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)], \tag{5}$$

дающую напряжения, действующие на дугу окружности $r=\text{const}$ со стороны, противоположной центру.

Формулы эти аналогичны формулам, данным Г. В. Колосовым в несколько ином виде.

§ 40. Основные граничные задачи. Единственность решения. 1. Основными граничными задачами мы будем называть задачи, вполне аналогичные задачам, формулированным в § 20 для случая трех измерений, а именно следующие [1]):

Первая основная задача (задача I). *Найти упругое равновесие при заданных внешних напряжениях, приложенных к границе L области S.*

Вторая основная задача (задача II). *Найти упругое равновесие при заданных смещениях точек границы L.*

Под областью S мы разумеем область рассмотренного в § 35 и § 36 вида, а под L — совокупность контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$ (если область конечна — случай § 35) или контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$ (если область бесконечна — случай § 36).

Во всем дальнейшем (если противное не оговорено) мы будем считать, что все рассматриваемые контуры — *гладкие линии*.

Если область S бесконечна, мы будем считать, что напряжения в бесконечно удаленной части плоскости удовлетворяют условиям § 36, т. е. остаются ограниченными.

Кроме того, в случае задачи I для бесконечной области мы будем считать заданными значения этих напряжений на бесконечности, что на основании сказанного в § 36 сводится к заданию постоянных:

$$\operatorname{Re}\Gamma = B, \qquad \Gamma' = B' + iC'. \tag{1}$$

Так как, далее, постоянная C (напомним, что $\Gamma = B + iC$) не влияет на распределение напряжений, мы будем обычно полагать $C = 0$.

В случае задачи II для бесконечной области мы будем считать, что заданы величины:

$$\Gamma = B + iC, \ \Gamma' = B' + iC', \ X, \ Y, \tag{2}$$

т. е. заданы не только значения напряжений на бесконечности, но и значение вращения (см. § 36), и, кроме того, главный вектор (X, Y) *всех* внешних усилий, приложенных к границе области [2]).

Кроме указанных задач, важную роль играет основная смешанная задача, в которой задаются смещения на одной части границы и напряжения, приложенные к другой части. В случае смешанной задачи для бесконечной области мы будем считать, что, как и в задаче II, дополнительно заданы значения X, Y, Γ, Γ'. В главе VI мы рассмотрим еще некоторые задачи иного типа.

Докажем, что если формулированные выше задачи допускают решение, то оно будет единственным. Для конечной области доказательство вполне аналогично доказательству, приведенному нами в общем случае

[1]) Мы по-прежнему считаем, что объемные силы отсутствуют.

[2]) На первый взгляд последнее задание кажется излишним. Но на самом деле оказывается, что при отсутствии этого задания задача остается неопределенной, т. е. допускает бесчисленное множество решений.

трех измерений; в случае же бесконечной области (такая область в случае трех измерений нами не рассматривалась) оно требует некоторых дополнений.

При доказательстве мы будем считать, что компоненты напряжений и смещений, соответствующих рассматриваемым решениям, непрерывны вплоть до границы L (см. также замечание в конце п. 3 настоящего параграфа).

2. Начнем со случая конечной области (односвязной или многосвязной). Рассмотрим интеграл (ср. § 20)

$$J = \int_L (X_n u + Y_n v)\, ds,$$

где

$$X_n = X_x \cos(n,\ x) + Y_y \cos(n,\ y),\ Y_n = Y_x \cos(n,\ x) + Y_y \cos(n,\ y) \quad (3)$$

обозначают компоненты напряжения, приложенного к границе L, а n — внешнюю нормаль к ней.

Применяя формулу Остроградского — Грина, получаем:

$$J = \int_L [(X_x u + Y_x v)\cos(n,\ x) + (X_y u + Y_y v)\cos(n,\ y)]\, ds =$$

$$= \iint_S \left\{ u\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$$

в силу уравнений (1) § 30, что согласно нашим обозначениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2e_{xy}$$

и что, наконец,

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \quad X_y = 2\mu e_{xy},$$

будем иметь окончательно:

$$\int_L (X_n u + Y_n v)\, ds = \iint_S \{\lambda\theta^2 + 2\mu\,(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + 2e_{xy}^2)\}\, dx\, dy. \quad (4)$$

Если u, v, X_n, Y_n, e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} относятся к «разности» двух решений одной из задач I, II или смешанной, то выражение $X_n u + Y_n v$ равно нулю на границе L (ср. § 20). Отсюда заключаем, что двойной интеграл в правой части равен нулю. Но так как подынтегральная функция представляет собой неособенную положительную квадратичную форму, то это может быть только в том случае, если

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{xy} = 0.$$

Значит, и X_x, Y_y, X_y, составленные для «разности» двух решений, равны нулю, т. е. оба решения тождественны в том смысле, что дают одинаковые напряжения и деформации.

Смещения же могут отличаться друг от друга выражениями вида

$$u_0 = -\varepsilon y + \alpha, \quad v_0 = \varepsilon x + \beta,$$

соответствующими произвольному жесткому перемещению тела в плоскости Oxy. В случае задачи II и смешанной и этой разницы быть не может, так как смещения в обоих решениях должны быть одинаковы вдоль всего контура или части его.

3. Обратимся теперь к случаю бесконечной области. Предположим, как и выше, что задачи I и II или смешанная допускают два решения, и составим разность этих двух предполагаемых решений. Пусть u, v, X_n, Y_n и т. д. относятся к этой разности. В случае задачи I будем иметь $X_n = Y_n = 0$ на границе. Значит, главный вектор (X, Y) всех усилий, приложенных к границе, равен нулю. В случае же задачи II или смешанной этот вектор считается по условию заранее заданным для обоих решений, поэтому он и здесь будет равен нулю для разности двух решений.

Итак, во всех рассматриваемых случаях $X = Y = 0$. Кроме того, величины Г, Г′, соответствующие разности двух решений, равны нулю, так как по заданию они одинаковы для обоих решений, если считать в случае задачи I, что мнимая часть Г равна нулю, на что мы имеем право, так как она не влияет на напряжения.

Применим теперь формулу (4) к конечной области, ограниченной контурами $L_1, \ldots, L_m$ и окружностью L_R радиуса R с центром в O, охватывающей все контуры $L_1, \ldots, L_m$.

Докажем, что

$$\int_{L_R} (X_n u + Y_n v)\, ds \tag{5}$$

стремится к нулю, когда радиус R окружности L_R стремится к бесконечности.

Действительно, по формулам (4), (5), (7) § 36, в которых надо положить

$$X = Y = \Gamma = \Gamma' = 0,$$

при $|z| \geqslant R$ будем иметь:

$$\varphi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots, \quad \psi(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \ldots,$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = -\frac{a_1}{z^2} + \ldots, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = -\frac{a_1'}{z^2} + \ldots$$

Формула

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

показывает, что при этих условиях u, v остаются ограниченными. Далее, формулы

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad Y_y - X_x + 2iX_y = [z\bar{\Phi}'(z) + \Psi(z)]$$

показывают, что величины X_x, Y_y, X_y при возрастании $|z|$ не только стремятся к нулю, но будут порядка $\left|\frac{1}{z^2}\right|$ (по меньшей мере). Значит, выражение $X_n u + Y_n v$ будет на окружности L_R порядка $\frac{1}{R^2}$. Так как, с другой стороны, путь интегрирования в интеграле (5) равен по длине $2\pi R$, то интеграл (5) будет порядка $\frac{1}{R}$ и, значит, будет стремиться к нулю при $R \to \infty$.

Таким образом, если применить формулу (4) сперва к области, заключенной между L и L_R, и затем увеличивать R беспредельно, то интеграл в левой части будет стремиться к интегралу, взятому по границе L, и, значит, интеграл правой части будет также стремиться к пределу, который по обычному определению будет представлять собой интеграл, распространенный на бесконечную область S.

Итак, формула (4) справедлива для всей бесконечной области S, и, следовательно, наши заключения о единственности решения остаются в силе и для этого случая.

З а м е ч а н и е. В пп. 2 и 3 мы предполагали при доказательстве, что компоненты смещений и напряжений непрерывны вплоть до границы. Это предположение можно заменить значительно более общим. Мы ограничимся здесь следующим замечанием.

Приведенное доказательство останется, очевидно, в силе, если считать, что компоненты смещений и напряжений, соответствующие разности рассматриваемых решений, непрерывно продолжимы на все точки границы, за исключением конечного числа точек c_k, вблизи которых они ведут себя так, что интегралы

$$\int_{\gamma_k} (X_n u + Y_n v)\, ds,$$

взятые по принадлежащим области S дугам γ_k бесконечно малых окружностей, описанных из точек c_k, как из центров, стремятся к нулю вместе с радиусами окружностей.

Ниже, в § 42, теоремы единственности для первой и второй основных задач будут доказаны при несколько иных, чем в настоящем параграфе, предположениях.

4. Относительно вопроса существования решения заметим пока следующее. С точки зрения математической, первая основная задача вполне эквивалентна, по крайней мере для конечных односвязных областей [1]), *задаче равновесия упругой тонкой пластинки, заделанной по краям*, при наличии нагрузки, нормальной к ее плоскости. Действительно, эта последняя задача может быть сведена к нахождению бигармонической

[1]) О случае многосвязных областей будет сказано в § 41а, п. 1.

функции U по заданным значениям ее частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

на границе области [1]).

К такой же математической задаче может быть сведена и наша первая основная задача (см. следующий параграф).

Задачу нахождения бигармонической функции по заданным значениям производных $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ на контуре мы будем называть *основной бигармонической задачей*. Эта задача (или эквивалентная ей задача равновесия пластинки, заделанной по краям) была предметом многочисленных исследований, особенно начиная с 1907 г., когда она была объявлена предметом премии Парижской Академии наук. Премия была получена Адамаром (Hadamard [1]), Лауричелла (Lauricella [3]), Корном (Korn [4]) и Боджо (Boggio). Указанными авторами вопрос был вполне решен для случая *конечной* области, ограниченной простым замкнутым контуром, удовлетворяющим некоторым условиям общего характера [2]).

Применение функций комплексного переменного дало за последнее время возможность получить решение как первой, так и второй основных задач для областей, ограниченных произвольным числом замкнутых контуров. Решена также основная смешанная задача и ряд других важных общих задач. Некоторые из упомянутых общих результатов будут изложены в главе V; о других будут даны краткие указания.

Здесь же отметим только, что в случае конечной области первая основная задача имеет, разумеется, решение только тогда, когда главный вектор и главный момент заданных внешних усилий, приложенных к границе L области, равны нулю.

Но в случае бесконечной области решение существует и тогда, когда условие это не соблюдено, даже если потребовать, чтобы напряжения на бесконечности равнялись нулю. Это объясняется тем, что если мысленно выделить часть тела, заключенную между границей L области S и окружностью, охватывающей эту границу, то хотя внешние напряжения, действующие на окружность, и стремятся к нулю при беспредель-

[1]) См. один из курсов, названных в списке литературы. Обычно задачу сводят к определению U по заданным граничным значениям U и нормальной производной dU/dn. Но, очевидно, по этим заданиям можно сразу определить граничные значения

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Имеем, действительно:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{ds}\cos(t, x) + \frac{dU}{dn}\cos(n, x), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{ds}\cos(t, y) + \frac{dU}{dn}\cos(n, y),$$

где s обозначает дугу контура, а t — направление касательной. Таким образом, приходим к задаче, указанной в тексте.

[2]) В весьма общей постановке основная бигармоническая задача решена С. Л. Соболевым [1].

ном возрастании радиуса, но в совокупности они могут дать конечные главный вектор и главный момент, ибо они распределены вдоль окружности, длина которой возрастает беспредельно. Главные вектор и момент внешних усилий, приложенных к совокупности границы L и окружности, всегда равны нулю.

Возвращаясь к упомянутым общим решениям основных задач, заметим, что именно в силу своей общности эти решения часто оставляют многого желать в смысле практических применений. Поэтому приходится искать частные методы решения, дающие возможность практически вычислить решения для более или менее обширных классов областей, важных с точки зрения приложений. Таким методам посвящена бóльшая часть глав III — VI этой книги.

§ 41. Приведение основных задач к задачам теории функций комплексного переменного. 1. Так как напряженное состояние и смещения могут быть выражены через две функции комплексного переменного $\varphi(z)$, $\psi(z)$, то формулированные в предыдущем параграфе задачи сводятся к разысканию этих функций по некоторым условиям, которым они должны удовлетворять на границе области, занятой телом.

Будем считать, что, как в предыдущем параграфе, компоненты смещений и напряжений непрерывны вплоть до границы L области S. Точки границы L, а также аффиксы этих точек, мы будем обозначать обычно через t, так что $t = x + iy$, где x и y — координаты рассматриваемой точки границы. Часто, однако, там, где это не может вызвать неудобства,— мы будем обозначать точки границы так же, как и прочие точки плоскости, т. е. обычно через z.

Пусть $f(t)$— некоторая (действительная или комплексная) функция точки t границы L. Так как положение точки t на каждом из контуров, составляющих L, вполне определяется дугой s, отсчитываемой в определенном направлении по данному контуру от некоторой фиксированной его точки, то на каждом из этих контуров $f(t)$ представляет собой функцию действительной переменной s; поэтому мы будем иногда писать $f(s)$ вместо $f(t)$, не вводя нового символа вместо f. Далее, интегралы вида

$$\int_{t_0 t} f(s)\,ds,$$

взятые по некоторой дуге $t_0 t$ контура, от точки t_0 до точки t, мы будем обозначать также через

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\,ds,$$

как иногда поступали и раньше.

2. Для большей ясности мы начнем рассмотрение со случая, когда S — *конечная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром* L.

В случае задачи II граничное условие выразится, очевидно, следующим образом:

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=2\mu(g_1+ig_2) \text{ на } L, \tag{1}$$

где $g_1=g_1(s)=g_1(t)$ и $g_2=g_2(s)=g_2(t)$ — значения заданных на L компонент смещения. Они представляют собой заданные и в силу принятых выше условий непрерывные функции точки t контура L области S или соответствующей дуги s этого контура. Положительное направление на L может быть выбрано произвольно.

При этом, разумеется, запись (1) *следует понимать условно.* А именно, под левой частью равенства (1) следует подразумевать граничное значение выражения

$$\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},$$

когда z, оставаясь внутри S, стремится к точке t контура L; это граничное значение существует, так как предыдущее выражение равно $2\mu(u+iv)$, а u и v, по предположению, непрерывны вплоть до контура.

В случае задачи I граничное условие можно выразить двумя различными способами, которыми следует пользоваться, смотря по удобству. Мы укажем пока только один из них; второй будет указан в п. 6 настоящего параграфа.

Способ, на котором мы сейчас остановимся, заключается в следующем. Пусть $X_n(t)$, $Y_n(t)$ или, при иных обозначениях, $X_n(s)$, $Y_n(s)$ — заданные значения компонент внешнего напряжения в данной точке t контура; через s обозначена, как всегда, дуга контура, соответствующая точке t, отсчитываемая в положительном направлении от некоторой фиксированной точки t_0. За положительное направление на L мы примем теперь то, которое оставляет область S слева.

На основании формулы (3) § 33 имеем:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1+if_2+\text{const}, \tag{2}$$

где положено:

$$f_1+if_2=f_1(t)+if_2(t)=f_1(s)+if_2(s)=$$

$$=i\int_{t_0}^{t}(X_n+iY_n)\,ds=i\int_{0}^{s}(X_n+iY_n)\,ds. \tag{3}$$

Выражение в левой части формулы (2) следует понимать как граничное значение выражения

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

при стремлении z к точке t контура L. Это граничное значение, как легко видеть, существует вследствие принятого нами условия относительно непрерывности компонент напряжения вплоть до контура L. Заметим еще, что формулу (2) мы написали, опираясь на формулу (3) § 33, которая была выведена в предположении, что дуга, обозначенная в § 33 через AB,

целиком расположена в S. Однако, как легко видеть, в нашем случае последняя формула применима и в случае, когда дуга AB принадлежит границе L; это вытекает из того же условия непрерывности компонент напряжения вплоть до границы.

Таким образом, граничное условие задачи I выражается формулой (2), понимаемой в указанном выше смысле. При этом функции $f_1 = f_1(t)$ и $f_2 = f_2(t)$ являются заданными на L действительными функциями, определяемыми формулой (3).

Заметим теперь следующее. Как мы знаем из предыдущего параграфа, задание $X_n(s)$, $Y_n(s)$ вполне определяет напряженное состояние тела. Но при этом функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ оказываются не вполне определенными; действительно, мы видели в § 34, что замена

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(z) \text{ на } \varphi(z)+Ciz+\gamma,\\ &\psi(z) \text{ на } \psi(z)+\gamma', \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

где C — действительная, а $\gamma = \alpha + i\beta$ и $\gamma' = \alpha' + i\beta'$ — комплексные постоянные, не изменяет напряженного состояния и что, обратно, всякая замена, не изменяющая напряжений, должна иметь вид (А). При этом (§ 34)

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \text{ заменяется на } \varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}+\gamma+\overline{\gamma'}. \qquad (Б)$$

Отсюда следует, что путем подходящего выбора постоянных γ и γ' можно придать любое значение постоянной, фигурирующей в условии (2). Таким образом, эту постоянную можно зафиксировать произвольным образом.

В случае задачи II граничные задания вполне определяют смещения во всех точках тела (§ 40). Поэтому мы можем произвольно зафиксировать заранее только одну из величин $\varphi(0)$ или $\psi(0)$ на основании сказанного в § 34 (мы считаем, что начало координат находится в области S). Мы будем обычно полагать в зависимости от удобства:

$$\varphi(0)=0 \quad \text{или} \quad \psi(0)=0. \qquad (4)$$

В случае задачи I, когда граничные условия вполне определяют напряженное состояние тела (но не смещения)[1]), можно (§ 34) произвольно зафиксировать обе величины $\varphi(0)$, $\psi(0)$ и, кроме того, мнимую часть величины $\varphi'(0)$.

Но если мы определенным образом зафиксируем постоянную, фигурирующую в правой части формулы (2), то из двух величин $\varphi(0)$, $\psi(0)$ можно произвольно фиксировать только одну[2]).

---

[1]) Смещения же определяются с точностью до жесткого перемещения тела.

[2]) Если φ и ψ — какие-либо функции, решающие задачу I, то, произведя замену (А), получим функции, решающие ту же задачу. Для того, чтобы было удовлетворено условие (2) при определенном, заранее заданном значении постоянной, фигурирующей в правой части, величине $\gamma + \bar{\gamma}'$ надо придать вполне определенное значение, как это следует из (Б). Если, например, задать γ, то это вполне определит γ'.

Поэтому в случае задачи I мы можем считать, например,

$$\varphi(0)=0 \text{ или } \psi(0)=0; \text{ мнимая часть } \varphi'(0)=0. \tag{5}$$

Дополнительные условия (4), (5) вполне фиксируют функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, если зафиксирована в случае задачи I постоянная в правой части формулы (2).

Относительно задачи I добавим еще следующее. Как мы знаем, эта задача может иметь решение лишь при условии, что главный вектор и главный момент внешних усилий, приложенных к границе области S [1]), равны нулю.

Условие равенства нулю главного вектора можно, очевидно, выразить равенством

$$\int_L (X_n + iY_n)\,ds = 0. \tag{6}$$

На основании формулы (3) это условие, т. е. *условие равенства нулю главного вектора внешних усилий, эквивалентно условию непрерывности функции* $f_1 + if_2$, *заданной на* L. Действительно, при соблюдении условия (6) функция $f_1 + if_2$ точки t контура L возвращается, очевидно, к своему первоначальному значению, когда t описывает весь контур, и обратно.

Посмотрим теперь, как выразится условие равенства нулю главного момента через заданные на L функции f_1 и f_2.

Условие равенства нулю главного момента относительно, скажем, начала координат, выражается формулой

$$\int_L (xY_n - yX_n)\,ds = 0. \tag{7}$$

Но на основании формулы (3)

$$X_n\,ds = df_2, \qquad Y_n\,ds = -df_1.$$

Следовательно, применяя интегрирование по частям, получаем:

$$\int_L (xY_n - yX_n)\,ds = -\int_L (x\,df_1 + y\,df_2) = -[xf_1 + yf_2]_L + \int_L (f_1\,dx + f_2\,dy),$$

где символом $[\ ]_L$ обозначено приращение выражения в скобках при обходе контура L. Если главный вектор усилий, приложенных к L, равен нулю, то функции f_1 и f_2 непрерывны на L, и поэтому

$$[xf_1 + yf_2]_L = 0.$$

Таким образом, *при условии равенства нулю главного вектора, условие равенства нулю главного момента выразится формулой*

$$\int_L (f_1\,dx + f_2\,dy) = 0. \tag{8}$$

3. Рассмотрим теперь случай *бесконечной области* S, *ограниченной простым замкнутым контуром* L (бесконечная плоскость с отверстием).

[1]) Напомним, что мы рассматриваем здесь конечную область.

И в этом случае граничные условия задач II и I запишутся соответственно в виде (1) и (2). В формуле (2) и в нашем случае функция $f_1 + if_2$ определяется на контуре L формулой (3) при прежнем условии относительно положительного направления обхода контура, т. е. условии, чтобы область S оставалась слева [1]).

Однако между рассматриваемым здесь случаем и предыдущим имеется и довольно существенная разница. Дело в том, что в случае конечной односвязной области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны (и, следовательно, однозначны) во всей области, тогда как в нашем случае это, вообще говоря, не имеет места. А именно, на основании формул § 36, считая для определенности, что начало координат находится внутри контура L (т. е. вне области S), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где φ_0, ψ_0 голоморфны в S, *включая бесконечно удаленную точку.*

Напомним, что X и Y обозначают компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к L, а Γ и Γ' — постоянные (вообще комплексные), определяющие распределение напряжений на бесконечности, а также вращение на бесконечности.

Постоянные X и Y должны считаться заданными: в случае задачи II — по условию (§ 40, п. 1), в случае же задачи I — вследствие того, что они могут быть вычислены по заданным внешним напряжениям, а именно по формуле

$$X + iY = \int_L (X_n + iY_n)\, ds. \tag{10}$$

Далее, по условию, принятому в § 40 (п. 1), считаются заданными: в случае задачи II — постоянные Γ и Γ' и в случае задачи I — постоянные $\mathrm{Re}\,\Gamma$ и Γ'; мнимая часть Γ на распределение напряжений не влияет.

Пользуясь формулами (9), мы можем привести рассматриваемые задачи к определению голоморфных (и, следовательно, однозначных) в S функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$. А именно, граничное условие задачи II на основании формул (1) и (9) можно записать так:

$$\varkappa\varphi_0(t) - t\,\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\mu(g_1^0 + ig_2^0) \text{ на } L, \tag{11}$$

где положено:

$$2\mu(g_1^0 + ig_2^0) = 2\mu(g_1 + ig_2) + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(t\bar{t}) - \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{t}{\bar{t}} - (\varkappa\Gamma - \bar{\Gamma})\,t + \bar{\Gamma}'\bar{t}. \tag{12}$$

[1]) Значит, в нашем случае контур L обходится в положительном направлении по часовой стрелке, тогда как в случае, рассмотренном в п. 2,— против часовой стрелки.

Правая часть формулы (11) представляет собой однозначную, непрерывную на L функцию, так как этим свойством обладают все члены правой части формулы (12), в частности функция

$$\ln(t\bar{t}) = 2\ln|t|.$$

В случае задачи I будем иметь аналогично:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_1^0 + if_2^0 + \text{const на } L, \tag{13}$$

где положено:

$$f_1^0 + if_2^0 = f_1 + if_2 + \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}(\ln t - \varkappa\ln\bar{t}) + \\ + \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{t}{\bar{t}} - (\Gamma+\bar{\Gamma})t - \overline{\Gamma'}\bar{t}. \tag{14}$$

Предыдущая формула показывает, что правая часть формулы (13) представляет собой однозначную и непрерывную функцию точки t контура. В самом деле, формула (3) показывает, что когда точка t контура L описывает весь этот контур в положительном направлении, выражение $f_1 + if_2$ получает приращение, равное

$$i\int_L (X_n + iY_n)\,ds = i(X+iY);$$

но такое же приращение с обратным знаком получает при этом выражение [1])

$$\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}(\ln t - \varkappa\ln\bar{t}),$$

и, следовательно, выражение $f_1^0 + if_2^0$ возвращается к первоначальному значению.

Мы видим, кроме того, что правая часть формулы (14), как и следовало ожидать, фактически не содержит мнимой части постоянной Γ (ибо $\Gamma + \bar{\Gamma} = 2\,\mathrm{Re}\,\Gamma$), так как эта мнимая часть не влияет на распределение напряжений.

В случае задачи II мы можем считать (по произволу):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(\infty) &= 0\\ \psi_0(\infty) &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

или

ибо, как мы знаем из § 34, мы имеем право прибавить к одной из функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ произвольную постоянную, не изменяя смещений.

В случае же задачи I при заранее зафиксированной произвольной постоянной в правой части формулы (13) мы можем считать (ср. случай конечной области):

$$\varphi_0(\infty) = 0 \quad \text{или} \quad \psi_0(\infty) = 0; \quad \text{мнимая часть } \Gamma = 0. \tag{16}$$

[1]) При обходе контура L в положительном направлении (т. е. в нашем случае по часовой стрелке) $\ln t$ получает приращение $(-2\pi i)$, а $\ln\bar{t}$ — приращение $(+2\pi i)$.

Дополнительные условия (15) или (16) вполне фиксируют искомые функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, если в случае задачи I зафиксирована постоянная в правой части формулы (13).

4. Перейдем теперь к *общему случаю*, когда граница состоит из нескольких контуров: $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$ (конечная область) или $L_1, L_2, \ldots, L_m$ (бесконечная область), и начнем со случая конечной области.

В рассматриваемом случае, так же как в случае предыдущего пункта, искомые функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, вообще говоря, многозначны. А именно, на основании формул (10), (11) § 35 имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi_0(z), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные (и, следовательно, однозначные) в области S, а z_k — произвольные фиксированные точки, расположенные внутри контуров L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$). Через (X_k, Y_k) обозначен главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_k.

В случае задачи I величины X_k, Y_k известны заранее, так как они могут быть непосредственно вычислены по заданным внешним напряжениям.

В случае задачи II эти величины заранее не известны и подлежат определению вместе с функциями $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$. Граничное условие этой задачи дается формулой (1), где теперь под L следует подразумевать совокупность контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$.

Граничное условие задачи I в нашем случае можно, очевидно, записать так:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1+if_2+C_k \quad \text{на} \quad L_k \quad (k=1, 2, \ldots, m+1), \tag{18}$$

где C_k — некоторые постоянные, а

$$f_1+if_2=i\int_{t_k}^{t}(X_n+iY_n)\,ds \quad \text{на} \quad L_k; \tag{19}$$

в последней формуле t_k обозначает точку, произвольно зафиксированную на L_k, а положительным направлением отсчета дуг считается то, которое оставляет область S слева.

Постоянные C_k не известны заранее, но одну из них, например C_{m+1}, можно зафиксировать произвольно, так как выражение $\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$ определяется при заданных напряжениях с точностью до произвольного постоянного слагаемого (см. п. 2). Остальные же постоянные: $C_1, C_2, \ldots, C_m$ являются неизвестными и подлежат определению вместе с функциями $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$.

Граничное условие (18) может быть заменено следующим, путем переноса в правую часть членов, соответствующих логарифмическим членам формул (17):

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f_1^0+if_2^0+C_k \quad \text{на} \quad L_k \quad (k=1, 2, \ldots, m+1), \tag{20}$$

где $f_1^0+if_2^0$ представляет собой функцию, заданную на контурах $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$, однозначную и непрерывную на каждом из этих контуров. Явного выражения для этой функции мы здесь выписывать не будем [1]). Заметим, что однозначность и непрерывность выражения $f_1^0+if_2^0$ на внешнем контуре L_{m+1} является следствием условия (которое мы считаем выполненным), что главный вектор всех внешних усилий, приложенных к границе L, равен нулю; мы предоставляем проверить это читателю.

Искомые функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ могут быть вполне зафиксированы при помощи дополнительных условий, вполне аналогичных тем, которые были указаны в п. 2. А именно, принимая, что начало координат расположено в области S, мы можем в случае задачи II считать:

$$\varphi_0(0)=0 \quad \text{или} \quad \psi_0(0)=0, \tag{21}$$

а в случае задачи I, считая постоянную C_{m+1} зафиксированной,

$$\varphi_0(0)=0 \quad \text{или} \quad \psi_0(0)=0; \text{ мнимая часть } \varphi_0'(0)=0. \tag{22}$$

Случай бесконечной области может быть рассмотрен совершенно аналогично тому, что было сделано в двух предыдущих пунктах, и поэтому мы на нем останавливаться здесь не будем.

5. Граничные условия основной смешанной задачи могут быть также легко представлены аналогично предыдущему, а именно: мы будем иметь условия вида (1) на тех частях границы, где заданы смещения, и условия вида (2) на тех частях, где заданы напряжения. Подробнее на этом мы останавливаться здесь не будем.

6. В заключение укажем еще один вид, в котором можно представить граничное условие задачи I. Будем считать заданными нормальную и касательную компоненты N и T внешнего напряжения, действующего на границу L [2]). Мы будем считать, что N представляет собой проекцию напряжения, приложенного к дуге границы, на *внешнюю* нормаль n, а T — проекцию того же напряжения на касательную к границе, направленную *влево*, если смотреть вдоль n.

Тогда мы будем иметь

$$2(N-iT)=X_x+Y_y-(Y_y-X_x+2iX_y)e^{2i\alpha} \quad \text{на} \quad L,$$

где α — угол, который нормаль n составляет с осью Ox и который отсчитывается от этой последней. Чтобы получить эту формулу, достаточно принять временно нормаль n за ось $O'x'$, касательную — за ось $O'y'$.

[1]) Это выражение будет приведено в § 98.

[2]) Если заданы X_n, Y_n, то тем самым будут заданы N, T, и обратно.

Тогда

$$N = X'_{x'}, \quad T = X'_{y'},$$

и наша формула совпадает с формулой (8′) § 8.

Внося в предыдущую формулу выражения (9) и (10) § 32, получаем

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)\} = N - iT \quad \text{на} \quad L, \tag{23}$$

где в правой части фигурируют заданные на границе функции.

Этот вид граничного условия, которым главным образом пользовался Г. В. Колосов [1, 2], часто более удобен, чем тот вид, который был указан выше, потому что функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ однозначны также в случае многосвязной области. Но в некоторых случаях указанное в предыдущих пунктах представление граничного условия имеет большие преимущества. Одно из главных преимуществ то, что при таком представлении граничное условие первой основной задачи очень сходно с граничным условием второй основной задачи, вследствие чего очень сходны и методы решения этих задач.

Кроме того, в случае конечной односвязной области граничное условие (2) в таком же точно виде применяется к задаче о заделанной по краям пластинке («основная бигармоническая задача»). В случае многосвязной области между этими задачами имеется некоторая разница, о чем будет сказано в следующем параграфе (п. 1).

§ 41а. Дополнительные замечания. 1. Разница, о которой только что говорилось, между основной бигармонической задачей и первой основной задачей плоской теории упругости в случае многосвязной области, не очень существенна и заключается в следующем.

Будем пока иметь в виду конечную область. В основной бигармонической задаче выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = f_1 + if_2$$

задается на каждом из контуров L_k *вполне*; в случае же первой основной задачи плоской теории упругости это выражение задается лишь с точностью до (не известных заранее) постоянных C_k на контурах L_k, и только одна из этих постоянных может быть зафиксирована произвольно.

Кроме того, имеется разница в условиях, налагаемых на искомую функцию $U(x, y)$: в основной бигармонической задаче требуется обычно, чтобы частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

были однозначны в S или даже чтобы сама функция U была однозначна (например, когда речь идет о равновесии пластинки, заделанной по краям); в случае же первой основной задачи плоской теории упругости от функции $U(x, y)$ требуется, чтобы были однозначны соответствующие ей

компоненты напряжения и смещения. В случае односвязной области и те и другие условия эквивалентны однозначности самой функции $U(x, y)$.

В случае бесконечной области между двумя рассматриваемыми задачами имеется еще разница в условиях, обычно налагаемых на поведение решений в окрестности бесконечно удаленной точки.

2. Несмотря на то, что решение граничных задач представляет в общем случае большие практические трудности, в некоторых частных случаях очень легко угадать решение по самому виду граничного условия.

Например, предположим, что граница конечного (вообще многосвязного) тела подвержена равномерно распределенному нормальному растягивающему усилию P (при $P < 0$ будем иметь не растяжение, а давление).

Обозначая через n внешнюю нормаль к границе, получаем:

$$X_n + iY_n = P[\cos(n, x) + i\cos(n, y)] = -Pi\left[\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}\right] = -Pi\frac{dt}{ds},$$

откуда следует на основании формулы (19) § 41, что на каждом из контуров L_k, составляющих границу, $f_1 + if_2 = Pt + \text{const}$. Поэтому граничное условие (18) § 41 запишется так:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = Pt + C_k \quad \text{на} \quad L_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m+1),$$

откуда сразу видно, что этому условию можно удовлетворить, полагая:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}Pz, \quad \psi(z) = 0, \quad C_1 = C_2 = \ldots = C_{m+1} = 0;$$

на основании теоремы единственности все другие решения могут отличаться от предыдущего лишь жестким перемещением.

Компоненты соответствующего напряжения определяются формулами (вытекающими из формул § 32):

$$X_x = Y_y = P, \quad X_y = 0.$$

Отметим еще любопытные случаи, когда граничные задачи решаются непосредственно, почти без всяких вычислений.

Рассмотрим сперва первую основную задачу для такого же тела, что и выше, и предположим, что функция $f_1 - if_2$ точки t границы L, получаемая переходом к сопряженным значениям в обеих частях формулы (19) § 41, совпадает с точностью до постоянных слагаемых на каждом из контуров L_k, с граничным значением некоторой функции $F(z)$, голоморфной в S. Тогда граничное условие (18) § 41 запишется так (если перейти к сопряженным значениям):

$$\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = F(t) + C_k \quad \text{на} \quad L_k,$$

и, очевидно, мы получим решение задачи, если положим:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = F(z), \quad C_1 = C_2 = \ldots = C_{m+1} = 0.$$

Из теоремы единственности вытекает, что задача других решений иметь не может, кроме решений, отличающихся от предыдущего жестким перемещением.

Совершенно аналогичное замечание можно сделать относительно второй основной задачи.

Аналогичные замечания относятся и к случаю бесконечной области. Рассмотрим в качестве простейшего примера произвольное (односвязное или многосвязное) тело и предположим, что $F(z) = Qz$, где Q — действительная постоянная. Это соответствует случаю, когда

$$X_n - iY_n = Qi\frac{dt}{ds} = Qi\left[\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}\right],$$

т. е.

$$X_n = -Q\cos(n, x), \qquad Y_n = Q\cos(n, y).$$

Таким образом, к границе тела приложены равномерно распределенные внешние напряжения, равные по величине Q, но направленные не по внешним нормалям, а по направлениям, представляющим собой отражения нормалей в оси Oy.

Решение задачи в этом случае имеет вид

$$\varphi(z) = 0, \qquad \psi(z) = Qz.$$

Для компонент напряжения получим по формулам § 32:

$$X_x = -Q, \quad Y_y = Q, \quad X_y = 0.$$

Если, например, рассматриваемая область есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, то мы имеем решение задачи для случая, когда на стороны, параллельные оси Ox, действуют растягивающие, равномерно распределенные усилия, а на стороны, параллельные оси Oy, — такие же сжимающие усилия.

§ 42. Понятие регулярного решения. Единственность регулярного решения. 1. В § 40 при постановке основных граничных задач и при доказательстве единственности решения мы предполагали, что компоненты u, v смещения и компоненты X_x, Y_y, X_y напряжения непрерывны вплоть до границы L области S. То же предположение мы сделали в § 41.

Условие непрерывности вплоть до границы компонент смещения эквивалентно условию непрерывности вплоть до границы выражения

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{1}$$

Из условия же непрерывности вплоть до границы компонент напряжения следует непрерывность вплоть до границы выражения

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

но не обратно: выражение (2) может быть, очевидно, непрерывно вплоть до границы без того, чтобы этим свойством обладали компоненты напряжения.

Между тем постановка граничных задач в том виде, как это сделано в § 41, кроме п. 6, требует лишь непрерывности вплоть до границы выражений (1) и (2), без обязательного требования непрерывности компонент напряжения.

Поэтому представляется естественным заменить требование непрерывности компонент напряжения менее ограничительным требованием непрерывности вплоть до границы выражения (2),— иными словами, требованием, чтобы выражение (2) было непрерывно продолжимо на все точки границы L (§ 29, п. 3). Такая постановка вопроса представляется наиболее естественной и с механической точки зрения.

Однако при применении методов эффективного решения граничных задач, которыми мы будем пользоваться ниже, целесообразно, в целях значительного упрощения рассуждений, наложить на искомые функции несколько более ограничительное условие, заключающееся в следующем требовании: *функции* $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ *и* $\psi(z)$ *непрерывно продолжимы на все точки границы* L *области* S.

Решение, обладающее этим свойством, мы будем называть *регулярным*.

Если решение регулярно в только что указанном смысле, то выражения (1) и (2), очевидно, непрерывно продолжимы на L. Обратное же, вообще говоря, несправедливо: из непрерывной продолжимости на L выражений (1) и (2) следует, очевидно, непрерывная продолжимость функции $\varphi(z)$ и комбинации $z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ или, что сводится к тому же, комбинации $\bar{z}\,\varphi'(z) + \psi(z)$, но не функций $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ в отдельности [1]).

В дальнейшем (если противное не оговорено), мы будем считать рассматриваемые решения регулярными.

2. В § 40 были доказаны теоремы единственности решений основных граничных задач в предположении, что компоненты смещения и напряжения непрерывны вплоть до границы.

Легко доказать теоремы единственности для первой и второй основных задач в предположении, что рассматриваемые *решения регулярны* [2]). При доказательстве мы будем считать, что рассматриваемая область S конечна, так как распространение доказательства на случай бесконечной области никаких затруднений не представляет.

Начнем с первой основной задачи. Если через $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ мы обозначим функции, соответствующие разности двух предполагаемых решений, то эти функции будут голоморфны во всей области S, так как при вычитании логарифмические члены формул (17) § 41 сократятся. Граничные

---

[1]) Заметим, что условие регулярности решения с известной точки зрения является гораздо менее ограничительным, чем условие непрерывности вплоть до границы компонент напряжения, но не вытекает из последнего, так же как из регулярности решения не вытекает непрерывность вплоть до границы компонент напряжения.

[2]) Ниже воспроизводится доказательство, данное в моей работе [11]. При несколько более общих условиях теорема единственности для основной бигармонической задачи доказана С. Г. Михлиным [6]. Теорема единственности для смешанной задачи при аналогичных условиях доказана Г. Ф. Манджавидзе [2].

условия для этих функций запишутся так:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=C_k \quad \text{на } L_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1). \tag{3}$$

Здесь, как всегда, $t = x + iy$ обозначает точку границы; C_k — некоторые (неизвестные заранее) постоянные. Под

$$\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\quad \varphi(t),\quad \varphi'(t),\quad \psi(t)$$

следует подразумевать соответствующие граничные значения.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int_L\left\{\left(Q\frac{\partial U}{\partial x}-P\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx+\left(P\frac{\partial U}{\partial x}+Q\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy\right\}, \tag{4}$$

взятый в положительном направлении по всей границе области. Через P и Q обозначены действительная и мнимая части функции $4\varphi'(z)$, так что

$$4\varphi'(z)=P+iQ;$$

вспомним также, что $P = \Delta U$ (§ 30, п. 3). Но в силу условий (3)

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\alpha_k,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\beta_k \quad \text{на } L_k,$$

где α_k, β_k — некоторые (действительные) постоянные. Поэтому

$$J=\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k\int_{L_k}(Q\,dx+P\,dy)-\sum_{k=1}^{m+1}\beta_k\int_{L_k}(P\,dx-Q\,dy).$$

Но

$$4\varphi(z)=\int_{z_0}^{z}(P+iQ)\,dz+\text{const}=\int_{z_0}^{z}(P\,dx-Q\,dy)+i\int_{z_0}^{z}(Q\,dx+P\,dy)+\text{const},$$

где интегралы берутся по некоторому пути, заключенному в S, соединяющему произвольную фиксированную точку z_0 с переменной точкой z. Так как функция $\varphi(z)$ голоморфна (и, следовательно, однозначна) в S, то, как легко видеть на основании предыдущей формулы

$$\int_{L_k}(P\,dx-Q\,dy)=\int_{L_k}(Q\,dx+P\,dy)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1),$$

в силу чего $J = 0$.

С другой стороны, преобразуя криволинейный интеграл (4) в двойной согласно формуле Остроградского — Грина, получаем после элементарных выкладок:

$$J=\iint_S(\Delta U)^2\,dx\,dy. \tag{5}$$

Следовательно, в силу того, что $J = 0$, будем иметь: $P = \Delta U = 0$. Отсюда следует, что $\varphi'(z) = Ci$, где C — действительная постоянная, и, следовательно, $\varphi(z) = Ciz + \gamma$, где γ — постоянная. Из формулы (2)

следует тогда, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \psi(z) + \overline{\gamma}.$$

Отсюда и из (3) находим, что функция $\psi(z)$, голоморфная в S, принимает на контурах L_k постоянные значения. На основании сказанного в п. 4 § 29 это возможно лишь в случае, если $\psi(z) = \text{const}$ во всей области S.

Таким образом,

$$\varphi(z) = Ciz + \gamma, \quad \psi(z) = \gamma',$$

где γ' — некоторая постоянная. Это доказывает, что разность двух предполагаемых решений дает лишь жесткое перемещение всего тела как целого, а это и требовалось доказать.

Единственность регулярного решения задачи II доказывается аналогично при помощи рассмотрения интеграла

$$J^* = \int_L \{(Qu - Pv)\,dx + (Pu + Qv)\,dy\}, \tag{6}$$

который получим, если в правой части (4) напишем u, v вместо

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y};$$

и здесь, конечно, тоже предполагается, что речь идет о разности двух возможных решений.

Преобразуя предыдущий интеграл в двойной и пользуясь формулами (12) § 30, легко показать, что

$$2\mu(\lambda + \mu)J^* = \iint_S [\mu P^2 + (\lambda + 2\mu)Q^2]\,dx\,dy. \tag{7}$$

Но, по условию, $u = v = 0$ на L. Следовательно, на основании формулы (6) $J^* = 0$ и на основании соотношения (7) $P = Q = 0$ в области S, откуда следует, что $\varphi(z) = \text{const} = \gamma$. Формула (1) показывает тогда, что $2\mu(u - iv) = -\psi(z) + \varkappa\overline{\gamma}$. Но так как $u = v = 0$ на L, то граничное значение функции $-\psi(z) + \varkappa\overline{\gamma}$ равно нулю на L. Следовательно, $-\psi(z) + \varkappa\overline{\gamma} = 0$ во всей области S, откуда следует, что $u = v = 0$ во всей этой области.

Таким образом, теорема единственности для задачи II доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенные доказательства теорем единственности можно, очевидно, непосредственно распространить на более общие случаи, аналогичные тем, которые были указаны в замечании к п. 3 § 40 [1]).

[1]) В недавно опубликованной статье Tiffen [1] автор дает некоторые (довольно очевидные) обобщения приведенных теорем единственности, пользуясь тем же методом, но при несколько иных обозначениях. Используемые этим автором основные формулы и предложения, касающиеся комплексного представления решения, почему-то приписываются им Стевенсону, работы которого опубликованы гораздо позже, чем работы Г. В. Колосова и мои (в частности моя работа [11], на которую в числе прочих ссылается автор), где все эти результаты содержатся. То же относится и к статьям [2, 3] того же автора.

§ 43. О сосредоточенных силах, приложенных к границе. В предыдущем мы подчиняли решения уравнений плоской теории упругости тем или иным условиям, обеспечивающим, в частности, непрерывность выражения

$$f(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \tag{1}$$

вплоть до границы L области. Не надо думать, что требование непрерывности выражения (1) вплоть до границы принадлежит к числу условий чисто математического характера, обычно налагаемых с целью упрощения рассуждений. Условие, о котором здесь идет речь, имеет существенное механическое значение и может быть выражено так: главный вектор усилий, приложенных с определенной стороны к данной, произвольно расположенной дуге, стремится к нулю вместе с длиной этой дуги. Посмотрим, что произойдет в одном из простейших случаев нарушения этого условия.

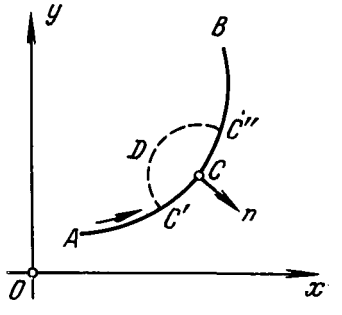


Рис. 18.

Пусть AB — некоторая дуга, принадлежащая границе L области, и пусть выражение (1) непрерывно продолжимо на все точки дуги AB, за исключением одной лишь точки C этой дуги. Мы знаем (§ 29, п. 3), что при этом условии граничные значения выражения (1) будут непрерывны вдоль AB, за исключением, быть может, точки C. Будем считать для простоты, что точка C является точкой разрыва первого рода для граничных значений выражения (1) и что сама функция $U(x, y)$ непрерывно продолжима на все точки дуги AB, включая точку C [1]).

Пусть

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C=\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_C+i\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C$$

обозначает скачок граничного значения выражения (1) при переходе через C, если двигаться по AB в положительном направлении (оставляя область S слева).

Вырежем мысленно из тела бесконечно малую часть $C'DC''$ и подсчитаем главный вектор внешних усилий, действующих на дугу $C'DC''$ (рис. 18) границы оставшегося тела. Этот главный вектор (X, Y) по

[1]) Это условие относительно функции $U(x, y)$ заведомо будет соблюдено, если выражение (1), а следовательно, и частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y}$$

остаются ограниченными в S вблизи C. Последнее же требование является вполне естественным с механической точки зрения: оно означает, что главный вектор усилий, приложенных к дуге конечной длины, остается ограниченным, как бы эта дуга ни была близка к границе области.

формуле (2) § 33 определяется равенством

$$X+iY=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{C'}^{C''}.$$

Сближая точки C' и C'', получаем в пределе:

$$X+iY=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C, \text{ т. е. } X=\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C, \quad Y=-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_C. \tag{2}$$

Главный момент (относительно начала координат) тех же усилий, как легко подсчитать по формуле (4) § 33, равен в пределе [1]):

$$M=-x\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_C-y\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_C=xY-yX,$$

где x, y обозначают координаты точки C. Значит, усилия, приложенные к бесконечно малому контуру $C'DC''$, эквивалентны одной конечной силе (X, Y), приложенной к точке C; компоненты этой силы определяются формулами (2).

Таким образом, точку разрыва C выражения (1) на контуре, обладающую указанными выше свойствами, следует рассматривать как точку приложения *сосредоточенной силы* (X, Y), определяемой формулами (2). О сосредоточенных силах вообще см. еще § 57.

§ 44. Зависимость напряженного состояния от упругих постоянных. Отметим теперь одно важное свойство решения первой основной задачи.

Рассмотрим сперва *случай конечной односвязной области*. В этом случае искомые функции φ, ψ голоморфны в области S. Так как, далее, граничное условие (2) § 41 не зависит от упругих постоянных λ, μ, то функции φ, ψ, дающие решение первой основной задачи, будут давать решение этой задачи (при тех же заданных внешних напряжениях) для тела той же формы, но сделанного из любого другого (однородного и изотропного) материала.

Итак, *при заданных внешних напряжениях напряженное состояние односвязного (конечного) тела зависит только от его формы, но не от материала* [2]). Деформация и смещения, конечно, будут зависеть от материала, так как постоянные λ и μ входят в формулу, выражающую смещения через функции φ и ψ.

[1]) Ибо по предположению $\lim [U]_{C'}^{C''}=0$.

[2]) В случае точной задачи о плоской деформации предложение это, разумеется, справедливо только в отношении компонент X_x, Y_y, X_y, ибо компонента Z_z зависит от λ и μ (точнее, от отношения этих величин). Но в случае тонкой пластинки, при «обобщенном плоском напряженном состоянии» (§ 26), предложение справедливо вполне, ибо в этом случае $Z_z=0$.

Доказанную теорему о независимости напряженного состояния от упругих постоянных (речь все время идет о компонентах напряжения X_x, Y_y, X_y), вряд ли справедливо называть теоремой М. Леви, как это делает Г. В. Колосов [3, 4]. Правда, Леви (Levy [1]) подчеркивает то обстоятельство, что уравнения, которым должны удовлетворять X_x, Y_y, X_y, не содержат упругих постоянных. Но из этого обстоятельства не следует в общем случае независимость напряженного состояния от упругих постоянных (см. ниже).

Рассмотрим теперь *случай многосвязного тела.* И в этом случае постоянные λ, μ не фигурируют в граничных условиях. Но зато эти постоянные (через посредство $\varkappa$) фигурируют в формулах (10), (11) § 35:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi^*(z),$$
$$\psi(z) = \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi^*(z). \tag{1}$$

Предположим, что мы решили первую основную задачу для тела из данного материала, т. е. нашли соответствующие функции φ, ψ. Посмотрим, могут ли эти самые функции дать решение той же задачи при тех же заданных контурных напряжениях для тела той же формы, но из другого материала, для которого постоянные λ, μ имеют другие значения λ', μ'. Соответствующее значение $\varkappa$ мы обозначим через $\varkappa'$.

Функции φ и ψ будут, конечно, и для второго тела удовлетворять данным граничным условиям, ибо упругие постоянные в этих условиях не фигурируют. Однако смещения, соответствующие этим функциям, могут оказаться многозначными. Именно, для однозначности смещений по формуле (7) § 35, в которой вместо $\varkappa$ надо теперь написать $\varkappa'$ и вместо

$$\gamma_k \text{ и } \overline{\gamma}_k,$$

написать соответственно:

$$-\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\varkappa)} \text{ и } \frac{\varkappa(X_k+iY_k)}{2\pi(1+\varkappa)},$$

должно быть:

$$-\varkappa'\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\varkappa)}+\varkappa\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\varkappa)}=0,$$

или

$$(\varkappa-\varkappa')\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\varkappa)}=0.$$

Это может быть при $\varkappa' \neq \varkappa$ только тогда, когда $X_k = Y_k = 0$.

Значит, одни и те же функции φ и ψ будут давать решение для тел из различных материалов (с различными постоянными $\varkappa$) тогда и только тогда, когда главные векторы внешних усилий, приложенных *к каждому из контуров* L_k, *в отдельности* равны нулю. В этом и только в этом случае напряженное состояние не зависит от упругих постоянных. В противном случае оно зависит от значения постоянной $\varkappa$ или, что все равно, от отношения λ/μ.

Этот результат принадлежит Мичеллу (Michell [1]). Он представляет большой интерес для экспериментов над моделями, сделанными из того или иного материала, удобного с точки зрения экспериментирования. Мы видим, при каких условиях выбор материала не влияет на результат [1]).

[1]) Г. В. Колосов [3, 4] дал формулы, позволяющие выяснить влияние упругих постоянных и в случае наличия объемных сил, компоненты которых — аналитические функции координат. Однако результаты Г. В. Колосова требуют дополнительного исследования в случае многосвязной области.

Более подробные указания практического характера насчет влияния выбора материала моделей многосвязных тел читатель найдет в статье Файлона (Filon [3]), а также в книге Кокера и Файлона (Coker a. Filon [1]). Считаем необходимым отметить, что вывод всех результатов Файлона может быть значительно упрощен, если исходить из приведенных выше формул.

III. МНОГОЗНАЧНЫЕ СМЕЩЕНИЯ. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 45. Многозначные смещения. Дислокации. Условие однозначности смещений, которое мы до сих пор считали всегда выполненным, кажется на первый взгляд совершенно неизбежным с физической точки зрения. Мы увидим, однако, что можно дать весьма простую физическую интерпретацию и многозначным смещениям.

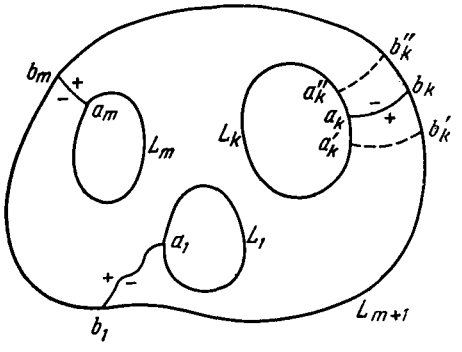


Рис. 19.

Будем по-прежнему считать, что компоненты напряжения и, следовательно, компоненты деформации — однозначные функции в области, занятой телом; точнее, будем считать, что соблюдены все условия, перечисленные в п. 2 § 30, *кроме условия однозначности смещений*.

Напомним, что в случае *односвязной* области однозначность компонент смещения является необходимым следствием остальных принятых нами условий (см. § 30). Поэтому нам остается рассмотреть случай многосвязной области. Как и в § 35, мы будем предполагать, что область S, занятая телом, ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний охватывает остальные.

Напомним, что в § 35, при выводе формул (1)—(6) мы не опирались на условие однозначности смещений; это условие было введено лишь начиная с формулы (7). Поэтому, в частности, формулы (3) и (4) § 35 сохраняют силу и при тех условиях, которые мы рассматриваем теперь.

Для того, чтобы изучить характер многозначности компонент смещения, превратим (мысленно) область S в односвязную, проведя m разрезов (купюр) $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_mb_m$, соединяющих контуры $L_1, L_2, \ldots, L_m$ с внешним контуром L_{m+1} и не пересекающих друг друга (рис. 19) (эти купюры можно провести и иным образом, например, соединить какую-нибудь точку контура L_1 с какой-нибудь точкой контура L_2, затем какую-нибудь точку контура L_2 с какой-нибудь точкой контура L_3 и т. д., дойдя таким образом до какой-нибудь точки контура L_{m+1}; но мы для простоты будем проводить купюры, как указано выше).

В разрезанной таким образом области функции φ, ψ, а следовательно, и смещения, будут однозначны. На каждой купюре мы будем различать

два края, которые будем отмечать значками (+) и (—), причем эти обозначения будем выбирать так, чтобы, идя (оставаясь в разрезанной области) от какой-либо точки (x, y) края (—) купюры $a_k b_k$ к соответствующей точке края (+) той же купюры (т. е. к точке с теми же координатами x, y), приходилось огибать контур L_k против часовой стрелки.

При таком обходе на основании формулы (6) § 35 будем иметь:

$$u^+ - u^- + i(v^+ - v^-) = \frac{\pi i}{\mu}\{(\varkappa+1) A_k (x+iy) + \varkappa\gamma_k + \overline{\gamma'_k}\}, \qquad (1)$$

где A_k — действительная, а $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\gamma'_k = \alpha'_k + i\beta'_k$ — комплексные постоянные, фигурирующие в формулах (3) и (4) § 35; u^+, v^+ и u^-, v^- обозначают значения компонент смещения соответственно в точке края (+) и точке края (—), которые совмещены в геометрической точке (x, y).

Формулу (1) можно переписать так:

$$u^+ - u^- = -\varepsilon_k y + \alpha_k^0, \quad v^+ - v^- = \varepsilon_k x + \beta_k^0, \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\pi(\varkappa+1) A_k}{\mu}, \quad \alpha_k^0 = \frac{\pi(-\varkappa\beta_k + \beta'_k)}{\mu}, \quad \beta_k^0 = \frac{\pi(\varkappa\alpha_k + \alpha'_k)}{\mu}. \qquad (3)$$

Физическая интерпретация полученных многозначных смещений не представляет никаких затруднений [1]). А именно, чтобы получить объяснение таких смещений, достаточно предположить, что вдоль каждой купюры $a_k b_k$ спаяны два края тела, получившихся благодаря тому, что из тела до его деформации была удалена (весьма узкая) полоса, края которой $a''_k b''_k$ и $a'_k b'_k$ (рис. 19) были конгруэнтны и так расположены, что линия $a''_k b''_k$ получается из $a'_k b'_k$ путем жесткого перемещения, состоящего из поворота на угол ε_k вокруг начала координат и из поступательного перемещения с компонентами α_k^0, β_k^0. Подразумевается, что перед спайкой были совмещены те точки краев, которые соответствуют друг другу при только что указанном жестком перемещении. Обозначения выбраны нами так, что линия $a''_k b''_k$ обращается после деформации в край (—) купюры $a_k b_k$, а линия $a'_k b'_k$ — в край (+) [2]).

Для простоты выше мы говорили *об удалении* полосы с краями $a''_k b''_k$ и $a'_k b'_k$. Но при некоторых значениях ε_k, α_k^0, β_k^0 может случиться, что

---

[1]) Напомним, что мы рассматриваем лишь весьма малые деформации тела; в соответствии с этим величины ε_k, α_k^0, β_k^0 должны быть также весьма малыми.

[2]) Для того чтобы стало яснее, как при этом получаются соотношения (2), представим себе, что указанная в тексте операция спайки осуществляется, например, так: край $a''_k b''_k$ удерживается на месте, а край $a'_k b'_k$ перемещается как жесткое целое, до совпадения с краем $a''_k b''_k$. Тогда $u^- = v^- = 0$, $u^+ = -\varepsilon_k y + \alpha_k^0$, $v^+ = \varepsilon_k x + \beta_k^0$ и, следовательно, имеют место формулы (2). Если после этого спаять края, предоставить тело самому себе и, кроме того, подвергнуть любой обычной деформации, соотношения (2) не нарушатся, ибо соприкасающиеся точки спаянных краев будут перемещаться одинаково и никакой дополнительной разницы между (u^+, v^+) и (u^-, v^-) не возникнет. Ясно, что в окончательном состоянии форма линии $a_k b_k$ отличается, вообще говоря, от формы $a'_k b'_k$ и $a''_k b''_k$.

(до деформации) край $a'_k b'_k$ заходит за край $a''_k b''_k$ так, что фактически приходится не удалять полосу, а прибавлять. Может также случиться, что край $a'_k b'_k$ заходит за край $a''_k b''_k$ лишь частично; тогда приходится удалять в одном месте и прибавлять в другом. Однако для краткости мы в дальнейшем будем говорить только об «удалении» полосы. Ясно также, что при наложении краев $a'_k b'_k$ и $a''_k b''_k$ конечные точки этих линий могут не вполне совпасть друг с другом, так что после спайки на границах области могут образоваться (малые) зазубрины, на которые мы не будем обращать внимания.

Указанная интерпретация многозначных смещений в частном случае кругового кольца указана впервые Тимпе (Timpe [1]) [1]). Несколько позднее Вольтерра [2]) получил более общие результаты, относящиеся к многосвязным телам произвольного вида. Этот автор называет описанный нами вид деформации тела «distorsion». Ляв (Love [1]) предложил вместо этого термин «дислокация» (dislocation), которым мы и будем пользоваться.

Отметим следующее важное свойство дислокаций, указанное Вольтерра. Если переместить купюры $a_k b_k$ и изменить их форму, так, однако, чтобы точки a_k и b_k оставались соответственно на контурах L_k и L_{m+1} и чтобы купюры нигде друг с другом не пересекались, то величины ε_k, α_k^0, β_k^0, определяемые формулами (3), останутся, очевидно, без изменения. Иными словами, величины эти не изменяются при замене одной системы купюр другой, топологически ей эквивалентной.

Мы видели, что при требовании однозначности смещений напряжения внутри тела вполне определяются внешней нагрузкой. Требование однозначности смещений равносильно требованию

$$\varepsilon_k = \alpha_k^0 = \beta_k^0 = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Легко видеть, что напряжения будут также вполне определены заданием внешней нагрузки и произвольным заданием (малых) величин ε_k, α_k^0, β_k^0; действительно, «разность» двух решений (если их существует два) даст, очевидно, решение, для которого внешняя нагрузка отсутствует и

$$\varepsilon_k = \alpha_k^0 = \beta_k^0 = 0,$$

т. е. смещения однозначны. При этих условиях, как мы знаем, напряжения всюду равны нулю.

Величины ε_k, α_k^0, β_k^0, числом $3m$, мы будем называть *характеристиками дислокации* (caractéristiques de la distorsion, по Вольтерра).

---

[1]) Случай кругового кольца будет в качестве примера подробно рассмотрен в § 60.

[2]) См. мемуар Вольтерра (Volterra [1]), где дана сводка его результатов, а также две его книги [2] и [3]. Случай плоской деформации рассмотрен также в статье Файлона (Filon [3]), где даны интересные результаты, касающиеся вопроса изучения напряженного состояния при помощи экспериментов над моделями из различных материалов (см. также Coker a. Filon [1]).

З а м е ч а н и е. Сам собой напрашивается вопрос: почему исключена возможность дислокаций в *односвязном теле*? Ведь можно, например, из круговой шайбы вырезать, скажем, радиальный клин, привести в соприкосновение свободные края и спаять; тогда, конечно, в шайбе возникнут напряжения, и мы будем, по-видимому, иметь дело с таким же случаем, как для многосвязного тела.

Но разница здесь та, что в этом случае напряжения не будут удовлетворять условиям непрерывности, поставленным выше (§ 30), ибо мы видели, что в случае односвязного тела смещения не могут быть многозначными при соблюдении этих условий непрерывности.

Совершенно аналогично следует ответить на вопрос, почему мы ограничились рассмотрением дислокаций, вызванных удалением (или прибавлением) полос с *конгруэнтными* краями, совмещая края определенным образом.

§ 46. Температурные напряжения. Между рассмотренными выше дислокациями и напряжениями, вызванными в теле неравномерным распределением температуры, существует замечательная связь, к выяснению которой мы сейчас и перейдем. Но прежде всего необходимо ознакомиться с законом, выражающим действие неравномерной температуры на упругое тело. Уравнения теории упругости, которые мы до сих пор применяли, относились к случаю, когда температура одна и та же во всех точках тела.

На основании закона, высказанного Дюамелем (Duhamel) и Ф. Нейманом [1]), в случае неравномерного нагрева между компонентами деформации и напряжения существует следующая связь:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\nu T + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = -\nu T + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ Z_z &= -\nu T + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad Z_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь T обозначает температуру в данной точке, причем за «нуль» шкалы температур принята температура тела в «естественном» состоянии; ν обозначает некоторую положительную постоянную, зависящую от свойств вещества тела [2]). Соотношения (1) заменяют в нашем случае обобщенный закон Гука и отличаются от соотношений, выражающих последний только слагаемыми $-\nu T$ в правых частях первых трех формул (1).

Компоненты напряжения должны, разумеется, удовлетворять тем же уравнениям (1) § 18, так как при выводе этих последних о температуре ничего не предполагалось.

---

[1]) См., например, Love [1], гл. III.

[2]) Закон этот применим только при не слишком больших разностях температур хотя бы уже потому, что коэффициенты λ, μ, ν меняются с температурой, и этим изменением при больших разностях температур уже нельзя пренебречь.

Рассмотрим теперь случай плоской деформации цилиндрического тела, указанный в § 25 ($w = 0$, u, v не зависят от координаты z), и будем считать, что T не зависит от координаты z. Будем также считать, что объемные силы отсутствуют. Тогда

$$Y_z = X_z = 0$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_x = -\nu T + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = -\nu T + \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ &X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем Z_z определяется равенством

$$Z_z = \lambda\theta - \nu T, \tag{4}$$

откуда, замечая, что в силу формул (3)

$$X_x + Y_y = -2\nu T + 2(\lambda+\mu)\theta, \quad \theta = \frac{X_x + Y_y}{2(\lambda+\mu)} + \frac{\nu T}{\lambda+\mu},$$

получаем:

$$Z_z = -\frac{\nu\mu}{\lambda+\mu} T + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x + Y_y). \tag{4'}$$

Предположим, что мы имеем дело с *установившимся потоком тепла*, так что температура T зависит только от x, y, но не от времени. Тогда, как известно,

$$\Delta T = 0, \tag{5}$$

т. е. T есть гармоническая функция переменных x, y. Обозначим через $F(z)$ аналитическую функцию комплексного переменного [1]) $z = x + iy$, имеющую действительной частью $T(x, y)$, и положим:

$$u^*(x, y) + iv^*(x, y) = \int F(z)\,dz. \tag{6}$$

Очевидно, будем иметь:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial y} = T, \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{\partial v^*}{\partial x}. \tag{7}$$

Положим далее:

$$u = u' + \frac{\nu u^*}{2(\lambda+\mu)}, \quad v = v' + \frac{\nu v^*}{2(\lambda+\mu)}, \tag{8}$$

где u', v' — две новые функции. Подставляя эти выражения в формулы (3) и принимая во внимание формулы (7), легко убеждаемся, что

$$X_x = \lambda\theta' + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta' + 2\mu\frac{\partial v'}{\partial y}, \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right), \tag{9}$$

где

$$\theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}.$$

[1]) Конечно, здесь нельзя опасаться смешения с координатой z.

Итак, мы видим, что *функции* X_x, Y_y, X_y, u', v' *удовлетворяют хорошо нам известным уравнениям плоской теории упругости, как если бы тело было равномерно нагрето* (а именно, если бы $T = 0$), причем u', v' играют роль смещений [1]).

Таким образом, *задача об изучении напряжений* в цилиндрическом теле, *вызванных установившимся потоком* тепла, в случае, когда речь идет о плоской деформации, *сводится к обычной задаче* (т. е. к задаче при $T = 0$) *для тела той же формы при той же внешней нагрузке на боковой поверхности.*

Эту последнюю задачу (т. е. задачу, касающуюся X_x, Y_y, X_y, u', v') мы будем называть *вспомогательной.* Весьма замечательно то обстоятельство, что *напряжения* X_x, Y_y, X_y *одинаковы как в исходной, так и во вспомогательной задачах.*

Рассмотрим сперва случай *односвязного тела.* Предположим, что внешняя нагрузка (на боковой поверхности) отсутствует. Тогда, как известно, вспомогательная задача будет иметь только следующее решение (если отбросить не имеющее значения жесткое перемещение):

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \quad u' = v' = 0.$$

Значит *в односвязном цилиндре установившийся поток тепла* (зависящий только от координат x, y) *не создает напряжений* X_x, Y_y, X_y.

Смещения же будут даны формулами, получаемыми из формул (8):

$$u = \frac{\nu u^*}{2(\lambda+\mu)}, \quad v = \frac{\nu v^*}{2(\lambda+\mu)}, \tag{10}$$

где u^*, v^* определяются по температуре $T(x, y)$ формулой (6).

Не надо думать, что напряжения вообще отсутствуют. Действительно, компонента Z_z будет, вообще говоря, отлична от нуля и дана формулой (4′) (где надо теперь положить $X_x = Y_y = 0$):

$$Z_z = -\frac{\nu\mu}{\lambda+\mu} T(x, y). \tag{11}$$

Мы видим, что к основаниям цилиндра должны быть приложены нормальные напряжения, определяемые предыдущей формулой (приложение этих напряжений необходимо для поддержания деформации плоской).

Если мы хотим найти решение, когда и основания свободны от напряжений, мы можем в случае длинного цилиндра поступить следующим образом (ср. сказанное в § 25).

Напряжения, приложенные, скажем, к «верхнему» основанию, определяемые формулой (11), статически эквивалентны силе, направленной параллельно образующим цилиндра и паре, момент которой параллелен

---

[1]) Это свойство было указано в статье автора [1] и в несколько дополненном виде в статье [2]; краткое изложение результатов дано также в заметке автора [3]. Долгое время спустя Поритский (Poritsky [1]) опубликовал аналогичные результаты.

основанию; за точку приложения силы можно взять, например, центр тяжести его.

Напряжения, приложенные к «нижнему» основанию, приводят к силе и паре, противоположным предыдущим.

На полученное выше решение наложим теперь решение задачи растяжения и изгиба цилиндра силами и парами, обратными предыдущим [1]).

Тогда мы получим (приближенное) решение поставленного вопроса. Действительно, напряжения, приложенные к основаниям, будут теперь статически эквивалентны нулю. Значит, в силу принципа Сен-Венана (§ 23) их можно считать вообще отсутствующими (если размеры оснований малы в сравнении с длиной цилиндра). Решение это заметно отличается от точного только вблизи оснований.

Добавим еще, что, как мы увидим в главе VII, при упомянутых растяжении и изгибе компоненты X_x, Y_y, X_y будут равны нулю. Значит, и в окончательном решении будет по-прежнему $X_x = Y_y = X_y = 0$. Только компонента Z_z будет отлична от нуля.

В случае, когда размеры оснований не малы по сравнению с высотой, придется искать более точные решения, учитывая не только главные векторы и моменты усилий, приложенных к основаниям, но и фактическое распределение напряжений по основаниям.

Рассмотрим теперь *случай многосвязной области* вида, рассмотренного в предыдущем параграфе. В этом случае функция $F(z)$, действительной частью которой является (однозначная) функция $T(x, y)$ (температура в данной точке), может быть многозначной. Именно, рассуждая совершенно так же, как относительно функции $\Phi(z)$ § 35, убеждаемся, что

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} B_k \ln(z - z_k) + \text{голоморфная функция}, \tag{12}$$

где B_k ($k = 1, \ldots, m$)— действительные постоянные, а z_k — произвольные постоянные точки внутри контуров L_k. Далее [2]):

$$u^* + iv^* = \int F(z)\,dz = z\sum_{k=1}^{m} B_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k^* + i\beta_k^*) \ln(z - z_k) + \text{голоморфная функция}, \tag{13}$$

где α_k^*, β_k^* — некоторые действительные постоянные [3]). При обходе (против часовой стрелки) по контуру, охватывающему контур L_k, это выражение испытывает приращение (ср. обозначения предыдущего параграфа):

$$u^{*+} - u^{*-} + i(v^{*+} - v^{*-}) = 2\pi i (zB_k + \alpha_k^* + i\beta_k^*), \tag{14}$$

[1]) Мы увидим в главе VII, что решение это для любого (длинного) цилиндра получается совершенно элементарным путем.

[2]) Ср. вывод формулы (3) § 35.

[3]) Постоянные B_k, α_k^*, β_k^* должны считаться заданными, если задана температура $T(x, y)$ в каждой точке.

Будем считать, что рассматриваемое тело не было подвергнуто дислокациям, т. е. что *компоненты u, v смещения исходной задачи однозначны.*

Тогда на основании формул (8) должно быть

$$0=(u'^{+}-u'^{-})+i\,(v'^{+}-v'^{-})+\{(u^{*+}-u^{*-})+i\,(v^{*+}-v^{*-})\}\,\frac{\nu}{2(\lambda+\mu)},$$

откуда, принимая во внимание формулу (14), получаем:

$$(u'^{+}-u'^{-})+i\,(v'^{+}-v'^{-})=-\frac{\pi i\nu}{\lambda+\mu}(B_k z+\alpha_k^{*}+i\beta_k^{*}). \tag{15}$$

Эта формула показывает, что *смещения u', v' «вспомогательной задачи» таковы, как если бы тело, не подвергаясь нагреванию, было подвергнуто дислокации с характеристиками* [ср. формулы (2) § 45]:

$$\varepsilon_k=-\frac{\pi\nu}{\lambda+\mu}B_k,$$

$$\alpha_k^{0}=\frac{\pi\nu}{\lambda+\mu}\beta_k^{*},\quad \beta_k^{0}=-\frac{\pi\nu}{\lambda+\mu}\alpha_k^{*}. \tag{16}$$

Значит, вспомогательная задача состоит в определении упругого равновесия при равномерной температуре ($T=0$) и при заданных характеристиках дислокации.

Если внешние напряжения на боковой поверхности отсутствуют, то напряжения X_x, Y_y, X_y (как во вспомогательной, так и в исходной задачах) *таковы, как если бы тело было подвергнуто при отсутствии внешней нагрузки и при равномерной температуре заданной дислокации.*

Если боковая поверхность цилиндра загружена произвольным образом, то надо наложить еще решение обыкновенной задачи плоской теории упругости при заданных внешних напряжениях на границе.

Что касается напряжений, приложенных к основаниям, то здесь остается в силе все сказанное относительно случая односвязной области, с той только разницей, что напряжение Z_z будет определяться не формулой (11), а общей формулой (4′), ибо в нашем случае величина X_x+Y_y, вообще говоря, отлична от нуля.

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

§ 47. Конформное отображение [1]. Пусть z и ζ — две комплексные переменные, связанные соотношением

$$z=\omega(\zeta), \tag{1}$$

[1]) Мы напоминаем в этом параграфе простейшие свойства конформного отображения, не останавливаясь на доказательствах. Элементарное изложение теории конформного отображения читатель найдет в курсе В. И. Смирнова [1], т. III, и в книге С. А. Янчевского [1]. Более подробное изложение теоретических вопросов можно найти в книге И. И. Привалова [1] и А. И. Маркушевича [1].

Рекомендуем также книгу М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [1].

где $\omega(\zeta)$ — однозначная аналитическая функция в некоторой области Σ на плоскости переменной ζ. Соотношение (1) приводит в соответствие каждой точке ζ области Σ вполне определенную точку z на плоскости этой последней переменной. Эти точки заполняют на плоскости z некоторую определенную область S. Предположим, что, и обратно, каждой точке z области S в силу соотношения (1) соответствует одна вполне определенная точка области Σ. В этом случае говорят, что соотношение (1) определяет взаимно однозначное [1]) *конформное преобразование* или *конформное отображение* области S на область Σ, и обратно.

Отображение называется конформным благодаря следующему свойству, характерному для соотношения вида (1), где $\omega(\zeta)$ — аналитическая функция: если в области Σ взять два линейных элемента, выходящих из некоторой точки ζ и составляющих между собой некоторый угол α, то соответствующие им элементы в области S будут составлять такой же угол α, причем направление отсчета углов сохраняется.

В дальнейшем (если противное не оговорено особо) мы будем иметь в виду только области, ограниченные одним или несколькими простыми замкнутыми контурами.

Области Σ и S могут быть как конечными, так и бесконечными (причем, в частности, одна из них может быть конечной, а другая — бесконечной). Если, например, область Σ конечна, а область S бесконечна, то функция $\omega(\zeta)$ должна обращаться в некоторой точке области Σ в бесконечность (иначе мы не имели бы в области Σ точки, которой бы соответствовала бесконечно удаленная точка области S). Легко показать, что функция $\omega(\zeta)$ должна иметь в этой точке простой полюс, т. е. если считать для определенности, что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = 0$, то функция $\omega(\zeta)$ должна иметь вид

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \text{голоморфная функция}, \tag{2}$$

где c — постоянная, причем других особенностей в области Σ быть не может, иначе отображение не могло бы быть взаимно однозначным.

Если области Σ и S обе бесконечны, причем бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу, то функция $\omega(\zeta)$ по той же причине должна иметь вид

$$\omega(\zeta) = R\zeta + \text{голоморфная функция}, \tag{2'}$$

где R — постоянная. Напомним, что под функцией, голоморфной в бесконечной области, подразумевается функция, которая голоморфна в любой конечной части этой области, а при достаточно больших $|\zeta|$ может быть представлена рядом вида

$$a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots$$

[1]) В нижеследующем, говоря о конформном отображении, мы всегда будем иметь в виду взаимно однозначное отображение.

Далее можно показать, что производная $\omega'(\zeta)$ не может обращаться в нуль в области Σ, иначе отображение не было бы взаимно однозначным.

Возникает теперь вопрос: если даны две произвольные области Σ и S, возможно ли всегда найти функцию $\omega(\zeta)$ такую, чтобы соотношение (1) давало конформное отображение S на Σ, и обратно. Этот вопрос решен в настоящее время с чрезвычайно большой общностью. Мы ограничимся здесь только несколькими общими указаниями.

Прежде всего очевидно, что нельзя получить (взаимно однозначного) отображения односвязной области на многосвязную.

Рассмотрим сперва случай, когда каждая из двух областей односвязна и ограничена простым замкнутым контуром. Тогда всегда можно найти соотношение вида (1), отображающее одну область на другую, причем отображение будет непрерывным вплоть до контуров. Кроме того, функцию $\omega(\zeta)$ всегда можно выбрать так, чтобы произвольно заданной точке ζ_0 области Σ соответствовала произвольно заданная точка z_0 в области S и чтобы соответствовали друг другу направления произвольно выбранных линейных элементов, проходящих через ζ_0 и z_0. Эти дополнительные условия вполне определяют функцию $\omega(\zeta)$.

Предположим для простоты, что область Σ есть круг радиуса 1 с центром в начале координат. Окружность этого круга обозначим через γ. Таким образом, на γ будет $|\zeta| = 1$.

Вследствие того, что отображение непрерывно вплоть до контуров, функция $\omega(\zeta)$ непрерывно продолжима на γ; граничное ее значение мы будем обозначать через $\omega(\sigma)$, где $\sigma = e^{i\vartheta}$ — точка окружности γ.

В дальнейшем нас будет интересовать также поведение производной $\omega'(\zeta)$ вблизи γ и на γ, в особенности вопрос о том, может ли $\omega'(\zeta)$ обратиться в нуль в какой-либо точке контура. Ответ на это дает следующее предложение [1]).

Если координаты точек контура области S имеют непрерывные производные по дуге вплоть до второго порядка (это значит, что контур имеет непрерывно изменяющуюся кривизну), то функция $\omega'(\zeta)$ непрерывно продолжима на γ, причем, если обозначить ее граничное значение через $\omega'(\sigma)$, то будет

$$\omega'(\sigma) = \frac{d\omega(\sigma)}{d\sigma}, \tag{3}$$

и, кроме того,

$$\omega'(\sigma) \neq 0 \text{ всюду на } \gamma \tag{4}$$

(мы знаем уже, что $\omega'(\zeta) \neq 0$ всюду внутри γ).

Если, сверх того, координаты точек контура области S имеют также непрерывные производные третьего порядка по дуге, то и вторая

[1]) В. И. Смирнов [2]; для простоты мы формулируем предложение при менее общих условиях, чем у названного автора; то же относится и к следующему в тексте предложению относительно второй производной.

производная $\omega''(\zeta)$ непрерывно продолжима на γ, причем для ее граничного значения $\omega''(\sigma)$ имеем:

$$\omega''(\sigma) = \frac{d\omega'(\sigma)}{d\sigma}. \qquad (3')$$

В дальнейшем (если противное не оговорено особо) мы будем считать, что имеем дело с контурами, удовлетворяющими указанным условиям.

Заметим еще, что если нам удалось отобразить область S на круг радиуса 1, то мы всегда сможем отобразить эту же область на бесконечную плоскость с круговым отверстием. Для этого достаточно произвести подстановку

$$\zeta = \frac{1}{\zeta_1};$$

действительно, когда ζ описывает наш круг, т. е. область $|\zeta| < 1$, то ζ_1 описывает бесконечную плоскость с круговым отверстием, т. е. область $|\zeta_1| > 1$. Значит, если рассматривать z как функцию от ζ_1, получим требуемое отображение.

В дальнейшем мы почти всегда будем отображать конечные односвязные области на круг $|\zeta| < 1$, а бесконечные односвязные области — на область $|\zeta| > 1$, т. е. на бесконечную плоскость с круговым отверстием. Можно было бы ограничиться в обоих случаях отображением на круг $|\zeta| < 1$, но указанный способ несколько удобнее в практическом отношении.

Скажем еще несколько слов относительно многосвязных областей. Очевидно, отображать друг на друга можно только области одинаковой связности.

Например, двусвязную область S (область, ограниченную двумя замкнутыми контурами, ибо областей более общего вида мы не рассматриваем) можно всегда отобразить на круговое кольцо. Но, в противоположность случаю односвязных областей, это круговое кольцо не может быть выбрано совершенно произвольно: отношение радиусов внутренней и внешней окружностей должно быть определенной величиной, зависящей от вида области S.

Укажем теперь две простые теоремы, весьма полезные для практики:

I. *Пусть Σ — конечная или бесконечная область на плоскости комплексной переменной ζ, ограниченная простым замкнутым контуром γ* [1]*, и пусть $\omega(\zeta)$ — функция, голоморфная в области Σ* [2] *и непрерывная вплоть до контура. Пусть, далее, точка, определяемая равенством $z = \omega(\zeta)$, описывает на плоскости z (двигаясь все время в*

[1]) Ничего другого здесь относительно контура не предполагается.

[2]) Включая бесконечно удаленную точку, если область бесконечна.

одном и том же направлении) некоторый простой замкнутый контур L, когда ζ описывает контур γ [1]. *Тогда соотношение $z = \omega(\zeta)$ дает конформное отображение области S, заключенной внутри L, на область Σ, и обратно* [2].

Эту теорему можно обобщить на случай многосвязных областей следующим образом [3].

II. *Пусть Σ — конечная или бесконечная (связная) область, ограниченная несколькими простыми замкнутыми контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ (не имеющими общих точек). Пусть $\omega(\zeta)$ — функция, голоморфная в Σ и непрерывная вплоть до границы, и пусть точка z, определяемая соотношением $z = \omega(\zeta)$, описывает на плоскости z простые замкнутые контуры $L_1, \ldots, L_k$ (не имеющие общих точек), ограничивающие некоторую (связную) область S, когда ζ описывает контуры $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. При этом предполагается, что когда точка ζ описывает границу области Σ в положительном направлении (т. е. оставляя ее все время слева), тогда соответствующая точка z описывает границу области S также в положительном направлении.*

При этих условиях соотношение $z = \omega(\zeta)$ устанавливает конформное отображение области Σ на S, и обратно.

Предыдущие теоремы легко обобщить в различных направлениях (например, на случай, когда в состав границы входят разомкнутые линии), но мы на этом не останавливаемся.

Замечание. Легко видеть, что если области Σ и S конформно отображены друг на друга соотношением вида (1), то при обходе границы области Σ в положительном направлении (т. е. когда область Σ остается слева) соответствующая точка z будет обходить границу области S также в положительном направлении [4].

Мы не ввели этого условия в формулировку теоремы I, так как оно для доказательства не нужно; тех условий, которые перечислены в этой формулировке, уже достаточно, чтобы доказать теорему. Значит, направление обхода контура S непременно будет таким, как сказано выше. Но в формулировку теоремы II это условие ввести необходимо: в противном случае теорема может оказаться несправедливой.

---

[1]) Предполагается, что различным точкам γ отвечают различные точки L.

[2]) Osgood [1], стр. 377. Доказательство (вполне элементарное) проведено у этого автора в предположении, что контуры γ и L — кусочно-гладкие.

[3]) Доказательство почти ничем не отличается от доказательства предыдущей теоремы, приведенного у Осгуда.

[4]) Пусть ν — нормаль к границе области Σ, направленная внутрь области, а τ — касательная, проведенная в положительном направлении обхода; тогда по условию ν направлена влево от τ. Такое же соотношение должно быть между соответствующими направлениями нормали n и касательной t в точках границы области S ввиду того, что конформное отображение сохраняет не только углы, но и направление их отсчета. Здесь мы предполагаем, что отображение конформно вплоть до контура, но легко доказать указанное в тексте свойство и для общего случая.

§ 48. Простейшие примеры конформного отображения. 1. Дробно-линейная подстановка. Рассмотрим случай, когда z *дробно-линейная функция от* ζ:

$$z=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — постоянные (вообще комплексные), причем $ad-bc\neq 0$ [1]). В этом случае говорят, что z получается из ζ дробно-линейной подстановкой (или преобразованием). Решая соотношение (1) относительно ζ, получаем обратную подстановку, также дробно-линейную:

$$\zeta=\frac{-dz+b}{cz-a}. \tag{1'}$$

Значит, каждой точке плоскости ζ соответствует вполне определенная точка плоскости z, *и обратно.* Мы не исключаем и бесконечно удаленных точек. Именно, точке $\zeta=-\frac{d}{c}$ соответствует точка $z=\infty$, а точке $z=\frac{a}{c}$ — точка $\zeta=\infty$.

Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие неограниченных плоскостей z и ζ [2]).

Дробно-линейная подстановка обладает тем замечательным свойством, что она *сохраняет круги*, т. е. любой окружности плоскости ζ она приводит в соответствие также окружность плоскости z, и обратно. При этом прямые рассматриваются как частные случаи окружностей. Проще всего это доказать следующим образом. Уравнение любой окружности на плоскости z, как известно, имеет следующий вид:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \tag{а}$$

где A, B, C, D — действительные постоянные (при $A=0$ имеем прямую). Замечая, что $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, $x^2+y^2=z\bar{z}$, можно это уравнение написать и так:

$$Az\bar{z}+Mz+\bar{M}\bar{z}+D=0, \tag{б}$$

где A и D — действительные, а M, $\bar{M}$ — сопряженные комплексные постоянные. Легко убедиться, что, обратно, уравнение предыдущего вида всегда приводится к виду (а), если вернуться к действительным переменным x и y. Чтобы теперь получить уравнение линии, соответствующей на плоскости ζ нашей окружности, достаточно внести в (б) выражение (1). После устранения знаменателя и элементарных приведений получаем уравнение

$$A_0\zeta\bar{\zeta}+M_0\zeta+\bar{M}_0\bar{\zeta}+D_0=0,$$

[1]) Если бы $ad-bc=0$, то правая часть (1) была бы постоянной, не зависящей от ζ.

[2]) Можно показать, что соотношение вида (1) есть единственное, обладающее указанным свойством.

где A_0, D_0 — действительные, а M_0, $\overline{M}_0$ — сопряженные комплексные постоянные. Следовательно, мы опять получаем уравнение окружности, а это и требовалось доказать.

Одним из простейших частных случаев преобразования (1) является преобразование

$$z = \frac{R^2}{\zeta}, \quad \zeta = \frac{R^2}{z}, \tag{2}$$

где R — действительная постоянная; мы будем считать $R > 0$. Для того чтобы дать наглядное представление об этом преобразовании, напомним понятие *отражения точки в окружности*. Пусть Г — окружность радиуса R на плоскости с центром в начале O; пусть z — некоторая точка на этой плоскости. Построим другую точку z', связанную с z следующим образом:

$$z \cdot \bar{z}' = R^2. \tag{3}$$

Если $z = re^{i\vartheta}$, то, очевидно, $z' = r'e^{i\vartheta}$, где $r = |z|$ и $r' = |z'|$ — расстояния точек z и z' до O, связанные соотношением

$$rr' = R^2. \tag{3'}$$

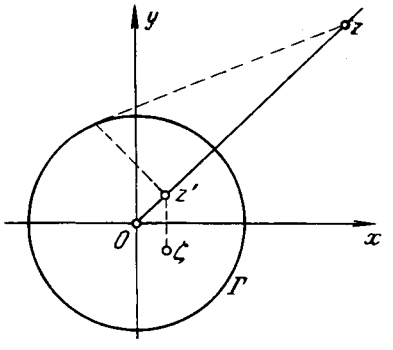


Рис. 20.

Таким образом, точки z и z' расположены на одном и том же луче, выходящем из O, и их расстояния до O связаны соотношением (3').

Точка z', связанная с точкой z указанным образом, и называется *отражением точки z в окружности* Г. Ясно, что в свою очередь z является отражением z' в том же смысле. Преобразование (3), связывающее z и z', называется также *инверсией*. Точки z и z' называются также *сопряженными* относительно окружности Г. Когда дана одна из них, то другую легко построить при помощи циркуля и линейки: если, например, данная точка z расположена вне Г, то для построения соответствующей точки z' достаточно провести касательную из z к Г и из точки касания опустить перпендикуляр на луч Oz (рис. 20).

При инверсии, очевидно, точки окружности Г соответствуют самим себе, точке $z = \infty$ соответствует точка $z' = 0$; внешние по отношению к Г точки переходят во внутренние, и наоборот.

Вернемся теперь к преобразованию (2). Представим себе для большей наглядности, что плоскость ζ наложена на плоскость z так, что начала и направления осей координат совпадают. Тогда, очевидно, точка ζ, соответствующая точке $z = re^{i\vartheta}$, будет определяться формулой

$$\zeta = r'e^{-i\vartheta} = \bar{z}'.$$

Следовательно, точку ζ можно построить так: отразить точку z в окружности Г и полученное отражение z' отразить (зеркально) в действительной оси; это последнее отражение и будет точкой ζ (рис. 20).

Рассмотрим более подробно еще дробно-линейную подстановку вида

$$z = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \quad \zeta = \frac{z}{1 + az}, \tag{4}$$

где a — действительная положительная постоянная.

Точкам $\zeta = 0$ и $\zeta = 1/a$ плоскости ζ соответствуют точки $z = 0$ и $z = \infty$ плоскости z; точке $\zeta = \infty$ соответствует точка $z = -1/a$.

Значит, прямым, проходящим через точку $\zeta = 0$ на плоскости ζ, будут соответствовать на плоскости z окружности, проходящие через точки

$$O(z = 0) \text{ и } O'\left(z = -\frac{1}{a}\right)$$

(рис. 21а, 21б). Далее, концентрическим окружностям с центром в точке $\zeta = 0$ на плоскости ζ будут соответствовать окружности на плоскости z,

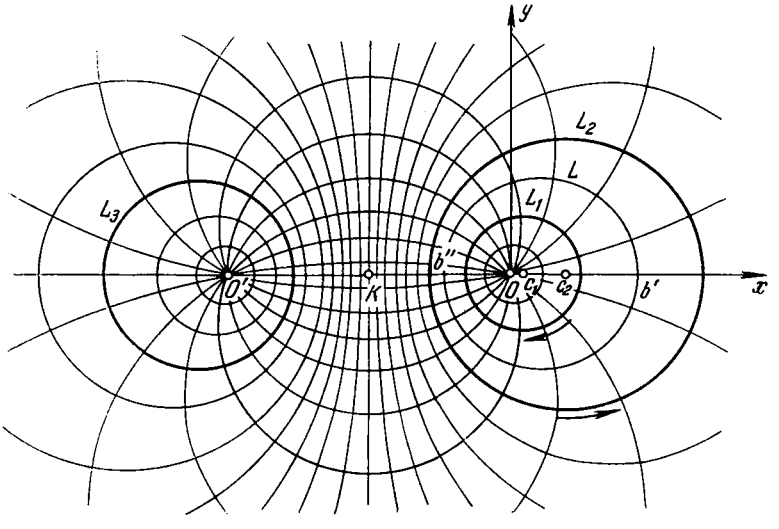


Рис. 21а.

пересекающие ортогонально окружности, проходящие через $z = 0$ и $z = -1/a$ (в силу конформности отображения); центры этих окружностей лежат, очевидно, на оси Ox.

Возьмем на плоскости ζ окружность γ радиуса ϱ с центром в точке $\zeta = 0$. Точкам

$$\zeta = +\varrho \text{ и } \zeta = -\varrho$$

соответствуют на плоскости z точки оси Ox:

$$b' = \frac{\varrho}{1 - a\varrho}, \quad b'' = -\frac{\varrho}{1 + a\varrho} < 0. \tag{5}$$

Значит, абсцисса c центра окружности L, соответствующей окружности γ, и радиус r ее определятся формулами:

$$c = \frac{1}{2}(b' + b'') = \frac{a\varrho^2}{1 - a^2\varrho^2}, \quad r = \frac{1}{2}(b' - b'') = \frac{\varrho}{1 - a^2\varrho^2}; \tag{6}$$

мы будем считать, что $r < 0$, если точка b' расположена левее точки b''.

Если $\varrho < 1/a$, то $b' > 0$ и $r > 0$. Когда ϱ приближается к $1/a$, то r и c беспредельно возрастают и окружность L обращается в прямую, перпендикулярную к Ox, проходящую через точку K с абсциссой $-1/2a$.

Если $\varrho > 1/a$, то соответствующая окружность на плоскости z находится уже по другую сторону упомянутой прямой [1]).

Рассмотрим теперь две окружности L_1 и L_2 на плоскости z, соответствующие окружностям γ_1 и γ_2 с радиусами ϱ_1 и ϱ_2 плоскости ζ, и

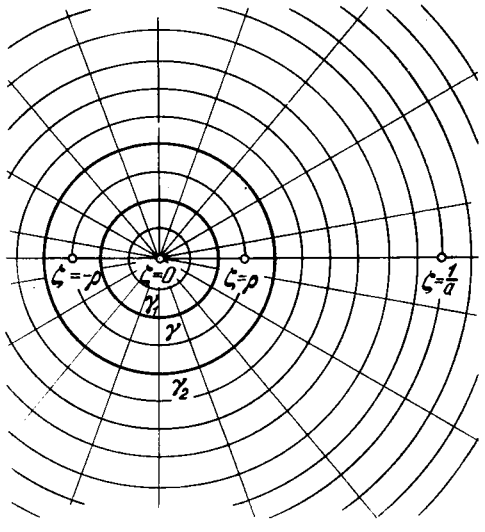


Рис. 21б.

будем считать, что $\varrho_1 < \varrho_2 < 1/a$. Тогда, очевидно, соотношение (4) дает конформное отображение области, заключенной между эксцентрическими окружностями L_1 и L_2, на кольцо, заключенное между γ_1 и γ_2.

Если даны элементы, определяющие первую область, т. е. радиусы

$$r_1, \ r_2 \qquad (r_2 > r_1)$$

окружностей L_1, L_2, и расстояние l между их центрами ($l < r_2 - r_1$), то легко найти величину a, фигурирующую в формуле (4), и радиусы ϱ_1 и ϱ_2 окружностей γ_1 и γ_2. Именно, для определения этих величин имеем

---

[1]) Легко видеть, что эта прямая (перпендикулярная к оси Ox и делящая пополам отрезок между точками O и O') есть общая радикальная ось всех окружностей L.

уравнения

$$r_1=\frac{\varrho_1}{1-a^2\varrho_1^2},\quad r_2=\frac{\varrho_2}{1-a^2\varrho_2^2},\quad \frac{a\varrho_2^2}{1-a^2\varrho_2^2}-\frac{a\varrho_1^2}{1-a^2\varrho_1^2}=l, \tag{7}$$

откуда после элементарных выкладок получаем [1]):

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{l}{\sqrt{(r_1^2-r_2^2)^2-2l^2(r_1^2+r_2^2)+l^4}},\\ \varrho_1&=\frac{\sqrt{1+4r_1^2a^2}-1}{2r_1a^2},\quad \varrho_2=\frac{\sqrt{1+4r_2^2a^2}-1}{2r_2a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким же образом легко найти отображение бесконечной области, состоящей из точек, расположенных вне двух данных окружностей L_1 и L_3 (рис. 21а), на кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями γ_1 и γ_3 с радиусами ϱ_1 и ϱ_3. В этом случае $\varrho_3 > 1/a$.

2. У л и т к а П а с к а л я. Положим:

$$z=\omega(\zeta)=R(\zeta+m\zeta^2),\quad R>0,\quad 0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Полагая $z = x + iy$, $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$, получаем:

$$x+iy=R(\varrho e^{i\vartheta}+m\varrho^2e^{2i\vartheta}),$$

откуда

$$x=R(\varrho\cos\vartheta+m\varrho^2\cos 2\vartheta),\quad y=R(\varrho\sin\vartheta+m\varrho^2\sin 2\vartheta). \tag{10}$$

Когда точка ζ описывает окружность γ радиуса $\varrho = 1$, то точка (x, y) описывает на плоскости z кривую L, параметрически представляемую равенствами

$$x=R(\cos\vartheta+m\cos 2\vartheta),\quad y=R(\sin\vartheta+m\sin 2\vartheta). \tag{11}$$

Эта кривая называется *улиткой Паскаля* [2]). Если, как мы предполагаем,

$$0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2},$$

то кривая эта не пересекает саму себя и при изменении ϑ от 0 до 2π точка z описывает ее в одном и том же направлении. Значит, на основании сказанного в конце предыдущего параграфа соотношение (9) дает конформное отображение области, заключенной внутри улитки Паскаля, на круг радиуса 1.

При $m = 0$ улитка Паскаля обращается в окружность, при $m = {}^1/_2$ — в *кардиоиду*. В этом последнем случае кривая имеет точку

---

[1]) Величины a, ϱ_1, ϱ_2 весьма просто также построить при помощи циркуля и линейки. Например, легко видеть, что точки $z = 0$ и $z = -1/a$ суть точки, сопряженные одновременно относительно обеих окружностей L_1 и L_2, а это свойство дает возможность сразу построить упомянутые точки; таким образом будет найдена величина $1/a$ — расстояние между ними.

[2]) Улитка Паскаля есть частный случай эпитрохоиды, которая будет рассмотрена в следующем пункте.

возврата при z, соответствующем значению $\zeta = -1$; для этого значения $\omega'(\zeta) = 0$ [1]).

Окружностям радиусов $\varrho < 1$ на плоскости ζ соответствуют также улитки Паскаля, параметрическое представление которых получим, полагая

$$\varrho = \text{const}$$

в уравнениях (10). Радиусам окружности γ соответствуют на плоскости z кривые, параметрическое представление которых получим, полагая в формулах (10)

$$\vartheta = \text{const}$$

(параметром будет ϱ, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$); кривые эти, как легко убедиться,—

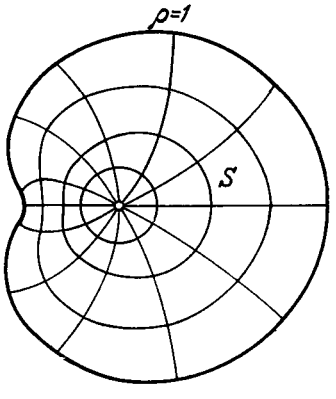


Рис. 22а.

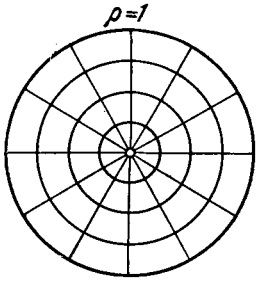


Рис. 22б.

параболы. На рис. 22а изображены кривые, соответствующие окружностям $\varrho = \text{const}$ и лучам $\vartheta = \text{const}$, изображенным на рис. 22б. Эти кривые пересекаются под прямыми углами, в силу конформности отображения.

3. Эпитрохоида. Положим:

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^n), \quad R > 0, \ 0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{n}, \tag{12}$$

где n — целое число, большее единицы. Если, как раньше, положить $z = x + iy$, $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$, то

$$x = R(\varrho \cos\vartheta + m\varrho^n \cos n\vartheta), \quad y = R(\varrho \sin\vartheta + m\varrho^n \sin n\vartheta). \tag{13}$$

Окружности $|\zeta| = \varrho = 1$ плоскости ζ соответствует на плоскости z кривая L, имеющая следующее параметрическое представление:

$$x = R(\cos\vartheta + m\cos n\vartheta), \quad y = R(\sin\vartheta + m\sin n\vartheta). \tag{14}$$

Эта кривая есть *эпитрохоида*. Действительно, если круг радиуса r_1 катится без скольжения (на плоскости z) по кругу радиуса r_2, касаясь

[1]) То обстоятельство, что $\omega'(\zeta)$ обращается в нуль на γ, не противоречит сказанному в предыдущем параграфе, так как в нашем случае (кардиоиды) граница отображаемой области имеет особую точку (точку возврата).

его извне, то точка M, связанная с подвижным кругом и находящаяся на расстоянии l от его центра, описывает кривую

$$x=(r_1+r_2)\cos\vartheta+l\cos n\vartheta,\quad y=(r_1+r_2)\sin\vartheta+l\sin n\vartheta, \qquad (14')$$

где ϑ обозначает полярный угол точки взаимного касания кругов, а $n=(r_1+r_2)/r_1$. Если положить:

$$r_1=\frac{R}{n},\quad r_2=R\frac{n-1}{n},\quad l=mR,$$

то кривая (14') совпадает с кривой (14). Так как, по условию, $m\leqslant 1/n$, то $l\leqslant r_1$. При $m<1/n$ точка M находится внутри катящегося круга, и поэтому кривая не пересекает саму себя. В предельном случае $m=1/n$ точка M находится на окружности катящегося круга, и наша кривая обращается в *эпициклоиду*, имеющую $n-1$ точек возврата. На рис. 23 изображен случай $n=1/m=4$.

На основании теоремы, указанной в § 47, легко заключить, что соотношение (12) отображает область S, заключенную внутри кривой L, на область $|\zeta|<1$.

Окружностям $\varrho=\text{const}$ плоскости ζ соответствуют на плоскости z также эпитрохоиды, параметрическое представление которых мы получим, полагая $\varrho=\text{const}$ в формулах (13).

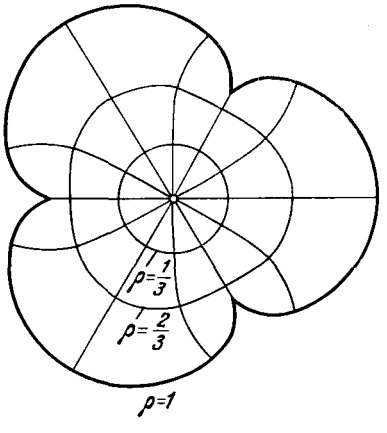


Рис. 23.

При $n=2$ кривая L обращается в улитку Паскаля, рассмотренную в предыдущем пункте.

4. Гипотрохоида. Положим:

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta^n}\right),$$
$$R>0,\quad 0\leqslant m\leqslant\frac{1}{n}, \qquad (15)$$

где n — целое положительное число.

В этом случае контур L, соответствующий окружности $|\zeta|=1$, есть, как легко видеть, *гипотрохоида*, не пересекающая саму себя, описываемая точкой M круга радиуса r_1, катящегося без скольжения по кругу радиуса r_2 и касающегося его изнутри, причем если l обозначает расстояние точки M до центра катящегося круга, то

$$r_1=\frac{R}{n},\quad r_2=R\frac{n+1}{n},\quad l=mR.$$

Легко видеть, что соотношение (15) отображает часть плоскости z, находящуюся вне L, на область $|\zeta|>1$ плоскости ζ. Окружностям $|\zeta|=\varrho=\text{const}>1$ плоскости ζ соответствуют на плоскости z также гипотрохоиды. В случае $n=1$ контур L обращается в эллипс; этот случай будет рассмотрен в следующем пункте. При $m=1/n$ контур L обращается в *гипоциклоиду*, имеющую $n+1$ точек возврата.

При $n = 1/m = 2$ или $n = 1/m = 3$ контур L имеет соответственно три или четыре точки возврата и приближается по форме к треугольнику или квадрату. Окружностям радиусов $\varrho > 1$ плоскости ζ соответствуют на плоскости z гипотрохоиды, также приближающиеся, если ϱ близко к единице, по форме к треугольнику или квадрату с закругленными углами [1]). На рис. 24 и 25 изображены соответственно случаи

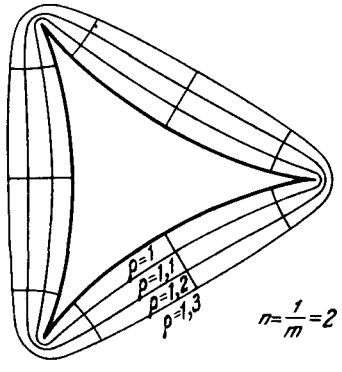


Рис. 24.

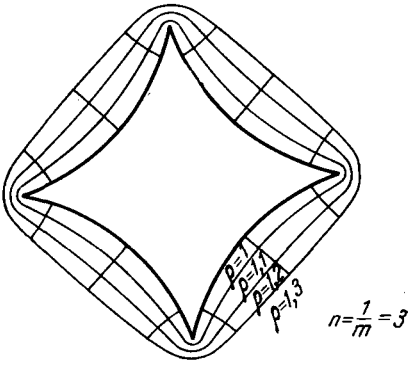


Рис. 25.

$n = 1/m = 2$ и $n = 1/m = 3$. Если в формуле (15) заменить ζ на $1/\zeta$, то мы получим отображение рассматриваемой области на круг $|\zeta| < 1$; в этом случае

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta^n\right). \tag{15'}$$

5. Эллиптическое кольцо. Положим:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad R > 0, \quad m \geqslant 0, \tag{16}$$

или при тех же обозначениях, что выше,

$$x = R\left(\varrho + \frac{m}{\varrho}\right)\cos\vartheta, \quad y = R\left(\varrho - \frac{m}{\varrho}\right)\sin\vartheta. \tag{17}$$

Окружности радиуса $\varrho = \varrho_1$ соответствует на плоскости z эллипс, параметрическое представление которого есть

$$x = R\left(\varrho_1 + \frac{m}{\varrho_1}\right)\cos\vartheta, \quad y = R\left(\varrho_1 - \frac{m}{\varrho_1}\right)\sin\vartheta.$$

Если $\varrho_1^2 \geqslant m$, то полуоси эллипса будут:

$$a_1 = R\left(\varrho_1 + \frac{m}{\varrho_1}\right), \quad b_1 = R\left(\varrho_1 - \frac{m}{\varrho_1}\right) \tag{18}$$

и точка z описывает его против часовой стрелки, если точка ζ движется по окружности $\varrho = \varrho_1$ также против часовой стрелки.

---

[1]) Ясно, что соотношение (15) дает отображение бесконечной плоскости с отверстием, ограниченным такой кривой, на бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса ϱ. Подстановкой $\zeta = \varrho\zeta'$ мы можем сделать радиус равным единице

Значит, если мы на плоскости ζ возьмем две окружности γ_1 и γ_2 радиусов ϱ_1 и ϱ_2, причем $\varrho_2 > \varrho_1 \geqslant \sqrt{m}$, то на основании сказанного в конце § 47 получим отображение области, заключенной между эллипсами L_1 и L_2, соответствующими этим окружностям, на круговое кольцо, заключенное между γ_1 и γ_2. Наши эллипсы будут конфокальны, так как расстояние c от фокусов эллипса L_1 до начала координат дается формулой $c^2 = a_1^2 - b_1^2 = 4mR^2$, т. е. не зависит от ϱ_1.

Окружностям, соответствующим различным значениям ϱ ($\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$), будут соответствовать эллипсы, заключенные между L_1 и L_2 и конфокальные с ними. Лучам $\vartheta = \text{const}$ плоскости ζ будут соответствовать конфокальные гиперболы, имеющие те же фокусы, что и эллипсы. Эти эллипсы и гиперболы пересекаются, конечно, под прямыми углами (рис. 26).

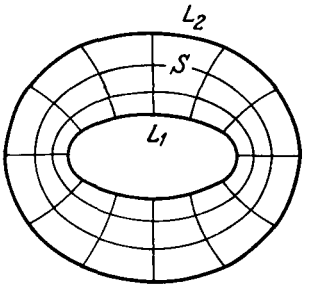


Рис. 26.

Мы можем увеличить ϱ_2 до бесконечности. Тогда мы получим отображение бесконечной области, состоящей из точек, расположенных вне эллипса L_1, на бесконечную область, состоящую из точек, находящихся вне γ_1. В этом случае мы всегда будем брать для простоты $\varrho_1 = 1$ и, следовательно, $m \leqslant 1$. При $m = 1$ эллипс обращается в прямолинейную щель. При $m = 0$ мы получим окружность. Если в формуле (16) заменим ζ на $1/\zeta$, т. е. положим:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right), \quad R > 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1, \tag{16'}$$

то получим отображение плоскости с эллиптическим отверстием на круг $|\zeta| < 1$.

6. Как было только что сказано, соотношение

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \omega_1(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right), \quad R > 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1 \tag{19}$$

отображает на круг $|\zeta| < 1$ бесконечную плоскость z_1 с эллиптическим отверстием. Уравнение границы отверстия будет

$$\frac{x_1^2}{R^2(1+m)^2} + \frac{y_1^2}{R^2(1-m)^2} = 1. \tag{20}$$

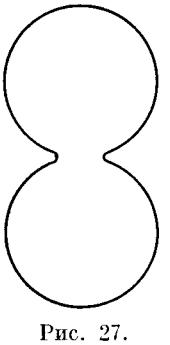
Как было сказано, при $m = 1$ эллипс обращается в прямолинейную щель. Произведя подстановку

$$z = \frac{1}{z_1}, \tag{21}$$

что приводит к соотношению

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\zeta}{R(1+m\zeta^2)}, \tag{22}$$

получим отображение на круг $|\zeta| < 1$ конечной области, ограниченной так называемой лемнискатой Бута (Booth).


Рис. 27.

Когда m мало отличается от единицы, то область эта мало отличается от фигуры, состоящей из двух касающихся друг друга кругов. На рис. 27 изображена кривая, соответствующая $m = 0{,}8$.

Если же вместо подстановки (21) произвести подстановку

$$z - c = \frac{1}{z_1 - c},$$

где точка c расположена вне эллипса (20), то, как легко видеть, получим отображение на круг $|\zeta| < 1$ некоторой области, которая при $m = 1$ обращается в бесконечную плоскость, разрезанную вдоль дуги окружности [1]).

§ 49. Криволинейные координаты, связанные с конформным отображением на круговую область. В дальнейшем нам придется пользоваться конформным отображением данной области S, находящейся на плоскости z, на область Σ плоскости ζ, представляющую собой либо круг, либо круговое кольцо, либо бесконечную плоскость с круговым отверстием; начало $\zeta = 0$ мы будем брать в центре.

Во всех этих случаях естественно ввести в рассмотрение полярные координаты ϱ и ϑ на плоскости ζ, положив $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$.

Окружностям $\varrho = \text{const}$ и радиусам $\vartheta = \text{const}$ плоскости ζ соответствуют на плоскости z некоторые кривые, которые мы также будем обозначать через $\varrho = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$.

Если S — конечная область, ограниченная одним замкнутым контуром L, а Σ — круг радиуса $\varrho = 1$ с центром в точке $\zeta = 0$, то можно всегда считать, что точки $z = 0$ и $\zeta = 0$ соответствуют друг другу. Тогда кривые $\varrho = \text{const}$ на плоскости z суть простые замкнутые линии, окружающие точку $z = 0$. Кривые же $\vartheta = \text{const}$ все выходят из точки $z = 0$ и кончаются на контуре L. Сам контур L соответствует $\varrho = 1$.

В случае, если S — бесконечная область, ограниченная простым замкнутым контуром L, а Σ — бесконечная плоскость с круговым отверстием и если точки $\zeta = \infty$ и $z = \infty$ соответствуют друг другу (этого всегда, как известно, можно достигнуть), то кривые $\varrho = \text{const}$ суть замкнутые линии, окружающие контур L, а кривые $\vartheta = \text{const}$ начинаются на контуре L и уходят в бесконечность. Такое же расположение линий $\varrho = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$ будем иметь в случае, когда бесконечная область S отображается на круг $|\zeta| < 1$.

Легко также уяснить себе расположение кривых $\varrho = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$ в случае области S, ограниченной двумя замкнутыми контурами и отображаемой на круговое кольцо Σ.

Величины ϱ и ϑ можно рассматривать как криволинейные координаты точек (x, y) плоскости z. Величины x и y связаны с ϱ и ϑ соотношением (при обозначениях предыдущих параграфов)

$$x + iy = \omega(\zeta) = \omega(\varrho e^{i\vartheta}); \tag{1}$$

[1]) Действительно, при $m = 1$ эллипс обращается в отрезок прямой, а соответствующий ему контур — в дугу окружности, ибо при дробно-линейной подстановке прямая обращается в окружность (в частном случае остается прямой).

линии $\varrho = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$ будут координатными линиями; эти линии в силу конформности отображения ортогональны между собой.

Пусть дана какая-либо точка плоскости z. Проведем через нее линии

$$\varrho = \text{const} \quad \text{и} \quad \vartheta = \text{const}.$$

Пусть (ϱ) обозначает касательную к линии $\vartheta = \text{const}$, проведенную в сторону возрастания ϱ. Пусть (ϑ) есть касательная к линии $\varrho = \text{const}$, проведенной в сторону возрастания ϑ. Эти касательные мы будем называть осями криволинейных координат, связанными с точкой (ϱ, ϑ). Система осей (ϱ), (ϑ) в указанном порядке ориентирована так, как и система Ox, Oy, т. е. если смотреть вдоль оси (ϱ), то ось (ϑ) будет направлена влево. Это следует из того, что при нашем конформном отображении направление отсчета углов не изменяется.

Пусть теперь A — некоторый вектор на плоскости z, имеющий начало в точке $z = \omega(\varrho e^{i\vartheta})$ (рис. 28). Проекции этого вектора на Ox и Oy обозначим через A_x, A_y, а на оси (ϱ) и (ϑ) — через A_ϱ, A_ϑ. Найдем связь между ними. Имеем очевидно:

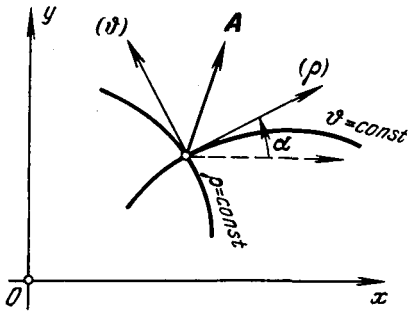


Рис. 28.

$$A_\varrho + iA_\vartheta = e^{-i\alpha}(A_x + iA_y), \tag{2}$$

где α — угол, составляемый осью (ϱ) с осью Ox и отсчитываемый от этой последней в положительном направлении. Чтобы вычислить $e^{i\alpha}$, поступим так. Придадим точке z смещение dz в направлении касательной (ϱ). Тогда соответствующая точка ζ получит смещение $d\zeta$ в радиальном направлении. Имеем поэтому:

$$dz = e^{i\alpha}|dz|, \quad d\zeta = e^{i\vartheta}|d\zeta|,$$

откуда

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta)\,d\zeta}{|\omega'(\zeta)|\cdot|d\zeta|} = e^{i\vartheta}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|},$$

$$e^{-i\alpha} = e^{-i\vartheta}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\bar\zeta}{\varrho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}. \tag{3}$$

Значит, окончательно:

$$A_\varrho + iA_\vartheta = \frac{\bar\zeta}{\varrho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}(A_x + iA_y). \tag{4}$$

§ 50. Преобразование формул плоской теории упругости. В дальнейшем нам потребуются выражения величин

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

(производные функции Эри), компонент смещения и напряжения, через

новую переменную ζ, вводимую соотношением

$$z = \omega(\zeta). \tag{1}$$

Обозначим через

$$\varphi_1(z),\ \psi_1(z),\ \Phi_1(z),\ \Psi_1(z)$$

то, что раньше было обозначено соответственно через

$$\varphi(z),\ \psi(z),\ \Phi(z),\ \Psi(z),$$

и введем такие новые обозначения:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(z) = \varphi_1(\omega(\zeta)), \quad \psi(\zeta) = \psi_1(z) = \psi_1(\omega(\zeta)), \tag{2}$$

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(z) = \frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \Psi_1(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{3}$$

При этих обозначениях формула (4) § 31 примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \tag{4}$$

а формула (1) § 32— вид

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \tag{5}$$

Легко также найти компоненты v_ρ, v_ϑ смещения относительно наших криволинейных координат, т. е. проекции смещения на оси (ϱ), (ϑ). Именно, на основании формулы (4) § 49 имеем:

$$v_\rho + iv_\vartheta = \frac{\bar\zeta}{\varrho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}(u+iv), \tag{6}$$

откуда

$$2\mu|\omega'(\zeta)|(v_\rho + iv_\vartheta) = \frac{\bar\zeta}{\varrho}\overline{\omega'(\zeta)}\left\{\varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right\}. \tag{7}$$

Найдем, наконец, компоненты напряжения в наших криволинейных координатах.

Будем эти компоненты обозначать через $\widehat{\varrho\varrho}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{\varrho\vartheta}$, понимая под этим следующее: если взять прямолинейные, прямоугольные координаты $O'x'y'$ такие, что ось $O'x'$ совпадает с осью (ϱ), а ось $O'y'$ — с осью (ϑ), то

$$\widehat{\varrho\varrho} = X'_{x'},\ \widehat{\vartheta\vartheta} = Y'_{y'},\ \widehat{\varrho\vartheta} = X'_{y'}$$

(ср. § 39). На основании формул (8) § 8 будем иметь:

$$\widehat{\varrho\varrho} + \widehat{\vartheta\vartheta} = X_x + Y_y,\ \widehat{\vartheta\vartheta} - \widehat{\varrho\varrho} + 2i\widehat{\varrho\vartheta} = (Y_y - X_x + 2iX_y)e^{2i\alpha}, \tag{8}$$

откуда на основании формул (9) и (10) § 32 и формулы (3) предыдущего параграфа, которая дает:

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\varrho^2}\frac{(\omega'(\zeta))^2}{|\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2}{\varrho^2}\frac{(\omega'(\zeta))^2}{\omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)}} = \frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\varrho^2\overline{\omega'(\zeta)}},$$

легко получаем:

$$\widehat{\varrho\varrho}+\widehat{\vartheta\vartheta}=4\operatorname{Re}\Phi(\zeta)=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}], \tag{9}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}-\widehat{\varrho\varrho}+2i\widehat{\varrho\vartheta}=\frac{2\zeta^2}{\varrho^2\omega'(\zeta)}\overline{\{\omega(\zeta)\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\}}. \tag{10}$$

Наконец, из формул (9) и (10) получаем вычитанием еще формулу:

$$\widehat{\varrho\varrho}-i\widehat{\varrho\vartheta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{\zeta^2}{\varrho^2\omega'(\zeta)}\overline{\{\omega(\zeta)\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\}}, \tag{11}$$

дающую напряжения, действующие на контур $\varrho=\text{const}$ с той стороны, в какую возрастает ϱ. Формулы (7), (9)—(11) аналогичны формулам, данным Г. В. Колосовым [1, 2].

Добавим еще одну формулу, относящуюся к бесконечной области S, отображенной на бесконечную область Σ так, что точке $\zeta=\infty$ соответствует точка $z=\infty$.

В этом случае при больших $|z|$ мы имеем по формулам (4) и (5) § 36:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+\Gamma z+\varphi_1^0(z),\\ \psi_1(z)&=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+\Gamma' z+\psi_1^0(z),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где φ_1^0, ψ_1^0 обозначают функции, голоморфные при $z=\infty$. Далее, мы имеем при достаточно больших $|\zeta|$ и $|z|$ [см. § 47, формула (2′)]:

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta+c_0+\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta^2}+\ldots \tag{13}$$

Внося это выражение в (12), получаем:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+R\Gamma\zeta+\varphi_0(\zeta), \tag{14}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+R\Gamma'\zeta+\psi_0(\zeta), \tag{15}$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ обозначают голоморфные при $\zeta=\infty$ функции.

§ 51. Граничные условия в преобразованной области. Рассмотрим сперва случай, когда область S (конечная или бесконечная) ограничена одним простым замкнутым контуром L. Отобразим эту область на круг радиуса 1 или на бесконечную область, находящуюся вне этого круга (принципиально безразлично, каким отображением пользоваться, но вообще в практических вопросах удобнее брать первое отображение в случае конечной области S, а второе — в случае бесконечной).

Граничные условия первой основной задачи (заданы внешние напряжения, действующие на границу) могут быть выражены двояко. Во-первых, можно исходить из условия в виде (2) § 41, которое в новых

обозначениях запишется так:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f_1 + if_2 + \text{const} \quad \text{на } L.$$

Введя сюда переменную ζ соотношением $z = \omega(\zeta)$ и обозначая через $\sigma = e^{i\vartheta}$ произвольную точку на окружности γ, соответствующей контуру L, придадим этому условию вид [см. формулу (4) предыдущего параграфа]:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + \text{const} \quad \text{на } \gamma. \tag{1}$$

Выражение $f_1 + if_2$ в правой части этой формулы следует, разумеется, рассматривать теперь как заданную функцию точки $\sigma = e^{i\vartheta}$ окружности γ или, что сводится к тому же, как функцию дуги ϑ этой окружности. Функция $f_1 + if_2$ определяется на γ следующим образом.

Согласно формуле (3) § 41 выражение

$$f_1 + if_2 = i\int_{t_0}^{t} (X_n + iY_n)\,ds \tag{2}$$

является заданной функцией точки t контура L. Но так как между точками t и σ контуров L и γ имеется однозначно обратимое соответствие $t = \omega(\sigma)$, то $f_1 + if_2$ является определенной функцией точки σ; эту функцию, таким образом, мы можем считать заданной.

Граничное условие первой основной задачи можно выразить и при помощи функций Φ и Ψ, если исходить из формулы (11) § 50, которая дает (при $\varrho = 1$):

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\sigma^2}{\overline{\omega'(\sigma)}}\{\overline{\omega(\sigma)}\,\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)\} = \widehat{\varrho\varrho} - i\widehat{\varrho\vartheta} \quad \text{на } \gamma, \tag{3}$$

причем $\widehat{\varrho\varrho}$ и $\widehat{\varrho\vartheta}$ следует считать заданными функциями точки σ или, что все равно, дуги ϑ контура γ.

Граничное условие второй основной задачи напишется на основании формулы (5) § 50 так:

$$\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \quad \text{на } \gamma, \tag{4}$$

где g_1, g_2 представляют собой граничные значения компонент смещения u и v (относительно *старых* осей координат Ox, Oy), представляющие собой заданные функции точки σ или дуги ϑ окружности γ.

Совершенно аналогично можно поступить в случае *двусвязной* области, ограниченной двумя простыми замкнутыми контурами L_1 и L_2, отобразив ее на круговое кольцо (ср. сказанное в § 41).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В настоящей главе дается решение некоторых простейших граничных задач плоской теории упругости при помощи степенных рядов. Этот способ решения непосредственно применяется к областям, ограниченным одной окружностью или двумя концентрическими окружностями. Конформное же отображение дает возможность распространить способ на области более общего вида.

I. О РЯДАХ ФУРЬЕ

§ 52. О рядах Фурье в комплексной форме. В дальнейшем нам придется пользоваться разложением данных функций в ряды Фурье, причем будет удобнее представлять их в комплексной форме; об этой форме мы и скажем несколько слов.

Пусть $f(\vartheta)$ — действительная функция, заданная в промежутке

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi.$$

При весьма общих условиях [1]) ее, как известно, можно представить

---

[1]) Для того чтобы функция $f(\vartheta)$ была разложима в ряд Фурье, достаточно, например, чтобы она удовлетворяла в рассматриваемом промежутке $(0, 2\pi)$ так называемым *условиям Дирихле*, которые заключаются в следующем: функция непрерывна в рассматриваемом промежутке, за возможным исключением конечного числа разрывов первого рода, и имеет конечное число максимумов и минимумов. Под разрывом первого рода мы понимаем разрыв, обладающий тем свойством, что если ϑ_0 есть точка разрыва, то при приближении аргумента ϑ к значению ϑ_0 слева или справа функция $f(\vartheta)$ стремится к конечным (различным) пределам («предел слева» и «предел справа»), которые условно обозначаются соответственно через $f(\vartheta_0 - 0)$ и $f(\vartheta_0 + 0)$. Условия Дирихле предполагают также, что при приближении ϑ к концам промежутка 0 и 2π функция $f(\vartheta)$ стремится к определенным пределам; эти пределы обозначаются через $f(+0)$ и $f(2\pi - 0)$.

При соблюдении условий Дирихле ряд Фурье (1) сходится во всех точках промежутка $(0, 2\pi)$ к функции

$$\frac{f(\vartheta_0 - 0) + f(\vartheta_0 + 0)}{2},$$

совпадающей в точках непрерывности с $f(\vartheta_0)$. На концах 0 и 2π промежутка ряд дает

в виде ряда Фурье

$$f(\vartheta)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\vartheta+\beta_k\sin k\vartheta), \tag{1}$$

где

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta,\quad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

Подставляя в формулу (1) известные выражения

$$\cos k\vartheta=\frac{e^{ik\vartheta}+e^{-ik\vartheta}}{2},\quad \sin k\vartheta=\frac{e^{ik\vartheta}-e^{-ik\vartheta}}{2i},$$

получаем разложение

$$f(\vartheta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_k-i\beta_k}{2}e^{ik\vartheta}+\frac{\alpha_k+i\beta_k}{2}e^{-ik\vartheta}\right\}, \tag{1'}$$

или, вводя обозначения

$$\frac{\alpha_0}{2}=a_0,\quad \frac{\alpha_k-i\beta_k}{2}=a_k,\quad \frac{\alpha_k+i\beta_k}{2}=a_{-k}, \tag{2'}$$

$$f(\vartheta)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ke^{ik\vartheta}+a_{-k}e^{-ik\vartheta}). \tag{3}$$

Предыдущую формулу можно переписать, очевидно, еще так:

$$f(\vartheta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ke^{ik\vartheta}, \tag{4}$$

где значок суммирования [1]) пробегает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

величину

$$\frac{f(+0)+f(2\pi-0)}{2}.$$

Если $f(\vartheta)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и непрерывна во всем промежутке $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$, и если, кроме того, $f(0)=f(2\pi)$, то ряд Фурье дает значение $f(\vartheta)$ во всем промежутке, включая концы; в этом случае ряд сходится равномерно.

Доказательство приведенных здесь утверждений см., например, в курсе В. И. Смирнова [1], т. II.

Заметим, наконец, что функции, удовлетворяющие условиям Дирихле, представляют частный случай так называемых «функций с ограниченной вариацией». Все сказанное в тексте (как здесь, так и в дальнейшем) останется справедливым, если заменить условия Дирихле менее стеснительным требованием, чтобы функция имела ограниченную вариацию.

[1]) Для полной строгости ряд (4) следует рассматривать как сокращенную запись ряда (3), т. е. как

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{k=+N}a_ke^{ik\vartheta}.$$

Чтобы получить выражение для коэффициентов a_k, заметим, что

$$\int_0^{2\pi} e^{in\vartheta}\,d\vartheta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ целое число, } n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{если } n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Умножая обе части формулы (4) на $e^{-in\vartheta}$, где n — любое целое число или нуль, и интегрируя по ϑ от 0 до 2π, получаем:

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(\vartheta)\,d\vartheta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\vartheta}\,d\vartheta.$$

Но на основании формулы (5) единственный член в правой части, отличный от нуля, получим при $k = n$, и этот член равен $2\pi \cdot a_n$. Следовательно,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, e^{-in\vartheta}\,d\vartheta. \tag{6}$$

Результат (6) справедлив всегда, когда функция $f(\vartheta)$ разлагается в обычный ряд Фурье. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что результат (6) получается непосредственно, если в формулах (2′) заменить α_k и β_k их выражениями (2).

Рассмотрим теперь выражение $f_1(\vartheta) + if_2(\vartheta)$, где f_1 и f_2 — действительные функции, разлагающиеся [в промежутке $(0,2\pi)$] в обычные ряды Фурье, а следовательно, и в ряды вида (4). Умножив второй из этих рядов на i и прибавив к первому, получаем, очевидно, опять разложение вида

$$f_1(\vartheta) + if_2(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\vartheta}, \tag{7}$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2)\, e^{-in\vartheta}\,d\vartheta \quad (n = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2, \ldots). \tag{8}$$

Разница с предыдущим случаем только та, что в первом случае величины a_n, a_{-n} — сопряженные комплексные числа, как это следует из выражений (2′) или формулы (6). В общем же случае a_n, a_{-n} не будут сопряженными величинами.

Замечание. Из формулы (7), отделяя действительную часть от мнимой, можно, обратно, найти обычные ряды Фурье для функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ в отдельности. Именно, полагая $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ (где α_k, β_k действительны), получаем:

$$f_1 + if_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_k + i\beta_k)(\cos k\vartheta + i \sin k\vartheta) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_k \cos k\vartheta - \beta_k \sin k\vartheta) + i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\beta_k \cos k\vartheta + \alpha_k \sin k\vartheta) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{(\alpha_k + \alpha_{-k}) \cos k\vartheta - (\beta_k - \beta_{-k}) \sin k\vartheta\} +$$

$$+ i\beta_0 + i \sum_{k=1}^{\infty} \{(\beta_k + \beta_{-k}) \cos k\vartheta + (\alpha_k - \alpha_{-k}) \sin k\vartheta\}.$$

Значит,

$$f_1(\vartheta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta),$$

$$f_2(\vartheta) = \frac{1}{2} A_0' + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k' \cos k\vartheta + B_k' \sin k\vartheta),$$

где

$$\frac{1}{2} A_0 = \alpha_0, \quad A_k = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad B_k = -\beta_k + \beta_{-k},$$

$$\frac{1}{2} A_0' = \beta_0, \quad A_k' = \beta_k + \beta_{-k}, \quad B_k' = \alpha_k - \alpha_{-k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этого, между прочим, следует, что разложение вида (7) возможно только единственным образом, ибо это утверждение справедливо, как известно, для обычных рядов Фурье. Задание же коэффициентов обычных рядов Фурье вполне определяет, как это видно из предыдущих формул, все коэффициенты α_k, β_k.

§ 53. О характере сходимости рядов Фурье. Напомним еще одно простое предложение, касающееся характера сходимости рядов Фурье.

Если функция $f(\vartheta)$ непрерывна и имеет непрерывные [1]) производные вплоть до порядка $\nu - 1$ в промежутке $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ и, кроме того, производную порядка ν, удовлетворяющую условиям Дирихле [2]) в том же промежутке, то коэффициенты α_k, β_k ряда Фурье (1) § 52 удовлетворяют неравенствам вида

$$|\alpha_k| < \frac{C}{k^{\nu+1}}, \quad |\beta_k| < \frac{C}{k^{\nu+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где C — положительная постоянная [3]).

Из этого, очевидно, следует, что коэффициенты a_k комплексного ряда Фурье (7) § 52 удовлетворяют также неравенствам вида

$$|a_k| < \frac{C}{|k|^{\nu+1}} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

если только $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ удовлетворяют условиям, которые были перечислены выше для $f(\vartheta)$.

---

[1]) Для краткости, говоря, что функция непрерывна в промежутке $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, мы подразумеваем, что функция не только непрерывна в этом промежутке, но и что *ее значения на концах промежутка равны между собой.*

[2]) Сказанное ниже остается справедливым, если относительно ν-й производной мы предположим только, что она имеет ограниченную вариацию.

[3]) Доказательство см., например, в курсе В. И. Смирнова [1], т. II.

Уже при $\nu = 1$, т. е. в случае, когда функция имеет первую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле, будем иметь:

$$|\alpha_k| < \frac{C}{k^2},$$
$$|\beta_k| < \frac{C}{k^2},$$

откуда следует, что ряд Фурье для $f(\vartheta)$ будет равномерно [1]) и абсолютно сходящимся. Действительно имеем:

$$|\alpha_k \cos k\vartheta + \beta_k \sin k\vartheta| \leqslant |\alpha_k| + |\beta_k| < \frac{2C}{k^2};$$

значит, члены ряда (1) меньше по абсолютной величине, чем члены сходящегося ряда с положительными членами, не зависящими от ϑ:

$$\sum_1^\infty \frac{2C}{k^2} = 2C \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

II. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОКРУЖНОСТЬЮ

§ 54. Решение первой основной задачи для круга [2]). Возьмем начало координат в центре круга, радиус которого обозначим через R. Пусть X_n, Y_n — заданные компоненты внешнего напряжения, действующего на окружность L этого круга. Мы будем считать их непрерывными (и однозначными) на L и рассматривать как функции полярного угла ϑ, отсчитываемого, как и дуга s, от положительной оси Ox.

Положим согласно формуле (3) § 41:

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (X_n + iY_n)\, ds = iR \int_0^\vartheta (X_n + iY_n)\, d\vartheta. \tag{1}$$

Мы знаем, что для существования регулярного решения функции f_1 и f_2 должны быть непрерывными и однозначными на L (§ 41, п. 2), т. е. должно быть

$$\int_0^{2\pi} (X_n + iY_n)\, d\vartheta = 0 \tag{2}$$

(условие равенства нулю главного вектора). Кроме того, условие равенства нулю главного момента (§ 41):

$$\int_L (f_1\, dx + f_2\, dy) = 0$$

---

[1]) Равномерная сходимость обеспечивается уже непрерывностью функции $f(\vartheta)$ и условием, чтобы эта функция была ограниченной вариации (или, в частности, чтобы она удовлетворяла условиям Дирихле).

[2]) Различные решения этой задачи даны многими авторами. В § 80 будет дано более простое, но менее элементарное решение.

принимает в нашем случае вид

$$\int_0^{2\pi} (-f_1 \sin\vartheta + f_2 \cos\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{3}$$

Мы будем считать условия (2) и (3) выполненными.

Граничное условие (2) § 41 напишется так (если в нем положить const = 0):

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 \quad \text{на } L; \tag{4}$$

мы применяем здесь для точек границы L то же обозначение z, что и для внутренних точек области.

Выражение $f_1 + if_2$ мы можем представить в виде ряда

$$f_1 + if_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\vartheta}, \tag{5}$$

коэффициенты которого вычисляются по правилу § 52; поэтому мы будем считать эти коэффициенты заданными.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, как мы знаем, должны быть голоморфны внутри L, причем можно считать на основании сказанного в § 41, что $\varphi(0) = 0$. Значит, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны разлагаться при $|z| < R$ в степенные ряды вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k; \tag{6}$$

в первом ряду отсутствует постоянный член вследствие условия $\varphi(0) = 0$.

Имеем далее:

$$\overline{\varphi'(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \bar{z}^{k-1}, \quad \overline{\psi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k \bar{z}^k. \tag{6'}$$

Предполагая, что указанные ряды сходятся не только внутри, но и на L, и внося их в (4), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k + z\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \bar{z}^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k \bar{z}^k = f_1 + if_2 \text{ на } L.$$

Но на окружности L имеем: $z = Re^{i\vartheta}$, $\bar{z} = Re^{-i\vartheta}$. Внося эти выражения в предыдущую формулу и замечая, что

$$z\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \bar{z}^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k R^k e^{-(k-2)i\vartheta} = \bar{a}_1 Re^{i\vartheta} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,\bar{a}_{k+2} R^{k+2} e^{-ki\vartheta},$$

получаем, принимая во внимание формулу (5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k e^{ik\vartheta} + \bar{a}_1 Re^{i\vartheta} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,\bar{a}_{k+2} R^{k+2} e^{-ik\vartheta} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k R^k e^{-ik\vartheta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta}.$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{i\vartheta}$, получаем:

$$a_1 R + \overline{a}_1 R = A_1, \quad a_1 + \overline{a}_1 = \frac{A_1}{R}. \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при $e^{in\vartheta}$ $(n > 1)$, получаем:

$$a_n R^n = A_n \ (n > 1). \tag{7'}$$

Наконец, сравнивая коэффициенты при $e^{-in\vartheta}$ $(n \geqslant 0)$, получаем:

$$(n+2)\,\overline{a}_{n+2} R^{n+2} + R^n \overline{a}'_n = A_{-n} \ (n \geqslant 0). \tag{8}$$

Равенство (7) возможно только в случае, если величина A_1 действительна, так как $a_1 + \overline{a}_1 = 2\alpha_1$, где α_1 — действительная часть коэффициента a_1. Итак, для возможности решения задачи должно быть:

$$A_1 = \text{действительная величина}. \tag{9}$$

Значение этого условия мы выясним ниже.

Если это условие выполнено, то действительная часть α_1 коэффициента a_1 определится формулой

$$\operatorname{Re} a_1 = \alpha_1 = \frac{A_1}{2R}. \tag{10}$$

Мнимая часть коэффициента a_1 остается, как и можно было ожидать, неопределенной, ибо она есть мнимая часть $\varphi'(0)$, которую можно фиксировать произвольно (§ 41), например положить равной нулю.

Далее, коэффициенты a_n $(n > 1)$ определяются из формулы (7'):

$$a_n = \frac{A_n}{R^n} \quad (n > 1), \tag{11}$$

и, наконец, коэффициенты a'_n $(n \geqslant 0)$ — из формулы (8) (в которой нужно заменить все величины сопряженными):

$$a'_n = \frac{\overline{A}_{-n}}{R^n} - (n+2)\,a_{n+2} R^2 = \frac{\overline{A}_{-n}}{R^n} - (n+2)\frac{A_{n+2}}{R^n} \quad (n \geqslant 0). \tag{12}$$

Таким образом, все коэффициенты разложений (6) определены и задача может считаться решенной, если только будет показано, что найденные ряды для $\varphi(z)$, $\psi(z)$ действительно удовлетворяют условиям задачи. К этому вопросу мы сейчас вернемся, но прежде выясним смысл условия (9). Имеем (см. § 52):

$$2\pi A_1 = \int_0^{2\pi} (f_1 + i f_2)\, e^{-i\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (f_1 \cos\vartheta + f_2 \sin\vartheta)\, d\vartheta + i \int_0^{2\pi} (f_2 \cos\vartheta - f_1 \sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

Значит, условие (9) сводится к условию (3), которое выражает, что главный момент внешних усилий равен нулю.

Остается выяснить вопрос, действительно ли удовлетворяют найденные ряды для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ всем условиям задачи. Мы дадим положитель-

ный ответ на этот вопрос, ограничиваясь для простоты случаем, когда функции X_n и Y_n не только непрерывны, но и имеют первые производные, удовлетворяющие условиям Дирихле [1]). Легко показать, что при этом условии ряды

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,\quad \varphi'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1},\quad \psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k$$

будут абсолютно и равномерно сходящимися на самой окружности L, а значит, и внутри L. Следовательно, функции φ, ψ, φ' будут непрерывными вплоть до контура и найденное решение — регулярным.

Для доказательства сходимости предыдущих рядов на L рассмотрим ряды, составленные из модулей их членов при $|z| = R$:

$$\sum |a_k| R^k,\quad \sum k |a_k| R^{k-1},\quad \sum |a'_k| R^k. \tag{а}$$

Так как X_n и Y_n имеют первые производные, удовлетворяющие условиям Дирихле, то функции f_1 и f_2 имеют вторые производные, удовлетворяющие условиям Дирихле. Поэтому на основании сказанного в § 53 получаем:

$$|A_k|<\frac{C}{k^3},\quad |A_{-k}|<\frac{C}{k^3}\qquad (k=1, 2, \ldots),$$

где C — некоторая постоянная. Используя эти неравенства, на основании формул (11) и (12) легко выводим

$$|a_k| R^k<\frac{C}{k^3},\quad k|a_k| R^{k-1}=\frac{C'}{k^2},\quad |a'_k| R^k<\frac{C''}{k^2},$$

где C', C'' — некоторые постоянные. Отсюда непосредственно следует сходимость рядов (а), а следовательно, равномерная и абсолютная сходимость рядов для φ, φ', ψ.

З а м е ч а н и е. Решая задачу, мы воспользовались граничным условием в виде (2) § 41. Мы могли бы воспользоваться и условием в виде (23) того же § 41. Предоставляем сделать это читателю (ср. § 56, где аналогичная задача будет решена именно этим способом).

§ 55. Решение второй основной задачи для круга [2]). Это решение совершенно аналогично предыдущему. Именно, из условия (1) § 41 имеем:

$$\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=2\mu(g_1+ig_2)\ \text{на}\ L. \tag{1}$$

Представляя заданное выражение $2\mu(g_1 + ig_2)$ в виде комплексного ряда Фурье

$$2\mu(g_1+ig_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta} \tag{2}$$

[1]) Нетрудно доказать пригодность решений и при несколько более общих условиях, но мы на этом не останавливаемся.

[2]) В § 81 будет дано другое решение.

и внося в формулу (1) разложения (6) предыдущего параграфа, получаем, как в упомянутом параграфе:

$$\varkappa \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k e^{ik\vartheta} - \bar{a}_1 R e^{i\vartheta} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, \bar{a}_{k+2} R^{k+2} e^{-ik\vartheta} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k R^k e^{-ik\vartheta} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\vartheta},$$

откуда (ср. предыдущий параграф)

$$R(\varkappa a_1 - \bar{a}_1) = A_1, \tag{3}$$

$$\varkappa a_n R^n = A_n \ (n > 1), \quad -(n+2)\, \bar{a}_{n+2} R^{n+2} - \bar{a}'_n R^n = A_{-n} \ (n \geqslant 0). \tag{4}$$

Предыдущими формулами определяются все коэффициенты. Коэффициент a_1 также вполне определяется формулой (3), в противоположность случаю предыдущего параграфа [1]). Именно, из равенства (3) и равенства, получаемого переходом к сопряженным значениям, следует:

$$\varkappa a_1 - \bar{a}_1 = \frac{A_1}{R}, \quad \varkappa \bar{a}_1 - a_1 = \frac{\bar{A}_1}{R},$$

откуда

$$a_1 = \frac{\varkappa A_1 + \bar{A}_1}{(\varkappa^2 - 1) R}$$

(вспомним, что всегда $\varkappa > 1$).

Как в предыдущем параграфе, легко покажем, что найденные ряды действительно удовлетворяют условиям задачи, если, например, g_1 и g_2 имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условиям Дирихле.

§ 56. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием [2]). Эту задачу можно решить методом, совершенно аналогичным методу § 54. Однако для разнообразия мы решим ее, применяя граничное условие в виде (23) § 41.

Пусть начало координат взято в центре отверстия радиуса R. При этом условии и при обозначениях § 39 будем иметь [3]):

$$\widehat{rr} - i\widehat{r\vartheta} = N - iT \text{ на обводе отверстия,} \tag{1}$$

---

[1]) Этого следовало ожидать, так как в случае задачи II нельзя произвольно фиксировать мнимую часть $\varphi'(0)$.

[2]) В § 82 эта задача будет решена иным методом для более общего случая эллиптического отверстия. См. также § 87а.

[3]) Легко проверить справедливость равенства (1), т. е. справедливость равенств

$$\widehat{rr} = N, \quad \widehat{r\vartheta} = T.$$

Определение $\widehat{rr}$ и $\widehat{r\vartheta}$ дано в § 39. Не надо упускать из виду, что оси (r) и (ϑ) направлены в нашем случае противоположно n и t. Зато $\widehat{rr}$ и $\widehat{r\vartheta}$ относятся к напряжению, действующему со стороны, противоположной направлению n.

где N и T (см. § 41, п. 6) обозначают проекции внешнего напряжения, действующего на окружность L отверстия, взятые соответственно на нормаль n, внешнюю по отношению к телу (т. е. направленную к центру отверстия), и на касательную t, направленную влево, если смотреть вдоль положительного направления нормали.

Условие (23) § 41 может быть получено непосредственно из формулы (5) § 39, которая дает [1]):

$$\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}-e^{2i\vartheta}[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]=N-iT \text{ на } L. \tag{2}$$

Обратимся теперь к формулам (4), (5) и (7) § 36 и заметим, что в нашем случае разложения (7) § 36 имеют место во всей области S, т. е. вне окружности L (см. замечание в конце § 36). Дифференцируя упомянутые формулы, получим для $\Phi(z)=\varphi'(z)$ и $\Psi(z)=\psi'(z)$ разложения вида:

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \qquad \Psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k' z^{-k}; \tag{3}$$

мы ввели здесь обозначения для коэффициентов, отличные от обозначений § 36.

В частности, в предыдущих формулах коэффициенты a_0, a_0', a_1, a_1' имеют следующие значения:

$$a_0=\Gamma=B, \quad a_0'=\Gamma'=B'+iC', \tag{4}$$

$$a_1=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad a_1'=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}; \tag{5}$$

мы считаем, что мнимая часть Γ положена равной нулю, на что мы имеем право.

Формулы (5) не нужны нам для решения задачи. Надо, конечно, только использовать условие однозначности смещений, которое в нашем случае выразится формулой [2])

$$\varkappa a_1+\bar{a}_1'=0. \tag{6}$$

Подставляя выражения (3) в формулу (2) и считая, что ряды сходятся на самой окружности L, получаем после очевидных преобразований (ср. § 54):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+k}{R^k}a_k e^{-ik\vartheta}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}e^{ik\vartheta}-a_0'e^{2i\vartheta}-\frac{a_1'}{R}e^{i\vartheta}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+2}'}{R^{k+2}}e^{-ik\vartheta}=$$

$$=N-iT \text{ на } L. \tag{7}$$

Разложим заданную на L функцию $N-iT$ в комплексный ряд Фурье

$$N-iT=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k e^{ik\vartheta}. \tag{8}$$

---

[1]) В формуле (23) § 41 вместо $e^{2i\vartheta}$ было бы $e^{2i\alpha}$, где $\alpha=\vartheta\pm\pi$ есть угол, составляемый нормалью n с осью Ox. Но $e^{2i\vartheta}=e^{2i\alpha}$, так как $e^{\pm 2\pi i}=1$.

[2]) См. формулу (7) § 35. Величины, обозначенные там через γ_k и γ_k', относятся к контуру L_k. Теперь у нас только один контур $L=L_1$; величины γ_k и γ_k' § 35 суть величины, обозначенные теперь через a_1 и a_1'.

Внесем это выражение в правую часть формулы (7) и сравним коэффициенты при различных степенях $e^{i\vartheta}$. Сравнение постоянных членов и коэффициентов при $e^{i\vartheta}$, $e^{2i\vartheta}$ дает:

$$2a_0 - \frac{a_2'}{R^2} = A_0, \quad \frac{\bar{a}_1}{R} - \frac{a_1'}{R} = A_1, \quad \frac{\bar{a}_2}{R^2} - a_0' = A_2. \tag{9}$$

Сравнение коэффициентов при $e^{in\vartheta}$ $(n \geqslant 3)$ дает:

$$\frac{\bar{a}_n}{R^n} = A_n \ (n \geqslant 3). \tag{10}$$

Наконец, сравнение коэффициентов при $e^{-in\vartheta}$ $(n \geqslant 1)$ дает:

$$\frac{1+n}{R^n} a_n - \frac{a_{n+2}'}{R^{n+2}} = A_{-n} (n \geqslant 1). \tag{11}$$

Формулы (10) определяют коэффициенты a_n, начиная с a_3:

$$\bar{a}_n = A_n R^n \ (n \geqslant 3). \tag{12}$$

Далее, мы знаем, что

$$a_0 = \Gamma, \quad a_0' = \Gamma', \tag{4'}$$

где Γ, Γ' — заданные величины, характеризующие распределение напряжений на бесконечности. Значит, последняя из формул (9) определит a_2:

$$a_2 = \bar{\Gamma}' R^2 + \bar{A}_2 R^2. \tag{13}$$

Для определения a_1 и a_1' необходимо принять во внимание условие (6) однозначности смещений, которое вместе со второй из формул (9) дает:

$$a_1 = \frac{\bar{A}_1 R}{1+\varkappa}, \quad a_1' = -\frac{\varkappa A_1 R}{1+\varkappa}. \tag{14}$$

Согласно первой из формул (9) получим:

$$a_2' = 2\Gamma R^2 - A_0 R^2, \tag{15}$$

и, наконец, формула (11) определяет все коэффициенты a_n', начиная с a_3':

$$a_n' = (n-1) R^2 a_{n-2} - R^n A_{-n+2} \quad (n \geqslant 3). \tag{16}$$

Таким образом, задача определения коэффициентов решена.

При помощи элементарных рассуждений, таких, как в § 54, легко показать, что если функции N и T имеют вторые производные, удовлетворяющие условиям Дирихле, то ряды, полученные для $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$, будут равномерно и абсолютно сходящимися на L (а следовательно, и вне L), откуда непосредственно вытекает, что они решают задачу.

З а м е ч а н и е. Если бы мы исходили не из граничного условия (2), а из условия (2) § 41, то получили бы для $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ряды, относительно которых могли бы показать элементарным способом, примененным в § 54, что они решают задачу, если X_n и Y_n имеют только *первые* производные, удовлетворяющие условиям Дирихле.

Таким образом, при применении граничного условия (23) § 41 [условие (2) настоящего параграфа] приходится налагать на задаваемые функции более ограничительные условия, чем в случае условия (2) § 41. Однако

легко видеть, что эти дополнительные ограничения обусловливаются не существом дела, а применяемым элементарным методом доказательства пригодности решения. В самом деле, почти очевидно (и это легко проверить непосредственно), что, исходя из условий (2) § 41, мы найдем для $\varphi(z)$, $\psi(z)$ ряды, получающиеся почленным интегрированием рядов для $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, найденных в настоящем параграфе. Но раз $\varphi(z)$, $\psi(z)$ удовлетворяют условиям задачи, то, очевидно, и функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ решают задачу.

§ 56a. Примеры. 1. О д н о с т о р о н н е е р а с т я ж е н и е п л а с т и н к и, о с л а б л е н н о й к р у г о в ы м о т в е р с т и е м. Пусть края кругового отверстия свободны от внешних напряжений и пусть на бесконечности действует растягивающее напряжение p в направлении оси Ox:

$$X_x^{(\infty)} = p, \quad Y_y^{(\infty)} = X_y^{(\infty)} = 0.$$

Тогда, как показывают формулы (10) § 36 (вспомним, что, по условию, $C = 0$),

$$\Gamma = \frac{p}{4}, \quad \Gamma' = -\frac{p}{2}. \tag{1}$$

Далее, так как на контуре $N - iT = 0$, то в формулах § 56 надо положить $A_k = 0$ при всех k. При этих условиях из формул (12) и (16) § 56 находим:

$$a_n = 0 \quad (n \geqslant 3); \qquad a_n' = 0 \quad (n \geqslant 5).$$

Далее, из формул (4), (14), (13), (15), (16) § 56 (из последней при $n = 3$ и 4) следует:

$$a_0 = \frac{p}{4}, \quad a_0' = -\frac{p}{2}, \quad a_1 = a_1' = 0, \quad a_2 = -\frac{p}{2}R^2,$$
$$a_2' = \frac{p}{2}R^2, \quad a_3' = 0, \quad a_4' = -\frac{3pR^4}{2}.$$

Следовательно, будем иметь окончательно:

$$\Phi(z) = \frac{p}{4}\left(1 - \frac{2R^2}{z^2}\right), \quad \Psi(z) = -\frac{p}{2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{3R^4}{z^4}\right), \tag{2}$$

и задача решена [1]).

Найдем теперь компоненты соответствующих напряжений в полярных координатах.

Формулы (4) § 39 дают, если положить $z = re^{i\vartheta}$:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta} &= 4\operatorname{Re}\Phi(z) = p\operatorname{Re}\left(1 - \frac{2R^2}{r^2}e^{-2i\vartheta}\right) = p\left(1 - \frac{2R^2}{r^2}\cos 2\vartheta\right), \\ \widehat{\vartheta\vartheta} - \widehat{rr} + 2i\widehat{r\vartheta} &= 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right]e^{2i\vartheta} = \\ &= p\left\{\frac{2R^2}{r^2}e^{-2i\vartheta} - e^{2i\vartheta} + \frac{R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}e^{-2i\vartheta}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) Впервые эта задача была решена Киршем (Kirsch) (Ztschr. d. Ver. d. Ing., 1898) совершенно иным путем. Ср. еще решение Г. В. Колосова [1], стр. 20—24. В § 82а будет дано решение для эллиптического отверстия.

откуда, отделяя действительные и мнимые части и комбинируя с (3), получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{rr} &= \frac{p}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{p}{2}\left(1-\frac{4R^2}{r^2}+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta,\\ \widehat{\vartheta\vartheta} &= \frac{p}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{p}{2}\left(1+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta,\\ \widehat{r\vartheta} &= -\frac{p}{2}\left(1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right)\sin 2\vartheta.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

На контуре отверстия (т. е. при $r = R$), как и следовало ожидать,

$$\widehat{rr} = \widehat{r\vartheta} = 0.$$

Значения $\widehat{\vartheta\vartheta}$ на контуре даны формулой

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = p(1-2\cos 2\vartheta) \quad \text{на } L.$$

Максимальные значения $\widehat{\vartheta\vartheta}$ получим при $\cos 2\vartheta = -1$, т. е. при

$$\vartheta = \pm\frac{\pi}{2};$$

они равны

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_{\max} = 3p,$$

т. е. *утроенному значению растягивающего напряжения.*

Для нахождения смещений вычислим функции

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)\,dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z)\,dz.$$

Получаем, отбрасывая несущественные постоянные:

$$\varphi(z) = \frac{p}{4}\left(z+\frac{2R^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{p}{2}\left(z+\frac{R^2}{z}-\frac{R^4}{z^3}\right). \qquad (2')$$

Тогда на основании формулы (3) § 39 будем иметь:

$$2\mu(v_r+iv_\vartheta) = e^{-i\vartheta}[\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] =$$
$$= \frac{p}{4}\left\{(\varkappa-1)r+\varkappa\frac{2R^2}{r}e^{-2i\vartheta}+\frac{2R^2}{r}e^{2i\vartheta}+2re^{-2i\vartheta}+\frac{2R^2}{r}-\frac{2R^4}{r^3}e^{2i\vartheta}\right\},$$

откуда, отделяя действительные и мнимые части, получаем:

$$v_r = \frac{p}{8\mu r}\left\{(\varkappa-1)r^2+2R^2+2\left[R^2(\varkappa+1)+r^2-\frac{R^4}{r^2}\right]\cos 2\vartheta\right\},$$

$$v_\vartheta = -\frac{p}{4\mu r}\left\{R^2(\varkappa-1)+r^2+\frac{R^4}{r^2}\right\}\sin 2\vartheta.$$

2. Всестороннее растяжение. Еще проще решается задача о всестороннем растяжении пластинки, ослабленной круговым отверстием, когда на бесконечности

$$X_x^{(\infty)} = Y_y^{(\infty)} = p, \quad X_y^{(\infty)} = 0.$$

Тогда на основании формул (10) § 36 будем иметь:

$$\Gamma = \frac{p}{2}, \quad \Gamma' = 0,$$

и совершенно так же, как в предыдущем примере, получим, что

$$a_0 = \frac{p}{2}, \quad a_2' = pR^2$$

и что все остальные коэффициенты разложений функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ равны нулю. Значит,

$$\Phi(z) = \frac{p}{2}, \quad \Psi(z) = \frac{pR^2}{z^2} \tag{5}$$

и

$$\varphi(z) = \frac{p}{2} z, \quad \psi(z) = -\frac{pR^2}{z}. \tag{5'}$$

Напряжения и смещения вычисляются, как в предыдущем примере, по формулам (4) и (3) § 39, из которых непосредственно имеем:

$$\widehat{rr} = p\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = p\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \quad \widehat{r\vartheta} = 0, \tag{6}$$

$$v_r = \frac{p}{4\mu r}[(\varkappa - 1) r^2 + 2R^2], \quad v_\vartheta = 0. \tag{6'}$$

Это решение можно было бы получить непосредственно и из решения предыдущего примера, налагая два односторонних растяжения соответственно по осям Ox и Oy.

3. Равномерное нормальное давление, приложенное к обводу кругового отверстия. Рассмотрим теперь случай, когда обвод отверстия подвержен равномерному нормальному давлению P, а на бесконечности напряжения равны нулю. Тогда мы будем иметь:

$$N = -P, \quad T = 0, \quad \Gamma = \Gamma' = 0.$$

В формуле (8) § 56 будем иметь:

$$A_0 = -P, \quad A_k = 0 \qquad (k \neq 0);$$

в соответствии с этим на основании формул § 56 легко получаем, что

$$a_2' = PR^2$$

и что все остальные коэффициенты разложений Φ и Ψ равны нулю. Значит, мы будем иметь:

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = \frac{PR^2}{z^2}, \quad \varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = -\frac{PR^2}{z}, \tag{7}$$

на основании чего легко получаем, как и выше, что

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} = -\frac{PR^2}{r^2}, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{PR^2}{r^2}, \quad \widehat{r\vartheta} = 0, \\ v_r = \frac{PR^2}{2\mu r}, \quad v_\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

4. Сосредоточенная сила, приложенная в точке неограниченной плоскости. Пусть на бесконечности напряжения равны нулю ($\Gamma = \Gamma' = 0$), а напряжения, приложенные

к контуру кругового отверстия, имеют постоянную величину и направление:

$$X_n = \frac{X}{2\pi R}, \quad Y_n = \frac{Y}{2\pi R}, \tag{8}$$

где X, Y — постоянные. Очевидно, (X, Y) — главный вектор внешних усилий.

При этих условиях нормальное и касательное напряжения N, T определяются формулами [1]):

$$N = -\frac{1}{2\pi R}(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta), \quad T = -\frac{1}{2\pi R}(-X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta),$$

откуда

$$\widehat{rr} - i\widehat{r\vartheta} = N - iT = -\frac{1}{2\pi R}(X - iY)e^{i\vartheta} \text{ на контуре.}$$

Значит, в формуле (8) § 56 не равен нулю только один коэффициент:

$$A_1 = -\frac{X - iY}{2\pi R},$$

и по формулам (14) и (16) (при $n = 3$) того же параграфа будем иметь:

$$a_1 = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad a_1' = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad a_3' = -R^2\frac{X + iY}{\pi(1+\varkappa)};$$

все остальные коэффициенты a_n, a_n' равны нулю

Таким образом, нашу задачу решают функции

$$\Phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}, \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} - \frac{X + iY}{\pi(1+\varkappa)}\frac{R^2}{z^3}.$$

Предположим теперь, что радиус отверстия беспредельно уменьшается, а напряжение (X_n, Y_n) беспредельно возрастает так, что главный вектор (X, Y) остается неизменным. Тогда предыдущие формулы принимают вид:

$$\Phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}, \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}. \tag{9}$$

При указанных условиях мы будем говорить, что в точке O приложена *сосредоточенная сила* (X, Y). Напряженное состояние, соответствующее действию сосредоточенной силы, определяется функциями Φ, Ψ, которые даются формулами (9).

Вычисление компонент напряжения и смещения никаких затруднений не представляет. Например, компоненты напряжения в полярных координатах будут даны формулами (вычисления производятся, как в предыдущих примерах):

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= -\frac{\varkappa+3}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta}{r}, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{\varkappa-1}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta}{r}, \\ \widehat{r\vartheta} &= \frac{\varkappa-1}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{X\sin\vartheta - Y\cos\vartheta}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

[1]) Не забудем, что нормаль n к контуру направлена к центру, так что она составляет с осью Ox угол $\vartheta \pm \pi$.

З а м е ч а н и е. Если мы рассматриваем тонкую пластинку («обобщенное плоское напряженное состояние»), то в предыдущих формулах, вместо $\varkappa$, надо взять

$$\varkappa^* = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$$

(см. § 32) и, кроме того, под X, Y следует подразумевать величины

$$\frac{X^{(0)}}{2h}, \quad \frac{Y^{(0)}}{2h},$$

где $X^{(0)}$ и $Y^{(0)}$ — компоненты сосредоточенной силы, приложенной к пластинке, а $2h$ — толщина пластинки. Действительно, не надо забывать, что X и Y рассчитываются на единицу высоты пластинки.

5. С о с р е д о т о ч е н н а я п а р а. Рассмотрим теперь случай, когда к краю отверстия приложено постоянное касательное напряжение T. Напряжения же на бесконечности пусть будут равны нулю. В этом случае будет:

$$\widehat{rr} = 0, \quad \widehat{r\vartheta} = T \text{ на контуре},$$

и в разложении (8) § 56 только один коэффициент $A_0 = -iT$ будет отличен от нуля.

Формулы § 56 дают:

$$a_2' = -A_0 R^2 = iTR^2;$$

все остальные величины a_n, a_n' обращаются в нуль. Следовательно, вводя обозначение

$$TR^2 = -\frac{M}{2\pi},$$

будем иметь:

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi}\frac{1}{z^2}. \tag{10}$$

M, очевидно, обозначает главный момент (относительно центра) внешних усилий, приложенных к обводу отверстия. Эти формулы остаются справедливыми и в предельном случае, если уменьшать беспредельно R и увеличивать T, так, однако, чтобы момент M оставался постоянным. В этом предельном случае формулы (10) определяют то, что мы будем называть действием на бесконечную плоскость *сосредоточенной пары* с моментом M, приложенной в начале координат.

Простые вычисления дают для компонент напряжения:

$$\widehat{rr} = \widehat{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \widehat{r\vartheta} = -\frac{M}{2\pi r^2}. \tag{11}$$

Ср. еще замечание в конце предыдущего примера.

§ 57. О сосредоточенных силах вообще. В § 56а (пример 4) мы нашли выражения для функций Φ и Ψ, соответствующих сосредоточенной силе, приложенной (в начале координат) к неограниченному телу. Пусть теперь область S имеет любую форму и пусть, кроме усилий обычного типа,

которым соответствуют функции Φ и Ψ, голоморфные в S, на тело действует сосредоточенная сила (X, Y), приложенная, скажем, в точке $z = 0$. Действие этой сосредоточенной силы налагается на действие напряжений обычного типа, и поэтому вблизи точки $z = 0$ функции Φ и Ψ будут иметь вид [см. формулы (9) § 56а]:

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \Psi_0(z), \tag{1}$$

где Φ_0 и Ψ_0 — голоморфные функции в окрестности точки $z = 0$. Если сосредоточенная сила приложена не в точке $z = 0$, а в произвольной точке $z = z_0$, то, взяв временно z_0 за начало вспомогательной системы координат, будем вместо формулы (1) иметь:

$$\Phi_1(z_1) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z_1} + \Phi_1^0(z_1), \quad \Psi_1(z_1) = \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z_1} + \Psi_1^0(z_1),$$

где $z_1 = z - z_0$. Возвращаясь к старой системе, получаем по формулам (3) и (4) § 38:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\cdot\frac{1}{z-z_0} + \Phi_0(z), \\ \Psi(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\cdot\frac{1}{z-z_0} - \frac{\bar{z}_0(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{(z-z_0)^2} + \Psi_0(z). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Индексом 0 отмечены функции, голоморфные в окрестности точки $z = z_0$.

Для функций φ и ψ получаем, интегрируя:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(z-z_0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(z-z_0) + \frac{\bar{z}_0(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\cdot\frac{1}{z-z_0} + \psi_0(z). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Совершенно аналогичным путем для сосредоточенной пары, приложенной к точке $z = z_0$, получаем, исходя из формул (10) § 56а:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi}\frac{1}{(z-z_0)^2} + \Psi_0(z), \tag{4}$$

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \frac{iM}{2\pi}\cdot\frac{1}{z-z_0} + \psi_0(z). \tag{5}$$

Мы видим, что место приложения изолированной сосредоточенной силы или пары есть изолированная особая точка функций φ, ψ, Φ, Ψ. Обратно, каждую изолированную особую точку $z_0 = x_0 + iy_0$ этих функций (если мы вообще допустим существование таких точек) можно рассматривать как точку приложения сосредоточенных сил и пар. Чтобы определить аналитический характер функций φ и ψ в окрестности этой точки, достаточно применить рассуждения § 35, выделив точку z_0 достаточно малым замкнутым контуром L_0 и рассматривая этот контур как одну из границ области S. Тогда на основании § 35 будем иметь в окрестности точки $z = z_0$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(z-z_0) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(z-z_0) + \psi^*(z), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где φ^* и ψ^* однозначны около точки z_0; X, Y суть компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру L_0 (или к любому другому контуру, окружающему точку z_0).

Функции φ^*, ψ^*, однозначные в окрестности изолированной особой точки z_0, могут быть представлены рядами Лорана:

$$\varphi^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(z - z_0)^n, \quad \psi^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha'_n + i\beta'_n)(z - z_0)^n. \tag{7}$$

Простой подсчет, основанный на формуле (5) § 33, показывает, что главный момент относительно начала координат усилий, приложенных к L_0 (с внутренней стороны), равен (если контур бесконечно мал)

$$M_0 = 2\pi\beta'_{-1} + \frac{\varkappa(x_0Y - y_0X)}{1+\varkappa} = 2\pi\beta'_{-1} - \frac{x_0Y - y_0X}{1+\varkappa} + x_0Y - y_0X. \tag{8}$$

Если принять во внимание, что главный вектор этих усилий есть (X, Y), то для главного момента M относительно точки z_0 по известной формуле механики получим:

$$M = M_0 - (x_0Y - y_0X) = 2\pi\beta'_{-1} - \frac{x_0Y - y_0X}{1+\varkappa}. \tag{9}$$

Значит, точка z_0 есть точка приложения сосредоточенной силы (X, Y) и сосредоточенной пары с моментом M.

Однако, как мы видим, задание X, Y и M еще далеко не определяет особенностей функций φ и ψ. Действительно, в разложениях (7) коэффициенты при отрицательных степенях $z - z_0$, которые и характеризуют особенности функций φ и ψ, могут быть какими угодно (лишь бы ряды сходились), за исключением мнимой части коэффициента $\alpha'_{-1} + i\beta'_{-1}$, определяемой формулой (9).

Итак, вопрос об особенностях, вызываемых действием сосредоточенной силы и пары, является в широкой мере неопределенным, если не вводить добавочных условий.

Если выше мы и получили вполне определенные выражения для этих особенностей [см. формулы (2)—(5)], то только потому, что ввели сосредоточенную силу и пару путем определенного предельного перехода.

Точно такие же выражения получаются и при ряде других предельных переходов. В качестве одного из простейших примеров, более или менее точно воспроизводящих обычные условия приложения «сосредоточенных» силы и пары, укажем на следующий. Представим себе, что в круговое отверстие, просверленное в бесконечной пластинке, вставлена жесткая шайба того же радиуса и спаяна с пластинкой вдоль своей окружности. Пусть на эту шайбу действует некоторая сила и пара (в плоскости пластинки). Решение задачи упругого равновесия пластинки при этих условиях будет дано ниже [1]). Если мы станем беспредельно уменьшать радиус

[1]) См. § 83а, примеры 3 и 4; там дано решение для более общего случая эллиптической шайбы.

шайбы, оставляя неизменными силу и пару, то упомянутое решение даст в пределе результат, совпадающий с полученными выше результатами.

В дальнейшем, говоря о сосредоточенных силах и парах, приложенных к внутренним точкам, мы будем считать, что соответствующие им особенности выражаются формулами (2) — (5).

Аналогично, говоря о сосредоточенных силах, приложенных к границе, мы будем иметь в виду случай, описанный в § 43.

З а м е ч а н и е. В окрестностях точек приложения сосредоточенных сил компоненты напряжения и смещения перестают быть ограниченными, что, очевидно, не допустимо с физической точки зрения; помимо этого, сами уравнения теории упругости перестают быть справедливыми для этих окрестностей.

Однако полученные для подобных случаев решения могут быть с успехом использованы на практике, если применять их к частям тела, не слишком близким к местам приложения сосредоточенных сил.

Кроме того, следует иметь в виду, что в местах приложения сосредоточенных сил (вернее, конечных сил, приложенных к весьма малым участкам) могут образоваться небольшие пластические зоны, что приводит к перераспределению напряжений в этих зонах и ликвидирует особенности.

Аналогичное имеет место и для сосредоточенных пар.

§ 57а. Применение к случаю наличия объемных сил. Приведенные выше формулы можно применить к нахождению частных решений уравнений плоской теории упругости при наличии объемных сил, что дает возможность привести эти уравнения к уравнениям для случая отсутствия объемных сил (§ 28). Для этого можно поступить, например, следующим образом. Отбросив в формулах (2) и (3) § 57 слагаемые Φ_0, Ψ_0, φ_0, ψ_0, мы получим некоторое частное решение (при отсутствии объемных сил), соответствующее действию сосредоточенной силы (X, Y), приложенной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Компоненты смещения, соответствующие этому решению, даются формулой

$$2\mu(u+iv) = \frac{-\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)} \ln[(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}, \qquad (1)$$

вытекающей из формулы (1) § 32 и из формул (3) § 57.

Аналогично могут быть вычислены компоненты напряжения на основании формул (9), (10) § 32 и формул (2) § 57.

Возьмем теперь, вместо X и Y, величины $X(x_0, y_0)\,dS_0$, $Y(x_0, y_0)\,dS_0$, где $X(x_0, y_0)$ и $Y(x_0, y_0)$ — некоторые (действительные) функции точки x_0, y_0, а $dS_0 = dx_0\,dy_0$ —(бесконечно малый) элемент площади, заключающий эту точку. Мы получим тогда компоненты смещений и напряжений, (приближенно) соответствующих действию объемных сил [с компонентами

$X(x_0, y_0)$, $Y(x_0, y_0)$] на часть тела, соответствующую элементу dS_0. Просуммировав полученные значения по всем элементам dS_0, мы получим, как легко предвидеть, некоторое частное решение, соответствующее действию объемных сил (X, Y) на рассматриваемое тело в целом.

В частности, для компонент смещения получим:

$$2\mu(u+iv) = -\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\iint_S (X+iY)\ln[(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]\,dx_0\,dy_0 + \\ + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\iint_S (X-iY)\frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\,dx_0\,dy_0. \quad (2)$$

Соответствующие компоненты напряжения могут быть вычислены либо непосредственно, аналогичным предыдущему путем, либо при помощи выражений для компонент напряжения через компоненты смещения, которые даются формулой (2) (см. также Добавление IV в конце книги). Можно непосредственно проверить, что при достаточно общих предположениях относительно функций $X(x_0, y_0)$, $Y(x_0, y_0)$ мы действительно получим некоторое частное решение рассматриваемых уравнений.

§ 58. Некоторые случаи равновесия бесконечной пластинки со вставленной круговой шайбой из другого материала [1]). При помощи простого видоизменения формул, полученных в § 56а, легко решить ряд задач, важных с точки зрения технических приложений, касающихся равновесия бесконечной пластинки с круговым отверстием, заполненным шайбой из того же или из другого материала (также однородного и изотропного).

Для решения некоторых из этих задач нам придется воспользоваться решением задачи о равновесии упругой круглой (сплошной) шайбы под влиянием равномерного нормального давления, распределенного по обводу. Это решение уже указано нами для шайбы произвольной формы в § 41а (п. 2); для нашего случая его, конечно, можно сразу получить из формул § 54, но проще всего воспользоваться тем фактом, что условия задачи будут, очевидно, удовлетворены, если положить:

$$X_x = -P, \quad Y_y = -P, \quad X_y = 0 \quad (1)$$

(во всей шайбе), где P обозначает величину постоянного давления, приложенного к обводу [2]).

---

[1]) Рассматриваемые здесь задачи являются частными случаями задач о равновесии упругих однородных тел из различных материалов, разграниченных концентрическими окружностями. Некоторые указания на работы, касающиеся этих задач, будут даны в § 59а, п. 3.

[2]) Действительно, при таком распределении напряжений, напряжение, действующее на произвольным образом ориентированный элемент, сводится к нормальному давлению P; это непосредственно следует из формул (8) § 8. Значит, в частности, и контур подвержен нормальному давлению P. Сказанное остается в силе и в случае шайбы произвольной формы.

Легко проверить, что функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, соответствующие напряженному состоянию (1), имеют вид (если отбросить несущественные произвольные слагаемые, влияющие только на жесткое перемещение):

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2}, \quad \Psi(z) = 0, \quad \varphi(z) = -\frac{Pz}{2}, \quad \psi(z) = 0. \tag{2}$$

Полярные компоненты напряжений и смещений легко вычисляются по формулам (4) и (3) § 39, которые дают:

$$\widehat{rr} = \widehat{\vartheta\vartheta} = -P, \qquad \widehat{r\vartheta} = 0; \tag{3}$$

$$v_r = -\frac{P(\varkappa-1)r}{4\mu}, \quad v_\vartheta = 0. \tag{3'}$$

Перейдем теперь к решению намеченных задач.

1. Бесконечная пластинка с круговым отверстием, в которое вложена упругая круговая шайба, имевшая первоначально несколько больший радиус. Мы будем предполагать, что трение между шайбой и пластинкой отсутствует, так что взаимодействие этих тел сводится к нормальному давлению на обводы шайбы и отверстия. Ввиду полной симметрии давление это будет постоянным вдоль контуров. Поэтому очевидно, что решение нашей задачи может быть составлено из решения примера 3 § 56а — для пластинки с отверстием и из только что полученного решения (3), (3′) — для шайбы, если удастся вычислить величину давления P, которое оказывают друг на друга пластинка и шайба.

Пусть шайба имела в недеформированном состоянии радиус $R + \varepsilon$, где R — радиус отверстия в пластинке до деформации [1]). Будем отмечать значком 0 все элементы (упругие постоянные, компоненты напряжения и пр.), относящиеся к шайбе. Например, v_r^0 будет обозначать радиальное смещение точки шайбы, тогда как v_r — радиальное смещение точки окружающей пластинки.

Из условия задачи вытекает, что после того, как шайба вложена в отверстие, вдоль общей границы шайбы и пластинки должно быть [2]):

$$v_r - v_r^0 = \varepsilon. \tag{4}$$

Но на основании формул (7′) § 56а и формул (3′) настоящего параграфа мы имеем:

$$v_r = \frac{PR^2}{2\mu r}, \quad v_r^0 = -\frac{P(\varkappa_0-1)r}{4\mu_0}.$$

---

[1]) Мы, разумеется, считаем ε малой величиной того же порядка, что и допускаемые смещения.

[2]) Радиальное смещение v_r^0 точки обвода шайбы можно представить себе составленным из радиального смещения — ε, необходимого для того, чтобы уменьшить радиус шайбы до величины R, и из смещения v_r, которое она совершает вместе с точкой обвода отверстия, с которой она соприкасается. Значит, $v_r^0 = -\varepsilon + v_r$, откуда и следует формула (4).

Полагая в этих выражениях [1]) $r = R$ и подставляя их в соотношение (4), находим:

$$\frac{PR}{2\mu} + \frac{P(\varkappa_0 - 1)R}{4\mu_0} = \varepsilon,$$

откуда и получаем значение P:

$$P = \frac{4\varepsilon\mu\mu_0}{R[2\mu_0 + \mu(\varkappa_0 - 1)]}. \tag{5}$$

Таким образом, задача решена.

В случае *абсолютно жесткой шайбы*, вместо соотношения (4), мы будем иметь условие

$$v_r = \varepsilon, \tag{4'}$$

откуда, так же, как и выше, получаем:

$$P = \frac{2\mu\varepsilon}{R}. \tag{5'}$$

Это же значение P мы получили бы, полагая, что в формуле (5) $\mu_0 = \infty$, а $\varkappa_0$ — конечная величина.

В этом случае формулы (7′) § 56а дают для пластинки:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} = -\frac{2\mu R\varepsilon}{r^2}, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \frac{2\mu R\varepsilon}{r^2}, \quad \widehat{r\vartheta} = 0, \\ v_r = \frac{\varepsilon R}{r}, \quad v_\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2. Растяжение пластинки со вложенной или впаянной жесткой шайбой. В § 56а (пример 1) мы получили решение задачи о растяжении пластинки, ослабленной круговым отверстием радиуса R. Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, дающие решение этой задачи, могут быть переписаны так:

$$\varphi(z) = \frac{p}{4}\left(z + \frac{\beta R^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{p}{2}\left(z + \frac{\gamma R^2}{z} + \frac{\delta R^4}{z^3}\right), \tag{7}$$

где

$$\beta = 2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1. \tag{8}$$

Напряжения и смещения, соответствующие этим функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, каковы бы ни были действительные постоянные β, γ, δ, легко вычисляются на основании формул (4) и (3) § 39 (ср. аналогичные вычисления в § 56а):

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{p}{2}\left[1 - \frac{\gamma R^2}{r^2} + \left(1 - \frac{2\beta R^2}{r^2} - \frac{3\delta R^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta\right], \\ \widehat{\vartheta\vartheta} &= \frac{p}{2}\left[1 + \frac{\gamma R^2}{r^2} - \left(1 - \frac{3\delta R^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta\right], \\ \widehat{r\vartheta} &= -\frac{p}{2}\left(1 + \frac{\beta R^2}{r^2} + \frac{3\delta R^4}{r^4}\right)\sin 2\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1]) В сущности для точек обвода шайбы следовало бы взять $r = R + \varepsilon$, но ввиду малости ε это не имеет значения.

и

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{p}{8\mu r}\left\{(\varkappa-1)\,r^2+2\gamma R^2+\left[\beta(\varkappa+1)R^2+2r^2+\frac{2\delta R^4}{r^2}\right]\cos 2\vartheta\right\},\\ v_\vartheta &= -\frac{p}{8\mu r}\left\{\beta(\varkappa-1)R^2+2r^2-\frac{2\delta R^4}{r^2}\right\}\sin 2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если постоянные β, γ, δ имеют только что указанные значения (8), то мы получаем найденное раньше решение задачи растяжения пластинки, ослабленной круговым отверстием. Придавая же этим постоянным другие (действительные) значения, можем получить решение других задач, представляющих не меньший интерес.

Так, например, легко получить решение задачи о растяжении пластинки, в которой до деформации было вырезано круговое отверстие и заполнено абсолютно жесткой шайбой того же радиуса R.

Предположим сперва, что жесткая шайба *спаяна* с окружающей пластинкой вдоль обвода. Мы можем считать, что при растяжении пластинки жесткая шайба осталась на месте; действительно, в противном случае достаточно было бы сообщить всей системе жесткое перемещение, чтобы вернуть шайбу на старое место. Тогда условия задачи выразятся формулами

$$v_r = 0, \quad v_\vartheta = 0 \text{ при } r = R. \tag{11}$$

Задача будет решена, если удастся так подобрать постоянные β, γ, δ, фигурирующие в формулах (9) и (10), чтобы были соблюдены условия (11). На основании формул (10) из этих условий следует:

$$\varkappa-1+2\gamma=0, \quad (\varkappa+1)\beta+2+2\delta=0, \quad (\varkappa-1)\beta+2-2\delta=0,$$

откуда легко находим:

$$\beta=-\frac{2}{\varkappa}, \quad \gamma=-\frac{\varkappa-1}{2}, \quad \delta=\frac{1}{\varkappa}, \tag{12}$$

или, вспоминая, что $\varkappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$,

$$\beta=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}, \quad \gamma=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \delta=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}, \tag{12'}$$

и задача решена [1]).

Так же легко решить задачу, когда шайба не впаяна в отверстие, а *вложена*, предполагая, что между шайбой и окружающей пластинкой трение отсутствует. Тогда вместо условий (11) будем иметь [2]):

$$v_r = 0, \quad \widehat{r\vartheta} = 0 \text{ при } r = R. \tag{13}$$

---

[1]) Не трудно решить задачу и в том предположении, что на впаянную жесткую шайбу действуют произвольно заданные сила и пара. См. § 83а, где задача решена и для эллиптической шайбы.

[2]) В рассматриваемом случае мы не можем утверждать, что $v_\vartheta = 0$ на контуре, ибо точки обвода отверстия могут свободно скользить по обводу шайбы.

Так же, как в предыдущем примере, легко убедимся, что условия (13) будут удовлетворены, если в формулах (9) и (10) взять:

$$\beta = -\frac{4}{3\varkappa+1}, \quad \gamma = -\frac{\varkappa-1}{2}, \quad \delta = -\frac{\varkappa-1}{3\varkappa+1} \tag{14}$$

или

$$\beta = -\frac{2(\lambda+\mu)}{2\lambda+5\mu}, \quad \gamma = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \delta = -\frac{\mu}{2\lambda+5\mu}, \tag{14'}$$

и задача решена.

Следует заметить, однако, что первое из условий (13) предполагает, что материал пластинки вдоль всего обвода вплотную прилегает к шайбе, нигде не отставая от нее; при ином предположении задача делается значительно труднее [1]). Не трудно убедиться, что при найденных в этом предположении значениях (14) для β, γ, δ нормальное напряжение $\widehat{rr}$ в некоторых местах обвода принимает положительные значения, т. е. что в некоторых местах шайба не давит на окружающий материал, а тянет его к себе. Но это невозможно физически, ибо шайба и пластинка не спаяны.

Чтобы сделать задачу физически возможной, достаточно, например, предположить, что радиус жесткой шайбы несколько больше, чем был радиус отверстия до растяжения пластинки и до того, как в нее была вложена шайба. Решение, соответствующее этому предположению, мы получим, налагая только что полученное решение и решение, даваемое формулами (6). В этих последних формулах следует взять ε настолько большим, чтобы вдоль всего обвода мы имели (для решения, полученного наложением двух указанных) $\widehat{rr} \leqslant 0$.

3. Растяжение пластинки со вложенной или впаянной упругой шайбой. Обобщим теперь предыдущие результаты, считая, что шайба, вставленная в пластинку, тоже упругая. Упругие постоянные материала шайбы будем отмечать значком 0; также будем отмечать значком 0 все элементы, относящиеся к шайбе.

Постараемся удовлетворить условиям задачи, считая, что в области, занятой пластинкой (т. е. при $r > R$), упругое равновесие определяется по-прежнему формулами (7)

$$\varphi(z) = \frac{p}{4}\left(z + \frac{\beta R^2}{z}\right), \quad \psi(z) = -\frac{p}{2}\left(z + \frac{\gamma R^2}{z} + \frac{\delta R^4}{z^3}\right),$$

а упругое равновесие в области, занятой шайбой (т. е. при $r < R$), формулами

$$\varphi_0(z) = \frac{p}{4}\left(\beta_0 z + \frac{\gamma_0 z^3}{R^2}\right), \quad \psi_0(z) = -\frac{p}{2}\delta_0 z, \tag{15}$$

[1]) Такая задача рассмотрена в статье М. П. Шереметьева [1].

где β, γ, δ, β_0, γ_0, δ_0 — действительные постоянные, подлежащие определению [1]).

Напряжения и смещения, соответствующие функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, даны формулами (9) и (10).

Напряжения и смещения, соответствующие функциям $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, вычисляются по формулам § 39. После элементарных преобразований имеем:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr}^0 &= \frac{p}{2}[\beta_0 + \delta_0 \cos 2\vartheta], \\ \widehat{\vartheta\vartheta}^0 &= \frac{p}{2}\left[\beta_0 + \left(\frac{6\gamma_0}{R^2} r^2 - \delta_0\right)\cos 2\vartheta\right], \\ \widehat{r\vartheta}^0 &= \frac{p}{2}\left(\frac{3\gamma_0}{R^2} r^2 - \delta_0\right)\sin 2\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и

$$\left.\begin{aligned} v_r^0 &= \frac{pr}{8\mu_0}\left\{\beta_0(\varkappa_0 - 1) + \left[\frac{\gamma_0(\varkappa_0 - 3)}{R^2} r^2 + 2\delta_0\right]\cos 2\vartheta\right\}, \\ v_\vartheta^0 &= \frac{pr}{8\mu_0}\left\{\frac{\gamma_0(\varkappa_0 + 3)}{R^2} r^2 - 2\delta_0\right\}\sin 2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Предположим сперва, что шайба *впаяна* в отверстие и что радиусы шайбы и отверстия были одинаковы до деформации. Тогда должны быть соблюдены граничные условия:

$$\widehat{rr}^0 = \widehat{rr}, \quad \widehat{r\vartheta}^0 = \widehat{r\vartheta}, \quad v_r^0 = v_r, \quad v_\vartheta^0 = v_\vartheta \text{ при } r = R. \tag{18}$$

Подставляя в эти равенства значения, даваемые формулами (16), (17), (9), (10), получаем уравнения, определяющие постоянные β, γ, δ, β_0, γ_0, δ_0:

$$\beta_0 = 1 - \gamma, \quad \delta_0 = 1 - 2\beta - 3\delta, \quad 3\gamma_0 - \delta_0 = -1 - \beta - 3\delta,$$

$$\frac{\beta_0(\varkappa_0 - 1)}{\mu_0} = \frac{\varkappa - 1 + 2\gamma}{\mu}, \quad \frac{\gamma_0(\varkappa_0 - 3) + 2\delta_0}{\mu_0} = \frac{(\varkappa + 1)\beta + 2 + 2\delta}{\mu},$$

$$\frac{\gamma_0(\varkappa_0 + 3) - 2\delta_0}{\mu_0} = -\frac{(\varkappa + 1)\beta + 2 - 2\delta}{\mu}.$$

Решая эту систему, легко получаем значения искомых постоянных:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= -\frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu + \mu_0\varkappa}, \quad \gamma = \frac{\mu(\varkappa_0 - 1) - \mu_0(\varkappa - 1)}{2\mu_0 + \mu(\varkappa_0 - 1)}, \quad \delta = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu + \mu_0\varkappa}, \\ \beta_0 &= \frac{\mu_0(\varkappa + 1)}{2\mu_0 + \mu(\varkappa_0 - 1)}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \delta_0 = \frac{\mu_0(\varkappa + 1)}{\mu + \mu_0\varkappa}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что благодаря равенству $\gamma_0 = 0$ функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, характеризующие упругое равновесие

[1]) Излагаемый способ решения задачи носит (внешне) искусственный характер, так как мы частично заранее предугадываем вид решения. Можно было бы, конечно, избавиться от всякой искусственности, беря вместо выражений (7) и (15) бесконечные ряды. Тогда при решении задачи оказалось бы, что все коэффициенты рядов, кроме оставленных нами в тексте, равны нулю. Это замечание относится и к остальным примерам этого параграфа.

шайбы, линейны:

$$\varphi_0(z) = \frac{p}{4}\beta_0 z, \quad \psi_0(z) = -\frac{p}{2}\delta_0 z; \tag{15'}$$

значит, шайба подвергается однородной деформации. В прямоугольных координатах компоненты напряжения — постоянные величины; а именно, как легко вычислить:

$$X_x^0 = p\frac{\beta_0+\delta_0}{2}, \quad Y_y^0 = p\frac{\beta_0-\delta_0}{2}, \quad X_y^0 = 0. \tag{20}$$

В направлении оси Ox шайба подвержена растягивающим усилиям; в направлении же оси Oy — растягивающим или сжимающим, в зависимости от знака разности $\beta_0 - \delta_0$.

В предельном случае $\mu_0 = \infty$ (абсолютно жесткая шайба) получаем для β, γ, δ значения (12); в предельном случае $\mu_0 = 0$ (пустое отверстие) получаем для этих постоянных значения (8). Наконец, если $\mu = \mu_0$, $\varkappa = \varkappa_0$, то мы имеем дело со сплошной однородной пластинкой. В этом случае формулы (19) показывают, что $\beta = \gamma = \delta = \gamma_0 = 0$, $\beta_0 = \delta_0 = 1$ и функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, характеризующие равновесие как шайбы, так и пластинки, имеют один и тот же вид:

$$\varphi(z) = \frac{p}{4}z, \quad \psi(z) = -\frac{p}{2}z, \tag{15''}$$

как и следовало, конечно, ожидать.

Перейдем теперь к случаю, когда шайба *вложена* в отверстие, считая, что радиусы шайбы и отверстия были одинаковы до деформации и что трение отсутствует.

Тогда, очевидно, граничные условия имеют вид:

$$\widehat{rr}^0 = \widehat{rr}, \ \widehat{r\vartheta}^0 = 0, \ \widehat{r\vartheta} = 0, \ v_r^0 = v_r \text{ при } r = R. \tag{21}$$

Подставляя сюда значения, даваемые формулами (16), (17) и (9), (10), получаем:

$$\beta_0 = 1-\gamma, \ \delta_0 = 1-2\beta-3\delta, \ 3\gamma_0-\delta_0 = 0, \ 1+\beta+3\delta = 0,$$
$$\frac{\beta_0(\varkappa_0-1)}{\mu_0} = \frac{\varkappa-1+2\gamma}{\mu}, \quad \frac{\gamma_0(\varkappa_0-3)+2\delta_0}{\mu_0} = \frac{\beta(\varkappa+1)+2+2\delta}{\mu}.$$

Решая эти уравнения, получаем [1]):

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 2\frac{\mu(\varkappa_0+3)-2\mu_0}{\mu(\varkappa_0+3)+\mu_0(3\varkappa+1)}, & \gamma &= \frac{\mu(\varkappa_0-1)-\mu_0(\varkappa-1)}{2\mu_0+\mu(\varkappa_0-1)}, \\ \delta &= -\frac{\mu(\varkappa_0+3)+\mu_0(\varkappa-1)}{\mu(\varkappa_0+3)+\mu_0(3\varkappa+1)}, & \beta_0 &= \frac{\mu_0(\varkappa+1)}{2\mu_0+\mu(\varkappa_0-1)}, \\ \gamma_0 &= \frac{2\mu_0(\varkappa+1)}{\mu(\varkappa_0+3)+\mu_0(3\varkappa+1)}, & \delta_0 &= \frac{6\mu_0(\varkappa+1)}{\mu(\varkappa_0+3)+\mu_0(3\varkappa+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Как легко видеть, значения $\widehat{rr}^0$ и $\widehat{rr}$ на некоторых участках границы получаются положительными, что физически невозможно. Задачу можно

[1]) Для фактического вычисления удобно применить следующие равенства:

$$\beta_0 = 1-\gamma, \ \delta_0 = 3\gamma_0, \ \beta = 2-3\gamma_0, \ \delta = -1+\gamma_0.$$

сделать физически возможной, если на полученное решение наложить решение примера 1 (ср. сказанное в конце п. 2) [1]).

Полагая в формулах (22) $\mu_0 = 0$ или $\mu_0 = \infty$, получаем для β, γ, δ соответственно значения (8) или (14).

III. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

§ 59. Решение первой основной задачи для кругового кольца [2]). Рассмотрим случай, когда область S, занятая телом, есть круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями L_1 и L_2 радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), с центром в начале координат. Пусть заданы внешние напряжения, действующие на L_1 и L_2, т. е. заданы значения выражения $\widehat{rr} - i\widehat{r\vartheta}$ на L_1 и на L_2 как функции угла ϑ. Разлагая это выражение как на L_1, так и на L_2 в комплексные ряды Фурье, будем иметь:

$$\widehat{rr} - i\widehat{r\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\vartheta} \text{ на } L_1, \quad \widehat{rr} - i\widehat{r\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\vartheta} \text{ на } L_2. \tag{1}$$

Граничные условия напишутся так (ср. § 56):

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\vartheta}[z\Phi'(z) + \Psi(z)] = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r = R_1, \\ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r = R_2. \end{cases} \tag{2}$$

На основании формулы (2) § 35

$$\Phi(z) = A \ln z + \Phi^*(z),$$

где A — действительная постоянная, а функция $\Phi^*(z)$ голоморфна внутри кольца и, следовательно, разлагается в ряд Лорана. Функция $\Psi(z)$ голоморфна в рассматриваемой области (§ 35) и, следовательно, также разлагается в ряд Лорана. Таким образом, внутри S будем иметь:

$$\Phi(z) = A \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_k z^k. \tag{3}$$

Требование однозначности смещений выражается равенствами (7) § 35 [3]):

$$A = 0, \quad \varkappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1} = 0. \tag{4}$$

Но мы пока не будем обращать внимания на это условие, что даст нам возможность получить некоторые интересные результаты.

---

[1]) Случай (более сложный), когда шайба может отставать от окружающего материала, рассмотрен М. П. Шереметьевым в цитированной выше статье [1].

[2]) Другое решение, при помощи определенных интегралов, опубликовано Г. В. Колосовым [5].

[3]) В нашем случае имеется только один внутренний контур L_1. При обозначениях § 35 величины γ_k, γ'_k суть коэффициенты при членах вида $a \ln z$ в разложениях функций

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)\, dz \quad \text{и} \quad \psi(z) = \int \Psi(z)\, dz.$$

При наших теперешних обозначениях этими членами в функциях φ и ψ будут соответственно $a_{-1} \ln z$ и $a'_{-1} \ln z$.

В частности, мы будем пока считать A *произвольно заданной действительной величиной.*

Внося выражения (3) в условия (2), получаем после очевидных простых преобразований:

$$2A\ln r - A + \sum_{-\infty}^{+\infty}(1-k)\,a_k r^k e^{ik\vartheta} + \\ + \sum_{-\infty}^{+\infty}\bar{a}_k r^k e^{-ik\vartheta} - \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_{k-2} r^{k-2} e^{ik\vartheta} = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r = R_1, \\ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r = R_2. \end{cases} \tag{2'}$$

Сравнение членов, не зависящих от ϑ, дает:

$$2A\ln R_1 - A + 2a_0 - a'_{-2}R_1^{-2} = A'_0, \qquad 2A\ln R_2 - A + 2a_0 - a'_{-2}R_2^{-2} = A''_0; \tag{5}$$

мы ввели здесь предположение, что $a_0 = \bar{a}_0$, т. е. что a_0 — действительная величина, как мы всегда имеем право сделать [1]).

Сравнение членов при $e^{ik\vartheta}$ дает при $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)\,a_k R_1^k + \bar{a}_{-k}R_1^{-k} - a'_{k-2}R_1^{k-2} &= A'_k, \\ (1-k)\,a_k R_2^k + \bar{a}_{-k}R_2^{-k} - a'_{k-2}R_2^{k-2} &= A''_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Этим исчерпываются все условия. Исключая из уравнений (5) a'_{-2}, получаем:

$$a_0 = \frac{A''_0R_2^2 - A'_0R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{A}{2} - \frac{A(R_2^2\ln R_2 - R_1^2\ln R_1)}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{7}$$

Возможность этого равенства требует, так как a_0 — действительная величина [2]), чтобы

$$\text{мнимая часть } (A''_0R_2^2 - A'_0R_1^2) = 0. \tag{8}$$

Как показывают простые вычисления, это условие выражает, что главный момент внешних усилий должен равняться нулю.

Перейдем к определению остальных искомых коэффициентов. Разделив первое уравнение (6) на R_1^{k-2}, а второе на R_2^{k-2} и вычтя одно из другого, получаем первую из следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)\,(R_2^2 - R_1^2)\,a_k + (R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2})\,\bar{a}_{-k} &= B_k, \\ (R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2})\,a_k + (1+k)\,(R_2^2 - R_1^2)\,\bar{a}_{-k} &= \bar{B}_{-k}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где для краткости положено:

$$B_k = A''_kR_2^{-k+2} - A'_kR_1^{-k+2}. \tag{10}$$

---

[1]) Как уже говорилось много раз, член вида Ci (при C действительном) в выражении $\Phi(z)$ никакого влияния на распределение напряжений не имеет.

[2]) Если бы мы не считали a_0 действительной величиной, то в левой части (7) вместо a_0 была бы величина $\frac{1}{2}(a_0 + \bar{a}_0)$ и наше заключение осталось бы справедливым.

Второе уравнение (9) получено из первого заменой k на $-k$ и переходом к сопряженным значениям [1]).

Система двух уравнений (9) при данном значении k дает возможность определить a_k, $\bar{a}_{-k}$, если только определитель этой системы

$$D=\begin{vmatrix}(1-k)(R_2^2-R_1^2) & R_2^{-2k+2}-R_1^{-2k+2}\\ R_2^{2k+2}-R_1^{2k+2} & (1+k)(R_2^2-R_1^2)\end{vmatrix}=$$

$$=(1-k^2)(R_2^2-R_1^2)^2-(R_2^{2k+2}-R_1^{2k+2})(R_2^{-2k+2}-R_1^{-2k+2}) \qquad (11)$$

отличен от нуля.

Определитель D обращается в нуль при $k=0$, $+1$, -1, и легко убедиться, что при всех других значениях k он отличен от нуля [2]). Значение $k=0$ нас не интересует. При $k=+1$ уравнения (9) дают систему

$$0=B_1, \quad (R_2^4-R_1^4)a_1+2(R_2^2-R_1^2)\bar{a}_{-1}=\bar{B}_{-1}. \qquad (12)$$

При $k=-1$ мы, как и следовало ожидать, не получим ничего нового (получим систему, выводимую из предыдущей путем перехода к сопряженным значениям). Итак, чтобы решение задачи было возможным должно быть, кроме условия (8), еще $B_1=0$, т. е.

$$A_1''R_2-A_1'R_1=0. \qquad (13)$$

Простые выкладки показывают, что это условие есть не что иное, как условие равенства нулю главного вектора внешних усилий [3]).

При соблюдении этого условия система (12) становится разрешимой, но не дает возможности вычислить оба коэффициента a_1 и $\bar{a}_{-1}$; один из

[1]) Достаточно рассматривать системы (9) только при $k=1, 2, 3, \ldots$, так как при $k=-1, -2, \ldots$ мы не будем получать ничего нового (будем получать системы, выведенные из предыдущих путем перехода к сопряженным значениям).

[2]) Действительно, имеем:

$$D=R_1^4 f(\xi),$$

где

$$\xi=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2>1 \text{ и } f(\xi)=(1-k^2)(\xi-1)^2+\xi^{k+1}+\xi^{-k+1}-\xi^2-1.$$

Легко проверить, что

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0, \quad f^{IV}(\xi)=(k+1)k(k-1)[(k-2)\xi^{k-3}+(k+2)\xi^{-k-3}].$$

Если $|k|\geqslant 2$, то последнее выражение положительно при $\xi>0$. Значит, при $\xi>1$ будем иметь:

$$f'''(\xi)>0, \ f''(\xi)>0, \ f'(\xi)>0, \ f(\xi)>0.$$

[3]) Для точек внешней окружности имеем, как легко проверить:

$$X_n+iY_n=(\widehat{rr}+i\widehat{r\vartheta})e^{i\vartheta}, \ X_n-iY_n=(\widehat{rr}-i\widehat{r\vartheta})e^{-i\vartheta}.$$

Обозначая через (X'', Y'') главный вектор внешних усилий, приложенных к внешней окружности, будем иметь:

$$X''-iY''=\int_0^{2\pi}(X_n-iY_n)R_2\,d\vartheta=R_2\int_0^{2\pi}(\widehat{rr}-i\widehat{r\vartheta})e^{-i\vartheta}\,d\vartheta=2\pi R_2A_1''$$

по самому определению A_1''. Для внутренней окружности имеем аналогично:

$$X'-iY'=-2\pi R_1A_1'.$$

них может быть взят произвольно, *пока не принято во внимание условие однозначности смещений.*

Все остальные коэффициенты a_k ($k = \pm 2, \pm 3, \ldots$) найдутся решением уравнений (9). При данном k одновременно определяются a_k и $\bar{a}_{-k}$. Решая фактически систему (9), получаем для a_k:

$$a_k = \frac{(1+k)(R_2^2 - R_1^2) B_k - (R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2}) \bar{B}_{-k}}{(1-k^2)(R_2^2 - R_1^2)^2 - (R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2})(R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2})} \qquad (14)$$

$$(k = \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Значения для $\bar{a}_{-k}$ мы не выписали, ибо оно получается из предыдущего при замене k на $-k$ и переходе к сопряженному значению. Предыдущая формула дает все искомые коэффициенты a_k (при $k \neq 0, +1, -1$).

Наконец, коэффициенты a'_k вычисляются по одному из двух уравнений (6) и только a'_{-2} вычисляется по одному из уравнений (5). Так как все коэффициенты a_k, за исключением a_1, a_{-1}, уже вычислены, то мы получим определенные значения для всех a'_k, за исключением a'_{-1} и a'_{-3}. Легко было бы выписать и явные выражения для них.

Введем теперь условие однозначности смещений, т. е. равенства (4). Тогда из выражения (7) для a_0 получится значение

$$a_0 = \frac{A_0'' R_2^2 - A_0' R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}. \qquad (7')$$

Величины a_{-1}, a'_{-1} определятся из второго уравнения (4) и, например, из первого уравнения (6) при $k = +1$, которое дает:

$$a_{-1} - \bar{a}'_{-1} = \bar{A}'_1 R_1. \qquad (15)$$

Решая совместно уравнения (4) и (15), получаем:

$$a_{-1} = \frac{\bar{A}'_1 R_1}{1+\varkappa}, \quad a'_{-1} = -\frac{\varkappa A'_1 R_1}{1+\varkappa}; \qquad (16)$$

наконец, a_1 найдем из второго уравнения (12):

$$a_1 = \frac{\bar{B}_{-1}}{R_2^4 - R_1^4} - \frac{2A'_1 R_1}{(1+\varkappa)(R_1^2 + R_2^2)}. \qquad (16')$$

Формулы (16) можно было бы сразу написать на основании формул (9 § 35 (см. также примечание [3]) на стр. 210). Таким образом, все коэффициенты разложений функций Φ, Ψ найдены; в частности, мы можем теперь вычислить и a'_{-3} из уравнений (6), ибо a_1 и a_{-1} вычислены.

Относительно сходимости полученных рядов заметим следующее: ряды для $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$ будут, очевидно, абсолютно и равномерно сходящимися в кольце (включая контуры), если сходятся ряды:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| R_2^k, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} k |a_k| R_2^{k-1} \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a'_k| R_2^k, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{-k}| R_1^{-k}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} k |a_{-k}| R_1^{-k-1}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a'_{-k}| R_1^{-k}. \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Сходимость же предыдущих рядов будет наверное обеспечена, если предположить, что заданные на L_1 и L_2 величины $\widehat{rr}$ и $\widehat{r\vartheta}$ имеют вторые производные по ϑ, удовлетворяющие условиям Дирихле. Действительно, в этом случае коэффициенты A'_k и A''_k рядов (1) будут удовлетворять неравенствам вида (§ 53):

$$|A'_k| < \frac{C}{|k|^3}, \quad |A''_k| < \frac{C}{|k^3|} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда при помощи простых выкладок легко заключить на основании формул (10), (14) и (6), что имеют место неравенства (при $k = 1, 2, \ldots$):

$$|a_k| R_2^k < \frac{C}{k^3}, \quad |a'_k| R_2^k < \frac{C}{k^2}, \quad |a_{-k}| R_1^{-k} < \frac{C}{k^3}, \quad |a'_{-k}| R_1^{-k} < \frac{C}{k^2},$$

откуда непосредственно следует сходимость рядов (17) [1]).

Совершенно аналогично решается вторая основная задача.

Если сравнить приведенное здесь решение задачи с решением, основанным на применении функций Эри [2]), становятся ясными преимущества введения функций комплексного переменного.

§ 59а. Примеры и обобщения. 1. Труба, подверженная равномерному внешнему и внутреннему давлениям. Пусть внутренняя и внешняя окружности подвергаются равномерно распределенным нормальным давлениям p_1 и p_2, так что $\widehat{rr} = -p_1$ на L_1 и $\widehat{rr} = -p_2$ на L_2, $\widehat{r\vartheta} = 0$ на L_1, L_2.

В этом случае имеем:

$$A'_0 = -p_1, \quad A''_0 = -p_2.$$

Все остальные коэффициенты A'_k, A''_k равны нулю. Условие существования решения, очевидно, соблюдено. Из формул (7′) и (5) § 59 следует

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= -\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}, \\ a'_{-2} &= \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Для всех остальных коэффициентов получим значения, равные нулю.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}, \\ \Psi(z) &= -\frac{(p_2 - p_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{z^2} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

[1]) Если исходить из граничных условий вида (18) § 41, то таким же образом можно доказать пригодность решения, считая, что X_n и Y_n имеют на L_1 и L_2 *первые* производные, удовлетворяющие условиям Дирихле (ср. замечание в конце § 56).

[2]) См. Almansi [2]; Michell [1]; Timpe [1]. У Тимпе одно только выражение граничных условий, которые нами представлены формулами (2′), занимает около страницы. Коэффициенты определяются последовательно по восемь за один прием из системы восьми линейных уравнений с восемью неизвестными.

Для полярных компонент напряжения легко получим:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= -\frac{p_2R_2^2-p_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}+\frac{(p_2-p_1)\,R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r^2}\,,\\ \widehat{\vartheta\vartheta} &= -\frac{p_2R_2^2-p_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}-\frac{(p_2-p_1)\,R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r^2}\,;\\ \widehat{r\vartheta} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Задача эта решена еще Ламе.

2. Распределение напряжений при вращении кольца вокруг центра. Пусть наше кольцо вращается в своей плоскости вокруг центра O с постоянной угловой скоростью ω и пусть на него не действуют никакие внешние силы. Пусть система осей Oxy вращается вместе с телом и неподвижна относительно него. Тогда задача сводится к статической при условии приложения центробежных сил.

Одно из частных решений уравнений равновесия дается формулами § 28. Напряжения, выражаемые формулами (6) § 28, имеют, как легко вычислить, следующие компоненты в полярных координатах:

$$\widehat{rr} = -\frac{2\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2r^2, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2r^2, \quad \widehat{r\vartheta}=0. \qquad (4)$$

Если мы хотим приложить наше решение *к тонкой* пластинке (§ 26), надо взять вместо λ величину λ^*, и тогда получим:

$$\frac{2\lambda^*+3\mu}{4(\lambda^*+2\mu)} = \frac{3+\sigma}{8}\,, \quad \frac{2\lambda^*+\mu}{4(\lambda^*+2\mu)} = \frac{1+3\sigma}{8}\,. \qquad (5)$$

Напряжения (4) не удовлетворяют граничным условиям на краях пластинки. А именно, на краях $\widehat{r\vartheta}=0$, но $\widehat{rr}$ принимает постоянные значения, которые мы обозначим соответственно через p_1 и p_2.

Решение нашей задачи получится наложением напряжений (4) и напряжений (3) при

$$p_1 = -\frac{2\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2R_1^2, \quad p_2 = -\frac{2\lambda+3\mu}{4(\lambda+2\mu)}\varrho\omega^2R_2^2. \qquad (6)$$

Таким образом, задача решена.

В случае тонкой пластинки следует взять λ^* вместо λ. Полученное таким образом решение дает только средние значения напряжений по толщине. Для не очень тонких пластинок этого недостаточно. Существуют и более полные решения (см. по этому поводу, например, Love [1], § 102). Как частный случай ($R_1=0$), получаем случай *сплошного вращающегося диска*.

3. Некоторые обобщения. С точки зрения технических приложений представляет значительный интерес решение более общих задач, когда рассматриваемое тело состоит из нескольких концентрических колец с различными упругими постоянными, которые или спаяны между собой, или соприкасаются вдоль разграничивающих их окружностей, причем внешняя окружность может быть удалена в бесконечность, а внутреннее кольцо может сводиться к сплошному диску.

Такие задачи решаются при помощи разложений в ряды, подобно тому, как это сделано в предыдущем параграфе.

Задача для случая, когда тело состоит из двух концентрических колец, спаянных между собою, решена С. Г. Михлиным [8]. Более общие задачи указанного выше типа рассмотрены в ряде работ Г. Н. Савина, Д. В. Вайнберга и других авторов. Изложение большей части этих работ и соответствующие литературные указания даны в монографиях Г. Н. Савина [8] и Д. В. Вайнберга [1], что дает нам возможность не останавливаться здесь на этом более подробно.

§ 60. Многозначные смещения в случае кругового кольца. Возвратимся теперь к общему случаю и выясним, к какому результату приведут нас формулы § 59, если мы отбросим условие однозначности смещений, которое выражается формулами (4) § 59:

$$A = 0, \quad \varkappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1} = 0. \tag{1}$$

Если эти условия отброшены, тогда граничные условия (2) § 59 недостаточны для полного определения функций Φ и Ψ; некоторые из коэффициентов разложений этих функций окажутся не вполне определенными и будут содержать известное число произвольных постоянных, о чем будет сказано подробнее ниже. Зафиксировав произвольным образом эти постоянные, мы получим определенные выражения для Φ и Ψ, удовлетворяющие всем условиям задачи, за исключением условия однозначности смещений. А именно, если мы опишем замкнутый путь L', выходящий из некоторой точки z, огибающий внутреннюю окружность против часовой стрелки и снова возвращающийся в z (рис. 29), то приращение выражения $u + iv$, при обходе этого пути, представится формулой

$$[u + iv]_{L'} = \frac{\pi i}{\mu} \{(\varkappa + 1) Az + \varkappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1}\}, \tag{2}$$

вытекающей из формулы (6) § 35 (мы ввели здесь обозначения § 59).

Мы уже видели (§ 45), что, несмотря на многозначность смещений, нашему решению можно приписать определенный и весьма простой физический смысл.

Прежде всего решение это имеет самый обычный смысл, если мы станем применять его не к *целому* кольцу, а к части, полученной удалением из него полосы, ограниченной двумя линиями $a'b'$ и $a''b''$, идущими от внутренней окружности к внешней (на рис. 29 удаленная часть заштрихована). Тогда мы будем иметь односвязное тело —«круговой брус», ограниченный двумя круговыми дугами и линиями $a'b'$, $a''b''$. В этой односвязной части функции u и v будут уже однозначными. Функции Φ и Ψ соответствуют некоторому определенному состоянию упругого равновесия бруса, при котором внешние напряжения, приложенные к круговым границам, имеют заранее заданные значения, а именно те, которые фигурировали в гра-

ничных условиях § 59 при решении задачи для сплошного кольца. Что же касается внешних напряжений, приложенных к краям $a'b'$ и $a''b''$, то они могут быть вычислены по функциям Φ и Ψ при помощи не раз уже применявшихся формул. Задача о равновесии кругового бруса будет рассмотрена в следующем параграфе.

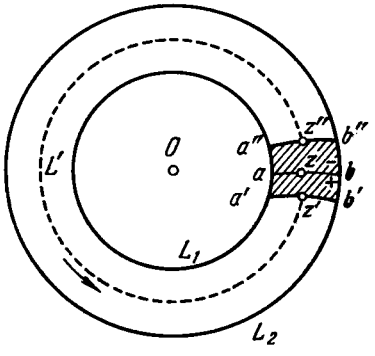


Рис. 29.

Вернемся к случаю сплошного кольца. Мы видели в § 45, что рассматриваемое решение, допускающее многозначные смещения, соответствует особому виду деформации, называемому дислокацией. Опишем эту деформацию применительно к нашему частному случаю, отчасти повторяя сказанное в § 45.

Проведем купюру ab, соединяющую внутреннюю окружность с внешней, и будем различать на этой купюре края $(+)$ и $(-)$, как показано на рис. 29. Тогда при обходе по замкнутому контуру L', ведущему от некоторой точки (x, y), рассматриваемой как принадлежащей краю $(-)$, к той же точке, рассматриваемой как принадлежащей краю $(+)$, компоненты смещения получат согласно формуле (2) следующие приращения:

$$u^+ - u^- = -\varepsilon y + \alpha, \quad v^+ - v^- = \varepsilon x + \beta, \tag{3}$$

где положено:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\pi A (1+\varkappa)}{\mu}, \\ \alpha + i\beta &= \frac{\pi i}{\mu}(\varkappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1}); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(u^+, v^+) и (u^-, v^-) обозначают смещения точки (x, y), рассматриваемой как принадлежащей соответственно краям $(+)$ и $(-)$.

В соответствии со сказанным в § 45 многозначность смещений в нашем решении можно интерпретировать предположением, что из кольца до его деформации была удалена (узкая) поперечная полоска с краями $a'b'$, $a''b''$ (рис. 29) и что по удалении оставшиеся свободными края были спаяны. При этом предполагается, что до деформации края $a'b'$ и $a''b''$ были конгруэнтны и расположены так, что край $a''b''$ получается из края $a'b'$ путем жесткого поворота этого последнего (вокруг начала координат) на угол ε и жесткого поступательного перемещения (α, β). При спайке должны быть совмещены те точки краев, которые совмещаются друг с другом при только что упомянутом жестком перемещении.

Напомним, что, как было сказано в § 45, величины ε, α, β не зависят ни от формы купюры ab, ни от ее положения в кольце; в нашем случае это непосредственно вытекает из формул (4). Значит, та поперечная полоска, которую надо предварительно вырезать из кольца, может быть взята в любом месте кольца; один ее край, например $a'b'$, может быть взят

любой формы в любом месте, и тогда положение другого края определится величинами ε, α, β.

Напомним еще, что об «удалении» полоски мы говорим лишь условно, так как на самом деле иногда фактически мы имеем дело с прибавлением или с удалением в одной части и прибавлением в другой.

Величины ε, α, β представляют собой согласно принятой в § 45 терминологии характеристики дислокации. Согласно сказанному в упомянутом параграфе, задание этих величин вместе с заданием внешних напряжений, приложенных к контурам L_1, L_2, вполне определяет деформацию рассматриваемого тела. В нашем случае это обстоятельство проверяется непосредственно, ибо, как легко видеть, указанные задания вполне определяют все коэффициенты разложений функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ [1]); действительно, эти коэффициенты могут быть определены совершенно так же, как в § 59, с той только разницей, что условия (4) § 59, т. е. условия однозначности смещений

$$A=0,\quad \varkappa a_{-1}+\bar{a}'_{-1}=0,$$

заменяются теперь более общими условиями (4) при заданных ε, α, β.

Мы проведем вычисление коэффициентов разложений функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в том частном случае, когда *внешняя нагрузка отсутствует* (т. е. $N=T=0$ на L_1 и L_2). В этом случае все величины A'_k и A''_k равны нулю [2]).

Формулы (4) дают:

$$A=\frac{\mu\varepsilon}{\pi(1+\varkappa)},\quad \varkappa a_{-1}+\bar{a}'_{-1}=\frac{\mu}{\pi i}(\alpha+i\beta). \tag{4'}$$

Последнее равенство вместе с равенством $a_{-1}-\bar{a}_{-1}=0$, получаемым из уравнения (15) § 59, дает:

$$a_{-1}=-\frac{\mu(\alpha+i\beta)\,i}{\pi(1+\varkappa)},\quad a'_{-1}=\frac{\mu(\alpha-i\beta)\,i}{\pi(1+\varkappa)}. \tag{5}$$

Далее, из формулы (7) § 59 следует:

$$a_0=\frac{\mu\varepsilon}{2\pi(1+\varkappa)}-\frac{\mu\varepsilon(R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1)}{\pi(1+\varkappa)(R_2^2-R_1^2)}, \tag{6}$$

и, наконец, из второго уравнения (12), а также из уравнений (5) и (6) (при $k=1$) того же параграфа, получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_1&=-\frac{2\mu(\alpha-i\beta)\,i}{\pi(1+\varkappa)(R_1^2+R_2^2)},\quad a'_{-2}=-\frac{2\mu\varepsilon R_1^2R_2^2}{\pi(1+\varkappa)(R_2^2-R_1^2)}\ln\frac{R_2}{R_1},\\ a'_{-3}&=-\frac{2\mu(\alpha+i\beta)\,i}{\pi(1+\varkappa)}\,\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю. Итак, имеем:

$$\Phi(z)=A\ln z+a_0+a_1z+\frac{a_{-1}}{z},\quad \Psi(z)=\frac{a'_{-1}}{z}+\frac{a'_{-2}}{z^2}+\frac{a'_{-3}}{z^3}, \tag{8}$$

[1]) За исключением мнимой части a_0, не имеющей значения.

[2]) Мы все время применяем обозначения § 59.

где коэффициенты A, a_0, a_1, a_{-1}, a'_{-1}, a'_{-2}, a'_{-3} имеют только что указанные значения.

В частном случае, когда $\varepsilon = \alpha = \beta = 0$ (эти равенства характеризуют однозначность смещений), мы будем иметь: $\Phi(z) = \Psi(z) = 0$, что и следовало предвидеть, ибо, как мы знаем (§ 40), если смещения однозначны, то при отсутствии внешней нагрузки тело не может находиться в напряженном состоянии.

Если внешняя нагрузка не равна нулю, то соответствующее решение можно получить, налагая только что полученное решение (8) на решение, полученное в § 59 в предположении однозначности смещений.

Как уже было сказано в § 45, интерпретация многозначных смещений в случае кругового кольца была впервые указана Тимпе (Timpe [1]); им же найдены формулы, эквивалентные формулам, полученным в настоящем параграфе.

Возвращаясь к дислокации, соответствующей формулам (8), заметим, что ее можно разбить на три простейшие, соответствующие случаям:

1°. $\varepsilon \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$. Эту дислокацию получим, например, вырезав из кольца радиальный клин с прямолинейными краями и углом раствора ε и спаяв кольцо так, чтобы соединение прямолинейных краев достигалось жестким поворотом одного из них на угол ε.

2°. $\varepsilon = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Эту дислокацию получим, например, если разрежем кольцо вдоль положительной оси Ox, произведем жесткое скольжение нижнего края по верхнему [1]) на величину α и снова спаяем соприкасающиеся части. Такую же дислокацию получим, если вырежем [2]) вдоль положительной оси Oy полоску ширины α и спаяем кольцо, приведя в соприкосновение прямолинейные края, подвергнув их жесткому поступательному перемещению параллельно оси Ox.

3°. $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Этот случай получим из предыдущего, меняя ролями оси Ox и Oy.

Таким образом, нам достаточно иметь формулы, относящиеся, например, к случаям 1° и 3°. Приводим эти формулы и выражения компонент напряжения в полярных координатах, которые получаются из формул (4′) — (8) путем элементарных выкладок, подобных тем, которые мы уже не раз производили [3]). Вместо $\varkappa$ мы подставляем значение $\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$.

1°. $\varepsilon \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{1}{2} - \frac{R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1}{R_2^2 - R_1^2}\right\} + \frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)} \ln z, \\ \Psi(z) &= -\frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu) R_1^2 R_2^2}{\pi(\lambda+2\mu)(R_2^2 - R_1^2)} \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{z^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

[1]) То есть расположенному со стороны положительных y.

[2]) При $\alpha > 0$ надо фактически прибавить полоску.

[3]) Приводимые формулы для напряжений совпадают с формулами, полученными Тимпе (Timpe [1]) иным путем. Указанным здесь путем они получены автором в статье [1].

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr} &= \frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\ln r+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{R_1}-\frac{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}{R_2^2-R_1^2}\right\},\\
\widehat{\vartheta\vartheta} &= \frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\ln r-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{R_1}-\frac{R_2^2\ln R_2-R_1^2\ln R_1}{R_2^2-R_1^2}+1\right\},\\
\widehat{r\vartheta} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

3°. $\varepsilon=0$, $\alpha=0$, $\beta\neq 0$.

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(z) &= -\frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{2z}{R_1^2+R_2^2}-\frac{1}{z}\right\},\\
\Psi(z) &= \frac{\beta\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{1}{z}+\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cdot\frac{1}{z^3}\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr} &= \frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{-\frac{r}{R_1^2+R_2^2}+\frac{1}{r}-\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right\}\cos\vartheta,\\
\widehat{\vartheta\vartheta} &= \frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{-\frac{3r}{R_1^2+R_2^2}+\frac{1}{r}+\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right\}\cos\vartheta,\\
\widehat{r\vartheta} &= \frac{\beta\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{-\frac{r}{R_1^2+R_2^2}+\frac{1}{r}-\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right\}\sin\vartheta.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

В случае тонкой пластинки (§ 26) надо вместо λ подставить λ^*.

До сих пор мы считали, что внешняя нагрузка отсутствует. При произвольной внешней нагрузке решение получится наложением предыдущих решений на решение с однозначными смещениями (§ 59).

§ 61. Приложение. Изгиб кругового бруса усилиями, приложенными на концах при произвольно распределенной нагрузке на круговых границах. Предположим, что мы имеем дело не с целым кольцом, а с его частью, ограниченной двумя радиусами («круговой брус»).

Будем считать сперва, что круговые границы свободны от внешних напряжений. Решения, полученные в § 60, удовлетворяют, конечно, всем уравнениям статики упругого тела и дают нулевые внешние напряжения на круговых границах. Смещения будут однозначными в нашей области (ибо мы не имеем возможности описать замкнутый контур, охватывающий окружность L_1). Напряжения же, приложенные к прямолинейным краям («концам») бруса, будут отличны от нуля и будут зависеть от трех постоянных: α, β, ε. Вообще говоря, невозможно подобрать эти три постоянные так, чтобы получить на концах заранее заданное распределение внешних напряжений. Однако, как мы сейчас увидим, всегда можно устроить так, чтобы напряжения, приложенные к одному из концов, были статически эквивалентны данной силе и паре, т. е. имели заданные главный вектор и главный момент. Тогда усилия, приложенные на другом конце, будут статически эквивалентны противоположным силе и паре.

Если длина бруса велика по сравнению с его шириной, то задание главного вектора и момента усилий, приложенных к концу, практически заменяет на основании принципа Сен-Венана (§ 23) задание фактического распределения усилий на этом конце.

Когда мы в дальнейшем будем говорить, что к концу бруса приложены сила и пара, мы под этим будем разуметь, что к рассматриваемому концу приложены какие-то внешние напряжения, статически эквивалентные в своей совокупности указанным силе и паре.

Мы можем, например, считать, что один из концов бруса заделан; тогда в месте заделки возникает реакция, статически уравновешивающая силу и пару, приложенные к другому концу.

Итак, рассмотрим часть кольца, соответствующую значениям ϑ в промежутке $\vartheta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_2$.

Рассмотрим сперва решение 1° § 60. Главный вектор усилий, приложенных к любому из концов, будет равен нулю. Действительно, легко видеть, что если $\widehat{\vartheta\vartheta}$ определяется формулой (10) § 60, то

$$\int_{R_1}^{R_2} \widehat{\vartheta\vartheta}\, dr = 0.$$

Главный момент усилий, действующих на край $\vartheta = \vartheta_2$ (и рассчитанных на единицу толщины бруса в направлении, перпендикулярном плоскости Oxy) относительно O, определится формулой:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \widehat{\vartheta\vartheta}\, r\, dr = \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2R_2^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2}{4(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}. \tag{1}$$

Значит, мы получим решение задачи изгиба кривого кругового бруса парами, приложенными на концах, если в формулах (10) § 60 возьмем:

$$\frac{\varepsilon\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)} = \frac{4M(R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2R_2^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2}. \tag{2}$$

Легко видеть, что знаменатель правой части всегда положителен [1]).

Рассмотрим теперь решение 3° § 60 и будем считать, что оси координат проведены так, что $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$. В сечении $\vartheta = \vartheta_2$ будем иметь, как показывают формулы (12) § 60, $\widehat{\vartheta\vartheta} = 0$. Таким образом, внешние усилия, приложенные к этому концу (и рассчитанные на единицу толщины бруса), статически эквивалентны силе, параллельной оси Oy, проходящей через O,

---

[1]) Действительно,

$$(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2R_2^2 \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2 = R_1^4 f(x),$$

где положено:

$$x = \frac{R_2^2}{R_1^2} > 1, \quad f(x) = (x-1)^2 - x(\ln x)^2.$$

Легко убедиться, что

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0, \qquad f'''(x) = \frac{2\ln x}{x^2}.$$

Значит, $f'''(x) > 0$ при $x > 1$, откуда следует, что $f''(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

величина которой (проекция на ось Oy) равна

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \widehat{r\vartheta}\, dr = \frac{(R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} - R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\beta\mu\,(\lambda+\mu)}{\pi\,(\lambda+2\mu)}. \tag{3}$$

Значит, мы решим задачу изгиба бруса поперечной силой, приложенной на конце $\vartheta = \vartheta_2$, положив в формулах (12) § 60:

$$\frac{\beta\mu\,(\lambda+\mu)}{\pi\,(\lambda+2\mu)} = \frac{P\,(R_1^2 + R_2^2)}{(R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} - R_2^2 + R_1^2}. \tag{4}$$

Легко убедиться, что знаменатель в правой части всегда положителен [1]).

Таким же образом решается задача для случая силы, нормальной к концевому сечению. Решение можно найти либо непосредственно, как в предыдущем случае, либо исходя из предыдущего случая.

Действительно, рассмотрим часть кольца, заключенную между радиусами $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$. Предыдущее решение дает на конце $\vartheta = \pi/2$ систему усилий, статически эквивалентную одной силе, параллельной Oy и проходящей через O. Следовательно, усилия, приложенные к концевому сечению $\vartheta = 0$, будут эквивалентны равной по величине и противоположно направленной силе, т. е. силе, нормальной к прямолинейной границе $\vartheta = 0$; линия действия этой силы проходит через O.

Налагая уже найденное решение для изгиба парой, выбрав подходящим образом момент M, можно всегда получить силу, линия действия которой проходит через произвольную точку [2]).

Итак, мы имеем полное решение нашей задачи для случая, когда круговые границы свободны от внешних напряжений. Предположим теперь, что границы эти также загружены произвольным образом. Тогда мы можем получить решение следующим приемом.

Дополним мысленно наш брус до полного кольца и зададим произвольно нагрузки на круговых границах дополнительной части, так, однако, чтобы эти нагрузки вместе с заданными нагрузками на круговых частях нашего первоначального бруса были статически эквивалентны нулю, и решим затем задачу (для полного кольца) методом § 59.

Решение это в части кольца, соответствующей первоначальному брусу, будет удовлетворять заданным условиям на круговых границах. Останется только так подобрать решения настоящего параграфа, чтобы по их наложении получить на прямолинейных концах усилия, дающие заданные силы и пары (разумеется, эти последние должны быть заданы

[1]) Ср. предыдущее примечание.

[2]) Предыдущие решения задачи изгиба кругового бруса силами и парами, приложенными к концам (а также для некоторых других видов нагрузки), были найдены еще Х. Головиным [1]; статья Головина осталась неизвестной за границей, и решения Головина были вновь найдены впоследствии несколькими другими авторами независимо от него.

так, чтобы статически уравновешивать заданные на круговых границах усилия).

Заметим еще следующее: изменяя задания на круговых границах дополнительной части кольца, мы будем получать различные решения. Это не противоречит теореме единственности, ибо мы не вполне задаемся распределением напряжений на прямолинейных границах, а задаемся только их главными векторами и моментами. Все упомянутые различные решения будут соответствовать различным распределениям внешних напряжений на концах (но дающим одни и те же главные векторы и моменты). Все эти решения в силу принципа Сен-Венана будут мало отличаться друг от друга в частях бруса, не слишком близких к концам, если ширина бруса мала по сравнению с длиной.

З а м е ч а н и е. Напомним, что в случае плоской деформации (§ 25) плоские границы бруса, параллельные плоскости Oxy, подвержены нормальным напряжениям, не зависящим от нашего произвола.

В случае же, когда толщина бруса (в направлении, перпендикулярном плоскости Oxy) мала, мы можем считать, что имеем дело с обобщенным плоским напряженным состоянием (§ 26), и тогда упомянутые границы свободны от внешних напряжений. Не забудем, что в этом случае постоянная λ должна быть заменена постоянной λ^*.

§ 62. Температурные напряжения в полом круговом цилиндре. Так как задача о дислокации кругового кольца решена (§ 60), то на основании результатов § 46 задача о деформации полого цилиндра, поперечное сечение которого представляет круговое кольцо, установившимся плоским потоком тепла должна также считаться решенной. Мы ограничимся рассмотрением одного простого приложения.

Будем придерживаться обозначений § 46. В нашем случае область S ограничена двумя линиями L_1, L_2, представляющими собой концентрические окружности радиусов R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) с центром в O.

Предположим, что рассматриваемый полый цилиндр нагревается установившимся потоком тепла, причем $T = T_1$ при $r = R_1$ и $T = T_2$ при $r = R_2$, где T_1, T_2 — постоянные, а r — расстояние точки (x, y) до начала координат. Тогда, как легко проверить (см. замечание в конце параграфа),

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r + \frac{T_1 \ln R_2 - T_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}. \tag{1}$$

Отсюда, обозначая через $F(z)$ то же, что в § 46, и отбрасывая чисто мнимую произвольную постоянную, получаем:

$$F(z) = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln z + \frac{T_1 \ln R_2 - T_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}. \tag{2}$$

Значит, в нашем случае согласно формуле (6) § 46 будем иметь (отбрасывая опять постоянную):

$$u^* + iv^* = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} z \ln z + \frac{T_1 (\ln R_2 + 1) - T_2 (\ln R_1 + 1)}{\ln R_2 - \ln R_1} z. \tag{3}$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае (при обозначениях § 46 у нас только один внутренний контур L_1)

$$B_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \qquad \alpha_1^* = \beta_1^* = 0. \tag{4}$$

Значит, мы получим решение «вспомогательной» задачи (§ 46), если в формулах (9) и (10) § 60 положим [см. формулы (16) § 46]:

$$\varepsilon = -\frac{\pi\nu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1}. \tag{5}$$

Так как напряжения X_x, Y_y, X_y во вспомогательной задаче те же, что и в данной, то эти напряжения получатся непосредственно из формул (10) § 60 при только что указанном значении ε. Таким образом, мы получаем хорошо известные формулы [1]). Чтобы вычислить смещения, следует найти смещения u', v' вспомогательной задачи (что требует самых элементарных выкладок). Тогда u, v будут даны формулами (8) § 46 и формулой (3) настоящего параграфа.

З а м е ч а н и е. Сделаем еще несколько указаний, касающихся рассматриваемого здесь случая, т. е. когда сечение — круговое кольцо.

Если температура T не дана непосредственно, а заданы только ее значения на окружностях L_1 и L_2, то ее можно вычислить таким образом [2]).

По определению функции $F(z)$ имеем:

$$2T = F(z) + \overline{F(z)}, \tag{6}$$

причем на основании формулы (12) § 46, взяв $z_1 = 0$, получаем:

$$F(z) = A \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \tag{7}$$

где A — действительная постоянная.

Функция $F(z)$ должна быть определена по граничным условиям:

$$F(z) + \overline{F(z)} = 2f_1(\vartheta) \quad \text{при } r = R_1,$$
$$F(z) + \overline{F(z)} = 2f_2(\vartheta) \quad \text{при } r = R_2,$$

где $f_1(\vartheta)$, $f_2(\vartheta)$ — заданные значения температуры T на контурах L_1 и L_2. Мы представим эти функции разложенными в комплексные ряды Фурье [3]):

$$f_1(\vartheta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\vartheta}, \quad f_2(\vartheta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\vartheta}. \tag{8}$$

[1]) См., например, A. Föppl [1].

[2]) Задача нахождения T есть частный случай так называемой первой основной задачи теории логарифмического потенциала (задачи Дирихле), состоящей в нахождении гармонической в некоторой области функции (в нашем случае T) по заданным ее значениям на контуре области. Можно показать, что задача эта всегда имеет одно и только одно решение (при весьма общих предположениях). В тексте дается общее решение этой задачи для случая, когда область есть круговое кольцо.

[3]) Заметим, что ввиду действительности функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ будем иметь (§ 52):

$$A'_k = \overline{A}'_{-k}, \quad A''_k = \overline{A}''_{-k};$$

в частности,

$$A'_0 = \overline{A}'_0, \quad A''_0 = \overline{A}''_0,$$

т. е. A'_0 и A''_0 — действительные величины.

Тогда граничные условия напишутся так:

$$2A\ln r+\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k r^k e^{ik\vartheta}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\bar{a}_k r^k e^{-ik\vartheta}=\begin{cases}2\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}A'_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r=R_1,\\ 2\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}A''_k e^{ik\vartheta} & \text{при } r=R_2.\end{cases}$$

Значит, будем иметь:

$$2A\ln R_1+a_0+\bar{a}_0=2A'_0,\qquad 2A\ln R_2+a_0+\bar{a}_0=2A''_0, \tag{9}$$

$$a_kR_1^k+\bar{a}_{-k}R_1^{-k}=2A'_k,\quad a_kR_2^k+\bar{a}_{-k}R_2^{-k}=2A''_k\quad (k\neq 0). \tag{10}$$

Из уравнений (9) определяются A и $a_0+\bar{a}_0$, т. е. удвоенная действительная часть a_0; каждая пара уравнений (10) определит a_k и $\bar{a}_{-k}$ (достаточно, чтобы определить все коэффициенты, придавать k только значения $+1$, $+2$, . . .). Мнимая часть a_0 останется, как и следовало ожидать, не определенной, и ее можно задать произвольно.

Например, если $T=T_1$ при $r=R_1$ и $T=T_2$ при $r=R_2$, где T_1, T_2 — постоянные, мы будем иметь:

$$A'_0=T_1,\quad A''_0=T_2,\quad A'_k=A''_k=0\quad (k\neq 0).$$

Тогда мы получим для $F(z)$ как раз формулу (2).

Заметим еще следующее важное обстоятельство: многозначные члены в функции $\int F(z)\,dz$ могут произойти только от члена $A\ln z$ и члена $a_{-1}z^{-1}$ в разложении (7). Постоянные же A, a_{-1} определяются, как это показывают формулы (9), (10), исключительно величинами A'_0, A''_0, A'_1, A''_1. Следовательно, характеристики дислокации во вспомогательной задаче, а поэтому и напряжения X_x, Y_y, X_y в исходной задаче зависят исключительно от величин

$$A'_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\vartheta)\,d\vartheta,\qquad A''_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_2(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$A'_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(\vartheta)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta,\qquad A''_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_2(\vartheta)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta,$$

или, что все равно, от величин

$$\int_0^{2\pi}f_1(\vartheta)\,d\vartheta,\quad \int_0^{2\pi}f_2(\vartheta)\,d\vartheta,\quad \int_0^{2\pi}f_1(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta,\quad \int_0^{2\pi}f_2(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi}f_1(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta,\quad \int_0^{2\pi}f_2(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

IV. ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Мы видели в предыдущих отделах этой главы, что в случае областей, ограниченных одной окружностью или двумя концентрическими окружностями, решение граничных задач путем разложения неизвестных функций в степенные ряды дает эффективные результаты. Во многих случаях путем

конформного отображения данной односвязной или двусвязной области на круг или на круговое кольцо и последующего разложения неизвестных функций в степенные ряды можно также добиться эффективных результатов.

В настоящем отделе мы вкратце коснемся этого вопроса [1]).

§ 63. Случай односвязной области. 1. Рассмотрим сперва случай конечной односвязной области S, ограниченной простым замкнутым контуром L, которую мы представим себе отображенной соотношением $z = \omega(\zeta)$ на круг $|\zeta| < 1$; окружность $|\zeta| = 1$ этого круга мы обозначим через γ.

Так как при обозначениях § 50 функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ голоморфны в S, то функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ голоморфны внутри γ. Поэтому внутри γ должны иметь место разложения

$$\varphi(\zeta) = \sum_0^\infty a_k \zeta^k, \qquad \psi(\zeta) = \sum_0^\infty a'_k \zeta^k, \qquad \varphi'(\zeta) = \sum_0^\infty k a_k \zeta^{k-1}. \tag{1}$$

Мы можем попытаться решить основные граничные задачи, подставляя предыдущие ряды (предполагая их сходящимися также на γ, т. е. при $\zeta = \sigma = e^{i\vartheta}$) в равенство (1) или (4) § 51, что даст некоторую систему уравнений для определения коэффициентов a_k и a'_k.

Поясним это, например, в случае первой основной задачи. Граничное условие (1) § 51 перепишем теперь так:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2, \tag{2}$$

отбросив произвольную постоянную в правой части. Мы можем всегда считать, что точке $z = 0$ соответствует точка $\zeta = 0$, т. е. что $\omega(0) = 0$. Как мы знаем, мы можем произвольно фиксировать величины $\varphi_1(0)$ и мнимую часть $\varphi'_1(0)$ или, переходя к функции $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, величины $\varphi(0) = a_0$ и мнимую часть $\varphi'(0)/\omega'(0)$, т. е. мнимую часть $a_1/\omega'(0)$. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать $a_0 = 0$, оставив пока неопределенной мнимую часть величины $a_1/\omega'(0)$.

Предположим далее, что выражение $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ может быть (при $\sigma = e^{i\vartheta}$) представлено в виде ряда

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\vartheta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \sigma^k, \tag{3}$$

т. е. в виде комплексного ряда Фурье; будем, далее, считать, что этот ряд абсолютно сходящийся. Легко показать, что это условие будет выпол-

[1]) Однако наиболее эффективные применения конформного отображения достигаются иным путем, который будет указан в главах V и VI.

нено наверное, если контур L удовлетворяет условиям, указанным в § 47 [1]).

Разлагая выражение $f_1 + if_2$ в комплексный ряд Фурье (предполагая, что такое разложение возможно):

$$f_1 + if_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k \tag{4}$$

и подставляя выражения (1), (3), (4) в равенство (2), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \sigma^l \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k \sigma^{-k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}'_k \sigma^{-k} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k. \tag{5}$$

Перемножая ряды в среднем члене левой части, а эта операция будет, как известно, законна, если, например, предположить, что ряд для $\varphi'(\sigma)$ сходится абсолютно, так же как и ряд (3), и сравнивая коэффициенты при σ^m ($m = 1, 2, \ldots$), получаем:

$$a_m + \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k b_{m+k-1} = A_m \qquad (m = 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

сравнивая же коэффициенты при σ^{-m} ($m = 0, 1, 2, \ldots$), находим:

$$\bar{a}'_m + \sum_{k=1}^{\infty} k\bar{a}_k b_{-m+k-1} = A_{-m} \qquad (m = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Уравнения (6) представляют собой систему бесконечного множества уравнений с бесконечным множеством неизвестных коэффициентов a_k. Каждое из отдельных уравнений (6) следует рассматривать как систему двух действительных уравнений относительно величин α_k, β_k, где

$$\alpha_k + i\beta_k = a_k, \quad \alpha_k - i\beta_k = \bar{a}_k.$$

Если удастся тем или иным путем решить эту систему, то этим определится функция $\varphi(\zeta)$. Коэффициенты же разложения a'_m функции $\psi(\zeta)$ определятся последовательно по формулам (7).

Таким образом, основную задачу составляет решение системы (6), т. е. нахождение функции $\varphi(\zeta)$.

Если, далее, полученные таким образом ряды для $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$ окажутся при $|\zeta| = 1$ равномерно сходящимися [2]), а ряд для $\varphi'(\zeta)$, кроме

---

[1]) Это следует из известной теоремы С. Н. Бернштейна [1], гласящей, что если функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию Гёльдера (Hölder) при показателе $\alpha > \frac{1}{2}$ (определение этого термина см. в § 65, п. 3), то ряд коэффициентов Фурье этой функции абсолютно сходится.

В нашем случае функция $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ имеет непрерывную первую производную и, значит, удовлетворяет условию Гёльдера при $\alpha = 1$.

[2]) Равномерная сходимость при $|\zeta| = 1$ влечет, очевидно, за собой равномерную сходимость при $|\zeta| \leqslant 1$ и, следовательно, непрерывность функций φ, φ', ψ вплоть до контура, т. е. регулярность решения (§ 42).

того, абсолютно сходящимся, то мы можем быть уверены, что условия задачи будут удовлетворены [1]).

Практическое решение полученной системы уравнений во многих случаях не представляет затруднений [2]). Мы ограничимся только следующими замечаниями общего характера относительно системы (6), начав с рассмотрения того простого случая, когда $\omega(\zeta)$ есть полином:

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n \qquad (c_1 \neq 0, \quad c_n \neq 0). \tag{8}$$

Будем в дальнейшем пользоваться следующим способом обозначений [3]). Если

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n$$

— некоторый полином, то под $\overline{f}(\zeta)$, где черта ставится только над f, мы будем подразумевать полином, получающийся из $f(\zeta)$ путем замены коэффициентов на сопряженные, так что по определению

$$\overline{f}(\zeta) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\zeta + \ldots + \overline{a}_n\zeta^n.$$

При таких обозначениях будем иметь (вспомним, что $\sigma = e^{i\vartheta}$, $\overline{\sigma} = e^{-i\vartheta} = \sigma^{-1}$):

$$\overline{f(\sigma)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\overline{\sigma} + \ldots + \overline{a}_n\overline{\sigma}^n = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\sigma^{-1} + \ldots + \overline{a}_n\sigma^{-n} = \overline{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Применяя указанные обозначения к выражению $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$, фигурирующему в условии (2), получаем:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{c_1\sigma + c_2\sigma^2 + \ldots + c_n\sigma^n}{\overline{c}_1 + 2\overline{c}_2\sigma^{-1} + \ldots + n\overline{c}_n\sigma^{-n+1}} =$$

$$= \sigma^n \frac{c_1 + c_2\sigma + \ldots + c_n\sigma^{n-1}}{\overline{c}_1\sigma^{n-1} + 2\overline{c}_2\sigma^{n-2} + \ldots + n\overline{c}_n}.$$

Правая часть, рассматриваемая как функция комплексной переменной σ на всей плоскости (это — рациональная функция), не имеет вне окружности γ, включая саму окружность, никаких полюсов, кроме полюса в точке $\sigma = \infty$, ибо $\omega'(\zeta)$ внутри и на γ в нуль не обращается (§ 47), и,

---

[1]) Заметим, что, найдя функцию $\varphi(\zeta)$, можно определить функцию $\psi(\zeta)$ непосредственно, не прибегая к формулам (7). В самом деле, если функция $\varphi(\zeta)$ известна, то граничные значения на окружности $|\zeta| = 1$ функции $\psi(\zeta)$ даются формулой

$$\psi(\sigma) = f_1 - if_2 - \overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma),$$

вытекающей из условия (2). Следовательно, функция $\psi(\zeta)$ вычислится непосредственно по формуле Коши.

[2]) Аналогичная система получена в одном частном примере Д. М. Волковым и А. А. Назаровым [1, 2] и решена методом последовательных приближений. Еще раньше П. Соколов [1] дал решение ряда частных задач, имеющих значение для техники, при помощи аналогичного приема.

[3]) Этот способ обозначений представляет собой частный случай несколько более общего способа, который будет пояснен в § 76 и которым мы будем широко пользоваться.

следовательно, $\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ не обращается в нуль ни вне, ни на γ [1]). Значит, мы будем иметь разложение вида

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = b_n\sigma^n + b_{n-1}\sigma^{n-1} + \ldots + b_1\sigma + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}\sigma^{-k},$$

пригодное для $|\sigma| \geqslant 1$, в частности, при $\sigma = e^{i\vartheta}$. Таким образом, в нашем случае ряд (3) будет содержать только конечное число членов с положительными степенями σ, а именно будем иметь:

$$b_k = 0 \qquad (k \geqslant n+1). \tag{9}$$

Уравнения (6) сведутся к следующим:

$$a_m = A_m \qquad (m \geqslant n+1) \tag{6'}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_1 + \overline{a}_1 b_1 + 2\overline{a}_2 b_2 + \ldots + n\overline{a}_n b_n &= A_1, \\ a_2 + \overline{a}_1 b_2 + 2\overline{a}_2 b_3 + \ldots + (n-1)\,\overline{a}_{n-1} b_n &= A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n + \overline{a}_1 b_n &= A_n; \end{aligned}\right\} \tag{6''}$$

формула же (7) приводится к виду:

$$\overline{a}'_m + \sum_{k=1}^{m+n+1} k\overline{a}_k b_{-m+k-1} = A_{-m} \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{7'}$$

Таким образом, для определения величин $a_1, \ldots, a_n$ имеем n уравнений (6″), которые представляют собой $2n$ действительных уравнений для определения $2n$ действительных величин α_k, β_k ($k = 1, \ldots, n$), где $\alpha_k + i\beta_k = a_k$. Если уравнения (6″) имеют решение, то остальные коэффициенты определятся по формулам (6′) и (7′), и легко непосредственно показать, что полученные таким образом ряды для $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ будут удовлетворять условиям задачи, если только заданные функции f_1 и f_2 достаточно регулярны, например: имеют вторые производные по ϑ, удовлетворяющие условиям Дирихле [2]).

---

[1]) Если бы в некоторой точке ζ_0, при $|\zeta_0| \geqslant 1$, мы имели $\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) = 0$, то, переходя к сопряженным значениям, имели бы $\omega'\left(\frac{1}{\overline{\zeta}_0}\right) = 0$ или $\omega'(\zeta_1) = 0$, где $\zeta_1 = \frac{1}{\overline{\zeta}_0}$, $|\zeta_1| \leqslant 1$, что невозможно.

[2]) Действительно, в этом случае будем иметь неравенства вида

$$|A_m| < \frac{C}{|m|^3} \qquad (m = \pm 1 \pm 2, \ldots), \tag{a}$$

откуда на основании формулы (6′) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$ при $|\zeta| \leqslant 1$. Далее, формула (7′) показывает, что $a'_m = -\overline{c}_m + \overline{A}_{-m}$, где

$$c_m = \sum_{k=1}^{m+n+1} k\overline{a}_k b_{-m+k-1}.$$

Но ряд ΣA_{-m} абсолютно сходится в силу условия (а); также абсолютно сходится

Итак, мы получим решение задачи, если система (6″) допускает решение.

Однако ясно, что система (6″) не может дать определенных значений для всех величин $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$; действительно, мы знаем заранее, что мнимая часть величины $a_1/\omega'(0) = (\alpha_1 + i\beta_1)/\omega'(0)$ остается всегда совершенно произвольной. Значит, определитель системы (6″) должен быть равен нулю, а из этого, как известно, следует, что для существования решения величины $A_1, \ldots, A_n$ должны удовлетворять некоторому добавочному условию, которое получим, исключив неизвестные из уравнений (6″). Оно будет, очевидно, выражать условие равенства нулю главного момента внешних усилий [1]), ибо при этом (и только при этом) добавочном условии наша задача имеет решение [2]). Из теоремы единственности решения следует, что все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определятся полностью, если (произвольно) зафиксировать мнимую часть выражения $a_1/\omega'(0)$. О системе (6″) будет несколько более подробно сказано в § 84 (замечание 2).

2. Рассмотрим, например, случай, когда контур L есть улитка Паскаля. В этом случае можно взять согласно § 48, п. 2 (мы пишем теперь a вместо m):

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + a\zeta^2), \qquad R > 0, \quad 0 \leqslant a < \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sigma + a\sigma^2}{1 + 2a\bar{\sigma}} = a\sigma^2 + (1 - 2a^2)\sigma - \frac{2a(1-2a^2)}{1 + \frac{2a}{\sigma}} =$$

$$= a\sigma^2 + (1 - 2a^2)\sigma - 2a(1 - 2a^2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2a}{\sigma}\right)^k.$$

Значит, в нашем случае $n = 2$,

$$b_2 = a, \quad b_1 = 1 - 2a^2, \quad b_{-k} = (-1)^{k+1}(2a)^{k+1}(1 - 2a^2),$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Система (6″) сводится к следующей:

$$a_1 + \bar{a}_1(1 - 2a^2) + 2\bar{a}_2 a = A_1, \quad a_2 + \bar{a}_1 a = A_2.$$

Внося значение $\bar{a}_2 = -aa_1 + \bar{A}_2$, взятое из второго уравнения, в первое, получаем соотношение

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{A_1 - 2a\bar{A}_2}{1 - 2a^2},$$

и ряд Σc_m, ибо члены его находятся в числе членов абсолютно сходящегося ряда, получаемого перемножением абсолютно сходящихся рядов $\Sigma k\bar{a}_k$ и Σb_k. Отсюда непосредственно вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда для $\psi(\zeta)$ при $|\zeta| \leqslant 1$.

[1]) Условие равенства нулю главного вектора уже обеспечено тем, что выражение $f_1 + if_2$ предполагается непрерывным на контуре.

[2]) См. ниже доказательства теорем существован (глава V).

определяющее действительную часть a_1. Для возможности решения задачи надо, чтобы мнимая часть $A_1 - 2a\overline{A}_2$ равнялась нулю. Легко непосредственно проверить, что это есть условие равенства нулю главного момента внешних усилий.

Полагая для определенности мнимую часть a_1 равной нулю, найдем:

$$a_1 = \frac{A_1 - 2a\overline{A}_2}{2(1-2a^2)}, \qquad a_2 = A_2 - \overline{a}_1 a = A_2 - a_1 a$$

и затем все остальные коэффициенты по формулам

$$a_m = A_m \ (m \geqslant 3), \quad \overline{a}_m = -\sum_{k=1}^{m+3} k\overline{a}_k b_{-m+k-1} + A_{-m} \qquad (m \geqslant 0),$$

и задача решена. Получаемые для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ ряды легко суммируются и выражаются через интегралы типа Коши, но на этом мы не останавливаемся, так как соответствующие формулы легко получить иным путем (см. § 84).

3. Вернемся к общему случаю, когда $\omega(\zeta)$ не есть полином. Отбросив в разложении

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n + c_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots$$

все члены, начиная с $c_{n+1}\,\zeta^{n+1}$, получим вместо $\omega(\zeta)$ полином $\omega_n(\zeta)$, который отображает на круг $|\zeta| < 1$ не заданную область S, а близкую к ней область S_n, которая тем ближе к S, чем больше n. Решение задачи для области S_n не представляет, как мы видели, принципиальных затруднений. Упрощение, вносимое заменой $\omega(\zeta)$ полиномом $\omega_n(\zeta)$, сводится в конечном счете к отбрасыванию в системе (6), (7) всех членов, содержащих b_k при $k \geqslant n+1$.

Мы видели, что в этом случае дело сводится к решению конечного числа линейных уравнений с конечным числом неизвестных коэффициентов, а именно: к решению системы (6″) и к вычислению остальных коэффициентов при помощи соотношений (6′) и (7′). Это есть один из способов приближенного решения бесконечной системы (6), (7), т. е. приближенного решения первоначальной задачи. Если теперь увеличивать беспредельно n, то область S_n будет стремиться к S, и найденное приближенное решение будет стремиться к точному, т. е. функции φ и ψ, найденные для области S_n, будут стремиться к определенным функциям, дающим точное решение для области S. Это можно строго доказать при известных общих предположениях относительно контура области S и относительно функций f_1 и f_2, заданных на контуре [1]).

4. Совершенно аналогичные замечания можно сделать по поводу решения второй основной задачи. Эта задача даже проще, так как в случае заданных контурных смещений коэффициент a_1 должен определиться вполне и граничные задания не должны подчиняться никаким добавоч-

[1]) Несколько более подробно об этом будет сказано в главе V, § 89.

ным условиям. Значит, система, аналогичная системе (6″), будет всегда иметь одно вполне определенное решение.

5. В случае бесконечной области, отображаемой на круг $|\zeta| < 1$ функцией вида

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n, \qquad (8')$$

получаются результаты столь же простые, что и для конечной области в рассмотренном выше случае, когда $\omega(\zeta)$ — полином. Мы не останавливаемся подробнее на этом, так как в упомянутых случаях (а также в более общих) можно получить эффективные решения иным путем (см. следующие главы).

Способ решения основных задач, изложенный в настоящем параграфе (это изложение воспроизведено без существенных изменений из предыдущих изданий книги), несколько более подробно и с некоторыми интересными добавлениями приведен в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [1], глава VI.

§ 64. Пример применения отображения на круговое кольцо. Решение основных задач для сплошного эллипса. Естественно попытаться обобщить способ, изложенный в предыдущем параграфе, на случай двусвязной области, пользуясь отображением на круговое кольцо. Однако даже для областей простейшего вида непосредственное применение этого способа не приводит к простым результатам [1]). Не останавливаясь на этом вопросе, мы применим отображение на круговое кольцо к решению основных задач для *сплошного эллипса* [2]). Дело в том, что конечная область,

[1]) Первая основная задача для области, ограниченной двумя неконцентрическими окружностями, решена Джефри (Jeffery [1]) способом, по существу близким к указанному. Решение для области, ограниченной двумя конфокальными эллипсами, дано недавно М. П. Шереметьевым [2] и А. И. Каландия [5]. Отметим, что решение, данное ранее для этого случая Тимпе (Timpe [2]), оказалось неправильным, как показала ближайшая проверка. А именно, Тимпе пытается получить решение задачи путем разложения соответствующей функции Эри в ряд по некоторой системе частных решений бигармонического уравнения. Но, как нетрудно проверить, система частных решений, построенная Тимпе, неполная. Полную систему легко построить, исходя из комплексного представления бигармонической функции и используя конформное отображение на круговое кольцо. Указания на некоторые другие работы, касающиеся задач аналогичного типа, можно найти в монографии Г. Н. Савина [8].

[2]) Эти задачи были решены Тедоне (Tedone [1]) и Боджо (Boggio [3]) иным, более сложным путем. Приводимое здесь решение было дано мною в статье [16] и в предыдущих изданиях этой книги. Позднее Д. И. Шерман [18] дал решение, основанное на интегральных уравнениях Лауричелла. Окончательные формулы Д. И. Шермана совпадают с моими прежними формулами, если несколько преобразовать эти последние. А именно, раньше для вычисления величин c_k, фигурирующих в формуле (23), мною были даны лишь формулы (21), (21′). Если же ввести в рассмотрение коэффициенты разложения (24), то из названных формул непосредственно вытекает формула (27). Внося даваемое ею выражение для c_k в правую часть формулы (19), мы получим формулу, совпадающую (если не считать обозначений) с формулой Д. И. Шермана.

ограниченная эллипсом, может быть, как и всякая область, ограниченная одним замкнутым контуром, отображена на круг. Но соответствующая преобразующая функция в этом случае сложна и неудобна. Вот почему мы предпочитаем применить другое отображение.

Представим себе, что эллипс разрезан по отрезку, соединяющему его фокусы. Этот разрез мы можем рассматривать так же, как эллипс (конфокальный с данным), малая полуось которого равна нулю. Таким образом, мы имеем предельный случай области, заключенной между двумя конфокальными эллипсами. Эту область мы можем отобразить на кольцо, заключенное между концентрическими окружностями γ_1 и γ_2 плоскости ζ, положив (§ 48, п. 5):

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \quad R>0. \tag{1}$$

Окружности радиуса ϱ на плоскости ζ соответствует на плоскости z эллипс, параметрически представляемый уравнениями

$$x=R\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta, \quad y=R\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta. \tag{2}$$

Окружности $\varrho = 1$ плоскости ζ будет соответствовать отрезок AB оси Ox (на плоскости z), заключенный между точками

$$x=-2R \text{ и } x=+2R.$$

Когда точка ζ описывает окружность $\varrho = 1$, соответствующая точка z дважды пробегает упомянутый отрезок, следуя закону:

$$z=x=2R\cos\vartheta=R\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right) \qquad (\sigma=e^{i\vartheta}), \tag{3}$$

так что точкам $\sigma = e^{i\vartheta}$ и $\bar{\sigma} = e^{-i\vartheta}$ на плоскости ζ соответствует одна и та же точка отрезка AB.

Таким образом, за окружность γ_1 мы должны принять окружность радиуса 1; радиус же окружности γ_2 мы обозначим через ϱ_0 ($\varrho_0 > 1$). Величина ϱ_0 определится заданием линейного эксцентриситета $2R$ и большой полуоси эллипса $a = R\left(\varrho_0+\frac{1}{\varrho_0}\right)$, откуда для ϱ_0 получается выражение

$$\varrho_0=\frac{a+\sqrt{a^2-4R^2}}{2R} \tag{4}$$

[знак (—) перед радикалом дал бы $\varrho_0 < 1$].

При обозначениях § 50 функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ должны быть голоморфны внутри неразрезанного эллипса. Тем более они должны быть голоморфны в разрезанном вдоль AB эллипсе. Значит, $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ должны быть голоморфны в кольце между γ_1 и γ_2 [1]), и мы будем иметь

[1]) Можно легко показать, что функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ должны быть продолжимы аналитически внутрь окружности γ_1 до окружности радиуса $\varrho' = \frac{1}{\varrho_0}$. Для этого достаточно рассмотреть часть двулистной римановой поверхности, наложенной на плоскость z, с точками разветвления в A и B, и заключенной внутри нашего эллипса.

разложения вида

$$\varphi(\zeta)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k\zeta^k, \quad \psi(\zeta)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_k\zeta^k, \tag{5}$$

сходящиеся при $1<|\zeta|<\varrho_0$ (и даже при $\frac{1}{\varrho_0}<|\zeta|<\varrho_0$ [1]).

При $\varrho=\varrho_0$ эти функции должны удовлетворять граничному условию

$$\overline{\varphi(\zeta)}+\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)=f_1-if_2, \tag{6}$$

где f_1-if_2 — заданная функция от ϑ; ср. формулу (2) предыдущего параграфа (мы перешли к сопряженным значениям исключительно ради некоторого упрощения письма).

Кроме того, на окружности γ_1 мы должны иметь:

$$\varphi(\sigma)=\varphi(\bar{\sigma}), \quad \psi(\sigma)=\psi(\bar{\sigma}), \tag{7}$$

ибо точкам σ и $\bar{\sigma}$ соответствует одна и та же точка отрезка AB на плоскости z. Обратно, если это последнее условие соблюдено, то функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут принимать одни и те же значения при приближении z к разрезу AB с той или иной стороны и, значит, будут представлять собой аналитические функции в неразрезанном эллипсе.

Из формул (5) и (7) следует:

$$a_k=a_{-k}, \quad a'_k=a'_{-k}. \tag{8}$$

Внося ряды (5) в формулу (6), замечая, что при $\varrho=\varrho_0$

$$\omega'(\zeta)=R\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)=R\left(1-\frac{\bar{\zeta}^2}{\varrho_0^4}\right),$$

$$\overline{\omega(\zeta)}=R\left(\bar{\zeta}+\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)=R\left(\frac{\varrho_0^2}{\zeta}+\frac{\zeta}{\varrho_0^2}\right),$$

и умножая обе части равенства (6) на $1-\frac{1}{\zeta^2}$, получаем:

$$\left(1-\frac{\bar{\zeta}^2}{\varrho_0^4}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}\bar{a}_k\bar{\zeta}^k+\left(\frac{\varrho_0^2}{\zeta}+\frac{\zeta}{\varrho_0^4}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}ka_k\zeta^{k-1}+$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_k\zeta^k=(f_1-if_2)\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad \text{при } \varrho=\varrho_0. \tag{9}$$

Мы ввели здесь обозначение

$$\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta)=\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}a'_k\zeta^k=\sum_{-\infty}^{+\infty}(a'_k-a'_{k+2})\zeta^k=\sum_{-\infty}^{+\infty}b_k\zeta^k, \tag{10}$$

Соотношение (1) дает отображение этой двулистной фигуры на кольцо

$$\frac{1}{\varrho_0}<|\zeta|<\varrho_0,$$

а отсюда легко вывести наше утверждение.

[1]) См. предыдущее примечание.

так что

$$b_k = a'_k - a'_{k+2}. \tag{11}$$

Разлагая правую часть формулы (9) в комплексный ряд Фурье

$$(f_1 - if_2)(1 - \varrho_0^{-2} e^{-2i\vartheta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\vartheta}, \tag{12}$$

полагая $\zeta = \varrho_0 e^{i\vartheta}$ и сравнивая коэффициенты при $e^{ik\vartheta}$, получаем без всякого труда:

$$\varrho_0^{-k}\bar{a}_{-k} - \varrho_0^{-k-4}\bar{a}_{-k-2} + (k+2)\varrho_0^{k+2}a_{k+2} + k\varrho_0^{k-2}a_k + b_k\varrho_0^k = A_k,$$

или, замечая, что на основании первой формулы (8) $\bar{a}_{-k} = \bar{a}_k$, $\bar{a}_{-k-2} = \bar{a}_{k+2}$,

$$(k+2)\varrho_0^{k+2}a_{k+2} - \varrho_0^{-k-4}\bar{a}_{k+2} + k\varrho_0^{k-2}a_k + \varrho_0^{-k}\bar{a}_k + b_k\varrho_0^k = A_k. \tag{13}$$

Заменяя k на $-k-2$ и замечая, что на основании равенств (8) и (11)

$$b_{-k-2} = a'_{-k-2} - a'_{-k} = a'_{k+2} - a'_k = -b_k, \tag{8'}$$

получаем еще:

$$-(k+2)\varrho_0^{-k-4}a_{k+2} + \varrho_0^{k+2}\bar{a}_{k+2} - k\varrho_0^{-k}a_k - \varrho_0^{k-2}\bar{a}_k - b_k\varrho_0^{-k-2} = A_{-k-2}. \tag{13'}$$

Исключая из уравнений (13) и (13') величину b_k, получаем:

$$(k+2)(\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})a_{k+2} + (\varrho_0^{2k+4} - \varrho_0^{-2k-4})\bar{a}_{k+2} -$$
$$-k(\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})a_k - (\varrho_0^{2k} - \varrho_0^{-2k})\bar{a}_k = B_k, \tag{14}$$

где

$$B_k = A_k\varrho_0^{-k} + A_{-k-2}\varrho_0^{k+2}. \tag{15}$$

Уравнения (14) дают возможность последовательно определить коэффициенты a_k [1]), если известны a_0 и a_1. Величина a_0 может быть задана произвольно, так как к функции $\varphi(\zeta)$ может быть всегда прибавлена произвольная постоянная. Уравнения (14) показывают, что, как и следовало ожидать, величина a_2 (а следовательно, и величины a_4, a_6, . . .) не зависит от величины a_0; действительно, при $k = 0$ из уравнений (14) выпадают члены, содержащие a_0.

Чтобы вычислить $a_1 = a_{-1}$, положим в уравнениях (14) $k = -1$, что дает:

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{B_{-1}}{2(\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})} = \frac{A_{-1}\varrho_0}{\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2}}. \tag{16}$$

Это соотношение позволяет вычислить действительную часть a_1 и вместе с тем показывает, что для возможности задачи должно быть

$$A_{-1} = \text{действительная величина}. \tag{17}$$

Легко непосредственно проверить, что условие это выражает условие равенства нулю главного момента внешних усилий (равенство нулю главного вектора обеспечивается уже тем, что мы считаем f_1 и f_2 непрерывными на контуре эллипса).

[1]) Каждое из уравнений (14) разбивается на два, если отделить действительные части от мнимых. Вместо этого к каждому уравнению (14) можно приписать второе, полученное переходом к сопряженным значениям (см. также ниже).

Мнимая часть a_1 остается произвольной, как это можно было предвидеть [1]). Легко непосредственно проверить, что влияние этой мнимой части не отразится на a_3, а следовательно, на a_5, a_7 и т. д.

Зафиксировав произвольно a_0 и мнимую часть a_1 и определив последовательно все остальные коэффициенты по уравнениям (14), получим значение функции $\varphi(\zeta)$.

После этого коэффициенты b_k определятся последовательно по одной из формул (13), (13′). Таким образом, мы получим:

$$\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k\zeta^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k+\sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}\zeta^{-k},$$

или, вспоминая, что $b_{-k}=-b_{k-2}$ (значит, в частности, $b_{-1}=-b_{-1}=0$),

$$\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\zeta^k-\frac{1}{\zeta^{k+2}}\right). \tag{18}$$

Мы увидим ниже, что при определенных условиях полученные ряды сходятся в рассматриваемой области. Правая часть формулы (18) обращается в нуль при $\zeta=\pm 1$, и, следовательно, функция $\psi(\zeta)$, получаемая делением правой части на $1-\frac{1}{\zeta^2}$, не будет иметь особенностей при $\zeta=\pm 1$ [2]).

Таким образом, задача решена. Совершенно аналогично можно решить и вторую основную задачу.

Прежде чем перейти к вопросу о сходимости полученных рядов, заметим, что вычисление коэффициентов a_k ($k=2, 3, \ldots$) можно упростить следующим образом. Полагая для сокращения письма

$$k(\varrho_0^2-\varrho_0^{-2})a_k+(\varrho_0^{2k}-\varrho_0^{-2k})\bar{a}_k=c_k, \tag{19}$$

будем иметь согласно уравнениям (14):

$$c_{k+2}-c_k=B_k. \tag{20}$$

Полагая в этой формуле последовательно $k=0, 2, \ldots, 2n-2$, складывая полученные результаты и замечая, что $c_0=0$, получаем:

$$c_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1} B_{2k}=\sum_{k=0}^{n-1}(A_{2k}\varrho_0^{-2k}+A_{-2k-2}\varrho_0^{2k+2}). \tag{21}$$

---

[1]) К функции $\varphi_1(z)$ мы можем всегда прибавить выражение вида Ciz, где C — произвольная действительная постоянная. Следовательно, к $\varphi(\zeta)$ можем прибавить выражение вида

$$Ciz=CiR\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

[2]) Заметим, что после того, как найдена функция $\varphi(\zeta)$, функцию $\psi(\zeta)$ можно вычислить непосредственно, исходя из граничного условия и применяя формулу Коши; ср. сказанное в предыдущем параграфе (первое примечание на стр. 226).

Точно так же, полагая в формуле (20) последовательно $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$ и складывая, получаем:

$$c_{2n+1} = c_1 + \sum_{k=1}^{n} B_{2k-1} = c_1 + \sum_{k=1}^{n} (A_{2k-1}\varrho^{-2k+1} + A_{-2k-1}\varrho_0^{2k+1}), \qquad (21')$$

где на основании формул (19) и (16)

$$c_1 = (\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})(a_1 + \bar{a}_1) = A_{-1}\varrho_0. \qquad (22)$$

Таким образом, мы получили явные выражения для величин c_k. Величины же a_k весьма просто выражаются через c_k. А именно, присоединив к формуле (19) равенство, полученное переходом к сопряженным значениям, и решая относительно a_k, получим:

$$a_k = \frac{k(\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})c_k - (\varrho_0^{2k} - \varrho_0^{-2k})\bar{c}_k}{k^2(\varrho_0^2 - \varrho_0^{-2})^2 - (\varrho_0^{2k} - \varrho_0^{-2k})^2} \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (23)$$

Выражения (21), (21′) для величин c_k, фигурирующих в предыдущей формуле, можно еще упростить, если ввести в рассмотрение, вместо коэффициентов A_k разложения (12), коэффициенты C_k разложения функции $f_1 - if_2$ в комплексный ряд Фурье:

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\theta}. \qquad (24)$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (12), имеем:

$$A_k = C_k - \varrho_0^{-2}C_{k+2}. \qquad (25)$$

Выражение (22) для c_1 получает теперь вид

$$c_1 = C_{-1}\varrho_0 - C_1\varrho_0^{-1}. \qquad (26)$$

Внося выражения (25), (26) в правые части формул (21), (21′), легко получаем весьма простую формулу:

$$c_k = C_{-k}\varrho_0^k - C_k\varrho_0^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (27)$$

Переходя теперь к вопросу о сходимости полученных выше рядов, предположим, что функции f_1 и f_2 имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Дирихле (или, более обще, вторые производные с ограниченной вариацией). Тогда для коэффициентов C_k разложения (24) будем иметь неравенства вида

$$|C_k| < \frac{C}{|k|^3} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда на основании формул (23), (27) и (13) или (13′) легко вытекают неравенства вида

$$|a_k|\varrho_0^k < \frac{C}{|k|^3}, \qquad |b_k|\varrho_0^k < \frac{C}{k^2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (28)$$

из чего непосредственно следует абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\psi(\zeta)$ при

$$\frac{1}{\varrho_0} \leqslant |\zeta| \leqslant \varrho_0$$

и, значит, пригодность найденного решения.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ

В последующих главах будут широко использоваться так называемые интегралы типа Коши. Систематическое изложение свойств этих интегралов можно найти в книге автора [25], но для удобства читателя, желающего ограничиться лишь теми сведениями, которые действительно необходимы для понимания дальнейшего, мы даем их в настоящей главе. Некоторые предложения мы приводим без доказательств; эти доказательства можно найти в упомянутой книге автора или в книге И. И. Привалова [1]. Кроме того, в настоящей главе дается ряд элементарных формул и предложений, имеющих значение для практики и не содержащихся в упомянутых книгах.

I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

§ 65. Некоторые обозначения и термины. 1. В дальнейшем (если противное не оговорено) под L мы будем подразумевать либо простой замкнутый гладкий контур на плоскости Oxy, либо простую разомкнутую конечную гладкую дугу на этой плоскости, либо, наконец, совокупность конечного числа раздельно лежащих таких разомкнутых дуг и замкнутых контуров (рис. 30). Мы будем называть L *простой гладкой линией*, часто опуская слова «простая» и «гладкая», которые всегда будут подразумеваться.

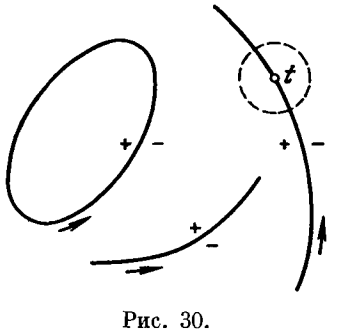


Рис. 30.

Таким образом, линия L может состоять из раздельно расположенных частей. Если в состав L входят разомкнутые дуги, то концы этих дуг мы будем называть *концами линии* L.

Мы будем всегда считать, что на L выбрано определенное положительное направление; в случае если L состоит из раздельных частей, это значит, что положительное направление выбрано на каждой из этих частей.

Если из какой-либо точки (простой, гладкой) линии L, не совпадающей с ее концами, описать круг достаточно малого радиуса, то он разобьется линией L на две части, одна из которых будет расположена слева

от L, а другая — справа (по отношению к наблюдателю, смотрящему вдоль положительного направления, выбранного на L; рис. 30). В соответствии с этим мы можем различать «левую» и «правую» окрестности каждой точки t, расположенной на L и не совпадающей с ее концами. Например, левая окрестность точки t состоит из точек, не расположенных на L и принадлежащих левой части круга достаточно малого радиуса, описанного из t, как из центра.

Аналогично мы можем различать левую и правую окрестности любой части линии L, концы которой не совпадают с концами L. Под *частью* линии L мы *всегда*, как и раньше, будем подразумевать часть, состоящую из (конечного числа) разомкнутых дуг, взятых на L, или замкнутых контуров, входящих в состав L.

Левую и правую окрестности мы будем различать соответственно знаками $(+)$ и $(-)$.

2. Напомним и отчасти дополним сказанное в § 29. Пусть $F(z)$ — какая-либо функция [1]), заданная в окрестности линии L, но не на самой этой линии, и будем считать, что $F(z)$ непрерывна в этой окрестности. Пусть t — некоторая точка линии L, не совпадающая с ее концами (если таковые имеются). Мы будем говорить, что функция $F(z)$ *непрерывно продолжима на точку t слева (справа)*, если $F(z)$ стремится к определенному пределу, когда z стремится к t по любому пути, оставаясь, однако, все время слева (справа) от L [2]). Пределы функции $F(z)$ при $z \to t$ слева или справа мы будем обозначать соответственно через

$$F^+(t) \quad \text{или} \quad F^-(t)$$

и будем называть их *граничными значениями функции* $F(z)$ соответственно слева или справа.

Эти обозначения, как и термин «граничное значение», мы будем применять *исключительно в тех случаях*, когда соответствующие пределы существуют при стремлении z к t *по любому пути* слева или справа от L, иначе говоря, когда функция $F(z)$ непрерывно продолжима на t слева или справа.

Пусть L' — некоторая часть L, концы которой (если таковые имеются) не совпадают с концами L. Мы будем говорить, что функция $F(z)$ непрерывно продолжима на L' слева (или справа), если существуют пределы $F^+(t)$ [или $F^-(t)$] для всех точек t, принадлежащих L'.

Как было уже упомянуто в § 29, если функция $F(z)$ непрерывно продолжима на L' слева (или справа), то функция $F^+(t)$ [или $F^-(t)$] непрерывна на L'. Отсюда следует, что если к левой (или правой) окрестности линии L' (подразумевается левая или правая окрестности относительно

[1]) Через $F(z)$ мы обозначаем здесь некоторую (не обязательно аналитическую) функцию точки $z = x + iy$. Вместо $F(z)$ мы можем писать, например, $F(x, y)$, как мы и делали в § 29.

[2]) Иными словами, z при стремлении к t может принимать любые значения, принадлежащие любой левой (правой) окрестности точки t.

линии L) присоединить саму линию L' и приписать функции $F(z)$ значения $F^+(t)$ [или $F^-(t)$] на L', то функция $F(z)$ будет непрерывной в левой (или правой) окрестности, к которой присоединена сама линия L'.

3. Пусть $f(t)$ — некоторая, вообще комплексная, функция точки t линии L:

$$f(t)=f_1(t)+if_2(t), \tag{1}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — некоторые действительные функции точки t на L.

В дальнейшем через t мы будем по-прежнему обозначать как саму точку, так и аффикс этой точки, т. е. считать $t=x+iy$, где x, y — координаты точки t.

Мы будем говорить, что $f(t)$ удовлетворяет на L *условию* Гёльдера или, короче, *условию* H, если для каждых двух точек t_1, t_2 линии L имеет место неравенство

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|^{\mu}, \tag{2}$$

где A и μ — некоторые положительные постоянные, причем $0<\mu\leqslant 1$; A называется *постоянной* Гёльдера, а μ — *показателем* Гёльдера.

Легко видеть, что условие (2) эквивалентно условию

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant B\sigma_{12}^{\mu}, \tag{3}$$

где B — некоторая положительная постоянная, а σ_{12} — длина дуги линии L, заключенной между t_1 и t_2; в случае, когда t_1 и t_2 принадлежат замкнутому контуру, входящему в состав L, под σ_{12} подразумевается кратчайшая из двух дуг, соединяющих t_1 и t_2; если L состоит из нескольких раздельных частей, то следует подразумевать, что условие (3) выполняется для любой пары точек, расположенных на одной и той же части [1]).

Если в неравенстве (2) или (3) $\mu>1$, то, как легко видеть, производная $f(t)$ по дуге s линии L равна нулю; поэтому в этом случае $f(t)=\text{const}$ на L или, если L состоит из раздельных частей, на каждой из этих частей. Этот случай интереса не представляет; поэтому-то мы ограничили μ условием $\mu\leqslant 1$.

Замечание. Если для *данной* точки t_0 контура L имеет место неравенство

$$|f(t)-f(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\mu},$$

[1]) Эквивалентность условий (2) и (3) вытекает из следующих легко доказываемых предложений: 1) Если условие (2) соблюдено для любой пары точек, расстояние между которыми не превышает некоторого фиксированного числа δ, то оно будет соблюдено и на всей линии L, возможно с другим, бо́льшим значением постоянной A. 2) Для любой пары точек t_1, t_2, расстояние между которыми не превосходит некоторого фиксированного числа δ,

$$k\leqslant\frac{|t_2-t_1|}{\sigma_{12}}\leqslant 1,$$

где k — некоторая положительная постоянная. Доказательство этих простых предложений можно найти, например, в книге автора [25].

выполняющееся для всех t на L, достаточно близких к t_0, то говорят, что $f(t)$ удовлетворяет условию H на L *в данной точке* t_0; это еще не значит, что $f(t)$ удовлетворяет условию H в *окрестности* точки t_0, т. е. что имеет место неравенство (2) для любых двух точек из некоторой окрестности точки t_0 на L.

4. В дальнейшем мы будем иногда применять следующие известные обозначения. Пусть ξ обозначает переменную величину, пробегающую некоторое множество значений и стремящуюся к 0 (или к ∞). Тогда $O(\xi)$ будет обозначать такую величину, что отношение $O(\xi)/\xi$ остается ограниченным при достаточно малых (достаточно больших) значениях $|\xi|$. Иными словами, при указанных значениях ξ

$$|O(\xi)| \leqslant C \cdot |\xi|,$$

где C — конечная постоянная. Далее, $o(\xi)$ будет обозначать такую величину, что отношение $o(\xi)/\xi$ сколь угодно мало (по модулю), когда $|\xi|$ достаточно мало (достаточно велико); точнее:

$$|o(\xi)| \leqslant c \cdot |\xi|,$$

где c — положительная величина, зависящая лишь от $|\xi|$ и стремящаяся к нулю при $\xi \to 0$ ($\xi \to \infty$).

Например, если $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0, то это условие можно записать так:

$$|f(t_2) - f(t_1)| = O(|t_2 - t_1|^{\mu})$$

для всех точек t_1, t_2, достаточно близких к t_0.

Отметим еще один частный случай указанных обозначений. Рассмотрим выражение $O(|\xi|^{\alpha})$, где α — некоторое действительное число. По определению, отношение $O(|\xi|^{\alpha})/|\xi|^{\alpha}$ остается ограниченным, когда $|\xi| \to 0$ ($|\xi| \to \infty$). В частности, при $\alpha = 0$ выражение $O(|\xi|^{\alpha})$ обращается в $O(1)$. Таким образом, $O(1)$ обозначает величину, остающуюся ограниченной при достаточно малых (достаточно больших) значениях $|\xi|$. Аналогично $o(1)$ обозначает величину, стремящуюся к нулю при $|\xi| \to 0$ ($|\xi| \to \infty$); точнее: $|o(1)| < \varepsilon$, где ε зависит лишь от модуля $|\xi|$ и $\lim \varepsilon = 0$ при $|\xi| \to 0$ ($|\xi| \to \infty$).

Например, то обстоятельство, что функция $f(t)$ непрерывна на L, можно записать так:

$$|f(t_2) - f(t_1)| = o(1)$$

при $|t_2 - t_1| \to 0$.

§ 66. Интегралы типа Коши. Пусть L обозначает то же, что и в предыдущем параграфе, и пусть $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — некоторая, вообще комплексная функция, заданная на L. Мы будем всегда считать (если противное не оговорено), что функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в обычном (римановом) смысле.

Интегралом типа Коши, взятым по линии L, называется интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{a}$$

где z — некоторая точка плоскости [1]).

Будем предполагать пока, что точка z не расположена на L. Тогда интеграл (а) имеет вполне определенный смысл и представляет собой функцию комплексного переменного z, определенную на всей плоскости, за исключением точек линии L. Обозначим эту функцию через $F(z)$, так что

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{1}$$

Легко видеть также, что функция $F(z)$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек линии L. Если линия L содержит замкнутые контуры, как на рис. 30, то под предыдущим утверждением следует понимать, что функция $F(z)$ голоморфна внутри каждой части, на которые разбивается плоскость линией L [2]).

Легко видеть далее, что при z, уходящем в бесконечность, $F(z)$ стремится к нулю, так что

$$F(\infty)=0. \tag{2}$$

§ 67. Значения интеграла типа Коши на линии интегрирования. Главное значение интеграла по Коши. До сих пор мы предполагали, что в формуле (1) § 66 точка z не расположена на линии интегрирования L. Пусть теперь точка z совпадает с некоторой точкой t_0, расположенной на L. Напишем пока чисто формально:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{1}$$

Если $f(t_0)\neq 0$, то подынтегральная функция обращается при $t=t_0$ в бесконечность, как $|t-t_0|^{-1}$. Поэтому интеграл в правой части не имеет смысла, если оставаться в рамках обычного определения. Однако интегралу (1) можно при некоторых предположениях относительно функции $f(t)$ приписать вполне определенный смысл. Именно, предположим, что точка t_0 не совпадает ни с одним из концов линии L (если таковые имеются), и выделим из L около точки t_0 достаточно малую дугу t_1t_2, содержащую t_0 и такую, что расстояния точек t_1 и t_2 до t_0 равны между собой, т. е.

$$|t_1-t_0|=|t_2-t_0|. \tag{2}$$

[1]) Множитель $1/2\pi i$ не имеет, разумеется, существенного значения; он введен для упрощения внешнего вида ряда формул, связанных с интегралами типа Коши.

[2]) Не следует думать, что при переходе z из одной части в другую значения $F(z)$ аналитически продолжают друг друга; это будет ясно из дальнейшего.

Обозначим дугу t_1t_2 через l, а оставшуюся часть линии L — через $L-l$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{3}$$

Этот интеграл имеет уже вполне определенный обычный смысл, так как, когда t пробегает путь интегрирования $L-l$, всегда $|t-t_0|\geqslant\delta$, где δ — некоторое положительное число.

Предположим теперь, что t_1 и t_2 стремятся к t_0, так, однако, что все время соблюдается условие (2). Если при этом интеграл (3) стремится к определенному пределу, то этот предел называется *главным значением интеграла* (1) *по Коши*.

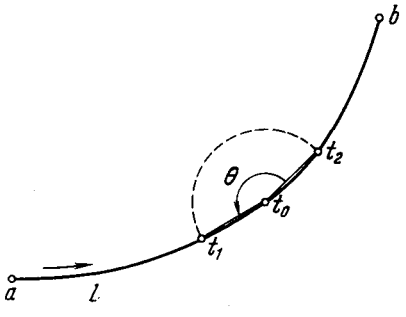


Рис. 31.

Ясно, что если интеграл (1) имеет обычный (риманов) смысл, то существует и его главное значение [1]), но обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо.

Главное значение интеграла, если оно существует, мы будем обозначать тем же символом, что и обычный интеграл [2]), т. е. символом (1), подразумевая, что если интеграл не имеет обычного смысла, то берется его главное значение (когда оно существует).

Мы не станем заниматься разысканием возможно общих условий существования главного значения, а укажем один весьма важный случай (вполне достаточный для наших целей), когда это существование наверное обеспечено. А именно, *главное значение интеграла* (1) *существует, если функция* $f(t)$ *удовлетворяет в окрестности точки* t_0 *условию* H: т. е. условию (см. § 65, п. 3):

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant A\,|t_2-t_1|^{\mu},\qquad 0<\mu\leqslant 1. \tag{4}$$

Мы докажем это утверждение путем фактического выражения главного значения интеграла через обычный интеграл.

Вернемся для этого к интегралу (3) и рассмотрим сперва случай (рис. 31), когда L состоит из одной простой разомкнутой дуги ab, т. е. рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{3'}$$

---

[1]) Интеграл (1) имеет обычный смысл, если интеграл (3) стремится к определенному пределу, когда t_1 и t_2 стремятся к t_0 по произвольному закону, а не обязательно так, чтобы все время соблюдалось условие (2).

[2]) Некоторые авторы, наоборот, отмечают главное значение особым знаком, например штрихом (′) или буквами VP (valeur principale).

Обозначения мы выбрали так, что положительное направление на ab ведет от a к b.

Этот интеграл мы можем представить следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{f(t_0)}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{dt}{t-t_0}. \tag{5}$$

Первый интеграл правой части стремится при $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$ к вполне определенному пределу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt,$$

ибо этот интеграл — сходящийся в обычном (т. е. римановом) смысле. Действительно, на основании условия (4) имеем:

$$\frac{|f(t)-f(t_0)|}{|t-t_0|}\leqslant\frac{A}{|t-t_0|^{1-\mu}},$$

и так как $1-\mu<1$, то это неравенство обеспечивает сходимость нашего интеграла в силу хорошо известного элементарного признака сходимости.

Обратимся ко второму интегралу правой части формулы (5). Он легко вычисляется в конечном виде :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}[\ln(t-t_0)]_a^{t_1}+\frac{1}{2\pi i}[\ln(t-t_0)]_{t_2}^{b},$$

где под $\ln(t-t_0)$ на частях at_1 и t_2b линии ab подразумеваются любые ветви этой функции, непрерывно изменяющиеся вместе с t на каждой из частей at_1, t_2b в отдельности. Эти ветви могут быть выбраны произвольно на каждой из упомянутых частей, но для определенности мы свяжем их следующим условием: значение $\ln(t-t_0)$ при $t=t_2$ получается из значения $\ln(t-t_0)$ при $t=t_1$ путем непрерывного изменения $\ln(t-t_0)$ при движении точки t из положения t_1 в положение t_2 по (бесконечно малой) полуокружности, расположенной слева от L (по отношению к наблюдателю, смотрящему вдоль положительного направления, выбранного на L; рис. 31, пунктир). Тогда выбор ветви $\ln(t-t_0)$ на at_1 вполне определяет выбор ветви на t_2b, и, подразумевая, что этот выбор сделан, мы можем написать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab-l}\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}, \tag{6}$$

где следует подразумевать

$$\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}=\ln(b-t_0)-\ln(a-t_0),$$

$$\ln\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}=\ln(t_1-t_0)-\ln(t_2-t_0)$$

при только что указанном выборе логарифмов. Так как, далее, по условию $|t_1 - t_0| : |t_2 - t_0| = 1$, то

$$\ln \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = i\theta, \tag{а}$$

где θ — угол, указанный на рис. 31. Ясно, далее, что при $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$ будем иметь: $\lim \theta = \pi$. Поэтому, переходя к пределу в выражении (6), получаем:

$$\lim \frac{1}{2\pi i} \int_{ab-l} \frac{dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - t_0}{a - t_0}.$$

Следовательно, интеграл (3′) стремится к определенному пределу [1]); этот предел и есть по определению главное значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0};$$

оно дается формулой, вытекающей из предыдущих:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} f(t_0) \ln \frac{b - t_0}{a - t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,dt, \tag{7}$$

где в правой части фигурирует интеграл в обычном (римановом) смысле.

Пусть теперь L — произвольная линия указанного в п. 1 § 65 вида. Тогда, выделив на L произвольную дугу ab, содержащую точку t_0 (так, чтобы a и b не совпадали с t_0), можем переписать интеграл (3) так:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab-l} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-ab} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}.$$

При $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$, если при этом соблюдается условие (2), первый интеграл правой части стремится, как было показано, к определенному пределу; второй же интеграл от t_1 и t_2 не зависит. Следовательно, интеграл (3) стремится к определенному пределу, который и есть по определению главное значение интеграла (1); на основании предыдущего это главное значение дается формулой:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} f(t_0) \ln \frac{b - t_0}{a - t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-ab} \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}. \tag{8}$$

Эта формула мало симметрична, и мы ею в дальнейшем пользоваться не будем; мы вывели ее лишь для того, чтобы показать, что главное

---

[1]) Подразумевается: при соблюдении условия (2). Если бы это условие не было соблюдено, то вместо (а) мы имели бы:

$$\ln \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i\theta, \tag{б}$$

где положено: $r_1 = |t_1 - t_0|$, $r_2 = |t_2 - t_0|$; поэтому, если отбросить условие (2), величина (б) не будет стремиться ни к какому пределу.

значение по Коши, при указанном выше условии насчет функции $f(t)$, существует и может быть выражено при помощи обычных интегралов.

Замечание 1. Формула (8) значительно упрощается, если L — простой замкнутый контур. Мы можем получить формулу для этого случая исходя из формулы (7), представив себе, что конец b дуги ab приближается к концу a, так что в пределе мы получим замкнутый контур L. Считая для определенности, что положительное направление на этом контуре выбрано так, что, идя в этом направлении, мы оставляем конечную часть плоскости, ограниченную контуром L, слева, будем, как легко видеть, иметь в пределе (при $b = a$):

$$\ln \frac{b-t_0}{a-t_0} = 0,$$

и формула (7) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0} = \frac{1}{2} f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt. \qquad (7')$$

Замечание 2. Считая, что $f(t)$ удовлетворяет условию H при рассматриваемых значениях t, отметим следующее обстоятельство.

При определении главного значения интеграла по Коши нет необходимости полагать, что условие (2), т. е. условие $|t_2 - t_0| = |t_1 - t_0|$, соблюдается точно. Достаточно считать, что при $t_2 \to t_0$, $t_1 \to t_0$

$$\lim \frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|} = 1,$$

т. е. что $r_1 = |t_1 - t_0|$ и $r_2 = |t_2 - t_0|$ — эквивалентные бесконечно малые величины. Действительно ясно, что и при этом условии мы будем также иметь [1]):

$$\lim \ln \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0} = i\pi$$

и что поэтому все наши предыдущие рассуждения и формулы останутся в силе. В частности, условие (2) можно заменить следующим:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \qquad (2')$$

где σ_1 и σ_2 обозначают длины дуг t_1t_0 и t_0t_2; иначе говоря, точка t_0 разделяет дугу t_1t_2 на две равные по длине части.

Замечание 3. Очевидно, что формулы и заключения этого параграфа останутся в силе и в случае, если функция $f(t)$ удовлетворяет при данном t_0 условию H лишь в точке t_0 (§ 65, п. 3, замечание), т. е. условию

$$|f(t)-f(t_0)| \leqslant A|t-t_0|^{\mu}$$

(при t, достаточно близком к t_0), не обязательно удовлетворяя условию H для любых двух точек в окрестности t_0. Однако в этом случае заключения и формулы будут, вообще говоря, справедливы лишь для данного значения t_0.

[1]) См. формулу (б) в предыдущем примечании.

§ 68. Граничные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля. От значения интеграла типа Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} \tag{1}$$

на самой линии интегрирования, рассмотренного в § 67, следует отличать его граничные значения, т. е. пределы $F(z)$ при стремлении z к точке t_0 линии L слева или справа от L. Относительно этих граничных значений имеет место следующее важное предложение.

Если функция $f(t)$, заданная на L, удовлетворяет условию H в окрестности [1]) *точки t_0 линии L, отличной от ее концов, то интеграл $F(z)$ непрерывно продолжим* [2]) *на L как слева, так и справа; иначе говоря, существуют граничные значения $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$.*

Эти граничные значения определяются формулами

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{2}$$

$$F^-(t_0)=-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{3}$$

где в правых частях фигурируют главные значения интеграла.

Формулы (2) и (3) можно заменить эквивалентными им формулами

$$F^+(t_0)-F^-(t_0)=f(t_0), \tag{4}$$

$$F^+(t_0)+F^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{5}$$

Формулы, эквивалентные предыдущим, были впервые даны Ю. В. Сохоцким [1], который, впрочем, при доказательстве ограничился случаем, когда L — прямолинейный отрезок, а z стремится к t_0 по нормали к L. Долгое время спустя формулы (2), (3) или, что все равно, (4), (5) были найдены Племелем (Plemelj [1]), который доказал их при тех же примерно предположениях, которые приняты нами здесь.

Поэтому мы будем называть формулы (2) — (5) формулами Сохоцкого — Племеля.

Далее имеет место следующее предложение.

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию H на некоторой части L' линии L, то граничные значения $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ также удовлетворяют условию H на L', за исключением, быть может, сколь угодно малых окрестностей концов части L' (если таковые имеются).

Это предложение было впервые дано Племелем (Plemelj [1]) и уточнено И. И. Приваловым.

---

[1]) Речь, разумеется, идет об окрестности, состоящей из точек линии L, так как функция $f(t)$ в других точках плоскости не задана.

[2]) См. § 65, п. 2.

Доказательство формул и предложений настоящего параграфа можно найти в книгах И. И. Привалова [1], А. И. Маркушевича [1] и в книге автора [25].

Замечание 1. Формула (4) есть следствие формул (2) и (3), которые получены в предположении, что $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0. Но ее можно распространить (в известном смысле) и на случай, когда $f(t)$ *лишь непрерывна* в окрестности точки t_0. Проведем через t_0 некоторую прямую Δ, не совпадающую с касательной к L в t_0, и возьмем на этой прямой две точки t' и t'' с той и другой стороны от L так, чтобы точка t_0 была серединой отрезка $t't''$. Тогда, если функция $f(t)$ непрерывна (на L) в окрестности точки t_0, то разность

$$F(t'')-F(t')$$

стремится к пределу $f(t_0)$ при $t' \to t_0$, $t'' \to t_0$ (при условии, что точки t' и t'' находятся все время на равных расстояниях от t_0).

Если поэтому под $F^+(t_0) - F^-(t_0)$ условно подразумевать только что указанный предел, то формула (4) может считаться справедливой и при указанном выше условии насчет $f(t)$.

Это обстоятельство также отмечено Племелем (Plemelj [1]); доказательство можно найти в книге автора [25]; можно также показать, что стремление $F(t'') - F(t')$ к пределу $f(t_0)$ происходит равномерно (по отношению к положению точки t_0 на некоторой достаточно малой части L), если нетупой угол между прямой Δ и касательной к L в точке t_0 не меньше некоторого фиксированного острого угла (доказательство см. там же).

Замечание 2. Из сказанного в предыдущем замечании непосредственно вытекает следующее предложение: если функция $f(t)$ непрерывна на L в окрестности точки t_0 и если существует граничное значение $F^+(t_0)$ [или $F^-(t_0)$], то существует и граничное значение $F^-(t_0)$ [или $F^+(t_0)$], и эти граничные значения связаны соотношением (4).

Замечание 3. В противоположность тому, что было сказано в замечании 3 к предыдущему параграфу, для существования граничных значений $F^+(t_0)$, $F^-(t_0)$ недостаточно предположить, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию H лишь в данной точке t_0 (см. § 65, п. 3, замечание), а не во всей (впрочем, сколь угодно малой) окрестности ее (на L). Однако и при таком предположении существуют пределы функции $F(z)$ при стремлении z к t_0 слева или справа, если считать, что это стремление происходит по путям не касательным к L, а не по произвольным путям.

Замечание 4. Пусть L — простая разомкнутая дуга, концы которой мы обозначим через a и b в предположении, что положительное направление на L ведет от a к b. Легко выяснить, как ведет себя функция $F(z)$ вблизи этих концов, если считать, что $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности рассматриваемого конца (включая этот конец).

Действительно, предположим сперва, что $f(a) = 0$. Тогда, продолжив линию L за конец a, например отрезком касательной, и положив на

добавленной части $f(t) = 0$, мы придем к случаю, когда точка a не является уже концом. Поэтому, применяя сказанное выше, легко заключаем, что $F(z)$ стремится к определенному пределу, когда z стремится по любому пути к концу a [1]). Если же $f(a) \neq 0$, то, переписав формулу (1) в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(a)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)-f(a)}{t-z}\,dt = \frac{f(a)}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)-f(a)}{t-z}\,dt,$$

легко заключаем на основании предыдущего, что вблизи точки a

$$F(z) = \frac{f(a)}{2\pi i}\ln\frac{1}{z-a} + F^*(z), \tag{6}$$

где $F^*(z)$ стремится к определенному пределу при $z \to a$. Аналогично для конца b

$$F(z) = -\frac{f(b)}{2\pi i}\ln\frac{1}{z-b} + F^{**}(z), \tag{7}$$

где $F^{**}(z)$ стремится к определенному пределу при $z \to b$.

Сказанное непосредственно переносится на случай, когда линия L имеет в своем составе произвольное число разомкнутых дуг $a_k b_k$.

§ 69. О производных интеграла типа Коши. 1. Пусть по-прежнему

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{1}$$

где $f(t)$ и L обозначают то же, что в начале § 66, а z — точка, не расположенная на L. Производные любого порядка функции $F(z)$ мы можем получить простым дифференцированием интеграла в правой части по параметру z, так что

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} \tag{2}$$

и вообще

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{k+1}}. \tag{3}$$

Возникает вопрос о поведении этих производных, когда z приближается к линии L с той или другой стороны. На этот вопрос очень легко ответить, если считать, что функция $f(t)$, заданная на L, удовлетворяет некоторым условиям.

Предположим, например, что функция $f(t)$ имеет на некоторой дуге ab, принадлежащей L, первую производную по t, удовлетворяющую на L условию H. Под производной $f(t)$ по t мы, конечно, подразумеваем предел

$$\lim\frac{f(t')-f(t)}{t'-t},$$

[1]) На основании формул Сохоцкого — Племеля (2) и (3) будем иметь $F^+(a) = F^-(a)$, ибо в нашем случае $f(t_0) = f(a) = 0$.

когда t' стремится к t по произвольному закону, но оставаясь все время на дуге ab; эту производную мы будем, как обычно, обозначать через $f'(t)$ или $df(t)/dt$.

Разобьем интеграл правой части формулы (2) на два, один из которых взят по дуге ab, а другой — по остальной части L. Второй интеграл, очевидно, представляет собой функцию от z, голоморфную в окрестности любой точки дуги ab, не совпадающей с ее концами. Первый же интеграл интегрированием по частям можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}f(t)\,d\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{f(t)}{t-z}\right]_{t=a}^{t=b}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{f'(t)\,dt}{t-z}\,.$$

Так как по предположению $f'(t)$ удовлетворяет на ab условию H, то на основании сказанного в § 68 ясно, что правая часть предыдущей формулы непрерывно продолжима на дугу ab как слева, так и справа, если не считать ее концов (т. е. точек a и b); следовательно, то же имеет место относительно функции $F'(z)$.

Переходя последовательно к производным высших порядков, легко докажем, что если функция $f(t)$ имеет производную n-го порядка по t, удовлетворяющую на некоторой дуге ab линии L условию H, то функция $F^{(n)}(z)$ непрерывно продолжима на дугу ab как слева, так и справа, если не считать ее концов.

Применяя сказанное в § 68, можем еще, очевидно, утверждать, что при указанном условии граничные значения $[F^{(n)}(t)]^+$ и $[F^{(n)}(t)]^-$ удовлетворяют на ab условию H, если исключить (произвольно малые) окрестности концов a и b.

2. Вернемся к первой производной $F'(z)$. Если не налагать на функцию $f(t)$ никакого другого ограничения, кроме условия H, то уже нельзя утверждать, что производная $F'(z)$ непрерывно продолжима на L; она может оказаться даже неограниченной вблизи границы.

Следующая простая оценка модуля этой производной бывает часто полезна.

Пусть t_0 — точка линии L, находящаяся на конечном расстоянии от ее концов (если таковые имеются), и пусть $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности этой точки. Тогда для точек z, достаточно близких к t_0,

$$|F'(z)|\leqslant\frac{\text{const}}{\delta^{\alpha}}\,, \tag{4}$$

где δ — кратчайшее расстояние точки z до линии L, а α — постоянная, меньшая 1 [1]).

Эта оценка непосредственно вытекает из одной оценки, приведенной в книге автора [25].

---

[1]) А именно, если μ — показатель Гёльдера для $f(t)$, то, считая $\mu<1$ (что всегда допустимо), можно взять $\alpha=1-\mu$.

Замечание. Если мы будем определять положение точки t на ab дугой s, отсчитываемой в положительном направлении от некоторой фиксированной точки на L (скажем, от точки a), то, очевидно:

$$\frac{df(t)}{ds} = f'(t)\frac{dt}{ds} = e^{i\alpha}f'(t), \tag{5}$$

где α — угол, составляемый положительной касательной к L в точке t с осью Ox. Отсюда

$$f'(t) = \frac{df(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = e^{-i\alpha}\frac{df(t)}{ds}. \tag{6}$$

Линию L мы условились считать гладкой, т. е. такой, что угол α непрерывно изменяется вместе с t (или вместе с s). Отсюда, конечно, еще не следует, что угол α удовлетворяет условию H. Поэтому, если $f'(t)$ удовлетворяет условию H, это еще не значит, что $df(t)/ds$ удовлетворяет названному условию.

Если же мы предположим дополнительно, что угол α удовлетворяет условию H, то тогда из того, что $f'(t)$ удовлетворяет условию H, вытекает, что и $df(t)/ds$ удовлетворяет условию H, и обратно.

Далее, из существования второй производной $f''(t)$ по t

$$f''(t) = \frac{df'(t)}{dt}$$

еще не вытекает существования $d^2f(t)/ds^2$, даже если считать, что α удовлетворяет условию H. Но если предположить, что существует производная $d\alpha/ds$ (эта производная, как известно, представляет собой кривизну линии L в точке t), то тогда существует и производная $d^2f(t)/ds^2$, которую можно вычислить по формуле, вытекающей из формулы (5):

$$\frac{d^2f(t)}{ds^2} = f''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + f'(t)\frac{d^2t}{ds^2} = e^{2i\alpha}f''(t) + ie^{i\alpha}\frac{d\alpha}{ds}f'(t); \tag{7}$$

эта производная будет удовлетворять условию H, если названному условию удовлетворяет $f''(t)$, а также $d\alpha/ds$.

Аналогично для производных высшего порядка.

§ 70. Некоторые элементарные формулы, облегчающие вычисление интегралов типа Коши. Приведем теперь ряд простых формул, значительно облегчающих вычисления во многих случаях.

Пусть L обозначает *простой замкнутый гладкий контур*. Обозначим через S^+ конечную часть плоскости, ограниченную L, а через S^- — бесконечную часть плоскости, состоящую из точек, расположенных вне L. Контур L мы не причисляем ни к S^+, ни к S^-. Область, состоящую из S^+ и из точек линии L, мы, как обычно, будем обозначать через $S^+ + L$, а область, состоящую из S^- и точек линии L,— через $S^- + L$. В качестве *положительного направления на* L мы выберем то, которое *оставляет область* S^+ *слева*.

Напомним теперь следующие, хорошо известные формулы.

I. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в S^+ и непрерывная в $S^+ + L$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = f(z) \text{ при } z \text{ в } S^+, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0 \quad \text{при } z \text{ в } S^-; \tag{2}$$

формула (1) представляет собой известную формулу Коши, а формула (2) — непосредственное следствие теоремы Коши, ибо в этом случае подынтегральная функция $f(t)/(t-z)$, рассматриваемая как функция от t, голоморфна в S^+ и непрерывна в $S^+ + L$.

II. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в S^-, включая бесконечно удаленную точку [1]), и непрерывная в $S^- + L$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -f(z)+f(\infty) \text{ при } z \text{ в } S^-, \tag{1'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = f(\infty) \qquad \text{при } z \text{ в } S^+; \tag{2'}$$

формулу (1′) мы будем называть *формулой Коши для бесконечной области* S^-. Знаки правых частей в формулах (1′) и (2′) изменятся на обратные, если положительное направление на L выбрать так, чтобы область S^- (а не область S^+) оставалась слева.

Напомним, как выводятся формулы (1′) и (2′) из формулы и теоремы Коши для конечной области. Будем временно считать, что $f(\infty) = 0$. Пусть Γ — окружность с центром в начале, настолько большого радиуса, что контур L и точка z находятся внутри Γ. Тогда, считая, что z находится в области, заключенной между L и Γ, имеем по формуле Коши:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+L} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z};$$

под $\Gamma + L$ подразумевается совокупность контуров Γ и L, причем положительным направлением на Γ считается направление вращения часовой стрелки; знак (—) в правой части обусловлен тем, что при движении по L и Γ в положительном направлении область, заключенная между L и Γ, остается справа (а не слева, как это обычно предполагается в формуле Коши).

---

[1]) Это значит, напоминаем, что при достаточно больших $|z|$ имеем разложение вида

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots;$$

коэффициент $c_0 = f(\infty)$.

Покажем теперь, что интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

равен нулю. Действительно, значение I не изменяется, если произвольно увеличивать радиус R окружности Г, так как функция $f(t)$ голоморфна вне L. С другой стороны, так как $f(\infty)=0$, то при достаточно больших $|t|$ имеет место оценка

$$|f(t)|<\frac{C}{|t|},$$

где C — положительная постоянная [1]). Поэтому, полагая

$$t=Re^{i\vartheta},\quad \text{откуда } dt=iRe^{i\vartheta}\,d\vartheta,\ |dt|=R\,|d\vartheta|,$$

будем иметь:

$$|I|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{|f(t)|\,R\,d\vartheta}{|t-z|}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{CR\,d\vartheta}{R|t-z|}\leqslant\frac{C}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\vartheta}{R-r}=\frac{C}{R-r},$$

где $r=|z|$. Следовательно, если $R\to\infty$, то $I\to 0$. Но так как I не изменяется с возрастанием R, то $I=0$. Таким образом, формула (1′) доказана пока в предположении $f(\infty)=0$.

Для того, чтобы доказать формулу (2′) при том же временном предположении, будем считать, что точка z находится в S^+. Тогда функция

$$\frac{f(t)}{t-z},$$

рассматриваемая как функция от t, голоморфна в области, заключенной между L и Г. Поэтому по теореме Коши

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+L}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Но последний интеграл, обозначенный нами выше через I, равен нулю; отсюда и следует требуемая формула (2′) при $f(\infty)=0$.

Если теперь $c_0=f(\infty)\neq 0$, то, применяя выведенные формулы к функции $f(z)-c_0$, исчезающей на бесконечности, и отмечая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{c_0\,dt}{t-z}=\begin{cases}0 & \text{при } z \text{ в } S^-,\\ c_0 & \text{при } z \text{ в } S^+,\end{cases}$$

получаем формулы (1′), (2′) для общего случая.

Имея в виду обобщить предыдущие формулы, условимся предварительно в следующем. Пусть a — некоторая конечная точка на плоскости z и пусть в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z)=G(z)+f_0(z), \tag{a}$$

[1]) См. предыдущее примечание.

где $f_0(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки a [1]) и

$$G(z)=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(z-a)^l}, \qquad (б)$$

причем $A_1, A_2, \ldots, A_l$ — некоторые постоянные.

Тогда мы будем говорить, что $f(z)$ имеет в точке a *полюс порядка l с главной частью $G(z)$*.

Аналогично, если в окрестности точки $z=\infty$, т. е. при достаточно больших $|z|$, имеет место формула (а), где на этот раз $f_0(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки $z=\infty$ *и исчезающая в этой точке*, а

$$G(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_lz^l \qquad (в)$$

($A_0, A_1, \ldots, A_l$ — постоянные), то мы будем говорить, что $f(z)$ имеет в точке $z=\infty$ *полюс порядка l с главной частью $G(z)$*.

Обратим внимание на то, что *в случае бесконечно удаленной точки мы причисляем постоянную A_0 к главной части* [2]).

Докажем теперь следующие простые формулы.

III. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в S^+ и непрерывна в $S^+ + L$, за исключением, быть может, точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ области S^+, где она может иметь полюсы с главными частями $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_n(z)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=f(z)-G_1(z)-G_2(z)-\ldots-G_n(z) \text{ при } z \text{ в } S^+ \qquad (3)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=-G_1(z)-G_2(z)-\ldots-G_n(z) \text{ при } z \text{ в } S^-. \qquad (4)$$

IV. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в S^- и непрерывна в $S^- + L$, за исключением, быть может, конечных точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этой области, а также точки $z=\infty$, где она может иметь полюсы с главными частями $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_n(z), G_\infty(z)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=-f(z)+G_1(z)+\ldots+G_n(z)+G_\infty(z) \text{ при } z \text{ в } S^- \qquad (3')$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=G_1(z)+\ldots+G_n(z)+G_\infty(z) \text{ при } z \text{ в } S^+. \qquad (4')$$

---

[1]) Такая функция, напоминаем, разлагается в окрестности точки a в ряд вида

$$f_0(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$$

[2]) Таким образом, даже в том случае, когда $f(z)$ голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. при достаточно больших $|z|$

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c^2}{z^2}+\ldots,$$

мы будем говорить, что $f(z)$ имеет в точке $z=\infty$ полюс нулевого порядка с главной частью, равной c_0.

Эти формулы очень просто доказать. Вследствие единообразия доказательств мы ограничимся доказательством формулы (3) и (3′); остальные две формулы читатель легко докажет сам.

Докажем сперва формулу (3). Применяя формулу Коши к функции

$$f_0(z) = f(z) - G_1(z) - \ldots - G_n(z),$$

голоморфной в S^+, получаем (считая, что z находится в S^+):

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_1(t)\,dt}{t-z} - \ldots - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_n(t)\,dt}{t-z}.$$

Но каждая из функций $G_k(z)$ ($k = 1, \ldots, n$) голоморфна в S^- и исчезает на бесконечности, ибо эти функции имеют вид (б). Следовательно, в силу формулы (2′)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_k(t)\,dt}{t-z} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

а отсюда и следует формула (3).

Перейдем к доказательству формулы (3′). Пусть Г — окружность с центром в начале, настолько большого радиуса, что контур L и точки z, a_1, a_2, . . . , a_n находятся внутри Г. Применяя формулу Коши к функции

$$f_0(z) = f(z) - G_1(z) - \ldots - G_n(z) - G_\infty(z),$$

голоморфной в области, заключенной между L и Г (при прежнем условии относительно положительного направления на Г), получаем:

$$f_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\Gamma} \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(t)\,dt}{t-z}$$

(мы считаем, разумеется, что точка z находится в S^-).

Но последний интеграл равен нулю в силу формулы (2′), так как функция $f_0(z)$ голоморфна вне Г и исчезает на бесконечности.

Следовательно,

$$f_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_0(t)\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_1(t)\,dt}{t-z} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_n(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_\infty(t)\,dt}{t-z}.$$

Но интегралы правой части, содержащие $G_1(t)$, . . . , $G_n(t)$, $G_\infty(t)$, равны нулю, так как эти функции голоморфны в S^+, а точка z, фигурирующая в предыдущих интегралах, находится в S^-. Следовательно,

$$f_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

а отсюда сразу следует формула (3′).

§ 71. Об интегралах типа Коши по бесконечной прямой. До сих пор мы рассматривали лишь интегралы, взятые по конечным линиям. Не представляет никакого труда распространить определение интегралов типа Коши на случай, когда линия интегрирования простирается в бесконечность; следует добавить лишь рассмотрение вопроса о сходимости таких интегралов, связанного с тем, что интегрирование производится в бесконечных пределах.

В дальнейшем нам придется иметь дело лишь с тем случаем бесконечной линии интегрирования, когда она представляет собой прямую. Не нарушая общности, можно считать, что линия интегрирования — действительная ось. Этот случай мы и рассмотрим подробнее.

Итак, пусть теперь L обозначает действительную ось. Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z}; \tag{1}$$

в данном случае t — действительная переменная, пробегающая все действительные значения, а $f(t)$ — функция (вообще комплексная) действительной переменной t:

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — действительные функции. Мы будем всегда считать (если противное не оговорено), что функция $f(t)$ абсолютно интегрируема в обычном смысле на всяком конечном отрезке прямой L.

Будем считать пока, что точка z не расположена на L. Интеграл (1) будет наверное сходящимся, если при достаточно больших $|t|$ имеет место неравенство

$$|f(t)| < \frac{B}{|t|^{\mu}}, \tag{2}$$

где B и μ — положительные постоянные [1]). Действительно, в этом случае при больших $|t|$ подынтегральная функция будет порядка $|t|^{-1-\mu}$ и наше утверждение делается очевидным на основании известного критерия сходимости интегралов с бесконечными пределами.

Но в дальнейшем нам придется иметь дело с более общим случаем, когда $f(t)$ при $|t| \to \infty$ стремится к конечному пределу c, одному и тому же при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$. Этот предел c мы можем обозначить через $f(\infty)$.

Будем считать, что при достаточно больших $|t|$ имеем:

$$f(t) = c + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right) = f(\infty) + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right), \qquad \mu > 0. \tag{3}$$

[1]) Условие это достаточно, но, разумеется, не необходимо.

В этом случае при $c \neq 0$ интеграл (1) будет расходящимся, т. е. выражение

$$\int_{N'}^{N''} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

не будет стремиться к определенному пределу, когда N' и N'' стремятся соответственно к $-\infty$ и $+\infty$, независимо друг от друга. Действительно, имеем:

$$\int_{N'}^{N''} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \int_{N'}^{N''} \frac{f(t)-c}{t-z}\,dt + c\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z}. \qquad (a)$$

Элементарное рассмотрение показывает, что

$$\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z} = \pm\,\alpha i + \ln\frac{r''}{r'},$$

где α обозначает угол $(0 < \alpha < \pi)$, заключенный между прямыми, соединяющими точку z с точками N', N'' (рис. 32), а r', r'' — расстояния точки z соответственно до N' и N''. При этом знак $(+)$ берется в случае, когда z находится в верхней полуплоскости, а знак $(-)$, когда z — в нижней полуплоскости.

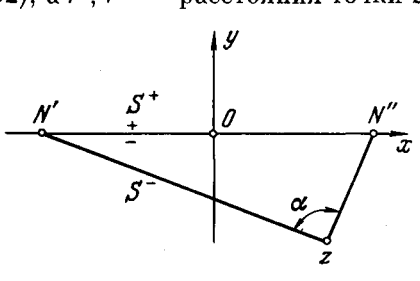


Рис. 32.

Если N' и N'' стремятся (независимо друг от друга) соответственно к $-\infty$, $+\infty$, то α стремится к π, но $\ln\frac{r''}{r'}$ не стремится ни к какому пределу. Значит, предыдущий интеграл не будет стремиться ни к какому пределу, и то же можно сказать относительно левой части (а), ибо первый интеграл правой части — сходящийся на основании условия (3). Однако если увеличивать N' и N'' не независимо друг от друга, а считать, что все время $N' = -N''$, то $\ln\frac{r''}{r'}$ стремится к нулю, и на основании предыдущего будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)-c}{t-z}\,dt \pm \pi i c. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в левой части, называется, по Коши, главным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad \text{или} \quad \int_{L} \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

взятого между бесконечными пределами. *В дальнейшем, применяя интегралы с бесконечными пределами, мы будем подразумевать главные их значения*, если эти интегралы не существуют в обычном смысле.

Как мы видели, при соблюдении условия (3) главное значение существует [1]), причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-z}\,dt\pm\frac{1}{2}f(\infty), \tag{5}$$

где в левой части фигурирует главное значение, а в правой — интеграл в обычном смысле; знак (+) берется для z в верхней, а знак (—) для z в нижней полуплоскости.

Таким образом, термин «главное значение» мы применяем в двух различных, но аналогичных смыслах: когда подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторой точке (как в предыдущих параграфах) и когда пределы интегрирования бесконечны.

Предположим теперь, что точка $z=t_0$ расположена на самой линии интегрирования, т. е. на действительной оси L. Тогда под интегралом

$$\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}$$

мы будем понимать его главное значение в обоих указанных смыслах, т. е. будем определять главное значение так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}+\int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}\right\}, \tag{6}$$

если указанный предел существует (ε и N стремятся к своим пределам независимо).

В частности, как легко видеть,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-t_0}=0. \tag{б}$$

Ясно, что главное значение (6) наверное существует, если соблюдено условие (3) и если $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0.

Легко видеть на основании (б), что при соблюдении указанных условий главное значение (6) можно представить любой из следующих формул:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-t_0}\,dt \tag{6'}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt, \tag{6''}$$

[1]) При этом при определении главного значения нет надобности считать, что в точности $N'=-N''$; достаточно считать, что

$$\lim\frac{N'}{-N''}=1.$$

где в правых частях можно подразумевать главные значения лишь в одном из указанных выше смыслов, а именно: интеграл в правой части можно рассматривать в первом случае как предел:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-t_0}\,dt+\int_{t_0+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-t_0}\,dt\right\},$$

так как оба интеграла в фигурных скобках — сходящиеся; во втором же случае — как предел обычного интеграла:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\,dt,$$

так как подынтегральная функция интегрируема в окрестности t_0 в обычном смысле.

Пусть $f(t)$ удовлетворяет условию (3) и, разумеется, условию абсолютной интегрируемости, наложенному с самого начала. Тогда функция $F(z)$, определяемая формулой

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{7}$$

будет, очевидно, голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости (но, вообще говоря, не на L). Будем обозначать эти полуплоскости соответственно через S^+ и S^-; граница L не причисляется ни к S^+, ни к S^-. Формулы Сохоцкого — Племеля и теоремы о граничных значениях, высказанные в § 68, без всякого труда переносятся на рассматриваемый здесь случай.

Именно, если t_0 — точка на L (расположенная на конечном расстоянии) и $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности этой точки, то

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{8}$$

$$F^-(t_0)=-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}; \tag{9}$$

здесь, напоминаем, $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ обозначают пределы $F(z)$ при стремлении z к t_0 по любым путям соответственно слева и справа от L, т. е. в нашем случае из S^+ или из S^-. Если, далее, $f(t)$ удовлетворяет условию H на некотором отрезке прямой L, то $F^+(t_0)$ и $F^-(t_0)$ удовлетворяют условию H на этом отрезке, за исключением, быть может, окрестностей концов отрезка.

Далее, сказанное в замечаниях в конце § 68 остается справедливым и для нашего случая.

Для того, чтобы убедиться в справедливости формул (8), (9) и сказанного после них, достаточно, например, представить интеграл (7)

в виде (5) и разбить интеграл в правой части на два, один из которых распространен по конечному отрезку, содержащему точку t_0, а другой — по остальной части прямой.

До сих пор, говоря о поведении функции $F(z)$ вблизи точек границы L и о граничных значениях, мы имели в виду точки границы, расположенные на конечном расстоянии. Для того, чтобы изучить поведение функции $F(z)$ и ее граничных значений вблизи бесконечно удаленной точки [1]), можно, например, поступить следующим образом.

Произведем замену переменной:

$$z = -\frac{1}{\zeta}. \tag{10}$$

При этой замене бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = 0$ плоскости ζ и, наоборот, действительная ось плоскости z переходит в действительную ось плоскости ζ, верхняя полуплоскость переходит в верхнюю, нижняя — в нижнюю. Когда точка $z = t$ пробегает действительную ось в положительном направлении от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, соответствующая ей точка

$$\sigma = -\frac{1}{t} \tag{10'}$$

плоскости ζ пробегает также действительную ось, тоже в положительном направлении в такой последовательности: от $\sigma = 0$ до $\sigma = +\infty$, далее, от $\sigma = -\infty$ до $\sigma = 0$ (точки $\sigma = -\infty$ и $\sigma = +\infty$ представляют собою одну и ту же точку $\zeta = \infty$ плоскости ζ).

Производя в формуле (7) замену переменной (10), а также замену переменной интегрирования (10') и вводя обозначения

$$F(z) = F\left(-\frac{1}{\zeta}\right) = F^*(\zeta), \quad f(t) = f\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = f^*(\sigma), \tag{11}$$

получаем:

$$F(z) = F^*(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}. \tag{12}$$

Считая временно (для некоторого упрощения рассуждений), что $f(t)$ удовлетворяет условию H в точке $t = 0$, можем, как легко видеть, переписать предыдущую формулу так:

$$F(z) = F^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}; \tag{13}$$

все предыдущие интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши [2]). Второй интеграл правой части предыдущей формулы есть величина постоянная, и поэтому изучение функции $F(z)$ вблизи точки $z = \infty$

[1]) Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ в нашем случае принадлежит границе L.

[2]) Эти главные значения существуют, если, как мы предполагаем, функция $f(t)$ удовлетворяет условию H при $t = 0$, а при больших $|t|$ — условию (3).

сводится к изучению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{13'}$$

вблизи точки $\zeta = 0$, т. е. к знакомому нам вопросу [1]).

Для того, чтобы непосредственно воспользоваться уже известными результатами, наложим на функцию $f(t)$ такое условие, чтобы функция $f^*(\sigma)$ удовлетворяла условию H в окрестности точки $\sigma = 0$, т. е. условию

$$|f^*(\sigma_2)-f^*(\sigma_1)|\leqslant B\,|\sigma_2-\sigma_1|^{\mu},\quad 0<\mu\leqslant 1.$$

Это приводит к условию относительно $f(t)$:

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant A\left|\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right|^{\mu},\quad 0<\mu\leqslant 1 \tag{14}$$

при достаточно больших $|t_1|$, $|t_2|$. Условие (14) мы будем называть *условием H для окрестности бесконечно удаленной точки*. Заметим, что условие (3) есть, очевидно, следствие условия (14) для окрестности бесконечно удаленной точки, но не обратно. Условие (3) можно назвать условием H для точки $z = \infty$ (а не для ее окрестности).

Считая, что $f(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки $z = \infty$, т. е. условию (14), покажем, что существуют граничные значения функции $F(z)$, когда z уходит в бесконечность по любому пути, оставаясь все время в верхней или нижней полуплоскости. Эти граничные значения мы будем обозначать соответственно через $F^+(\infty)$ и $F^-(\infty)$. Для того, чтобы показать их существование и вычислить их, обратимся к формуле (13).

Если $z \to \infty$, оставаясь в верхней или нижней полуплоскости, то $\zeta \to 0$, оставаясь также в верхней или нижней полуплоскости. Поэтому, применяя к первому интегралу правой части (13) формулу (8), получаем:

$$F^+(\infty)=F^{*+}(0)=\frac{1}{2}f^*(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma},$$

[1]) Мы могли бы вообще свести изучение интеграла (1) к изучению интеграла такого же вида, взятого по конечной замкнутой линии, например окружности. Для этого достаточно, например, произвести замену

$$z+i=-\frac{1}{\zeta+i}. \tag{A}$$

При этой замене действительная ось L плоскости z переходит в окружность l плоскости ζ, касательную к действительной оси в начале координат и проходящую через точку $\zeta = -i$. Тогда интеграл (1) представится в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma+i},$$

где

$$f^*(\sigma)=f\left(\frac{-i\sigma}{\sigma+i}\right).$$

Заметим, что соотношение (A) дает конформное отображение полуплоскости S^+ на круг, ограниченный окружностью l.

откуда непосредственно вытекает первая из следующих формул:

$$F^+(\infty)=\frac{1}{2}f(\infty),\quad F^-(\infty)=-\frac{1}{2}f(\infty); \tag{15}$$

вторая из этих формул доказывается совершенно аналогично.

Очевидно, что принятое временно предположение относительно поведения функции $f(t)$ вблизи точки $t=0$ можно отбросить.

Отметим еще следующие свойства интеграла $F(z)$, определяемого формулой (7). Предположим, что вблизи бесконечно удаленной точки не только функция $f(t)$, но и произведение $tf(t)$ удовлетворяет условию H [1]). Тогда произведение $zF(z)$ стремится к определенным пределам, когда $z\to\infty$ по любым путям, оставаясь все время в верхней или нижней полуплоскости. В самом деле, полагая

$$tf(t)=f_1(t), \tag{16}$$

имеем:

$$zF(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{zf_1(t)\,dt}{t(t-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)\,dt}{t},$$

откуда на основании формул (15) находим:

$$\lim_{z\to\infty}[zF(z)]=\pm\frac{1}{2}f_1(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)\,dt}{t}=\pm\frac{1}{2}f_1(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt, \tag{17}$$

где верхний и нижний знаки берутся соответственно для верхней и нижней полуплоскости.

Эта формула может быть записана и так: в каждой из полуплоскостей

$$F(z)=\frac{A}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right), \tag{18}$$

где A — постоянная (могущая иметь различные значения в различных полуплоскостях), а $o\left(\frac{1}{z}\right)$ обозначает, как всегда, величину, такую, что $z\cdot o\left(\frac{1}{z}\right)$ стремится к нулю, когда $|z|$ беспредельно возрастает.

Аналогично можно показать, что если наряду с $tf(t)$ и произведение

$$t^2f'(t)=f_2(t) \tag{19}$$

удовлетворяет условию H в окрестности бесконечно удаленной точки, то в каждой из полуплоскостей имеем для производной $F'(z)$:

$$F'(z)=-\frac{A}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{20}$$

где A — постоянная, та же, что и в формуле (18). При доказательстве мы можем, как легко видеть, ограничиться случаем, когда существует

[1]) Легко видеть, что если $tf(t)$ удовлетворяет условию H вблизи бесконечно удаленной точки, то и $f(t)$ удовлетворяет тому же условию; кроме того, очевидно, $f(\infty)=0$, так что на основании формул (15) $F^+(\infty)=F^-(\infty)=0$.

непрерывная производная $f'(t)$ для всех значений t, а не только в окрестности бесконечно удаленной точки [1]).

Путем интегрирования по частям получаем:

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(t)\,dt}{t-z},$$

откуда, замечая, что

$$\frac{1}{t-z}=\frac{t^2}{z^2(t-z)}-\frac{1}{z}-\frac{t}{z^2},$$

легко выводим:

$$z^2F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}tf'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу $z\to\infty$, получаем на основании формул (15):

$$\lim_{z\to\infty}[z^2F'(z)]=\pm\frac{1}{2}f_2(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}tf'(t)\,dt,$$

и легко проверить, что правая часть совпадает с правой частью формулы (17), взятой с обратным знаком [2]).

Точно так же легко показать, что если, кроме произведений (16) и (19), и произведение

$$t^3f''(t)=f_3(t) \tag{21}$$

удовлетворяет условию H в окрестности бесконечно удаленной точки, то

$$F''(z)=\frac{2A}{z^3}+o\left(\frac{1}{z^3}\right), \tag{22}$$

где A обозначает ту же постоянную, что и выше.

Полученные результаты мы можем кратко формулировать так: при указанных условиях обе части равенства (18) можно дифференцировать, причем допускается дифференцирование под знаком o.

Обобщение на производные любого порядка очевидно; но нам не придется иметь дела с производными выше второго порядка.

§ 72. Продолжение. Для облегчения вычисления интегралов типа Коши, взятых по бесконечной прямой L, можно привести ряд формул, вполне аналогичных формулам § 70. Мы ограничимся выводом простейших из этих формул, которые читатель легко сможет обобщить сам.

---

[1]) В самом деле, в противном случае мы можем заменить функцию $f(t)$ другой функцией $f_0(t)$, обладающей указанным свойством и отличающейся от $f(t)$ лишь на некотором конечном отрезке $a\leqslant t\leqslant b$. Оценки же для разности соответствующих интегралов производятся совершенно элементарно.

[2]) Легко проверить, что $f_2(\infty)=-f_1(\infty)$ проще всего убедиться в этом при помощи подстановки

$$t=-\frac{1}{\sigma}.$$

I. Пусть $f(z)$ обозначает функцию, голоморфную в S^+ и непрерывную в $S^+ + L$, включая бесконечно удаленную точку, и пусть $f(\infty) = a$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = f(z) - \frac{1}{2}a \quad \text{при } z \text{ в } S^+, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2}a \quad \text{при } z \text{ в } S^-. \tag{2}$$

II. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в S^- и непрерывная в $S^- + L$, включая бесконечно удаленную точку, и пусть $f(\infty) = a$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2}a \quad \text{при } z \text{ в } S^+, \tag{1'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -f(z) + \frac{1}{2}a \quad \text{при } z \text{ в } S^-. \tag{2'}$$

То обстоятельство, что функция $f(z)$ предполагается непрерывной в $S^+ + L$ (или в $S^- + L$) и при $z = \infty$, можно выразить так [1]):

$$f(z) = f(\infty) + o(1) = a + o(1) \text{ при } z \to \infty \text{ в } S^+ + L \text{ (или в } S^- + L). \tag{3}$$

Формулы (1) и (2′) можно назвать *формулами Коши* соответственно для областей S^+ и S^-.

Докажем, например, формулу (1). Опишем из O, как из центра, окружность настолько большого радиуса R, чтобы точка z попала внутрь этой окружности. Рассмотрим замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка AB действительной оси, заключенного в окружности, и из той полуокружности, которая находится в S^+; положительное направление на Γ выберем так, чтобы часть AB проходилась в направлении Ox. Так как по предположению точка z заключена внутри Γ, то на основании формулы Коши имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

где γ — полуокружность, входящая в контур интегрирования.

Второй интеграл правой части, как показывают самые элементарные рассуждения, стремится при $R \to \infty$ в силу формулы (3) к величине

$$a \cdot \frac{\pi i}{2\pi i} = \frac{1}{2}a;$$

следовательно, и первое слагаемое стремится при $R \to \infty$ к определенному пределу, а именно к пределу $f(z) - \frac{1}{2}a$. Но предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{+R} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

[1]) В формуле (3) через $o(1)$ обозначена величина, равномерно стремящаяся к нулю при $|z| \to \infty$ (см. § 65, п. 4).

и есть по определению главное значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Таким образом, формула (1) доказана. Заметим, что одновременно доказано существование главного значения предыдущего интеграла, что не очевидно заранее, так как в нашем случае функция $f(t)$ подчинена условию $f(t) = a + o(1)$, а не условию $f(t) = a + O(|t|^{-\mu})$, при котором было доказано раньше существование главного значения.

Совершенно аналогично доказываются и другие приведенные выше формулы.

II. О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 73. Некоторые общие предложения. Пусть L — простой замкнутый контур, S^+, S^- — конечная и бесконечная части плоскости, разграниченные контуром L; пусть положительным направлением на L считается то, которое оставляет S^+ слева. Контур L не причисляется ни к S^+, ни к S^-.

Пусть, далее,

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

— непрерывная функция, заданная на L.

Поставим себе вопрос: является ли $f(t)$ граничным значением некоторой функции $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, голоморфной в S^+; здесь, разумеется, речь идет о граничных значениях при стремлении z к t из S^+.

Легко видеть, что если непрерывная функция $f(t)$ задана на L произвольно, то этого, вообще говоря, не будет. В самом деле, известно, что достаточно задать на L граничное значение $f_1(t)$ гармонической в S^+ функции $U(x, y)$ для того, чтобы эта функция была вполне определена [1]; но тогда будет вполне определена и сопряженная с ней функция $V(x, y)$, если не считать произвольного постоянного слагаемого, а следовательно, и граничное значение $f_2(t)$ этой функции, если оно вообще существует [2]. Ясно, что можно поменять ролями $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Следовательно, если потребовать, чтобы функция $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ была граничным значением некоторой функции, голоморфной в S^+, то из двух действительных функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ можно задать произвольно лишь одну.

Поэтому представляет большой интерес найти необходимое и достаточное условие того, чтобы непрерывная функция $f(t)$, заданная на L, представляла собой граничное значение некоторой функции $F(z)$,

---

[1]) Задача определения гармонической функции по ее граничным значениям представляет собой хорошо известную задачу Дирихле.

[2]) Из того, что существует граничное значение функции $U(x, y)$, еще не следует, что существует граничное значение сопряженной с ней функции $V(x, y)$.

голоморфной в S^+; аналогичный вопрос возникает в отношении области S^-. На этот вопрос дают ответ следующие предложения:

I. *Для того чтобы заданная на L непрерывная функция $f(t)$ была граничным значением некоторой функции, голоморфной в S^+, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=0 \quad \text{для всех } z \text{ в } S^-. \tag{1}$$

II. *Для того чтобы заданная на L непрерывная функция $f(t)$ была граничным значением некоторой функции, голоморфной в S^-* (включая бесконечно удаленную точку), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=a \quad \text{для всех } z \text{ в } S^+, \tag{2}$$

где a — некоторая постоянная; эта постоянная равна значению на бесконечности упомянутой голоморфной функции.

На основании сказанного в предыдущих параграфах эти предложения почти очевидны. Действительно, если $f(t)$ — граничное значение некоторой функции, голоморфной в S^+, то условие (1) имеет место, как это следует из формулы (2) § 70; следовательно, условие (1) необходимо. Оно также достаточно. Действительно, будем считать, что оно соблюдено, и положим:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{3}$$

Если принять во внимание, что $F(z)=0$ при z в S^-, а следовательно, $F^-(t_0)=0$ на L, то на основании формулы (4) § 68 и замечания 2 к § 68 получим:

$$F^+(t_0)=f(t_0),$$

т. е. при соблюдении условия (1) функция $f(t)$ представляет собой граничное значение $F^+(t)$ функции $F(z)$, определяемой формулой (3).

Совершенно аналогично доказывается и второе предложение. Если $f(t)$ — граничное значение функции, голоморфной в S^-, то условие (2) необходимо в силу формулы (2′) § 70; оно также достаточно, так как при его выполнении функция

$$F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+a \tag{4}$$

голоморфна в S^- и принимает граничное значение $F^-(t_0)=f(t_0)$; это последнее следует из (2), из формулы (4) § 68 и замечания 2 к § 68.

До сих пор мы предполагали, что функция $f(t)$ лишь непрерывна. Если предположить, что, кроме этого, функция удовлетворяет на L условию H (§ 65), то условиям (1) и (2) можно придать иной вид, во многих отношениях весьма удобный. А именно, подразумевая под t_0 любую точку на L и переходя в формулах (1) и (2) к пределу $z\to t_0$ соответствен-

но из S^- и из S^+, на основании формул Сохоцкого — Племеля (§ 68) получаем соответственно:

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=0 \qquad (1')$$

и

$$\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=a \qquad (2')$$

(для всех t_0 на L). Эти условия эквивалентны соответственно условиям (1) и (2). В самом деле, условие (1′) выражает, что граничное значение функции

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

голоморфной в S^-, равно нулю на всей границе L области S^-; следовательно, всюду в S^- имеет место $F(z)=0$ [1]), а это и есть условие (1). Аналогично для условий (2′) и (2). Условия (1′), (2′) были указаны Племелем (Plemelj [1]).

До сих пор мы предполагали, что L — простой замкнутый контур. Рассмотрим теперь случай, когда L — бесконечная прямая, которую мы примем за действительную ось. Будем, как в § 71, обозначать соответственно через S^+ и S^- верхнюю и нижнюю полуплоскости. Аналогично предыдущему, легко доказать следующие предложения.

Пусть $f(t)$ обозначает функцию, непрерывную на L и такую, что при больших $|t|$

$$f(t)=a+O(|t|^{-\mu})=f(\infty)+O(|t|^{-\mu}), \qquad (5)$$

где a и μ — постоянные, $\mu>0$.

Тогда будем иметь следующие предложения:

III. *Для того чтобы функция $f(t)$ была граничным значением функции, голоморфной в S^+ и непрерывной в $S^+ + L$* (включая точку $z=\infty$), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=-\frac{1}{2}a \quad \text{для всех } z \text{ в } S^-. \qquad (6)$$

IV. *Для того чтобы функция $f(t)$ была граничным значением функции, голоморфной в S^- и непрерывной в $S^- + L$* (включая точку $z=\infty$), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2}a \quad \text{для всех } z \text{ в } S^+. \qquad (7)$$

Если, кроме того, функция $f(t)$ удовлетворяет на L условию H, включая бесконечно удаленную точку [см. § 71, формула (14)], то

[1]) Это следует из формулы Коши, примененной к области S^-, или из сказанного в § 29, п. 4.

условия (6) и (7) можно соответственно заменить следующими:

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=-\frac{1}{2}a, \tag{6'}$$

$$\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}a \tag{7'}$$

для всех t_0 на L.

Доказательство этих предложений мы предоставляем читателю.

§ 74. Обобщение. Формулы и предложения предыдущего параграфа, относящиеся к случаю областей, ограниченных одним простым замкнутым контуром, непосредственно переносятся на случай, когда граница состоит из нескольких таких контуров.

Легко видеть, что изложенные в предыдущем параграфе результаты, именно условия (1), (2), (1'), (2'), останутся в силе, если под S^+ подразумевать конечную область, ограниченную простыми замкнутыми непересекающимися контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний охватывает все остальные, под L — совокупность этих контуров и, наконец, под S^- — часть плоскости, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости. Часть S^- состоит, таким образом, из конечных областей $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_m^-$, ограниченных соответственно контурами $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_m$, и из бесконечной области S_{m+1}^-, состоящей из точек, расположенных вне контура L_{m+1}. Под функцией $F(z)$, голоморфной в S^-, следует теперь подразумевать совокупность функций, голоморфных соответственно в областях $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_{m+1}^-$.

§ 75. Теорема Гарнака (Harnack). Из результатов предыдущих параграфов почти непосредственно вытекает одна теорема, принадлежащая Гарнаку (Harnack [1]), которая часто бывает полезна.

Пусть L — простой замкнутый контур и пусть S^+, S^- — конечная и бесконечная части плоскости, на которые разбивается плоскость контуром L (контур этот не причисляется ни к S^+, ни к S^-). *Пусть $f(t)$ — действительная функция точки контура L, непрерывная на L. Тогда если*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=0 \quad \text{для всех } z \text{ в } S^+, \tag{1}$$

то $f(t)=0$ всюду на L. Если же

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=0 \quad \text{для всех } z \text{ в } S^-, \tag{2}$$

то $f(t)=\text{const}$ на L.

В самом деле, из формулы (1) на основании сказанного в § 73 вытекает, что $f(t)$ — граничное значение некоторой функции $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, голоморфной в S^-, т. е. $f(t)=U^-+iV^-$. Но так как $f(t)$ — действительная функция, то граничное значение V^- гармонической в S^-

функции $V(x, y)$ равно нулю всюду на L. Следовательно, $V(x, y) = 0$ всюду в S^-. Поэтому должно быть $U = C = \text{const}$ в S^- и, значит, $f(t) = U^- = C$ на L.

Подставляя это значение в формулу (1) и замечая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{C\,dt}{t-z} = C,$$

убеждаемся, что $C = 0$.

Точно так же убеждаемся, что из формулы (2) следует $f(t) = C = \text{const}$, однако здесь уже нельзя вывести заключения, что $C = 0$, так как, подставляя в формулу (2) $f(t) = C$, получаем тождество $0 = 0$.

Таким образом, теорема доказана. Читателю предоставляется обобщить ее на случай областей, рассмотренных в предыдущем параграфе [1]).

Легко также сформулировать теорему, аналогичную предыдущей для случая, когда L — бесконечная прямая.

Замечание 1. Из теоремы Гарнака непосредственно вытекают следующие заключения (имеем в виду случай, когда L — простой замкнутый контур).

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — две *действительные* непрерывные функции, заданные на L. Тогда если

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(t)\,dt}{t-z} \quad \text{для всех } z \text{ в } S^+, \tag{3}$$

то $f_1(t) = f_2(t)$ на L; если же

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(t)\,dt}{t-z} \quad \text{для всех } z \text{ в } S^-, \tag{4}$$

то $f_2(t) = f_1(t) + \text{const}$ на L.

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно применить теорему Гарнака к разности $f_2(t) - f_1(t)$.

Замечание 2. Нетрудно показать, что предыдущая теорема останется в силе, если не считать функцию $f(t)$ непрерывной, а допустить наличие конечного числа разрывов первого рода, но мы на этом не останавливаемся. Заметим лишь, что теорема, надлежащим образом сформулированная, имеет место и при гораздо более общих условиях.

§ 76. Некоторые специальные формулы для круга и полуплоскости. В случае, когда линия L — окружность или прямая, формулам предыдущего параграфа можно придать специальный вид, удобный для дальнейших применений.

1. Условимся сперва о некоторых обозначениях. Пусть

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{1}$$

[1]) В этом случае из формулы (1) вытекает, что $f(t) = C_k$ на L_k $(k = 1, \ldots, m)$, $f(t) = 0$ на L_{m+1}, а из формулы (2) вытекает, что $f(t) = C$ на L. Здесь $C, C_1, \ldots, C_m$ — постоянные.

— некоторая функция комплексного переменного z, определенная в некоторой области плоскости z. Тогда через $\overline{F}(z)$ (*черта ставится здесь только над символом* F) мы будем обозначать функцию, принимающую сопряженные с $F(z)$ значения в точках $\overline{z}$, представляющих собой зеркальное отражение точек z в действительной оси, т. е. попросту сопряженных с z (рис. 33).

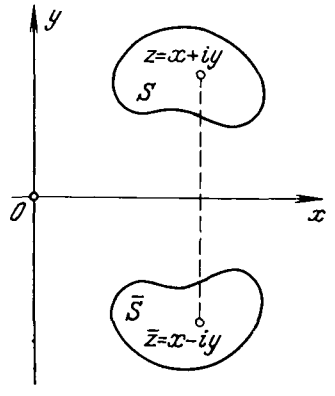


Рис. 33.

Таким образом, по определению

$$\overline{F}(z)=\overline{F(\overline{z})} \tag{2}$$

или иначе

$$\overline{F}(z)=U(x,\ -y)-iV(x,\ -y). \tag{2'}$$

Например, если $F(z)$ — полином:

$$F(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n, \tag{3}$$

то, очевидно, на основании (2)

$$\overline{F}(z)=\overline{a}_0z^n+\overline{a}_1z^{n-1}+\ldots+\overline{a}_n, \tag{3'}$$

т. е. $\overline{F}(z)$ получается из $F(z)$ заменой коэффициентов на сопряженные. Точно так же, если $F(z)$ — рациональная функция:

$$F(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}, \tag{4}$$

то

$$\overline{F}(z)=\frac{\overline{a}_0z^n+\overline{a}_1z^{n-1}+\ldots+\overline{a}_n}{\overline{b}_0z^n+\overline{b}_1z^{n-1}+\ldots+\overline{b}_n}. \tag{4'}$$

Легко видеть, что если функция $F(z)$ голоморфна в некоторой области S, то функция $\overline{F}(z)$ голоморфна в области $\overline{S}$, представляющей собой зеркальное отражение области S в действительной оси [1]) (рис. 33). Если функция $F(z)$ голоморфна в S, за исключением некоторых точек, где она имеет полюсы, то функция $\overline{F}(z)$ будет обладать тем же свойством в $\overline{S}$.

---

[1]) Действительно, положим:

$$\overline{F}(z)=U_1(x,\ y)+iV_1(x,\ y);$$

тогда согласно формуле (2')

$$U_1(x,\ y)=U(x,\ -y),\quad V_1(x,\ y)=-V(x,\ -y).$$

Следовательно, если функции $U(x,\ y)$, $V(x,\ y)$ удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

в области S, то функции $U_1(x,\ y)$, $V_1(x,\ y)$ будут удовлетворять условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial y},\quad \frac{\partial U_1}{\partial y}=-\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

в области $\overline{S}$.

причем ее полюсами будут точки, представляющие собой зеркальное отражение полюсов функции $F(z)$ в действительной оси.

Заметим еще, что функцию $\overline{F(z)}$, сопряженную с $F(z)$, можно представить так:

$$\overline{F(z)} = \bar{F}(\bar{z}); \tag{5}$$

это следует из формулы (2) при замене z на $\bar{z}$.

Предположим теперь, что функция $F(z)$ определена в одной из полуплоскостей S^+, S^-, на которые разбивается плоскость z действительной осью, скажем, в области S^+. Тогда функция $F(z)$ будет определена в области S^-. Если, далее, существует граничное значение $F^+(t)$, где t — некоторая точка действительной оси, то, как это непосредственно следует из формулы (2), существует и граничное значение $\bar{F}^-(t)$, причем [1])

$$\bar{F}^-(t) = \overline{F^+(t)}. \tag{6}$$

Очевидно, можно поменять ролями S^+ и S^-; тогда будем иметь аналогично:

$$\bar{F}^+(t) = \overline{F^-(t)}. \tag{6'}$$

2. Пусть γ обозначает окружность радиуса 1 с центром в O на плоскости комплексного переменного ζ; точки на γ мы будем обозначать через σ, так что

$$\sigma = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi. \tag{7}$$

Обозначим соответственно через Σ^+ и Σ^- области $|\zeta| < 1$ и $|\zeta| > 1$ и выберем на γ за положительное направление то, которое оставляет область Σ^+ слева.

Пусть $F(\zeta)$ — функция, определенная в области Σ^+ (или Σ^-). Рассмотрим функцию $F_*(\zeta)$, определенную в области Σ^- (или Σ^+) следующим образом:

$$F_*(\zeta) = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \tag{8}$$

или иначе, если вспомнить значение символа $\bar{F}$,

$$F_*(\zeta) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}. \tag{8'}$$

Последняя формула показывает, что функцию $F_*(\zeta)$ можно определить так: функция $F_*(\zeta)$ принимает значения, сопряженные с $F(\zeta)$ в точках, являющихся отражениями [2]) точек ζ в окружности γ (рис. 34).

---

[1]) Если в формуле (2) $z \to t$ из S^-, то $\bar{z} \to t$ из S^+.

[2]) Напомним (§ 48, п. 1), что отражением точки ζ в окружности γ называется точка

$$\zeta' = \frac{1}{\bar{\zeta}}$$

(ибо в нашем случае радиус окружности равен 1).

Легко видеть, что если функция $F(\zeta)$ голоморфна в Σ^+ (или Σ^-), то функция $F_*(\zeta)$ голоморфна в Σ^- (или Σ^+), и наоборот.

Например, если функция $F(\zeta)$ голоморфна в Σ^+, то, как известно, она представляется рядом

$$F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots, \tag{9}$$

абсолютно сходящимся в Σ^+, т. е. при $|\zeta| < 1$; функция же $F_*(\zeta)$ будет представлена рядом

$$F_*(\zeta) = \overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_1}{\zeta} + \frac{\bar{a}_2}{\zeta^2} + \ldots, \tag{9'}$$

абсолютно сходящимся в Σ^-, т. е. при $|\zeta| > 1$.

Предположим теперь, что функция $F(\zeta)$, определенная в Σ^+, имеет граничное значение $F^+(\sigma)$ при $\zeta \to \sigma$, где σ — точка на γ. Тогда, как легко видеть на основании формулы (8′), имеет граничное значение $F^-_*(\sigma)$ и функция $F_*(\zeta)$, определенная в Σ^-, причем

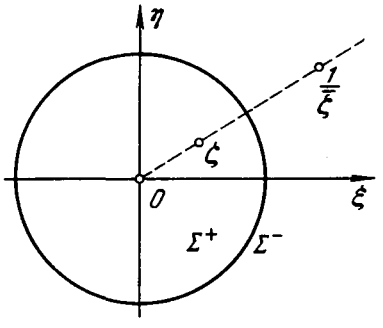


Рис. 34.

$$F^-_*(\sigma) = \overline{F^+(\sigma)}, \tag{10}$$

ибо если в формуле (8′) ζ стремится к точке σ на γ, оставаясь в Σ^-, то $\zeta' = 1/\bar{\zeta}$ стремится к точке $1/\bar{\sigma} = \sigma$, оставаясь в Σ^+. Ясно, что можно поменять ролями Σ^+ и Σ^-; тогда, вместо формулы (10), будем иметь:

$$F^+_*(\sigma) = \overline{F^-(\sigma)}. \tag{11}$$

3. Пользуясь тем, что каждой голоморфной в Σ^+ (или Σ^-) функции $F(\zeta)$ соответствует голоморфная в Σ^- (или в Σ^+) функция $\overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, мы можем в случае круговой границы несколько видоизменить формулировку предложений I и II § 73, имеющих место в общем случае. А именно, легко доказать следующие предложения:

I. *Для того чтобы непрерывная на окружности* γ *функция* $f(\sigma)$ *была граничным значением некоторой функции, голоморфной внутри окружности* γ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = \bar{a} \quad \text{для всех } \zeta \textit{ внутри } \gamma, \tag{12}$$

где a — *постоянная*; эта постоянная равна значению упомянутой голоморфной функции в точке $\zeta = 0$.

II. *Для того чтобы непрерывная на окружности* γ *функция* $f(\sigma)$ *была граничным значением функции, голоморфной вне* γ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad \text{для всех } \zeta \textit{ вне } \gamma. \tag{13}$$

Условия (12) и (13) являются непосредственными следствиями условий (2) и (1) § 73 и сказанного в настоящем параграфе. Например, если функция $f(\sigma)$ должна быть граничным значением $F^+(\sigma)$ некоторой функции $F(\zeta)$, голоморфной внутри γ, то функция $\overline{f(\sigma)}$ должна быть граничным значением $F_*^-(\sigma)$ функции $F_*(\zeta) = \overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, голоморфной вне γ; это непосредственно следует из формулы (10). Применяя поэтому условие (2) § 73, мы получаем непосредственно условие (12); при этом $\overline{a} = F_*(\infty) = \overline{F}(0) = \overline{F(0)}$.

Совершенно аналогично доказывается условие (13). Здесь, однако, следует отметить одно обстоятельство: если условие (13) выполнено и требуется фактически найти функцию $F(\zeta)$, голоморфную вне γ и принимающую на γ граничное значение $f(\sigma)$, и если для этого мы хотим воспользоваться формулой Коши для бесконечной области Σ^- (§ 70):

$$F(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + F(\infty), \tag{14}$$

то мы должны знать еще величину $F(\infty)$. Эта последняя, как легко видеть, дается формулой [1]):

$$F(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma. \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) в формулу (14), можем еще написать:

$$F(\zeta) = -\frac{\zeta}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}. \tag{14'}$$

Выпишем еще следующие формулы, которыми будем в дальнейшем пользоваться. Пусть

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots = \varphi(0) + \zeta\varphi'(0) + \frac{\zeta^2}{1\cdot 2}\varphi''(0) + \ldots \tag{16}$$

— функция, голоморфная внутри γ и непрерывная вплоть до γ. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^k\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \overline{a}_0\zeta^k + \overline{a}_1\zeta^{k-1} + \ldots + \overline{a}_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{17}$$

для всех ζ внутри γ. В самом деле, $\sigma^k\overline{\varphi(\sigma)}$ есть граничное значение функции $\zeta^k\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, голоморфной вне γ, кроме точки $\zeta = \infty$, вблизи которой

[1]) Согласно формуле (2') § 70 при ζ внутри γ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = F(\infty),$$

откуда при $\zeta = 0$ следует формула (15). Формулу (15) можно, очевидно, заменить следующей:

$$F(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta_0},$$

где ζ_0 — любая точка внутри γ.

она имеет вид

$$\zeta^k\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\zeta^k\left(\overline{a}_0+\frac{\overline{a}_1}{\zeta}+\frac{\overline{a}_2}{\zeta^2}+\ldots\right)=\overline{a}_0\zeta^k+\overline{a}_1\zeta^{k-1}+\ldots+\overline{a}_k+O\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

и формула (17) следует непосредственно из формулы (4′) § 70.

В частности, при $k=0$ будем иметь для всех ζ внутри γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{\varphi(0)}. \tag{18}$$

Последняя формула есть та же формула (12), записанная несколько иначе.

4. Аналогично предыдущему, пользуясь тем, что каждой функции $F(z)$, голоморфной в верхней (или нижней) полуплоскости S^+ (или S^-), соответствует функция $\overline{F}(z)$, голоморфная в нижней (или верхней) полуплоскости S^- (или S^+), из условий (7), (6) § 73 непосредственно выводим следующие предложения.

Пусть $f(t)$ обозначает, как в § 73, функцию, заданную на действительной оси L, непрерывную на L и такую, что при больших $|t|$

$$f(t)=a+O(|t|^{-\mu})=f(\infty)+O(|t|^{-\mu}),\quad \mu=\text{const}>0. \tag{19}$$

Тогда будем иметь следующее:

III. *Для того чтобы функция $f(t)$ была граничным значением функции, голоморфной в S^+, необходимо и достаточно условие*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z}=\frac{1}{2}\overline{a}\quad\text{для всех } z \text{ в } S^+. \tag{20}$$

IV. *Для того чтобы $f(t)$ была граничным значением функции, голоморфной в S^-, необходимо и достаточно условие*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z}=-\frac{1}{2}\overline{a}\quad\text{для всех } z \text{ в } S^-. \tag{21}$$

§ 77. Простейшие приложения: решение основных задач теории потенциала для круга и полуплоскости. В качестве простейших примеров приложения предыдущих результатов дадим решение основных задач теории логарифмического потенциала для круга и полуплоскости.

Под первой основной задачей (задача Дирихле) мы подразумеваем задачу нахождения гармонической в данной области функции по заданным ее граничным значениям [1]).

Вторая же основная задача (задача Неймана) состоит в нахождении гармонической в данной области функции по заданным граничным значениям ее нормальной производной.

1. Первая основная задача для круга. Для сокращения письма примем радиус круга равным 1 и поместим начало координат

[1]) В § 62 (замечание в конце параграфа) было указано решение задачи Дирихле для кругового кольца при помощи разложений в ряды.

в центре. Окружность круга обозначим по-прежнему через γ, а точки на γ будем обозначать через $\sigma = e^{i\vartheta}$; другие точки на плоскости будем обозначать через ζ.

Обозначим искомую гармоническую функцию через P и пусть Q — гармоническая функция, сопряженная с P. Эта функция определяется, как мы знаем, с точностью до произвольной постоянной, если известна функция P.

Положим:

$$F(\zeta) = P + iQ; \tag{1}$$

функция $F(\zeta)$ должна быть голоморфной внутри γ.

По условию задачи искомая функция P должна принимать определенные граничные значения P^+ при стремлении ζ (разумеется, изнутри γ) к точкам σ на γ, равные заданной на γ действительной функции f. Эту функцию мы можем обозначить через $f(\sigma)$ или $f(\vartheta)$; мы выберем последнее обозначение и будем считать, что заданная функция $f(\vartheta)$ непрерывна на всей окружности [1]). Граничное условие задачи в соответствии с предыдущим запишется так:

$$P = f(\vartheta), \tag{2}$$

где для упрощения мы пишем P вместо P^+.

Мы несколько ограничим задачу, считая, что определенные граничные значения принимает не только функция P, но и сопряженная с ней функция Q [2]), а следовательно, и функция $F(\zeta)$. Обозначая $F^+(\sigma)$ просто через $F(\sigma)$, мы можем теперь записать граничное условие (2) так:

$$F(\sigma) + \overline{F(\sigma)} = 2f(\vartheta). \tag{3}$$

Умножая предыдущее равенство на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, где ζ — точка внутри γ, и интегрируя по γ, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{F(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{4}$$

На основании теоремы Гарнака (§ 75), это условие вполне эквивалентно предыдущему (см. замечание 1 в конце § 75).

Первый интеграл левой части по теореме Коши равен $F(\zeta)$; второй же интеграл на основании формулы (18) § 76 равен

$$\overline{F(0)} = \alpha_0 - i\beta_0,$$

где α_0 и β_0 — действительные (пока неизвестные) постоянные.

Таким образом, имеем:

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \alpha_0 + i\beta_0. \tag{5}$$

[1]) В сущности, если мы считаем, что P принимает (определенные, конечные) граничные значения во *всех* точках на γ, то заданную функцию $f(\vartheta)$ мы *необходимо* должны считать непрерывной; это следует из сказанного в § 29, п. 3.

[2]) Это условие не является необходимым; мы принимаем его для упрощения рассуждений.

Остается определить $\alpha_0 - i\beta_0$. Для этого положим в предыдущей формуле $\zeta = 0$; тогда получим:

$$2\alpha_0 = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)}{\sigma}d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{6}$$

По предыдущей формуле определяется α_0; величина же β_0 остается совершенно произвольной, ибо функция Q, сопряженная с P, определена только с точностью до произвольной действительной постоянной, а следовательно, функция $F(\zeta)$ — с точностью до чисто мнимой постоянной.

Внося значение α_0 в формулу (5), получаем:

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma} + i\beta_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\vartheta)\,\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma} + i\beta_0. \tag{7}$$

Последняя формула есть известная *формула Шварца*; искомая гармоническая функция P получается из нее отделением действительной части:

$$P = \operatorname{Re} F(\zeta) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\vartheta)\,\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\,\frac{d\sigma}{\sigma}. \tag{7'}$$

Мы доказали только, что если решение задачи, удовлетворяющее всем поставленным условиям, существует, то оно необходимо дается предыдущей формулой. Остается показать, что она действительно дает решение.

Мы покажем это, предполагая, что заданная функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию H [1]). В этом случае на основании сказанного в § 68 функция $F(\zeta)$, определяемая формулой (7), принимает определенные граничные значения, и эти граничные значения, как вытекает из самого вывода [2]), удовлетворяют условию (3); следовательно, функция P удовлетворяет условию (2).

[1]) Существование и единственность решения можно доказать и при гораздо более общих условиях [достаточно, чтобы функция $f(\vartheta)$ была непрерывна], но здесь мы на этом не останавливаемся (см. любой курс теории функции комплексного переменного или теории потенциала).

[2]) А именно, из эквивалентности условий (3) и (4). То, что $F(\zeta)$ удовлетворяет условию (3), можно проверить и непосредственно на основании формулы (2) § 68. Действительно, по упомянутой формуле, обозначая через $\sigma_0 = e^{i\vartheta_0}$ некоторую точку на γ, имеем:

$$F^+(\sigma_0) = f(\vartheta_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\sigma_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma} + i\beta_0 =$$

$$= f(\vartheta_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\vartheta)\,\frac{\sigma+\sigma_0}{\sigma-\sigma_0}\,\frac{d\sigma}{\sigma} + i\beta_0.$$

Подставляя под знаком интеграла $\sigma = e^{i\vartheta}$, $\sigma_0 = e^{i\vartheta_0}$, получаем после простых преобразований:

$$F^+(\sigma_0) = f(\vartheta_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + i\beta_0 = f(\vartheta_0) + \text{ чисто мнимая величина,}$$

откуда

$$\operatorname{Re} F^+(\sigma_0) = f(\vartheta_0).$$

Полагая в формуле (7′)

$$\sigma = e^{i\vartheta}, \quad \zeta = \varrho e^{i\psi}, \quad d\sigma = ie^{i\vartheta}\, d\vartheta,$$

легко получаем известную *формулу Пуассона*:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varrho^2)\, f(\vartheta)\, d\vartheta}{1 - 2\varrho \cos(\vartheta - \psi) + \varrho^2}, \tag{8}$$

решающую поставленную задачу без посредства комплексной переменной.

2. Вторая основная задача для круга. Пусть $F(\zeta)$ обозначает то же, что выше; будем считать, что производная $F'(\zeta)$ принимает определенные граничные значения $F'(\sigma)$.

Из равенства

$$2P = F(\zeta) + \overline{F(\zeta)} = F(\varrho e^{i\vartheta}) + \overline{F(\varrho e^{i\vartheta})}$$

выводим:

$$2\frac{\partial P}{\partial \varrho} = e^{i\vartheta} F'(\varrho e^{i\vartheta}) + \overline{e^{i\vartheta} F'(\varrho e^{i\vartheta})} = \frac{\zeta}{\varrho} F'(\zeta) + \frac{\bar{\zeta}}{\varrho} \overline{F'(\zeta)}. \tag{9}$$

Граничное условие рассматриваемой задачи имеет вид (через n обозначаем внешнюю нормаль):

$$\frac{dP}{dn} = f(\vartheta) \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial \varrho} = f(\vartheta) \quad \text{на } \gamma, \tag{10}$$

где $f(\vartheta)$ — заданная непрерывная функция.

На основании формулы (9) граничное условие можно переписать так:

$$\sigma F'(\sigma) + \overline{\sigma F'(\sigma)} = 2f(\vartheta) \quad \text{на } \gamma. \tag{11}$$

Применяя тот же прием, что и выше, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sigma F'(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{\sigma F'(\sigma)}\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{f(\vartheta)\, d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

где ζ — произвольная точка внутри γ. Отсюда, применяя формулу Коши и формулу (18) § 76 и замечая, что $\sigma F'(\sigma)$ обращается в нуль при $\sigma = 0$, выводим:

$$\zeta F'(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{f(\vartheta)\, d\sigma}{\sigma - \zeta}. \tag{12}$$

Эта формула определяет $F'(\zeta)$ и показывает, что для разрешимости задачи правая часть формулы (12) должна обращаться в 0 при $\zeta = 0$. Значит, условие разрешимости задачи будет:

$$\int_\gamma \frac{f(\vartheta)\, d\sigma}{\sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{13}$$

В противоположность задаче Дирихле, задача Неймана допускает решение не всегда, а только при добавочном условии (13).

При соблюдении этого условия функция $F'(\zeta)$, определяемая формулой (12), будет голоморфной и при $\zeta = 0$. Функция $F(\zeta)$ определяется

квадратурой:

$$F(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{d\zeta}{\zeta}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\text{const}, \tag{14}$$

где const обозначает произвольную комплексную постоянную. Значение искомой функции $P=\operatorname{Re}F(\zeta)$ определяется, таким образом, с точностью до произвольной (действительной) постоянной. Это надо было предвидеть, ибо если P есть решение задачи Неймана, то $P+\text{const}$, очевидно, будет решением той же задачи.

Легко видеть (ср. предыдущий случай), что полученные формулы действительно решают поставленную граничную задачу, если, например, заданная функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию H.

Проинтегрировав правую часть (14) под знаком интеграла, заметив, что

$$\int\frac{d\zeta}{\zeta(\sigma-\zeta)}=\frac{1}{\sigma}\ln\zeta-\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma-\zeta)+\text{const},$$

и принимая во внимание условие (13), получим формулу, указанную Боджо (Boggio [4]):

$$F(\zeta)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\vartheta)\ln(\sigma-\zeta)\frac{d\sigma}{\sigma}+\text{const}=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\vartheta)\ln(\sigma-\zeta)\,d\vartheta+\text{const}; \tag{15}$$

отделяя же действительную часть от мнимой, получаем формулу Дини (Dini [1]):

$$P=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\vartheta)\ln r\,d\vartheta+\text{const}, \tag{16}$$

где $r=|\sigma-\zeta|$, а const — действительная произвольная постоянная.

В большинстве приложений удобно, однако, пользоваться формулами (12) и (14).

3. Первая и вторая основные задачи для полуплоскости могут быть сведены к соответствующим задачам для круга путем конформного отображения полуплоскости на круг [1]) либо решены непосредственно способом, аналогичным тому, каким мы решили эти задачи для круга в настоящем параграфе. Ввиду полной аналогии с предыдущим мы ограничимся краткими указаниями.

Пусть $f(t)$ — действительная непрерывная функция, заданная на действительной оси L, и пусть требуется найти функцию $P(x, y)$, гармоническую в верхней полуплоскости S^+ и принимающую на L граничные значения $P^+=f(t)$, включая бесконечно удаленную точку, так что при $z\to\infty$ (в $S^+ + L$), $P\to a$, где a — действительная постоянная:

$$a=f(\infty). \tag{17}$$

[1]) Такое отображение указано в § 71 (см. примечание на стр. 259).

Вводя функцию комплексного переменного

$$F(z) = P + iQ, \tag{18}$$

голоморфную в S^+, и считая, что эта функция принимает определенные граничные значения $F^+(t)$ для всех точек на L, включая бесконечно удаленную точку, можем записать граничное условие задачи так:

$$F(t) + \overline{F(t)} = 2f(t) \quad \text{на } L, \tag{19}$$

где вместо $F^+(t)$ мы пишем просто $F(t)$. Вводя обозначение:

$$F(\infty) = a + ib,$$

где a определяется по (17), а b — некоторая другая действительная постоянная, умножая обе части предыдущего равенства на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z — произвольная точка из S^+, и интегрируя по L, получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F(t)}\,dt}{t-z} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Замечая, что $F(t)$ есть граничное значение функции $F(z)$, голоморфной в верхней полуплоскости, а $\overline{F(t)}$ — граничное значение функции $\overline{F}(z)$, голоморфной в нижней полуплоскости, причем $F(\infty) = a + ib$, $\overline{F}(\infty) = a - ib$, и применяя формулы (1), (1′) § 72, заключаем, что первый интеграл в левой части равен $F(z) - \frac{1}{2}(a + ib)$, а второй равен $\frac{1}{2}(a - ib)$. Следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} + ib; \tag{20}$$

величина b, как и следовало ожидать, остается произвольной.

Легко проверить, что если, например, функция $f(t)$ удовлетворяет условию H (включая бесконечно удаленную точку; см. § 71), то формула (20) решает задачу.

Аналогично решается вторая основная задача.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Как уже говорилось выше, решение основных граничных задач теории упругости для областей общего вида представляет большие трудности практического характера. Однако существуют классы областей, для которых решение может быть получено эффективно и сравнительно простыми средствами. Один из таких классов в плоской теории упругости составляют области, которые конформно отображаются на круг рациональными функциями (мы уже встречались в § 63 с частным случаем этого класса). Этот класс на первый взгляд может показаться слишком узким; однако, как будет подробнее разъяснено в § 89, областями этого класса можно с любой точностью приблизиться к практически произвольным односвязным областям.

Почти вся настоящая глава посвящена решению граничных задач для областей указанного вида. Лишь в начале главы (§ 79) приводится решение первой и второй основных задач для произвольных областей, ограниченных одним замкнутым контуром, при помощи метода, органически связанного с методом решения для областей указанного выше частного вида, а в конце главы, кроме кратких сведений о других методах, подробно излагается данное Д. И. Шерманом решение упомянутых задач для областей, ограниченных произвольным числом замкнутых контуров (§ 102).

Мы увидим, что интегралы типа Коши представляют собой весьма удобный аппарат как для теоретического решения вопросов в общем случае, так и для получения практически применимых результатов.

I. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНИМ ЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

В этом отделе мы излагаем один общий метод решения первой и второй основных задач для областей, ограниченных одним простым замкнутым контуром (§ 79). Эти решения даются интегральными уравнениями, которые в свою очередь непосредственно получаются из функциональных уравнений, выводимых в § 78. Упомянутые функциональные уравнения и являются основой для практических методов, излагаемых в следующих

отделах главы, и могут быть использованы непосредственно, без приведения к интегральным уравнениям. Поэтому читатель, не владеющий элементами теории интегральных уравнений, может пропустить § 79, так как чтение следующих отделов, содержащих решение задач для частных случаев, не требует знакомства с упомянутым параграфом.

§ 78. Приведение основных задач к функциональным уравнениям. 1. Пусть S — конечная или бесконечная часть плоскости z, ограниченная одним простым замкнутым контуром L, удовлетворяющим условиям § 47. Отобразим S на круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ соотношением

$$z = \omega(\zeta); \tag{1}$$

окружность нашего круга мы по-прежнему обозначим через γ.

Будем считать, что в случае конечной области S точке $\zeta = 0$ соответствует точка $z = 0$, а в случае бесконечной области S точке $\zeta = 0$ соответствует точка $z = \infty$. Таким образом, при конечной области будем иметь:

$$\omega(0) = 0, \tag{2}$$

а при бесконечной области (см. § 47)

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \text{голоморфная функция}. \tag{3}$$

Не забудем, что $\omega'(\zeta)$ не обращается в 0 ни внутри, ни на окружности γ (§ 47).

Будем, далее, предполагать (временно), что в случае бесконечной области не только напряжения, но и смещения остаются ограниченными на бесконечности. Это равносильно (см. § 36) предположению, что напряжения равны нулю на бесконечности, что главный вектор внешних усилий, приложенных к границе, равен нулю и что равно нулю вращение на бесконечности.

При этих условиях и при обозначениях, принятых в § 50, функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут голоморфны в области S (включая точку $z = \infty$ в случае бесконечной области; см. § 36). Следовательно, функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ будут голоморфны внутри круга $|\zeta| < 1$. Мы будем считать, что функции $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до окружности γ рассматриваемого круга [1]), т. е. считать решение *регулярным* (§ 42), и будем искать только такие решения.

Кроме того (§ 41), в случае конечной области мы можем всегда считать $\psi_1(0) = 0$, а в случае бесконечной $\psi_1(\infty) = 0$. Значит, мы можем в обоих случаях считать [2])

$$\psi(0) = 0. \tag{4}$$

[1]) Иными словами, что эти функции принимают определенные граничные значения при стремлении ζ к точкам на γ по произвольным путям.

[2]) Вместо условия (4) можно ввести условие $\varphi(0) = 0$, как было сделано в предыдущих изданиях настоящей книги. Но условие, принятое здесь, несколько упрощает рассуждения.

В случае первой основной задачи для конечной области можно, кроме того, произвольно фиксировать мнимую часть величины $\varphi_1'(0)$, т. е. мнимую часть величины

$$\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}.$$

2. Граничное условие первой основной задачи принимает вид (см. § 51):

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=f_1+if_2=f, \tag{5}$$

где, напоминаем, $\sigma = e^{i\vartheta}$ обозначает произвольную точку на окружности γ, а под $\varphi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$, $\psi(\sigma)$ следует подразумевать граничные значения при $\zeta \to \sigma$ изнутри γ.

Предыдущее условие, переходя к сопряженным значениям, можно записать и так:

$$\overline{\varphi(\sigma)}+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=f_1-if_2=\overline{f}. \tag{6}$$

Величина $f = f_1 + if_2$ определяется на контуре L равенством (см. § 41):

$$f=f_1+if_2=i\int_0^s (X_n+iY_n)\,ds+\text{const}, \tag{7}$$

где s — дуга контура L, а постоянная в правой части должна быть зафиксирована произвольно. Это выражение надо считать заданной функцией от ϑ (ибо s есть известная функция от ϑ) или, что все равно, от σ.

Мы будем считать, что величина f не только однозначна и непрерывна [1]), но что она имеет непрерывную производную по ϑ, удовлетворяющую условию H (§ 65, п. 3). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы функции X_n и Y_n удовлетворяли условию H.

Заметим теперь следующее. Если нам тем или иным путем удастся найти функцию $\varphi(\zeta)$, то функцию $\psi(\zeta)$ можно будет вычислить непосредственно, исходя из граничного условия. В самом деле, это последнее даст граничные значения $\psi(\sigma)$ функции $\psi(\zeta)$, которая поэтому определится формулой

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}.$$

Если внесем сюда значение $\psi(\sigma)$, определяемое формулой (6), и вспомним, что по формуле (18) § 76

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{\varphi(0)},$$

[1]) Напомним, что однозначность и непрерывность функции $f = f_1 + if_2$ была бы невозможна, если бы главный вектор (X, Y) внешних усилий был отличен от нуля, ибо тогда при полном обходе контура L величина $f_1 + if_2$ получила бы приращение $i(X + iY)$, т. е. не вернулась бы к прежнему значению.

то получим:

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \overline{\varphi(0)}. \tag{8}$$

Итак, нам остается найти функцию $\varphi(\zeta)$. Для этой цели мы составим функциональное уравнение, содержащее лишь $\varphi(\zeta)$ и непосредственно вытекающее из граничного условия. А именно, перепишем граничное условие (5) так:

$$\overline{\psi(\sigma)} = f - \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)}; \tag{9}$$

обозначая правую часть временно через $\overline{F(\sigma)}$, выразим, что функция $F(\sigma)$ должна представлять собой граничное значение некоторой функции $\psi(\zeta)$, голоморфной внутри γ и обращающейся в 0 при $\zeta = 0$. Для этого же, как мы знаем (см. § 76, п. 3), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{F(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0 \text{ для всех } \zeta \text{ внутри } \gamma;$$

постоянная $\overline{a}$ в правой части формулы (12) § 76 в нашем случае равна нулю, так как по условию $\psi(0) = 0$.

Внося в предыдущую формулу, вместо $\overline{F(\sigma)}$, правую часть формулы (9), получаем [1]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \varphi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0,$$

или окончательно

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = A(\zeta) \quad \text{для всех } \zeta \text{ внутри } \gamma, \tag{10}$$

где для краткости через $A(\zeta)$ обозначена заданная функция

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{11}$$

Это и есть функциональное уравнение, из которого должна быть определена функция $\varphi(\zeta)$.

Мы увидим в следующем параграфе, что это уравнение вполне определяет искомую функцию, если, в случае конечной области, зафиксировать мнимую часть отношения $\varphi'(0)/\omega'(0)$.

До сих пор мы предполагали, что в случае бесконечной области главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к контуру L, и значения напряжений на бесконечности равны нулю; мы считали также равным нулю вращение на бесконечности. Отбросим теперь эти

[1]) Мы используем то обстоятельство, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \varphi(\zeta).$$

предположения. В этом общем случае функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ для бесконечной области имеют вид (см. § 36):

$$\varphi_1(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+\Gamma z+\varphi_1^0(z),\qquad \psi_1(z)=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z+\Gamma' z+\psi_1^0(z), \tag{12}$$

где $\varphi_1^0(z)$, $\psi_1^0(z)$ обозначают функции, голоморфные в S (включая точку $z=\infty$), и где $\operatorname{Re}\Gamma$ и Γ' следует рассматривать как заданные величины; кроме того, можно произвольно зафиксировать мнимую часть Γ. Величины X и Y могут быть заранее вычислены, так как внешние напряжения, действующие на контур, известны.

Принимая во внимание формулу (3), предыдущие формулы можно привести к виду [1]):

$$\varphi(\zeta)=\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+\frac{\Gamma c}{\zeta}+\varphi_0(\zeta),\quad \psi(\zeta)=-\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+\frac{\Gamma' c}{\zeta}+\psi_0(\zeta), \tag{13}$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ — функции, голоморфные внутри γ и непрерывные вплоть до γ.

В дальнейшем при решении первой основной задачи мы будем всегда считать, что мнимая часть величины Γ взята равной нулю, так что $\bar{\Gamma}=\Gamma$. Иными словами, мы будем считать, что *вращение исчезает на бесконечности*; это, очевидно, не нарушает общности.

Подставляя значения (13) в (5), увидим, что функции $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ должны удовлетворять точно тому же условию (5), что и функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, с той только разницей, что вместо f следует теперь взять f_0, где

$$f_0=f-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\sigma-\frac{\Gamma c}{\sigma}-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\left\{\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\cdot\frac{1}{\bar{\sigma}}-\frac{\Gamma\bar{c}}{\sigma^2}\right\}+\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\bar{\sigma}-\frac{\bar{\Gamma}'\bar{c}}{\bar{\sigma}},$$

или, замечая, что $\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$,

$$f_0=f-\frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma-\frac{\Gamma c}{\sigma}-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\left\{\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma-\Gamma c\sigma^2\right\}-\bar{\Gamma}'\bar{c}\sigma. \tag{14}$$

Вместо $\ln\sigma$ можно в предыдущем выражении написать просто $i\vartheta$.

Легко видеть, что выражение f_0 будет однозначной непрерывной функцией на γ, производная которой по ϑ удовлетворяет условию H, если заданные функции X_n, Y_n удовлетворяют (как мы предполагаем) условию H.

Однозначность выражения f_0 следует из того, что при полном обходе по γ (против часовой стрелки, что соответствует обходу контура L по часовой стрелке, оставляющему бесконечную область S слева) выражение f прирастает на величину $i(X+iY)$ и на такую же величину прирастает $(X+iY)\ln\sigma/2\pi$.

Таким образом, для нахождения $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ мы имеем точно такие же условия, как имели выше для нахождения $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Значит, мы всегда можем свести общий случай к предыдущему.

[1]) Ср. формулы (14), (15) § 50. Не забудем, что там мы отображали область S на внешнюю часть круга, а здесь отображаем на внутреннюю.

3. Перейдем ко второй основной задаче. Граничное условие в этом случае имеет вид (§ 51):

$$\varkappa\varphi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=2\mu\,(g_1+ig_2)=2\mu g, \tag{15}$$

где g_1, g_2 — заданные граничные значения компонент u, v смещения.

Мы видим почти полную аналогию с первой основной задачей. Считая сперва, что (в случае бесконечной области)

$$X=Y=0, \quad \Gamma=\Gamma'=0,$$

т. е. считая $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ голоморфными и поступая, как в случае первой основной задачи, получаем уравнение, аналогичное уравнению (10):

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma=B(\zeta) \quad \text{для всех } \zeta \text{ внутри } \gamma, \tag{16}$$

где $B(\zeta)$ — заданная функция

$$B(\zeta)=\frac{2\mu}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\,. \tag{17}$$

Уравнение (16) представляет собой функциональное уравнение, которое вполне определяет функцию $\varphi(\zeta)$; это будет показано в следующем параграфе.

После того, как будет найдена функция $\varphi(\zeta)$, функция $\psi(\zeta)$ определится по формуле, аналогичной формуле (8):

$$\psi(\zeta)=-\frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\bar g\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\varkappa\overline{\varphi(0)}. \tag{18}$$

Случай, когда величины X, Y, Γ, Γ' не равны нулю, а произвольно заданы (здесь, разумеется, мы имеем в виду бесконечную область), можно свести к предыдущему, совершенно аналогично тому, как мы поступили при рассмотрении первой основной задачи.

4. Совершенно аналогично можно составить функциональное уравнение, определяющее $\varphi(\zeta)$ для случая основной смешанной задачи, когда на одной части границы заданы внешние усилия, а на другой — смещения. В этом случае уравнение имеет несколько более сложный вид, и мы на нем останавливаться не будем (см. также конец § 79, п. 4).

§ 79. Приведение к уравнениям Фредгольма. Теоремы существования [1]. 1. Функциональные уравнения (10) и (16) § 78 принадлежат к не совсем обычному типу интегральных уравнений, но их легко можно привести к обычным уравнениям Фредгольма (второго рода).

[1]) Доказательства теорем существования, приводимые в настоящем параграфе, повторяют без существенных изменений доказательства, данные в моей статье [11]. Здесь, однако, введены некоторые упрощения и исправлены два элементарных, но

В случае бесконечной области мы будем считать, что

$$X = Y = \Gamma = \Gamma' = 0,$$

так как наши задачи всегда могут быть приведены к этому случаю (см. § 78).

2. Займемся сначала первой основной задачей. Чтобы привести уравнение (10) § 78 к уравнению Фредгольма, перепишем его следующим образом:

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)}\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma + k\omega(\zeta) = A(\zeta), \tag{1}$$

где для краткости введено обозначение

$$k = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}. \tag{2}$$

Легко видеть на основании формулы (18) § 76, что левая часть уравнения (1) тождественна с левой частью формулы (10) § 78. В случае бесконечной области $\omega'(0) = \infty$, и поэтому $k = 0$.

Дифференцируя уравнение (1) по ζ, получаем:

$$\varphi'(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}\right\}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma + k\omega'(\zeta) = A'(\zeta), \tag{3}$$

откуда, заставляя стремиться ζ к произвольной точке σ_0 контура, выводим:

$$\varphi'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right\}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma + k\omega'(\sigma_0) = A'(\sigma_0). \tag{4}$$

Легко видеть, что проделанная нами операция перехода к пределу вполне законна вследствие принятых выше условий относительно функции f и контура L. Именно, мы приняли, что f такова, что ее первая производная удовлетворяет условию H. Поэтому $A'(\zeta)$ будет (§ 69) функцией, непрерывной внутри γ, непрерывно продолжимой на γ; в формуле (4) $A'(\sigma_0)$ обозначает граничное значение этой функции.

Далее, условия, принятые относительно контура L, обеспечивают непрерывность вплоть до контура γ функций $\omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$, $\omega''(\zeta)$, за исключением, в случае бесконечной области, точки $\zeta = 0$, и неравенство

досадных промаха, допущенных мною в рассуждениях упомянутой статьи. На один из них в свое время любезно обратил мое внимание С. Г. Михлин, и исправление было внесено уже в первое издание книги. Другой, несмотря на свою очевидность и элементарность (вернее, именно благодаря этому), оставался долгое время незамеченным и был обнаружен мною лишь при подготовке третьего издания.

Краткое изложение этих доказательств было дано в моих заметках [9, 10].

нулю $\omega'(\zeta)$, а отсюда следует непрерывность функции

$$K(\zeta, \sigma) = \frac{1}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\overline{\omega(\sigma) - \omega(\zeta)}}{\sigma - \zeta} = \frac{\omega(\sigma) - \omega(\zeta) - (\sigma - \zeta)\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma - \zeta)^2} \tag{5}$$

для всех значений σ и ζ внутри и на γ [1]), кроме, в случае бесконечной области, значений $\sigma = 0$ и $\zeta = 0$.

Кроме того, по предположению (см. § 78) функции $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до контура.

Уравнение (4) легко может быть также выведено из уравнений полученных иным путем В. А. Фоком [1, 2], который, впрочем, ограничивается рассмотрением конечной области [2]).

Предыдущие формулы относятся как к случаю конечной, так и к случаю бесконечной области. Однако в случае бесконечной области им можно придать несколько иной вид, более удобный для нашей цели.

Прежде всего в этом случае $k = 0$. Значит, вместо уравнения (1) можем написать:

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\sigma) - \omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma - \zeta)} \overline{\varphi'(\sigma)}\, d\sigma = A(\zeta). \tag{1'}$$

Далее, замечая, что согласно нашим условиям

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \omega_0(\zeta),$$

где $\omega_0(\zeta)$ — функция, голоморфная внутри γ, будем иметь:

$$\frac{\omega(\sigma) - \omega(\zeta)}{\sigma - \zeta} = \frac{\omega_0(\sigma) - \omega_0(\zeta)}{\sigma - \zeta} - \frac{c}{\sigma\zeta}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1'), получаем:

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega_0(\sigma) - \omega_0(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma - \zeta)} \overline{\varphi'(\sigma)}\, d\sigma = A(\zeta), \tag{1''}$$

ибо, как легко видеть,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, d\vartheta = 0.$$

---

[1]) Действительно, по формуле Тейлора, с остаточным членом в виде определенного интеграла, имеем:

$$\omega(\sigma) - \omega(\zeta) - \omega'(\zeta)(\sigma - \zeta) = \int_\zeta^\sigma \omega''(t)(\sigma - t)\, dt,$$

где интеграл можно брать по прямолинейному отрезку, соединяющему σ и ξ. Произведя замену переменной интегрирования: $t = \sigma - \lambda(\sigma - \zeta)$, получаем:

$$\omega(\sigma) - \omega(\zeta) - \omega'(\zeta)(\sigma - \zeta) = (\sigma - \zeta)^2 \int_0^1 \omega''[\sigma - \lambda(\sigma - \zeta)]\, \lambda\, d\lambda,$$

а отсюда непосредственно следует наше утверждение.

[2]) См. заметку В. А. Фока и Н. И. Мусхелишвили [1].

В самом деле, величина, сопряженная с интегралом правой части,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma},$$

равна нулю, ибо очевидно, $\varphi'(\sigma)/\sigma\omega'(\sigma)$ есть граничное значение функции, голоморфной внутри γ.

Из уравнения (1″) дифференцированием выводим:

$$\varphi'(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)}\right\}\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma=A'(\zeta), \tag{1‴}$$

и, переходя к пределу $\zeta\to\sigma_0$, совершенно аналогично предыдущему получаем интегральное уравнение

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right\}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,d\sigma=A'(\sigma_0). \tag{4′}$$

Итак, уравнение (4), которое мы теперь перепишем так:

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\sigma_0,\ \sigma)\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma+k\omega'(\sigma_0)=A'(\sigma_0), \tag{6}$$

пригодное в обоих случаях, может быть в случае бесконечной области заменено уравнением (4′), т. е.

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K_0(\sigma_0,\ \sigma)\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma=A'(\sigma_0), \tag{6′}$$

где введено обозначение

$$K_0(\zeta,\ \sigma)=\frac{1}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{\omega_0(\sigma)-\omega_0(\zeta)}{\sigma-\zeta}. \tag{5′}$$

Исследуем теперь полученные интегральные уравнения отдельно для конечной и бесконечной области.

Начнем со случая бесконечной области. Если в уравнении (6′) положим

$$\varphi'(\sigma)=\varphi_1'+i\varphi_2'$$

и

$$K_0(\sigma_0,\ \sigma)=K_1+iK_2$$

и разделим действительные и мнимые части, то получим систему двух действительных уравнений Фредгольма; обычным путем эта система может быть сведена к одному уравнению. Нам бесполезно выписывать его, достаточно только знать, что уравнение (6′) сводится к одному уравнению Фредгольма (второго рода).

Предположим, что уравнение (6′) имеет (непрерывное) решение $\varphi'(\sigma)$. Если подставить это решение во второе слагаемое левой части формулы (1‴), то эта формула определит некоторую функцию $\varphi'(\zeta)$, голоморфную, как легко видеть, внутри γ и принимающую определенное граничное значение на γ. Легко далее видеть, что это граничное значение совпадает

с функцией $\varphi'(\sigma)$, фигурирующей во втором члене левой части формулы (1‴)[1]), иными словами, что определенная указанным образом голоморфная функция $\varphi'(\zeta)$ действительно решает функциональное уравнение (1‴).

Легко видеть, наконец, что мы получим решение $\varphi(\zeta)$ функционального уравнения (1″), если определим эту функцию самим равенством (1″), подразумевая, что на место функции $\varphi'(\sigma)$, фигурирующей во втором слагаемом левой части, подставлено рассматриваемое решение интегрального уравнения (6′).

После того, как функция $\varphi(\zeta)$ найдена, функция $\psi(\zeta)$ определяется формулой (8) § 78:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\overline{\varphi(0)}. \tag{7}$$

Так как найденные функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, а также производная $\varphi'(\zeta)$, непрерывны вплоть до γ[2]), то $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ дают регулярное решение задачи.

Итак, каждому (непрерывному) решению $\varphi'(\sigma)$ интегрального уравнения (6′) соответствует определенное регулярное решение нашей задачи.

Докажем теперь, что интегральное уравнение (6′) всегда имеет решение, притом единственное. Для этого, как известно, достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K_0(\sigma_0,\ \sigma)\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma=0 \tag{6″}$$

не имеет решения, отличного от нуля. Это последнее почти очевидно на основании предыдущего. Действительно, если бы это уравнение имело решение, отличное от нуля, мы смогли бы при помощи этого решения получить решение нашей основной задачи, соответствующее случаю $f=0$, при этом такое, что $\varphi'(\zeta)$ отлично от нуля. А это значило бы, как легко видеть, что существует решение, соответствующее случаю, когда внешние напряжения, приложенные к контуру, равны нулю, а напряжения внутри тела отличны от нуля, что невозможно на основании теоремы единственности решения (см. § 40, п. 3 и § 42, п. 2; см. так же § 41, п. 3).

Таким образом, существование решения первой основной задачи для бесконечной области доказано.

Переходя к случаю конечной области, будем пока считать, что постоянная k в уравнении (1) произвольно зафиксирована.

---

[1]) Действительно, переходя к пределу $\zeta\to\sigma_0$ в равенстве (1‴) и принимая во внимание, что функция $\varphi'(\sigma)$, фигурирующая во втором члене левой части, удовлетворяет уравнению (4′), убеждаемся, что $\varphi'(\zeta)\to\varphi'(\sigma_0)$.

[2]) Относительно $\varphi'(\zeta)$ уже говорилось выше; относительно $\varphi(\zeta)$ утверждение очевидно; относительно $\psi(\zeta)$ это следует из самого хода рассуждений, а также из того, что формулу (7) можно еще представить так:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}-\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma-\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\,\varphi'(\zeta)-\overline{\varphi(0)}. \tag{7′}$$

Для того чтобы избавиться от члена $k\omega(\zeta)$ в этом уравнении, произведем подстановку:

$$\varphi(\zeta) = -k\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \tag{8}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ — новая искомая голоморфная функция. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем, очевидно:

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = A(\zeta), \tag{9}$$

откуда, как и выше, следует:

$$\varphi_0'(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\zeta,\ \sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = A'(\zeta), \tag{10}$$

и при $\zeta \to \sigma_0$

$$\varphi_0'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\sigma_0,\ \sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = A'(\sigma_0). \tag{11}$$

Так же, как и в случае уравнения (6′), мы можем свести предыдущее уравнение к системе двух интегральных уравнений Фредгольма, а эту последнюю — к одному уравнению Фредгольма (второго рода).

Ниже будет показано, что уравнение (11) всегда имеет (единственное) решение.

Теперь же мы займемся вопросом о том, как построить решение исходной задачи, если найдено какое-либо (непрерывное) решение $\varphi_0'(\sigma)$ этого уравнения.

Подставив это решение во второй член левой части (9), мы определим функцию $\varphi_0(\zeta)$.

После этого функция $\varphi(\zeta)$ будет дана соотношением (8); эта функция будет решением функционального уравнения (1) при данном значении постоянной k. Однако, для того чтобы определенная таким образом функция $\varphi(\zeta)$ приводила к решению исходной задачи, необходимо и достаточно так подобрать постоянную k, чтобы имело место соотношение (2), т. е. чтобы

$$k = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}},$$

или, принимая во внимание соотношение (8),

$$k + \overline{k} = \frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}. \tag{12}$$

Это, очевидно, возможно лишь в случае, когда

$$\frac{\varphi_0'(0)}{\omega'(0)} = \text{действительное число}. \tag{13}$$

Предположим, что последнее имеет место. Тогда формула (12) определит действительную часть k. Зафиксировав произвольно мнимую часть k, мы получим определенное значение для искомой функции $\varphi(\zeta)$; вычислив соответствующую функцию $\psi(\zeta)$ по формуле (8) § 78, мы получим, наконец, некоторое регулярное решение исходной задачи.

Легко выяснить физический смысл условия (13). В самом деле, введем в рассмотрение некоторую функцию $\psi_0(\sigma)$, положив:

$$\varphi_0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}+\overline{\psi_0(\sigma)}=f_1+if_2+\frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}\,\omega(\sigma), \tag{14}$$

или, что все равно,

$$\overline{\varphi_0(\sigma)}+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)=f_1-if_2+\frac{\varphi_0'(0)}{\omega'(0)}\,\overline{\omega(\sigma)}. \tag{15}$$

Легко непосредственно проверить, что в силу уравнения (9) функция $\psi_0(\sigma)$ представляет собой граничное значение некоторой функции $\psi_0(\zeta)$, голоморфной внутри γ [1]) (и обращающейся в нуль при $\zeta=0$; последнее обстоятельство не имеет для нас значения).

Умножая равенства (14), (15) соответственно на $\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=d\bar{z}$ и $\omega'(\sigma)\,d\sigma=dz$, складывая, интегрируя по γ и замечая, что

$$\int_\gamma \varphi_0(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}+\int_\gamma \overline{\omega(\sigma)}\,\varphi_0'(\sigma)\,d\sigma=\int_\gamma d\left[\varphi_0(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}\right]=0,$$

$$\int_\gamma \overline{\varphi_0(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+\int_\gamma \omega(\sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=\int_\gamma d\left[\overline{\varphi_0(\sigma)}\,\omega(\sigma)\right]=0,$$

$$\int_\gamma \overline{\psi_0(\sigma)}\,\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=\int_\gamma \psi_0(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma=0,$$

$$\int_\gamma \omega(\sigma)\,\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=\int_L z\,d\bar{z},\qquad \int_\gamma \overline{\omega(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma=\int_L \bar{z}\,dz$$

и что, как это показывает интегрирование по частям,

$$\int_L \bar{z}\,dz=-\int_L z\,d\bar{z},$$

получаем:

$$0=2\int_L (f_1\,dx+f_2\,dy)+\left\{\frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}-\frac{\varphi_0'(0)}{\omega'(0)}\right\}\int_L z\,d\bar{z}.$$

Но

$$\int_L z\,d\bar{z}=\int_L (x\,dx+y\,dy)+i\int_L (y\,dx-x\,dy)=-2iS,$$

где S — площадь области S. Следовательно,

$$\int_L (f_1\,dx+f_2\,dy)=iS\left\{\frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}-\frac{\varphi_0'(0)}{\omega'(0)}\right\}. \tag{16}$$

[1]) Действительно, подразумевая под $\overline{\psi_0(\sigma)}$ выражение, даваемое формулой (14), и принимая во внимание уравнение (9), будем, как легко видеть, иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=0,$$

что на основании сказанного в § 76 (п. 3, предложение I) доказывает наше утверждение.

Выражение в фигурных скобках только множителем отличается от мнимой части $\varphi_0'(0)/\omega'(0)$. Значит, условие (13) эквивалентно условию:

$$\int_L (f_1\,dx + f_2\,dy) = 0, \tag{17}$$

а это есть *условие равенства нулю главного момента внешних напряжений*, приложенных к контуру L.

Вернемся теперь к уравнению (11) и покажем, что оно имеет одно и только одно решение.

Рассмотрим для этого соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi_0'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(\sigma_0,\ \sigma)\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,d\sigma = 0. \tag{11'}$$

К этому уравнению мы придем, если станем решать указанным выше путем первую основную задачу при отсутствии внешних напряжений, т. е. при $f_1 = f_2 = 0$ на L. Так как при этом условие (17), очевидно, будет соблюдено, то для любого решения $\varphi_0'(\sigma)$ уравнения (11') будет соблюдено условие (13). Подобрав действительную часть постоянной k согласно формуле (12) и произвольно зафиксировав ее мнимую часть, мы сможем, исходя из $\varphi_0'(\sigma)$, построить указанным выше путем решение первой основной задачи при $f_1 = f_2 = 0$. Если функция $\varphi_0'(\sigma)$ не равна нулю всюду на γ, то построенное таким образом решение не будет соответствовать отсутствию напряжений. В самом деле, функция $\varphi(\zeta)$ в нашем случае определяется формулой: $\varphi(\zeta) = -k\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta)$, а при отсутствии напряжений мы должны иметь $\varphi(\zeta) = Ci\omega(\zeta) + \text{const}$, где C — действительная постоянная. Следовательно, при отсутствии напряжений должно быть: $\varphi_0(\zeta) = m\omega(\zeta) + \text{const}$, где m — некоторая постоянная. Подставляя это значение в уравнение (9), где в нашем случае $A(\zeta) = 0$, получаем, очевидно: $m\omega(\zeta) = \text{const}$, что возможно лишь в случае $m = 0$, т. е. $\varphi_0(\zeta) = \text{const}$, а следовательно, $\varphi_0'(\zeta) = 0$.

Следовательно, наличие ненулевого решения уравнения (11') влечет за собой наличие решения первой основной задачи, отвечающего напряженному состоянию при отсутствии внешних усилий, что невозможно по теореме единственности.

Таким образом, однородное уравнение, соответствующее уравнению (11), не имеет отличных от нуля решений, а потому уравнение (11) имеет одно и только одно решение.

Решив это уравнение и предполагая, что условие (17) выполнено, мы сможем, подобрав действительную часть k согласно условию (12), найти функцию $\varphi(\zeta)$ по формуле (8), а затем определить и функцию $\psi(\zeta)$ по формуле (8) предыдущего параграфа и таким образом решить исходную задачу. Мнимая часть k остается произвольной, что можно было предвидеть заранее, так как в выражении для $\varphi(\zeta)$ слагаемое вида $Ci\omega(\zeta)$, где C — действительная постоянная, не влияет на распределение напряжений.

Напомним, что условие (17) есть условие равенства нулю главного момента внешних напряжений. Условие равенства нулю главного вектора обеспечивается непрерывностью функций f_1 и f_2 на L; поэтому оно не появляется в явном виде.

Таким образом, мы доказали существование решения первой основной задачи и для конечной области.

Вместе с тем дан и (теоретический) метод решения задачи как для конечной, так и для бесконечной области.

3. Перейдем ко второй основной задаче. Она сводится, как мы видели, к решению уравнения (16) § 78, совершенно аналогичного уравнению, получаемому для первой основной задачи. Методы решения первой и второй задач настолько схожи, что не имеет смысла повторять рассуждения.

Некоторое различие появляется только в случае задачи для конечной области, а именно: вместо формулы (8) мы здесь должны взять

$$\varphi(\zeta)=\frac{k}{\varkappa}\,\omega(\zeta)+\varphi_0(\zeta), \tag{18}$$

а для определения k будем иметь уравнение

$$k-\frac{\bar{k}}{\varkappa}=\frac{\overline{\varphi_0'(0)}}{\omega'(0)}\,, \tag{19}$$

которое дает для k вполне определенное значение (вспомним, что $\varkappa>1$) без какого-либо добавочного условия существования решения.

Итак, существование решения второй основной задачи доказано и вместе с тем дан (теоретический) метод решения ее.

4. Методом, аналогичным предыдущему, может быть решена и основная смешанная задача. На этот раз указанный метод непосредственно приводит не к уравнению Фредгольма, а к так называемому сингулярному интегральному уравнению, которое легко в свою очередь привести к интегральному уравнению Фредгольма. Этим путем смешанная задача решена Д. И. Шерманом [10]. Решение может быть значительно упрощено, если воспользоваться разработанной впоследствии общей теорией сингулярных уравнений.

5. Д. И. Шерману [7] принадлежит также более углубленное исследование полученных выше интегральных уравнений для первой и второй основных задач. А именно, он вводит в эти интегральные уравнения некоторый параметр λ, как это делается в общей теории уравнений Фредгольма [1]), и доказывает, что все характеристические значения этого параметра действительны и расположены вне отрезка $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$.

Этот факт имеет практическое значение, так как показывает, что упомянутые интегральные уравнения могут быть решены методом последовательных приближений, иными словами, что ряды Неймана будут

[1]) Разумеется, здесь λ не имеет никакого отношения к постоянной Ламе, обозначаемой той же буквой.

сходящимися для тех значений параметра λ, которым эти уравнения соответствуют, а именно: интегральное уравнение для первой основной задачи соответствует значению $\lambda = 1$, а для второй основной задачи — значению $\lambda = -1/\varkappa$ (вспомним, что $\varkappa > 1$).

Кроме того, в упомянутой статье попутно получен ряд других результатов, представляющих самостоятельный интерес.

Относительно теорем существования для областей более общего вида, а также относительно некоторых других общих методов решения основных задач, будет сказано в последнем отделе этой главы.

§ 79а. О некоторых других применениях предыдущих интегральных уравнений. Интегральные уравнения, рассмотренные в предыдущем параграфе, могут быть применены и к некоторым другим важным задачам теории упругости. Мы имеем в виду (приближенную) теорию изгиба пластинки, загруженной усилиями, нормальными к ее плоскости. Мы уже говорили выше, что случай, когда пластинка заделана по краям, приводится к так называемой основной бигармонической задаче, т. е. к той же граничной задаче, что и первая основная задача плоской теории упругости.

Оказывается, что случай пластинки со свободными краями может быть приведен к той же граничной задаче, что вторая основная задача плоской теории упругости; только постоянная $\varkappa$ должна быть заменена некоторой другой постоянной, также большей единицы. Это было показано С. Г. Лехницким [3] и позднее, независимо от него, И. Н. Векуа [3].

II. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА КРУГ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Как уже было сказано, интегралы типа Коши дают возможность получить не только теоретическое, но и практическое решение основных задач для некоторых довольно обширных классов областей. Основным исходным пунктом являются при этом формулы (10) или (16) § 78 или аналогичные формулы, которые будут указаны ниже. Особенно простым является случай, когда отображающая функция $\omega(\zeta)$ рациональная; решение в этом случае получается совершенно элементарным путем, как будет показано ниже [1]. Но для большей наглядности мы начнем с непосредственного решения задач для некоторых простейших областей.

[1] В своих работах Д. М. Волков и А. А. Назаров [1, 2] указывают метод, дающий, по-видимому, возможность находить решение элементарным путем и в более широком классе случаев. Однако этот класс не охарактеризован авторами с достаточной точностью, так что нельзя заранее сказать, в каких случаях, кроме случаев, указанных мною в тексте, можно рассчитывать получить решение в элементарном виде. Именно с целью указать случаи, когда можно наверное получить элементарное решение, применяя вполне определенные приемы, я и ограничился в своих работах,

Большая часть излагаемых в этом отделе результатов содержится в работах автора [4, 5, 7, 8].

§ 80. Решение первой основной задачи для круга [1]. Эта задача уже была решена нами в § 54 при помощи рядов. Интегралы типа Коши приводят к цели быстрее и дают решение, более удобное для приложений.

Пусть радиус нашего круга S есть R; окружность круга обозначим через L. В нашем случае можем взять

$$z = \omega(\zeta) = R\zeta; \tag{1}$$

мы применяем здесь и в дальнейшем обозначения § 78. В частности, γ будет обозначать окружность $|\zeta| = 1$, а $\sigma = e^{i\vartheta}$ — точку на этой окружности.

Граничное условие в нашем случае запишется так:

$$\varphi(\sigma) + \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 = f, \tag{2}$$

или, если перейти к сопряженным значениям,

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \bar{\sigma}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = f_1 - if_2 = \bar{f}. \tag{3}$$

Считая для определенности, что $\psi(0) = 0$, и учитывая, что правая часть равенства

$$\psi(\sigma) = \bar{f} - \overline{\varphi(\sigma)} - \bar{\sigma}\varphi'(\sigma) \tag{3'}$$

должна быть граничным значением некоторой функции $\psi(\zeta)$, голоморфной внутри γ и обращающейся в нуль при $\zeta = 0$, получаем, применяя формулу (12) § 76:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0,$$

что приводит к функциональному уравнению

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{4}$$

Предыдущее уравнение есть не что иное, как функциональное уравнение (10) § 78 для случая, когда $\omega(\zeta) = R\zeta$; приведенный здесь вывод представляет собой повторение вывода § 78 применительно к этому частному случаю.

В рассматриваемом здесь случае функциональное уравнение решается весьма просто, без всякого перехода к интегральному уравнению, так как интегральный член в левой части вычисляется непосредственно в конечном виде.

посвященных элементарным методам, рассмотрением случая, когда $\omega(\zeta)$ — рациональная функция. Должен, кроме того, заметить, что я не согласен с Д. М. Волковым и А. А. Назаровым, что их метод приводит к более простым выкладкам (см. приводимый в § 87а пример).

[1]) Как было уже сказано (см. § 54), известно много решений этой задачи. Упомянем здесь только решения Г. В. Колосова [1, 2], Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили [1], а также опубликованное в 1931 г. решение Г. В. Колосова [5].

В самом деле, рассмотрим разложение функции $\varphi(\zeta)$, выписав только первые три его члена (больше нам не понадобится):

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots; \tag{5}$$

отсюда

$$\varphi'(\zeta) = a_1 + 2a_2\zeta + \ldots,$$

и, следовательно, на основании формулы (17) § 76 будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \bar{a}_1\zeta + 2\bar{a}_2.$$

Таким образом, из формулы (4) получаем:

$$\varphi(\zeta) + \bar{a}_1\zeta + 2\bar{a}_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{6}$$

Последнее соотношение и определяет функцию $\varphi(\zeta)$ с точностью до выражения $\bar{a}_1\zeta + 2a_2$. Остается определить не известные пока постоянные a_1, a_2. Для этого следует выразить условие, что постоянные a_1, a_2 представляют собой коэффициенты разложения (5) при ζ и ζ^2 соответственно [1]). Выразим эти условия. Для этого достаточно положить $\zeta = 0$ в уравнениях, полученных из соотношения (6) дифференцированием по ζ один и два раза, и принять во внимание, что по определению $a_1 = \varphi'(0)$, $2a_2 = \varphi''(0)$. Это дает соответственно [2]):

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\frac{d\sigma}{\sigma^2}, \tag{7}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\frac{d\sigma}{\sigma^3}. \tag{8}$$

Последняя формула определяет постоянную a_2.

Формула (7) дает, если положить $f = f_1 + if_2$, $\sigma = e^{i\vartheta}$:

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_1 + if_2)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta.$$

---

[1]) Если это условие не выполнено, то, очевидно, функция $\varphi(\zeta)$, определяемая формулой (6), не будет удовлетворять уравнению (4).

[2]) Соотношения (7), (8) можно получить и так (что, впрочем, сводится к тому же): подставить в формулу (6) разложение

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma\left(1-\frac{\zeta}{\sigma}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\left(1+\frac{\zeta}{\sigma}+\frac{\zeta^2}{\sigma^2}+\ldots\right)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma} + \frac{\zeta}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma^2} + \frac{\zeta^2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma^3} + \ldots$$

и сравнить коэффициенты при ζ и ζ^2.

Этому условию возможно удовлетворить лишь в случае, когда правая часть — действительная величина, т. е. когда

$$\int_0^{2\pi} (-f_1 \sin\vartheta + f_2 \cos\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{9}$$

Это условие разрешимости задачи выражает, как и следовало ожидать, условие равенства нулю главного момента внешних усилий [ср. § 54, формула (3)].

Если это условие удовлетворено, то действительная часть a_1 вполне определится формулой (7), а мнимая, как и следовало ожидать, останется произвольной; полагая для определенности эту мнимую часть равной нулю, на основании формулы (7) получаем:

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_\gamma \frac{f\, d\sigma}{\sigma^2}. \tag{10}$$

Окончательно имеем:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \bar{a}_1 \zeta - 2\bar{a}_2, \tag{11}$$

где a_1 и a_2 определяются формулами (10) и (8).

Найдя $\varphi(\zeta)$, можно сразу определить функцию $\psi(\zeta)$, ибо ее граничное значение $\psi(\sigma)$ дается формулой (3′). Определяя $\psi(\zeta)$ по формуле Коши и принимая во внимание, что [1])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = \overline{\varphi(0)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\bar{\sigma}\varphi'(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} - \frac{a_1}{\zeta},$$

получаем:

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\bar{f}\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} + \frac{a_1}{\zeta} - \overline{\varphi(0)}. \tag{12}$$

Легко видеть, что полученное решение будет наверное регулярным (в смысле § 42), если заданная на контуре функция f имеет производную, удовлетворяющую условию H.

Таким образом, задача решена. Заметим, что последние члены в правых частях формул (11) и (12) можно отбросить, ибо постоянные слагаемые в выражениях для $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ никакого влияния на напряжения не имеют. Мы вычислили эти постоянные слагаемые только с той целью, чтобы иметь также решение «основной бигармонической задачи», где постоянные слагаемые имеют значение.

[1]) Мы пользуемся формулой (18) § 76 и формулой (3) § 70.

Если отбросить упомянутые постоянные, то вместо формул (11) и (12) будем иметь более простые формулы:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\bar{a}_1\zeta, \tag{11'}$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta}+\frac{a_1}{\zeta}. \tag{12'}$$

В этом случае граничное значение выражения

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}$$

может отличаться от $f=f_1+if_2$ постоянным слагаемым. Если же взять формулы (11) и (12), то упомянутое граничное значение будет в точности равно f.

Полученное решение очень удобно для практики, как это станет ясным из приводимых в следующем параграфе примеров.

§ 80а. Примеры. 1. К р у г о в о й д и с к п о д д е й с т в и е м с о с р е д о т о ч е н н ы х с и л, п р и л о ж е н н ы х к к о н т у р у[1]. Пусть к обводу кругового диска приложены сосредоточенные силы

$$(X_1,\ Y_1),\ (X_2,\ Y_2),\ \ldots,\ (X_n,\ Y_n)$$

в точках

$$z_1=Re^{i\alpha_1},\quad z_2=Re^{i\alpha_2},\quad \ldots,\quad z_n=Re^{i\alpha_n}\quad (0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<2\pi).$$

Этим точкам на плоскости переменной ζ соответствуют точки

$$\sigma_1=e^{i\alpha_1},\ \ldots,\ \sigma_n=e^{i\alpha_n}.$$

При этих условиях выражение $f=f_1+if_2$ будет постоянным на каждой из дуг $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$, ..., $\sigma_n\sigma_1$ (ибо эти дуги свободны от внешних напряжений), но будет изменяться скачком [2], равным $i(X_k+iY_k)$ при переходе через точку σ_k (см. § 43).

Мы можем принять, например, что $f=0$ на дуге $\sigma_n\sigma_1$. Тогда на дугах $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$ и т. д. будем иметь соответственно: $f=i(X_1+iY_1)$, $f=i(X_1+iY_1)+i(X_2+iY_2)$ и т. д.

Для того чтобы f приняло прежнее значение 0 [3] при возвращении на дугу $\sigma_n\sigma_1$, мы должны, очевидно, иметь $X_1+X_2+\ldots+X_n=0$,

[1] Решение этой задачи было найдено еще Герцем (H. Hertz) в 1883 г. и изучено более подробно Мичеллом (Michell [2]) методами, совершенно отличными от приводимых в тексте (см. еще Love [1], § 155).

[2] При выводе формул предыдущего параграфа, которыми мы здесь будем пользоваться, мы предполагали, что заданная на контуре функция f_1+if_2 непрерывна (*и даже имеет производную, удовлетворяющую условию H*). Однако легко убедиться путем непосредственной проверки окончательного результата, что эти формулы приводят к решению и в рассматриваемом здесь случае.

[3] А это необходимо, ибо выражение $\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}$ должно быть однозначным внутри γ, так как мы имеем дело с односвязной областью.

$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0$, т. е. главный вектор приложенных сил должен, как и следовало ожидать, равняться нулю.

Имеем далее:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{n-1}}^{\sigma_n} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n}^{\sigma_1} =$$

$$= \frac{X_1+iY_1}{2\pi}\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta} + \frac{(X_1+iY_1)+(X_2+iY_2)}{2\pi}\ln\frac{\sigma_3-\zeta}{\sigma_2-\zeta} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(X_1+iY_1)+\ldots+(X_n+iY_n)}{2\pi}\ln\frac{\sigma_1-\zeta}{\sigma_n-\zeta}.$$

Последний член равен нулю, но мы написали его для симметрии.

После очевидных приведений получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{1}{2\pi}\{(X_1+iY_1)\ln(\sigma_1-\zeta) + (X_2+iY_2)\ln(\sigma_2-\zeta) + \ldots$$

$$\ldots + (X_n+iY_n)\ln(\sigma_n-\zeta)\}.$$

Совершенно аналогично получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi}\{(X_1-iY_1)\ln(\sigma_1-\zeta) + (X_2-iY_2)\ln(\sigma_2-\zeta) + \ldots$$

$$\ldots + (X_n-iY_n)\ln(\sigma_n-\zeta)\}.$$

Остается только определить постоянную a_1. Мы можем воспользоваться для этого формулой (10) § 80; еще проще поступить следующим образом. Так как по условию $a_1 = \bar a_1 = \varphi'(0)$, то по формуле (11) § 80, если подставить вместо интеграла в правой части найденное значение, продифференцировать по ζ и положить $\zeta = 0$, получим:

$$2a_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k+iY_k}{\sigma_k} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k+iY_k)\bar\sigma_k.$$

Для того чтобы это было возможно при действительном a_1, необходимо, чтобы правая часть была действительной величиной. А это, как легко видеть, сводится к условию $\Sigma\,(x_kY_k - y_kX_k) = 0$, где $x_k + iy_k = z_k = \sigma_kR$, т. е. к условию равенства нулю главного момента.

Если указанные выше условия (равенство нулю главного вектора и момента) соблюдены, то решение задачи на основании формул (11′) и (12′) § 80 имеет вид:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k+iY_k)\ln(\sigma_k-\zeta) - \frac{\zeta}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k+iY_k)\bar\sigma_k, \qquad (1)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(X_k-iY_k)\ln(\sigma_k-\zeta) - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k+iY_k)\bar\sigma_k}{\sigma_k-\zeta}. \qquad (2)$$

Легко установить, что функция напряжений U будет непрерывной вплоть до γ, так что мы будем действительно иметь данные сосредоточенные силы в указанных точках.

Пусть, например, на контур диска действуют две равные и противоположные силы $(p, 0)$ и $(-p, 0)$, параллельные оси Ox и приложенные в точках $z_1 = Re^{i\alpha}$ и $z_2 = Re^{i(\pi-\alpha)} = -Re^{-i\alpha}$ (рис. 35).

В этом случае, возвращаясь к старой переменной $z = R\zeta$, получим из формул (1), (2):

$$\varphi_1(z) = -\frac{p}{2\pi}\left\{\ln(z_1 - z) - \ln(z_2 - z) + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2R^2}z\right\},$$

$$\psi_1(z) = \frac{p}{2\pi}\left\{\ln(z_1 - z) - \ln(z_2 - z) - \frac{\bar{z}_1}{z_1 - z} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 - z}\right\},$$

$$\Phi_1(z) = \varphi_1'(z) = \frac{p}{2\pi}\left\{\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{2R^2}\right\},$$

$$\Psi_1(z) = \psi_1'(z) = -\frac{p}{2\pi}\left\{\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} - \frac{\bar{z}_1}{(z_1 - z)^2} - \frac{\bar{z}_2}{(z_2 - z)^2}\right\}.$$

Напряжения будут даны формулами:

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi_1(z), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)].$$

Подставляя сюда найденные значения Φ_1 и Ψ_1, замечая, что

$$z_1 = Re^{i\alpha}, \quad z_2 = -Re^{-i\alpha}$$

и что

$$z_1 - z = r_1 e^{-i\vartheta_1}, \quad z_2 - z = -r_2 e^{i\vartheta_2}$$

(обозначение см. на рис. 35; ϑ_1 и ϑ_2 положительны, когда точка z находится выше линии действия сил; отрицательны, когда она находится ниже), легко получаем:

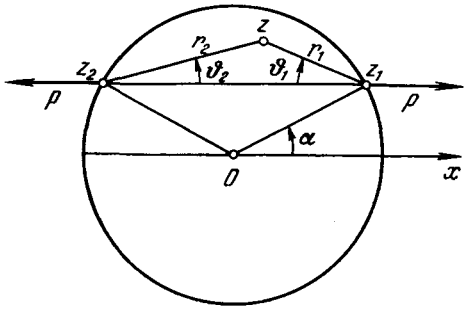


Рис. 35.

$$X_x + Y_y = \frac{2p}{\pi}\left\{\frac{\cos\vartheta_1}{r_1} + \frac{\cos\vartheta_2}{r_2} - \frac{\cos\alpha}{R}\right\},$$

$$X_x - Y_y = \frac{p}{\pi}\left\{\frac{\cos 3\vartheta_1 + \cos\vartheta_1}{r_1} + \frac{\cos 3\vartheta_2 + \cos\vartheta_2}{r_2}\right\},$$

$$2X_y = -\frac{p}{\pi}\left\{\frac{\sin 3\vartheta_1 + \sin\vartheta_1}{r_1} - \frac{\sin 3\vartheta_2 + \sin\vartheta_2}{r_2}\right\},$$

откуда после очевидных преобразований:

$$X_x = \frac{2p}{\pi}\left\{\frac{\cos^3\vartheta_1}{r_1} + \frac{\cos^3\vartheta_2}{r_2}\right\} - \frac{p}{\pi R}\cos\alpha,$$

$$Y_y = \frac{2p}{\pi}\left\{\frac{\sin^2\vartheta_1\cos\vartheta_1}{r_1} + \frac{\sin^2\vartheta_2\cos\vartheta_2}{r_2}\right\} - \frac{p}{\pi R}\cos\alpha,$$

$$X_y = -\frac{2p}{\pi}\left\{\frac{\sin\vartheta_1\cos^2\vartheta_1}{r_1} - \frac{\sin\vartheta_2\cos^2\vartheta_2}{r_2}\right\}.$$

Так же легко получить выражения для смещений, а именно: на основании формулы

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$$

будем иметь:

$$2\mu(u+iv)=\frac{p}{2\pi}\left\{\varkappa\ln\frac{z_2-z}{z_1-z}+\ln\frac{\bar z_2-\bar z}{\bar z_1-\bar z}+\frac{z_1-z}{z_1-\bar z}-\frac{z_2-z}{\bar z_2-\bar z}-\frac{(\varkappa-1)\cos\alpha}{R}z\right\}.$$

Для входящих в эту формулу многозначных логарифмических функций следует взять одну какую-либо ветвь. Если взять другие ветви, то получатся смещения, отличающиеся от первых только жестким перемещением всего тела.

Отделяя действительные и мнимые части и подставляя, вместо $\varkappa$, значение $\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$, получаем:

$$u=\frac{p}{4\mu\pi}\left\{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\ln\frac{r_2}{r_1}+\cos 2\vartheta_1-\cos 2\vartheta_2-\frac{2\mu\cos\alpha}{\lambda+\mu}\frac{x}{R}\right\},$$

$$v=\frac{p}{4\mu\pi}\left\{\frac{2\mu}{\lambda+\mu}(\vartheta_1+\vartheta_2)-\sin 2\vartheta_1-\sin 2\vartheta_2-\frac{2\mu\cos\alpha}{\lambda+\mu}\frac{y}{R}\right\}.$$

В этих формулах $x+iy=z$. В последней формуле вместо y можно написать $y-l$, где l — расстояние центра до линии действия сил (это сводится к присоединению жесткого поступательного перемещения). В этом случае все точки, находящиеся на линии действия сил, останутся на ней и после деформации.

Если мы имеем дело не с плоской деформацией, а с тонким диском (§ 26), то вместо λ надо взять λ^*, а под p подразумевать величину $\frac{F}{2h}$, где F — сосредоточенная сила, а $2h$ — толщина диска (действительно, во всем предыдущем p означает силу, действующую не на точку, а на прямую, перпендикулярную к плоскости Oxy и рассчитанную на единицу длины этой прямой).

Можно привести еще большое число примеров подобного рода, представляющих интерес для технических приложений. В частности, можно очень просто получить решение для всех случаев, рассмотренных иным, искусственным, путем Мичеллом (Michell [2]) [1]).

2. Диск под влиянием сосредоточенных сил и пар, приложенных к внутренним точкам. В указанном случае решение получается также с чрезвычайной простотой из общих формул предыдущего параграфа. Для этого достаточно снабдить искомые функции φ, ψ определенными особенностями в точках приложения сосредоточенных сил и пар, как это указано в § 57. Предоставляя читателю найти общее решение, мы ограничимся для краткости примером двух прямо противоположных сил, одна из которых приложена

[1]) См. Колосов и Мусхелишвили [1].

в центре, а другая — в произвольной точке диска. Не нарушая общности, мы можем считать, что вторая сила приложена к одной из точек оси Ox (и направлена по ней). Таким образом, мы имеем две сосредоточенные силы: $(-p, 0)$, приложенную к точке O, и $(+p, 0)$, приложенную к точке z_0, где z_0 — действительная величина.

В рассматриваемом случае функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут иметь следующий вид (см. § 57):

$$\varphi_1(z) = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z - \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln(z-z_0) + \varphi_1^0(z),$$
$$\psi_1(z) = -\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln z + \frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln(z-z_0) + \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{z_0}{z-z_0} + \psi_1^0(z), \quad (3)$$

или, переходя к новой переменной $\zeta = \frac{z}{R}$:

$$\varphi(\zeta) = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \{\ln \zeta - \ln(\zeta-\zeta_0)\} + \varphi_0(\zeta),$$
$$\psi(\zeta) = -\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)} \{\ln \zeta - \ln(\zeta-\zeta_0)\} + \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{\zeta_0}{\zeta-\zeta_0} + \psi_0(\zeta), \quad (4)$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ обозначают функции, голоморфные внутри γ, а $\zeta_0 = z_0/R$.

Граничное условие (края диска мы предполагаем свободными) напишем так:

$$\varphi(\sigma) + \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0,$$

или, подставляя значения (4),

$$\varphi_0(\sigma) + \sigma\overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_0, \quad (5)$$

где

$$f_0 = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln \frac{\sigma-\zeta_0}{\sigma} - \frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln(1-\zeta_0\sigma) + \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{\frac{\sigma-\zeta_0}{1-\sigma\zeta_0}\sigma - \sigma^2\right\}, \quad (6)$$

а значит,

$$\overline{f_0} = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln(1-\sigma\zeta_0) - \frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)} \ln \frac{\sigma-\zeta_0}{\sigma} + \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{\frac{1}{\sigma}\frac{1-\sigma\zeta_0}{\sigma-\zeta_0} - \frac{1}{\sigma^2}\right\}. \quad (6')$$

Функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ мы найдем по формулам (11′) и (12′) § 80, где вместо φ, ψ, f надо взять φ_0, ψ_0, f_0.

Вычисление входящих в эти формулы интегралов не представляет ни малейшего труда. Именно, замечая, что функция $\ln \frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta}$ голоморфна вне γ и обращается в 0 при $\zeta = \infty$, а функция $\ln(1-\zeta_0\zeta)$ голоморфна внутри γ[1]), будем иметь на основании формул § 70 и на основании

[1]) Выбор ветвей многозначных функций $\ln \frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta} = \ln\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)$ и $\ln(1-\zeta\zeta_0)$ зависит от нас; однако эти ветви надо выбирать так, чтобы на γ они представляли собой сопряженные друг с другом величины. Для первой функции мы выбираем ветвь, голоморфную вне γ и равную нулю при $\zeta = \infty$, для второй — ветвь, голоморфную внутри γ и равную нулю при $\zeta = 0$.

формулы Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln\frac{\sigma-\zeta_0}{\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln(1-\zeta_0\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\ln(1-\zeta_0\zeta).$$

Далее, на основании тех же формул:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left\{\frac{\sigma-\zeta_0}{1-\sigma\zeta_0}\sigma-\sigma^2\right\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta_0\zeta}\zeta-\zeta^2,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{1-\sigma\zeta_0}{\sigma-\zeta_0}-\frac{1}{\sigma^2}\right\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0.$$

Значит, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta)+\frac{p\zeta}{2\pi(1+\varkappa)}\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta_0\zeta}-\zeta\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar f_0\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta).$$

Чтобы вычислить a_1, заметим, что $2a_1$ равно значению производной при $\zeta=0$ от предпоследнего выражения (см. предыдущий параграф). Элементарное вычисление дает:

$$a_1=\frac{(\varkappa-1)\,p\zeta_0}{4\pi(1+\varkappa)}.$$

Таким образом, на основании формул (11′) и (12′) § 80 получим после элементарных преобразований:

$$\varphi_0(\zeta)=-\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta)+\frac{p\zeta}{2\pi(1+\varkappa)}\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta_0\zeta}-\zeta\right\}-\frac{(\varkappa-1)\,p\zeta_0\zeta}{4\pi(1+\varkappa)},$$

$$\psi_0(\zeta)=\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta)-\frac{p}{2\pi}\frac{(\varkappa-1)\,\zeta_0^2+1}{(1+\varkappa)(1-\zeta_0\zeta)}-\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1-\zeta_0^2}{(1-\zeta_0\zeta)^2}.$$

В последнем выражении отброшено постоянное слагаемое. Наконец, для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на основании формул (4) будем иметь выражения:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\frac{\zeta}{\zeta-\zeta_0}-\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta)+\\&\quad+\frac{p\zeta}{2\pi(1+\varkappa)}\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta_0\zeta}-\zeta\right\}-\frac{(\varkappa-1)\,p\zeta_0\zeta}{4\pi(1+\varkappa)},\\\psi(\zeta)&=-\frac{\varkappa p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\frac{\zeta}{\zeta-\zeta_0}+\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}+\\&\quad+\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\ln(1-\zeta_0\zeta)-\frac{p}{2\varkappa(1+\varkappa)}\frac{(\varkappa-1)\,\zeta_0^2+1}{1-\zeta_0\zeta}-\\&\quad-\frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1-\zeta_0^2}{(1-\zeta_0\zeta)^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Таким образом, задача решена. Если мы имеем в виду тонкую пластинку, то вместо $\varkappa$ надо взять $\varkappa^*$.

Так же просто решается задача для системы произвольно расположенных сил (разумеется, статически эквивалентной нулю).

3. Вращающийся диск с прикрепленными сосредоточенными массами. Пусть упругий тонкий диск

вращается с угловой скоростью Ω вокруг своего центра и пусть к нему прикреплены (в произвольных точках) сосредоточенные массы в любом количестве. Достаточно найти решение для случая, когда имеется одна масса m, ибо решение для общего случая получится наложением нескольких таких решений.

Действие сосредоточенной массы сводится, очевидно, к действию сосредоточенной центробежной силы, направленной радиально и равной по величине $F = ml\Omega^2$, где l — расстояние точки прикрепления груза до оси вращения; ось вращения будет оказывать реакцию, равную и противоположную этой силе и приложенную в центре. Таким образом, решение нашей задачи получим, наложив на решение задачи о вращении диска без прикрепленной массы (конец § 59а) решение задачи, рассмотренной в предыдущем примере. В нашем случае $p = \frac{F}{2h} = \frac{ml\Omega^2}{2h}$, где $2h$ — толщина диска (ибо p рассчитывается на единицу высоты).

Так же просто может быть решена задача о вращении кругового диска вокруг эксцентрической оси.

§ 81. Решение второй основной задачи для круга. В этом случае при обозначениях предыдущих параграфов граничное условие примет вид

$$\varkappa\varphi(\sigma) - \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu g, \tag{1}$$

или, что все равно,

$$\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \bar{\sigma}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu(g_1 - ig_2) = 2\mu\bar{g}, \tag{2}$$

где g_1, g_2 — заданные компоненты смещения точек границы.

Ввиду полной аналогии с задачей § 80 мы ограничимся тем, что приведем окончательное решение:

$$\varkappa\varphi(\zeta) = \frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \bar{a}_1\zeta + 2\bar{a}_2, \tag{3}$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta) + \frac{a_1}{\zeta} + \varkappa\bar{a}_0, \tag{4}$$

где

$$\varkappa\bar{a}_0 = \varkappa\overline{\varphi(0)} = \frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma} + \frac{2\mu}{\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma^3}, \tag{5}$$

$$(\varkappa^2 - 1)a_1 = \frac{\mu\varkappa}{\pi i}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \bar{g}\,d\sigma, \tag{6}$$

$$a_2 = \frac{\mu}{\pi i\varkappa}\int_\gamma \bar{g}\sigma\,d\sigma. \tag{7}$$

Полученное решение будет наверное регулярным, если заданная на контуре функция g имеет производную, удовлетворяющую условию H.

§ 82. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием [1]. В этом случае мы воспользуемся отображением рассматриваемой области S на область $|\zeta| > 1$, т. е. на бесконечную плоскость с круговым отверстием [2].

Отображение дается формулой (§ 48, п. 5)

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad (R > 0, \quad 0 \leqslant m < 1). \tag{1}$$

Окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс L с центром в начале координат и полуосями

$$a = R(1+m), \quad b = R(1-m).$$

Подобрав подходящим образом R и m, мы можем получить эллипс любого размера и формы. Если $m = 0$, то эллипс обращается в окружность. В предельном случае $m = 1$ эллипс обращается в отрезок оси Ox длины $4R$, заключенный между точками $x = \pm 2R$, и область S обращается в бесконечную плоскость с прямолинейной щелью [3].

В нашем случае будем иметь:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}, \qquad \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} = \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m},$$

и граничное условие примет вид

$$\varphi(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2-m}{1-m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f, \tag{2}$$

или, переходя к сопряженным значениям,

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{f}. \tag{3}$$

Будем сначала считать, что [4]

$$X = Y = 0, \quad \Gamma = \Gamma' = 0,$$

т. е. что главный вектор внешних напряжений, приложенных к контуру, равен нулю и что напряжения обращаются в нуль на бесконечности, так же как и вращение. Тогда функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будут голоморфны вне γ, включая бесконечно удаленную точку. Кроме того, мы можем и будем считать

$$\varphi(\infty) = 0.$$

Выражая, что функция $\psi(\sigma)$ точки окружности γ должна представлять собой граничное значение некоторой функции $\psi(\zeta)$, голоморфной

[1]) Решение дано автором [4].

[2]) Можно также воспользоваться отображением на круг, как это сделано в прежних работах автора.

[3]) Этот случай представляет особый интерес для приложений (в теории трещин, см. гл. VIII, отдел VI).

[4]) Обозначения те же, что в § 50; см. формулы (14) и (15).

вне γ, получаем, применяя формулу (13) § 76:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0,$$

где ζ — произвольная точка *вне* γ. Замечая, что на основании формулы (1′) § 70, т. е. формулы Коши для бесконечной области,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\varphi(\zeta)+\varphi(\infty)=-\varphi(\zeta),$$

получаем:

$$-\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\,. \tag{a}$$

Это уравнение, соответствующее функциональному уравнению (10) § 78 для общего случая, решается в нашем случае сразу, ибо выражение

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)}$$

представляет собой граничное значение функции

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta^2+m}{1-m\zeta^2}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

голоморфной внутри γ [1]), вследствие чего интеграл в левой части (а) обращается в нуль.

Таким образом, получаем весьма простую формулу:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\,, \tag{4}$$

определяющую $\varphi(\zeta)$. После этого становится известным по формуле (3) граничное значение $\psi(\sigma)$ функции $\psi(\zeta)$, и поэтому функция $\psi(\zeta)$ определится формулой Коши [§ 70, формула (1′)]:

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\psi(\infty);$$

---

[1]) Так как функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна вне γ и $\varphi(\infty)=0$, то

$$\varphi(\zeta)=\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\ldots \text{ при } |\zeta|>1.$$

Следовательно,

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{a_1}{\zeta^2}-\frac{2a_2}{\zeta^3}-\ldots \text{ при } |\zeta|>1,$$

и, значит,

$$\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\bar{a}_1\zeta^2-2\bar{a}_2\zeta^3-\ldots \text{ при } |\zeta|<1.$$

внося сюда значение $\psi(\sigma)$ из формулы (3) и замечая, что, как легко видеть [1]),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta),$$

получаем окончательно, отбрасывая постоянную $\psi(\infty)$, не влияющую на распределение напряжений [2]):

$$\psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta). \tag{5}$$

Легко видеть, что полученные формулы дают регулярное решение задачи, если f имеет производную, удовлетворяющую условию H.

Рассмотрим теперь общий случай и поступим согласно общему правилу § 78. На основании формул (14) и (15) § 50

$$\varphi(\zeta)=\Gamma R\zeta-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+\varphi_0(\zeta), \tag{6}$$

$$\psi(\zeta)=\Gamma' R\zeta+\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta+\psi_0(\zeta), \tag{7}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta|>1$, причем можно считать

$$\varphi_0(\infty)=0;$$

кроме того, как всегда при решении первой основной задачи, мы будем считать, что вращение на бесконечности отсутствует, т. е. что $\Gamma=\overline{\Gamma}$.

Подставляя эти выражения в формулу (2), увидим, что $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют точно такому же граничному условию (2), с той только разницей, что вместо f надо взять выражение f_0, причем

$$f_0=f-\Gamma R\left(\sigma+\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\right)-\frac{\overline{\Gamma}'R}{\sigma}+\frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma+\frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}. \tag{8}$$

---

[1]) Достаточно заметить, что $\overline{\varphi(\sigma)}$ есть граничное значение функции $\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, голоморфной внутри γ, а

$$\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma)$$

— граничное значение функции, голоморфной вне γ и исчезающей на бесконечности (см. предыдущее примечание.)

[2]) Постоянную $\psi(\infty)$ можно определить по формуле (15) § 76, а именно:

$$\psi(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}.$$

Если на место $\psi(\sigma)$ подставить выражение, даваемое формулой (3), и принять во внимание, что, как легко видеть,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\varphi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma}=0,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma)\,d\sigma=0,$$

получим:

$$\psi(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\bar f\,\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Напомним, что выражение f_0 однозначно на γ, ибо приращение f при обходе по γ будет компенсироваться приращением логарифмического члена.

Функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ найдутся по формулам, указанным выше:

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_0\, d\sigma}{\sigma-\zeta}, \tag{4'}$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{f}_0\, d\sigma}{\sigma-\zeta} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta). \tag{5'}$$

Таким образом, задача решена полностью.

§ 82а. Примеры. 1. Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием. Пусть контур отверстия свободен от внешних напряжений и пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение величины p в направлении, составляющем угол α с осью Ox. В этом случае $X = Y = 0$ и, как показывают формулы (10) § 36 (в них надо положить $N_1 = p$, $N_2 = 0$),

$$\Gamma = \bar{\Gamma} = \frac{p}{4}, \quad \Gamma' = -\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}. \tag{1}$$

В нашем случае $f = 0$. Поэтому формула (8) § 82 дает:

$$f_0 = -\frac{pR}{4}\left(\sigma + \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\right) + \frac{pRe^{2i\alpha}}{2\sigma},$$

$$\bar{f}_0 = -\frac{pR}{4}\left(\frac{1}{\sigma} + \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\right) + \frac{pRe^{-2i\alpha}}{2}\sigma.$$

Функция $\frac{\zeta^2+m}{\zeta(1-m\zeta^2)}$ голоморфна внутри γ, за исключением точки $\zeta = 0$, где она имеет полюс с главной частью $\frac{m}{\zeta}$; функция $\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}$ голоморфна вне γ, кроме точки $\zeta = \infty$, где она имеет вид $m\zeta + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Поэтому на основании формул § 70 будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{m}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} + m\zeta = -\frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}.$$

Далее, очевидно:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\, d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{\zeta}$$

Таким образом, формулы (4') и (5') § 82 дадут:

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{mpR}{4\zeta} + \frac{pRe^{2i\alpha}}{2\zeta} = \frac{pR(2e^{2i\alpha}-m)}{4\zeta},$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{pR}{4\zeta} - \frac{pR(1+m^2)\zeta}{4(\zeta^2-m)} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta),$$

и, наконец, на основании формул (6), (7) § 82:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{pR}{4}\left(\zeta + \frac{2e^{2i\alpha} - m}{\zeta}\right), \\ \psi(\zeta) &= -\frac{pR}{2}\left\{e^{-2i\alpha}\zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{m\zeta} - \frac{(1+m^2)(e^{2i\alpha}-m)}{m}\frac{\zeta}{\zeta^2-m}\right\}; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

наша задача решена [1]).

Вычисление компонент напряжения и смещения не представляет никакого труда. Мы ограничимся только вычислением суммы

$$\widehat{\varrho\varrho} + \widehat{\vartheta\vartheta} = 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta),$$

где на основании предыдущей формулы

$$4\Phi(\zeta) = \frac{4\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = p\frac{\zeta^2+m-2e^{2i\alpha}}{\zeta^2-m} = p\frac{(\varrho^2e^{2i\vartheta}+m-2e^{2i\alpha})(\varrho^2e^{-2i\vartheta}-m)}{(\varrho^2e^{2i\vartheta}-m)(\varrho^2e^{-2i\vartheta}-m)}.$$

Знаменатель последней дроби — действительная величина, равная

$$\varrho^4 - 2m\varrho^2\cos 2\vartheta + m^2.$$

Отделяя действительную часть в числителе, получаем:

$$\widehat{\varrho\varrho} + \widehat{\vartheta\vartheta} = p\frac{\varrho^4 - 2\varrho^2\cos 2(\vartheta-\alpha) - m^2 + 2m\cos 2\alpha}{\varrho^4 - 2m\varrho^2\cos 2\vartheta + m^2}.$$

На границе отверстия $\varrho = 1$ и $\widehat{\varrho\varrho} = 0$. Поэтому значения $\widehat{\vartheta\vartheta}$ вдоль края отверстия будут даны формулой

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = p\frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\alpha - 2\cos 2(\vartheta-\alpha)}{1 - 2m\cos 2\vartheta + m^2};$$

эта формула, если не считать обозначений, совпадает с формулой, данной Пёшлем (Pöschl [1]) [2]).

В случае всестороннего растяжения, когда на бесконечности

$$N_1 = N_2 = p, \quad \Gamma = \frac{p}{2}, \quad \Gamma' = 0,$$

получим либо непосредственно, либо налагая два предыдущих решения для $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{2}\left(\zeta - \frac{m}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = -\frac{pR(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}.$$

---

[1]) Решение этой задачи было дано Инглизом (Inglis [1]) совершенно иным путем и в 1921 г. вновь найдено Пёшлем (Pöschl [1]). Мы видим, что это решение содержится как весьма частный случай в общем решении первой основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, которое было опубликовано мною еще в 1919 г. [4]; см. также [7]. Частный случай этой задачи (растяжение в направлении большой оси отверстия) решен еще в 1909 г. Г. В. Колосовым [1].

Сравнительно недавно Л. Фёппль (L. Föppl, [1]) опубликовал решение (очень сложное) для упомянутого частного случая, которое он рассматривает как иллюстрацию к предлагаемому им методу решения задач при помощи конформного отображения. В чем состоит общий метод автора (изложенный в той же статье), весьма трудно понять (по крайней мере мне это не удалось).

[2]) В формуле, приведенной Пёшлем в указанном месте, имеется опечатка.

2. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному давлению. В этом случае

$$X_n = -P\cos(n, x), \qquad Y_n = -P\cos(n, y),$$

где P — величина давления; следовательно,

$$(X_n + iY_n)\,ds = -P\,(dy - idx) = Pidz.$$

Поэтому

$$f = i\int (X_n + iY_n)\,ds = -Pz = -PR\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right),$$

$$\overline{f} = -PR\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right).$$

Подставляя эти значения в формулы (4), (5) § 82 (мы считаем, что напряжения на бесконечности равны нулю), получаем почти без всяких вычислений:

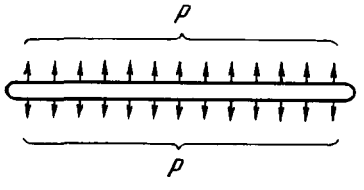


Рис. 36.

$$\varphi(\zeta) = -\frac{PRm}{\zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{PR}{\zeta} - \frac{PRm}{\zeta}\,\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m},$$

и задача решена.

При вычислении смещений и напряжений мы ограничимся предельным случаем $m = 1$ (т. е. случаем прямолинейной щели; см. рис. 36); вычисление в общем случае также не представляет ни малейших затруднений.

Элементарные выкладки, основанные на формулах (7), (9) и (10) § 50, дают:

$$\widehat{\rho\rho} = -P + \frac{P(\rho^2 - 1)^3(\rho^2 + 1)}{(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1)^2},$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta} = -P + \frac{P(\rho^4 - 1)(1 + 2\rho^2 + \rho^4 - 4\rho^2\cos 2\vartheta)}{(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1)^2}, \qquad \widehat{\rho\vartheta} = \frac{2P\rho^2(\rho^2 - 1)^2\sin 2\vartheta}{(\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1)^2};$$

$$v_\rho = -\frac{PR}{2\mu\rho}\,\frac{(1 + \varkappa)\rho^2\cos 2\vartheta + 1 - \varkappa - 2\rho^2}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1}}, \qquad v_\vartheta = -\frac{PR\rho}{2\mu}\,\frac{(1 - \varkappa)\sin 2\vartheta}{\sqrt{\rho^4 - 2\rho^2\cos 2\vartheta + 1}}.$$

Пользуясь этим примером, отметим некоторые свойства распределения напряжений и смещений вблизи концов щели, характерные и для более общих случаев [1]).

Мы видим прежде всего, что напряжения вблизи концов щели перестают быть ограниченными. Вычислим, например, компоненты X_x, Y_y, X_y напряжения вблизи конца $x = 2R$ щели, в точках оси Ox, расположенных справа от этого конца. Для этих точек $\vartheta = 0$, $\rho > 1$, $X_x = \widehat{\rho\rho}$, $Y_y = \widehat{\vartheta\vartheta}$, $X_y = \widehat{\rho\vartheta}$ и предыдущие формулы дают:

$$X_x = Y_y = -P + P\,\frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1}, \qquad X_y = 0.$$

[1]) См. гл. VIII, отдел VI.

Обозначая через s расстояние рассматриваемой точки до конца $x = 2R$, легко получаем, что при $s \to 0$ $X_x = Y_y = \frac{P\sqrt{R}}{\sqrt{s}} +$ ограниченная величина.

То же самое будет иметь место для точек оси Ox, расположенных слева от другого конца $x = -2R$.

Легко, далее, подсчитать, что смещения остаются ограниченными вблизи концов.

3. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному касательному напряжению T. В этом случае

$$(X_n + iY_n)\,ds = T\,dz,$$

$$f = iTz = iTR\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right), \quad \overline{f} = -iTR\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right).$$

Как в предыдущем примере, получаем (считая, что на бесконечности напряжения равны нулю):

$$\varphi(\zeta) = \frac{TRmi}{\zeta}, \quad \varphi(\zeta) = -\frac{TRi}{\zeta} + \frac{TRmi}{\zeta}\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}.$$

4. Эллиптическое отверстие, часть края которого подвержена равномерному давлению. Рассмотрим теперь случай, когда равномерному давлению P подвержена

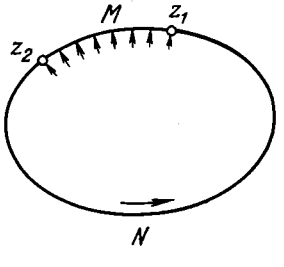


Рис. 37а.

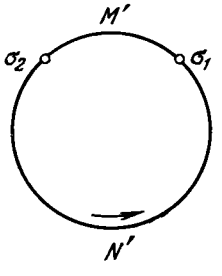


Рис. 37б.

только часть границы $z_1 M z_2$ (рис. 37а), а напряжения на бесконечности по-прежнему равны нулю.

В этом случае (ср. пример 2) можно взять (начав обход из точки z_1):

$$f = -Pz = -PR\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) \text{ на дуге } z_1 M z_2;$$

$$f = -Pz_2, \text{ на дуге } z_2 N z_1.$$

Если описать весь контур (*против часовой стрелки*) и вернуться в точку z_1, выражение f получит приращение, равное

$$-P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2).$$

По формуле (8) § 82 имеем:

$$f_0 = f + \frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma + \frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2} =$$

$$= f - \frac{P(z_1-z_2)}{2\pi i}\ln\sigma + \frac{P(\bar{z}_1-\bar{z}_2)}{2\pi i(\varkappa+1)}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2},$$

ибо $X + iY = iP(z_1 - z_2)$ [см., например, формулу (7) § 78; не забудем, что в упомянутой формуле за направление обхода контура принимается то, которое оставляет область, занятую телом, слева, т. е. в нашем случае — направление вращения часовой стрелки].

Значение многозначной функции $\ln\sigma$ должно быть зафиксировано произвольным образом в какой-нибудь точке (например, в точке $\sigma_1 = e^{i\vartheta_1}$, соответствующей точке z_1). При перемещении по γ мы должны изменять $\ln\sigma$ непрерывным образом, так что при полном обходе (против часовой стрелки) всей окружности $\ln\sigma$ приобретет приращение $2\pi i$ и выражение f_0 вернется к прежнему значению; оно будет, следовательно, однозначным и непрерывным на всем контуре [1]).

Теперь остается вычислить функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ по формулам (4′), (5′) § 82. Имеем, обозначая через σ_2 точку на γ, соответствующую точке z_2 (рис. 37б):

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_0\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{PR}{2\pi i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{Pz_2}{2\pi i}\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} +$$

$$+\frac{P(z_1-z_2)}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}d\sigma - \frac{P(\bar{z}_1-\bar{z}_2)}{2\pi i(1+\varkappa)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}.$$

Но

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \sigma_2-\sigma_1-\frac{m}{\zeta}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta},$$

причем под $\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ следует подразумевать величину $i\Theta$, где Θ — угловое расстояние между точками σ_1, σ_2, отсчитываемое от σ_1 против часовой стрелки; далее:

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \ln\frac{\sigma_1-\zeta}{\sigma_2-\zeta}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0\ ^{2}).$$

Остается вычислить интеграл

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}d\sigma.$$

---

[1]) Если бы выражение f_0 имело разрывы, то это давало бы сосредоточенные силы в местах разрыва, а сосредоточенные силы по предположению отсутствуют. Заметим, что производная f_0' разрывна в точках, соответствующих точкам z_1 и z_2, но, как легко непосредственно проверить, наши формулы дают решение задачи.

[2]) Так как подынтегральная функция голоморфна внутри γ.

Проще всего поступить так. Имеем:

$$\frac{dI}{d\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\ln\sigma}{(\sigma-\zeta)^2}\,d\sigma=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln\sigma\, d\frac{1}{\sigma-\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}\right]_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=\sigma_1}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}.$$

Но по формуле Коши для бесконечной области

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta}$$

и

$$\left[\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}\right]_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma=\sigma_1}=\frac{2\pi i}{\sigma_1-\zeta},$$

ибо $\ln\sigma$ при обходе γ увеличивается на $2\pi i$. Значит,

$$\frac{dI}{d\zeta}=-\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\sigma_1-\zeta};$$

следовательно

$$I(\zeta)=\ln(\sigma_1-\zeta)-\ln\zeta+\text{const}.$$

Таким образом, отбрасывая некоторые постоянные слагаемые, будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{mR}{\zeta}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+\left[R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)-z_2\right]\ln(\sigma_2-\zeta)-\right.$$
$$\left.-\left[R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)-z_1\right]\ln(\sigma_1-\zeta)-(z_1-z_2)\ln\zeta\right\},$$

где

$$z_1=R\left(\sigma_1+\frac{m}{\sigma_1}\right),\qquad z_2=R\left(\sigma_2+\frac{m}{\sigma_2}\right).$$

Совершенно таким же образом вычисляется $\psi_0(\zeta)$; после некоторых элементарных выкладок получаем окончательно:

$$\varphi(\zeta)=\frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{mR}{\zeta}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+\left[R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)-z_2\right]\ln(\sigma_2-\zeta)-\right.$$
$$\left.-\left[R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)-z_1\right]\ln(\sigma_1-\zeta)-\frac{\varkappa(z_1-z_2)}{\varkappa+1}\ln\zeta\right\},$$

$$\psi(\zeta)=\frac{P}{2\pi i}\left\{-\frac{R(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+R(\sigma_1-\sigma_2)\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}-\bar{z}_2\ln(\sigma_2-\zeta)+\right.$$
$$\left.+\bar{z}_1\ln(\sigma_1-\zeta)-\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{\varkappa+1}\ln\zeta-\frac{z_1-z_2}{\varkappa+1}\frac{1+m^2}{\zeta^2-m}\right\}.$$

Если загружен весь контур, то

$$z_1=z_2,\quad \sigma_1=\sigma_2,\quad \ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=2\pi i,$$

и мы получим простые формулы, выведенные выше непосредственно для этого случая (см. пример 2).

Если, наоборот, уменьшать беспредельно дугу z_1Mz_2 и вместе с тем увеличивать P так, чтобы $\lim P\,|\,z_2-z_1|=F$ был конечным числом,

получим в пределе случай сосредоточенной нормальной силы, приложенной к точке края отверстия.

Так же очень легко найти непосредственно решение для случая любого числа произвольных сосредоточенных сил, приложенных к точкам контура или к внутренним точкам тела (ср. аналогичное решение для кругового диска).

5. Приближенное решение задачи об изгибе полосы (балки) с эллиптическим отверстием. Функции напряжений

$$U = -\frac{1}{6} Ay^3$$

соответствует следующее напряженное состояние:

$$X_x = -Ay, \quad Y_y = X_y = 0. \tag{3}$$

Если из тела вырезать полосу, ограниченную прямыми $y = \pm a$, то края этой полосы будут свободны от внешних напряжений. На любое поперечное сечение полосы, параллельное оси Oy, будут действовать справа нормальные усилия $X_x = -Ay$. Эти усилия статически эквивалентны паре, момент которой

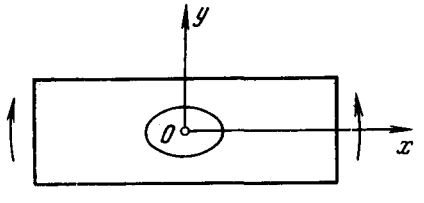


Рис. 38.

$$M = \int_{-a}^{+a} Ay^2\, dy = \frac{2}{3} Aa^3; \tag{4}$$

усилия рассчитываются на единицу толщины пластинки (в направлении, перпендикулярном к плоскости Oxy). Таким образом, наша функция решает задачу об изгибе сплошной полосы (балки) парами сил, приложенными на концах (рис. 38). Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, соответствующие функции U, будут, как легко проверить, иметь вид:

$$\varphi_1(z) = \frac{Aiz^2}{8}, \quad \psi_1(z) = -\frac{Aiz^2}{8}. \tag{5}$$

Предположим теперь, что в полосе вырезано эллиптическое отверстие с центром в начале координат.

Мы решим задачу об изгибе такой балки приближенно, заботясь только о том, чтобы края отверстия были свободны от внешних напряжений и чтобы на больших расстояниях от отверстия напряженное состояние стремилось к состоянию (3); таким образом, мы предполагаем, что размеры отверстия малы по сравнению с шириной балки [1]), и будем решать

[1]) Об этом будет еще сказано в конце настоящего параграфа.

задачу так, как если бы эллиптическое отверстие находилось в неограниченной пластинке. При этом допущении мы должны будем иметь:

$$\varphi_1(z) = \varphi_1^0(z) + \frac{Aiz^2}{8}, \qquad \psi_1(z) = \psi_1^0(z) - \frac{Aiz^2}{8}, \tag{6}$$

где φ_1^0, ψ_1^0 — функции, голоморфные вне эллипса, включая бесконечно удаленную точку.

Будем считать для простоты, что большая ось эллипса направлена по оси балки. Решение в общем случае будет только немногим сложнее [1]).

Вводя переменную ζ, будем иметь при очевидных обозначениях:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \frac{Ai}{8} R^2 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2, \qquad \psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) - \frac{Ai}{8} R^2 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2. \tag{7}$$

Внося эти значения в граничное условие (2) или (3) § 82, где надо положить $f = 0$, увидим, что функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют тому же условию, если вместо f или $\bar{f}$ взять соответственно:

$$f_0 = -\frac{AiR^2(1-m)^2}{8}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)^2, \qquad \bar{f}_0 = \frac{AiR^2(1-m)^2}{8}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)^2. \tag{8}$$

Подставляя эти значения в формулы (4′), (5′) § 82, замечая, что правые части предыдущих формул представляют собой функции, голоморфные внутри γ, за исключением точки $\sigma = 0$, где они имеют полюсы с главными частями, равными соответственно:

$$-\frac{R^2A(1-m)^2 i}{8\sigma^2}, \qquad \frac{R^2A(1-m)^2 i}{8\sigma^2},$$

и применяя формулу (4) § 70, получаем сразу:

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_0\, d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{R^2A(1-m)^2 i}{8\zeta^2},$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{f}_0\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\varphi_0'(\zeta) = \frac{R^2A(1-m)^2 i}{8\zeta^2} - \frac{R^2A(1-m)^2 i}{4\zeta^2}\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}, \tag{9}$$

и задача решена.

Полагая $m = 0$, получим решение задачи для кругового отверстия. Полагая $m = 1$, получим случай прямолинейной щели; в этом случае, как легко было предвидеть, $\varphi_0(\zeta) = \psi_0(\zeta) = 0$, т. е. *продольная* щель не оказывает влияния на напряженное состояние.

---

[1]) Решение для частного случая, когда большая ось эллипса перпендикулярна к оси балки, было найдено (иным путем) А. С. Локшиным [1].

Так же легко решается задача об изгибе поперечной силой и другие аналогичные задачи.

Ряд таких задач для случаев кругового, эллиптического и некоторых других отверстий (а именно отверстий, ограниченных гипотрохоидами, близкими к правильному треугольнику и квадрату; § 48, п. 4) был решен и подробно исследован М. И. Найманом [1] указанным в этой книге методом. Многие важные с точки зрения приложений задачи были решены Г. Н. Савиным [2], с доведением до удобных вычислительных формул и числовых таблиц, что дало возможность сопоставить некоторые из полученных результатов с экспериментальными данными; детальное изложение дано в монографии того же автора [8]. О работах Г. Н. Савина будет еще сказано ниже (§ 89). Некоторые случаи изгиба полосы (балки) с круговым отверстием были несколько раньше изучены С. Г. Лехницким [2]. Еще раньше Туци (Tuzi [1]) нашел решение задачи чистого изгиба балки с круговым отверстием (это решение получается из приведенного выше нашего решения при $m = 0$).

Эксперименты над моделями показали, что решение остается практически достаточно точным и тогда, когда размеры отверстий не малы по сравнению с шириной полосы, достигая $^3/_5$ ширины полосы в случае кругового отверстия (Туци) и $^1/_3$ ширины в случае квадратного отверстия (Г. Н. Савин).

Все упомянутые выше решения — приближенные, основанные на рассмотрении бесконечной плоскости с соответствующим отверстием, как это было сделано нами выше. Имеется также (довольно сложное) точное решение первой основной задачи теории упругости для бесконечной полосы (конечной ширины) с симметрично расположенным круговым отверстием; оно дано в статье Хоуленда и Стевенсона (Howland a. Stevenson [1]).

§ 83. Решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием. В этом случае граничное условие имеет вид

$$\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu g, \tag{1}$$

или

$$\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu(g_1 - ig_2) = 2\mu\bar{g}, \tag{2}$$

где g_1 и g_2 — заданные компоненты смещения точек контура эллипса.

Предполагая сначала, что смещения остаются ограниченными на бесконечности (а это значит, что $X = Y = \Gamma = \Gamma' = 0$), получаем совершенно тем же путем, что в § 82:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{2\mu}{\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma-\zeta}, \tag{3}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta) + \psi(\infty). \tag{4}$$

Если оставить значение $\psi(\infty)$ произвольным, то граничное условие будет удовлетворено с точностью до постоянного слагаемого. Для определения $\psi(\infty)$ умножим обе части равенства (2) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрируем по γ. Тогда, как легко видеть, получим [1]):

$$\psi(\infty) = -\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma} \bar{g}\frac{d\sigma}{\sigma}, \tag{5}$$

и наша задача решена для случая, когда мы требуем, чтобы смещения оставались ограниченными на бесконечности.

В общем случае будем иметь, считая, как в § 82, что $\Gamma = \overline{\Gamma}$, т. е. что *вращение на бесконечности равно нулю*:

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\zeta - \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \varphi_0(\zeta), \tag{6}$$

$$\psi(\zeta) = \Gamma' R\zeta + \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \psi_0(\zeta). \tag{7}$$

Подставляя эти выражения в формулу (1), увидим, что $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют тому же граничному условию, что и $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, с той разницей, что вместо $2\mu g$ надо взять теперь

$$2\mu g_0 = 2\mu g - \Gamma R\left(\varkappa\sigma - \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\right) + \frac{\overline{\Gamma}' R}{\sigma} - \frac{X-iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}, \tag{8}$$

или еще:

$$2\mu\bar{g}_0 = 2\mu\bar{g} - \Gamma R\left(\frac{\varkappa}{\sigma} - \sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\right) + \Gamma' R\sigma - \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}. \tag{9}$$

Мы получим значения $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$, заменив в формулах (3) и (4) φ, ψ через φ_0, ψ_0, а g, $\bar{g}$ — через g_0, $\bar{g}_0$. Таким образом, после элементарных выкладок (ср. § 82а, пример 1) получаем:

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{2\mu}{\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{g\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + (\Gamma m + \overline{\Gamma})\frac{R}{\varkappa\zeta}, \tag{10}$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + \Gamma R\left(\frac{\varkappa}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}\right) + \\ + \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1+m^2}{\zeta^2-m} - \zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta) + \psi_0(\infty), \tag{11}$$

где $\psi_0(\infty)$ определяется по формуле, вытекающей после элементарных выкладок из формул (5) и (9):

$$\psi_0(\infty) = -\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{g}_0\,d\sigma}{\sigma} = -\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{g}\,d\sigma}{\sigma} + \frac{m(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}. \tag{12}$$

Легко видеть, что полученное решение будет регулярным, если заданная на контуре функция g имеет производную, удовлетворяющую условию H.

В предельном случае $m = 1$ мы получаем решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с прямолинейной щелью.

[1]) Ср. второе примечание на стр. 305.

§ 83а. Примеры. 1. Растяжение бесконечной пластинки с жестким эллиптическим ядром. Пусть бесконечная пластинка со *впаянным* жестким эллиптическим ядром подвергается такому же одностороннему растяжению, как в примере 1 § 82а (рис. 39). Мы будем считать, что на жесткое ядро не действуют внешние силы, кроме напряжений, вызванных окружающим материалом; поэтому мы должны считать $X = Y = 0$. При обозначениях § 82а (пример 1) будем иметь:

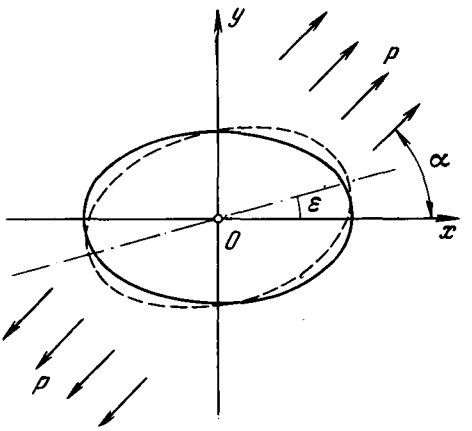


Рис. 39.

$$\Gamma = \overline{\Gamma} = \frac{p}{4}, \qquad \Gamma' = -\frac{1}{2} pe^{-2i\alpha}.$$

Приложенное растягивающее усилие может вызвать (жесткое) поступательное перемещение и поворот ядра. Так как поступательное перемещение может быть устранено жестким поступательным перемещением всей системы, мы можем от него отвлечься и принять, что ядро повернулось вокруг своего центра на (неизвестный пока) угол ε. Контурные значения компонент смещения будут при этом:

$$g_1 = -\varepsilon y, \qquad g_2 = +\varepsilon x, \tag{1}$$

так что

$$g = i\varepsilon(x + iy) = i\varepsilon z = i\varepsilon R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right), \qquad \overline{g} = -i\varepsilon R\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right).$$

Так как далее

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = i\varepsilon R\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{i\varepsilon R m}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{g}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{i\varepsilon R}{\zeta}$$

и, на основании формулы (12) § 83, $\psi_0(\infty) = 0$, то по формулам (6,) (7), (10) и (11) § 83, в которых следует положить $X = Y = 0$, находим:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \Gamma R\zeta + (2\mu m\varepsilon i + \Gamma m + \overline{\Gamma}')\frac{R}{\varkappa\zeta}, \\ \psi(\zeta) &= \Gamma' R\zeta + \frac{2\mu\varepsilon R i}{\zeta} + \Gamma R\left(\frac{\varkappa}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2 - m}\right) + \\ &\quad + (2\mu m\varepsilon i + \Gamma m + \overline{\Gamma}')\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\frac{R}{\varkappa\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Остается определить угол ε из условия, что главный момент усилий, действующих на ядро со стороны окружающего материала, равен нулю. Этот момент мы вычислим при помощи формулы (5) § 33.

Так как в нашем случае $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и, следовательно, $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ однозначны, главный момент M_0 усилий, действующих со стороны ядра на окружающее тело, будет равен приращению $\operatorname{Re}\chi_1(z)$ при обходе по контуру эллипса (по часовой стрелке). Значит, достаточно вычислить многозначные члены в выражении

$$\operatorname{Re}\chi_1(z)=\operatorname{Re}\int\psi_1(z)\,dz=\operatorname{Re}\int\psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,d\zeta.$$

Вторая из формул (2) показывает, что, если положить $\Gamma'=B'+iC'$, эти многозначные члены суть:

$$\operatorname{Re}\left\{i\,2\mu\varepsilon R^2\left(1+\frac{m^2}{\varkappa}\right)\ln\zeta-iC'mR^2\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\ln\zeta\right\}.$$

Следовательно, будем иметь:

$$M_0=4\pi\mu\varepsilon R^2\left(1+\frac{m^2}{\varkappa}\right)-2\pi mR^2C'\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right). \tag{3}$$

Условие $M_0=0$ дает:

$$\varepsilon=\frac{m\,(1+\varkappa)\,C'}{2\mu\,(m^2+\varkappa)}=\frac{pm\,(1+\varkappa)\sin 2\alpha}{4\mu\,(m^2+\varkappa)}. \tag{4}$$

Таким образом, задача решена. В случае кругового ядра ($m=0$) поворот равен нулю. В предельном случае прямолинейного ядра, т. е. жесткого тонкого стержня, $m=1$ и

$$\varepsilon=\frac{p\sin 2\alpha}{4\mu}. \tag{4'}$$

В случае всестороннего растяжения, когда

$$\Gamma=\overline{\Gamma}=\frac{p}{2},\qquad \Gamma'=0,$$

будем иметь, очевидно, $\varepsilon=0$; в результате простых вычислений получаем:

$$\varphi(\zeta)=\frac{pR}{2}\left(\zeta+\frac{m}{\varkappa\zeta}\right),\qquad \psi(\zeta)=\frac{pR}{2}\left(\frac{\varkappa}{\zeta}-\frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2-m}+\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\frac{m}{\varkappa\zeta}\right). \tag{5}$$

2. Случай, когда эллиптическое ядро удерживается от поворота. Если при условиях предыдущего примера (одностороннее растяжение) эллиптическое жесткое ядро удерживается в первоначальном положении подходящей парой сил, то $\varepsilon=0$, и из формул (2) следует:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\Gamma R\zeta+(\Gamma m+\overline{\Gamma}')\frac{R}{\varkappa\zeta},\\ \psi(\zeta)&=\Gamma' R\zeta+\Gamma R\left(\frac{\varkappa}{\zeta}-\frac{(1+m^2)\,\zeta}{\zeta^2-m}\right)+(\Gamma m+\overline{\Gamma}')\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\,\frac{R}{\varkappa\zeta}.\end{aligned} \tag{6}$$

Момент M_0 пары, удерживающей ядро от поворота, равен по формуле (3)

$$M_0=-2\pi mR^2C'\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)=-\pi pmR^2\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\sin 2\alpha. \tag{7}$$

3. Случай, когда на эллиптическое ядро действует пара с заданным моментом. Будем считать,

что на бесконечности напряжения равны нулю. Тогда из формул (2) находим:

$$\varphi(\zeta)=\frac{2\mu m\varepsilon Ri}{\varkappa\zeta}, \qquad \psi(\zeta)=\frac{2\mu\varepsilon Ri}{\varkappa\zeta}\left(\varkappa+m\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right), \tag{8}$$

при этом величина ε определяется по формуле (3):

$$\varepsilon=\frac{M_0\varkappa}{4\pi\mu R^2(m+\varkappa)}. \tag{9}$$

4. Случай, когда на эллиптическое ядро действует сила, приложенная к центру. Будем считать, что напряжения на бесконечности равны нулю. Легко видеть, что ядро не испытает вращения [1]). Мы можем, далее, считать, что оно вообще остается на месте (ибо этого можно достигнуть жестким поступательным перемещением всей системы). Значит, в формулах (10), (11) и (12) § 83 будет: $g=0$, $\Gamma=\Gamma'=0$, откуда следует, если (X, Y) есть приложенная сила:

$$\varphi_0(\zeta)=0, \qquad \psi_0(\zeta)=\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1+m^2}{\zeta^2-m}+\frac{m(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}$$

и, значит, на основании формул (6), (7) того же параграфа

$$\varphi(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\ln\zeta, \quad \psi(\zeta)=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\ln\zeta+\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1+m^2}{\zeta^2-m}+\frac{m(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}.$$

§ 84. Общее решение первой основной задачи для областей, отображаемых на круг при помощи полиномов. То обстоятельство, что нам удалось получить столь простые и элементарные решения для областей, рассмотренных в предыдущих параграфах этого отдела (§ 80—83), не случайно. Действительно, мы покажем, что решение основных задач всегда получается в элементарной форме, а именно, выражается через интегралы типа Коши, когда отображающая функция $\omega(\zeta)$ рациональная [2]).

Рассмотрим сперва первую основную задачу и начнем со случая, когда функция $\omega(\zeta)$, отображающая S на круг $|\zeta|<1$, есть полином [3]):

$$\omega(\zeta)=c_1\zeta+c_2\zeta^2+\ldots+c_n\zeta^n \qquad (c_1\neq 0,\ c_n\neq 0); \tag{1}$$

[1]) На основании симметрии это очевидно в том случае, когда сила направлена по одной из осей эллипса. Но общий случай получается комбинацией двух таких частных случаев.

[2]) Решение основной бигармонической задачи для случая, когда $\omega(\zeta)$ — *полином*, было дано впервые Альманзи (Almansi [1]). Боджо (Boggio [1, 2]) указал способ решения второй основной задачи для случая, когда $\omega(\zeta)$ — рациональная функция. Наш метод совершенно отличен от методов упомянутых авторов и, по нашему мнению, гораздо проще. Он впервые изложен в статье [4], а более подробно в [5].

[3]) Значит, область S должна быть в этом случае конечной; о случае бесконечной области см. в конце параграфа.

c_1 не может обращаться в нуль, ибо иначе $\omega'(\zeta)$ обращалась бы в нуль в нашем круге и отображение не было бы взаимно однозначным. Постоянный же член, не нарушая общности, можно считать равным нулю, т. е. считать, что точка $\zeta = 0$ соответствует точке $z = 0$.

В рассматриваемом случае функциональное уравнение (10) § 78:

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = A(\zeta) \quad (|\zeta|<1), \tag{2}$$

определяющее функцию $\varphi(\zeta)$, решается элементарно и весьма просто. В этом уравнении, напоминаем, $A(\zeta)$ — заданная функция:

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}; \tag{3}$$

мы будем считать, как в § 78, что функция $f = f_1 + if_2$, заданная на γ, имеет производную, удовлетворяющую условию H.

В нашем случае выражение $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ представляет собой граничное значение рациональной функции

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}} = \frac{c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n}{\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2\zeta^{-1} + \ldots + n\bar{c}_n\zeta^{-n+1}} = \zeta^n\,\frac{c_1 + \ldots + c_n\zeta^{n-1}}{\bar{c}_1\zeta^{n-1} + \ldots + n\bar{c}_n}, \tag{4}$$

голоморфной вне γ (ср. § 63), кроме точки $\zeta = \infty$, где она имеет полюс порядка n. Поэтому эта функция может быть вне γ представлена в виде

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}} = b_n\zeta^n + b_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + b_1\zeta + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}\zeta^{-k}. \tag{5}$$

Заметим сейчас же, что для проведения решения до конца нет никакой надобности вычислять все коэффициенты разложения (5): *достаточно вычислить только величины* $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *для чего требуются*, как известно, *самые элементарные алгебраические операции.*

Вследствие того, что $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ имеет указанный частный вид, интеграл в левой части (2) вычисляется совершенно элементарно.

Действительно, $\overline{\varphi'(\sigma)}$ представляет собой граничное значение функции $\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$, голоморфной вне γ (§ 76, п. 2). Следовательно, выражение

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)}$$

есть граничное значение функции

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}\,\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)},$$

голоморфной вне γ, кроме точки $\zeta = \infty$, где она имеет полюс порядка не выше n.

Для того чтобы найти главную часть разложения этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки, напишем разложение $\varphi(\zeta)$ по степеням ζ:

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots \quad (|\zeta| < 1) \tag{6}$$

(заметим сейчас же, что *члены разложения, кроме выписанных, нам не понадобятся*). Отсюда

$$\varphi'(\zeta) = a_1 + 2a_2\zeta + \ldots + na_n\zeta^{n-1} + (n+1)\,a_{n+1}\zeta^n + \ldots$$

и, следовательно,

$$\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \overline{a}_1 + \frac{2\overline{a}_2}{\zeta} + \ldots + \frac{n\overline{a}_n}{\zeta^{n-1}} + \frac{(n+1)\,\overline{a}_{n+1}}{\zeta^n} + \ldots \quad (|\zeta| > 1).$$

Поэтому при $|\zeta| > 1$ будем иметь:

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = K_0 + K_1\zeta + \ldots + K_n\zeta^n + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \tag{7}$$

где $O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ обозначает функцию, голоморфную вне γ и обращающуюся в нуль при $\zeta = \infty$, и

$$\left.\begin{aligned}
K_0 &= \overline{a}_1 b_0 + 2\overline{a}_2 b_1 + \ldots + (n-1)\,\overline{a}_{n-1} b_{n-2} + n\overline{a}_n b_{n-1} + (n+1)\,\overline{a}_{n+1} b_n,\\
K_1 &= \overline{a}_1 b_1 + 2\overline{a}_2 b_2 + \ldots + (n-1)\,\overline{a}_{n-1} b_{n-1} + n\overline{a}_n b_n,\\
K_2 &= \overline{a}_1 b_2 + 2\overline{a}_2 b_3 + \ldots + (n-1)\,\overline{a}_{n-1} b_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_{n-1} &= \overline{a}_1 b_{n-1} + 2\overline{a}_2 b_n,\\
K_n &= \overline{a}_1 b_n.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Принимая во внимание формулу (7), получаем на основании формулы (4′) § 70:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma - \zeta)} = K_0 + K_1\zeta + \ldots + K_n\zeta^n. \tag{9}$$

Таким образом, формула (2) дает сразу выражение для $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) + K_0 + K_1\zeta + \ldots + K_n\zeta^n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma - \zeta} = A(\zeta). \tag{10}$$

В этом выражении содержатся еще не известные пока постоянные величины

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n;$$

эти величины должны быть определены из условия, что постоянные $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$, фигурирующие в выражении (10) для $\varphi(\zeta)$ через посредство их комбинаций $K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_n$, представляют собой дей-

ствительно коэффициенты разложения (6). Выразим это условие. Замечая, что

$$\frac{1}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{\sigma}+\frac{\zeta}{\sigma^2}+\frac{\zeta^2}{\sigma^3}+\ldots,$$

имеем:

$$A(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=A_0+A_1\zeta+A_2\zeta^2+\ldots, \tag{11}$$

где

$$A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\sigma^{-k-1}\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fe^{-ik\vartheta}\,d\vartheta \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Сравнивая коэффициенты при ζ, ζ^2, ..., ζ^{n+1} в обеих частях формулы (10), получаем $n+1$ уравнений:

$$\begin{aligned} &a_k+K_k=A_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ &a_{n+1}=A_{n+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Последнее из этих уравнений дает непосредственно значение для a_{n+1}:

$$a_{n+1}=A_{n+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\sigma^{-n-2}\,d\sigma. \tag{14}$$

Остальные уравнения, на основании формул (8), запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &+\bar{a}_1b_1 &+2\bar{a}_2b_2+\ldots+(n-1)\,\bar{a}_{n-1}b_{n-1}+na_nb_n &= A_1,\\ a_2 &+\bar{a}_1b_2 &+2\bar{a}_2b_3+\ldots+(n-1)\,\bar{a}_{n-1}b_n &= A_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\\ a_{n-1} &+\bar{a}_1b_{n-1} &+2\bar{a}_2b_n &= A_{n-1},\\ a_n &+\bar{a}_1b_n & &= A_n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Мы получили таким образом систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных a_1, a_2, ..., a_n; эта система совпадает с системой (6″) § 63, которую мы получили, решая задачу иным путем.

Полагая $a_k=\alpha_k+i\beta_k$ и отделяя в уравнениях (15) действительные части от мнимых, получаем систему $2n$ действительных линейных уравнений с $2n$ действительными неизвестными [1]):

$$\alpha_k,\ \beta_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

[1]) Вместо этой системы можно составить систему относительно (комплексных) неизвестных a_k, $\bar{a}_k$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), присоединив к системе (15) другую, получаемую переходом к сопряженным значениям.

Эта система должна допускать решение, если соблюдено условие равенства нулю главного момента внешних усилий, т. е. имеет место равенство [1])

$$\int_L (f_1\,dx + f_2\,dy) = 0; \tag{16}$$

действительно, мы знаем, что при этом условии исходная задача имеет решение, а следовательно, система (15) не может быть несовместимой.

Кроме того, на основании теоремы единственности ясно, что рассматриваемая система вполне определит искомые постоянные, если (произвольно) зафиксировать мнимую часть величины

$$\varphi_1'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)} = \frac{a_1}{\omega'(0)}.$$

Зафиксировав (произвольно) эту мнимую часть, найдя величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие системе (15), подставив их в выражения для $K_0, K_1, \ldots, K_n$, так же, как и значение (14) величины a_{n+1}, и внеся полученные значения в формулу (10) [2]), получим выражение для $\varphi(\zeta)$, тождественно удовлетворяющее соотношению (2).

После этого функция $\psi(\zeta)$ вычислится по формуле (8) § 78:

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \overline{\varphi(0)}. \tag{17}$$

В нашем случае второй интеграл в правой части выражается в конечном виде через функцию $\varphi(\zeta)$.

В самом деле, функция

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)$$

---

[1]) Условие (16) эквивалентно, очевидно, следующему:

$$\int_L f\,d\bar{z} + \int_L \bar{f}\,dz = 0,$$

или

$$\int_\gamma f\overline{\omega'(\zeta)}\,d\bar{\zeta} + \int_\gamma \bar{f}\omega'(\zeta)\,d\zeta = 0;$$

откуда, принимая во внимание формулы (1) и (12), получаем:

$$\bar{c}_1A_1 + 2\bar{c}_2A_2 + \ldots + n\bar{c}_nA_n - c_1\bar{A}_1 - 2c_2\bar{A}_2 - \ldots - nc_n\bar{A}_n = 0.$$

[2]) Постоянная a_{n+1} фигурирует лишь в выражении для K_0; так как эту последнюю постоянную можно отбросить, не изменяя напряжений, то фактически нет надобности вычислять a_{n+1} и K_0.

Далее, подстановку величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в выражения (8) для $K_1, K_2, \ldots, K_n$ фактически производить не придется, так как значения постоянных $K_1, K_2, \ldots, K_n$ могут быть в силу уравнений (13) вычислены по формулам:

$$K_k = A_k - a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отметим, наконец, что специальный вид системы алгебраических уравнений (15) дает возможность применить к ее решению частные способы, значительно облегчающие вычисления, как показал М. М. Холмянский [1].

представляет собой граничное значение функции

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta),$$

голоморфной внутри γ, за исключением точки $\zeta = 0$, а именно: на основании формулы (7) имеем, как легко видеть, внутри γ [1]):

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) = \overline{K}_1\frac{1}{\zeta} + \ldots + \overline{K}_n\frac{1}{\zeta^n} + \text{ голоморфная функция.}$$

Значит, на основании формулы (3) § 70

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)} = \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) - \frac{\overline{K}_1}{\zeta} - \ldots - \frac{\overline{K}_n}{\zeta^n},$$

так что формула (17) принимает вид

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \frac{\overline{K}_1}{\zeta} + \ldots + \frac{\overline{K}_n}{\zeta^n} - \overline{\varphi(0)}. \qquad (18)$$

Все сказанное с очевидными незначительными изменениями приложимо к случаю бесконечной области S, отображаемой на круг $|\zeta| < 1$ функцией вида

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta^n. \qquad (1')$$

Задачу следует сперва привести к случаю, когда $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ голоморфны внутри γ (§ 78), и затем поступить, как указано выше. Здесь решение будет даже несколько проще, ибо система, аналогичная системе (15), будет всегда допускать (единственное) решение без добавочного условия (16).

Замечание 1. Решение рассмотренной в настоящем параграфе задачи можно получить еще следующим путем, приводящим по существу к тем же выкладкам, что и выше.

[1]) Если положить временно:

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) = \Omega(\zeta),$$

то согласно обозначениям § 76 (п. 2)

$$\Omega_*(\zeta) = \overline{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

и

$$\Omega(\zeta) = [\Omega_*(\zeta)]_* = \left[\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_*$$

Замечая, что функция

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

голоморфна вне γ и имеет на бесконечности полюс порядка не выше n, т. е. что она представима в виде (7), где $K_0, K_1, \ldots, K_n$ — не известные заранее постоянные, получаем, как и выше, формулу (10). Постоянные же $K_0, K_1, \ldots, K_n$ можно определить путем непосредственной подстановки выражения для $\varphi(\zeta)$, получаемого из соотношения (10), в исходное функциональное уравнение (2), что дает:

$$-K_0-K_1\zeta-\ldots-K_n\zeta^n-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}(\overline{K}_1+2\overline{K}_2\overline{\sigma}+\ldots$$

$$\ldots+n\overline{K}_n\overline{\sigma}^{n-1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)\,\overline{A'(\sigma)}\,d\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}\,(\sigma-\zeta)}=0. \quad (19)$$

Интегралы, входящие в левую часть, легко вычисляются в конечном виде, совершенно так же, как был вычислен интеграл формулы (9) [1]), и левая часть соотношения (19) обращается в полином степени n, коэффициенты которого содержат линейным образом величины $K_0, K_1, \overline{K}_1, \ldots, K_n, \overline{K}_n$; приравнивая нулю эти коэффициенты, получим систему линейных уравнений относительно указанных величин, к решению которой и сводится решение исходной задачи.

Замечание 2. При исследовании системы (15) мы опирались не только на теорему единственности решения, но также на менее элементарную теорему существования, доказанную в § 79. Легко, однако, обойтись без применения теоремы существования, ограничившись теоремой единственности, и получить таким образом элементарное доказательство теоремы существования для интересующего нас здесь частного случая, когда $\omega(\zeta)$ — полином.

В самом деле, легко непосредственно проверить (предоставляем это читателю), что в силу условия (16), которое следует считать выполненным, одно из $2n$ уравнений, получаемых разделением действительных и мнимых частей в уравнениях (15), является следствием остальных $2n-1$ уравнений [2]). Поэтому, если к этим $2n-1$ уравнениям присоединим уравнение, выражающее, что мнимая часть величины $a_1/\omega'(0)$ равна (произвольно) заданной постоянной α (например, нулю), мы получим систему $2n$ линейных уравнений с $2n$ неизвестными, которая наверное разрешима,

---

[1]) При этом следует использовать разложение (11), вернее $n+2$ его первых члена

[2]) При этом выясняется и то, что при несоблюдении условия (16) система оказывается неразрешимой. Заметим, что фактически удобнее оперировать не с системой упомянутой в тексте, а с системой, получаемой присоединением к уравнениям (15) комплексно сопряженных уравнений, как это указано в примечании на стр. 321.

ибо соответствующая ей однородная система, получаемая при $f = 0$, $\alpha = 0$, не имеет отличных от нулевого решений в силу теоремы единственности.

§ 85. Обобщение на случай отображения при помощи рациональных функций. Случай областей, отображаемых на круг при помощи полиномов и при помощи функций вида (1′), указанного в § 84 (стр. 323), есть частный случай областей, отображаемых при помощи рациональных функций общего вида. И в этом более общем случае решение может быть получено тем же путем, что и выше; единственной принципиальной разницей является то, что на этот раз приходится, вообще говоря, вычислять корни некоторого алгебраического уравнения.

Рассмотрим снова функциональное уравнение (10) § 78:

$$\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} = A(\zeta); \qquad (1)$$

здесь обозначения те же, что в предыдущем параграфе, однако на этот раз $\omega(\zeta)$ — рациональная функция общего вида, но, разумеется, такая, что осуществляет требуемое конформное отображение данной области S на круг $|\zeta| < 1$. В случае, когда область S бесконечна, мы по-прежнему будем считать, что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = 0$.

И в рассматриваемом теперь случае интеграл в левой части уравнения (1) может быть вычислен элементарным путем, как будет сейчас показано.

Рассмотрим отношение $\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma)$. Оно представляет собой граничное значение рациональной функции

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}.$$

Так как теперь $\omega(\zeta)$ может иметь полюсы вне γ не только в точке $\zeta = \infty$, то $\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ может иметь полюсы внутри γ не только в точке $\zeta = 0$, как это имело место в случаях, рассмотренных в предыдущем параграфе. Вне и на γ функция $\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ полюсов, кроме точки $\zeta = \infty$, иметь не может [1]).

Обозначим полюсы функции $\omega(\zeta)$ [2]), отличные от полюса $\zeta = \infty$ (если таковой имеется), через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; они все расположены вне γ. Тогда

---

[1]) Внутри и на γ отображающая функция $\omega(\zeta)$ должна быть непрерывна, кроме точки $\zeta = 0$ в случае, когда область S бесконечна. Вспомним также, что $\omega'(\zeta)$ не может иметь нулей ни внутри, ни на γ.

[2]) Для того чтобы найти полюсы функции $\omega(\zeta)$, придется найти корни алгебраического уравнения $1/\omega(\zeta) = 0$. Это есть уравнение, о котором говорилось в начале настоящего параграфа.

полюсами функции $\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, отличными от полюса $\zeta = 0$, будут:

$$\zeta_1' = \frac{1}{\overline{\zeta_1}}, \quad \zeta_2' = \frac{1}{\overline{\zeta_2}}, \quad \ldots, \quad \zeta_n' = \frac{1}{\overline{\zeta_n}};$$

все они расположены внутри γ. Эти же точки и, вообще говоря, точка $\zeta = 0$ будут всеми теми полюсами функции $\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)/\omega'(\zeta)$, которые расположены внутри γ. Поэтому, очевидно, указанная выше функция может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} = c_0 + \sum_{l=1}^{m_0} \frac{c_l}{\zeta^l} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{c_{kl}}{(\zeta - \zeta_k')^l} + R(\zeta), \tag{2}$$

где c_0, c_l, c_{kl} — известные постоянные, а $R(\zeta)$ — рациональная функция, голоморфная внутри и на γ, исчезающая при $\zeta = 0$; $m_0, m_1, \ldots, m_n$ обозначают соответственно порядки полюсов $0, \zeta_1', \ldots, \zeta_n'$.

Рассмотрим теперь произведение

$$\Omega(\zeta) = \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta).$$

Это произведение, очевидно, представляет собой функцию, голоморфную внутри γ, за исключением точек $0, \zeta_1', \ldots, \zeta_n'$, где она может иметь полюсы порядков $m_0, m_1, \ldots, m_n$ (но не выше) и поэтому может быть представлена в виде, аналогичном (2):

$$\Omega(\zeta) = C_0 + \sum_{l=1}^{m_0} \frac{C_l}{\zeta^l} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{C_{kl}}{(\zeta - \zeta_k')^l} + \Omega_0(\zeta), \tag{3}$$

где C_0, C_l, C_{kl} — постоянные, а $\Omega_0(\zeta)$ — функция, голоморфная внутри γ и исчезающая при $\zeta = 0$.

Легко видеть, что имеет место следующее, важное для нас обстоятельство: постоянные C_l ($l = 1, 2, \ldots, m_0$) являются линейными комбинациями (с известными постоянными коэффициентами) величин

$$\varphi'(0), \quad \varphi''(0), \ldots, \varphi^{(m_0)}(0), \tag{а}$$

а постоянные C_{kl} — аналогичными комбинациями величин

$$\varphi'(\zeta_k'), \quad \varphi''(\zeta_k'), \ldots, \quad \varphi^{(m_k)}(\zeta_k') \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{б}$$

Эти комбинации легко выписать в явном виде.

Далее, как легко видеть, постоянная C_0 является линейной комбинацией тех же величин (а), а также величины $\varphi^{(m_0+1)}(0)$. Мы увидим ниже, что для решения рассматриваемой здесь задачи (т. е. первой основной задачи) нет надобности фактически вычислять постоянную C_0. В дальнейшем, говоря о величинах C_l, мы будем считать $l \geqslant 1$.

Перейдем теперь к выражению

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi'(\sigma)},$$

фигурирующему в интеграле левой части уравнения (1); оно является граничным значением выражения

$$\overline{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Это последнее на основании формулы (3) представляется в виде (не забудем, что $\overline{\zeta_k'}=1/\zeta_k$)

$$\overline{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\overline{C}_0+\sum_{l=1}^{m_0}\overline{C}_l\zeta^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\overline{C}_{kl}\zeta_k^l\zeta^l}{(\zeta_k-\zeta)^l}+\overline{\Omega}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad (4)$$

где $\overline{\Omega}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ — функция, голоморфная вне γ и исчезающая при $\zeta=\infty$.

Величины $\overline{C}_l$, $\overline{C}_{kl}$ являются, очевидно, линейными комбинациями величин, сопряженных с величинами (а) и (б); аналогично относительно величины $\overline{C}_0$.

Применяя теперь формулу (4′) § 70, получаем сразу [1]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{C}_0+\sum_{l=1}^{m_0}\overline{C}_l\zeta^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\overline{C}_{kl}\zeta_k^l\zeta^l}{(\zeta_k-\zeta)^l}.$$

Внося это выражение в левую часть уравнения (1), получаем наконец:

$$\varphi(\zeta)+\overline{C}_0+\sum_{l=1}^{m_0}\overline{C}_l\zeta^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\overline{C}_{kl}\zeta_k^l\zeta^l}{(\zeta_k-\zeta)^l}=A(\zeta). \qquad (5)$$

Отсюда мы получаем выражение для $\varphi(\zeta)$, представляющее собой функцию, голоморфную внутри γ (и непрерывную вплоть до γ), ибо точки ζ_k расположены вне γ.

Остается выразить, что величины (а), (б), линейными комбинациями которых являются величины C_l и C_{kl}, представляют собой значения соответствующих производных в соответствующих точках функции $\varphi(\zeta)$, определяемой равенством (5).

Эти условия легко выразить, дифференцируя соответствующее число раз равенство (5) и подставляя на место ζ соответствующие значения 0 или ζ_1', ζ_2', . . ., ζ_n'.

---

[1]) Легко видеть, что выражение

$$\overline{C}_0+\sum_{l=1}^{m_0}\overline{C}_l\zeta^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\overline{C}_{kl}\zeta_k^l\zeta^l}{(\zeta_k-\zeta)^l}$$

можно представить в виде

$$C_0'+\sum_{l=1}^{m_0}\overline{C}_l\zeta^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{C_{kl}'}{(\zeta-\zeta_k)^l},$$

где C_0', C_{kl}' — постоянные, т. е., если пользоваться обозначениями § 70, в виде

$$G_\infty(\zeta)+G_1(\zeta)+\ldots+G_n(\zeta).$$

Например, мы должны иметь:

$$\varphi'(0)+\overline{C}_1+\sum_{k=1}^{n}\overline{C}_{k1}=A'(0),$$

и т. д. Таким образом, мы получим систему $m_0+m_1+\ldots+m_n$ линейных уравнений (с постоянными коэффициентами) относительно неизвестных величин (а), (б) и сопряженных с ними. Эта система (ср. сказанное в предыдущем параграфе) будет однозначно разрешима, если в случае конечной области произвольно зафиксировать мнимую часть отношения $\varphi'(0)/\omega'(0)$ и если также в случае конечной области соблюдено необходимое условие существования решения задачи:

$$\int_L (f_1\,dx+f_2\,dy)=0. \tag{6}$$

Найдя величины (а), (б), мы найдем и значения постоянных C_l, C_{kl}; подставив их значения в формулу (5), мы определим искомую функцию $\varphi(\zeta)$ с точностью до постоянной $\overline{C}_0$, которую можно отбросить, так как она не влияет на распределение напряжений. Если же эту постоянную все же требуется найти для какой-либо цели, то достаточно вычислить по формуле (5) значение $\varphi^{(m_0+1)}(0)$ и подставить это значение вместе с найденными значениями величин (а), (б) в ту линейную комбинацию, которой выражается C_0.

Найдя $\varphi(\zeta)$, мы сможем определить $\psi(\zeta)$ по формуле (8) § 78:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\overline{\varphi(0)}, \tag{7}$$

откуда, если принять во внимание, что $\dfrac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\sigma)$ есть граничное значение функции $\Omega(\zeta)$, получаем непосредственно:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\sum_{l=1}^{m_0}\frac{C_l}{\zeta^l}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{C_{kl}}{(\zeta-\zeta_k)^l}-\overline{\varphi(0)}; \tag{8}$$

постоянное слагаемое $-\overline{\varphi(0)}$ и здесь можно отбросить.

Таким образом, задача решена. В случае бесконечной области иногда более удобно [1]) (главным образом в смысле наглядности) пользоваться отображением на область $|\zeta|>1$. Все сказанное выше с очевидными небольшими изменениями применимо и к этому способу отображения.

Замечание. И здесь с очевидными изменениями можно применить способ решения, указанный в замечании 1 в конце предыдущего параграфа. Сказанное в замечании 2 к тому же параграфу также легко перенести на рассматриваемый здесь случай.

[1]) Но вовсе не обязательно, так как изложенный в тексте способ одинаково относится к конечным и бесконечным областям

Вообще, изложенный выше метод решения можно различно варьировать и этим достигать в тех или иных конкретных случаях иногда значительных упрощений. Например, иногда выгодно предварительно умножить обе части равенства, выражающего граничное условие, на надлежащим образом выбранный полином. Один из таких способов указан в двух первых изданиях настоящей книги; вообще говоря, он приводит в конечном счете примерно к тем же выкладкам, что и изложенный здесь способ; однако в некоторых отдельных случаях он упрощает эти выкладки.

§ 86. Решение второй основной задачи. О решении основной смешанной задачи. В предыдущих параграфах мы для определенности рассмотрели первую основную задачу. Однако, если сравнить граничные условия первой и второй основных задач, взятые в виде, указанном в § 78, станет ясным, что изложенные выше способы решения почти без всяких изменений переносятся на случай второй основной задачи. Поэтому нет надобности излагать указанный метод отдельно в применении ко второй основной задаче.

Решение основной смешанной задачи несколько сложнее, однако и в этом случае эффективное решение может быть получено элементарным путем, когда, как и в предыдущих параграфах, отображающая функция $\omega(\zeta)$ рациональная. Такое решение указано Д. И. Шерманом в уже названной его работе [10]. Но здесь мы на этом останавливаться не будем, так как в следующей главе будет изложен более простой способ.

§ 87. Другой способ решения основных задач. Возвращаясь к первой основной задаче, заметим, что в некоторых случаях удобнее в практическом смысле исходить не из граничного условия (1) § 51, а из условия (3) § 51, которое мы перепишем так:

$$\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)]\,\omega'(\sigma)}-\sigma^2\overline{[\omega(\sigma)\,\Phi'(\sigma)+\omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)]}=\widehat{[\varrho\varrho}-i\widehat{\varrho\vartheta]}\,\overline{\omega'(\sigma)}, \quad (1)$$

или, что все равно, если перейти к сопряженным значениям

$$[\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}]\,\omega'(\sigma)-\bar{\sigma}^2\,[\omega(\sigma)\,\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\omega'(\sigma)}\,\overline{\Psi(\sigma)}]=\widehat{[\varrho\varrho}+i\widehat{\varrho\vartheta]}\,\omega'(\sigma); \quad (2)$$

под левыми частями предыдущих равенств следует подразумевать соответствующие граничные значения, существование которых предполагается.

Изложенный в предыдущем параграфе метод приводит и в этом случае к элементарному решению, когда $\omega(\zeta)$ — рациональная функция.

Способ применения метода столь очевиден на основании изложенного выше, что мы не станем останавливаться на деталях [1]), ограничиваясь одним простым примером, приводимым в следующем параграфе.

Добавим лишь, что указанный только что способ особенно удобен в случае, когда область, занятая телом, бесконечна, ибо в этом случае

[1]) Этот способ детально изложен в работе автора [5].

функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ не однозначны, тогда как функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ голоморфны во всей рассматриваемой области.

Аналогично можно видоизменить и способ решения второй основной задачи, заменив граничное условие (15) § 78, которое можно записать и так:

$$\varkappa\varphi(\sigma)-\omega(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=2\mu(g_1+ig_2), \tag{3}$$

условием, полученным дифференцированием обеих частей предыдущего равенства по ϑ, что дает, если принять во внимание соотношение $\sigma=e^{i\vartheta}$ и если умножить обе части получаемого равенства на $-ie^{-i\vartheta}$:

$$[\varkappa\Phi(\sigma)-\overline{\Phi(\sigma)}]\,\omega'(\sigma)+\overline{\sigma}^2[\omega(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\omega'(\sigma)}\,\overline{\Psi(\sigma)}]=2\mu\left[\frac{dg_1}{d\sigma}+i\frac{dg_2}{d\sigma}\right]. \tag{4}$$

§ 87а. Пример. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием [1]. В этом случае можно положить:

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta, \tag{1}$$

где R — радиус отверстия [2].

Граничное условие (1) предыдущего параграфа примет вид

$$\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)}-\sigma\Phi'(\sigma)-\sigma^2\Psi(\sigma)=N-iT. \tag{2}$$

N и T обозначают внешние нормальное и касательное напряжения при том же правиле выбора знаков, что и в § 56 (а именно: N есть проекция внешнего напряжения на нормаль n к окружности, *направленную к центру*, а T — проекция на касательную, направленную *влево*, если смотреть вдоль n).

Будем для простоты считать, что напряжения на бесконечности равны нулю. Тогда функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ не только голоморфны вне γ, включая бесконечно удаленную точку, но и исчезают на бесконечности, если считать, что вращение на бесконечности равно нулю. Таким образом, при больших $|\zeta|$

$$\Phi(\zeta)=\frac{a_1}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\quad \Phi'(\zeta)=O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\quad \Psi(\zeta)=\frac{a_1'}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right); \tag{3}$$

кроме того, если мы хотим, чтобы смещения были однозначны, должно быть соблюдено условие [3]

$$\varkappa\overline{a}_1+a_1'=0. \tag{3'}$$

---

[1]) Этот пример решен в § 56 иным путем.

[2]) Таким образом, мы пользуемся отображением на круг $|\zeta|>1$.

[3]) Ср. формулу (6) § 56 коэффициенты a_1 и a_1' можно вычислить заранее (см. § 56), но мы этим пользоваться не будем.

Вычисления несколько упростятся, если умножить обе части формулы (2) на $\sigma^{-1} = e^{-i\vartheta}$, что дает:

$$\frac{1}{\sigma}\Phi(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\overline{\Phi(\sigma)}-\Phi'(\sigma)-\sigma\Psi(\sigma)=-(X_n-iY_n), \tag{4}$$

или, если перейти к сопряженным значениям,

$$\sigma\Phi(\sigma)+\sigma\overline{\Phi(\sigma)}-\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\sigma}\,\overline{\Psi(\sigma)}=-(X_n+iY_n), \tag{5}$$

ибо, как легко видеть,

$$N-iT=-(X_n-iY_n)e^{i\vartheta}. \tag{6}$$

Будем считать, что функции $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до границы, каждая в отдельности.

Выражая теперь, что функция точки контура $\sigma\Psi(\sigma)$, определяемая формулой (4), есть граничное значение функции $\zeta\Psi(\zeta)$, голоморфной вне γ, получаем на основании формулы (13) § 76:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma\Phi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma\overline{\Phi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{X_n+iY_n}{\sigma-\zeta}d\sigma=0, \tag{7}$$

где ζ — произвольная точка вне γ, или [1])

$$-\zeta\Phi(\zeta)+a_1+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{X_n+iY_n}{\sigma-\zeta}\,d\sigma=0,$$

откуда, наконец,

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_\gamma\frac{X_n+iY_n}{\sigma-\zeta}\,d\sigma+\frac{a_1}{\zeta}. \tag{8}$$

Постоянная a_1 не определяется самим функциональным уравнением [2]) (7), которое удовлетворяется найденным значением $\Phi(\zeta)$ при всяком a_1, как это следует из самого вывода. Это не должно нас удивлять, так как мы пока не учли условия однозначности смещений.

Вычислим теперь функцию $\zeta\Psi(\zeta)$. Мы знаем ее граничное значение, ибо оно дается формулой (4), если под $\Phi(\zeta)$ понимать значение (8). Для того же, чтобы найти функцию $\zeta\Psi(\zeta)$ по формуле Коши, надо знать еще ее значение a_1' при $\zeta=\infty$; это значение мы найдем по той же формуле (4),

---

[1]) Мы применяем формулы § 70 и принимаем во внимание, что $\sigma\Phi(\sigma)$ есть граничное значение функции $\zeta\Phi(\zeta)$, голоморфной вне γ и равной a_1 при $\zeta=\infty$, а $\sigma\overline{\Phi(\sigma)}$ и $\overline{\Phi'(\sigma)}$ — граничные значения функций $\zeta\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, голоморфных внутри γ.

[2]) Если мы выразим, что a_1 в правой части формулы (8) равняется коэффициенту при ζ^{-1} в разложении $\Phi(\zeta)$, то получим тождество $a_1=a_1$.

умножив обе ее части на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировав по γ, что приводит к соотношению [1])

$$\overline{a_1}-a_1'=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (X_n-iY_n)\frac{d\sigma}{\sigma}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(X_n-iY_n)\,d\vartheta=-\frac{X-iY}{2\pi R},$$

где (X, Y) — главный вектор внешних усилий, приложенных к обводу отверстия. Предыдущее соотношение вместе с соотношением (3′) определяет величины a_1 и a_1', а именно [2]):

$$a_1=-\frac{X+iY}{2\pi R(1+\varkappa)},\quad a_1'=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi R(1+\varkappa)}. \tag{9}$$

После этого, применяя формулу Коши к вычислению функции $\zeta\Psi(\zeta)$ по ее граничному значению, определяемому формулой (4), получаем после очевидных упрощений:

$$\Psi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_\gamma \frac{X_n-iY_n}{\sigma-\zeta}\,d\sigma+\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta^2}-\frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta}+\frac{a_1'}{\zeta}. \tag{10}$$

Таким образом, задача решена формулами (8) и (10), в которых a_1 и a_1' обозначают величины (9).

В качестве простого частного примера [3]) рассмотрим случай, когда на правую половину обвода $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ действуют равномерно распределенные усилия, параллельные оси Ox, а другая половина свободна от напряжений [4]).

Тогда

$$X_n=p \text{ при } -\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2};$$
$$X_n=0 \text{ для остальных значений } \vartheta;$$
$$Y_n=0 \text{ для всех } \vartheta.$$

---

[1]) $\frac{1}{\sigma^2}\Phi(\sigma)$ и $\frac{1}{\sigma}\Phi'(\sigma)$ суть граничные значения функций, голмофорных вне γ и исчезающих на бесконечности как ζ^{-3}; поэтому соответствующие интегралы равны нулю. Далее, $\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Phi(\sigma)}$ есть граничное значение функции $\frac{1}{\zeta^2}\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, голоморфной внутри γ, кроме $\zeta=0$, где она имеет простой полюс с главной частью $\bar{a}_1/\zeta$. Наконец, $\Psi(\sigma)$ есть граничное значение функции, голоморфной вне γ и имеющей при больших $|\zeta|$ вид

$$\frac{a_1'}{\zeta}+O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right).$$

[2]) Как было сказано, эти значения можно было написать заранее.

[3]) В упомянутой выше статье Д. М. Волков и А. Н. Назаров [1] непосредственно решают эту частную задачу, не выводя общих формул, таких, как формулы (8), (10).

[4]) Легко проверить, что предыдущие формулы применимы, несмотря на то, что X_n имеет разрывы.

Поэтому

$$X = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X_n\, d\vartheta = \pi R p, \qquad Y = 0,$$

и, значит,

$$a_1 = -\frac{p}{2(1+\varkappa)}, \qquad a_1' = \frac{\varkappa p}{2(1+\mu)}.$$

Остается вычислить интегралы, фигурирующие в формулах (8) и (10); оба эти интеграла равны следующему (так как $Y_n = 0$):

$$\int_\gamma \frac{X_n\, d\sigma}{\sigma-\zeta} = p\int_{-i}^{+i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -p\int_{-i}^{+i} \frac{d\sigma}{\zeta-\sigma},$$

где интеграл взят в положительном направлении по правой половине окружности, откуда

$$\int_\gamma \frac{X_n\, d\sigma}{\sigma-\zeta} = p\,[\ln(\zeta-\sigma)]_{\sigma=-i}^{\sigma=+i} = p\ln\frac{\zeta-i}{\zeta+i}$$

при надлежащем выборе ветви логарифма.

Подставляя найденное значение в формулы (8), (10), найдем явные выражения для $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, которые считаем излишним выписывать.

§ 88. Дальнейшие примеры. Приложение к некоторым другим граничным задачам. 1. Изложенный в § 84—87 метод решения применим, в частности, ко всем односвязным областям, конформные отображения которых на круг указаны в качестве примеров в § 48. Из числа этих примеров случай бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием подробно рассмотрен нами в § 82, 83. Случай конечной области, ограниченной улиткой Паскаля, рассмотрен в § 63, где мы применили метод разложения в ряды; применение метода § 84 гораздо быстрее приводит к цели. Мы предоставляем читателю решение основных задач для этого случая только что указанным способом. Случай бесконечной плоскости с гипотрохоидальным отверстием (§ 48, п. 4) подробно изучен при помощи метода § 84 Г. С. Шапиро [1] в применении к некоторым практически важным задачам (см. еще в следующем параграфе о работах Г. Н. Савина).

Решение первой основной задачи для области, ограниченной лемнискатой Бута (§ 48, п. 6), дано при помощи метода, указанного в § 85 Г. Н. Бухариновым [1].

Некоторые другие примеры, более интересные с точки зрения приложений, будут указаны в следующем параграфе.

2. Методом, аналогичным указанному в § 84—87, легко решается задача о соприкасании упругого тела с жестким профилем при отсутствии трения, когда область, занятая упругим телом, отображается на круг

при помощи рациональной функции. Решение задачи таким способом было дано автором в статье [19] и подробно изложено во втором издании этой книги. Более простое решение было дано в третьем издании и повторено в четвертом издании. Оно воспроизводится в следующей главе (§ 128).

3. Как было уже сказано в § 79а, задача об изгибе пластинки под влиянием нормальной нагрузки сводится в случае, когда края пластинки з а д е л а н ы, к основной бигармонической задаче, т. е. к такой же граничной задаче, что и первая основная задача плоской теории упругости, а в случае, когда края с в о б о д н ы,— к такой же задаче, что вторая основная задача. А. И. Каландия [1] и М. М. Фридман [2] (приблизительно одновременно) показали, что случай, когда края пластинки о п е р т ы, приводит к задаче, аналогичной некоторой задаче плоской теории упругости, а именно той, которая упомянута в предыдущем пункте (см. также § 128 и замечание к нему).

Поэтому, если область, занятая пластинкой, отображается на круг при помощи рациональной функции, к упомянутым случаям может быть непосредственно (или почти непосредственно для третьего случая) применен изложенный выше метод эффективного решения. Относительно третьего случая см. Каландия [2] [1]).

Отметим еще, что, как показал Л. А. Галин [3], метод комплексного представления решений в соединении с конформным отображением дает возможность получить точное решение первой основной граничной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием и в тех случаях, когда часть тела, полностью охватывающая отверстие, испытывает пластическую деформацию. Некоторые точные решения для такой же области при иных условиях нагружения приведены в монографии Г. Н. Савина [8].

Подобным же образом П. И. Перлин [1, 2] рассмотрел упруго-пластические задачи для бесконечной плоскости с отверстием довольно общего вида, как при полном, так и при частичном охвате отверстия пластической зоной, а также для некоторых двухсвязных областей.

Задачи такого типа, вообще говоря, весьма сложны, так как линия раздела упругой и пластической зон не известна заранее.

§ 89. Приложение к приближенному решению в общем случае. Как уже упоминалось во введении к настоящей главе, изложенные выше методы эффективного решения могут быть с успехом применены и к приближенному решению основных задач для односвязных областей, ограниченных практически произвольными контурами. Укажем теперь, как можно это сделать; при этом нам придется отчасти повторить сказанное в конце § 63.

---

[1]) См. также ранее опубликованные статьи А. И. Лурье [1, 2] и заметку М. М. Фридмана [1].

Пусть S — заданная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром L, и пусть соотношение

$$z = \omega(\zeta) \tag{1}$$

отображает область S на круг $|\zeta| < 1$. Будем сперва считать область S конечной. Тогда функция $\omega(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta| < 1$, и поэтому она разлагается для указанных значений ζ в ряд

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots; \tag{2}$$

мы считаем, что $c_0 = \omega(0) = 0$, но это, конечно, не обязательно.

Если теперь в разложении (2) взять лишь n первых членов, т. е. вместо $\omega(\zeta)$ взять полином

$$\omega_n(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n, \tag{3}$$

то соотношение

$$z = \omega_n(\zeta) \tag{4}$$

будет отображать на круг $|\zeta| < 1$ не область S, а некоторую другую область S_n. Если взять n достаточно большим, то, как уже было сказано в § 63, при известных, весьма общих предположениях относительно контура L области S, область S_n будет сколь угодно близка к данной области S. Практически же обычно достаточно оставить весьма небольшое число членов в разложении (2) для того, чтобы получить область, достаточно для данной цели близкую к S.

В очень многих случаях достаточно даже самое грубое приближение. Если, например, речь идет о применении уравнений теории упругости к таким телам, как горные породы (а это нередко делается на практике), которые лишь весьма отдаленно напоминают однородные тела, подчиняющиеся закону Гука, то ясно, что в этих случаях большая точность в вычислениях совершенно неуместна.

Итак, оставив достаточное для данной цели число членов разложения (2), мы можем практически решить данную задачу для области S_n; это решение будет вместе с тем приближенным решением для данной области S.

В случае бесконечной области, вместо разложения (2), будем иметь разложение вида

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \tag{2'}$$

(и здесь можно считать $c_0 = 0$), а вместо (3) —

$$\omega_n(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n, \tag{3'}$$

и все сказанное выше применимо также к данному случаю.

Вместо разложения $\omega(\zeta)$ в степенной ряд можно, конечно, воспользоваться любым другим разложением в ряд по рациональным функциям.

Можно доказать, что при известных общих предположениях относительно контура L и относительно выбранного способа разложения,

решение, полученное для области S_n, стремится к решению для данной области S, когда $n \to \infty$; доказательство можно найти в статье автора [6] и при более общих предположениях — в статье Д. И. Шермана [5].

Указанный только что прием приближенного решения дает хорошие результаты даже в том случае, когда контур L не гладкий, а имеет угловые точки, например представляет собой многоугольник.

Для отображения области, ограниченной прямолинейным многоугольником на круг, можно воспользоваться известной формулой Кристофеля — Шварца [1]), которая оказалась практически весьма полезной для интересующей нас здесь цели.

Указанный выше прием был с успехом применен Г. Н. Савиным к решению ряда практически важных задач. Отсылая читателя в первую

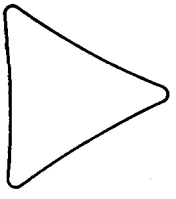


Рис. 40.

$$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3}\right)$$

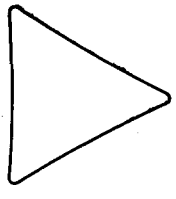


Рис. 41.

$$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45}\right)$$

очередь к монографии Г. Н. Савина [8], а также к другим его работам [1, 2] и к статье А. Н. Динника, А. Б. Моргаевского и Г. Н. Савина [1], мы ограничимся двумя примерами, заимствованными из статьи Г. Н. Савина [1] [2]), наглядно показывающими практическую пригодность интересующего нас приема [3]).

В качестве первого примера рассмотрим область, представляющую собой бесконечную плоскость с отверстием в виде равностороннего треугольника. В этом случае отображающая функция $\omega(\zeta)$ может быть представлена в виде

$$\omega(\zeta) = -A\int_1^{\zeta}(1-t^3)^{\frac{2}{3}}\frac{dt}{t^2} + \text{const},$$

где A — некоторая действительная постоянная, определяющая размеры треугольника. Разлагая в ряд, получим при надлежащем выборе произвольной постоянной в правой части:

$$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^5}{45} + \dots\right).$$

Если в этом разложении взять первые два или первые три члена, то вместо треугольника получим контуры, изображенные соответственно на рис. 40 и 41.

[1]) См., например, Лаврентьев и Шабат [1].

[2]) См. также Савин [8].

[3]) См. также статью Gray [1].

В качестве второго примера рассмотрим бесконечную плоскость с квадратным отверстием. В этом случае можно взять

$$\omega(\zeta) = -A\int_1^{\zeta}(1+t^4)^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2} + \text{const},$$

где A — действительная постоянная, определяющая размеры квадрата. Разлагая в ряд и подбирая надлежащим образом произвольную постоянную в правой части, получаем:

$$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 - \frac{1}{176}\zeta^{11} + \ldots\right).$$

Оставляя в этом разложении два, три или четыре члена, вместо квадрата получаем контуры, указанные на рис. 42, 43, 44.

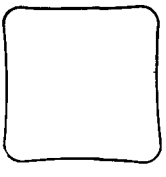


Рис. 42.

$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3\right)$

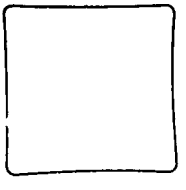


Рис. 43.

$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7\right)$

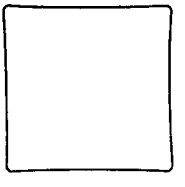


Рис. 44.

$\omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 - \frac{1}{176}\zeta^{11}\right)$

Мы видим, что уже три члена дают достаточно хорошее приближение [1]). В цитированных работах Г. Н. Савина подробно рассмотрены также случаи прямоугольных отверстий с различными отношениями сторон.

Для того чтобы больше не возвращаться к этому вопросу, упомянем здесь же, что указанный выше прием может быть также применен к полубесконечным областям, которые будут рассмотрены в следующем отделе этой главы.

Отметим, наконец, что указанный выше прием приближенного решения может быть с успехом применен и к случаю областей, ограниченных несколькими контурами, если соединить его с так называемым «альтернированным методом» («алгорифмом Шварца») или *методом последовательных приближений*, аналогичным тому, который был применен Шварцем к решению задачи Дирихле.

Этот метод позволяет свести решение данной граничной задачи для области, ограниченной несколькими контурами, к последовательному решению такой же задачи для нескольких областей, ограниченных одним

---

[1]) Несколько изменяя коэффициенты оставляемых членов разложения, можно получить еще лучшие приближения; см. § 154.

контуром каждая, при последовательно изменяющихся граничных заданиях. Точное решение требует бесконечного числа таких операций, но можно получить практически пригодное приближенное решение, если остановиться на определенном этапе.

Каждую отдельную задачу для областей, ограниченных одним контуром, можно также решать приближенно, пользуясь указанным выше приемом.

Описанный только что метод последовательных приближений разработан С. Г. Михлиным [5, 9, 13] и Д. И. Шерманом [5]; изложение результатов можно найти в книге С. Г. Михлина [13]. Отметим также работы А. Я. Горгидзе [1, 2]. Доказательство сходимости алгорифма Шварца при весьма общих условиях дано С. Л. Соболевым [2].

Метод последовательных приближений был применен С. Г. Михлиным [4] к решению первой основной задачи для полуплоскости с эллиптическим вырезом. Другим способом эта задача решена Д. И. Шерманом [4].

Отметим, наконец, сравнительно недавно опубликованные работы Д. И. Шермана [24—26], в которых даны новые удачные приемы эффективного решения некоторых граничных задач, представляющих значительный практический интерес.

III. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

До сих пор мы рассматривали только такие области, граница которых состоит из (конечных) замкнутых контуров. Изучение случая, когда граница есть разомкнутая линия, уходящая в бесконечность в обе стороны («полубесконечная область»), не представляет новых существенных затруднений. В подобных случаях удобно применять конформное отображение области не на круг, а на полуплоскость [1]). Не останавливаясь здесь на общем случае, мы ограничиваемся решением основных задач для полуплоскости и для полубесконечных областей определенного класса [2]).

---

[1]) Разумеется, никакой принципиальной разницы между этими двумя способами нет.

[2]) Общий случай полубесконечной области рассмотрен С. Г. Михлиным [7]. В недавно опубликованных статьях Тиффен (Tiffen [2], [3]) дает гораздо более, на мой взгляд, сложное решение задач, рассмотренных в настоящем отделе, в котором воспроизводится без существенных изменений изложение, данное во втором (1935 г.), третьем и четвертом изданиях настоящей книги. В частности, в статье [3] способ решения при помощи конформного отображения излагается применительно к тому самому случаю параболического контура, что у меня (см. § 95). Никаких ссылок на мои работы в этой статье не содержится, хотя в предшествующих статьях того же автора [1], [2] эти работы, в частности третье издание настоящей книги, упоминаются.

§ 90. Общие формулы и предложения для случая полуплоскости.

1. Пусть область S, занятая телом, состоит из «нижней» полуплоскости (рис. 45), ограниченной осью Ox, т. е. состоит из всех точек, для которых $y < 0$. В § 90, 91 настоящего отдела мы временно вернемся к обозначениям отдела II главы II, т. е. будем снова писать

$$\varphi(z), \quad \psi(z), \quad \Phi(z), \quad \Psi(z),$$

а не $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и т. д.

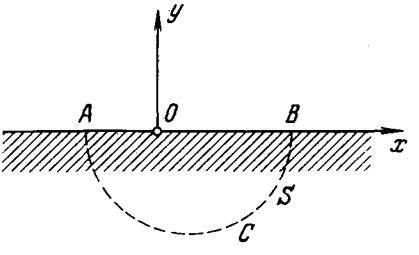


Рис. 45.

Относительно компонент напряжения мы будем предполагать, что они удовлетворяют условиям непрерывности и дифференцируемости, принятым во всем предыдущем.

Кроме того, мы будем считать, что *напряжения, а также вращение* [1], *стремятся к нулю, когда z удаляется в бесконечность* по любому пути, оставаясь внутри S.

Если бы контур области S не простирался в бесконечность, а был замкнутой кривой, то из этого условия следовало бы, что функции Φ и Ψ при больших $|z|$ имеют вид:

$$\Phi(z) = \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \ldots, \qquad \Psi(z) = \frac{\gamma_1'}{z} + \frac{\gamma_2'}{z^2} + \ldots$$

(см. § 36).

Мы поставим условие, что и в нашем случае функции Φ и Ψ при больших $|z|$ могут быть представлены так [2]):

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\gamma'}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Phi'(z) = -\frac{\gamma}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{1}$$

где γ, γ' — постоянные (по этому поводу см. также замечание в конце § 93).

Кроме того, очевидно, $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ будут голоморфны во всякой конечной области, заключенной в S.

К условиям (1) мы присоединим еще условие, что при больших $|z|$ имеем [3]):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \gamma \ln z + o(1) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \gamma' \ln z + o(1) + \text{const}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) Последнее несущественно, но несколько упрощает изложение.

[2]) Напомним, что символом $o\left(\frac{1}{z}\right)$ обозначается величина такая, что

$$\left|o\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{|z|},$$

где ε зависит лишь от модуля $|z|$ и стремится к нулю при $|z| \to \infty$.

[3]) Напомним, что $o(1)$ обозначает величину, такую, что $|o(1)| < \varepsilon$, где ε зависит лишь от $|z|$ и стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Условия (2) получались бы путем

в этих формулах следует выбрать одну какую-либо определенную ветвь многозначной функции $\ln z$, например $\ln|z| + i\vartheta$, где ϑ (аргумент z) изменяется от $\vartheta = -\pi$ до $\vartheta = 0$.

Наконец, добавим еще следующее условие: *главный вектор внешних усилий, приложенных к отрезку AB оси Ox, стремится к определенному пределу, когда концы его уходят в бесконечность* [1]) (A — влево, а B — вправо).

Выразим это условие. Если X', Y' суть компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к AB, то по формуле (2) § 33 имеем [2]):

$$X' + iY' = +i\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B, \tag{3}$$

где, напоминаем,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)}. \tag{4}$$

Для того чтобы иметь право применить формулу (2) § 33 к отрезку AB самой границы, следовало бы наложить некоторые условия на поведение выражения (4) вблизи границы. Но можно обойтись и без каких-либо предположений, кроме сделанных выше, если заменить вычисление главного вектора усилий, приложенных к отрезку AB, вычислением главного вектора усилий, приложенных к любой простой дуге $A'B'$, расположенной в S, концы A', B' которой бесконечно близки к точкам A, B (ср. сказанное в § 35). Например, в качестве дуги $A'B'$ можно взять дугу, получаемую из полуокружности ACB (рис. 45) удалением бесконечно малых ее частей, примыкающих к точкам A, B.

В дальнейшем для упрощения обозначений мы будем писать A, B вместо A', B', что не может вызвать недоразумений.

Если A и B находятся достаточно далеко и по разные стороны от O, то формулы (1), (2), (4) дадут:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B = \gamma \ln\frac{r''}{r'} + \gamma\pi i + \bar{\gamma}' \ln\frac{r''}{r'} - \bar{\gamma}'\pi i + \varepsilon, \tag{3'}$$

где r' и r'' — расстояния точек A и B до O, а ε — сколь угодно малая величина (стремящаяся к нулю при возрастании r' и r''). Для того чтобы предыдущее выражение осталось ограниченным при всяких (не зависящих друг от друга) сколь угодно больших r' и r'', очевидно необходимо

интегрирования из условий (1), если бы в правых частях (1), вместо $o\left(\frac{1}{z}\right)$, мы бы взяли, например, $o\left(\frac{1}{z^{1+\mu}}\right)$, где μ — положительная постоянная (сколь угодно малая).

[1]) Это условие всегда выполнено, если загружен лишь конечный участок границы.

[2]) Мы берем в правой части знак $+$, так как, двигаясь от A к B, мы оставляем область S справа, а не слева.

и достаточно условие

$$\gamma + \bar{\gamma}' = 0, \tag{5}$$

каковое мы и примем. Тогда главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных ко всей оси Ox, будет дан формулой

$$X + iY = i\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -\pi(\gamma - \bar{\gamma}'). \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует:

$$\gamma = -\frac{X+iY}{2\pi}, \qquad \gamma' = \frac{X-iY}{2\pi}. \tag{7}$$

Итак, будем иметь окончательно при больших $|z|$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \\ \Phi'(z) &= \frac{X+iY}{2\pi z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \frac{X-iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Заметим наконец, что при принятых нами условиях компоненты

$$X_x,\ Y_y,\ X_y$$

напряжения будут иметь порядок $O\left(\frac{1}{z}\right)$, а компоненты смещения будут при больших $|z|$ иметь вид

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\gamma\ln z - \bar{\gamma}'\ln\bar{z} - \bar{\gamma}\frac{z}{\bar{z}} + o(1) + \text{const} =$$

$$= -\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi}\ln z - \frac{X+iY}{2\pi}\ln\bar{z} + \frac{X-iY}{2\pi}\frac{z}{\bar{z}} + o(1) + \text{const}. \tag{8}$$

Если $X = Y = 0$, то X_x, Y_y, X_y будут иметь порядок $o\left(\frac{1}{z}\right)$, а $u + iv$ будет ограниченной величиной.

Относительно области S можно поставить такие же основные задачи, как и в случаях, рассмотренных в предыдущих отделах настоящей главы. Надо только заботиться о том, чтобы поведение задаваемых на границе величин согласовывалось на больших расстояниях с поставленными здесь условиями.

2. В первой основной задаче задаются $Y_y = N(t)$, $X_y = T(t)$ на оси Ox как функции абсциссы t. Легко вычислить на основании формул (1'), что эти величины должны удовлетворять при больших $|t|$ условиям:

$$N = o\left(\frac{1}{t}\right), \qquad T = o\left(\frac{1}{t}\right). \tag{9}$$

Во второй основной задаче заданные на Ox функции u и v должны удовлетворять на основании формулы (8) условиям:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu(u+iv) &= -\frac{\varkappa+1}{2\pi}(X+iY)\ln t + c + o(1) \qquad \text{при } t>0, \\ 2\mu(u+iv) &= -\frac{\varkappa+1}{2\pi}(X+iY)\ln|t| + c + \\ &\quad + \frac{i(\varkappa-1)}{2}(X+iY) + o(1) \qquad \text{при } t<0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где c — постоянная.

Аналогичные условия для основной смешанной задачи читатель легко составит сам.

В случае второй основной задачи, а также смешанной, мы будем считать заданными величины X, Y.

3. Решение только что указанных основных задач будет дано ниже (§ 93, 94, 113, 114). Здесь же мы ограничимся теоремами единственности.

Теоремы единственности для нашего случая легко доказываются способом, вполне аналогичным тому, который был изложен в § 40 для случая бесконечной области. В нашем случае следует применить интегральную формулу (4) § 40 к области, ограниченной отрезком AB границы и полуокружностью ACB (рис. 45), и затем перейти к пределу, когда A и B уходят в бесконечность в противоположные стороны. Указанное доказательство непосредственно применимо к случаю, когда компоненты смещений и напряжений непрерывны вплоть до границы, не считая бесконечно удаленной точки, где они ведут себя согласно принятым выше условиям.

Таким же образом легко переносятся на наш случай доказательства теорем единственности для первой и второй основных задач, приведенные в § 42, в предположении, что рассматриваемые решения регулярны, т. е. что соответствующие им функции $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ непрерывно продолжимы на все конечные точки границы.

Добавим, что в силу теорем единственности, решения второй и смешанной задач определяются вполне, а решение первой основной задачи — с точностью до жесткого перемещения, но лишь поступательного; последнее вытекает из того, что в силу принятого условия, вращения, соответствующие рассматриваемым решениям, исчезают на бесконечности.

Замечание 1. Формулы (1), (2) или (1′), (2′) можно заменить другими, более удобными для изучения поведения рассматриваемых функций вблизи границы. Например, вместо формул (2′), можем, очевидно, написать:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi}\ln(z-z_0) + \varphi^*(z) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \quad\frac{X-iY}{2\pi}\ln(z-z_0) + \psi^*(z) + \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{2″}$$

где z_0 — произвольная постоянная точка вне S (т. е. точка верхней полуплоскости), а $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ — функции, голоморфные в S, порядка $o(1)$ при больших $|z|$.

Замечание 2. О сосредоточенных силах, приложенных к границе. Если в формулах (2′) оставить только первые члены, т. е. взять

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi}\ln z, \qquad \psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi}\ln z \tag{11}$$

и применить их ко всей полуплоскости S, то, как легко видеть, они будут соответствовать действию сосредоточенной силы (X, Y), приложенной к границе в начале координат. Действительно, легко вычислить, что при обходе по бесконечно малому полукругу вокруг точки O (снизу) выражение $\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}$ прирастет на $i(X+iY)$, а следовательно, главный вектор усилий, приложенных (сверху) к этому полукругу, равен как раз (X, Y); кроме того, как легко подсчитать, главный момент тех же усилий относительно начала координат равен нулю.

Компоненты напряжений и смещений, соответствующие функциям φ и ψ, т. е. действию сосредоточенной силы, легко вычислить по общим формулам § 32 или § 39.

Например, для полярных компонент напряжения по формулам § 39 имеем:

$$\widehat{rr}+\widehat{\vartheta\vartheta} = 4\operatorname{Re}\varphi'(z) = -4\operatorname{Re}\frac{X+iY}{2\pi r}e^{-i\vartheta} = -\frac{2}{\pi r}(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta),$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}-\widehat{rr}+2i\widehat{r\vartheta} = 2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]e^{2i\vartheta} = \frac{2}{\pi r}(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta),$$

откуда

$$\widehat{rr} = -\frac{2}{\pi r}(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta), \qquad \widehat{\vartheta\vartheta}=0, \qquad \widehat{r\vartheta}=0. \tag{12}$$

Полученное решение задачи о действии сосредоточенной силы на границу полуплоскости [1]) совпадает по существу с решением, найденным Фламаном (Flamant) [2]).

§ 91. Общие формулы для полубесконечных областей. Перейдем теперь к рассмотрению полубесконечных областей и начнем с обобщения формул предыдущего параграфа на этот случай.

Пусть L — граница области S, представляющая собой простую разомкнутую линию, уходящую обоими концами в бесконечность. Линия L разбивает плоскость на две части, одна из которых и есть S; вторую часть мы будем обозначать через S'. Положительным направлением на L мы будем считать то, которое оставляет область S *слева*.

---

[1]) Эта задача представляет собой двумерный аналог задачи о действии сосредоточенной силы на границу тела, занимающего полупространство (границей которого служит неограниченная плоскость), т. е. так называемой задачи Буссинеска.

[2]) См. Love [1], § 149 и 150.

Мы будем считать, что линия L обладает следующим свойством: если M_0 есть некоторая постоянная точка, то лучи M_0A, M_0B, проведенные к двум точкам A, B на L, стремятся к определенным положениям, когда A и B уходят в бесконечность, двигаясь по L в противоположных направлениях.

Пусть $\Pi(M_0)$ обозначает угол (снабженный знаком), который описывает луч M_0M, когда точка M, двигаясь по L в положительном направлении, описывает всю эту линию. Мы будем говорить, что $\Pi(M_0)$ есть угол, под которым видна L из M_0. Легко видеть, что значение $\Pi(M_0)$ для всех точек, расположенных по одну сторону от L, будет одним и тем же и что углы Π, Π', под которыми видна L из точек, расположенных соответственно в областях S и S', связаны соотношением

$$\Pi - \Pi' = 2\pi. \tag{1}$$

Например, если S есть нижняя полуплоскость, то граница ее L расположена вдоль оси Ox, но положительным направлением L следует считать направление, противоположное Ox (ибо, двигаясь по L в положительном направлении, мы должны иметь область S слева). Поэтому для точек M_0 нижней полуплоскости мы будем иметь $\Pi = \pi$, а для точек M_0 верхней — будем иметь $\Pi' = -\pi$.

Мы примем, что и в рассматриваемом случае полубесконечной области функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\Phi'(z)$ подчинены условию иметь при больших $|z|$ вид (ср. предыдущий параграф):

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\gamma'}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Phi'(z) = -\frac{\gamma}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

или, что, очевидно, сводится к тому же,

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\gamma}{z - z_0} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi(z) = \frac{\gamma'}{z - z_0} + o\left(\frac{1}{z}\right), \\ \Phi'(z) &= -\frac{\gamma}{(z - z_0)^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где z_0 — некоторая (произвольная) постоянная точка области S' (т. е. не принадлежащая S); в последних формулах $o\left(\frac{1}{z}\right)$, $o\left(\frac{1}{z^2}\right)$ суть символы функций, голоморфных в S и имеющих при больших $|z|$ указанный порядок.

К этим условиям мы присоединим еще следующие (ср. предыдущий параграф):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \gamma \ln(z - z_0) + o(1) + \text{const}, \\ \psi(z) &= \gamma' \ln(z - z_0) + o(1) + \text{const}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в этих формулах $o(1)$ есть символ функций, голоморфных в S и стремящихся к нулю, когда $|z| \to \infty$.

Будем, далее, считать, как в предыдущем параграфе, что главный вектор внешних усилий, приложенных к дуге AB контура L, стремится

к определенному пределу (X, Y), когда точки A и B уходят в бесконечность в противоположных направлениях.

В нашем случае вместо формулы (3′) § 90, будем, как легко видеть, иметь:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B=\gamma\ln\frac{r''}{r'}+\gamma\Pi' i+\bar{\gamma}(e^{2i\beta}-e^{2i\alpha})+\bar{\gamma}'\ln\frac{r''}{r'}-\bar{\gamma}'\Pi' i+\varepsilon, \quad (3')$$

где, как выше, Π' есть угол, под которым видна линия L из точек области S', а α, β обозначают углы (со знаком), составляемые с осью Ox предельными положениями лучей M_0A и M_0B, проведенных из какой-либо неподвижной точки M_0, когда A и B уходят в бесконечность, двигаясь по L, первая в отрицательном направлении, вторая — в положительном; r' и r'' обозначают расстояния точки z_0 соответственно до A и B, а ε — величина, стремящаяся к нулю при удалении A и B в бесконечность. Ясно, что можно считать

$$\beta-\alpha=\Pi'. \quad (4)$$

Так же, как в предыдущем параграфе, заключаем, что должно быть

$$\gamma+\bar{\gamma}'=0 \quad (5)$$

и что [1])

$$X+iY=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_L=(\gamma-\bar{\gamma}')\Pi'-i(e^{2i\beta}-e^{2i\alpha})\bar{\gamma},$$

или, принимая во внимание формулу (5),

$$X+iY=2\Pi'\gamma-i(e^{2i\beta}-e^{2i\alpha})\bar{\gamma}. \quad (6)$$

Будем теперь считать, что $\Pi'\neq 0$, т. е. что $\Pi\neq 2\pi$. Тогда, присоединяя к формуле (6) соотношение, получаемое переходом к сопряженным значениям, и решая относительно γ, $\bar{\gamma}$, легко получаем

$$\gamma=\frac{2\Pi'(X+iY)+i(e^{2i\beta}-e^{2i\alpha})(X-iY)}{4(\Pi'^2-\sin^2\Pi')}, \quad (7)$$

и на основании формулы (5)

$$\gamma'=-\frac{2\Pi'(X-iY)-i(e^{-2i\beta}-e^{-2i\alpha})(X+iY)}{4(\Pi'^2-\sin^2\Pi')}. \quad (8)$$

Мы считали при выводе этих формул, что $\Pi'\neq 0$. Если $\Pi'=0$, то формула (6) дает $X=Y=0$. Это показывает, что при $\Pi'=0$ для существования решения, подчиняющегося поставленным выше условиям, необходимо, чтобы главный вектор внешних усилий, приложенных к границе, был равен нулю.

---

[1]) В аналогичной формуле предыдущего параграфа мы считали, что граница области S описывается в отрицательном направлении; поэтому в той формуле мы взяли

$$+i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{-\infty}^{+\infty} \text{ вместо } -i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_L.$$

§ 92. Основные формулы, связанные с конформным отображением на полуплоскость. При решении задач теории упругости для полубесконечных областей удобнее применять отображение не на круг, а на полуплоскость [1]).

Так же, как при отображении на круг, удобно ввести на плоскости z упругого тела криволинейные координаты, связанные с отображением.

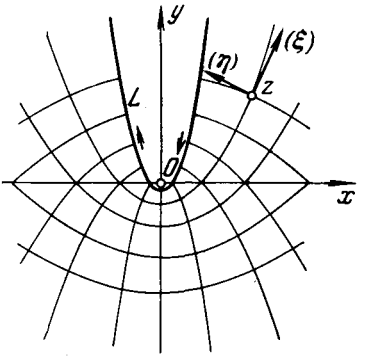


Рис. 46а.

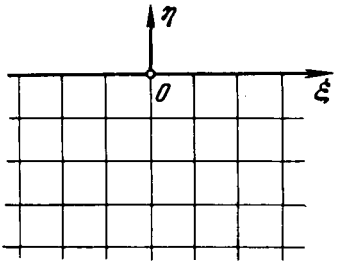


Рис. 46б.

Будем по-прежнему обозначать нашу область через S, а ее границу через L. Пусть

$$z = \omega(\zeta) \quad (z = x + iy, \ \zeta = \xi + i\eta) \tag{1}$$

— соотношение, отображающее S на нижнюю половину плоскости ζ, т. е. на полуплоскость $\eta < 0$, так, чтобы конечным точкам соответствовали конечные.

Прямым $\eta = \text{const}$, принадлежащим этой полуплоскости, соответствуют, очевидно, некоторые разомкнутые линии в области S, уходящие обоими концами в бесконечность; эти линии мы будем обозначать через (ξ). Точно так же полупрямым $\xi = \text{const}$, которые принадлежат нижней половине плоскости ζ, соответствуют в S линии (η), начинающиеся на L и уходящие в бесконечность (рис. 46а, 46б).

Так как каждой паре величин (ξ, η) при $\eta < 0$ соответствует в области S вполне определенная точка $z = \omega(\xi + i\eta)$ плоскости z, мы можем рассматривать ξ и η как криволинейные координаты на плоскости z. Линии (ξ) и (η) образуют ортогональную сеть координатных линий.

Пусть z — некоторая точка области S. Проведем из z касательные к линиям (ξ), (η), проходящим через нее, соответственно в сторону возрастания ξ и η. Эти касательные, которые мы также будем обозначать через (ξ) и (η), будут осями криволинейных координат в точке z (рис. 46а); все это совершенно аналогично тому, что было сказано в § 49.

---

[1]) Как уже было сказано, принципиальной разницы здесь нет.

Пусть A — некоторый вектор с началом в точке $z = \omega(\xi + i\eta)$ и пусть A_x, A_y — его проекции на оси Ox, Oy, а A_ξ, A_η — проекции на оси (ξ) и (η). Имеем, как в § 49:

$$A_\xi + iA_\eta = e^{-i\alpha}(A_x + iA_y), \tag{2}$$

где α — угол, составляемый осью (ξ) с осью Ox и отсчитываемый от Ox в положительном направлении.

Для вычисления $e^{i\alpha}$ придадим точке z смещение dz в направлении касательной (ξ); тогда соответствующая точка ζ получит смещение $d\xi > 0$ в направлении оси ξ на плоскости ζ. Имеем, очевидно:

$$dz = |dz|\, e^{i\alpha} = |\omega'(\zeta)|\, e^{i\alpha}\, d\xi, \quad dz = \omega'(\zeta)\, d\xi,$$

откуда выводим:

$$e^{i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}, \quad e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}. \tag{3}$$

Итак, имеем формулу

$$A_\xi + iA_\eta = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}(A_x + iA_y). \tag{2'}$$

Будем обозначать через v_ξ, v_η компоненты смещения по отношению к осям (ξ), (η) криволинейных координат, а через $\widehat{\xi\xi}$, $\widehat{\eta\eta}$, $\widehat{\xi\eta}$ — компоненты напряжения по отношению к тем же осям. Имеем на основании формулы (2'):

$$v_\xi + iv_\eta = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}(u + iv), \tag{4}$$

где u, v — компоненты смещения по отношению к осям Ox, Oy.

Связь компонент напряжения $\widehat{\xi\xi}$, $\widehat{\eta\eta}$, $\widehat{\xi\eta}$ с компонентами X_x, Y_y, X_y выражается формулами (§ 8):

$$\widehat{\xi\xi} + \widehat{\eta\eta} = X_x + Y_y, \quad \widehat{\eta\eta} - \widehat{\xi\xi} + 2i\widehat{\xi\eta} = (Y_y - X_x + 2iX_y)\, e^{2i\alpha}, \tag{5}$$

причем, на основании формулы (3)

$$e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)\,\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}\,\omega'(\zeta)} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}. \tag{3'}$$

Выражения компонент смещения и напряжения через функции комплексного переменного ζ мы можем найти совершенно так, как в § 50, если условимся обозначать через

$$\varphi_1(z),\ \psi_1(z),\ \Phi_1(z),\ \Psi_1(z)$$

то, что в начале главы II (а также в начале этого отдела) было обозначено через

$$\varphi(z),\ \psi(z),\ \Phi(z),\ \Psi(z),$$

и положим, как в § 50:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)], \quad \psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)], \\ &\Phi(\zeta) = \Phi_1[\omega(\zeta)] = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \Psi_1[\omega(\zeta)] = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пользуясь теперь формулами, выражающими компоненты X_x, Y_y, X_y через функции φ_1, ψ_1, Φ_1, Ψ_1 (§ 32), и формулами (5), (3′), получим без всякого труда

$$\widehat{\xi\xi}+\widehat{\eta\eta}=2\left[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}\right]=4\operatorname{Re}\Phi(\zeta), \tag{7}$$

$$\widehat{\eta\eta}-\widehat{\xi\xi}+2i\widehat{\xi\eta}=\frac{2}{\overline{\omega'(\zeta)}}\left\{\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)\right\}. \tag{8}$$

Выражение для $v_\xi+iv_\eta$ легко получим, пользуясь формулой (4) и формулой

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}. \tag{9}$$

Наконец, складывая формулы (7) и (8), получим еще одну полезную формулу:

$$\widehat{\eta\eta}+i\widehat{\xi\eta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}+\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}}\left\{\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)\right\}. \tag{10}$$

§ 93. Решение первой основной задачи для полуплоскости. Пусть тело S занимает нижнюю полуплоскость. По условию задачи имеем:

$$Y_y=N(t),\quad X_y=T(t)\ \text{на}\ Ox, \tag{1}$$

где $N(t)$ и $T(t)$ — заданные функции абсциссы t (нормальное и касательное напряжения).

По формуле (8) § 32 имеем, применяя обозначения § 90, 91:

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}. \tag{2}$$

Значит, граничное условие может быть написано так [1]):

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}+t\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}=N-iT, \tag{3}$$

или, что все равно,

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}+t\Phi'(t)+\Psi(t)=N+iT. \tag{4}$$

Под левой частью формулы (3) следует подразумевать граничное значение правой части формулы (2); аналогично для формулы (4). В дальнейшем для простоты мы будем считать (если противное не оговорено), что существуют и граничные значения $\Phi(t)$, $\Phi'(t)$, $\Psi(t)$ функций $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$ в отдельности.

Мы будем предполагать далее, что N и T — непрерывные функции, удовлетворяющие условию (9) § 90, т. е.

$$N=o\left(\frac{1}{t}\right),\quad T=o\left(\frac{1}{t}\right). \tag{5}$$

---

[1]) Можно было бы, конечно, воспользоваться для составления этого условия формулой (23) § 41; не надо только упускать из виду, что величина, обозначенная нами здесь через T, есть величина — T упомянутой формулы; это происходит от того, что, двигаясь по оси Ox в положительном направлении, мы оставляем область S справа, а не слева.

Выражая, что функция $\Psi(t)$, определяемая условием (4), представляет собой граничное значение некоторой функции $\Psi(z)$, голоморфной в нижней полуплоскости и исчезающей на бесконечности [1]), получаем, применяя формулу (21) § 76:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\Phi(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\overline{\Phi'(t)}\,dt}{t-z}=0,$$

где z — произвольная точка нижней полуплоскости.

Если теперь примем во внимание, что $\Phi(t)$ — граничное значение функции $\Phi(z)$, голоморфной в нижней полуплоскости и исчезающей на бесконечности, а $\overline{\Phi(t)}$, $t\overline{\Phi'(t)}$ — граничные значения функций $\bar{\Phi}(z)$, $z\bar{\Phi}'(z)$, голоморфных в верхней полуплоскости и также исчезающих на бесконечности [2]), то на основании формул (2′), (2) § 72 заключаем, что в предыдущей формуле второй интеграл равен $-\Phi(z)$, а два последних равны нулю. Следовательно,

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{t-z}\,dt. \tag{6}$$

Найдя $\Phi(z)$, мы найдем и $\Psi(z)$, применяя формулу (2′) § 72, так как граничное значение $\Psi(t)$ дается формулой (4). Таким образом, получим после простых преобразований, основанных на формулах § 72:

$$\begin{aligned}\Psi(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N+iT}{t-z}\,dt-\Phi(z)-z\Phi'(z)=\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T\,dt}{t-z}+\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{(t-z)^2}\,dt=\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N+iT}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{(t-z)^2}\,t\,dt.\end{aligned} \tag{7}$$

Легко проверить на основании сказанного в § 68, в п. 1 § 69 и в конце § 71, что если функции $N(t)$, $T(t)$ и их первые производные $N'(t)$, $T'(t)$ удовлетворяют условию H в конечных точках, а произведения $tN(t)$, $tT(t)$, $t^2N'(t)$, $t^2T'(t)$ удовлетворяют условию H также в окрестности бесконечно удаленной точки, то выражения, полученные для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяют всем поставленным условиям. В частности, функции $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$ непрерывны вплоть до границы, а при больших $|z|$ имеют требуемый вид, определяемый формулами (1) и (5) § 90. Таким образом задача решена.

---

[1]) Это следует из формул (1) § 90.

[2]) См. предыдущее примечание.

Результат по существу совпадает с результатом Г. В. Колосова [1], полученным иным путем. Позднее М. А. Садовский [1, 2] дал также (независимо от Г. В. Колосова) решение этой задачи [1]).

Замечание 1. Легко непосредственно проверить на основании результатов, указанных в § 68 и в п. 2 § 69, что если $N(t)$ и $T(t)$ удовлетворяют лишь условию H (включая бесконечно удаленную точку), то компоненты смещения и напряжения, соответствующие функциям $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, определяемым формулами (6), (7), будут непрерывны вплоть до границы и что граничное условие (1) будет удовлетворено. Функции же $\Phi'(z)$ и $\Psi(z)$ при этом могут не быть непрерывно продолжимы на границу, что и не требуется постановкой задачи; непрерывно продолжимыми на границу будут функция $\Phi(z)$ и комбинация $\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)$.

Замечание 2. Правые части формул (6) и (7) представляют собой, очевидно, голоморфные функции как в нижней, так и в верхней полуплоскости, но они, вообще говоря, не являются аналитическими на общей границе Ox полуплоскостей. Однако ясно, что если какой-либо участок границы остается незагруженным, то правые части формул (6) и (7) будут аналитическими также на этом участке и что, следовательно, функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ могут быть аналитически продолжены из нижней полуплоскости в верхнюю через этот участок.

Легко доказать это свойство решения непосредственно, не опираясь на формулы (6) и (7). Действительно, введем обозначение

$$\Omega(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Psi(z); \tag{8}$$

так как по предположению функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ голоморфны в нижней полуплоскости, то $\Omega(z)$ также голоморфна в ней. Рассмотрим далее функции

$$\overline{\Phi}(z), \quad \Omega(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z),$$

голоморфные в верхней полуплоскости. Как показывают формулы (3), (4), на любой незагруженной части оси Ox будем иметь:

$$\Phi(t) = \overline{\Omega}(t), \quad \overline{\Phi}(t) = \Omega(t), \tag{9}$$

где под $\Phi(t)$, $\Omega(t)$ подразумеваются граничные значения, принимаемые соответствующими функциями при $z \to t$ из нижней полуплоскости, а под $\overline{\Phi}(t)$, $\overline{\Omega}(t)$ — граничные значения, принимаемые соответствующими функциями при $z \to t$ из верхней полуплоскости.

Из первого равенства (9) следует, что функция $\overline{\Omega}(z)$, голоморфная в верхней полуплоскости, представляет собой аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$ из нижней полуплоскости в верхнюю, что и доказывает аналитическую продолжимость функции $\Phi(z)$. Аналогично, на основании второго равенства (9), заключаем, что функция $\Omega(z)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, где она принимает значение $\overline{\Phi}(z)$. Отсюда на основании формулы (8) следует и аналитическая продолжимость функции $\Psi(z)$. Таким образом, наше утверждение доказано.

[1]) У названных авторов отсутствует строгое исследование решения.

Из него, в частности, следует, что если загружен только конечный участок границы, то функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ разложимы в ряды Лорана при достаточно больших $|z|$.

Полученные здесь результаты дают простое средство изучить поведение функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ при больших $|z|$, если задан характер поведения компонент напряжения на бесконечности. Вспомним, что в § 90 мы a priori задались поведением функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ на бесконечности, что, конечно, носит искусственный характер. Теперь же легко устранить (или уменьшить) эту искусственность, а именно: нетрудно доказать, что функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ *необходимо* имеют вид, определяемый формулами (1) § 90, если загружен только конечный участок границы и если напряжения подчинены, например, условию, что величины

$$X_x,\ Y_y,\ X_y,\quad y\cdot\frac{\partial(X_x+Y_y)}{\partial y}$$

стремятся к нулю, когда z удаляется в бесконечность по любому пути (оставаясь, разумеется, в нижней полуплоскости). Мы не останавливаемся здесь на доказательстве, которое читатель может легко провести.

Замечание 3. В работах Л. А. Галина (см. его монографию [4]) решения основных задач для полуплоскости S выражаются через две аналитические функции $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, определяемые формулами (при наших обозначениях):

$$\omega_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N\,dt}{t-z},\quad \omega_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T\,dt}{t-z}.$$

Эти функции легко выразить через функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, а именно, из формул (6) и (7) непосредственно вытекает, что

$$\omega_1(z)=-\Phi(z)-\frac{z}{2}\Phi'(z)-\frac{1}{2}\Psi(z),$$

$$\omega_2(z)=\frac{iz}{2}\Phi'(z)+\frac{i}{2}\Psi(z).$$

Так же просто выражаются функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ через функции $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, а именно:

$$\Phi(z)=-\omega_1(z)+i\omega_2(z),$$
$$\Psi(z)=-2i\omega_2(z)+z\omega_1'(z)-iz\omega_2'(z).$$

Поэтому использование функций $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ вместо функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ не приводит к принципиально новым методам решения основных граничных задач.

§ 93а. Пример. В качестве примера рассмотрим случай, когда отрезок

$$-a\leqslant t\leqslant+a$$

оси Ox подвержен равномерному давлению p, остальная же часть границы свободна от внешних усилий. В этом случае $T=0$ для всех

значений t,

$$N = -p \quad \text{при} \quad -a \leqslant t \leqslant +a,$$

$N = 0$ для остальных значений t, и формулы (6), (7) § 93 дают [1]):

$$\Phi(z) = \frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{dt}{t-z} = -\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{dt}{z-t}, \qquad \Psi(z) = -\frac{zp}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{dt}{(t-z)^2},$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{p}{2\pi i}[\ln(z-t)]_{t=-a}^{t=+a} = \frac{p}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a}, \qquad \Psi(z) = -\frac{paz}{\pi i\,(z^2-a^2)}. \tag{1}$$

Под выражением $\ln\frac{z-a}{z+a}$ следует понимать приращение функции $\ln(z-t)$ при непрерывном изменении t от $-a$ до $+a$. Для большей ясности положим $z - t = \varrho e^{-i\theta}$, где $\varrho = |z-t|$, а θ обозначает угол, составляемый вектором, имеющим начало в t, а конец — в z, с осью Ox, причем этот угол мы считаем заключенным между 0 и π и отсчитываем его от положительного направления *Ox по часовой стрелке* (рис. 47).

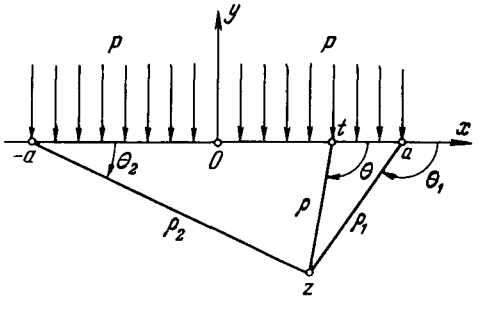


Рис. 47.

Тогда можем считать (обозначения см. на рис. 47):

$$\left.\begin{aligned} \ln(z-t) &= \ln\varrho - i\theta, \\ \ln\frac{z-a}{z+a} &= \ln\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - i(\theta_1-\theta_2); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$\theta_1 - \theta_2$ представляет собой угол, под которым виден загруженный отрезок из точки z.

Вычислим компоненты напряжения. Имеем по много раз применявшимся формулам:

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = -\frac{2p}{\pi}(\theta_1-\theta_2), \tag{3}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = \frac{2pa}{\pi i}\frac{\bar{z}-z}{z^2-a^2} =$$

$$= -\frac{4pay}{\pi(z^2-a^2)} = -\frac{4pay(\bar{z}^2-a^2)}{\pi(z^2-a^2)(\bar{z}^2-a^2)}, \tag{4}$$

откуда наконец:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{p}{\pi}(\theta_1-\theta_2) + \frac{2pay(x^2-y^2-a^2)}{\pi[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2]}, \\ Y_y &= -\frac{p}{\pi}(\theta_1-\theta_2) - \frac{2pay(x^2-y^2-a^2)}{\pi[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2]}, \\ X_y &= \frac{4paxy^2}{\pi[(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2]}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Мы применяем результаты предыдущего параграфа, несмотря на то, что в нашем случае заданная функция $N(t)$ имеет разрывы; правильность окончательного результата может быть проверена непосредственно.

Решение этой задачи дано впервые Мичеллом (Michell [3]) и затем получено Г. В. Колосовым [1, 2] [1]) иным путем.

Закон распределения напряжений станет более наглядным, если в формуле (4) представить $z^2 - a^2$ следующим образом:

$$z^2 - a^2 = \varrho_1 \varrho_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)},$$

откуда

$$Y_y - X_x + 2iX_y = -\frac{4pay}{\varrho_1\varrho_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{4'}$$

что вместе с формулой (3) дает:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{p}{\pi}(\theta_1-\theta_2) + 2pa\frac{y\cos(\theta_1+\theta_2)}{\varrho_1\varrho_2}, \\ Y_y &= -\frac{p}{\pi}(\theta_1-\theta_2) - 2pa\frac{y\cos(\theta_1-\theta_2)}{\varrho_1\varrho_2}, \\ X_y &= -2pa\frac{y\sin(\theta_1+\theta_2)}{\varrho_1\varrho_2}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Эти формулы непосредственно показывают, что компоненты напряжения непрерывны вплоть до границы, если исключить точки $t = -a$, $t = +a$, где они перестают быть непрерывными, *оставаясь*, однако, *ограниченными* [2]). Ясно также, что граничное условие удовлетворено.

Легко также вычислить компоненты смещения и убедиться, что они остаются непрерывными вплоть до *всей* границы (включая точки $t = \pm a$), если не считать бесконечно удаленной точки [3]).

Так же просто получается решение для случая постоянного касательного напряжения, приложенного к отрезку границы.

§ 94. Решение второй основной задачи. В этом случае граничное условие можно написать так (применяем обозначения § 90, 91):

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu(g_1 + ig_2), \tag{1}$$

или

$$\varkappa\overline{\varphi(t)} - t\varphi'(t) - \psi(t) = 2\mu(g_1 - ig_2). \tag{2}$$

Будем считать, что на бесконечности смещения остаются ограниченными; это эквивалентно условию $X = Y = 0$ согласно сказанному в § 90 (более общий случай, рассмотренный в § 90, легко свести к предыдущему при помощи приема, аналогичного тому, который мы не раз уже применяли [4]); ср. § 78).

---

[1]) В обоих местах у Г. В. Колосова опечатка в выражении для X_y: вместо a напечатано a^2.

[2]) Это станет ясным, если заметить, что $y = -\varrho_1 \sin\theta_1 = -\varrho_2 \sin\theta_2$.

[3]) При $|z| \to \infty$ компоненты смещения возрастают как $\ln|z|$.

[4]) Можно еще заменить условие (1) условием, получаемым дифференцированием (1) по t; тогда нам придется иметь дело лишь с функциями $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, и трудности, связанные с присутствием логарифмических членов в $\varphi(z)$, $\psi(z)$, устранятся; таким способом задача будет решена в § 113, п. 2.

При этом и при введенных раньше (§ 90) условиях функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z) = \Phi(z)$, $\psi'(z) = \Psi(z)$, голоморфные в нижней полуплоскости, должны будут удовлетворять условиям (1′), (2′) § 90, в которых следует положить $X = Y = 0$. Из этих условий мы будем теперь учитывать лишь следующие:

$$\varphi(z) = o(1), \qquad \psi(z) = c + o(1), \qquad \varphi'(z) = o\left(\frac{1}{z}\right), \tag{3}$$

где c — некоторая постоянная, не заданная заранее [1]); мы отбросили постоянное слагаемое в выражении для $\varphi(z)$, что всегда можно сделать, не нарушая общности.

Далее, мы должны на основании формулы (10) § 90 считать, что при больших $|t|$ заданные функции подчинены условию

$$g_1 + ig_2 = G + o(1), \tag{4}$$

где G — постоянная, вообще комплексная. Мы будем кроме того, считать, что $g_1 + ig_2$ удовлетворяет условию H, включая бесконечно удаленную точку.

Выражая, что функция $\psi(t)$, определяемая условием (2), должна быть граничным значением функции $\psi(z)$, голоморфной в нижней полуплоскости, получаем согласно формуле (21) § 76:

$$-\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1+ig_2}{t-z}\,dt + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\overline{\varphi'(t)}\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2}\bar{c},$$

где z — произвольная точка нижней полуплоскости, или, применяя формулы § 72 [2]),

$$-\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1+ig_2}{t-z}\,dt - \varkappa\varphi(z) = -\frac{1}{2}\bar{c}.$$

Для того чтобы получить значение $\bar{c}$, перейдем в предыдущей формуле к пределу $z \to \infty$ (в нижней полуплоскости); тогда, применяя вторую формулу (15) § 71, получаем:

$$\frac{1}{2}\bar{c} = -\mu G.$$

Таким образом,

$$\varkappa\varphi(z) = -\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1+ig_2}{t-z}\,dt - \mu G. \tag{5}$$

После этого функция $\psi(z)$ легко определится по своему граничному значению, даваемому формулой (2), а именно: применяя формулу (2′)

---

[1]) Таким образом, мы несколько расширяем постановку задачи по сравнению с условиями § 90.

[2]) При этом следует учесть в частности, что $t\overline{\varphi'(t)}$ есть граничное значение функции $z\overline{\varphi'(z)}$, голоморфной в верхней полуплоскости и исчезающей на бесконечности.

§ 72, получаем:

$$\psi(z)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1-ig_2}{t-z}\,dt-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\varphi'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2}c,$$

или, применяя опять формулы § 72 [1]) и подставляя значение c,

$$\psi(z)=\frac{\mu}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1-ig_2}{t-z}\,dt-z\varphi'(z)-\mu\overline{G}. \tag{6}$$

Легко видеть на основании сказанного в § 71, что полученные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ удовлетворяют всем условиям задачи, включая условия (3), если, например, выражение g_1+ig_2 и его производная $g_1'+ig_2'$ по t удовлетворяют условию H, а вблизи бесконечно удаленной точки этому условию удовлетворяют выражения $t(g_1+ig_2-G)$, $t^2(g_1'+ig_2')$ [2]).

Таким образом, задача решена [3]).

§ 95. Решение основных задач для областей, отображаемых на полуплоскость при помощи рациональных функций. Случай параболического контура. В случае, когда данная область S отображается на полуплоскость при помощи рациональной функции $\omega(\zeta)$, основные граничные задачи могут быть решены элементарным путем, как в аналогичном случае § 84 и след.

Ввиду аналогии этих случаев мы ограничимся тем, что разъясним способ решения на одном примере, а именно в случае, когда контур L — парабола, а область S — часть плоскости, находящаяся вне параболы (т. е. не со стороны фокуса).

Рассмотрим отображение

$$z=\omega(\zeta)=i(\zeta-ia)^2 \qquad (a>0), \tag{1}$$

т. е.

$$x=-2\xi(\eta-a), \qquad y=\xi^2-(\eta-a)^2. \tag{1'}$$

Действительной оси $\eta=0$ плоскости ζ соответствует на плоскости Oxy линия, представляемая параметрически уравнениями:

$$x=2a\xi, \qquad y=\xi^2-a^2,$$

т. е. линия

$$x^2=4a^2(y+a^2); \tag{2}$$

это есть парабола L, параметр которой равен $2a^2$, ось направлена по Oy, а вершина расположена в точке $(0, -a^2)$; начало координат есть фокус параболы.

---

[1]) При этом следует, в частности, учесть, что $\overline{\varphi(t)}$ есть граничное значение функции $\overline{\varphi(z)}$, голоморфной в верхней полуплоскости и исчезающей на бесконечности.

[2]) Если мы хотим, чтобы были удовлетворены не только условия (3), но и все условия (1'), (2') § 90, то достаточно дополнительно предположить, что и $t^3(g_1''+ig_2'')$ удовлетворяет условию H вблизи бесконечно удаленной точки.

[3]) Решение этой задачи (иным путем) дано также М. А. Садовским [1, 2]. У этого автора отсутствует строгое исследование характера решения и условий его существования.

Когда ζ пробегает ось ξ слева направо, то соответствующая точка z пробегает параболу также слева направо.

Легко проверить, что соотношение (1) дает отображение области S, внешней по отношению к параболе, на полуплоскость $\eta < 0$. Координатные линии (ξ) и (η) суть, как легко видеть, параболы, имеющие общий фокус в начале координат; оси парабол (ξ) и (η) обращены в противоположные стороны. На рис. 46а (стр. 346) изображены некоторые параболы семейства (ξ) (т. е. $\eta = \text{const}$) и части парабол $\xi = \text{const}$, заключенные в S.

Легко видеть, что угол, под которым видна парабола из внутренних точек, равен -2π, так что в формулах § 91 следует теперь взять

$$\Pi' = -2\pi. \tag{3}$$

Решение основных задач для S не представляет никаких затруднений. Решим, например, п е р в у ю о с н о в н у ю з а д а ч у (вторая решается совершенно аналогично).

Будем обозначать через σ точки действительной оси на плоскости ζ. Тогда на основании формулы (10) § 92 граничное условие напишется так:

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} + \frac{\sigma + ia}{2}\Phi'(\sigma) - \frac{\sigma - ia}{\sigma + ia}\Psi(\sigma) = N + iT, \tag{4}$$

где N и T — граничные значения нормального и касательного напряжений $\widehat{\eta\eta}$ и $\widehat{\xi\xi}$, которые следует считать заданными [1]).

Умножая обе части формулы (4) на $\sigma + ia$, мы перепишем это условие так [2]):

$$(\sigma + ia)\Phi(\sigma) + (\sigma + ia)\overline{\Phi(\sigma)} + \frac{(\sigma + ia)^2}{2}\Phi'(\sigma) - (\sigma - ia)\Psi(\sigma) = F, \tag{5}$$

где положено:

$$F = (N + iT)(\sigma + ia). \tag{6}$$

Условие (5) можно переписать еще так, если перейти к сопряженным значениям:

$$(\sigma - ia)\Phi(\sigma) + (\sigma - ia)\overline{\Phi(\sigma)} + \frac{(\sigma - ia)^2}{2}\overline{\Phi'(\sigma)} - (\sigma + ia)\overline{\Psi(\sigma)} = \overline{F}. \tag{7}$$

Искомые голоморфные в нижней полуплоскости функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ на основании формул (1) § 90 и формулы (1) настоящего параграфа удовлетворяют при больших $|\zeta|$ условиям:

$$\Phi(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad \Psi(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad \Phi'(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^3}\right). \tag{8}$$

Выражая, что функция $(\sigma - ia)\Psi(\sigma)$, определяемая условием (5), есть граничное значение функции $(\zeta - ia)\Psi(\zeta)$, голоморфной в нижней

[1]) Мы, разумеется, считаем, что N и T заданы так, чтобы не противоречить тем условиям, которое мы ставим относительно поведения напряжений в бесконечно удаленных точках (ср. § 90).

[2]) Можно, конечно, применить указываемый ниже способ решения непосредственно к условию (4) так, как оно написано; таким способом решена рассматриваемая задача во втором издании книги. Излагаемый здесь способ быстрее приводит к цели.

полуплоскости и исчезающей на бесконечности, получаем, применяя формулу (21) § 76:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{F}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sigma-ia)\,\Phi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sigma-ia)\,\overline{\Phi(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sigma-ia)^2\,\overline{\Phi'(\sigma)}\,d\sigma}{2(\sigma-\zeta)}=0,$$

где ζ — точка нижней полуплоскости. Замечая, что $(\sigma-ia)\,\Phi(\sigma)$ — граничное значение функции $(\zeta-ia)\,\Phi(\zeta)$, голоморфной в нижней полуплоскости и исчезающей на бесконечности, а $(\sigma-ia)\,\overline{\Phi(\sigma)}$ и $(\sigma-ia)^2\overline{\Phi'(\sigma)}$ — граничные значения функций $(\zeta-ia)\,\overline{\Phi}(\zeta)$ и $(\zeta-ia)^2\,\overline{\Phi}'(\zeta)$, голоморфных в верхней полуплоскости и исчезающих на бесконечности, получаем, применяя формулы § 72:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{F}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-(\zeta-ia)\,\Phi(\zeta)=0,$$

откуда

$$\Phi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i\,(\zeta-ia)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{F}\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{9}$$

После этого функция $(\zeta-ia)\,\Psi(\zeta)$ легко определится по своему граничному значению, которое дается формулой (5). После простых приведений получим:

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\,(\zeta-ia)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{\zeta+ia}{\zeta-ia}\,\Phi(\zeta)+\frac{(\zeta+ia)^2}{2(\zeta-ia)}\,\Phi'(\zeta). \tag{10}$$

Легко видеть, что найденное решение удовлетворяет поставленным условиям, если заданная функция F и ее первая производная F' по σ удовлетворяют условию H, а в окрестности бесконечно удаленной точки этому условию удовлетворяют выражения σF и $\sigma^2 F'$.

Таким образом, задача решена.

IV. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ. ОБОБЩЕНИЯ [1])

В § 78, 79 был изложен один из общих методов решения основных граничных задач плоской теории упругости для односвязных областей. В настоящем отделе мы даем краткие сведения о некоторых других общих методах (пригодных также для многосвязных областей), ограничиваясь лишь теми, которые либо представляют собой обобщение методов, изложенных в предыдущих отделах настоящей главы, либо так или иначе тесно связаны с ними.

Подробно, с полными доказательствами, мы излагаем лишь новый метод Д. И. Шермана (§ 101, 102) решения первой и второй основных задач.

[1]) Этот отдел может быть пропущен без ущерба для понимания дальнейшего.

В конце отдела (§ 104) мы указываем некоторые другие общие задачи теории упругости, к которым могут быть применены аналогичные методы.

§ 96. Об интегральных уравнениях С. Г. Михлина. Метод приведения основных задач к интегральным уравнениям, изложенный в § 79, не применим непосредственно к многосвязным областям, так как он требует конформного отображения рассматриваемой области на круг, а такое отображение (взаимно однозначное) невозможно, если данная область многосвязна.

Однако С. Г. Михлину удалось видоизменить упомянутый метод так, что он становится применимым и к случаю многосвязных областей. Сущность этого видоизменения заключается в следующем. Как известно [1]), задача конформного отображения на круг области S, ограниченной одним простым замкнутым контуром L, эквивалентна нахождению так называемой функции Грина для этой области, т. е. действительной функции $G(x, y)$, определяемой так:

1°. $G(x, y)$ — регулярная гармоническая функция во всей области S, кроме данной точки (x_0, y_0), где она имеет логарифмическую особенность. Точнее:

$$G(x, y) = \ln \frac{1}{r} + G_0(x, y),$$

где r — расстояние между точками (x_0, y_0) и (x, y), а $G_0(x, y)$ — регулярная гармоническая функция.

2°. Граничное значение $G(x, y)$ равно нулю на L.

Если $H_0(x, y)$ — гармоническая функция, сопряженная с $G_0(x, y)$, то аналитическая функция комплексного переменного z

$$M(z) = \ln \frac{1}{z - z_0} + G_0(x, y) + iH_0(x, y),$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, называется комплексной функцией Грина. Как показывает предыдущая формула, функция $M(z)$ многозначна благодаря присутствию логарифмического члена.

Так как комплексная функция Грина, кроме z, зависит также от z_0, то вместо $M(z)$ целесообразнее писать $M(z, z_0)$.

То обстоятельство, что задача нахождения функции Грина эквивалентна, как было сказано, задаче конформного отображения данной области на круг, позволяет так видоизменить метод, изложенный в § 78, 79, что применение конформного отображения заменяется рассмотрением функции $M(z, z_0)$.

С другой стороны, понятие функции Грина, как действительной, так и комплексной, применимо и к многосвязным областям, ограниченным несколькими контурами. Поэтому только что упомянутый метод может быть обобщен на случай многосвязных областей.

Этим путем С. Г. Михлин привел первую и вторую основные задачи плоской теории упругости для многосвязных областей к интегральным

[1]) Об этом см. в курсах теории функций комплексного переменного.

уравнениям Фредгольма, несколько более сложным (как и следовало ожидать), чем уравнения § 79 (применимые лишь к односвязным областям), но вполне пригодным для общих исследований, в частности для доказательства теорем существования, что и сделано в ряде работ С. Г. Михлина [1—3, 7, 9]. Мы отсылаем читателей к этим работам, а также к книге [13] того же автора, в которой дано достаточно полное изложение результатов.

Кроме первой и второй задач для многосвязных областей, С. Г. Михлин решил своим методом и другие граничные задачи, представляющие большой интерес, как, например, задачи об упругом равновесии тел, определенным образом составленных из различных однородных частей с различными упругими постоянными (имеется в виду плоский случай); этим последним задачам посвящена работа С. Г. Михлина [10], а некоторые частные случаи рассмотрены элементарным путем в уже упоминавшейся его статье [8].

§ 97. Об одном общем методе решения задач для многосвязных областей. Заслуживает внимания один общий метод решения граничных задач, разработанный Д. И. Шерманом [1, 5] и С. Г. Михлиным, позволяющий составить уравнение Фредгольма для данной многосвязной области, если тем или иным путем получены общие решения соответствующей граничной задачи для областей, каждая из которых ограничена одним из простых контуров, входящих в состав границы данной многосвязной области, причем эти общие решения должны быть представлены определенным образом, например в виде, который дается решением интегральных уравнений, указанных в § 79.

Особенно простые и применимые практически уравнения получаются в том случае, когда упомянутые отдельные области отображаются на круг рациональными функциями и когда, следовательно, к ним приложимы эффективные методы решения, изложенные выше. К последнему случаю относится, например, область, представляющая собой полуплоскость с эллиптическим вырезом, рассмотренная Д. И. Шерманом в уже упоминавшейся статье [4].

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что полученные упомянутым выше путем интегральные уравнения обладают следующим, имеющим практическое значение, свойством: если решать эти уравнения хорошо известным алгорифмом последовательных приближений (т. е. путем разложения решения в так называемый ряд Неймана), то этот алгорифм совпадает по существу с алгорифмом, обобщающим известный алгорифм Шварца для задачи Дирихле; об этом обобщении алгорифма Шварца мы уже упоминали выше (см. конец § 89).

Изложение упомянутого метода можно найти, кроме указанных выше работ Д. И. Шермана, в книге С. Г. Михлина [13]; изложение С. Г. Михлина несколько отлично от изложения Д. И. Шермана, так как

последний исходит из интегральных уравнений, полученных мною (§ 79), а С. Г. Михлин — из своих уравнений, упомянутых в предыдущем параграфе.

§ 98. Интегральные уравнения, предложенные автором. Интегральные уравнения, приведенные в § 79, хотя и вполне пригодны для общих исследований и дают эффективные, практически применимые результаты в ряде важных частных случаев, о которых говорилось выше, все же обладают одним существенным недостатком: уже для их составления требуется найти отображающую функцию $\omega(\zeta)$. Аналогичным недостатком обладают и уравнения С. Г. Михлина (§ 96), так как для их составления требуется нахождение комплексной функции Грина $M(z, z_0)$.

Между тем интегральные уравнения давно перестали быть лишь средством для общих теоретических исследований: за последнее время разработаны довольно эффективные методы численного их решения, в особенности для случая, когда они содержат лишь простые (а не кратные) интегралы, как это имеет место в интересующем нас случае. Поэтому весьма важно иметь такие интегральные уравнения, ядра которых непосредственно и просто связаны с элементами линий, составляющих границу области, и не содержат элементов, определение которых требует предварительного решения вспомогательных граничных задач, вроде задачи Дирихле (или ей эквивалентной), что требуется для нахождения функций $\omega(\zeta)$ или $M(z, z_0)$.

К числу таких уравнений принадлежат уравнения Лауричелла — Шермана, которые будут подробно рассмотрены в § 101, 102; эти уравнения, как мне кажется, являются наиболее простыми и наиболее соответствующими цели общих исследований из всех мне известных.

Однако я позволю себе сказать здесь несколько слов об уравнениях, полученных в свое время мною [17, 18] [1]), так как ход идей, приведший к этим уравнениям, тесно связан с тем, который привел к результатам предшествующих отделов настоящей главы, и так как они, по-видимому, представляют и теперь некоторый самостоятельный интерес [2]). Кроме того, уравнения эти были предметом ряда исследований других авторов (в первую очередь Д. И. Шермана), которые заслуживают упоминания, так как разработанные ими методы исследования могут быть с успехом перенесены на решение других аналогичных задач.

Переходя к выводу упомянутых уравнений, начнем для большей ясности со случая конечной области S, ограниченной одним простым

---

[1]) Эти уравнения весьма схожи с уравнениями Лауричелла (см. § 101), но все-таки принципиально отличны от них. У самого Лауричелла его уравнения имеют (по крайней мере внешне) довольно сложный вид, так что в свое время упомянутого сходства я не заметил, а, наоборот, считал, что полученные мною уравнения гораздо проще.

[2]) См. примечание на стр. 362.

замкнутым гладким контуром L; положительным направлением на L мы будем, как обычно, считать то, которое оставляет область S слева.

Мы будем рассматривать одновременно первую и вторую основные задачи. Граничные условия для обеих этих задач можно записать так:

$$k\overline{\varphi(t)} + t\overline{\varphi'(t)} + \psi(t) = \overline{f(t)}, \tag{1}$$

где при обозначениях § 41, в случае первой основной задачи $k = 1$,

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) = i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds, \tag{2}$$

а в случае второй основной задачи $k = -\varkappa$,

$$f(t) = -2\mu(g_1 + ig_2); \tag{3}$$

под $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ следует, конечно, подразумевать соответствующие граничные значения, существование которых, таким образом, предполагается, т. е. искомое решение предполагается регулярным; к правой части (2) можно прибавить любую, раз навсегда зафиксированную, постоянную.

Выразим теперь, что правая часть равенства

$$\psi(t) = \overline{f(t)} - k\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t), \tag{4}$$

эквивалентного граничному условию (1), должна представлять собой граничное значение некоторой функции $\psi(z)$, голоморфной в S.

Мы знаем, что необходимым и достаточным условием для этого является равенство (см. § 73)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)} - k\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t)}{t-z}\,dt = 0$$

для всех z, расположенных *вне* S, или

$$\frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\varphi'(t)\,dt}{t-z} = A(z) \text{ для всех } z \text{ вне } S, \tag{5}$$

где для краткости через $A(z)$ обозначена заданная функция

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z}. \tag{6}$$

Мы получили, таким образом, функциональное уравнение для определения $\varphi(z)$. Если нам тем или иным путем удастся найти функцию $\varphi(z)$, голоморфную в S и удовлетворяющую уравнению (5), задача будет решена, так как функция $\psi(t)$ определится из условия (4) формулой Коши:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z} - \frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\varphi'(t)\,dt}{t-z} \tag{7}$$

(здесь, конечно, z принадлежит области S).

Функциональное уравнение (5) можно легко привести к уравнению Фредгольма следующим образом [1]). Пусть в (5) z стремится к некоторой точке t_0 контура L (оставаясь, разумеется, вне S). Тогда на основании формул Сохоцкого — Племеля (см. § 68) получаем, предполагая, что $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию H на L:

$$-\frac{1}{2}k\overline{\varphi(t_0)}+\frac{k}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\bar{t}_0\varphi'(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}=A(t_0), \qquad (а)$$

где для краткости через $A(t_0)$ обозначено граничное значение функции $A(z)$ при $z\to t_0$ *извне* S, т. е.

$$A(t_0)=-\frac{1}{2}\overline{f(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-t_0}=a(t_0)+ib(t_0); \qquad (8)$$

через $a(t_0)$, $b(t_0)$ обозначены действительные функции, которые следует считать заданными.

Уравнение (а), которое не есть, конечно, уравнение Фредгольма, можно упростить следующим образом. Выражая, что $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ должны быть граничными значениями функций, голоморфных в S, получаем по формуле (1′) § 73:

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=0,$$

$$-\frac{1}{2}\varphi'(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-t_0}=0; \qquad (б)$$

переходя к сопряженным значениям, первое из этих условий можно записать еще так:

$$-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}=0. \qquad (в)$$

Умножая равенства (б) и (в) соответственно на $-\bar{t}_0$ и на k и складывая с уравнением (а), получаем:

$$-k\overline{\varphi(t_0)}-\frac{k}{2\pi i}\int_L\overline{\varphi(t)}\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi'(t)\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}\,dt=A(t_0),$$

и, наконец, преобразуя второй интеграл левой части интегрированием по частям,

$$-k\overline{\varphi(t_0)}-\frac{k}{2\pi i}\int_L\overline{\varphi(t)}\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\,d\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}=A(t_0). \qquad (9)$$

[1]) Представляло бы интерес исследовать функциональное уравнение (5) самостоятельно, не сводя его к уравнению Фредгольма. Это дало бы, по всей вероятности, возможность найти новые классы областей, для которых основные граничные задачи решаются эффективно.

Справедливость этого замечания (сделанного в двух предыдущих изданиях) подтверждается, в известной мере, интересными результатами, полученными в работах Д. И. Шермана [25, 26], о которых уже упоминалось в конце § 89.

Это и есть интегральное уравнение, которое упоминалось выше и которое мы намеревались вывести.

Его можно переписать еще иначе, а именно: полагая

$$t - t_0 = re^{i\vartheta}, \tag{10}$$

где $r = |t - t_0|$, а $\vartheta = \vartheta(t_0, t)$ — угол, составляемый вектором $\overline{t_0 t}$ с осью Ox, отсчитываемый в положительном направлении, будем иметь:

$$\ln \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} = -2i\vartheta, \qquad \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} = e^{-2i\vartheta} = \cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta;$$

внося эти значения в уравнение (9), получаем:

$$k\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{\pi} \int_L \{k\overline{\varphi(t)} + e^{-2i\vartheta}\varphi(t)\}\, d\vartheta = -A(t_0). \tag{9'}$$

Предыдущее уравнение можно переписать и в виде системы двух действительных уравнений, если положить:

$$\varphi(t) = p(t) + iq(t), \tag{11}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — действительные функции, и разделить в уравнении (9') действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} kp(t_0) - \frac{1}{\pi} \int_L \{p(t)(k + \cos 2\vartheta) + q(t) \sin 2\vartheta\}\, d\vartheta &= -a(t_0), \\ kq(t_0) - \frac{1}{\pi} \int_L \{p(t) \sin 2\vartheta + q(t)(k - \cos 2\vartheta)\}\, d\vartheta &= b(t_0). \end{aligned} \tag{9''}$$

В этих уравнениях

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\, ds,$$

где s — дуга контура, соответствующая точке t. Легко видеть, что имеет место равенство [1])

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\cos \alpha}{r},$$

где $\alpha = \alpha(t_0, t)$ — угол, заключенный между внешней нормалью в точке t контура и вектором $\overline{t_0 t}$.

Если предположить, что угол, составляемый нормалью (или касательной) к L в точке t с некоторым фиксированным направлением (рассматриваемый как функция от t или от s), удовлетворяет условию H, то, как не трудно убедиться [2]),

$$\frac{\cos \alpha}{r} = \frac{K(t_0, t)}{r^{\mu}},$$

---

[1]) Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить, что в силу условий Коши — Римана

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\partial \ln r}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n},$$

ибо $\ln r$ и ϑ — действительная и мнимая части функции $\ln(t - t_0)$ комплексного переменного t (при фиксированном t_0); через n обозначена нормаль, направленная вправо, если смотреть вдоль положительной касательной.

[2]) См., например, Мусхелишвили [25].

где μ — постоянная, $0 \leqslant \mu < 1$, а $K(t_0, t)$ — непрерывная на L функция (и даже удовлетворяющая условию H).

Поэтому система (9″) представляет собой обычную систему уравнений Фредгольма. В соответствии с этим мы можем называть уравнение (9) или (9′), эквивалентное системе (9″), уравнением Фредгольма.

Хотя исследование полученных интегральных уравнений в случае односвязной области не представляет никаких затруднений [1]), мы на нем не останавливаемся и ограничимся указанием следующих результатов [2]).

Прежде всего заметим, что, как легко видеть, в силу принятых нами условий всякое (непрерывное) решение $\varphi(t)$ уравнения (9′) будет удовлетворять условию H всюду на L. Но нам требуется найти решение такое, чтобы и производная $\varphi'(t)$ удовлетворяла на L этому условию [3]). Выполнение последнего требования будет, как не трудно проверить, обеспечено, если предположить, что линия L имеет в каждой точке кривизну, удовлетворяющую условию H, и что заданная на L функция $f(t)$ имеет производную по t, удовлетворяющую условию H, что мы и будем предполагать.

Рассмотрим сперва п е р в у ю о с н о в н у ю з а д а ч у. В этом случае $k = 1$ и $f(t)$ дается формулой (2). Так как по принятому нами предположению функция $f(t)$ непрерывна на L, то условие равенства нулю главного вектора внешних усилий удовлетворено само собой; условие же равенства нулю главного момента выражается равенством (§ 41)

$$\int_L (f_1\,dx + f_2\,dy) = 0. \tag{12}$$

Легко предвидеть заранее, что однородная система, получаемая из уравнения (9″) при $a(t) = b(t) = 0$, имеет решение, даваемое формулой

$$p(t) + iq(t) = i\varepsilon t + \alpha + i\beta, \tag{13}$$

где $\varepsilon, \alpha, \beta$ — действительные постоянные; это следует из того, что (см. § 34), не изменяя напряженного состояния и правой части формулы (1), к $\varphi(z)$ можно прибавить выражение вида $i\varepsilon z + \alpha + i\beta$. В том, что $p(t)$, $q(t)$, даваемые формулой (13), удовлетворяют системе (9″), легко убедиться и непосредственно.

Формула (13) содержит линейно три произвольных действительных постоянных и дает три линейно независимых решения однородной системы [4]); можно показать, что других линейно независимых решений одно-

[1]) Исследование для случая односвязной области изложено в книге С. Г. Михлина [13] применительно к случаю $k = 1$.

[2]) Ниже будут указаны специальные работы, где читатель найдет соответствующие доказательства.

[3]) Ибо при выводе уравнения мы предположили, что $\varphi'(t)$ удовлетворяет условию H.

[4]) В качестве этих трех решений можно взять, например, если положить $t = \xi + i\eta$:

1) $p = -\eta$, $q = \xi$; 2) $p = 1$, $q = 0$; 3) $p = 0$, $q = 1$.

родная система не имеет. Поэтому, как это следует из общей теории уравнений Фредгольма, для разрешимости системы (9″) правые ее части должны удовлетворять трем условиям хорошо известного вида. Однако ближайшее исследование показывает, что два из этих условий удовлетворяются сами собой вследствие того, что функции $a(t)$, $b(t)$ не произвольные, а таковы, что $a(t)+ib(t)$ представляет собой граничное значение функции, голоморфной вне S и исчезающей на бесконечности, а третье условие сводится, как и следовало ожидать, к условию (12).

Итак, при соблюдении условия (12) система (9″) или, что все равно, уравнение (9′) имеет решение, определенное, разумеется, с точностью до выражения (13). Можно, кроме того, показать (это не очевидно заранее), что всякое решение $\varphi(t)$ уравнения (9′) будет граничным значением функции, голоморфной в S; эта функция $\varphi(z)$ определится по $\varphi(t)$ формулой Коши, после чего определится и функция $\psi(z)$ формулой (7). Таким образом, мы получим решение первой основной граничной задачи.

В случае второй основной задачи, когда $k=-\varkappa$ и $f(t)$ дается формулой (3), мы имеем совершенно аналогичные результаты; разница лишь в том, что однородная система, соответствующая системе (9″), имеет лишь два линейно независимых решения, даваемых формулой

$$\varphi(t)=p(t)+iq(t)=\alpha+i\beta, \tag{14}$$

где α и β — произвольные действительные постоянные. Система (9″), несмотря на наличие решений соответствующей однородной системы, всегда разрешима (это есть следствие специального вида правой части), и ее решение дает решение исходной задачи, как в предыдущем случае.

До сих пор мы предполагали область S конечной и односвязной. Предположим теперь, что область S ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний заключает внутри себя все остальные, как в § 35 (рис. 16); контур L_{m+1} может отсутствовать, и тогда область S будет бесконечной (бесконечная плоскость с отверстиями); мы будем считать, что отдельные контуры L_j удовлетворяют в смысле гладкости условиям, указанным выше. Через $L=L_1+L_2+\ldots+L_m+L_{m+1}$ мы будем, как всегда, обозначать полную границу области S; положительным направлением на L мы будем считать то, которое оставляет область S слева.

Разница со случаем конечной односвязной области здесь лишь та, что искомые функции $\varphi(z)$, и $\psi(z)$ могут быть (и, вообще говоря, будут) многозначными. А именно, согласно формулам (10), (11) § 35:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln(z-z_j)+\varphi_0(z),\\ \psi(z)&=\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\ln(z-z_j)+\psi_0(z),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где (X_j, Y_j) — главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру L_j, z_j — произвольно фиксированные точки, расположенные соответственно внутри контуров L_j $(j = 1, \ldots, m)$, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные в S, если область эта конечна (т. е. контур L_{m+1} имеется налицо). Если же область S бесконечна (т. е. контур L_{m+1} отсутствует), то (см. § 36)

$$\varphi_0(z) = \Gamma z + \varphi^*(z), \qquad \psi_0(z) = \Gamma' z + \psi^*(z), \tag{16}$$

где $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ — функции, голоморфные в S, включая бесконечно удаленную точку. Как в случае первой, так и в случае второй основной задачи мы считаем (§ 40), что постоянные Γ, Γ' заданы заранее; кроме того, в случае второй основной задачи для бесконечной области мы будем считать, что дополнительно заданы величины:

$$X = \sum_{j=1}^{m} X_j, \qquad Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

т. е. главный вектор внешних усилий, приложенных ко всей границе L области S.

В дальнейшем ради краткости мы будем предполагать, что область S конечна, т. е. контур L_{m+1} имеется налицо; случай бесконечной области рассматривается совершенно аналогично.

Начнем с рассмотрения первой основной задачи. В этом случае граничное условие запишется так (как и в случае односвязной области):

$$\overline{\varphi(t)} + t\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)} + C_j \text{ на } L_j \ (j = 1, 2, \ldots, m, m+1), \tag{17}$$

где на этот раз, вместо формулы (2), будем иметь:

$$f(t) = i \int_0^s (X_n + iY_n)\, ds \text{ на } L_j \ (j = 1, 2, \ldots, m, m+1), \tag{18}$$

причем дуга s отсчитывается (в положительном направлении) на каждом из контуров L_j от произвольно зафиксированной точки этого контура, а C_j — постоянные, имеющие, вообще говоря, различные значения на различных контурах L_j; эти постоянные не задаются заранее, кроме одной, например C_{m+1}, которую можно зафиксировать произвольно; мы будем предполагать, что $C_{m+1} = 0$.

Если подставим в равенство (17) выражения (15), то легко получим:

$$\overline{\varphi_0(t)} + t\varphi_0'(t) + \psi_0(t) = \overline{f_0(t)} + C_j \text{ на } L_j \ (j = 1, 2, \ldots, m, m+1), \tag{19}$$

где

$$f_0(t) = f(t) + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^{m} \{X_j + iY_j\} \{\ln(t - z_j) - \varkappa \ln(\bar{t} - \bar{z}_j)\} +$$

$$+ \frac{t}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j - iY_j}{\bar{t} - \bar{z}_j}. \tag{20}$$

Теперь в граничном условии (19) слева фигурируют граничные значения голоморфных (т. е. однозначных аналитических) функций, а справа также однозначная непрерывная функция (разумеется, при условии выбора определенных ветвей на каждом контуре L_j), ибо при обходе в положительном направлении (оставляющем S слева) контура L_j ($j = 1, \ldots, m$) функция $f(t)$ получает приращение $i(X_j + iY_j)$, а второй член правой части (20) — такое же приращение, но с обратным знаком; аналогично для контура L_{m+1} при условии, которое мы подразумеваем, что главный вектор (X, Y) всех внешних усилий, приложенных к L, равен нулю.

Так как в первой основной задаче величины X_j, Y_j известны заранее, то функция $f_0(t)$ в граничном условии (19) определена на каждом из контуров L_j.

Применяя к граничному условию (19) те же рассуждения, что в случае одного контура, мы получаем точно такое же уравнение (9) при $k = 1$ или эквивалентное ему уравнение (9′), только в качестве неизвестной вместо $\varphi(t)$ мы будем иметь теперь $\varphi_0(t)$, а в правой части вместо $f(t)$ будет фигурировать $f_0(t)$. Кроме того, на этот раз в правых частях будут присутствовать не известные заранее постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, которые должны получить определенные значения в процессе решения задачи.

В случае второй основной задачи, поступая совершенно аналогично, мы получим при прежних обозначениях граничное условие

$$-\varkappa\overline{\varphi_0(t)} + t\varphi_0'(t) + \psi_0(t) = \overline{f_0(t)}, \tag{21}$$

где на этот раз

$$f_0(t) = -2\mu(g_1 + ig_2) - \frac{\varkappa}{\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}(X_j + iY_j)\ln|t - z_j| + \\ + \frac{t}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\frac{X_j - iY_j}{\bar{t} - \bar{z}_j}. \tag{22}$$

Таким образом, мы получим точно такое же уравнение (9) при $k = -\varkappa$, что и в случае одного контура, если в этом уравнении вместо $\varphi(t)$ подразумевать $\varphi_0(t)$, а вместо $f(t)$ — выражение $f_0(t)$. Только теперь в правых частях фигурируют не известные заранее постоянные X_j, Y_j, которые должны быть определены вместе с функцией $\varphi_0(t)$.

Можно показать, что и в рассматриваемом случае многосвязной области приведенные выше интегральные уравнения дают возможность решить до конца соответствующие граничные задачи.

Предварительное исследование этих интегральных уравнений было дано в цитированных уже заметках автора [17, 18], в которых для определенности была рассмотрена первая основная задача; исследование было проведено в предположении, что теоремы существования для многосвязных областей уже доказаны каким-либо иным путем.

Вскоре Д. И. Шерман [2, 3, 6, 11] дал весьма полное исследование этих уравнений, не опираясь ни на какие другие доказательства теорем существования, а, наоборот, доказав их непосредственно при помощи самих рассматриваемых уравнений.

Д. И. Шерману принадлежат также различные видоизменения этих уравнений, более удобные для исследований общего характера и для приложений. В частности, в работе [11] подробно исследован вопрос распределения характеристических чисел интегральных уравнений, получаемых определенным видоизменением уравнений, приведенных выше, и введением некоторого параметра λ, как это делается в общей теории уравнений Фредгольма. Это исследование показывает, что для значений λ, отвечающих первой и второй основным задачам, решения соответствующих интегральных уравнений могут быть разложены в ряды Неймана, иначе говоря, могут быть получены методом последовательных приближений.

При помощи изложенного в настоящем параграфе метода Д. И. Шерман [6] решил также один частный случай основной смешанной задачи, когда на одних замкнутых контурах, ограничивающих область, заданы внешние напряжения, а на других — смещения.

Далее, методом, аналогичным предыдущему, Д. И. Шерман [8] дал решение первой и второй задач для тел, составленных определенным образом из различных однородных частей; как было сказано в § 96, та же задача была решена несколько раньше С. Г. Михлиным иным путем.

О дальнейших работах Д. И. Шермана, содержащих иное решение рассмотренных выше граничных задач, а также решение некоторых других граничных задач при помощи обобщения указанного в настоящем параграфе метода и иных методов, будет еще сказано ниже.

Упомянем еще одну интересную задачу, решенную Г. Н. Савиным [7][1]) при помощи метода, аналогичного изложенному в настоящем параграфе, которая заключается в определении равновесия упругой плоскости с бесконечным рядом одинаковых, периодически расположенных вырезов, подверженных одинаковым внешним усилиям. Изложение решения можно найти также в книге С. Г. Михлина [13].

§ 99. Применение к контурам с угловыми точками. Самый вид уравнения (9′) или системы (9″) § 98 наводит на мысль, что эти уравнения, если рассматривать входящие в них интегралы как интегралы Стильтьеса, могут быть применены к областям, ограниченным контурами гораздо более общего вида, чем это предполагалось при выводе.

Исследования Л. Г. Магнарадзе [1—3], опирающиеся на известные результаты Радона (Radon) и отчасти Карлемана (Carleman), показали, что это действительно имеет место и что упомянутые уравнения, понимаемые в надлежащем обобщенном смысле, применимы, например, в слу-

[1]) См. также Савин [8].

чае, когда контуры, ограничивающие область, имеют угловые точки, отличные от точек возврата. Число угловых точек может быть даже бесконечно велико; достаточно, чтобы граница области состояла из контуров, обладающих так называемым «ограниченным вращением» (по Радону).

Отметим, что Л. Г. Магнарадзе [4] удалось распространить полученные им результаты и на один весьма общий класс трехмерных упругих тел, поверхности которых могут иметь угловые линии (даже бесчисленное, но счетное их множество); разумеется, в этом случае приходится применять соответствующие интегральные уравнения для трехмерных тел.

§ 100. О численном решении интегральных уравнений плоской теории упругости. Уравнение (9′) или эквивалентная ему система (9″) § 98 благодаря своей простоте могут с успехом служить для численного решения соответствующих граничных задач плоской теории упругости. Один из способов численного решения намечен в заметке автора [21] и более подробно изучен А. Я. Горгидзе и А. К. Рухадзе [1], которые проверили этот способ на некоторых примерах, а также дали оценку погрешности.

Упомянутый способ может дать, по-видимому, удовлетворительные результаты и в случае, когда граница области имеет угловые точки.

§ 101. Интегральные уравнения Шермана — Лауричелла. Д. И. Шерману [15—17] удалось получить заслуживающие большого внимания интегральные уравнения для решения первой и второй, а также смешанной, основных граничных задач плоской теории упругости. К этим уравнениям, по-видимому, естественнее всего придти следующим путем [1]), основанным на одной простой общей идее, аналогичной той, которую применил Фредгольм для получения интегральных уравнений, соответствующих второй основной задаче в трехмерном случае [2]).

Будем сперва предполагать, что рассматриваемая область S конечна и ограничена одним простым замкнутым контуром, удовлетворяющим тем же условиям, что в § 98.

Граничные условия первой и второй основных задач мы теперь запишем так, применяя те же обозначения, что в § 98:

$$k\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t); \qquad (1)$$

[1]) Сам автор исходит непосредственно из приводимых ниже формул (3), (4), не указывая пути, которым они получены (при этом он рассматривает отдельно случаи $k = -\varkappa$ и $k = 1$).

[2]) Fredholm [1]. Идея Фредгольма, говоря схематично, заключается в следующем. Если вместо рассматриваемого тела взять полупространство и написать известные формулы, решающие соответствующую граничную задачу в явном виде, при помощи определенных интегралов, распространенных на плоскость — границу полупространства, то эти формулы, примененные к данному телу (при этом интегралы, распространенные на плоскость, заменяются интегралами, распространенными на поверхность данного тела), уже не решая, разумеется, граничной задачи в явном виде, приводят к интегральным уравнениям, которые при наличии некоторых условий оказываются уравнениями Фредгольма.

напомним, что $k = 1$ соответствует первой основной задаче, а $k = -\varkappa$ второй.

Напишем теперь решение граничной задачи (1) в предположении, что S — полуплоскость, скажем верхняя, а L — действительная ось, и что $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $z\varphi'(z)$ исчезают на бесконечности. Решение это дается формулами [1]):

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i k}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z} - z\varphi'(z).$$

Внося во вторую из этих формул выражение для $\varphi'(z)$ из первой формулы, и вводя обозначение

$$\omega(t) = \frac{1}{k} f(t), \tag{2}$$

получаем, после очевидных преобразований [2]):

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}, \tag{3}$$

$$\psi(z) = \frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{4}$$

Преобразуя последний интеграл интегрированием по частям, мы можем переписать последнюю формулу еще так:

$$\psi(z) = \frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega'(t)\,dt}{t-z}. \tag{4'}$$

Вернемся теперь к случаю, когда S не есть полуплоскость, и попытаемся найти решение граничной задачи (1) в виде формул (3), (4), где теперь $\omega(t)$ *обозначает некоторую функцию точки контура* L, *не известную заранее* и подлежащую определению.

Мы будем считать, что искомая функция $\omega(t)$ имеет производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию H. Это, как легко видеть, обеспечивает непрерывность функций $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ вплоть до границы, т. е. регулярность решения (в смысле § 42).

Пользуясь формулами Сохоцкого — Племеля для граничных значений интегралов типа Коши и подставляя граничные значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, определяемых формулами (3), (4'), а также функции

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}$$

---

[1]) Решение для $k = -\varkappa$ мы уже получили в § 94 (в нашем случае $G = 0$, а разница в знаках происходит от того, что в § 94 решена задача для нижней полуплоскости). Решение для $k = 1$ получается совершенно аналогично. Оно может быть также получено из решения первой основной задачи для полуплоскости, найденного в § 93.

[2]) В случае, когда L — действительная ось (как мы пока предполагаем), $\bar{t} = t$, $d\bar{t} = dt$; причина, по которой мы пишем во втором интеграле правой части (4) $d\bar{t}$ вместо dt, а в третьем интеграле $\bar{t}$ вместо t, сделается ясной из дальнейшего.

(последнее выражение получено интегрированием по частям), в формулу (1), получаем после некоторых простых преобразований интегральное уравнение

$$k\omega(t_0)+\frac{k}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\,\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}=f(t_0). \tag{5}$$

Это и есть интегральное уравнение, полученное Д. И. Шерманом в цитированных статьях [15, 16]. Оно, как мы видим, весьма похоже на уравнение (9) § 98, которое для облегчения сравнения мы перепишем теперь так (переходя к сопряженным значениям):

$$k\varphi(t_0)-\frac{k}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\,d\,\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}=-\overline{A(t_0)}, \tag{a}$$

но существенно отличается от него знаком при первом интегральном члене, правой частью и, главное, характером условия, налагаемого на искомую функцию: в уравнении (5) искомая функция не подчинена никаким условиям, кроме условий, касающихся характера непрерывности, а в уравнении (а) искомая функция $\varphi(t)$ должна быть граничным значением функции, голоморфной в S. Это последнее условие, как было уже сказано в § 98, выполняется само собой в случае конечной односвязной области, который мы сейчас рассматриваем, но в общем случае оно играет существенную роль.

Вернемся к уравнению (5). Полагая, как в § 98, $t-t_0=re^{i\vartheta}$, получаем:

$$k\omega(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \{k\omega(t)-e^{2i\vartheta}\overline{\omega(t)}\}\,d\vartheta=f(t_0). \tag{5'}$$

Полагая, далее,

$$\omega(t)=p(t)+iq(t),\quad f(t)=f_1(t)+if_2(t), \tag{6}$$

получаем систему двух уравнений Фредгольма:

$$\begin{aligned} kp(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \{p(t)(k-\cos 2\vartheta)-q(t)\sin 2\vartheta\}\,d\vartheta&=f_1(t_0),\\ kq(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_L \{p(t)\sin 2\vartheta-q(t)(k+\cos 2\vartheta)\}\,d\vartheta&=f_2(t_0). \end{aligned} \tag{5''}$$

Относительно последней системы надо заметить следующее. При $k=1$, т. е. в случае первой основной задачи, система эта обращается в систему, полученную Лауричелла (Lauricella [3]) для решения основной бигармонической задачи, которая, как уже говорилось, эквивалентна (с некоторой оговоркой в случае многосвязной области) первой основной задаче плоской теории упругости. При $k=-\varkappa$, т. е. в случае второй основной задачи, система уравнений (5″) соответствует системе, также полученной Лауричелла (Lauricella [1, 2]) для второй основной задачи в трехмерном случае.

Однако у самого Лауричелла, который не пользуется интегралами типа Коши, связь между функциями, непосредственно фигурирующими в соответствующих задачах (бигармоническая функция U в основной бигармонической задаче, компоненты смещения во второй основной задаче), и вспомогательными функциями p, q точки контура L представлена в весьма сложном (по крайней мере внешне) виде и сами интегральные уравнения записаны далеко не в таком простом виде, как система уравнений (5″). Это последнее обстоятельство, разумеется, не имеет принципиального значения, но зато большое значение имеют формулы (3), (4), устанавливающие связь между функциями $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и функцией $\omega(t) = p(t) + iq(t)$, а также форма (5) интегрального уравнения, ясно показывающая связь с интегралами типа Коши. Именно выявление этой связи чрезвычайно упрощает исследование, в особенности в случае многосвязных областей (о которых будет сказано ниже), и, кроме того, дает возможность получить простые (конечно, относительно) решения ряда других важных граничных задач. Поэтому представляется справедливым назвать уравнение (5) или (5′) уравнением Шермана — Лауричелла.

В случае многосвязной области целесообразно, следуя Д. И. Шерману, несколько видоизменить формулы (3), (4) и вытекающие из них интегральные уравнения, что приводит к чрезвычайно простым (конечно, относительно) результатам; об этом будет подробно сказано в следующем параграфе.

§ 102. Решение первой и второй основных задач по методу Д. И. Шермана [1]). Пусть область S ограничена одним или несколькими простыми непересекающимися замкнутыми контурами $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний содержит внутри все остальные, и пусть $L = L_1 + \ldots + L_{m+1}$ обозначает полную границу области. Мы будем предполагать, кроме того, что каждый из контуров L_j имеет кривизну, удовлетворяющую условию H. Конечные области, ограниченные контурами L_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), мы будем обозначать через S_j, а бесконечную область, ограниченную контуром L_{m+1}, через S_{m+1}.

Начнем с решения первой основной задачи. Не нарушая общности, мы можем считать, что главные векторы (X_k, Y_k) внешних усилий, приложенных к контурам L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), равны нулю и что, следовательно, искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ однозначны, так как в противном случае мы можем выделить из них многозначные члены (известные заранее) и перенести их в правую часть равенства, выражающего граничное условие [2]), что и приведет к предыдущему случаю. Кроме того, мы должны, очевидно, считать для разрешимости задачи, что и главный вектор усилий, приложенных к контуру L_{m+1}, равен нулю.

[1]) Шерман [15, 16]. Мы воспроизводим здесь названные статьи лишь с незначительными изменениями.

[2]) См. § 98, формулы (15), (19), (20).

Граничное условие напишется так:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C_j \text{ на } L_j \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1), \tag{1}$$

где $f(t)$ — заданная функция (однозначная и непрерывная на каждом из контуров L_j), а $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$ — не известные заранее постоянные, лишь одну из которых можно произвольно зафиксировать; мы будем считать:

$$C_{m+1}=0.$$

Будем, следуя Д. И. Шерману, искать решение в следующем виде:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}, \tag{2}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}, \tag{3}$$

где $\omega(t)$ — функция точки контура, подлежащая определению, z_j — произвольно зафиксированные точки областей S_j, $j=1,\ldots,m$ (так что они расположены вне S), а b_j — *действительные* постоянные, связанные с $\omega(t)$ следующим образом [1]):

$$b_j=i\int_{L_j}\{\omega(t)\,d\bar{t}-\overline{\omega(t)}\,dt\} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{4}$$

Мы будем разыскивать лишь регулярные (в смысле § 42) решения исходной задачи. Для этого достаточно считать, что искомая функция $\omega(t)$ имеет производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию H, что мы и примем.

Подставляя граничные значения функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$, определяемых равенствами (2), (3), в (1), получаем совершенно так, как в предыдущем параграфе:

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j}+\frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\}-C_k=f(t_0) \text{ на } L_k \tag{5}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1).$$

Представляется целесообразным еще видоизменить предыдущее уравнение, прибавив к левой его части выражение

$$\frac{b_{m+1}}{\bar{t}_0}+\frac{\bar{b}_{m+1}}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t}{\bar{t}_0}\right), \tag{a}$$

---

[1]) Введение величин b_j и дает то видоизменение интегральных уравнений, о котором говорилось в конце предыдущего параграфа. В случае односвязной области ($m=0$) формулы (2), (3) обращаются в формулы (3) и (4) § 101 при $k=1$.

где b_{m+1} — *чисто мнимая* постоянная, связанная с $\omega(t)$ формулой [1])

$$b_{m+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\,d\bar{t}\right\}; \tag{6}$$

мы считаем, что начало координат находится в области S.

Таким образом, мы получаем уравнение

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \\ + \sum_{j=1}^{m+1}\left\{\frac{b_j}{t_0-z_j} + \frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right)\right\} - C_k = f(t_0) \text{ на } L_k \tag{5'}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1),$$

где надо считать $z_{m+1} = 0$.

Свяжем, кроме того, неизвестные постоянные C_k с искомой функцией $\omega(t)$ соотношениями:

$$C_k = -\int_{L_k}\omega(t)\,ds \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{7}$$

где ds — дифференциал дуги контура L_k.

Если теперь в левой части уравнения (5′) подразумевать под b_j и C_j выражения (4), (6) и (7), то уравнение (5′) обратится в интегральное уравнение, *не содержащее никаких неизвестных, кроме функции* $\omega(t)$. Если разделим в уравнении (5′) действительные и мнимые части, как это было сделано в предыдущем параграфе, то получим систему двух уравнений Фредгольма; выписывать эту систему бесполезно.

Интегральное уравнение (5′) мы будем называть уравнением Шермана. В случае односвязной области ($m = 0$) оно отличается от уравнения (5) предыдущего параграфа лишь членом

$$\frac{b_1}{t_0} + \frac{\bar{b}_1}{\bar{t}_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0}\right).$$

Будем считать в дальнейшем, что заданная на L функция $f(t)$ имеет производную $f'(t)$, удовлетворяющую условию H. Не трудно показать, что при этом условии и при условиях, принятых нами относительно границы L, всякое (непрерывное) решение $\omega(t)$ уравнения (5′) имеет производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию H.

Покажем теперь, что если уравнение (5′) имеет решение, то необходимо $b_{m+1} = 0$, если только соблюдено условие равенства нулю главного момента внешних усилий, которое, как легко видеть (ср. § 41), можно представить в виде [2]):

$$\operatorname{Re}\int_L f(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

---

[1]) См. примечание на стр. 373.

[2]) Вспомним, что, по условию, главные векторы внешних усилий, приложенных к каждому из контуров L_k в отдельности, равны нулю это обеспечивается непрерывностью функции $f(t)$ на каждом из контуров L_k.

В самом деле, уравнение (5′) можно, очевидно, записать так:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b_{m+1}\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{\bar{t}}+\frac{t}{\bar{t}^2}\right\}-C_j=f(t) \text{ на } L_j, \qquad (1')$$

если под $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ подразумевать граничные значения выражений, даваемых формулами (2) и (3). Умножая обе части последнего равенства на $d\bar{t}$ и интегрируя по L, получаем после простых преобразований интегрированием по частям:

$$\int_L \{\varphi(t)\,d\bar{t}-\overline{\varphi(t)}\,dt\}+b_{m+1}\int_L\left\{\frac{d\bar{t}}{t}+\frac{dt}{\bar{t}}\right\}+2\pi i b_{m+1}=\int_L f(t)\,d\bar{t}.$$

Так как последнее слагаемое в левой части предыдущего равенства — действительная величина, а все остальные его члены — чисто мнимые величины, то $b_{m+1}=0$, а это и требовалось показать.

Таким образом, при соблюдении условия (8) всякое решение $\omega(t)$ уравнения (5′) есть в то же время решение исходного уравнения (5), а следовательно, оно дает решение граничной задачи (1), причем постоянные C_j будут даны формулами (7).

Докажем теперь, что уравнение (5′) всегда разрешимо [1]). Рассмотрим для этого однородное уравнение, получаемое из уравнения (5′) при $f(t)=0$, и докажем, что оно не имеет отличных от нуля решений. Пусть, $\omega_0(t)$ — какое-либо решение этого однородного уравнения, а $\varphi_0(z)$ $\psi_0(z)$, C_j^0 — соответствующие значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и постоянных C, определяемые формулами (2), (3), (4) и (7), если в них вместо $\omega(t)$ взять $\omega_0(t)$; в частности, согласно формулам (2) и (3),

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^0}{z-z_j}, \qquad (9)$$

$$\psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j^0}{z-z_j}, \qquad (10)$$

где b_j^0 обозначают постоянные, даваемые формулой (4) при $\omega(t)=\omega_0(t)$; мы несколько преобразовали выражение для $\psi_0(z)$ интегрированием по частям. Функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ удовлетворяют граничному условию

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}-C_j^0=0 \text{ на } L_j\ (j=1,\ \ldots,\ m+1,\ C_{m+1}^0=0), \qquad (11)$$

как это следует из равенства (1′), если принять во внимание, что в нашем случае $f(t)=0$, а также $b_{m+1}=0$, ибо, очевидно, условие (8) удовлетворено. Следовательно, $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ решают первую основную задачу при нулевых внешних усилиях, и поэтому на основании теоремы единственности имеем:

$$\varphi_0(z)=i\varepsilon z+c, \qquad (12)$$

[1]) Если бы мы не добавили к левой части уравнения (5) выражения (а), то это уравнение было бы разрешимо лишь при условии (8).

где ε действительная, а c — вообще комплексная постоянная; следовательно, на основании условия (11), если принять во внимание, что $C^0_{m+1} = 0$,

$$\psi_0(z) = -\bar{c}, \tag{13}$$

причем, очевидно,

$$C^0_j = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+1). \tag{14}$$

Из формул (9), (10), (12) и (13) следует:

$$i\varepsilon z + c = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b^0_j}{z-z_j}, \tag{9'}$$

$$-\bar{c} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{b^0_j}{z-z_j}. \tag{10'}$$

Введем теперь обозначения:

$$i\varphi^*(t) = \omega_0(t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{b^0_j}{t-z_j} - i\varepsilon t - c, \tag{15}$$

$$i\psi^*(t) = \overline{\omega_0(t)} - \bar{t}\omega_0'(t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{b^0_j}{t-z_j} + \bar{c}. \tag{16}$$

Тогда, как легко видеть, равенства (9'), (10') можно переписать так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(t)\,dt}{t-z} = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^*(t)\,dt}{t-z} = 0 \qquad \text{для всех } z \text{ в } S,$$

а это показывает (см. § 74), что $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$ представляют собой граничные значения функций $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$, голоморфных в областях S_1, S_2, ..., S_{m+1}, причем $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$.

Вспомним теперь, что в нашем случае $b_{m+1} = 0$, где b_{m+1} дается формулой (6), если вместо $\omega(t)$ подразумевать $\omega_0(t)$. Подставляя в формулу (6), при $b_{m+1} = 0$, на место $\omega(t)$ значение $\omega_0(t)$, получаемое из формулы (15), и учитывая только что указанное свойство функции $\varphi^*(t)$, легко заключаем, что $\varepsilon = 0$.

Далее, исключая из формул (15) и (16) функцию $\omega_0(t)$, легко получаем:

$$\overline{\varphi^*(t)} + \bar{t}\varphi^{*\prime}(t) + \psi^*(t) = i\sum_{j=1}^{m} b^0_j\left\{\frac{1}{\bar{t}-\bar{z}_j} - \frac{1}{t-z_j} + \frac{\bar{t}}{(t-z_j)^2}\right\} - 2i\bar{c} \text{ на } L.$$

Умножая обе части предыдущего равенства на dt и интегрируя по контуру L_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$), получаем после простых преобразований равенство

$$\int_{L_k}\{\overline{\varphi^*(t)}\,dt - \varphi^*(t)\,d\bar{t}\} = i\sum_{j=1}^{m} b^0_j\int_{L_k}\left\{\frac{dt}{\bar{t}-\bar{z}_j} + \frac{d\bar{t}}{t-z_j}\right\} - 2\pi b^0_k,$$

из которого следует в силу того, что b^0_j — действительные величины:

$$b^0_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{17}$$

Поэтому

$$\overline{\varphi^*(t)} + t\varphi^{*\prime}(t) + \psi^*(t) = -2i\bar{c} \quad \text{на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m+1).$$

Следовательно, функции $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ решают первую основную задачу для областей S_k $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$ при отсутствии внешних усилий. По теореме единственности для области S_{m+1} и в силу условия $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$ получаем $\varphi^*(z) = \psi^*(z) = 0$ в S_{m+1}, откуда следует $c = 0$. Далее, в силу теоремы единственности для областей S_k $(k = 1, \ldots, m)$, получаем (помня, что $c = 0$):

$$\varphi^*(z) = i\varepsilon_k z + c_k, \qquad \psi^*(z) = -\bar{c}_k \text{ на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m),$$

откуда на основании формул (15)—(17) следует, что

$$\omega_0(t) = -\varepsilon_k t + ic_k \text{ на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m);$$

кроме того, так как $\varphi^*(z) = \psi^*(z) = 0$ в S_{m+1}, то

$$\omega_0(t) = 0 \text{ на } L_{m+1}.$$

Наконец, используя последовательно равенства (4), (17), (7), (14), легко убеждаемся, что $\varepsilon_k = c_k = 0$ для всех k, и поэтому $\omega_0(t) = 0$ всюду на L.

Итак, однородное уравнение, соответствующее уравнению (5′), не имеет решений, отличных от нулевого.

Следовательно, уравнение (5′) всегда имеет одно и только одно решение $\omega(t)$.

Подставив это значение $\omega(t)$ в формулы (2), (3), мы получим регулярное решение поставленной задачи, если только соблюдено условие (8) равенства нулю главного момента внешних усилий [1]) [равенство нулю главного их вектора обеспечено непрерывностью функции $f(t)$ на L]. Таким образом, задача решена.

Перейдем теперь ко второй основной задаче. В этом случае граничное условие мы запишем так:

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t), \tag{18}$$

где при прежних обозначениях

$$g(t) = 2\mu(g_1 + ig_2). \tag{19}$$

Принимая во внимание формулы (3) и (4) § 101 (при $k = -\varkappa$), а также вид функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, определяемый формулами (10), (11) § 35, будем искать решение задачи в виде:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} + \sum_{j=1}^{m} A_j \ln(z - z_j), \tag{20}$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} - \sum_{j=1}^{m} \varkappa\bar{A}_j \ln(z - z_j), \tag{21}$$

[1]) Если это условие не соблюдено, то $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не будут удовлетворять граничному условию (1), так как в этом случае $b_{m+1} \neq 0$ и решение уравнения (5′) не будет решением уравнения (5).

где A_j — постоянные. При этом мы свяжем эти постоянные с искомой функцией $\omega(t)$ соотношениями

$$A_j = \int_{L_j} \omega(t)\, ds. \tag{22}$$

Смещения, соответствующие функциям $\varphi(z)$, $\psi(z)$, будут, как легко видеть, однозначны в S.

Мы будем, как и в предыдущем случае, разыскивать регулярные решения задачи. Для этого, как выше, достаточно считать, что искомая функция $\omega(t)$ имеет производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию H, что мы и примем.

Так же, как в предыдущем случае, получим для определения $\omega(t)$ интегральное уравнение

$$\varkappa\omega(t_0) + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \varkappa\{\ln(t_0-z_j) + \ln(\bar{t}_0-\bar{z}_j)\}\int_{L_j}\omega(t)\, ds = g(t_0) \text{ на } L, \tag{23}$$

где под $\ln(t_0 - z_j) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_j)$ следует подразумевать однозначную функцию, равную $2\ln|t - z_j|$.

В дальнейшем мы будем считать, что заданная функция $g(t)$ имеет производную $g'(t)$, удовлетворяющую условию H. Тогда аналогично тому, что имеет место для уравнения (5′), всякое (непрерывное) решение $\omega(t)$ уравнения (23) будет иметь производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию H.

Интегральное уравнение (23) оказывается всегда разрешимым. Для того, чтобы это показать, рассмотрим однородное уравнение, получающееся из предыдущего при $g(t) = 0$. Пусть $\omega_0(t)$ — какое-либо решение этого однородного уравнения, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — соответствующие значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Тогда

$$\varkappa\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 0 \text{ на } L.$$

Следовательно, в силу теоремы единственности будем иметь:

$$\varphi_0(z) = c, \qquad \psi_0(z) = \varkappa\bar{c},$$

где c — постоянная. Вследствие однозначности функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, которые попросту являются постоянными, получим на основании формулы (20) или (21), что

$$A_j^0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

где A_j^0 определяется формулой (22) при $\omega(t) = \omega_0(t)$.

Далее, из формул (20) и (21) следует:

$$c = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(t)\, dt}{t-z},$$

$$\varkappa\bar{c} = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\, dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_0'(t)\, dt}{t-z},$$

откуда легко заключаем (ср. случай первой основной задачи), что функции $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, определяемые формулами:

$$i\varphi^*(t) = \omega_0(t) - c, \qquad -i\psi^*(t) = \varkappa\overline{\omega_0(t)} + \bar{t}\omega_0'(t) + \varkappa\bar{c}, \tag{25}$$

являются граничными значениями некоторых функций $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$, голоморфных в областях S_1, S_2, ..., S_{m+1}, причем $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$.

Исключая $\omega_0(t)$ из формул (25), получаем:

$$\varkappa\overline{\varphi^*(t)} - t\varphi^{*\prime}(t) - \psi^*(t) = -2i\varkappa\bar{c} \text{ на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m+1). \tag{26}$$

Применяя теорему единственности для второй основной задачи к каждой из областей S_k, получаем [1]):

$$\varphi^*(z) = c_k, \qquad \psi^*(z) = \varkappa\bar{c}_k + 2i\varkappa\bar{c} \text{ в } S_k \ (k = 1, 2, \ldots, m+1);$$

так как в области S_{m+1} имеем: $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$, то $c_{m+1} = 0$, $c = 0$. Следовательно,

$$\varphi^*(z) = c_k \qquad \psi^*(z) = \varkappa\bar{c}_k \text{ в } S_k \ (k = 1, \ldots, m); \ \varphi^*(z) = \psi^*(z) = 0 \text{ в } S_{m+1}.$$

Но тогда на основании формул (25) имеем:

$$\omega_0(t) = ic_k \text{ на } L_k \ (k = 1, \ldots, m); \quad \omega_0(t) = 0 \text{ на } L_{m+1}.$$

Отсюда на основании равенства (24) следует, если принять во внимание формулу (22), что все $c_k = 0$ и тогда $\omega_0(t) = 0$.

Следовательно, однородное уравнение, соответствующее уравнению (23), не имеет решений, отличных от нуля, и поэтому уравнение (23) всегда имеет одно и только одно решение. Таким образом, наша задача решена.

Все сказанное с очевидными незначительными изменениями применимо и к случаю, когда контур L_{m+1} отсутствует и, следовательно, S — бесконечная плоскость с отверстиями.

§ 103. О решении основной смешанной задачи и некоторых других граничных задач по способу Д. И. Шермана. Способ, изложенный в предыдущем параграфе, может быть с успехом перенесен на решение некоторых других важных граничных задач.

Назовем в первую очередь о с н о в н у ю с м е ш а н н у ю з а д а ч у. Эта задача для областей того же вида, что и в предыдущем параграфе, решена Д. И. Шерманом [17], который пользуется в этом случае тем же представлением функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, что и в случае второй основной задачи, т. е. представлением (20), (21) § 102. Однако на этот раз интегральное уравнение, к которому непосредственно приводит указанное представление, уже не является уравнением Фредгольма, а принадлежит к одному классу сингулярных интегральных уравнений, изученному

[1]) Функции $\varphi^*(z) = 0$, $\psi^*(z) = 2i\varkappa\bar{c}$, очевидно, решают вторую основную задачу для S_k при граничном условии (26); самое же общее решение на основании теоремы единственности мы получим, прибавив к $\varphi^*(z)$ любую постоянную c_k, а к $\psi^*(z)$ — постоянную $\varkappa\bar{c}_k$ (см. § 34, формула (13) и сказанное после нее).

впоследствии Г. Ф. Манджавидзе [1, 2]. Сам Д. И. Шерман, не разрабатывая общей теории упомянутого класса сингулярных уравнений, указывает без детального исследования способ решения, основанный на приведении к уравнению Фредгольма [1]). Непосредственное же полное исследование сингулярного уравнения Д. И. Шермана дано Г. Ф. Манджавидзе [2] при помощи им же разработанной общей теории, упомянутой выше. Подробное изложение этого исследования дано в гл. V второго издания моей книги [25].

Методом, аналогичным предыдущему, Д. И. Шерман [20] дал новое, более простое, чем данное С. Г. Михлиным [10] и им самим [8], решение первой основной задачи для тела, определенным образом составленного из нескольких однородных частей с различными упругими постоянными; об этой задаче (а также о соответствующей второй основной задаче) уже упоминалось в § 96 и 98.

Наконец, Д. И. Шерман [22] дал (при помощи метода, аналогичного предыдущему) общее решение следующей задачи. Пусть S — область такого же вида, что и в предыдущем параграфе. Требуется найти упругое равновесие (однородного) тела, заполняющего S, если на границе L области S заданы нормальная компонента v_n смещения и касательная компонента T внешнего напряжения. При $T = 0$ эта задача представляет собой задачу о соприкасании рассматриваемого тела с жесткими профилями вдоль границы L при отсутствии трения. В следующей главе будет приведено решение этой последней задачи для того случая, когда область S односвязна и отображается на круг при помощи рациональной функции, как об этом было уже упомянуто в § 88, п. 2.

Отметим, наконец, что аналогичные методы применяются к задачам равновесия пластинки, подверженной нормальной к ее плоскости нагрузке, при различных граничных условиях: когда края пластинки заделаны, свободны или оперты, а также когда на различных частях границы задаются различные условия, соответствующие указанным только что случаям. Мы ограничимся здесь ссылкой на следующие основные работы: Халилов [1], Манджавидзе [2], Каландия [1, 2, 4], Фридман [2]. См. также второе издание книги автора [25], гл. V.

§ 104. Обобщения на случай анизотропных тел. Изложенные в настоящей главе методы решения могут быть с успехом обобщены на случай однородных анизотропных тел, обладающих определенным видом упругой симметрии. И в этом случае, как показал С. Г. Лехницкий, можно дать комплексное представление решения, разумеется более сложное, чем для изотропного тела. При помощи комплексного представления и надлежащего обобщения изложенных выше методов был решен ряд задач, как общих, так и частных. Рамки этой книги не позволяют нам

[1]) О другом способе решения для случая односвязной области, также указанном Д. И. Шерманом, было упомянуто в § 79.

изложить, хотя бы кратко, упомянутые вопросы. Поэтому мы ограничиваемся указанием некоторых работ; подробные указания на литературу даны в обзорной статье М. М. Фридмана [3].

Мы не перечисляем интересных работ С. Г. Лехницкого, так как главнейшие из них изложены в его монографиях [1, 4]. Из работ теоретического характера, дающих общее решение некоторых основных граничных задач, назовем работы С. Г. Михлина [11], Г. Н. Савина [3, 4], Д. И. Шермана [9, 19] и И. Н. Векуа [2] [1]).

Решение многих частных, но практически важных задач дано в только что названных книгах С. Г. Лехницкого; в этих книгах излагаются, кроме результатов самого автора, также результаты, полученные другими. Поэтому работ, дающих решения частного характера, мы здесь перечислять не будем, ограничиваясь ссылкой на упомянутые книги и на две работы Г. Н. Савина [5, 6] (см. также его монографию [8]).

§ 105. О других применениях общих представлений решения. Некоторые обобщения. Изложенные в настоящей и предыдущей (а также следующей) главах методы решения граничных задач плоской теории упругости основаны на общем представлении решения соответствующих дифференциальных уравнений при помощи функций комплексного переменного. Таким общим представлениям решений дифференциальных уравнений в частных производных при помощи «произвольных» функций придавалось на заре развития математической физики преувеличенное значение, аналогичное тому, которое в свое время придавалось интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи квадратур. Но вскоре выяснилось, что нахождение «общего решения» далеко не исчерпывает вопроса и что для решения соответствующих граничных задач такие общие решения зачастую почти ничего не дают.

Это вызвало обычную в таких случаях реакцию и привело к другой крайней точке зрения, господствовавшей до самого последнего времени, что из «общих решений» вообще нельзя извлечь почти никакой пользы.

Дело обстоит, однако, далеко не так. Общие решения, если их возможно найти, при целесообразном применении оказываются часто чрезвычайно полезными, особенно в вопросах прикладного характера. В ряде же случаев они дают возможность построить также вполне законченную теорию данного вопроса проще и полнее, чем это можно сделать другими, до сих пор известными методами; примером может служить плоская теория упругости [2]).

---

[1]) См. еще гл. VIII, § 163

[2]) В противоположность этому, известные до сих пор общие решения уравнений теории упругости в трехмерном случае не дали возможности построить законченную общую теорию; однако они оказались полезными для решения ряда задач частного характера и как вспомогательное средство при решении некоторых общих задач.

Поэтому представляется весьма желательным распространить методы, аналогичные изложенным выше, как на другие разделы самой теории упругости, так и на более широкий круг вопросов.

В этом направлении уже имеются результаты, заслуживающие большого внимания и дальнейшего развития.

Не имея возможности подробно остановиться на этом круге вопросов, упомянем лишь работы И. Н. Векуа, в которых метод комплексного представления решения распространен на обширный класс дифференциальных уравнений эллиптического типа, к которому принадлежат и уравнения плоской теории упругости (в статическом случае). Сводное изложение этих работ дано в книге И. Н. Векуа [1]; поэтому мы их перечислять не будем, ограничиваясь указанием на его работы, относящиеся к теории упругих оболочек [4, 5]; см. также И. Н. Векуа и Н. И. Мусхелишвили [1].

Метод общих представлений также с успехом применяется к некоторым задачам упругих колебаний, но мы не имеем возможности на этом останавливаться.

Мы не останавливаемся также на общих решениях уравнений теории упругости в трехмерном случае [1]), указанных Буссинеском, Б. Г. Галеркиным, П. Ф. Папковичем и другими. Некоторые сведения о них можно найти в курсах Л. С. Лейбензона [1], П. Ф. Папковича [1] и Love [1].

За последнее время все большее значение приобретает теория обобщенных аналитических функций, разработанная И. Н. Векуа, Л. Берсом (L. Bers) и др. (Л. Берс применяет термин «псевдоаналитические функции».) В частности, эта теория нашла в работах И. Н. Векуа важные применения в так называемой безмоментной теории оболочек. Не имея возможности останавливаться на этих вопросах, мы отсылаем читателя к фундаментальной монографии И. Н. Векуа [8].

---

[1]) См. предыдущее примечание.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

Многие важные задачи теории упругости, в том числе и задачи, рассмотренные в отделах II и III предыдущей главы, могут быть чрезвычайно просто решены путем приведения к одной граничной задаче теории функций комплексного переменного, которую я называю *задачей линейного сопряжения граничных значений*, или, короче, *задачей сопряжения* [1]). Формулировка этой задачи и ее решение для некоторых частных случаев (которые только и понадобятся нам в дальнейшем) будут даны в отделе I этой главы.

I. ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ

§ 106. Кусочно-голоморфные функции. Пусть, как в § 65, L обозначает совокупность конечного числа простых разомкнутых дуг и простых замкнутых контуров плоскости комплексного переменного z, не имеющих общих точек; эти дуги и контуры мы будем всегда предполагать гладкими. Как в § 65, мы будем называть L простой гладкой линией и будем предполагать, что на ней (т. е. на каждой дуге или контуре, входящем в ее состав) выбрано определенное положительное направление. Концы разомкнутых дуг (если таковые имеются), входящих в состав L, мы будем называть концами линии L.

Эти разомкнутые дуги мы будем часто обозначать через ab или, если таких дуг несколько, через $a_k b_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), выбирая обозначения так, чтобы положительное направление вело от a к b или от a_k к b_k.

Мы будем, как в § 65, различать «левую» и «правую» окрестности каждой точки t, расположенной на L и не совпадающей с ее концами.

Обозначим через S' часть плоскости, полученную удалением из полной плоскости точек, принадлежащих L; иначе говоря, S' есть плоскость комплексного переменного z, разрезанная вдоль L. Если L состоит лишь из разомкнутых дуг, то S' представляет собой связную область,

---

[1]) Многие авторы называют эту задачу задачей Римана; можно было бы назвать ее, с некоторым правом, задачей Гильберта, как это сделано в первом издании моей книги [25]. Теперь я применяю термин, указанный в тексте.

если же в состав L входят замкнутые контуры, то S' состоит из нескольких связных областей, разграниченных замкнутыми контурами.

Пусть $F(z)$ — некоторая функция, заданная в S' (но не на L), удовлетворяющая следующим условиям:

1°. Функция $F(z)$ голоморфна всюду в S'.

2°. Она непрерывно продолжима на все точки L слева и справа, за исключением, быть может, концов a_k, b_k.

3°. Вблизи концов a_k, b_k имеет место неравенство

$$|F(z)| < \frac{A}{|z-c|^{\mu}}, \quad 0 \leqslant \mu < 1, \tag{1}$$

где c обозначает любой из концов a_k, b_k, A — положительную постоянную, а μ — постоянную, подчиненную указанному условию.

Такую функцию $F(z)$ мы будем называть *кусочно-голоморфной* на всей плоскости или просто *кусочно-голоморфной*. Линию L мы будем называть *линией скачков* функции $F(z)$ или *границей*.

Граничные значения функции $F(z)$ слева и справа в точке t линии L мы будем, как в § 65, обозначать соответственно через $F^+(t)$ и $F^-(t)$.

Мы будем иногда рассматривать и функции, удовлетворяющие предыдущим условиям всюду, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots$, не расположенных на L, где функция $F(z)$ может иметь полюсы (других особенностей мы допускать не будем). Тогда мы будем говорить, что функция $F(z)$ кусочно-голоморфна всюду, кроме точек $z_1, z_2, \ldots$ В частности, мы часто будем иметь дело с функциями, кусочно-голоморфными всюду, кроме бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс, т. е. разлагается при достаточно больших $|z|$ в ряд вида

$$F(z) = C_m z^m + C_{m-1} z^{m-1} + \ldots + C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \ldots \tag{2}$$

Условимся еще в следующем: говоря, что $F(z)$ обращается в нуль в некоторой точке t_0 границы L, не совпадающей с концом, мы будем подразумевать, что $F^+(t_0) = F^-(t_0) = 0$; если t_0 — один из концов, то мы будем говорить, что $F(z)$ обращается в нуль в t_0, если $F(z)$ стремится к пределу 0 при $z \to t_0$.

Замечание. Определение понятия кусочно-голоморфной функции можно, разумеется, распространить и на случай, когда функция задана не на всей разрезанной плоскости S', а лишь на некоторой ее части. Пусть, например, S_0 — некоторая область, ограниченная одним или несколькими контурами, совокупность которых мы обозначим через L_0, и пусть совокупность L замкнутых контуров и разомкнутых дуг, рассмотренная выше, целиком расположена в S_0.

Если функция $F(z)$, заданная в S_0 (кроме точек линии L), удовлетворяет условиям 1°— 3° и, кроме того, принимает определенные граничные значения на границе L_0 области S_0, то ее можно назвать функцией, кусочно-голоморфной в S_0. Такую функцию можно дополнить до кусочно-

голоморфной функции, заданной на всей плоскости (кроме линий L_0 и L), положив, например, $F(z) = 0$ вне S_0.

В дальнейшем (если противное не оговорено) мы будем считать, что кусочно-голоморфная функция задана на всей плоскости (кроме самой линии скачков).

§ 107. Задача сопряжения. Пусть L — заданная гладкая линия, удовлетворяющая условиям предыдущего параграфа. Поставим себе такую задачу:

Найти кусочно-голоморфную функцию $F(z)$ с линией скачков L, граничные значения слева и справа которой удовлетворяют условию

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t) \quad \text{на } L \tag{1}$$

(кроме концов), *где $G(t)$ и $f(t)$ — заданные на L функции, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L.*

Мы будем, кроме того, предполагать, что заданные на L функции $G(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию H.

Мы сделали оговорку, что условие (1) должно быть удовлетворено на L, кроме концов, так как понятие граничных значений слева и справа не определено для концов линии L. В дальнейшем обычно эту оговорку мы будем опускать, всегда ее подразумевая.

Поставленную задачу мы будем называть *задачей линейного сопряжения граничных значений* [1]), или просто *задачей сопряжения*.

В случае, когда $f(t) = 0$ всюду на L, задача называется *однородной*. Однородная задача была впервые поставлена Гильбертом для случая, когда L — простой замкнутый контур; неоднородная задача (для того же случая) была поставлена И. И. Приваловым (при несколько более общих предположениях). Однако полное решение, притом весьма простое, было найдено лишь впоследствии. Это решение с соответствующими литературными указаниями изложено в книге автора [25].

Здесь же мы рассмотрим лишь тот частный и весьма простой случай, когда $G(t)$ — постоянная величина, ибо только этот случай и понадобится нам в дальнейшем. При этом для большей наглядности мы рассмотрим отдельно случаи, когда $G(t) = 1$, $G(t) = g$, где g — произвольная постоянная величина, отличная от единицы.

§ 108. Определение кусочно-голоморфной функции по заданному скачку. Простейшим случаем задачи, поставленной в предыдущем параграфе, является тот, когда $G(t) = 1$. В этом случае задача сводится к определению кусочно-голоморфной функции $F(z)$ по заданному скачку $f(t)$ на L:

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t) \quad \text{на } L. \tag{1}$$

[1]) Ибо граничные значения связаны (сопряжены) линейным соотношением (с переменными вообще коэффициентами).

Решение этой задачи можно написать сразу. А именно, рассмотрим интеграл типа Коши:

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

На основании сказанного в § 68 $F_0(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию [1]), исчезающую на бесконечности, причем согласно формуле (4) того же параграфа

$$F_0^+(t)-F_0^-(t)=f(t) \quad \text{на } L \text{ (кроме концов).} \tag{а}$$

Следовательно, $F_0(z)$ — одно из решений нашей задачи. Рассмотрим теперь разность $F(z)-F_0(z)=F_*(z)$, где $F(z)$ — искомое решение. На основании формул (1) и (а)

$$F_*^+(t)-F_*^-(t)=0 \quad \text{на } L.$$

Следовательно, на основании известного свойства функций комплексного переменного (§ 29, п. 4) значения функции $F_*(z)$ слева и справа от L аналитически продолжают друг друга. Поэтому, если приписать функции $F_*(z)$ надлежащие значения на L, то эта функция будет голоморфной на всей плоскости, кроме, быть может, окрестностей концов a_k, b_k линии L. Но так как в окрестности любого из этих концов c на основании условия (1) § 106

$$|F_*(z)|<\frac{A}{|z-c|^{\mu}}, \quad 0\leqslant\mu<1, \tag{б}$$

то, очевидно, точка c является устранимой особенностью [2]), и мы можем считать $F_*(z)$ голоморфной на всей плоскости. Следовательно, в силу теоремы Лиувилля $F(z)=C=\text{const}$ на всей плоскости, и общее решение нашей задачи имеет вид $F(z)=F_0(z)+C$, или

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная. Если мы хотим, чтобы $F(\infty)=0$, то должны положить $C=0$.

Найдем теперь решение несколько более общей задачи. А именно, будем считать, что искомая функция $F(z)$ кусочно-голоморфна всюду,

[1]) На основании замечания 4 § 68 функция $F_0(z)$ удовлетворяет в окрестности любого конца c линии L условию (1) § 106, т. е.

$$|F_0(z)|<\frac{A}{|z-c|^{\mu}},$$

даже при сколь угодно малом положительном μ.

[2]) В силу неравенства (б) произведение $(z-c)F_*(z)$ остается ограниченным в окрестности точки c; следовательно, в точке c имеем лишь устранимую особенность нашего произведения (см., например, Привалов [1]). Поэтому функцию $(z-c)F_*(z)$ мы можем считать голоморфной в окрестности c, т. е. $(z-c)F_*(z)=F_{**}(z)$, где $F_{**}(z)$ — голоморфная функция. Значит $F_*(z)$ может иметь в c лишь полюс первого порядка; но в силу неравенства (б) и этот полюс отсутствует, ибо $(z-c)F_*(z)\to 0$ при $z\to c$.

кроме бесконечно удаленной точки, где она может иметь полюс порядка не выше m, т. е. иметь вид, определяемый формулой (2) § 106.

Тогда, как легко видеть (применяя обобщенную теорему Лиувилля [1]),

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+P_m(z), \tag{3}$$

где $P_m(z)$ — произвольный полином степени не выше m:

$$P_m(z)=C_m z^m+C_{m-1}z^{m-1}+\ldots+C_0; \tag{4}$$

$C_0, C_1, \ldots, C_m$ обозначают произвольные постоянные.

Если, наконец, мы допускаем решения $F(z)$, имеющие полюсы порядков не выше $m_1, m_2, \ldots, m_l, m$ в заданных точках $z_1, z_2, \ldots, z_l, \infty$, то, как легко видеть,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+R(z), \tag{5}$$

где $R(z)$ — произвольная рациональная функция с полюсами заданного вида, т. е.

$$R(z)=\sum_{j=1}^{l}\left\{\frac{C_{j1}}{z-z_j}+\frac{C_{j2}}{(z-z_j)^2}+\ldots+\frac{C_{jm_j}}{(z-z_j)^{m_j}}\right\}+C_0+C_1z+\ldots+C_mz^m, \tag{6}$$

где C_{jk}, C_k — произвольные постоянные.

Замечание. Из сказанного вытекает, что всякую кусочно-голоморфную функцию $F(z)$ можно представить при помощи интеграла типа Коши следующим образом:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+C,$$

где через $f(t)$ обозначен скачок $F(z)$ на линии скачков L, т. е.

$$f(t)=F^+(t)-F^-(t),$$

а C — постоянная.

Если, далее, $F(z)$ — кусочно-голоморфная функция в некоторой области S_0, не совпадающей со всей плоскостью, как в замечании в конце § 106, то эту функцию всегда можно представить в виде суммы голоморфной в S_0 функции и интеграла типа Коши:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}+F^*(z), \tag{7}$$

где L — линия скачков, расположенная внутри S_0, $f(t)=F^+(t)-F^-(t)$, а $F^*(z)$ — голоморфная в S_0 функция. Разумеется, равенство (7) справедливо всюду в S_0, кроме точек линии L, на которой функция $F(z)$ вообще не определена.

---

[1]) Эта теорема заключается в следующем: если функция $F(z)$ голоморфна на всей плоскости, кроме точки $z=\infty$, и если при больших $|z|$

$$F(z)=O(z^m),$$

где m — целое положительное число, то $F(z)$ есть полином степени не выше m.

Справедливость равенства (7) вытекает из того, что разность

$$F(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z}=F^*(z)$$

представляет собой функцию, голоморфную в S_0, кроме точек линии L, причем очевидно

$$F^{*+}(t)-F^{*-}(t)=0 \quad \text{на } L,$$

и, следовательно, функция $F^*(z)$ голоморфна всюду в S_0, если приписать ей надлежащие значения на L.

Функцию $F^*(z)$ можно также представить в виде интеграла Коши, взятого по границе L_0 области S_0.

§ 109. Одно приложение. Укажем здесь одно интересное приложение формулы (7) § 108, данное Д. И. Шерманом [14]. Пусть дано упругое тело, представляющее собой пластинку, с некоторым числом отверстий и пусть в эти отверстия вставлены сплошные шайбы *из того же материала*, контуры которых при ненапряженном состоянии были несколько отличны от контуров соответствующих отверстий. Предполагается при этом, что контуры вставляемых шайб и соответствующих отверстий приводятся в соприкосновение без зазоров и спаиваются между собою (или удерживаются от скольжения друг по другу силами трения).

Полученное таким образом тело мы обозначим через S_0, а его границу через L_0. Мы будем считать, что L_0 — простой замкнутый контур [1]).

Обозначим, далее, через L совокупность контуров отверстий, в которые вставлены шайбы.

Пусть при наших обычных обозначениях $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, определяющие упругое равновесие тела S_0. Эти функции определены в каждой из областей, на которые разбивается область S_0 линией L, и голоморфны в них [2]); однако они претерпевают разрывы при переходе через L.

Мы будем считать, что заданы внешние усилия (X_n, Y_n), действующие на границу тела S_0, и, кроме того, скачки смещения при переходе через линии раздела, иначе говоря, значения разностей:

$$u^+-u^-=g_1(t), \quad v^+-v^-=g_2(t) \quad \text{на } L. \tag{1}$$

Заданные функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ зависят от очертаний, которые имели отверстия и вставленные в них шайбы до деформации, и от способа, кото-

[1]) Все сказанное ниже (с очевидными незначительными дополнениями) останется в силе, если считать, что L_0 состоит из нескольких замкнутых контуров; это соответствует случаю, когда шайбами заполняются не все отверстия и когда сами вставляемые шайбы могут иметь отверстия

[2]) Это очевидно относительно областей, занятых шайбами, ибо они предполагаются односвязными. Однозначность же функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в области, занятой окружающим шайбы материалом, следует из того, что главные векторы (а также главные моменты) усилий, приложенных к обводам первоначальных отверстий со стороны шайб, равны, очевидно, нулю.

рым были приведены в соприкасание точки краев шайб и окружающего тела перед спайкой.

При этих предположениях мы будем иметь следующие граничные условия:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t) \quad \text{на } L_0, \tag{2}$$

$$\varphi^+(t)+t\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}=\varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)} \quad \text{на } L, \tag{3}$$

$$\varkappa\varphi^+(t)-t\overline{\varphi'^+(t)}-\overline{\psi^+(t)}=\varkappa\varphi^-(t)-t\overline{\varphi'^-(t)}-\overline{\psi^-(t)}+2\mu g(t) \text{ на } L, \tag{4}$$

где при наших обычных обозначениях

$$f(t)=i\int_0^s (X_n+iY_n)\,ds \quad \text{на } L_0, \quad g(t)=g_1(t)+ig_2(t) \quad \text{на } L \tag{5}$$

— заданные функции.

Условие (2) выражает, что заданы внешние напряжения, действующие на границу L_0 тела S_0. Условие (3) выражает то, что напряжения, действующие с той и другой стороны на элементы линий раздела, уравновешивают друг друга. Наконец, условие (4) выражает, что заданы скачки смещений на линии раздела.

В сущности, условие (2) должно быть удовлетворено лишь с точностью до произвольной постоянной; аналогично, условие (3) должно быть удовлетворено лишь с точностью до произвольных постоянных на каждом из замкнутых контуров, составляющих L. Но легко видеть, что эти постоянные можно включить в искомые функции.

Складывая равенства (3) и (4), получаем:

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=\frac{2\mu g(t)}{\varkappa+1} \quad \text{на } L. \tag{6}$$

Далее, переходя в условии (3) к сопряженным значениям и принимая во внимание условие (6), находим:

$$\psi^+(t)-\psi^-(t)=\frac{2\mu h(t)}{\varkappa+1} \quad \text{на } L, \tag{7}$$

где положено:

$$h(t)=-\overline{g(t)}-\bar{t}\,g'(t), \quad g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}; \tag{8}$$

таким образом, $h(t)$ — заданная на L функция.

Из условий (6) и (7) получаем на основании сказанного в замечании в конце предыдущего параграфа:

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)+\frac{\mu}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi(z)=\psi_0(z)+\frac{\mu}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{9}$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, голоморфные в S_0.

Полагая для сокращения письма

$$\varphi_*(z)=\frac{\mu}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi_*(z)=\frac{\mu}{\pi i(\varkappa+1)}\int_L \frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{10}$$

будем иметь:

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_*(z),\quad \psi(z)=\psi_0(z)+\psi_*(z); \tag{11}$$

голоморфные в S_0 функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ подлежат определению, тогда как $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ — известные кусочно-голоморфные функции, определяемые формулами (10).

Внося выражения (11) в граничное условие (2), получаем:

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f_0(t)\quad \text{на } L_0, \tag{12}$$

где

$$f_0(t)=f(t)-\varphi_*(t)-t\overline{\varphi_*'(t)}-\overline{\psi_*(t)} \tag{13}$$

— заданная на L_0 функция.

Мы пришли, таким образом, к обычной первой основной задаче для тела S_0.

Найдя $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, мы найдем $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по формулам (9) или, что все равно, (11).

Мы видим, следовательно, что *рассматриваемая задача непосредственно приводится к обычной первой основной задаче для той же области* S_0.

Если на L_0 заданы не напряжения, а смещения, то тем же путем мы придем к обычной второй основной задаче.

В случае, когда материалы шайб и окружающего тела имеют различные упругие свойства, дело обстоит иначе; о решении граничных задач для этого случая говорилось выше.

§ 109а. Пример. Рассмотрим простейший случай, когда в отверстие кругового кольца с радиусом внешней окружности, равным единице, и радиусом отверстия r вставляется круглая шайба, имевшая до деформации радиус $r+\varepsilon$, где ε — заданная постоянная. Тогда S_0 представляет собой круг радиуса 1, L_0 — окружность этого круга, L — окружность радиуса $r<1$.

Если считать, что начало координат помещается в центре и что положительное направление на L (как и на L_0) противоположно направлению движения часовой стрелки, то, как легко видеть, будем иметь, полагая $z=\varrho e^{i\vartheta}$:

$$g(t)=-\varepsilon(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)=-\varepsilon e^{i\vartheta}=-\frac{\varepsilon t}{r}\quad \text{на } L,$$

$$h(t)=-\overline{g(t)}-\bar{t}\,g'(t)=\frac{2\varepsilon\bar{t}}{r}=\frac{2\varepsilon r}{t}\quad \text{на } L.$$

Следовательно, как легко видеть, из формул (10) следует:

$$\varphi_*(z)=\begin{cases}-\dfrac{2\mu\varepsilon}{r(\varkappa+1)}z & \text{при } |z|<r\\ 0 & \text{при } |z|>r\end{cases}\qquad \psi_*(z)=\begin{cases}0 & \text{при } |z|<r\\ -\dfrac{4\mu\varepsilon r}{\varkappa+1}\dfrac{1}{z} & \text{при } |z|>r\end{cases}$$

и функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ определятся по граничному условию

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_0(t) \quad \text{на } L_0,$$

где [1])

$$f_0(t) = f(t) + \frac{4\mu\varepsilon r}{\varkappa+1}\, t.$$

Таким образом, для решения нашей задачи мы должны решить обычную первую основную задачу для круга, прибавив к фактически действующей на L_0 нагрузке, характеризуемой функцией $f(t)$, фиктивную нагрузку, соответствующую второму слагаемому правой части предыдущего равенства. Эта фиктивная нагрузка представляет собой, как легко видеть, равномерно распределенное нормальное растяжение величины

$$\frac{4\mu r}{\varkappa+1}\,\varepsilon.$$

Решение задачи можно сразу написать, применяя формулы § 80 [2]).

§ 110. Решение задачи $F^+ = gF^- + f$. Рассмотрим теперь случай, когда $G(t) = g$, где $g \neq 1$ — заданная постоянная, вообще комплексная. Граничное условие имеет в этом случае вид

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t) \qquad (1)$$

на L, кроме концов.

Мы будем считать теперь, что L состоит из n простых разомкнутых гладких дуг L_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) без общих точек [3]); эти дуги, как было уже условлено, мы будем обозначать еще через $a_k b_k$, где a_k, b_k — концы L_k, обозначенные так, что положительное направление ведет от a_k к b_k (рис. 48).

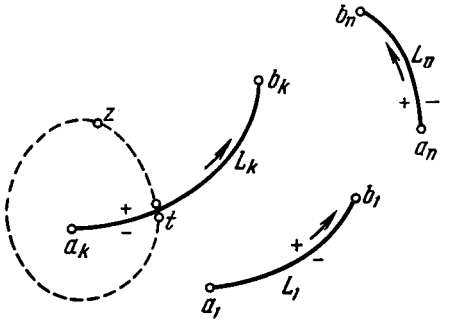


Рис. 48.

Будем сперва искать решения, могущие иметь полюс произвольного порядка на бесконечности, и начнем с однородной задачи

$$F^+(t) - gF^-(t) = 0. \qquad (1')$$

[1]) В нашем случае $\varphi_*(t) = \varphi_*'(t) = 0$ на L_0, ибо $\varphi_*(z) = 0$ при $|z| > r$, а

$$\overline{\psi_*(t)} = -\frac{4\mu\varepsilon r}{\varkappa+1}\,\frac{1}{\bar{t}} = -\frac{4\mu\varepsilon r}{\varkappa+1}\, t \quad \text{на } L_0.$$

[2]) Некоторые другие простые приложения даны у Н. Д. Тарабасова [1, 2] и А. Г. Угодчикова [1]; более сложный случай рассмотрен в статье Д. И. Шермана [23].

[3]) Случай, когда L состоит лишь из замкнутых контуров, как легко видеть, непосредственно сводится к задаче предыдущего параграфа. Например, если L состоит из одного простого контура, разбивающего плоскость на две области S^+ и S^-, примыкающие к L слева и справа, мы можем, вместо функции $F(z)$, рассмотреть функцию $F_*(z)$, определенную так: $F_*(z) = F(z)$ в S^+, $F_*(z) = gF(z)$ в S^-; тогда условие (1) примет вид $F_*^+(t) - F_*^- f = f(t)$. Аналогично для случая, когда L состоит из нескольких замкнутых контуров.

В случае, когда L состоит из замкнутых контуров и разомкнутых дуг, задача также легко решается, но мы на этом не останавливаемся.

Попытаемся найти частное решение $X_0(z)$ этой задачи в виде

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{-\gamma}(z-b_j)^{\gamma-1}, \tag{2}$$

где $\gamma = \alpha + i\beta$ — постоянная.

Функция $X_0(z)$ голоморфна в S', т. е. на разрезанной вдоль L плоскости, если под этой функцией подразумевать определенную ветвь, например ту, для которой $\lim\limits_{z\to\infty}[z^n X_0(z)] = 1$, иными словами, ту ветвь, которая при больших $|z|$ имеет вид

$$X_0(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{\alpha_{-n-1}}{z^{n+1}} + \ldots; \tag{3}$$

в дальнейшем (если противное не оговорено) мы будем подразумевать именно эту ветвь.

Легко проверить, если проследить за изменением аргумента $z - a_k$ или $z - b_k$, когда z, выходя из точки t дуги $a_k b_k$, описывает замкнутый путь, не пересекающий L, ведущий от левой стороны дуги $a_k b_k$ к правой и охватывающий конец a_k (как на рис. 48) или конец b_k (этот случай на рис. 48 не изображен), что имеет место равенство [1])

$$X_0^-(t) = e^{-2\pi i\gamma} X_0^+(t),$$

т. е.

$$X_0^+(t) = e^{2\pi i\gamma} X_0^-(t). \tag{4}$$

Следовательно, $X_0(z)$ будет удовлетворять граничному условию (1′), если $e^{2\pi i\gamma} = g$, т. е.

$$\gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{\ln|g|}{2\pi i} + \frac{\theta}{2\pi}, \tag{5}$$

где θ обозначает аргумент постоянной g. Этот аргумент определен с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число, но мы выберем его так, чтобы

$$0 \leqslant \theta < 2\pi; \tag{6}$$

[1]) По определению степени с комплексным показателем

$$(z-a_k)^{-\gamma} = e^{-\gamma \ln(z-a_k)} = e^{-\gamma[\ln|z-a_k| + i\vartheta]} = e^{-\gamma \ln|z-a_k|} e^{-i\gamma\vartheta},$$

где под $\ln|z-a_k|$ подразумевается действительное значение, или еще

$$(z-a_k)^{-\gamma} = |z-a_k|^{-\gamma} e^{-i\gamma\vartheta},$$

где $\vartheta = \arg(z-a_k)$ и где под $|z-a_k|^{-\gamma}$ следует подразумевать однозначно определенное выражение

$$e^{-\gamma \ln|z-a_k|}.$$

Когда z переходит с левой стороны L_k на правую, огибая точку a_k, как на рис. 48, то ϑ получает приращение $+2\pi$, следовательно, $(-i\gamma\vartheta)$ прирастает на $-2\pi i\gamma$, и потому выражение $(z-a_k)^{-\gamma}$ приобретает множитель $e^{-2\pi i\gamma}$.

Если же z переходит с левой стороны L_k на правую, огибая точку b_k, то $\vartheta = \arg(z-b_k)$ прирастает на (-2π) и

$$(z-b_k)^{\gamma-1} = |z-b_k|^{\gamma-1} e^{i(\gamma-1)\vartheta}$$

приобретает множитель $e^{-2\pi i(\gamma-1)} = e^{-2\pi i\gamma}$, такой же, как в первом случае, ибо $e^{2\pi i} = 1$.

последнее условие вполне определяет θ. Если, в частности, g — действительное положительное число, то $\theta = 0$; если же g — действительное отрицательное число, то $\theta = \pi$.

Проверим еще, удовлетворено ли неравенство вида

$$|X_0(z)| < \frac{A}{|z-c|^{\mu}}, \quad 0 \leqslant \mu < 1, \tag{7}$$

где c — любой из концов a_k, b_k, которому должна, по условию, удовлетворять всякая кусочно-голоморфная функция.

На основании условия (6) имеем:

$$0 \leqslant \alpha < 1. \tag{8}$$

Если g не есть действительное положительное число, то $\alpha \neq 0$, $1 - \alpha < 1$. Поэтому, если исключить случай, когда g — действительное положительное число, неравенство (7) будет соблюдено при $c = a_k$ можно взять [1]) $\mu = \alpha$, при $c = b_k$ можно взять $\mu = 1 - \alpha$.

Итак, мы нашли частное решение $X_0(z)$ однородной задачи (при условии $\alpha \neq 0$); оно выражается формулой (2), если под γ подразумевать величину (5). Это частное решение нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается и неограничено, как соответственно $|z - a_k|^{-\alpha}$ и $|z - b_k|^{\alpha-1}$, вблизи концов a_k, b_k.

Найдем теперь самое общее решение однородной задачи, могущее иметь полюс на бесконечности. Для этого заметим, что функция $X_0(z)$, будучи решением однородной задачи, удовлетворяет условию

$$X_0^+(t) = gX_0^-(t) \quad \text{на } L, \tag{9}$$

откуда

$$g = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)} \quad \text{на } L. \tag{9'}$$

Внося это выражение на место g в граничное условие (1'), получаем:

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X_0^-(t)} = 0 \quad \text{на } L,$$

или

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = 0 \quad \text{на } L,$$

---

[1]) Имеем (см. предыдущее примечание):

$$(z-a_k)^{-\gamma} = (z-a_k)^{-(\alpha+i\beta)} = e^{-(\alpha+i\beta)\ln(z-a_k)} = e^{-(\alpha+i\beta)(\ln r + i\vartheta)},$$

где $r = |z - a_k|$, $\vartheta = \arg(z - a_k)$.

Поэтому

$$(z-a_k)^{-\gamma} = e^{-\alpha \ln r}\ \Theta = \frac{\Theta}{r^{\alpha}} = \frac{\Theta}{|z-a_k|^{\alpha}},$$

где $\Theta = e^{\beta\vartheta - i(\alpha\vartheta - \beta \ln r)}$, откуда следует, что $|\Theta| = e^{\beta\vartheta}$. Когда z находится в окрестности точки a_k на разрезанной вдоль L плоскости, тогда аргумент ϑ заключен в конечных пределах (ибо z не может пересекать L), и, следовательно, $|\Theta|$ — ограниченная величина, притом такая, что $|\Theta| > a$, где a — положительная постоянная. Аналогично для окрестности точки b_k.

где $F_*(z)$ обозначает кусочно-голоморфную функцию $F(z)/X_0(z)$. Из предыдущего соотношения вытекает, что функция $F_*(z)$ голоморфна на всей плоскости, если приписать ей надлежащие значения на L (ср. § 108), кроме точки $z=\infty$. Так как, далее, $F_*(z)$ может иметь на бесконечности лишь полюс, то по обобщенной теореме Лиувилля $F_*(z)$ — полином.

Итак, самое общее решение однородной задачи дается формулой

$$F(z)=X_0(z)\,P(z), \tag{10}$$

где $P(z)$ — произвольный полином.

Если мы хотим получить решение, голоморфное также на бесконечности, то должны считать, что степень полинома $P(z)$ не превосходит n; это вытекает из поведения $X_0(z)$ на бесконечности, определяемого формулой (3). Если мы хотим, чтобы $F(\infty)=0$, то под $P(z)$ мы должны подразумевать полином степени не выше $n-1$.

Решения (10) вообще не ограничены вблизи концов. Но если мы хотим получить решения, ограниченные вблизи заданных концов $c_1, c_2, \ldots, c_p$, то должны выбрать полином $P(z)$ так, чтобы он обращался в нуль в этих точках, иначе говоря, взять

$$P(z)=(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_p)\,Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином. Тогда решение $F(z)$ будет не только ограниченным вблизи заданных концов, но и обращаться в нуль на них [1]). Полагая

$$X_p(z)=X_0(z)(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_p), \tag{11}$$

мы можем представить все решения, ограниченные вблизи концов $c_1, c_2, \ldots, c_p$, так:

$$F(z)=X_p(z)\cdot Q(z), \tag{12}$$

где $Q(z)$ — произвольный полином.

$X_p(z)$ представляет собой, разумеется, частное решение однородной задачи, аналогичное $X_0(z)$, но ограниченное вблизи заданных концов; оно обращается в нуль на этих концах, однако так, что вблизи этих концов

$$X_p(z)=|z-c_j|^{\mu}\cdot\Theta,\quad 0<\mu<1, \tag{13}$$

где Θ — ограниченная величина, такая, что $|\Theta|>a=\text{const}>0$ [2]).

Среди решений $X_p(z)$ отметим два следующих: решение

$$X(z)=X_0(z)\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)(z-b_j)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{1-\nu}(z-b_j)^{\nu}, \tag{14}$$

остающееся ограниченным вблизи всех концов (и обращающееся в нуль на них), и решение

$$X_*(z)=X_0(z)\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)=\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{z-b_j}{z-a_j}\right]^{\nu}, \tag{15}$$

[1]) Решений, ограниченных вблизи данных концов и не обращающихся в нуль на них, как мы видим, не существует (мы все время предполагаем пока, что $\alpha\neq 0$).

[2]) См. примечание на предыдущей странице.

остающееся ограниченным вблизи концов b_j, $j = 1, \ldots, n$ (и обращающееся в нуль на них).

Решения $X(z)$ и $X_*(z)$ ведут себя при больших $|z|$ следующим образом:

$$X(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{z} + \ldots; \tag{16}$$

$$X_*(z) = 1 + \frac{\gamma_{-1}}{z} + \frac{\gamma_{-2}}{z^2} + \ldots \tag{17}$$

Вернемся теперь к неоднородной задаче. Пользуясь формулой (9′), перепишем граничное условие (1) так:

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X_0^-(t)} = \frac{f(t)}{X_0^+(t)},$$

или

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = f_*(t),$$

где введены обозначения: $F_*(z) = F(z)/X_0(z)$, $f_*(t) = f(t)/X_0^+(t)$.

Применяя теперь сказанное в § 108, получаем:

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)P(z), \tag{18}$$

где $P(z)$ — произвольный полином. Это и есть общее решение задачи при допущении полюса на бесконечности.

Если мы хотим получить решение, голоморфное на бесконечности, то должны считать, принимая во внимание формулу (3), что $P(z)$ — полином степени не выше n:

$$P(z) = C_0z^n + C_1z^{n-1} + \ldots + C_{n-1}z + C_n, \tag{19}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если, кроме того, мы хотим, чтобы $F(\infty) = 0$, то должны считать $C_0 = 0$.

Решение $F(z)$, вообще говоря, не ограничено вблизи концов a_k, b_k. Путем надлежащего подбора полинома $P(z)$ мы можем, однако, добиться, чтобы оно было ограниченным вблизи заранее заданных концов $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Это проще всего показать непосредственно, построив общее решение, обладающее указанным свойством. А для этого, в свою очередь, достаточно буквально повторить рассуждения, приведшие к формуле (18), но взяв, вместо частного решения $X_0(z)$, решение $X_p(z)$, определяемое формулой (11) [1]).

---

[1]) И в нашем случае мы приходим к условию: $F_*^+(t) - F_*^-(t) = f_*(t)$, где на этот раз

$$F_*(z) = \frac{F(z)}{X_p(z)}, \qquad f_*(t) = \frac{f(t)}{X_p^+(t)};$$

теперь, однако, $X_p(z)$ обращается в нуль на концах $c_1, \ldots, c_p$; но так как по условию искомая функция ограничена вблизи этих концов, то $|F_*(z)| < A/|z - c_j|^{\mu}$, $0 \leqslant \mu < 1$, и прежние рассуждения остаются в силе, если не обращать внимания на то, что функция $f_*(t)$, вообще говоря, не ограничена вблизи концов c_j. Это послед-

Таким образом получим общее решение, ограниченное вблизи концов $c_1, c_2, \ldots, c_p$:

$$F(z) = \frac{X_p(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)} + X_p(z)\,P(z), \tag{20}$$

где $P(z)$ — произвольный полином.

Из формул (11) и (3) вытекает, что при больших $|z|$

$$X_p(z) = z^{p-n} + \delta_{p-n-1} z^{p-n-1} + \ldots; \tag{21}$$

поэтому функция $X_p(z)$ голоморфна на бесконечности лишь при $p \leqslant n$.

Если $p \leqslant n+1$, то первое слагаемое правой части (20) остается ограниченным при $z \to \infty$ и для получения решения, голоморфного также при $z = \infty$, следует считать, что $P(z)$ — полином степени не выше $n - p$; при $p = n+1$ следует считать $P(z) = 0$.

Если же $p > n+1$, то голоморфные на бесконечности решения существуют лишь при соблюдении некоторых условий, которые мы сейчас укажем. Принимая во внимание, что при больших $|z|$

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} - \frac{t}{z^2} - \frac{t^2}{z^3} - \ldots,$$

имеем разложение, пригодное для достаточно больших $|z|$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)} = -\frac{A_1}{z} - \frac{A_2}{z^2} - \ldots, \tag{22}$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^{k-1} f(t)\,dt}{X_p^+(t)} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Если поэтому мы хотим, чтобы решение (20) было голоморфным на бесконечности при $p > n+1$, то мы должны положить $P(z) = 0$ и, кроме того, подчинить $f(t)$ условию: $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p-n-1$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^{k-1} f(t)\,dt}{X_p^+(t)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p-n-1). \tag{24}$$

Итак, при $p > n+1$ голоморфные на бесконечности решения, ограниченные на концах $c_1, c_2, \ldots, c_p$, существуют лишь при соблюдении условий (24).

Если, далее, мы хотим, чтобы $F(\infty) = 0$, то в предыдущей формуле мы должны взять $k = 1, 2, \ldots, p-n$.

До сих пор мы исключали случай, когда $\alpha = 0$, т. е. когда g — действительное положительное число. При $\alpha = 0$ (считая по-прежнему,

---

нее обстоятельство, как не трудно показать, также не имеет значения, если учесть характер поведения $f_*(t)$ вблизи концов в нашем случае (см. Мусхелишвили [25]). Мы в сущности доказываем в тексте, что если решение требуемого вида существует, то оно дается формулой (20); но можно показать (см. там же), что первое слагаемое правой части (20) действительно остается ограниченным вблизи концов $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

что $g \neq 1$) мы можем воспользоваться частным решением $X_*(z)$, определяемым формулой (15). Это решение, как легко видеть, в нашем случае, когда $\gamma = i\beta \neq 0$, остается ограниченным вблизи всех концов и нигде в нуль не обращается.

Рассуждая совершенно аналогично предыдущему, получаем, что общее решение задачи дается формулой

$$F(z) = \frac{X_*(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_*^+(t)(t-z)} + X_*(z)\,P(z), \tag{25}$$

где $P(z)$ — произвольный полином; в нашем случае решения необходимо ограничены вблизи всех концов [1]). Если мы хотим получить решение, голоморфное при $z = \infty$, то должны, принимая во внимание формулу (17), положить $P(z) = C = \text{const}$; если же, кроме того, требуется, чтобы $F(\infty) = 0$, то следует положить $P(z) = 0$.

Формула (25), разумеется, пригодна и для $\alpha \neq 0$; в этом случае она обращается в частный случай формулы (20), давая все решения, ограниченные на концах $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Найдем, наконец, общее решение нашей задачи при допущении, что оно может иметь полюсы порядков не выше $m_1, m_2, \ldots, m_l, m$, в заданных точках $z_1, z_2, \ldots, z_l, \infty$. Рассуждая совершенно аналогично предыдущему и принимая во внимание формулу (5) § 108, легко получаем формулу для общего решения требуемого вида, пригодную при $\alpha \neq 0$:

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)R(z), \tag{26}$$

где $R(z)$ — рациональная функция вида [ср. формулу (6) § 108]:

$$R(z) = \sum_{j=1}^{l} \left\{ \frac{C_{j1}}{z-z_j} + \frac{C_{j2}}{(z-z_j)^2} + \ldots + \frac{C_{jm_j}}{(z-z_j)^{m_j}} \right\} + P(z), \tag{27}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, степени не выше $m + n$ [2]).

В случае $\alpha = 0$ мы будем иметь аналогичную формулу, получаемую заменой $X_0(z)$ на $X_*(z)$; в этом случае степень полинома $P(z)$ не должна превосходить m [3]).

---

[1]) Можно показать (ср. предыдущее примечание), что первое слагаемое в правой части (25) остается ограниченным.

[2]) Полином $P(z)$ должен быть таков, чтобы полюс функции $P(z)\,X_0(z)$ на бесконечности был порядка не выше m но, как мы знаем, при больших $|z|$

$$X_0(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{\alpha_{-n-1}}{z^{n+1}} + \ldots$$

[3]) Ибо в этом случае при больших $|z|$

$$X_*(z) = 1 + \frac{\gamma_{-1}}{z} + \ldots$$

Отметим в заключение частный случай рассматриваемой задачи, когда $g = -1$; в этом случае граничное условие принимает вид

$$F^+(t) + F^-(t) = f(t). \tag{28}$$

Имеем в нашем случае:

$$\gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln(-1)}{2\pi i} = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Следовательно, согласно формуле (2)

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{-\frac{1}{2}} (z-b_j)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)}} \tag{30}$$

и согласно формулам (14) и (15)

$$X(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)}, \tag{31}$$

$$X_*(z) = \frac{\sqrt{(z-b_1)\ldots(z-b_n)}}{\sqrt{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}}. \tag{32}$$

Самое общее решение задачи, допускающее полюс на бесконечности, дается формулой (18), в которой вместо $X_0(z)$ следует взять выражение (30); если принять во внимание, что в нашем случае $X_0(z) = 1/X(z)$, для этого общего решения будем иметь:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X^+(t) f(t)\, dt}{t-z} + \frac{P(z)}{X(z)}, \tag{33}$$

где $X(z)$ определяется формулой (31), а $P(z)$ — произвольный полином. Решение, остающееся голоморфным и на бесконечности, получим, считая, что степень полинома $P(z)$ не превосходит n.

Решение, ограниченное вблизи всех концов, получим по формуле, вытекающей из общей формулы (20) [1]):

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z) P(z). \tag{34}$$

Если мы хотим получить решение, голоморфное также на бесконечности, то должны считать $P(z) = 0$ и, кроме того, подчинить заданную функцию $f(t)$ условиям, вытекающим из условий (24):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^{k-1} f(t)\, dt}{X^+(t)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{35}$$

Если же мы хотим, кроме того, чтобы $F(\infty) = 0$, то в предыдущей формуле следует взять $k = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание 1. Во многих случаях интегралы, входящие в формулы настоящего параграфа, легко вычисляются в конечном виде. Это, например, имеет место в случае, часто встречающемся на практике, когда $f(t)$ — полином:

$$f(t) = A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \ldots + A_0. \tag{36}$$

[1]) В нашем случае $p = 2n$ и $X_p(z)$ обращается в функцию, обозначенную нами просто через $X(z)$.

Действительно, рассмотрим интеграл

$$I(z)=\int_L \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)\,(t-z)}, \tag{37}$$

фигурирующий в формуле (20); в частности, при $p=0$ мы получим интеграл формулы (18).

Рассмотрим, наряду с предыдущим, другой интеграл:

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)\,(\zeta-z)}, \tag{38}$$

где Λ обозначает совокупность n замкнутых контуров $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, окружающих дуги $L_1, L_2, \ldots, L_n$, с положительными направлениями по движению часовой стрелки, как показано на рис. 49; при этом предполагается, что точка z остается вне этих контуров.

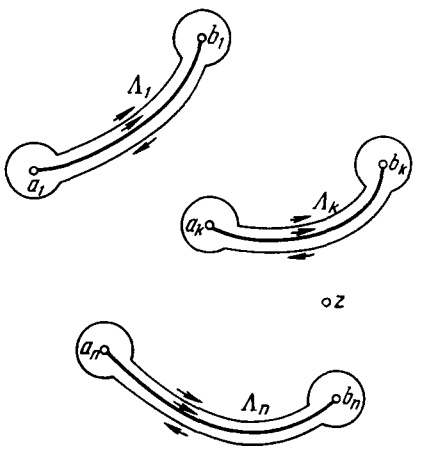


Рис. 49.

Принимая во внимание формулу (21), заключаем, что при больших $|\zeta|$

$$\frac{f(\zeta)}{X_p(\zeta)}=\alpha_q\zeta^q+\alpha_{q-1}\zeta^{q-1}+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_0+\frac{\beta_1}{\zeta}+\frac{\beta_2}{\zeta^2}+\ldots, \tag{39}$$

где $q=n-p+m$, причем коэффициенты $\alpha_q, \alpha_{q-1}, \ldots, \alpha_0$ (другие нам не понадобятся) легко вычисляются элементарным путем [1]); при $q<0$ следует считать, что все они равны нулю.

Поэтому на основании формулы (3′) § 70 [2]) получаем:

$$\Omega(z)=\frac{f(z)}{X_p(z)}-\alpha_q z^q-\ldots-\alpha_0$$

(если $q<0$, то полином в правой части исчезает).

С другой стороны, стягивая контуры Λ_k к дугам L_k и замечая, что при этом $X_p(\zeta)$ в интеграле (38) стремится к $X_p^+(t)$ или $X_p^-(t)$, смотря

---

[1]) Действительно, $1/X_p(\zeta)$ есть произведение биномов вида $(\zeta-c)^\lambda$, которые разлагаются в биномиальные ряды:

$$(\zeta-c)^\lambda=\zeta^\lambda\left(1-\frac{c}{\zeta}\right)^\lambda=\zeta^\lambda\left(1-\lambda\frac{c}{\zeta}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}\frac{c^2}{\zeta^2}-\ldots\right).$$

Сумма показателей λ равна согласно формуле (21) $n-p$, т. е. целому числу (или нулю).

[2]) В упомянутой формуле интеграл берется по одному замкнутому контуру, но, очевидно, это не имеет значения. Разница в знаках происходит оттого, что положительные направления пути интегрирования здесь и в § 70 выбраны различно.

по тому, на какой из частей контура Λ_k находится ζ, легко заключаем [1]):

$$\int\limits_{\Lambda_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)(\zeta-z)} = \int\limits_{a_k b_k} \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)} + \int\limits_{b_k a_k} \frac{f(t)\,dt}{X_p^-(t)(t-z)},$$

или, принимая во внимание, что на L_k имеем $X_p^-(t) = \frac{1}{g} X_p^+(t)$ и что при замене пути $b_k a_k$ на путь $a_k b_k$ мы должны изменить знак перед интегралом на обратный,

$$\int\limits_{\Lambda_k} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)(\zeta-z)} = (1-g)\int\limits_{L_k} \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)},$$

откуда, очевидно, следует:

$$\int\limits_{\Lambda} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)(\zeta-z)} = (1-g)\int\limits_{L} \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)}.$$

Следовательно, для интересующего нас интеграла $I(z)$ получаем:

$$I(z) = \int\limits_{L} \frac{f(t)\,dt}{X_p^+(t)(t-z)} = \frac{2\pi i}{1-g}\Omega(z) = \frac{2\pi i}{1-g}\left\{\frac{f(z)}{X_p(z)} - \alpha_q z^q - \ldots - \alpha_0\right\}. \quad (40)$$

Интегралы вида

$$\int\limits_{L} \frac{t^{k-1} f(t)\,dt}{X_p^+(t)}, \quad (41)$$

где k — целое число, также легко вычисляются; при $k \leqslant 0$ предполагаем, что точка $z=0$ не расположена на L.

В самом деле, аналогично предыдущему легко заключаем, что

$$(1-g)\int\limits_{L} \frac{t^{k-1} f(t)\,dt}{X_p^+(t)} = \int\limits_{\Lambda} \frac{\zeta^{k-1} f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)},$$

где Λ обозначает то же, что выше. С другой стороны, если α_{-k} обозначает коэффициент при ζ^{-k} в разложении (39), то по теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Lambda} \frac{\zeta^{k-1} f(\zeta)\,d\zeta}{X_p(\zeta)} = -2\pi i \alpha_{-k}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{L} \frac{t^{k-1} f(t)\,dt}{X_p^+(t)} = -\frac{2\pi i \alpha_{-k}}{1-g}. \quad (42)$$

Совершенно аналогичные результаты получим, когда $f(t)$ — *рациональная функция*, а не только полином.

Следует иметь в виду, что если $f(t)$ представляется на различных дугах L_k, составляющих L, различными полиномами (или различными

[1]) То обстоятельство, что функция $1/X_p(\zeta)$ может быть неограниченной вблизи концов, как легко видеть, не имеет значения, так как вблизи любого конца c

$$\frac{1}{|X_p(\zeta)|} < \frac{\text{const}}{|\zeta-c|^{\mu}}, \quad \mu < 1,$$

и поэтому интегралы, взятые по бесконечно малым окружностям, описанным около концов (см. рис. 49), стремятся к нулю.

рациональными функциями), то вычисление предыдущих интегралов уже не может быть, вообще говоря, осуществлено столь просто.

Если L состоит лишь из одной дуги и если функция $f(t)$ не есть полином, то все же в большинстве практически интересных случаев ее можно с достаточным приближением заменить подходящим полиномом с весьма небольшим числом членов и тем более рациональной функцией.

Замечание 2. Выше для решения поставленной граничной задачи мы пользовались определенным образом выбранным частным решением $X_p(z)$ соответствующей однородной задачи. Но очевидно, что ничего не изменится, если заменить $X_p(z)$ на $CX_p(z)$, где C — произвольная постоянная, отличная от нуля. Важно только, чтобы в формуле (20) и связанных с нею формулах под $X_p^+(t)$ на L подразумевалось значение, принимаемое на L *слева* выбранной нами функцией $X_p(z)$.

Пусть, например, $g = -1$, а L представляет собой отрезок ab действительной оси. Согласно принятому нами выше условию под функцией

$$X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

в формуле (33) подразумевается ветвь, такая, что при больших $|z|$

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = z\left(1-\frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = z - \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{8z} + \ldots$$

Эта функция принимает на отрезке ab чисто мнимые значения. Но иногда удобнее иметь дело с функцией, принимающей на этом отрезке действительные значения. Такой функцией будет, например,

$$\sqrt{(z-a)(b-z)} = \pm i\sqrt{(z-a)(z-b)} = \pm iX(z).$$

Если мы выберем нижний знак, т. е. положим

$$\sqrt{(z-a)(b-z)} = -iX(z),$$

то получим функцию, которая, как легко видеть, принимает *положительные* значения на левой стороне отрезка ab оси Ox. Этой функцией можно заменить функцию $X(z)$.

§ 111. Случай разрывного коэффициента. Не представляет также никакого труда найти решение задачи в случае, когда коэффициент $G(t)$ в граничном условии

$$F^+(t) - G(t)F^-(t) = f(t) \quad \text{на } L, \tag{1}$$

оставаясь постоянным на различных участках линии L, изменяется скачком при переходе от одного участка к другому; под участками мы понимаем части, на которые можно разбить линию L конечным числом точек c_j, взятых на ней. Только в этом случае следует допустить, что функция $F(z)$ может быть неограниченной вблизи точек разрыва c_j так же, как и вблизи концов линии L, удовлетворяя, однако, такому же условию, как вблизи концов; вообще точки c_j играют роль, аналогичную концам.

Предоставляя читателю составить решение в общем случае, мы рассмотрим здесь следующий случай, который только и понадобится нам в дальнейшем.

Пусть L — простой замкнутый контур и пусть на этом контуре взято n дуг: $L_1 = a_1b_1$, $L_2 = a_2b_2$, . . ., $L_n = a_nb_n$ без общих концов (рис. 50); обозначения выбраны так, чтобы, обходя L в положительном направлении, мы встречали точки a_1, b_1, a_2, b_2, . . . в указанном порядке.

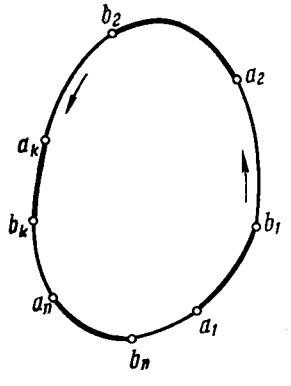


Рис. 50.

Обозначим через L' совокупность дуг L_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), а через L'' — остальную часть L, т. е. совокупность дуг b_1a_2, b_2a_3, . . ., b_na_1, и предположим, что

$$G(t) = g \text{ на } L', \qquad G(t) = 1 \text{ на } L'', \tag{2}$$

где $g \neq 1$ — постоянная, вообще комплексная. Таким образом, граничное условие (1) запишется так:

$$\left.\begin{aligned} F^+(t) - gF^-(t) &= f(t) \quad \text{на } L', \\ F^+(t) - F^-(t) &= f(t) \quad \text{на } L''. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мы будем считать, что заданная функция $f(t)$, удовлетворяя условию H на частях L' и L'' в отдельности, может изменяться скачком при переходе через точки a_j, b_j.

Рассмотрим сперва однородную задачу:

$$F^+(t) - gF^-(t) = 0 \text{ на } L', \quad F^+(t) - F^-(t) = 0 \text{ на } L''. \tag{3'}$$

Второе из предыдущих равенств показывает, что значения искомого решения $F(z)$ внутри и вне контура L аналитически продолжают друг друга через часть L'' контура L, иначе говоря, что часть L'' фактически не является линией скачков.

Таким образом, мы приходим к той же однородной задаче, что и в предыдущем параграфе:

$$F^+(t) - gF^-(t) = 0 \text{ на } L'; \tag{3''}$$

здесь $F(z)$ — функция, голоморфная на разрезанной вдоль L' плоскости. Следовательно, например, функция $X_0(z)$, определяемая формулами (2) и (5) § 110, является при $\alpha \neq 0$ частным решением задачи (3'), в чем, впрочем, легко убедиться непосредственно; при $\alpha = 0$, вместо $X_0(z)$, следует взять функцию $X_*(z)$, определяемую формулой (15) § 110.

Перейдем теперь к неоднородной задаче (3). Пользуясь решением $X_0(z)$ и замечая, что согласно формуле (9') § 110 (вспомним, что здесь через L' обозначено то, что в предыдущем параграфе было обозначено через L)

$$g = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)} \text{ на } L' \tag{4}$$

и что

$$\frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)}=1 \quad \text{на } L'', \tag{5}$$

ибо функция $X_0(z)$ голоморфна всюду, кроме точек линии L', можем переписать граничное условие (3) в виде одной формулы:

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)}-\frac{F^-(t)}{X_0^-(t)}=\frac{f(t)}{X_0^+(t)} \text{ на } L,$$

откуда, как в § 108, следует:

$$F(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)}+X_0(z)P(z), \tag{6}$$

где $P(z)$ — произвольный полином [1]); мы допускаем здесь наличие полюса $F(z)$ в бесконечно удаленной точке. Если мы хотим, чтобы функция $F(z)$ была голоморфна и при $z=\infty$, мы должны считать, что степень $P(z)$ не превосходит n; если же $F(z)$ должна исчезать на бесконечности, то степень $P(z)$ не должна превосходить $n-1$.

Если g — действительная положительная величина, то в формуле (6), вместо $X_0(z)$, следует взять $X_*(z)$.

В случае, когда допускается наличие полюсов функции $F(z)$ в заданных точках, не расположенных на L, формула (6) должна быть заменена формулой, совершенно аналогичной формуле (26) § 110.

II. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Результаты, изложенные в предыдущем отделе, дают возможность чрезвычайно просто решить главнейшие граничные задачи для случая, когда рассматриваемая область представляет собой полуплоскость или плоскость с прямолинейными щелями (вдоль одной и той же прямой), в том числе первую и вторую основные задачи для полуплоскости, уже рассмотренные в предыдущей главе. В этом отделе мы рассмотрим некоторые из таких задач, а также задачу о соприкасании двух упругих полуплоскостей, имеющую важное значение (§ 119) [2]).

При этом нам придется применять некоторые из результатов предыдущего отдела и к случаю, когда линия L представляет собой неограниченную прямую. Несмотря на то, что случай, когда L простирается в бесконечность, не был рассмотрен в предыдущем отделе, распростра-

[1]) Формула (6) не отличается по внешнему виду от формулы (18) § 110; однако здесь дело в обозначениях: в формуле (18) § 110 интеграл взят, при обозначениях настоящего параграфа, не по L, а по L'. Формула (6) настоящего параграфа действительно совпадает с формулой (18) § 110, если $f(t)=0$ на L'', что и понятно, так как в этом случае мы имеем дело фактически с одной и той же задачей.

[2]) По ряду рассматриваемых здесь вопросов см. монографию Л. А. Галина [4], а также монографию И. Я. Штаермана [4].

нение соответствующих результатов на этот случай осуществляется столь просто, что мы на этом останавливаться не будем, ограничиваясь некоторыми замечаниями в соответствующих местах.

§ 112. Преобразование общих формул для полуплоскости [1]. **1.** Предположим, что рассматриваемое упругое тело занимает нижнюю полуплоскость $y < 0$, которую мы обозначим через S^-, так что область S^- остается справа, если двигаться по оси Ox в положительном направлении согласно нашему постоянному условию. Верхнюю полуплоскость мы обозначим через S^+, а ось Ox будем также обозначать через L (рис. 51).

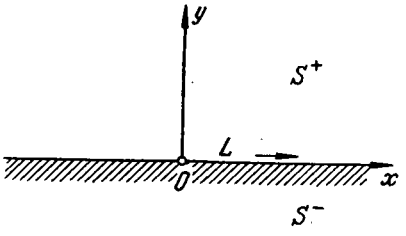


Рис. 51.

Напомним сперва общие формулы, которыми мы постоянно пользовались:

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (1)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (2)$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (3)$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\Psi(z) = \psi'(z)$ — функции, голоморфные в S^-. Мы будем считать, как в отделе III предыдущей главы, что главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к границе, конечен и что *напряжения и вращение исчезают на бесконечности*, в соответствии с чем мы примем, как в § 90, что при больших $|z|$

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Phi'(z) = \frac{X+iY}{2\pi z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (4)$$

$$\Psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad (4')$$

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}, \quad \psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}. \quad (5)$$

Выпишем еще формулу, вытекающую из формул (1) и (2):

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (6)$$

и формулу

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \quad (7)$$

получающуюся из формулы (3) дифференцированием по x; здесь

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (8)$$

эти обозначения мы будем применять и в дальнейшем.

2. Преобразуем теперь предыдущие формулы, распространив определение функции $\Phi(z)$ также на верхнюю полуплоскость. Это распространение можно выполнить множеством способов, ибо функция $\Phi(z)$ вообще не определена в верхней полуплоскости. Однако полезные для применений формулы мы получим, произведя это распространение лишь определен-

[1] Ср. статью автора [22].

ными способами, один из которых будет сейчас указан [1]). А именно, мы *определим функцию* $\Phi(z)$ *в верхней полуплоскости так, чтобы ее значения аналитически продолжили значения* $\Phi(z)$ *в нижней полуплоскости через незагруженные участки границы* (если таковые имеются).

Как это сделать, легко догадаться на основании формулы (6) [2]). А именно, на основании этой формулы легко заключить, что на незагруженных участках границы, где, следовательно, $Y_y^- = X_y^- = 0$, будем иметь:

$$\Phi^-(t) - \Phi^+(t) = 0, \qquad \text{(а)}$$

если мы определим функцию $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости следующим образом:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z) \qquad (\text{при } z \text{ в } S^+). \qquad (9)$$

Это будет сейчас пояснено подробнее.

Мы применяем здесь обозначения, введенные раньше, а именно: значками $(+)$ и $(-)$ мы обозначаем граничные значения, принимаемые функцией слева и справа от L (в нашем случае — из верхней и нижней полуплоскостей), а через $\overline{F}(z)$ обозначаем функцию, получаемую из $F(z)$ следующим образом (§ 76):

$$\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}; \qquad (10)$$

если функция $F(z)$ голоморфна в S^- (или S^+), то функция $\overline{F}(z)$ голоморфна в S^+ (или S^-).

Напомним еще [§ 76, формулы (6), (6′)], что если функция $F(z)$ определена, скажем, в нижней полуплоскости и если существует граничное значение $F^-(t)$ в точке t действительной оси, то существует и граничное значение $\overline{F^+}(t)$, причем

$$\overline{F^-(t)} = \overline{F}^+(t); \qquad (10')$$

аналогично, если поменять ролями верхнюю и нижнюю полуплоскости,

$$\overline{F^+(t)} = \overline{F}^-(t). \qquad (10'')$$

На основании сказанного ясно, что выражение в правой части (9) представляет собой функцию, голоморфную в верхней полуплоскости S^+, и что на незагруженных участках границы действительно имеет место равенство (а).

Напишем в формуле (9) $\bar{z}$ вместо z, считая, что z находится в S^- (а следовательно, $\bar{z}$ находится в S^+), и перейдем к сопряженным значениям в обеих частях равенства. Тогда получим:

$$\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Psi(z),$$

откуда

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) - z\Phi'(z); \qquad (11)$$

[1]) Другой аналогичный способ будет указан в следующем параграфе (примечание [2]) на стр. 408).

[2]) Ср. § 93, замечание 2.

эта формула выражает функцию $\Psi(z)$ для z в S^- через функцию $\Phi(z)$, распространенную и на верхнюю полуплоскость [1]).

Внося полученное значение $\Psi(z)$ в формулу (2), получаем выражение компонент напряжения через *одну функцию* $\Phi(z)$, определенную как в верхней, так и в нижней полуплоскости:

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{12}$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) - \bar{\Phi}(z)], \tag{13}$$

откуда [2]) или непосредственно из формулы (6) следует:

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{14}$$

Далее, из формулы (7) получаем:

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{15}$$

Легко также получить выражение непосредственно для $2\mu(u + iv)$, если распространить и функцию $\varphi(z)$ на верхнюю полуплоскость, требуя, чтобы и в верхней полуплоскости $\varphi'(z) = \Phi(z)$. Замечая, что на основании формулы (9) в верхней полуплоскости $\Phi(z) = -[z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi}(z)]'$, будем иметь:

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'}(z) - \overline{\psi}(z) + \text{const} \quad \text{при } z \text{ в } S^+, \tag{16}$$

откуда, аналогично предыдущему,

$$\psi(z) = -\overline{\varphi}(z) - z\varphi'(z) + \text{const} \quad \text{при } z \text{ в } S^-. \tag{17}$$

Внося это значение $\psi(z)$ в (3), получаем:

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) + \varphi(z) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \text{const}; \tag{18}$$

мы видим, что при заданной функции $\Phi(z)$ смещения определяются с точностью до жесткого поступательного перемещения всего тела, как и следовало ожидать [3]).

Отметим еще формулу, вытекающую из формулы (17) и из формулы (4) § 31:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) - \varphi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \text{const}. \tag{19}$$

Добавим, наконец, что из определения (9) функции $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости и условий (4), (4'), относящихся, разумеется, к нижней

[1]) Без такого распространения формула (11) не имела бы смысла, ибо в ней фигурирует выражение $\bar{\Phi}(z)$, равное по определению $\overline{\Phi(\bar{z})}$; но для того, чтобы выражение $\Phi(\bar{z})$ при z в нижней полуплоскости (значит, при $\bar{z}$ в верхней полуплоскости) имело смысл, надо, чтобы функция $\Phi(z)$ была определена и в верхней полуплоскости.

[2]) Путем сложения равенства (12) и равенства, получаемого из формулы (13) переходом к сопряженным значениям.

[3]) Если допустить, что вращение на бесконечности не исчезает, то произвольная постоянная, влияющая на вращение тела как жесткого целого, входит в саму функцию $\Phi(z)$ и через нее — в функцию $\varphi(z)$, фигурирующую в правой части формулы (18). При принятом же нами условии, что вращение исчезает на бесконечности, функция $\Phi(z)$ при заданном напряженном состоянии вполне определена.

полуплоскости, вытекает, что *условия* (4) *сохраняют силу и для верхней полуплоскости.*

3. В дальнейшем мы будем считать, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на все точки t действительной оси, кроме, быть может, конечного числа точек $t_1, t_2, \ldots, t_k$, которые будут особо указываться [1]), и что

$$\lim_{z\to t} y\Phi'(z) = 0 \qquad (z = x + iy) \tag{20}$$

для любой точки t действительной оси, кроме, быть может, $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Мы будем считать далее, что вблизи точек t_j имеет место оценка

$$|\varphi'(z)| = |\Phi(z)| < \frac{A}{|z-t_j|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{21}$$

иначе говоря, распространяя естественным образом определение, данное в § 106, на случай, когда линия скачков простирается в бесконечность, мы будем считать, что функция $\Phi(z)$ кусочно-голоморфна, причем линией скачков является действительная ось.

Предыдущие условия обеспечивают непрерывную продолжимость компонент напряжения на все точки границы, кроме, быть может, точек t_1, $t_2, \ldots, t_k$ (эти исключительные точки введены нами для того, чтобы не потерять решений, важных с точки зрения приложений). Кроме того, эти условия обеспечивают, как легко видеть, непрерывную продолжимость компонент смещения, а также выражения (19) на все без исключения конечные точки границы. Напомним, что непрерывная продолжимость выражения (19) на границу исключает наличие сосредоточенных сил, приложенных к границе (§ 43).

Отметим, наконец, что принятые условия обеспечивают непрерывную продолжимость производных u', v' на все точки границы, кроме точек $t_1, t_2, \ldots, t_k$. При этом, как легко видеть, производные по t от граничных значений u, v равны граничным значениям производных u', v', т. е.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^- = \frac{du^-}{dt}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^- = \frac{dv^-}{dt}. \tag{22}$$

§ 113. Решение первой и второй основных задач для полуплоскости Решение первой и второй основных задач было дано в предыдущей главе (§ 93, 94); мы приведем здесь новое решение, основанное на предыдущих формулах, в качестве простейшего примера их применения.

1. Первая основная задача. В этой задаче задаются внешние напряжения: давление [2]) $P(t) = -Y_y^-$ и касательное напряжение $T(t) = X_y^-$, приложенные ко всей границе Ox, которую будем обозначать через L. Мы будем считать, что $P(t)$ и $T(t)$ удовлетворяют условию H на L, вкл ючая бесконечно удаленную точку, и исчезают при $t = \infty$.

[1]) Отсутствие указания будет обозначать, что таких исключительных точек нет.

[2]) Через $P(t)$ обозначено то, что в § 93 было обозначено через $-N(t)$.

Согласно формуле (14) § 112 граничное условие принимает вид

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=P(t)+iT(t), \tag{1}$$

ибо при z, стремящемся к t из нижней полуплоскости, $\Phi(z)$ стремится к $\Phi^-(t)$, $\Phi(\bar{z})$ стремится к $\Phi^+(t)$, а $(z-\bar{z})\,\overline{\Phi'(z)} = 2iy\,\overline{\Phi'(z)}$ стремится к нулю согласно условию (20) § 112.

Решение же граничной задачи (1), исчезающее на бесконечности, мы можем сразу написать на основании результатов § 108, а именно [1]):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P(t)+iT(t)}{t-z}\,dt. \tag{2}$$

Таким образом, задача решена, ибо функция $\Phi(z)$ определяет компоненты напряжения и смещения по формулам предыдущего параграфа.

Полученное здесь решение совпадает с решением, полученным в § 93 см. еще замечание 1 к упомянутому параграфу). Относительно поведения $\Phi(z)$ на бесконечности ср. сказанное в том же параграфе.

2. Вторая основная задача. В этой задаче задаются граничные значения компонент смещения u, v: $u^- = g_1(t)$, $v^- = g_2(t)$ на L. Мы будем предполагать, что заданные функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ имеют производные $g_1'(t)$, $g_2'(t)$, удовлетворяющие условию H, включая бесконечно удаленную точку, и исчезают при $t=\infty$.

Из граничного условия

$$u^- + iv^- = g_1(t) + ig_2(t) \text{ на } L \tag{3}$$

получаем, если продифференцировать обе части по t:

$$(u^-)' + i(v^-)' = g_1'(t) + ig_2'(t),$$

или, принимая во внимание формулу (22) § 112,

$$u'^- + iv'^- = g_1'(t) + ig_2'(t). \tag{4}$$

На основании формулы (15) § 112, это условие принимает вид:

$$\Phi^+(t) + \varkappa\Phi^-(t) = 2\mu\,[g_1'(t) + ig_2'(t)] \text{ на } L. \tag{5}$$

Обозначим временно через $\Omega(z)$ кусочно-голоморфную функцию, определенную так [2]): $\Omega(z) = \Phi(z)$ в S^+, $\Omega(z) = -\varkappa\Phi(z)$ в S^-. Тогда формула (5) принимает вид

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=2\mu\,[g_1'(t)+ig_2'(t)] \text{ на } L, \tag{6}$$

---

[1]) В § 108 был рассмотрен случай, когда линия L — конечна, но применимость полученной там формулы к нашему случаю очевидна.

[2]) Вводимую указанным образом кусочно-голоморфную функцию $\Omega(z)$ можно снова обозначить через $\Phi(z)$; тогда мы получим распространение первоначальной функции $\Phi(z)$ на верхнюю полуплоскость, отличное от того, которое было указано в предыдущем параграфе. Этот новый способ распространения характеризуется тем что значения $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости аналитически продолжают значения в нижней полуплоскости через участки границы (если таковые имеются), на которых $u' = v' = 0$.

откуда получаем сразу, как в предыдущем случае:

$$\Omega(z) = \frac{\mu}{\pi i}\int_L \frac{g_1'(t)+ig_2'(t)}{t-z}\,dt, \tag{7}$$

так что окончательно

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Omega(z) & \text{при } y>0, \\ -\frac{1}{\varkappa}\Omega(z) & \text{при } y<0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Omega(z)$ определяется формулой (7). Относительно поведения полученного решения на бесконечности ср. сказанное в конце п. 1.

Легко также получить решение исходя непосредственно из формулы (18) § 112; но приведенное здесь решение удобнее, так как не требует дополнительных рассмотрений, связанных с тем, что функция $\varphi(z)$ не голоморфна на бесконечности, а ведет себя как $\ln z$, если не наложить на искомое решение дополнительных условий, уменьшающих общность, как это было сделано в § 94.

§ 114. Решение основной смешанной задачи [1]. **1.** Пусть $L' = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ — совокупность конечного числа отрезков $a_k b_k$ действительной оси Ox, обозначенных так, что, проходя эту ось в положительном направлении, мы встречаем концы в последовательности a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, и пусть на L' заданы компоненты смещения, а на остальной части L'' границы — компоненты внешнего напряжения. Мы считаем по-прежнему, что упругое тело занимает нижнюю полуплоскость S^-; границу его, т. е. действительную ось, мы будем по-прежнему обозначать через $L = L' + L''$.

Умея решать первую основную задачу, мы, очевидно, всегда можем свести рассматриваемую смешанную задачу к случаю, когда заданные на L'' компоненты Y_y, X_y внешнего напряжения равны нулю. Поэтому будем считать, что часть L'' границы свободна от внешних напряжений, т. е. что

$$Y_y^- = X_y^- = 0 \quad \text{на } L'' \tag{1}$$

(легко также получить непосредственно решение и для общего случая, о чем будет сказано в замечании в конце параграфа).

Ввиду значительного практического интереса нашей задачи мы рассмотрим, наряду с обычной основной смешанной задачей в том виде, как она сформулирована выше, и которую мы будем называть *задачей* A,

[1] В случае $n = 1$ довольно простое, но не эффективное решение этой задачи (при $n = 1$ задачи A и B, сформулированные ниже, совпадают) было получено мною [20] в 1935 г.; два года спустя В. М. Абрамов [1] дал более эффективное решение, пользуясь интегралами Меллина, также для случая $n = 1$. Приводимое здесь решение для произвольного n, полученное мною в статье [22], несравненно проще. Решение, несколько более сложное, но по существу близкое к изложенному здесь, было несколько позднее получено Н. И. Глаголевым [1, 2], который не был знаком с моей статьей [22].

также несколько видоизмененную задачу, которую будем называть *задачей* B.

В обеих этих задачах граничное условие на L' имеет вид:

$$u^- + iv^- = g(t) + c(t) \text{ на } L', \tag{2}$$

где $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ — заданная на L' функция.

В задаче A предполагается, что $c(t) = c = \text{const}$ на L' и что дополнительно задан главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к L'. Не нарушая общности, можно, например, положить $c = 0$, ибо значение c влияет только на жесткое поступательное перемещение всей системы.

В задаче B предполагается, что $c(t) = c_k$ на L_k, где c_k — постоянные, не задаваемые заранее, вообще различные на различных отрезках. В этом случае предполагается, что заданы главные векторы (X_k, Y_k) внешних усилий, приложенных к каждому отрезку L_k в отдельности. Не нарушая общности, можно произвольно зафиксировать одну из постоянных c_k, например положить $c_1 = 0$. При $n = 1$ задача A совпадает с задачей B.

Поясним механический смысл этих задач. Представим себе, что над участками $L_k = a_k b_k$ границы расположены жесткие штампы, основания которых имеют заданную форму, и что точки участков L_k границы упругого тела определенным образом приведены в соприкасание с точками оснований штампов и неизменно сцеплены (спаяны) с ними. Предположим далее, что к штампам приложены заданные силы и что *штампы вынуждены перемещаться лишь поступательно*. Задача о равновесии упругой полуплоскости при этих условиях есть наша задача A, если штампы жестко связаны между собой; если же штампы могут перемещаться (поступательно) независимо друг от друга, то мы приходим к задаче B.

Для большей ясности приведем следующий частный пример. Пусть имеется один штамп, профиль основания которого до приведения штампа в соприкасание с упругой полуплоскостью имел уравнение $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Предположим далее, что штамп вдавливается в упругую полуплоскость заданной силой, перпендикулярной к границе, и что трение между штампом и упругим телом настолько велико, что скольжение не может иметь места. Тогда, предполагая, что в соприкасание со штампом вошел участок $L' = ab$ границы, получим граничное условие (2), в котором $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, причем $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = f(t)$, а $c(t) = c$ — постоянная, которую можно считать равной нулю. Аналогично для случая нескольких штампов, связанных или не связанных между собой [1]).

[1]) Эти задачи представляют собой идеализацию задачи давления фундамента на грунт при наличии столь большого трения (вернее, сцепления), что скольжение и отставание исключаются.

Указанную выше задачу о штампах можно обобщить, предполагая, что штампы имеют возможность не только перемещаться поступательно, но и вращаться (об этом будет сказано ниже, см. п. 4).

Легко показать, что каждая из задач A и B не может иметь более одного решения, если отвлечься от перемещения всей системы (упругой полуплоскости и штампов) как жесткого целого. В самом деле, мы можем почти буквально повторить доказательство, приведенное в § 40 (см. также § 90, п. 3), если заметим, что и в рассматриваемом здесь случае интеграл по границе L области от выражения $(X_n u + Y_n v)\,ds$, составленного для разности двух возможных решений, равен нулю. Действительно, на части L'' границы $X_n = Y_n = 0$. Далее, в случае задачи A можно считать для разности решений $u = v = 0$ на границе; в случае же задачи B (в этом случае для разности решений $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на L_k) все интегралы

$$\int_{L_k} (uX_n + vY_n)\,ds = u \int_{L_k} X_n\,dt + v \int_{L_k} Y_n\,dt = uX_k + vY_k$$

равны нулю, так как для разности двух решений главные векторы (X_k, Y_k) внешних усилий, приложенных к участкам L_k, равны нулю.

В дальнейшем нам придется применять теорему единственности и к случаям, когда компоненты напряжения не продолжимы непрерывно на точки a_k, b_k. В этих случаях, как было уже отмечено в § 40 (п. 3, замечание), теорема единственности остается в силе, если интегралы от выражения $(X_n u + Y_n v)\,ds$, составленного для разности решений, взятые по бесконечно малым полуокружностям, описанным из точек a_k, b_k, как из центров, и расположенным в S^-, стремятся к нулю вместе с радиусами полуокружностей. Во всех рассматриваемых ниже случаях это условие будет соблюдено, что читатель легко сможет каждый раз проверить.

Мы будем считать по-прежнему, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям, указанным в § 112 (п. 3), причем роль точек t_j играют здесь концы a_j, b_j отрезков L_j. Будем, кроме того, считать, что заданная функция $g(t)$ имеет первую производную $g'(t)$, удовлетворяющую условию H на L'.

В обеих задачах A и B граничное условие (2) дает: $(u^-)' + i(v^-)' = g'(t)$ на L', откуда на основании формулы (15) § 112 [1])

$$\Phi^+(t) + \varkappa\Phi^-(t) = 2\mu g'(t) \quad \text{на } L'. \tag{3}$$

Граничное же условие (1) эквивалентно требованию, чтобы $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0$ на L'', т. е. чтобы функция $\Phi(z)$ была голоморфной на всей плоскости, разрезанной вдоль L', что мы и будем предполагать.

Условие (3) существенно отличается от условия (5) § 113 тем, что теперь L' представляет собой лишь *часть* оси Ox.

[1]) См. также формулы (20) и (22) § 112.

Решение граничной задачи (3), исчезающее на бесконечности, может быть сразу написано на основании формулы (18) § 110. В нашем случае согласно формуле (5) § 110

$$\gamma = \frac{\ln(-\varkappa)}{2\pi i} = \frac{\ln \varkappa}{2\pi i} + \frac{1}{2},$$

или

$$\gamma = \frac{1}{2} - i\beta,$$

где через β обозначена действительная величина [1]):

$$\beta = \frac{\ln \varkappa}{2\pi}. \tag{4}$$

Поэтому согласно формуле (2) § 110

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}.$$

В дальнейшем для упрощения письма мы будем обозначать $X_0(z)$ просто через $X(z)$, а $X^+(t)$ через $X(t)$. Таким образом,

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \tag{5}$$

и

$$X(t) = X^+(t) = \prod_{k=1}^{n} (t-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (t-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \tag{6}$$

где в правой части следует подразумевать значения, принимаемые $X(z)$ на верхней стороне оси Ox (т. е. слева от Ox); если точка t находится вне L', т. е. на L'', то значения слева и справа совпадают: $X^-(t) = X^+(t) = X(t)$; если же t находится на L', то по самому определению функции $X(z)$ имеем: $X^+(t) + \varkappa X^-(t) = 0$, откуда

$$X^-(t) = -\frac{1}{\varkappa} X^+(t) = -\frac{1}{\varkappa} X(t). \tag{7}$$

Применяя теперь формулу (18) § 110, получаем:

$$\Phi(z) = \frac{\mu X(z)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t)\,dt}{X(t)(t-z)} + X(z) P_{n-1}(z), \tag{8}$$

где $P_{n-1}(z)$ — полином степени не выше $n-1$:

$$P_{n-1}(z) = C_0 z^{n-1} + C_1 z^{n-2} + \ldots + C_{n-1}, \tag{9}$$

ибо, по условию, функция $\Phi(z)$ должна исчезать на бесконечности.

Остается определить коэффициенты $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ полинома $P_{n-1}(z)$, исходя из дополнительных условий задач A и B.

2. Рассмотрим сперва задачу B; в этом случае дополнительными условиями служит задание главных векторов (X_k, Y_k). Чтобы выразить это условие, вычислим нормальное давление $P = -Y_y^-$ и касательное напряжение $T = X_y^-$, действующие на границу полуплоскости под штампами, т. е. на L'.

[1]) Здесь через β мы обозначаем величину, которая по обозначениям § 110 равна $(-\beta)$.

По формуле (14) § 112 для точки t_0 на L' имеем:

$$P(t_0)+iT(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0), \tag{10}$$

или, принимая во внимание (3),

$$P(t_0)+iT(t_0)=\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\Phi^+(t_0)-\frac{2\mu}{\varkappa}g'(t_0) \text{ на } L'. \tag{11}$$

Применяя к правой части формулы (8) формулу Сохоцкого — Племеля, легко выводим:

$$\Phi^+(t_0)=\mu g'(t_0)+\frac{\mu X(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{g'(t)\,dt}{X(t)(t-t_0)}+X(t_0)P_{n-1}(t_0);$$

внося это значение $\Phi^+(t_0)$ в формулу (11) и вводя для сокращения письма обозначение

$$\Phi_0(t_0)=\frac{\mu X(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{g'(t)\,dt}{X(t)(t-t_0)}, \tag{12}$$

получаем:

$$P(t_0)+iT(t_0)=\frac{\mu(\varkappa-1)}{\varkappa}g'(t_0)+\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\Phi_0(t_0)+$$
$$+\frac{\varkappa+1}{\varkappa}X(t_0)P_{n-1}(t_0) \text{ на } L'. \tag{13}$$

Выражая, что

$$\int\limits_{L_k}[P(t_0)+iT(t_0)]\,dt_0=-Y_k+iX_k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

получаем систему n линейных уравнений для определения n постоянных C_j; эта система однозначно разрешима, как легко заключить на основании единственности решения исходной задачи.

3. Переходим к задаче A. Так как найденное решение удовлетворяет условию $u'^- + iv'^- = u'^- + iv'^- = g'(t)$ на L' (что, кстати, легко проверить непосредственной подстановкой), мы будем на отрезках L_k иметь:

$$u^- + iv^- = g(t) + c_k,$$

где c_k — постоянные. Остается учесть условие, что,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n; \tag{15}$$

если нам удастся удовлетворить этому условию, то мы сможем удовлетворить и условию $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ за счет произвольной постоянной в правой части формулы (18) § 112.

Для того чтобы выразить условия (15), вычислим значения $u'^- + iv'^-$ на незагруженной части L'' границы. На основании формулы (15) § 112 имеем для точек t_0 на L'':

$$2\mu(u'^- + iv'^-) = (\varkappa+1)\Phi(t_0) = (\varkappa+1)\Phi_0(t_0) + (\varkappa+1)X(t_0)P_{n-1}(t_0), \tag{16}$$

где $\Phi_0(t_0)$ дается формулой (12), причем на этот раз t_0 находится на Ox вне L' (т. е. на L''). Очевидно, что условия (15) сводятся к следующим:

$$g(a_{k+1}) - g(b_k) = \int\limits_{b_k}^{a_{k+1}}(u'^- + iv'^-)\,dt_0 \quad (k=1, 2, \ldots, n-1). \tag{17}$$

Подставляя в эту формулу $u'^- + iv'^-$ из формулы (16), получаем, очевидно, систему $n - 1$ линейных уравнений для C_j. Еще одно уравнение дается условием, что главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к L', задан. Проще всего выразить это последнее условие, исходя из первой формулы (4) § 112, откуда следует

$$\lim_{z\to\infty} z\,\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi}. \tag{18}$$

Применяя это к выражению (8), получаем сразу, что коэффициент C_0 при z^{n-1} полинома $P_{n-1}(z)$ дается формулой

$$C_0 = -\frac{X+iY}{2\pi}. \tag{19}$$

Таким образом, остается определить лишь коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, для которых мы имеем упомянутую выше систему $n - 1$ линейных уравнений. Эта система всегда однозначно разрешима аналогично предыдущему случаю.

В частном случае, когда $g'(t) = 0$ (штампы или фундаменты с прямолинейными основаниями, параллельными оси Ox), формулы (8) и (13) принимают весьма простой вид, так как интегральный член обращается в нуль.

4. До сих пор мы считали, что штампы могут перемещаться лишь поступательно. Рассмотрим теперь случай, когда *штампы могут вращаться* (разумеется, в своей плоскости).

Пусть в задаче A (когда штампы жестко связаны друг с другом) ε обозначает угол поворота системы штампов, отсчитываемый против часовой стрелки [1]). Тогда в граничном условии (2) следует заменить $g(t)$ на $g(t) + i\varepsilon t$, что повлечет во всех последующих формулах замену $g'(t)$ на $g'(t) + i\varepsilon$. В соответствии с этим в выражении для $\Phi(z)$ появится добавочное слагаемое, содержащее ε в качестве множителя [2]).

Величина ε может не быть задана непосредственно; вместо этого может быть, например, добавочно задан главный момент M внешних сил, действующих на систему штампов, относительно начала координат [3]).

---

[1]) Тогда компоненты u_0, v_0 добавочного смещения точки t границы под штампами, вызванного поворотом штампов, будут даны формулами: $u_0 = 0$, $v_0 = \varepsilon t$, ибо вообще при жестком повороте на угол ε вокруг начала координат смещение (u_0, v_0) точки (x, y) дается формулами: $u_0 = -\varepsilon y$, $v_0 = \varepsilon x$, на границе же $y = 0$, $x = t$.

[2]) Это добавочное слагаемое вычисляется в конечном виде (см. следующий параграф, пример 2).

[3]) Под внешними силами, приложенными к штампу, мы подразумеваем силы, отличные от усилий, приложенных к основанию со стороны упругого тела; эти последние усилия уравновешивают внешние силы, приложенные к штампу. Очевидно, что главный вектор (X, Y) и главный момент M внешних сил равны главному вектору и главному моменту усилий, действующих на границу упругого тела со стороны штампа.

Тогда для определения ε мы будем иметь добавочное соотношение:

$$M = -\int_{L'} t_0 P(t_0)\, dt_0. \tag{20}$$

В случае задачи В углы ε_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) поворотов различных штампов могут быть различными; если они не заданы непосредственно, а заданы, скажем, моменты M_k внешних сил, действующих на отдельные штампы, то мы будем иметь n добавочных уравнений для определения ε_k:

$$M_k = -\int_{L_k} t_0 P(t_0)\, dt_0. \tag{21}$$

Легко показать, что эти задания вполне определяют решение с точностью до жесткого поступательного перемещения всей системы; доказательство совершенно аналогично тому, которое было указано выше для случая, когда штампы могут перемещаться лишь поступательно.

Замечание. Если часть L'' границы загружена заданными внешними напряжениями, то граничное условие принимает вид

$$\Phi^+(t) - k\Phi^-(t) = f(t) \quad \text{на } L, \tag{22}$$

где

$$k = -\varkappa \text{ на } L', \quad k = 1 \text{ на } L'', \tag{23}$$

а $f(t)$ — заданная функция:

$$f(t) = 2\mu g'(t) \text{ на } L', \qquad f(t) = P(t) + iT(t) \text{ на } L'', \tag{24}$$

где $P(t)$ и $T(t)$ обозначают, как в § 113, давление и касательное напряжение; мы будем считать, что $P(t)$ и $T(t)$ удовлетворяют условию H на L'', включая бесконечно удаленную точку, и исчезают при $t = \infty$.

Мы приходим, таким образом, к задаче, рассмотренной в § 111. Применяя формулу (6) § 111 [1]), получаем при обозначениях настоящего параграфа:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{X(t)(t-z)} + X(z)\,P_{n-1}(z), \tag{25}$$

где интеграл берется уже по всей границе L. Коэффициенты полинома $P_{n-1}(z)$ определяются аналогично предыдущему. О поведении $\Phi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки ср. сказанное в § 93, вслед за формулой (7).

§ 114а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. Рассмотрим случай *одного* штампа ($n = 1$) с прямолинейным основанием, параллельным оси Ox, причем этот штамп может перемещаться лишь вертикально [2]), так что

$$g'(t) = 0 \qquad \text{на } L'; \tag{1}$$

[1]) Формула эта была выведена в предположении, что L — замкнутый контур. Но применимость ее к нашему случаю очевидна.

[2]) Как было уже сказано, решение для этого случая было дано В. М. Абрамовым [1] совершенно другим путем.

предположим кроме того, что внешние силы, действующие на штамп, имеют равнодействующую, направленную вертикально вниз, так что

$$X = 0, \quad Y = -P_0, \tag{2}$$

где P_0 — заданная положительная постоянная.

Отрезок L' границы, соприкасающийся со штампом, мы будем считать симметрично расположенным относительно начала координат; длину L' мы обозначим через $2l$, так что для точек t отрезка L' имеем: $-l \leqslant t \leqslant l$.

При этих обозначениях и при обозначениях предыдущего параграфа

$$X(z) = (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \tag{3}$$

и из формулы (8) § 114 получаем:

$$\Phi(z) = C_0 X(z)$$

или, принимая во внимание формулу (19) § 114

$$\Phi(z) = \frac{iP_0}{2\pi} X(z) = \frac{iP_0}{2\pi}(z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \tag{4}$$

и наша задача решена.

Вычислим давление $P(t)$ и касательное напряжение $T(t)$, действующие на тело под штампом; они находятся по формуле (11) § 114:

$$P(t) + iT(t) = \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\Phi^+(t).$$

Подставляя сюда значение, даваемое формулой (4), получаем:

$$P(t) + iT(t) = \frac{iP_0}{2\pi}\frac{\varkappa+1}{\varkappa}X(t) = \frac{iP_0}{2\pi}\frac{\varkappa+1}{\varkappa}(t+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(t-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}$$
$$(-l \leqslant t \leqslant l), \tag{5}$$

где под $X(t)$ подразумевается, как было условлено, $X^+(t)$, т. е. значение, принимаемое функцией $X(z)$ на левой стороне отрезка $(-l, +l)$; вспомним также, что под $X(z)$ подразумевается ветвь, определяемая условием $zX(z) \to 1$ при $z \to \infty$.

Легко проверить, что при указанных условиях

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{l^2-t^2}}\left[\frac{t+l}{t-l}\right]^{i\beta} = \frac{1}{i\sqrt{l^2-t^2}}e^{i\beta\left[\ln\frac{l+t}{l-t}-\pi i\right]} = \frac{e^{\pi\beta}}{i\sqrt{l^2-t^2}}e^{i\beta\ln\frac{l+t}{l-t}}$$
$$(-l \leqslant t \leqslant l),$$

где радикал $\sqrt{l^2-t^2}$ считается положительным, а логарифм — действительным. Принимая во внимание, что

$$\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}, \quad e^{\pi\beta} = \sqrt{\varkappa},$$

можем еще написать:

$$X(t) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{i\sqrt{l^2-t^2}}e^{i\beta\ln\frac{l+t}{l-t}} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{i\sqrt{l^2-t^2}}\left\{\cos\left[\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right] + \right.$$
$$\left. + i\sin\left[\beta\ln\frac{l+t}{l-t}\right]\right\} \quad (-l \leqslant t \leqslant l). \tag{6}$$

Подставляя это значение в формулу (5), получаем, отделяя действительную и мнимую части:

$$P(t) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}} \frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}} \cos\left[\frac{\ln\varkappa}{2\pi} \ln\frac{l+t}{l-t}\right], \tag{7}$$

$$T(t) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}} \frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}} \sin\left[\frac{\ln\varkappa}{2\pi} \ln\frac{l+t}{l-t}\right]. \tag{8}$$

Эти формулы совпадают с формулами, полученными В. М. Абрамовым [1].

Из формулы (7) следует, что величина $P(t)$ изменяет знак бесчисленное множество раз, когда t приближается к значениям $-l$ и $+l$, так что фактически на некоторых участках границы под штампом, вместо давления, действуют растягивающие усилия.

Но легко подсчитать, что эти участки расположены в весьма малых окрестностях концов отрезка $-l$, $+l$. Действительно, точка t, в которой величина $P(t)$, положительная при $t = 0$, обращается в первый раз в нуль, когда t приближается к одному из значений $\pm l$, определяется из равенства

$$\beta \ln\frac{l+t}{l-t} = \pm\frac{\pi}{2},$$

или

$$\ln\frac{l+t}{l-t} = \pm\frac{\pi^2}{\ln\varkappa},$$

откуда

$$t = \pm l \operatorname{th}\frac{\pi^2}{2\ln\varkappa}. \tag{9}$$

Но для всех реальных тел $1 < \varkappa < 3$ [1]; поэтому наименьшее возможное значение для $|t|$ получим, полагая в предыдущей формуле $\varkappa = 3$, что дает (приближенно):

$$t = \pm 0{,}9997l.$$

Таким образом, перемена знака $P(t)$ происходит лишь в тех местах, вблизи которых полученное решение вообще не может выражать действительного состояния тела из-за отступлений от закона Гука, которые вызываются большими напряжениями около углов [2].

2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. Рассмотрим случай такого же штампа, что и в предыдущем примере, но будем теперь считать, что главный вектор внешних сил, действующих на штамп, равен нулю, а основание штампа составляет с осью Ox угол ε, отсчитываемый от Ox в положительном направлении

---

[1]) Вспомним, что

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \lambda > 0, \quad \mu > 0.$$

[2]) Ср. замечание в конце § 57.

(рис. 52). Таким образом, в нашем случае

$$g(t)=g_1+ig_2=i\varepsilon t, \quad g'(t)=i\varepsilon \tag{10}$$

и

$$X=Y=0. \tag{11}$$

Следовательно, по формуле (8) § 114 будем иметь при обозначениях, принятых в предыдущем пункте:

$$\Phi(z)=\frac{\varepsilon\mu X(z)}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dt}{X(t)(t-z)}, \tag{12}$$

где $X(z)$ дается формулой (3), а $X(t)=X^+(t)$.

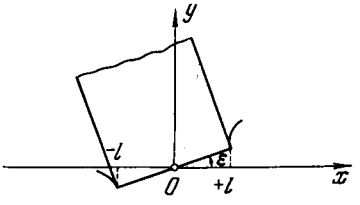


Рис. 52.

На основании замечания 1 в конце § 110 последний интеграл вычисляется в конечном виде. В нашем случае, при больших $|z|$,

$$\frac{1}{X(z)}=(z+l)^{\frac{1}{2}-i\beta}(z-l)^{\frac{1}{2}+i\beta}=z\left(1+\frac{l}{z}\right)^{\frac{1}{2}-i\beta}\left(1-\frac{l}{z}\right)^{\frac{1}{2}+i\beta}=$$

$$=z\left\{1+\left(\frac{1}{2}-i\beta\right)\frac{l}{z}+\ldots\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{2}+i\beta\right)\frac{l}{z}+\ldots\right\}=$$

$$=z-2i\beta l+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

и из формулы (40) § 110 получаем:

$$\int_{-l}^{l}\frac{dt}{X(t)(t-z)}=\frac{2\pi i}{\varkappa+1}\left\{\frac{1}{X(z)}-z+2i\beta l\right\}.$$

Внося это значение в правую часть формулы (12), получаем:

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa+1}\{1-(z-2i\beta l)X(z)\}, \tag{13}$$

и наша задача решена.

Вычислим значение $P(t)+iT(t)$ для точек t под штампом. Имеем:

$$P(t)+iT(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=-\frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa+1}(t-2i\beta l)\{X^+(t)-X^-(t)\}=$$

$$=-\frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa+1}(t-2i\beta l)\frac{\varkappa+1}{\varkappa}X^+(t),$$

т. е. согласно принятым нами обозначениям

$$P(t)+iT(t)=-\frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa}(t-2i\beta l)X(t) \tag{14}$$

Внося вместо $X(t)$ значение (6) и разделяя действительные и мнимые части, получаем явные выражения для $P(t)$ и $T(t)$, которые не выписываем.

До сих пор мы предполагали, что угол ε задан и что, следовательно, штамп удерживается в заданном положении некоторой парой внешних сил, не заданной заранее. Можно поставить задачу иначе, а именно: считать, что задан момент M пары внешних сил, действующих на штамп, и что требуется найти соответствующий угол наклона ε.

Вычислим для этого момент M, соответствующий данному ε; этот момент дается формулой

$$M = -\int_{-l}^{l} tP(t)\,dt \tag{15}$$

(положительным направлением вращения считается направление, обратное движению часовой стрелки), где под $P(t)$ следует подразумевать значение, определяемое формулой (14).

Интеграл формулы (15) есть действительная часть интеграла

$$I = -\int_{-l}^{l} t\,[P(t) + iT(t)]\,dt, \tag{16}$$

который легко вычислить в конечном виде. В самом деле, внося значение, определяемое формулой (14), получаем:

$$I = \frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa}\int_{-l}^{l} t\,(t - 2i\beta l)\,X(t)\,dt. \tag{17}$$

Последний интеграл можно вычислить при помощи того же приема, которым был вычислен интеграл (42) в § 110. Именно: рассмотрим интеграл

$$I_0 = \int_{\Lambda} \zeta\,(\zeta - 2i\beta l)\,X(\zeta)\,d\zeta, \tag{18}$$

взятый по замкнутому контуру Λ, охватывающему отрезок L' ($-l \leqslant t \leqslant l$) и пробегаемому в направлении движения часовой стрелки.

Стягивая Λ к отрезку L', получаем:

$$I_0 = \int_{-l}^{+l} t\,(t - 2i\beta l)\,X^+(t)\,dt + \int_{+l}^{-l} t\,(t - 2i\beta l)\,X^-(t)\,dt$$

или, вспоминая, что $X^-(t) = -\frac{1}{\varkappa}X^+(t) = -\frac{1}{\varkappa}X(t)$,

$$I_0 = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\int_{-l}^{+l} t\,(t - 2i\beta l)\,X(t)\,dt,$$

и, следовательно,

$$I = \frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa + 1}\,I_0.$$

С другой стороны, при больших $|\zeta|$ имеем разложение:

$$X(\zeta)=\frac{1}{\zeta}\left(1+\frac{l}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}+i\beta}\left(1-\frac{l}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}-i\beta}=$$
$$=\frac{1}{\zeta}\left\{1-\left(\frac{1}{2}-i\beta\right)\frac{l}{\zeta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-i\beta\right)\left(\frac{3}{2}-i\beta\right)\frac{l^2}{\zeta^2}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}+i\beta\right)\frac{l}{\zeta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\beta\right)\left(\frac{3}{2}+i\beta\right)\frac{l^2}{\zeta^2}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{\zeta}+\frac{2i\beta l}{\zeta^2}+\frac{(1-4\beta^2)\,l^2}{2\zeta^3}+\ldots,$$

откуда следует, что коэффициент при ζ^{-1} в разложении выражения $\zeta(\zeta-2i\beta l)X(\zeta)$ равен

$$\frac{l^2(1+4\beta^2)}{2}.$$

Поэтому применяя к интегралу в правой части (18) теорему о вычетах, получаем:

$$I_0=-\pi i(1+4\beta^2)\,l^2,$$

и, следовательно,

$$I=\frac{2\pi\mu(1+4\beta^2)\,l^2}{\varkappa+1}\varepsilon.$$

Мы видим, что I — действительная величина. Поэтому $M=\mathrm{Re}I=I$, и, значит,

$$M=\frac{2\pi\mu(1+4\beta^2)\,l^2}{\varkappa+1}\varepsilon. \tag{19}$$

При заданном M угол ε наклона штампа определяется по формуле

$$\varepsilon=\frac{\varkappa+1}{2\pi\mu(1+4\beta^2)\,l^2}M. \tag{20}$$

Подставляя это значение ε в формулу (13), получаем решение задачи равновесия штампа под действием заданной пары.

3. Действие эксцентрически приложенной силы. Пусть на штамп с прямолинейным основанием, который может и перемещаться поступательно и наклоняться, действует эксцентрически приложенная сила, направленная вертикально вниз. Действие этой силы эквивалентно действию такой же силы, но приложенной симметрично, и некоторой пары. Поэтому мы получим решение задачи, складывая решения, полученные в п. 1 и 2.

§ 115. Задача давления жестких штампов при отсутствии трения [1]. Рассмотрим теперь задачу давления одного или нескольких жестких

[1]) Эта задача впервые была решена М. А. Садовским [1] для одного частного случая. Во втором издании настоящей книги было дано общее решение для случая $n=1$, которое было затем обобщено А. И. Бегиашвили [1] на случай произвольного n.

Решение, гораздо более простое, приводимое в тексте, было дано автором в статье [22]; одновременно (и независимо) А. В. Бицадзе нашел решение, близкое по существу к этому последнему решению.

штампов на границу упругой полуплоскости в предположении, что *трение отсутствует*. Предположим сперва для большей ясности, что мы имеем один жесткий штамп, основание которого имеет заданную форму. Пусть $y = f(x)$ — уравнение профиля основания штампа до того, как он стал вдавливаться в упругую полуплоскость. Если предположить, что штамп может перемещаться лишь поступательно в направлении, нормальном к границе, то профиль его основания после вдавливания будет иметь уравнение $y = f(x) + c$, где c — действительная постоянная. Предположим, что в соприкасание со штампом вошел участок ab границы упругого тела. Так как точка границы упругого тела, занимавшая до деформации положение $(t, 0)$, а после деформации — положение $(t + u, v)$, где u, v — компоненты ее смещения, должна находиться на линии $y = f(x) + c$, то должно быть $v = f(t + u) + c$. Считая, как всегда, что u, v — малые величины и что $f(x)$, $f'(x)$ также малые величины (это предположение вытекает из требования малости деформации), будем иметь, отбрасывая малые величины высших порядков: $v = f(t) + c$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где $v = v^-$ — нормальное смещение точки границы упругой полуплоскости. Аналогично для случая нескольких штампов.

В соответствии со сказанным граничные условия задачи давления системы штампов, могущих перемещаться лишь поступательно, при отсутствии трения формулируются аналогично условиям задачи § 114, с той лишь разницей (мы применяем обозначения § 114), что теперь

$$X_y^- = 0 \quad \text{всюду на } L, \quad Y_y^- = 0 \quad \text{на } L'', \tag{1}$$

а на L' задается лишь *нормальная компонента смещения*

$$v^- = f(t) + c(t) \quad \text{на } L'; \tag{2}$$

здесь по-прежнему L обозначает всю действительную ось, L' — совокупность отрезков $L_k = a_k b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, а L'' — остальную (незагруженную) часть границы L. Первое из условий (1) распространяется на всю границу L, так как вследствие отсутствия трения касательное напряжение на границе и под штампами равно нулю.

В формуле (2) $f(t)$ обозначает заданную на L' функцию, характеризующую форму оснований штампов. А именно, уравнение $y = f(x)$, где x принадлежит L', представляет собой уравнение совокупности профилей оснований штампов до их смещения; $c(t)$ определяется так: либо $c(t) = c$ на L' (жестко связанные штампы), либо $c(t) = c_k$ на $L_k = a_k b_k$ (не связанные штампы), причем c и c_k обозначают теперь *действительные* постоянные. Не нарушая общности, в первом случае можно считать $c = 0$, а во втором, например, $c_1 = 0$; остальные постоянные c_k не задаются заранее.

В первом случае дополнительно задается главный вектор $(0, Y)$ внешних сил, прижимающих всю систему штампов к упругому телу, во втором — главные векторы $(0, Y_k)$ для каждого штампа в отдельности.

Мы предполагали, что штампы могут перемещаться лишь поступательно; случай, когда они могут наклоняться, сводится к предыдущему совершенно так, как в предыдущих параграфах. В этом случае должны быть дополнительно заданы либо углы поворотов штампов, либо главные моменты внешних сил, действующих на них.

Легко показать, что поставленные таким образом задачи могут иметь лишь одно решение, если отвлечься от поступательного перемещения всей системы как жесткого целого; доказательство совершенно аналогично доказательству для случая § 114.

Заметим еще, что поступательное перемещение штампов в направлении, параллельном границе L, никакого влияния на упругое равновесие не оказывает (с той точностью, которой мы всегда ограничиваемся).

Мы будем считать, что $f'(t)$ удовлетворяет условию H на каждом из отрезков $L_k = a_k b_k$.

Граничные условия (1) показывают, как в § 114, что функция $\Phi(z)$ голоморфна на разрезанной вдоль L' плоскости. Кроме того, легко установить, что первое из условий (1) дает на основании формулы (14) § 112 [1]):

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi}^+(t) = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t) \quad \text{всюду на } L,$$

откуда следует, что функция $\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)$ голоморфна на всей плоскости; так как, далее, она исчезает на бесконечности, то она равна нулю всюду. Следовательно,

$$\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z). \tag{3}$$

После этого граничное условие (2), которое мы теперь перепишем так:

$$v^{-\prime}(t) = f'(t) \quad \text{на } L', \tag{4}$$

дает на основании формулы (15) § 112 [2]):

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{4\mu i f'(t)}{\varkappa + 1} \quad \text{на } L'. \tag{5}$$

Таким образом, мы пришли к граничной задаче § 110, а именно к тому частному случаю, когда $g = -1$. Применяя формулы (31), (33) § 110, получаем:

$$\Phi(z) = \frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\,X(z)} \int_{L'} \frac{X(t)\,f'(t)\,dt}{t-z} + \frac{iP_{n-1}(z)}{X(z)}, \tag{6}$$

где через $iP_{n-1}(z)$ обозначен произвольный полином степени не выше $n-1$ и

$$X(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)\ldots(z-a_n)(z-b_n)}, \tag{7}$$

[1]) На основании упомянутой формулы

$$Y\bar{y} - iX\bar{y} = \Phi^-(t) - \Phi^+(t);$$

откуда, переходя к сопряженным значениям и вспоминая (§ 112), что $\overline{\Phi^-(t)} = \overline{\Phi}^+(t)$, $\overline{\Phi^+(t)} = \overline{\Phi}^-(t)$,

$$Y\bar{y} + iX\bar{y} = \overline{\Phi}^+(t) - \overline{\Phi}^-(t);$$

вычитая эти равенства, получаем:

$$-2iX\bar{y} = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t) - \Phi^+(t) - \overline{\Phi}^+(t),$$

откуда и следует утверждение в тексте.

[2]) См. также формулу (22) § 112.

причем под $X(z)$ подразумевается ветвь, однозначная на разрезанной вдоль L' плоскости, такая, что $z^{-n}X(z) \to 1$ при $z \to \infty$; для упрощения письма мы обозначаем $X^+(t)$ просто через $X(t)$, так что по определению

$$X(t) = \sqrt{(t-a_1)(t-b_1)\ldots(t-a_n)(t-b_n)} = X^+(t); \tag{8}$$

отметим еще, что

$$X^-(t) = -X^+(t) = -X(t). \tag{8'}$$

Нам следует еще удовлетворить условию (3), т. е. условию $\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z)$. Легко проверить, что первое слагаемое правой части формулы (6) этому условию удовлетворяет [1]); второе слагаемое будет ему удовлетворять тогда и только тогда, когда все коэффициенты полинома $P_{n-1}(z)$ — *действительные числа* [2]).

Итак, общее решение исходной задачи дается формулой (6), где под

$$P_{n-1}(z) = D_0 z^{n-1} + D_1 z^{n-2} + \ldots + D_{n-1} \tag{9}$$

следует подразумевать *полином с действительными коэффициентами*.

Вычислим давление $P(t)$, оказываемое штампами на границу полуплоскости. На основании формулы (14) § 112 имеем:

$$P(t) = -Y_y^- = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \tag{10}$$

откуда легко получаем на основании формул Сохоцкого — Племеля [3]):

$$P(t_0) = \frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)X(t_0)} \int_{L'} \frac{X(t)f'(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{2iP_{n-1}(t_0)}{X(t_0)}. \tag{11}$$

Коэффициенты D_j полинома $P_{n-1}(z)$ могут быть определены из добавочных условий, упомянутых при формулировке задачи, аналогично тому, как это было сделано в § 114.

[1]) Обозначим временно это первое слагаемое через $\Phi_0(z)$, т. е. положим:

$$\Phi_0(z) = \frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)X(z)} \int_{L'} \frac{X(t)f'(t)\,dt}{t-z};$$

вспоминая, что по определению $\overline{\Phi}_0(z) = \overline{\Phi_0(\bar{z})}$, получаем:

$$\overline{\Phi}_0(z) = \frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\overline{X}(z)} \int_{L'} \frac{\overline{X(t)}f'(t)\,dt}{t-z},$$

ибо $f'(t)$ — действительная функция. Легко видеть далее, что $\overline{X}(z) = X(z)$, ибо из формулы (7) непосредственно следует, что $\overline{X}(z)$ выражается тем же радикалом, что $X(z)$, и сомнение может быть лишь в знаке: $\overline{X}(z) = \pm X(z)$; рассматривая же поведение $X(z)$ и $\overline{X}(z)$ на бесконечности (обе функции ведут себя при больших $|z|$ как z^n), убеждаемся, что следует оставить верхний знак. Наконец, в силу предыдущего и в силу формулы (10″) § 112:

$$\overline{X(t)} = \overline{X^+(t)} = \overline{X}^-(t) = X^-(t) = -X(t);$$

следовательно,

$$\overline{\Phi}_0(z) = -\Phi_0(z).$$

[2]) Ибо (см. предыдущее примечание) $\overline{X}(z) = X(z)$.

[3]) Следует вспомнить, что $X^-(t_0) = -X^+(t_0) = -X(t_0)$.

Остановимся, например, на случае, когда даны главные векторы $(0, Y_k)$ сил, прижимающих отдельные штампы. Тогда должно быть

$$-Y_k = \int_{L_k} P(t_0)\,dt_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

где под $P(t_0)$ следует подразумевать выражение (11). Мы получим, таким образом, систему n линейных уравнений с неизвестными $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$. Легко показать, опираясь на единственность решения задачи, что эта система всегда однозначно разрешима [1]).

Мы предполагали до сих пор, что штампы могут перемещаться лишь поступательно. Как было уже сказано, случай, когда штампы могут наклоняться, легко сводится к предыдущему.

§ 116. Продолжение. Изучим несколько более подробно решение, полученное в предыдущем параграфе. Для упрощения изложения рассмотрим случай одного штампа, соприкасающегося с осью Ox вдоль одного сплошного отрезка ab; общий случай может быть рассмотрен совершенно аналогично.

1. В нашем случае мы будем иметь, вместо формул (6) и (11) § 115, соответственно:

$$\Phi(z) = \frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{(z-a)(b-z)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,f'(t)\,dt}{t-z} + \frac{D}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \tag{1}$$

и

$$P(t_0) = \frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,f'(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{2D}{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}, \tag{2}$$

где D — действительная постоянная. В эти формулы мы ввели (см. замечание 2 в конце § 110), вместо $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, функцию $\sqrt{(z-a)(b-z)}$, вследствие чего выражение для $P(t)$ представляется в действительной форме. Под $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ при $a < t < b$ мы можем подразумевать положительную величину, а под $\sqrt{(z-a)(b-z)}$ — ветвь, голоморфную на разрезанной вдоль ab плоскости, принимающую положительные значения на верхней стороне ab. Эта ветвь, как легко видеть (см. замечание 2 в конце § 110), характеризуется тем, что при больших $|z|$

$$\sqrt{(z-a)(b-z)} = -iz + O(1). \tag{3}$$

Постоянная D легко определяется из условия

$$\int_a^b P(t)\,dt = P_0, \tag{4}$$

[1]) Метод, вполне аналогичный изложенному, приводит весьма просто к решению задачи, связанной с вопросом о напряжениях в породе над угольными пластами, поставленной и решенной (более сложным путем) С. Г. Михлиным [12].

где P_0 — заданная величина силы, прижимающей штамп, и где под $P(t)$ следует подразумевать выражение, даваемое формулой (2). Еще проще определить D, замечая, что из формул (1) и (3) следует при больших $|z|$:

$$\Phi(z) = \frac{Di}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

откуда, сравнивая с формулой (4) § 112, получаем:

$$D = \frac{P_0}{2\pi}. \tag{5}$$

Для того, чтобы полученное решение было физически возможным, очевидно, должно быть $P(t) \geqslant 0$ (при $a \leqslant t \leqslant b$). Таким образом, после того, как решение получено, следует проверить, соблюдено ли это условие.

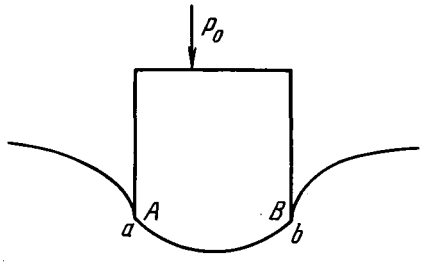


Рис. 53.

При решении задачи мы предполагали, что участок ab соприкасания штампа с упругой полуплоскостью задан заранее. Это соответствует, например, случаю, когда штамп имеет форму, указанную на рис. 53, и когда сила, прижимающая штамп, достаточно велика для того, чтобы углы A и B штампа вступили в соприкасание с упругим телом. Наличие углов A, B и объясняет возникновение бесконечно больших напряжений в точках a, b упругого тела, совпадающих с углами A, B штампа.

2. Представляет значительный интерес и тот случай, когда жесткий профиль, прижимаемый к упругой полуплоскости, не имеет углов (например, случай прижимания жесткого кругового диска) или когда прижимающая сила не достаточно велика для того, чтобы углы A и B вступили в соприкасание с упругим телом, как на рис. 54.

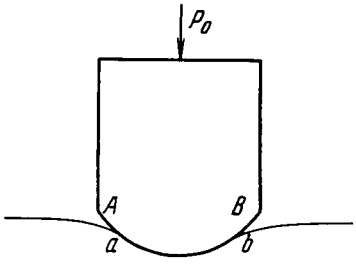


Рис. 54.

В этом случае концы a и b участка соприкасания не известны заранее. Однако полученные формулы позволяют решить задачу и в этом случае. В самом деле, формула (2) для давления $P(t_0)$ под штампом содержит теперь две не известные заранее постоянные a, b [1]). Для определения этих постоянных мы имеем тоже два соотношения:

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \tag{6}$$

выражающие условие, что давление $P(t_0)$ непрерывно переходит в нуль, когда точка t_0 выходит за участок соприкасания. Это условие можно заменить более общим (и вместе с тем физически еще более очевидным) усло-

[1]) Постоянная D дается формулой (5).

вием, что давление $P(t_0)$ остается ограниченным вблизи точек a, b, если эти точки не являются угловыми точками профиля штампа.

Действительно, мы увидим, что условие ограниченности давления $P(t_0)$ вблизи точек a, b влечет за собой и соотношения (6).

Для того, чтобы выразить условие ограниченности $P(t_0)$ в окрестностях точек a, b, введем временно обозначение

$$Q(t) = (t-a)(b-t)$$

и перепишем формулу (2) так:

$$P(t_0) = \frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{Q(t_0)}} \int_a^b \frac{Q(t) f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}\,(t-t_0)} + \frac{2D}{\sqrt{Q(t_0)}} =$$

$$= \frac{4\mu\sqrt{Q(t_0)}}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}\,(t-t_0)} +$$

$$+ \frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{Q(t_0)}} \int_a^b \frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0} \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}} + \frac{2D}{\sqrt{Q(t_0)}},$$

или, замечая, что

$$\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0} = -t-t_0+a+b,$$

еще так:

$$P(t_0) = \frac{4\mu\sqrt{Q(t_0)}}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}\,(t-t_0)} + \frac{At_0+B+2D}{\sqrt{Q(t_0)}}, \qquad \text{(a)}$$

где положено:

$$A = -\frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

$$B = -\frac{4\mu}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}} + \frac{4\mu(a+b)}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}.$$

Первый член в правой части формулы (а) не только ограничен вблизи точек a, b, но и обращается в нуль в этих точках [1]). Следовательно, для ограниченности $P(t_0)$ вблизи точек a, b необходимо и достаточно, чтобы $A = 0$, $B + 2D = 0$ или, принимая во внимание формулу (5),

$$\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0, \quad \int_a^b \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{\varkappa+1}{4\mu} P_0. \qquad (7)$$

При соблюдении этих условий формула (а) дает:

$$P(t_0) = \frac{4\mu\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi(\varkappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}; \qquad (8)$$

как было сказано, это выражение обращается в 0 при $t_0 = a$, $t_0 = b$.

[1]) Это можно легко показать, пользуясь оценками для значений интегралов типа Коши вблизи концов, данными в книге автора [25].

Заметим еще, что, преобразовав формулу (1) совершенно аналогично тому, как мы преобразовали формулу (2), легко убедиться, что при соблюдении условий (7)

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\sqrt{(z-a)(b-z)}}{\pi(\varkappa+1)}\int_a^b\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-z)}. \tag{9}$$

Добавим, что формулу (9), а также условия (7), мы могли бы получить, разыскивая с самого начала решение (для нашего частного случая $n=1$) граничной задачи (5) предыдущего параграфа, остающееся ограниченным вблизи концов, и применяя соответствующие формулы § 110 [1]).

Итак, для определения a и b мы имеем два соотношения (7), которые, вообще говоря, их однозначно определяют, если учесть также условие, что под штампом $P(t)\geqslant 0$ (см. ниже примеры).

Мы рассмотрели случай, когда штамп может перемещаться лишь поступательно. Случай, когда он может наклоняться, рассматривается совершенно аналогично (см. ниже примеры).

§ 116а. Примеры 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. В этом случае $f'(t)=0$ и формула (1) § 116 дает, если принять во внимание формулу (5) § 116 и положить $a=-l$, $b=l$, где l — половина длины основания:

$$\Phi(z)=\frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \tag{1}$$

Для давления $P(t)$ под штампом получаем, применяя формулу $P(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$:

$$P(t)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}}. \tag{2}$$

Это решение было получено (иным путем) М. А. Садовским [1].

2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. Пусть угол наклона равен ε (ср. § 114а, п. 2, рис. 52). В этом случае $f'(t)=\varepsilon$ и по формулам (1) и (5) § 116 (мы считаем и здесь $a=-l$, $b=l$) находим:

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{l^2-z^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt+\frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}.$$

Интеграл в правой части вычисляется в конечном виде по формуле (40) § 110. В нашем случае $g=-1$, $1/X_p(z)=\sqrt{l^2-z^2}$; так как согласно формуле (3) § 116

$$\sqrt{l^2-z^2}=-iz\left(1-\frac{l^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}=-iz\left(1-\frac{l^2}{2z^2}+\ldots\right)=-iz+\frac{il^2}{2z}+\ldots,$$

[1]) При этом первое условие (7) совпадает с условием существования такого решения, а второе условие (7) выражает, что коэффициент при z^{-1} разложения функции $\Phi(z)$ при больших $|z|$ равен заданной величине, определяемой величиной P_0 силы, прижимающей штамп.

то формула (40) § 110 дает

$$\int_{-l}^{l} \frac{\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt = \pi i\left(\sqrt{l^2-z^2}+iz\right).$$

Следовательно,

$$\Phi(z) = -\frac{2\mu\varepsilon z}{(\varkappa+1)\sqrt{l^2-z^2}} + \frac{2\mu\varepsilon i}{\varkappa+1} + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \tag{3}$$

Для давления $P(t)$ под штампом, пользуясь формулой $P(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ получаем:

$$P(t) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}} - \frac{4\mu\varepsilon t}{(\varkappa+1)\sqrt{l^2-t^2}}. \tag{4}$$

Решение будет физически возможным, если $P(t) \geqslant 0$ при $-l \leqslant t \leqslant l$, т. е. если

$$P_0 \geqslant \frac{4\pi\mu l}{\varkappa+1}\varepsilon. \tag{5}$$

Легко также вычислить главный момент

$$M = -\int_{-l}^{l} tP(t)\,dt$$

внешних сил, удерживающих штамп в данном положении, а именно: применяя тот же прием, что в § 114а (пример 2), или вычисляя интеграл обычным элементарным путем, легко получаем:

$$M = \frac{2\pi\mu l^2}{\varkappa+1}\varepsilon. \tag{6}$$

3. Штамп с закругленным основанием. Пусть штамп представляет собой полосу, ограниченную вертикальными прямыми $x = -l$, $x = +l$ и дугой AB окружности радиуса R, симметрично расположенной и обращенной выпуклостью вниз (рис. 53 и 54). Мы будем считать радиус R весьма большим [1]). С обычной степенью приближения можно положить [2]):

$$f(t) = \frac{t^2}{2R}.$$

Тогда из формул (1) и (5) § 116 следует в предположении, что вся дуга AB приходит в соприкосновение с упругим телом:

$$\Phi(z) = \frac{2\mu}{R\pi(\varkappa+1)\sqrt{l^2-z^2}}\int_{-l}^{l}\frac{l\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}.$$

Интеграл в правой части и здесь вычисляется в конечном виде, а именно: принимая во внимание, что при больших $|z|$

$$z\sqrt{l^2-z^2} = -iz^2 + \frac{il^2}{2} + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

[1]) Радиус мы должны считать большим, чтобы иметь дело с малыми деформациями.

[2]) Таким образом, мы заменяем дугу окружности дугой параболы, имеющей ту же кривизну в вершине.

получаем, применяя формулу (40) § 110:

$$\int_{-l}^{l} \frac{t\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\,dt = \pi i\left\{z\sqrt{l^2-z^2} + iz^2 - \frac{il^2}{2}\right\},$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{\mu(l^2-2z^2)}{R(\varkappa+1)\sqrt{l^2-z^2}} + \frac{2\mu i z}{R(\varkappa+1)} + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \tag{7}$$

Для давления $P(t)$ под штампом получаем по формуле $P(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$:

$$P(t) = \frac{2\mu(l^2-2t^2)}{R(\varkappa+1)\sqrt{l^2-t^2}} + \frac{P_0}{\pi\sqrt{l^2-t^2}}. \tag{8}$$

Решение физически возможно, если $P(t) \geqslant 0$ при $-l \leqslant t \leqslant l$, т. е. если

$$P_0 \geqslant \frac{2\pi\mu}{R(\varkappa+1)}\,l^2. \tag{9}$$

Если P_0 не удовлетворяет предыдущему условию, это значит, что сила величины P_0 не достаточна для того, чтобы вдавить штамп до полного соприкасания дуги AB с упругим телом.

Найдем дугу $A'B'$, которая действительно вступит в соприкасание при заданном P_0, удовлетворяющем условию

$$P_0 < \frac{2\pi\mu}{R(\varkappa+1)}\,l^2.$$

Вследствие симметрии очевидно, что отрезок $a'b'$ границы упругой полуплоскости, вступающий в соприкасание, имеет середину в начале, так что можно положить $a' = -l'$, $b' = l'$, если $2l'$ — длина отрезка $a'b'$. Функцию $\Phi(z)$ и давление $P(t)$, соответствующие данному l', мы найдем, заменяя в формулах (7) и (8) l на l'. Из условия $P(t) = 0$ при $t = \pm l'$ получаем [1]):

$$l' = \frac{\sqrt{P_0 R(\varkappa+1)}}{\sqrt{2\pi\mu}}. \tag{10}$$

Можно, наоборот, считать заданным l' и вычислить величину P_0 силы, необходимой для того, чтобы длина отрезка соприкасания была равна $2l'$. Соответствующие данному l' функции $\Phi(z)$ и $P(t)$ даются формулами:

$$\Phi(z) = \frac{2\mu\sqrt{l'^2-z^2}}{R(\varkappa+1)} + \frac{2\mu i z}{R(\varkappa+1)}, \tag{11}$$

$$P(t) = \frac{4\mu\sqrt{l'^2-t^2}}{R(\varkappa+1)}. \tag{12}$$

[1]) Достаточно выразить, что $P(t)$ остается ограниченным при $t = \pm l'$; результат будет тот же, как и следовало ожидать на основании сказанного в предыдущем параграфе.

§ 117. Равновесие жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения [1]. Задача равновесия жесткого штампа на границе упругой полуплоскости решена в предыдущих параграфах в двух крайних случаях, когда коэффициент трения равен нулю (§ 115—116) и когда он бесконечно велик (§ 114); в последнем случае предполагалось даже большее, а именно, что упругий материал не может отставать от штампа и что, таким образом, допустимо наличие отрицательных давлений, даже сколь угодно больших.

Используя метод, указанный в предыдущих параграфах, можно получить решение задачи также при конечном коэффициенте трения, что только и может иметь место в действительности. При этом мы ограничиваемся рассмотрением того лишь случая, когда штамп находится на пороге равновесия [2]); точнее, предполагаем, что на границе упругой полуплоскости, под штампом, $T = kP$, где P и T обозначают соответственно давление и касательное напряжение, приложенные к точкам границы полуплоскости, а k — коэффициент трения, предполагаемый постоянным [3]).

Направим по-прежнему ось Ox по границе упругой полуплоскости, а ось Oy перпендикулярно к ней, так, чтобы упругое тело занимало нижнюю полуплоскость $y < 0$. При таком выборе осей $P = -Y_y^-$, $T = X_y^-$.

Будем, далее, предполагать, что штамп соприкасается с упругой полуплоскостью вдоль одного сплошного отрезка [4]) $L' = ab$.

Кроме того, будем считать [5]), что штамп может перемещаться лишь поступательно.

---

[1]) Этот параграф представляет собой воспроизведение статьи автора [24] с незначительными изменениями. Приблизительно одновременно с этой статьей была опубликована статья Н. И. Глаголева [1], в которой дается решение рассматриваемой здесь задачи для частного случая штампа с прямолинейным основанием. Несколько позже Н. И. Глаголев [2] дал решение для случая, когда профиль основания имеет произвольную форму и когда коэффициент трения может зависеть от места контакта. Л. А. Галин [1] дал несколько отличный способ решения (также и для анизотропного тела); см. также монографию Л. А. Галина [4].

[2]) Очевидно, что полученное при этом решение приложимо и к случаю медленного скольжения штампа по границе полуплоскости.

[3]) Л. А. Галин [2] дал остроумное решение задачи о вдавливании жесткого штампа с плоским основанием в предположении, что отрезок контакта разбивается на три участка, причем на среднем имеет место сцепление, а на крайних — проскальзывание. В одновременно опубликованной статье С. В. Фальковича [1] дается решение той же задачи в предположении, что на участках проскальзывания трение отсутствует. См. также Галин [4].

[4]) Результат легко обобщается на случай, когда область соприкасания состоит из конечного числа раздельных отрезков (ср. предыдущие параграфы).

[5]) Случай, когда штамп может наклоняться, легко сводится к предыдущему, аналогично тому, как это было сделано выше (см. также пример 2 в следующем параграфе).

Граничные условия нашей задачи имеют вид:

$$T(t) = kP(t) \text{ на } L', \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v^- &= f(t) + \text{const на } L', \\ T(t) &= P(t) = 0 \text{ вне } L' \text{ на } Ox. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь по-прежнему t обозначает абсциссу точки оси Ox, v — проекцию смещения на ось Oy, $f(t)$ — заданную функцию, определяющую профиль штампа, а именно: $y = f(x)$ есть уравнение этого профиля. Мы будем считать, что $f(t)$ имеет производную $f'(t)$, удовлетворяющую условию H.

Кроме того, мы будем считать заданной величину

$$P_0 = \int_{L'} P(t)\, dt, \tag{3}$$

т. е. суммарное давление штампа на полуплоскость. Суммарное касательное напряжение будет тогда очевидно $T_0 = kP_0$; таким образом, будет задан главный вектор $(X, Y) = (T_0, -P_0)$ внешних сил, действующих на штамп и уравновешиваемых реакцией упругой полуплоскости.

При обозначениях и общих предположениях, принятых в § 112, граничные условия (1) и (2) нашей задачи могут быть записаны на основании формул (14) и (15) § 112 соответственно в виде [1]):

$$(1 - ik)\Phi^+(t) + (1 + ik)\overline{\Phi}^+(t) = (1 - ik)\Phi^-(t) + (1 + ik)\overline{\Phi}^-(t) \text{ на } L', \tag{4}$$

$$\varkappa\Phi^-(t) + \Phi^+(t) - \varkappa\overline{\Phi}^+(t) - \overline{\Phi}^-(t) = 4i\mu f'(t) \text{ на } L', \tag{5}$$

причем условие $P(t) = T(t) = 0$ на Ox вне L' эквивалентно условию голоморфности функции $\Phi(z)$ вне отрезка $L' = ab$.

Формула (4) показывает, что функция $(1 - ik)\Phi(z) + (1 + ik)\overline{\Phi}(z)$ голоморфна на всей плоскости, и так как она должна исчезать на бесконечности, то

$$(1 - ik)\Phi(z) + (1 + ik)\overline{\Phi}(z) = 0 \tag{6}$$

на всей плоскости. Выражая при помощи формулы (6) $\overline{\Phi}(z)$ через $\Phi(z)$ и внося в формулу (5), получаем граничное условие для $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(t) = g\Phi^-(t) + f_0(t) \text{ на } L', \tag{7}$$

где положено:

$$g = -\frac{\varkappa + 1 + ik(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1 - ik(\varkappa - 1)}, \qquad f_0(t) = \frac{4i\mu(1 + ik)f'(t)}{\varkappa + 1 - ik(\varkappa - 1)}.$$

Предыдущие выражения можно упростить, вводя постоянную α, определяемую условиями (вспомним, что $\varkappa > 1$, $k > 0$):

$$\operatorname{tg} \pi\alpha = k\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

---

[1]) Вместо условия (2) мы используем, как в предыдущих параграфах, соотношение

$$v'^- = v^{-\prime} = f'(t).$$

Тогда

$$\varkappa+1 \pm ik(\varkappa-1) = \sqrt{(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2}\, e^{\pm\pi i\alpha} = \frac{(\varkappa+1)\, e^{\pm\pi i\alpha}}{\cos\pi\alpha},$$

и, следовательно,

$$g = -e^{2\pi i\alpha}, \qquad f_0(t) = \frac{4i\mu\,(1+ik)\, e^{\pi i\alpha}\cos\pi\alpha}{\varkappa+1}\, f'(t). \tag{9}$$

Применяя к решению задачи (7) способ, указанный в § 110, и замечая, что в нашем случае [1])

$$\gamma = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{1}{2}+\alpha$$

и что в качестве функции $X_0(z)$ в формуле (18) § 110 можно взять выражение $(z-a)^{-\frac{1}{2}-\alpha}(b-z)^{-\frac{1}{2}+\alpha}$ (см. замечание 2 в конце § 110), получаем:

$$\Phi(z) = \frac{2\mu\,(1+ik)\, e^{\pi i\alpha}\cos\pi\alpha}{\pi(\varkappa+1)(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_a^b \frac{(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha} f'(t)\, dt}{t-z} + \\ + \frac{C_0}{(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \tag{10}$$

где C_0 — постоянная, а под $(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}$ подразумевается ветвь, голоморфная вне отрезка ab и принимающая на верхней стороне этого отрезка действительные положительные значения $(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}$; указанная ветвь характеризуется, как легко видеть, тем, что

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z} = -ie^{\pi i\alpha}. \tag{11}$$

Постоянная C_0 сразу определяется на основании формулы (4) § 112, которая дает:

$$\lim_{z\to\infty} z\Phi(z) = \frac{-T_0+iP_0}{2\pi} = \frac{iP_0(1+ik)}{2\pi},$$

откуда на основании формулы (11) следует:

$$C_0 = \frac{P_0(1+ik)\, e^{\pi i\alpha}}{2\pi},$$

---

[1]) Напомним, что по условию, принятому в § 110, мы должны взять то значение логарифма, для которого

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\frac{\ln g}{2\pi i} < 1.$$

Величина, обозначенная в § 110 через α, обозначена теперь через $\frac{1}{2}+\alpha$, а функция $f(t)$ обозначена теперь через $f_0(t)$.

и формула (10) принимает вид:

$$\Phi(z)=\frac{2\mu(1+ik)\,e^{\pi i\alpha}\cos\pi\alpha}{\pi(\varkappa+1)(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\int_a^b\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}f'(t)\,dt}{t-z}+$$

$$+\frac{P_0(1+ik)\,e^{\pi i\alpha}}{2\pi(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \qquad (12)$$

Легко проверить, что все условия задачи будут удовлетворены, если, как мы условились, считать, что $f'(t)$ удовлетворяет на L' условию H. Таким образом, задача решена, ибо функция $\Phi(z)$ вполне характеризует напряженное состояние.

Разумеется, решение будет физически возможным лишь в случае, если давление $P(t)$ в точках t под штампом, вычисленное на основании формулы (12), удовлетворяет условию $P(t)\geqslant 0$. Давление это легко вычисляется. В самом деле, на основании формулы (14) § 112 имеем:

$$P(t_0)+iT(t_0)=P(t_0)(1+ik)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0).$$

Вычисляя последнюю разность по формулам Сохоцкого — Племеля, легко получаем:

$$P(t_0)=-\frac{4\mu\sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{\varkappa+1}f'(t_0)+$$

$$+\frac{4\mu\cos^2\pi\alpha}{\pi(\varkappa+1)(t_0-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\int_a^b\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}f'(t)\,dt}{t-t_0}+$$

$$+\frac{P_0\cos\pi\alpha}{\pi(t_0-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \qquad (13)$$

При $k=0$ (тогда и $\alpha=0$) снова получаем решение для идеального случая, когда трение отсутствует.

§ 117а. Примеры 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. В этом случае $f'(t)=0$ и формулы (12), (13) § 117 дают:

$$\Phi(z)=\frac{P_0(1+k)\,e^{\pi i\alpha}}{2\pi(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \qquad (1)$$

$$P(t)=\frac{P_0\cos\pi\alpha}{\pi(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \qquad (2)$$

2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. Пусть основание штампа составляет с осью Ox (малый) угол ε. Тогда можно взять $f(t)=\varepsilon t+\text{const}$, $f'(t)=\varepsilon$.

Подставляя в формулу (12) § 117 на место $f'(t)$ постоянную ε и полагая для упрощения письма $a = -l$, $b = +l$, получаем, применяя формулу (40) § 110 [1]):

$$\Phi(z) = \frac{(1+ik)\,e^{\pi i\alpha}}{2\pi(\varkappa+1)}\,\frac{P_0(\varkappa+1) - 8\pi\mu\varepsilon a l - 4\pi\mu\varepsilon z}{(l+z)^{\frac{1}{2}+\alpha}\,(l-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}} + \frac{2\mu\varepsilon i\,(1+ik)}{\varkappa+1}. \tag{3}$$

Давление $P(t)$ под штампом дается формулой:

$$P(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{1+ik} = \frac{\cos\pi\alpha}{\pi(\varkappa+1)}\,\frac{P_0(\varkappa+1) - 8\pi\mu\varepsilon a l - 4\pi\mu\varepsilon t}{(l+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}\,(l-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{4}$$

Решение физически возможно, т. е. $P(t) \geqslant 0$ на отрезке $-l \leqslant t < l$, при условии

$$-\frac{P_0(\varkappa+1)}{4\pi\mu l\,(1-2\alpha)} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{P_0(\varkappa+1)}{4\pi\mu l\,(1+2\alpha)}. \tag{5}$$

Легко также вычислить момент

$$M = -\int_{-l}^{+l} tP(t)\,dt,$$

равный главному моменту внешних сил, действующих на штамп, а именно: поступая совершенно так, как в § 114а, п. 2, получаем:

$$M = 2alP_0 + \frac{2\pi\mu\,(1-4\alpha^2)\,l^2}{\varkappa+1}\,\varepsilon. \tag{6}$$

Последнее соотношение определяет ε по данным M и P_0. В частности, если $M = 0$, т. е. если внешние силы, действующие на штамп, эквивалентны одной силе, приложенной в середине основания, то

$$\varepsilon = -\frac{\alpha(\varkappa+1)\,P_0}{\pi\mu l\,(1-4\alpha^2)}; \tag{7}$$

так как $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, это значение ε удовлетворяет условию возможности (5).

§ 118. Другой способ решения граничных задач для полуплоскости. В предыдущих параграфах решение граничных задач для нижней полуплоскости мы сводили к разысканию функции $\Phi(z)$, надлежащим образом распространенной на верхнюю полуплоскость.

Очевидно однако (ср. способы решения, изложенные в предыдущей главе), что предыдущие задачи можно было свести к разысканию непосредственно функции

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)\,dz,$$

[1]) В нашем случае при больших $|z|$

$$\frac{1}{X_p(z)} = (l+z)^{\frac{1}{2}+\alpha}\,(l-z)^{\frac{1}{2}-\alpha} = -ie^{\pi i\alpha}(z+2l\alpha) + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

также распространенной на верхнюю полуплоскость [см. § 112, формулу (16)].

Некоторое неудобство представляет то обстоятельство, что $\varphi(z)$, вообще говоря, многозначна. Однако это неудобство можно устранить выделением из $\varphi(z)$ многозначной части, что делается очень просто. С другой стороны, введение в рассмотрение $\varphi(z)$ вместо $\Phi(z)$ имеет то преимущество, что при составлении граничных условий, содержащих граничные значения смещений, не приходится предварительно дифференцировать эти значения.

§ 119. Задача соприкасания двух упругих тел (обобщенная плоская задача Герца). Рассмотрим два упругих тела S_1, S_2, близких по форме к полуплоскостям, соприкасающихся вдоль участков ab их границ (рис. 55). Участок соприкасания ab не задан заранее и подлежит определению. Заранее заданы: форма границ (близких к прямолинейным) до деформации и главный вектор внешних сил, прижимающих, скажем, тело S_2 к телу S_1. Считается, что трение отсутствует. Кроме того, считается, что напряжения и вращения для S_1 и S_2 равны нулю на бесконечности.

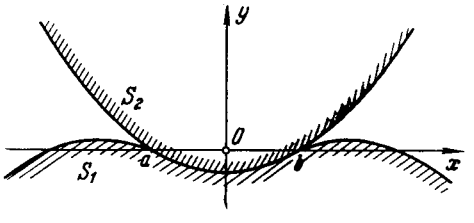


Рис. 55.

Эта задача, представляющая большой самостоятельный интерес, важна еще потому, что она решает задачу о соприкасании двух тел произвольной формы (здесь имеется в виду двумерный случай), если участок соприкасания весьма мал по сравнению с размерами тел; тогда, если нас интересуют напряжения и деформации вблизи места контакта, мы можем без заметной погрешности считать, что рассматриваемые тела близки по форме к полуплоскостям.

В трехмерном случае задача соприкасания двух упругих тел была впервые поставлена и решена Герцем при некоторых ограничительных допущениях, в частности при допущении, что площадка соприкасания весьма мала и что уравнения недеформированных поверхностей вблизи места соприкасания могут быть с достаточным приближением представлены в виде $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ при подходящем выборе осей координат [1]).

Таким образом, сформулированная выше задача соприкасания двух тел, близких к полуплоскостям, представляет собой двумерный аналог задачи Герца, но несколько обобщенный, так как мы не считаем участок соприкасания малым и в соответствии с этим не делаем никаких допущений

[1]) И. Я. Штаерман [2] привел трехмерную задачу Герца к интегральному уравнению при более общих предположениях.

относительно формы границ, кроме условия, что они близки к прямой (и достаточно гладкие).

Эта задача рассматривалась несколькими авторами. И. Я. Штаерман [1, 3] [1]) приводит ее к уравнению Фредгольма первого рода (пишем его в наших обозначениях):

$$\int_a^b P(t)\ln|t-t_0|\,dt = f(t_0)+\text{const}, \qquad \text{(a)}$$

где $P(t)$ — искомое давление одного тела на другое в точке t участка соприкасания тел, а $f(t)$ — заданная функция. К такому же точно уравнению приводится задача давления жесткого штампа на упругую полуплоскость, как это было сделано во втором издании настоящей книги (§ 87); уравнение это легко решается в квадратурах (см. там же, § 88) при заданных a и b.

А. В. Бицадзе [1] приводит эту задачу к сингулярному интегральному уравнению [2]), явное решение которого находится сразу.

Ниже приводится решение задачи методом, вполне аналогичным тому, которым мы решили задачу в случае, когда одно из соприкасающихся тел абсолютно жесткое (§ 115).

Будем считать, что тело S_1 занимает нижнюю полуплоскость S^-, а тело S_2 — верхнюю S^+, и будем отмечать соответственно значками 1 и 2 компоненты напряжения и смещения, а также постоянные λ, μ, $\varkappa$, относящиеся к S_1 и S_2.

Пусть $\Phi_1(z)$ — кусочно-голоморфная функция, соответствующая телу S_1 и определенная так, как в § 112; пусть $\Phi_2(z)$ — такая же функция для тела S_2; эти функции голоморфны на всей плоскости, за исключением отрезка ab оси Ox, ибо границы тел свободны от внешних напряжений вне этого отрезка. Ввиду того, что по условию трение отсутствует, будем иметь $[X_y^-]_1 = 0$ на Ox, отсюда, как в § 115, заключаем, что $\overline{\Phi}_1(z) = -\Phi_1(z)$; точно так же заключаем, что $\overline{\Phi}_2(z) = -\Phi_2(z)$. Если, далее, $P(t)$ обозначает давление одного тела на другое в точке t, то, как в § 115,

$$P(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t): \qquad (1)$$

совершенно аналогично

$$P(t) = \Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t). \qquad (2)$$

Сравнивая эти равенства, получаем, что $[\Phi_1+\Phi_2]^+ = [\Phi_1+\Phi_2]^-$, откуда следует, что сумма $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$ голоморфна на всей плоскости; так как, далее, она исчезает на бесконечности, то $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)=0$. Итак, в результате сказанного имеем:

$$\overline{\Phi}_1(z) = -\Phi_1(z), \quad \overline{\Phi}_2(z) = -\Phi_2(z), \quad \Phi_2(z) = -\Phi_1(z). \qquad (3)$$

[1]) См. также Штаерман [4].

[2]) Уравнение А. В. Бицадзе может быть получено дифференцированием обеих частей уравнения (а).

Если теперь

$$y = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

— уравнения границ тел S_1 и S_2 до деформации [1]), то после деформации мы должны иметь на участке соприкасания [2]):

$$f_1(t) + v_1^-(t) = f_2(t) + v_2^+(t),$$

откуда

$$v_1^- - v_2^+ = f(t) \text{ на } ab, \tag{4}$$

или еще [ср. формулу (22) § 112]

$$v_1'^- - v_2'^+ = v_1^{-\prime} - v_2^{+\prime} = f'(t) \quad \text{на } ab, \tag{5}$$

где положено:

$$f(t) = f_2(t) - f_1(t). \tag{6}$$

Мы будем считать, что $f'(t)$ удовлетворяет условию H.

Выражая теперь граничное условие (5) при помощи формулы (15) § 112, примененной соответственно к S_1 и S_2, легко получаем, принимая во внимание соотношения (3):

$$\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = \frac{if'(t)}{K} \quad \text{на } ab, \tag{7}$$

где положено для сокращения письма:

$$K = \frac{\varkappa_1 + 1}{4\mu_1} + \frac{\varkappa_2 + 1}{4\mu_2}. \tag{8}$$

Мы пришли, таким образом, к той самой математической граничной задаче, к которой приводит задача давления абсолютно жесткого штампа на полуплоскость, т. е. к задаче, соответствующей граничному условию, выражающемуся формулой (5) § 115; только в нашем случае, вместо $\Phi(z)$ в упомянутой формуле, мы должны взять $\Phi_1(z)$, а вместо постоянной $4\mu/(\varkappa + 1)$ в правой части этой формулы — постоянную $1/K$. Кроме того, в нашем случае, участок соприкасания, как в § 116, п. 2, не задан заранее и, так же как в § 116, п. 2, требуется найти решение $\Phi_1(z)$, исчезающее на бесконечности и ограниченное вблизи концов a, b.

Пользуясь формулами § 116 или непосредственно результатами § 110, приходим к следующему заключению.

Функция $\Phi_1(z)$ дается формулой [см. формулу (9) § 116]

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(b-z)}}{2\pi K} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-z)}. \tag{9}$$

---

[1]) $f_1(t)$ и $f_2(t)$ должны быть малыми величинами, так же как и производные $f_1'(t)$, $f_2'(t)$.

[2]) Ср. § 115. В сущности следовало бы написать: $f_1(t) + v_1^- = F(t + u_1^-)$, $f_2(t) + v_2^+ = F(t + u_2^+)$, если $y = F(t)$ есть уравнение линии контакта после деформации; однако с той степенью точности, которая принята нами, можно считать, что $F(t + u_1^-) = F(t + u_2^+)$, и мы получаем соотношение, приведенное в тексте.

Для определения a и b мы имеем два соотношения [см. формулы (7) § 116]:

$$\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0 \tag{10}$$

и

$$\int_a^b \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = KP_0, \tag{11}$$

где P_0 обозначает величину главного вектора внешних сил, прижимающих тело S_2 к S_1 (или S_1 к S_2); эту величину мы считаем заданной.

Под $\sqrt{(z-a)(b-z)}$ подразумевается, как в § 116, такая ветвь, что при больших $|z|$

$$\sqrt{(z-a)(b-z)} = -iz + O(1), \tag{12}$$

а под $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ при $a < t < b$ подразумевается положительное значение радикала.

Давление $P(t_0) = \Phi_1^+(t_0) - \Phi_1^-(t_0)$ дается формулой:

$$P(t_0) = \frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi K} \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \tag{13}$$

Если функция $f(t)$ — четная, т. е. если

$$f(-t) = f(t), \tag{14}$$

то, руководствуясь соображениями симметрии, мы можем заранее взять $a = -l$, $b = +l$, где l подлежит определению. В этом случае условие (10) выполняется само собой, а для определения l у нас остается соотношение

$$\int_0^l \frac{tf'(t)\,dt}{\sqrt{l^2-t^2}} = \frac{1}{2}KP_0. \tag{11'}$$

При предположении (14) и $a = -b$ полученные нами окончательные формулы совпадают с теми, которые получил А. В. Бицадзе в упомянутой выше статье.

Как было показано в § 110 (замечание 2), интегралы, фигурирующие в предыдущих формулах, вычисляются совершенно элементарно, если $f'(t)$ рациональная функция, в частности полином. Полагая, например,

$$f(t) = At^{2n},$$

где A — постоянная, а n — целое положительное число, сразу получим решение, найденное И. Я. Штаерманом [1]. Полагая

$$f(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

что соответствует случаю, когда S_1 и S_2 ограничены окружностями радиусов R_1 и R_2 (больших по сравнению с участками соприкасания), получим решение [1]), найденное Л. Фёплем (L. Föppl [1]) иным путем.

[1]) С точки зрения вычислений мы имеем тот же случай, что в примере 3 § 116а.

Некоторые другие примеры можно найти в статье И. Я. Штаермана [3] и в его книге [4].

При учете трения между соприкасающимися телами задача значительно усложняется. Решение некоторых контактных задач при наличии трения, представляющих значительный практический интерес, дано Н. И. Глаголевым; часть этих результатов опубликована в статье Н. И. Глаголева [3].

§ 120. Граничные задачи для плоскости с прямолинейными разрезами [1]. Методом, аналогичным предыдущему, можно легко решить основные граничные задачи, а также некоторые другие, когда область, занятая телом, представляет собой всю плоскость с прямолинейными щелями, расположенными вдоль одной и той же прямой, которую мы примем за действительную ось. Мы начнем с вывода некоторых формул, аналогичных формулам § 112.

1. Общие формулы. Пусть область S', занятая упругим телом, представляет собой всю плоскость, разрезанную вдоль n отрезков $L_k = a_k b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ оси Ox; совокупность этих отрезков мы теперь обозначим через L.

Мы не будем считать в этом параграфе, что напряжения исчезают на бесконечности, а будем лишь предполагать их *ограниченными на бесконечности*.

Тогда функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ голоморфны в S', включая бесконечно удаленную точку, и при больших $|z|$ согласно формулам (4), (5) § 36:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \Psi(z) &= \Gamma' + \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где (X, Y) обозначает главный вектор внешних усилий, приложенных к краям совокупности разрезов L,

$$\Gamma = B + iC, \qquad \Gamma' = B' + iC' \tag{2}$$

— постоянные, имеющие значения, определяемые формулами (§ 36):

$$B = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \qquad C = \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa}, \qquad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \tag{3}$$

где N_1, N_2 — значения главных напряжений на бесконечности, α — угол, который ось, соответствующая N_1, составляет с осью Ox, а ε_∞ — значение вращения на бесконечности.

Применяя наши обычные обозначения, введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z), \tag{4}$$

[1] Этот параграф воспроизводит содержание статьи автора [23] почти без всяких изменений.

также голоморфную в S' и имеющую на основании формул (1) при больших $|z|$ вид

$$\Omega(z)=\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}'+\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{5}$$

Заменяя в формуле (4) z на $\overline{z}$ и переходя к сопряженным значениям, получаем:

$$\Psi(z)=\overline{\Omega}(z)-\Phi(z)-z\Phi'(z). \tag{6}$$

Так как компоненты напряжения выражаются через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, то мы можем выразить их также через $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

В частности, на основании формулы (8) § 32 будем иметь:

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\Omega(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{7}$$

Аналогично могут быть выражены компоненты смещения, если вместо $\psi(z)$ ввести функцию

$$\omega(z)=\int\Omega(z)\,dz=z\overline{\Phi}(z)+\overline{\psi}(z)+\text{const}, \tag{8}$$

определяемую по функциям $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, как и функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, с точностью до аддитивной постоянной. Тогда формула (1) § 32 примет вид:

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-\omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi(z)}+\text{const}. \tag{9}$$

В дальнейшем мы будем считать, что функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ кусочно-голоморфны в смысле определения § 106, так что, в частности, вблизи любого из концов a_k, b_k

$$|\Phi(z)|<\frac{A}{|z-c|^{\alpha}},\qquad |\Omega(z)|<\frac{A}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{10}$$

где A, α — положительные постоянные, причем $\alpha<1$, а c обозначает соответствующий конец. Кроме того, мы будем считать, что для всех t, принадлежащих L, но не совпадающих с концами,

$$\lim_{z\to t} y\Phi'(z)=0\quad(z=x+iy). \tag{11}$$

2. Первая основная задача. Перейдем теперь к решению первой основной задачи [1]), т. е. будем считать заданными значения Y_y^+, X_y^+, Y_y^-, X_y^- на L; значками (+) и (—) отмечены, как всегда, граничные значения, принимаемые соответственно на верхнем и нижнем краях щелей (разрезов).

Кроме того, мы будем считать заданными постоянные $\mathrm{Re}\,\Gamma=B$ и $\Gamma'=B'+iC'$, т. е. значения напряжений на бесконечности. Так как речь идет о распределении напряжений, то, не нарушая общности, мы будем считать, что $C=0$, т. е. что

$$\Gamma=\overline{\Gamma}=B.$$

На основании формул (7) и (11) граничные условия принимают вид:

$$\Phi^+(t)+\Omega^-(t)=Y_y^+-iX_y^+,\qquad \Phi^-(t)+\Omega^+(t)=Y_y^--iX_y^-\ \text{на}\ L. \tag{12}$$

[1]) Решение (менее простое) этой задачи было дано Д. И. Шерманом [12].

Складывая и вычитая, получаем:

$$[\Phi(t)+\Omega(t)]^+ + [\Phi(t)+\Omega(t)]^- = 2p(t) \quad \text{на } L, \tag{13}$$

$$[\Phi(t)-\Omega(t)]^+ - [\Phi(t)-\Omega(t)]^- = 2q(t) \quad \text{на } L, \tag{14}$$

где $p(t)$, $q(t)$ — заданные на L функции:

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}[Y_y^+ + Y_y^-] - \frac{i}{2}[X_y^+ + X_y^-], \\ q(t) &= \frac{1}{2}[Y_y^+ - Y_y^-] - \frac{i}{2}[X_y^+ - X_y^-]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Мы будем считать, что $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют на L условию H.

Так как $\Phi(\infty) - \Omega(\infty) = -\Gamma'$, то общее решение граничной задачи (14) дается формулой (§ 108):

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{q(t)\,dt}{t-z} - \bar{\Gamma}'. \tag{16}$$

Далее, полагая

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\frac{1}{2}}(z-b_k)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

и применяя формулу (33) § 110, получаем общее решение граничной задачи (13), ограниченное на бесконечности [1]):

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)\,p(t)\,dt}{t-z} + \frac{2P_n(z)}{X(z)}, \tag{18}$$

где $P_n(z)$ обозначает полином степени не выше n:

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n; \tag{19}$$

под $X(t)$ подразумевается значение, принимаемое функцией $X(z)$ на левой стороне L.

Из формул (16) и (18) следует:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}', \tag{20}$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)\,p(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)\,dt}{t-z}, \tag{21}$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t)\,p(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)\,dt}{t-z}. \tag{22}$$

При наших условиях относительно $p(t)$ и $q(t)$ условие (11) удовлетворено на основании сказанного в § 69 (п. 2).

Остается определить полином $P_n(t)$. Будем считать для определенности, что под $X(z)$ подразумевается ветвь, имеющая при больших $|z|$ вид

$$X(z) = +z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots \tag{17'}$$

[1]) Это последнее условие вытекает из формул (1) и (5).

Коэффициент C_0 сразу определяется по первой формуле (20) и по условию $\Phi(\infty) = \Gamma$:

$$C_0 = \Gamma + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}. \tag{23}$$

Остальные коэффициенты должны быть определены из условия однозначности смещений. На основании (9) это условие заключается в том, что выражение $\varkappa\varphi(z) - \omega(\bar{z})$ должно возвращаться к своему первоначальному значению, когда точка z описывает замкнутые контуры Λ_k, охватывающие отрезки $a_k b_k = L_k$. Стягивая контуры Λ_k к отрезкам L_k, легко убедиться, что условие однозначности выражается следующими равенствами [1]):

$$2(\varkappa+1)\int_{L_k}\frac{P_n(t)\,dt}{X(t)} + \varkappa\int_{L_k}[\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)]\,dt + \int_{L_k}[\Omega_0^+(t) - \Omega_0^-(t)]\,dt = 0 \tag{24}$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

которые представляют собой систему линейных уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Эта система всегда разрешима. В самом деле, однородная система, получаемая в случае $\Gamma = \Gamma' = 0$, $Y_y^+ = X_y^+ = Y_y^- = X_y^- = 0$, не может иметь решения, кроме решения $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, ибо исходная задача, как легко установить обычным путем, имеет в этом случае лишь тривиальное решение $\Phi(z) = \Omega(z) = 0$. Поэтому неоднородная система (24) всегда однозначно разрешима. Таким образом, наша задача решена.

В частном случае, когда края щелей свободны от напряжений (з а д а ч а р а с т я ж е н и я п л а с т и н к и, о с л а б л е н н о й т р е щ и н а м и), $\Phi_0(z) = \Psi_0(z) = 0$ и решение принимает чрезвычайно простой вид:

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}, \quad \Omega(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}, \tag{25}$$

причем коэффициенты полинома $P_n(z)$ определяются условиями:

$$C_0 = \Gamma + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}, \quad \int_{L_k}\frac{P_n(t)\,dt}{X(t)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

При $n = 1$ (одна щель), полагая $a_1 = -a$, $b_1 = a$, получаем весьма простые формулы:

$$\Phi(z) = \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma'})\,z}{2\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}, \quad \Omega(z) = \frac{(2\Gamma + \overline{\Gamma'})\,z}{2\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'}. \tag{27}$$

Решение (менее простое) задачи для частного случая $n = 1$ фактически содержится в § 82а как частный случай задачи равновесия пластинки с эллиптическим отверстием под влиянием заданных усилий, приложенных к обводу.

---

[1]) Выражения $\Phi_0^+ - \Phi_0^-$ и $\Omega_0^+ - \Omega^-$ легко вычисляются по формулам Сохоцкого — Племеля.

3. Вторая основная задача. Рассмотрим теперь вторую основную задачу, т. е. будем считать, что на L заданы значения смещений $u^+(t)$, $v^+(t)$ на верхнем крае и $u^-(t)$, $v^-(t)$ на нижнем, причем, если $u(a_k)$, $v(a_k)$ и $u(b_k)$, $v(b_k)$ обозначают (заданные) смещения точек a_k, b_k, то

$$\left.\begin{aligned} u^+(a_k) = u^-(a_k) = u(a_k), \quad v^+(a_k) = v^-(a_k) = v(a_k), \\ u^+(b_k) = u^-(b_k) = u(b_k), \quad v^+(b_k) = v^-(b_k) = v(b_k). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Кроме того, мы будем считать заданными постоянные Γ и Γ′ (на этот раз мы не считаем $C = 0$), а также главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к L.

Для того чтобы не рассматривать непосредственно функций $\varphi(z)$, $\omega(z)$, которые могут быть многозначными, будем исходить при составлении граничных условий не из формулы (9), а из формулы, получаемой из нее дифференцированием по x:

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{29}$$

где u', v' — частные производные u, v по x. Согласно предыдущей формуле граничные условия запишутся так [1]):

$$\left.\begin{aligned} \varkappa\Phi^+(t) - \Omega^-(t) = 2\mu(u^{+\prime} + iv^{+\prime}), \\ \varkappa\Phi^-(t) - \Omega^+(t) = 2\mu(u^{-\prime} + iv^{-\prime}). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Складывая и вычитая, получаем:

$$[\varkappa\Phi(t) - \Omega(t)]^+ + [\varkappa\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 2f(t) \text{ на } L, \tag{31}$$

$$[\varkappa\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\varkappa\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2g(t) \text{ на } L, \tag{32}$$

где $f(t)$, $g(t)$ — заданные на L функции:

$$\left.\begin{aligned} f(t) = \mu[(u^{+\prime} + u^{-\prime}) + i(v^{+\prime} + v^{-\prime})], \\ g(t) = \mu[(u^{+\prime} - u^{-\prime}) + i(v^{+\prime} - v^{-\prime})]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Мы будем считать, что эти функции удовлетворяют на L условию H.

Подобно предыдущему, общие решения граничных задач (32) и (31) даются соответственно формулами:

$$\varkappa\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t - z} + \bar{\Gamma}' + \varkappa\Gamma + \bar{\Gamma}, \tag{34}$$

$$\varkappa\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{\pi i X(z)}\int_L \frac{X(t) f(t)\,dt}{t - z} + \frac{2P_n(z)}{X(z)}, \tag{35}$$

где $X(z)$ есть функция, определяемая формулой (17), а $X(t)$ — значение этой функции на левой стороне L.

Предыдущие формулы определяют искомые функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ с точностью до слагаемого, содержащего полином

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n.$$

Первые два коэффициента C_0 и C_1 этого полинома непосредственно определяются из формулы (35), если принять во внимание, что в силу

[1]) Ср. конец § 112.

формул (1) и (5) при больших $|z|$ должно быть:

$$\varkappa\Phi(z)-\Omega(z)=\varkappa\Gamma-\overline{\Gamma}-\overline{\Gamma}'-\frac{\varkappa(X+iY)}{\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right). \qquad (36)$$

Легко видеть на основании формул (28) и (30), что смещения u, v, вычисленные при помощи формулы (9) по найденным функциям $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, будут однозначными. Однако эти смещения будут принимать на разрезах L_k заданные значения лишь с точностью до некоторых постоянных слагаемых, которые могут оказаться различными на различных разрезах. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ постоянные, на которые отличается выражение $2\mu(u+iv)$, вычисленное по функциям $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, от заданных значений на разрезах $L_1, L_2, \ldots, L_n$ [1]). Функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ будут удовлетворять условиям задачи лишь в том случае, если $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ [2]). Легко видеть на основании формулы (29), что эти условия могут быть выражены так:

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}}[\varkappa\Phi(t)-\Omega(t)]\,dt=2\mu\{u(a_{k+1})-u(b_k)+i[v(a_{k+1})-v(b_k)]\} \qquad (37)$$

$$(k=1, 2, \ldots, n-1),$$

где в правой части фигурируют заданные величины — те же, что в формулах (28).

Внося в левую часть выражение (35), получим систему $n-1$ линейных уравнений для вычисления оставшихся еще неопределенными $n-1$ коэффициентов $C_2, \ldots, C_n$; как легко видеть, подобно предыдущему, эта система всегда однозначно разрешима. Таким образом, задача решена. Решение для частного случая $n=1$ было получено нами в § 83 иным путем.

Аналогично предыдущему решается задача в случае, когда смещения заданы лишь с точностью до постоянных слагаемых, которые могут быть различными на различных щелях, но зато дополнительно задаются главные векторы внешних усилий, действующих на каждую щель в отдельности.

4. Одна смешанная задача. Решим в заключение одну задачу, рассмотренную Д. И. Шерманом [13]. В этой задаче задаются внешние напряжения, приложенные, скажем, к верхним краям щелей, и смещения на нижних краях [3]). На основании формул (7) и (29) граничные условия запишутся так:

$$\Phi^+(t)+\Omega^-(t)=Y_y^+-iX_y^+,\quad \varkappa\Phi^-(t)-\Omega^+(t)=2\mu(u'^-+iv'^-)\ \text{на}\ L. \qquad (38)$$

[1]) Эти постоянные одинаковы на верхней и нижней сторонах каждого разреза, ибо, как легко убедиться при принятых нами условиях, выражение $2\mu(u+iv)$ стремится к определенному пределу, когда z приближается к одному из концов a_k, b_k.

[2]) Тогда можно добиться и того, чтобы $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ за счет произвольной постоянной, входящей в правую часть формулы (9).

[3]) Д. И. Шерман решает задачу довольно сложным путем, приводя ее к системе (правда, простой) сингулярных интегральных уравнений. В решении Д. И. Шермана имеется одно упущение, о котором будет сказано ниже.

Умножая второе из этих равенств сперва на $-i/\sqrt{\varkappa}$, затем на $+i/\sqrt{\varkappa}$ и складывая с первым [1]), получаем условия на L:

$$\left[\Phi(t)+\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(t)\right]^{+}-i\sqrt{\varkappa}\left[\Phi(t)+\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(t)\right]^{-}=2f_1(t), \tag{39}$$

$$\left[\Phi(t)-\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(t)\right]^{+}+i\sqrt{\varkappa}\left[\Phi(t)-\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(t)\right]^{-}=2f_2(t), \tag{40}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — заданные на L функции; мы будем считать, что эти функции удовлетворяют условию H на L.

Таким образом, функции

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(z),\quad \Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(z)$$

определяются решением граничных задач (39) и (40), представляющих собой частные случаи задачи, решенной в § 110. По обозначениям § 110 для задачи (39) $g=i\sqrt{\varkappa}$, для задачи (40) $g=-i\sqrt{\varkappa}$.

Решая эти задачи по способу, указанному в § 110, и учитывая поведение функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ на бесконечности, получаем:

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(z)=\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f_1(t)\,dt}{X_1^{+}(t)\,(t-z)}+X_1(z)\,P_n^{(1)}(z), \tag{41}$$

$$\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\Omega(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f_2(t)\,dt}{X_2^{+}(t)\,(t-z)}+X_2(z)\,P_n^{(2)}(z), \tag{42}$$

где

$$X_1(z)=\prod_1^n(z-a_k)^{-\gamma_1}(z-b_k)^{\gamma_1-1},\quad X_2(z)=\prod_1^n(z-a_k)^{-\gamma_2}(z-b_k)^{\gamma_2-1}, \tag{43}$$

причем

$$\gamma_1=\frac{\ln(i\sqrt{\varkappa})}{2\pi i}=\frac{1}{4}+\frac{\ln\varkappa}{4\pi i},\quad \gamma_2=\frac{\ln(-i\sqrt{\varkappa})}{2\pi i}=\frac{3}{4}+\frac{\ln\varkappa}{4\pi i}. \tag{44}$$

Под $X_1(z)$ и $X_2(z)$ подразумеваются ветви, голоморфные на разрезанной вдоль L плоскости.

Складывая и вычитая формулы (41) и (42), получаем явные выражения для $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, которые мы не выписываем.

Для определения $2n+2$ коэффициентов полиномов $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$ мы имеем следующие условия. Во-первых, условия, выражающие, что функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ ведут себя на бесконечности так, как того требуют первая из формул (1) и формула (5); мы считаем, что величины Γ, Γ', X, Y, входящие в эти формулы, заданы [2]). Во-вторых, условия, выражающие

[1]) Ср. Шерман [13], стр. 333.

[2]) Главный вектор усилий, приложенных к верхним краям щелей, определяется по заданным значениям Y_y^{+}, X_y^{+} на L; кроме того, мы считаем заданным главный вектор усилий, приложенных к нижним краям. Сумма этих главных векторов и есть вектор (X, Y).

однозначность смещений, как в случае, рассмотренном в п. 2. Наконец, условия, что на нижних краях щелей выражение $2\mu\,(u + iv)$ принимает заданные значения, а не только лишь с точностью до некоторых постоянных; при этом, как в п. 3, достаточно выразить, что $2\mu\,(u + iv)$ принимает на нижних краях щелей заданные значения с точностью до постоянной, одной и той же для всех щелей. Выразив эти условия, мы получим как раз систему $2n + 2$ линейных уравнений [1]) для определения $2n + 2$ неизвестных коэффициентов, и легко заключить на основании теоремы единственности (имеющей, как легко видеть, место при принятых нами условиях), что эта система всегда однозначно разрешима [2]).

Рассмотрим, например, случай, когда имеется лишь одна щель $L = ab$, нижний край которой удерживается неподвижно ($u^- = v^- = 0$ на L), верхний край свободен от напряжений ($Y_y^+ = X_y^+ = 0$ на L), и когда напряжения и вращения равны нулю на бесконечности ($\Gamma = \Gamma' = 0$). Будем, далее, считать, что главный вектор внешних сил, приложенных к нижнему краю, равен $(0, -P_0)$.

Этот случай можно представить себе так: к нижнему краю припаяна жесткая прямолинейная полоска, на которую действует симметрично приложенная сила величины P_0, перпендикулярная к ней и направленная вниз (в сторону отрицательных y).

В нашем случае $n = 1$, $f_1(t) = f_2(t) = 0$,

$$X_1(z) = (z-a)^{-\gamma_1}(z-b)^{\gamma_1-1},\quad X_2(z) = (z-a)^{-\gamma_2}(z-b)^{\gamma_2-1},$$

и, так как $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ должны исчезать на бесконечности (ибо $\Gamma = \Gamma' = 0$), будем иметь на основании формул (41) и (42):

$$\Phi(z) = C_1X_1(z) + C_2X_2(z),\quad \Omega(z) = -i\sqrt{\varkappa}\,C_1X_1(z) + i\sqrt{\varkappa}\,C_2X_2(z),$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Эти постоянные определятся на основании условий, вытекающих из формул (1) и (5): при больших $|z|$

$$\Phi(z) = \frac{iP_0}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),\quad \Omega(z) = \frac{-i\varkappa P_0}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

откуда, считая, что под $X_1(z)$ и $X_2(z)$ подразумеваются ветви, такие, что $\lim zX_1(z) = \lim zX_2(z) = 1$ при $z \to \infty$, получаем:

$$C_1 + C_2 = \frac{iP_0}{2\pi(1+\varkappa)},\quad -i\sqrt{\varkappa}\,C_1 + i\sqrt{\varkappa}\,C_2 = -\frac{i\varkappa P_0}{2\pi(1+\varkappa)},$$

т. е.

$$C_1 = \frac{iP_0(1-i\sqrt{\varkappa})}{4\pi(1+\varkappa)},\quad C_2 = \frac{iP_0(1+i\sqrt{\varkappa})}{4\pi(1+\varkappa)}.$$

[1]) Первая группа условий дает 4 уравнения. Вторая дает n уравнений, но одно из них является, как легко видеть, следствием остальных в силу уравнений первой группы. Третья группа дает $n - 1$ уравнение.

[2]) Д. И. Шерман [13] не налагает на искомое решение условий, обеспечивающих единственность, в противоположность тому, что сделано в его же статье [12], в которой решается первая основная задача. Поэтому решение только что рассмотренной нами задачи, построенное Д. И. Шерманом, содержит постоянные, не поддающиеся определению без дополнительных условий. Сам автор исследования решения не дает и считает упомянутые постоянные произвольными.

III. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ, И ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ, РАЗРЕЗАННОЙ ВДОЛЬ ДУГ ОКРУЖНОСТИ

Совершенно аналогично предыдущему можно весьма просто решить важнейшие граничные задачи для круга и для бесконечной плоскости с круговым отверстием. Решение первой, второй и смешанной задач для этих случаев, а также для более общего случая, который будет рассмотрен в следующем отделе, было дано И. Н. Карцивадзе в кандидатской диссертации, часть которой опубликована в статьях [1, 2], где для краткости рассматривается лишь случай конечной области, так как в случае бесконечной области решения получаются вполне аналогично [1]. В § 121—123 излагаются результаты И. Н. Карцивадзе, относящиеся к области, ограниченной окружностью.

В § 124 я указываю решение основных задач для бесконечной области с разрезами вдоль дуг окружности.

§ 121. Преобразование общих формул для области, ограниченной окружностью. Пусть L — окружность радиуса 1, с центром в начале координат, и пусть S^+ — круг, ограниченный этой окружностью, а S^- — остальная часть плоскости (за вычетом L).

Пусть упругое тело занимает одну из областей S^+, S^-. Введем полярные координаты r, ϑ соотношением

$$z = x + iy = re^{i\vartheta}$$

и обозначим, как в § 39, через $\widehat{rr}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{r\vartheta}$ компоненты напряжения в полярных координатах. Формулы, выражающие эти компоненты через функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ (§ 39), мы запишем теперь так [2]):

$$\widehat{rr} + \widehat{\vartheta\vartheta} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$\widehat{rr} + i\widehat{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}. \tag{2}$$

Напомним еще формулу

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \text{const}, \tag{3}$$

выражающую компоненты смещения u, v (в декартовых координатах) через функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, связанные с $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ соотношениями $\varphi'(z) = \Phi(z)$, $\psi'(z) = \Psi(z)$, и присоединим к ней формулу

$$2\mu(u' + iv') = iz\left[\varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + \bar{z}\overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}\right], \tag{4}$$

---

[1]) Б. Л. Минцберг [1] опубликовал решение смешанной задачи для бесконечной области с круговым отверстием, будучи, по-видимому, знаком лишь с первой из цитированных статей И. Н. Карцивадзе.

[2]) § 39, первая формула (4) и формула (5); в последней формуле мы переходим к сопряженным значениям и пишем $\bar{z}/z$ вместо $e^{-2i\upsilon}$.

получаемую из формулы (3) дифференцированием по ϑ; в этой формуле

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \vartheta}.$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ голоморфны в рассматриваемой области (S^+ или S^-). В случае, когда рассматриваемая область есть S^-, функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ при больших $|z|$ имеют вид:

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{5}$$

$$\Psi(z) = \Gamma' + \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{6}$$

где при прежних обозначениях

$$\Gamma = B + iC, \quad \Gamma' = B' + iC'; \tag{7}$$

$$B = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \quad C = \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa}, \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}. \tag{8}$$

Пользуясь много раз применявшимися обозначениями (см. § 76), распространим определение функции $\Phi(z)$, первоначально определенной в S^+ (или в S^-), также на область S^- (или S^+), положив в области S^- (или S^+), т. е. при $|z| > 1$ (или $|z| < 1$) [1]),

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{9}$$

Заменяя в предыдущей формуле, справедливой по условию, при $|z| > 1$ (или при $|z| < 1$), величину z на $1/\bar{z}$, считая теперь $|\bar{z}| = |z| < 1$ (или $|\bar{z}| = |z| > 1$), получаем:

$$\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{z}^2\overline{\Psi}(\bar{z});$$

откуда, переходя к сопряженным значениям, выводим:

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2}\Phi(z) + \frac{1}{z^2}\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\Phi'(z). \tag{10}$$

Так как компоненты напряжения и смещения выражаются через функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, то их можно выразить, пользуясь формулой (10), и через одну функцию $\Phi(z)$, определенную уже на всей плоскости (за вычетом линии L).

В случае, когда область, занятая телом, есть S^+, функция $\Phi(z)$ голоморфна как в S^+, так и в S^-, включая бесконечно удаленную точку; последнее следует из формулы (9). Однако поведение $\Phi(z)$ на бесконеч-

[1]) Это распространение мы производим так, чтобы значения $\Phi(z)$ справа и слева от L аналитически продолжали друг друга через незагруженные участки (ср. § 112); исходя из этого, легко приходим к формуле (9), руководствуясь формулой (2) и замечая, что на L имеем:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

ности должно быть подчинено некоторым условиям для того, чтобы соответствующая ей функция $\Psi(z)$ была голоморфной в S^+. Действительно, пусть

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots \text{ при } |z|<1, \\ \Phi(z) &= B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots \text{ при } |z|>1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тогда, выражая, что функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (10), голоморфна также и при $z = 0$, легко получаем требуемое условие:

$$A_0 + \overline{B_0} = 0, \quad B_1 = 0. \tag{12}$$

В дальнейшем мы будем считать это условие выполненным.

В случае, когда область, занятая телом, есть S^-, функция $\Phi(z)$ голоморфна как в S^- (включая бесконечно удаленную точку), так и в S^+, кроме точки $z = 0$, где она может иметь полюс. Действительно, формула (9) вместе с формулами (5), (6) показывает, что вблизи точки $z = 0$

$$\Phi(z) = \frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \text{голоморфная функция}. \tag{13}$$

Компоненты напряжения будут выражены через функцию $\Phi(z)$ формулами (1) и (2), если в последней подразумевать под $\Psi(z)$ выражение (10). Для того чтобы придать этой последней формуле вид, удобный для наших целей, заметим, что в силу (10)

$$\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\,\overline{\Phi'(z)} = \bar{z}^2\,\overline{\Psi(z)} - \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right);$$

внося предыдущее выражение в формулу (2), получаем:

$$\widehat{rr} + i\,\widehat{r\vartheta} = \Phi(z) - \Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \bar{z}\left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{\Psi(z)}, \tag{14}$$

где в правой части под $\Psi(z)$ следует подразумевать выражение (10).

Аналогично из формулы (4) получаем:

$$2\mu(u' + iv') = iz\left[\varkappa\Phi(z) + \Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{\Psi(z)}\right], \tag{15}$$

где, как и в предыдущей формуле, под $\Psi(z)$ подразумевается выражение (10) и по-прежнему

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \vartheta}. \tag{16}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L из S^+ и из S^-, кроме, быть может, конечного числа точек c_k на L, вблизи которых

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c_k|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1; \tag{17}$$

кроме того, мы будем считать, что для всех точек t на L, за исключением, быть может, точек c_k,

$$\lim_{z\to t}(1-r)\,\Phi'(z)=0 \qquad (z=re^{i\vartheta}). \tag{18}$$

Легко видеть на основании формулы (10), что в силу этого условия будем иметь также:

$$\lim_{z\to t}\left(\bar{z}-\frac{1}{z}\right)\Psi(z)=\lim_{z\to t}e^{-i\vartheta}\left(r-\frac{1}{r}\right)\Psi(z)=0, \tag{19}$$

за исключением, быть может, значений $t=c_k$.

Если на L имеется незагруженный участок L', т. е. если на L' имеем $\widehat{rr}=\widehat{r\vartheta}=0$, то, как показывает формула (14), $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0$ на L'. Следовательно, значения $\Phi(z)$ вне и внутри L аналитически продолжают друг друга через незагруженные участки границы, как в случае полуплоскости. Именно для достижения этого свойства и было выбрано определение (9) функции $\Phi(z)$ в S^- (или в S^+).

При помощи предыдущих формул легко решить ряд основных граничных задач для круга, подобно тому, как это было сделано в предыдущих параграфах для полуплоскости.

§ 122. Решение первой и второй основных задач для области, ограниченной окружностью. Эти задачи были нами решены в предыдущих главах разными способами. Здесь для иллюстрации нового способа мы укажем их решение при помощи формул предыдущего параграфа, ограничиваясь вследствие простоты краткими указаниями.

1. Первая основная задача для круга. В этом случае область, занятая телом, есть S^+, и граничное условие имеет вид:

$$\widehat{\varrho\varrho^+}+i\,\widehat{\varrho\vartheta^+}=N(t)+iT(t), \tag{1}$$

где N и T — нормальное и касательное напряжения на L, которые мы считаем заданными и удовлетворяющими условию H.

На основании формулы (14) § 121 это граничное условие принимает вид:

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=N(t)+iT(t). \tag{2}$$

Мы пришли, таким образом, к задаче, решенной в § 108; в нашем случае требуется найти решение, ограниченное на бесконечности. Применяя формулу (2) § 108, получаем:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{N(t)+iT(t)}{t-z}\,dt+B_0, \tag{3}$$

где $B_0=\Phi(\infty)$ — не известная пока постоянная. Для определения этой постоянной, а также для выяснения условий разрешимости задачи обратимся к равенствам (12) § 121, которые должны быть удовлетворены по условию.

Вычислим для этого постоянные A_0 и B_1 формул (11) § 121. Имеем:

$$A_0 = \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L [N(t)+iT(t)]\frac{dt}{t} + B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(N+iT)\,d\vartheta + B_0,$$

$$B_1 = \lim_{z\to\infty} z\,[\Phi(z) - B_0] = -\frac{1}{2\pi i}\int_L [N(t)+iT(t)]\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(N+iT)\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta.$$

Условия (12) § 121 дают соответственно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(N+iT)\,d\vartheta + B_0 + \overline{B}_0 = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(N+iT)\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta = 0. \tag{4}$$

Предпоследняя формула показывает, что должно быть

$$\int_0^{2\pi} T\,d\vartheta = 0; \tag{5}$$

при соблюдении этого условия

$$\operatorname{Re} B_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} N\,d\vartheta. \tag{6}$$

Равенства (4) и (5) выражают соответственно условия обращения в нуль главного вектора и главного момента внешних усилий, которые необходимы для существования решения.

Формула же (6) определяет действительную часть постоянной B_0; мнимая ее часть остается неопределенной, как и следовало ожидать, ибо она влияет лишь на жесткое вращение тела как целого. Таким образом, задача решена.

2. Первая основная задача для плоскости с круговым отверстием решается совершенно аналогично предыдущей. В этом случае имеем:

$$\widehat{\varrho\varrho}^- + i\,\widehat{\varrho\vartheta}^- = N(t) + iT(t), \tag{7}$$

где $N(t)$ и $T(t)$ — заданные внешнее нормальное и касательное напряжения; как в § 87а и § 56, под N подразумевается проекция на нормаль, направленную к центру, а под T — проекция на касательную, направленную влево, если смотреть вдоль положительной нормали. Мы будем считать, что $N(t)$ и $T(t)$ удовлетворяют условию H.

На основании формулы (14) § 121 это условие принимает вид:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = -[N(t) + iT(t)], \tag{8}$$

вполне аналогичный виду условия (2).

Однако в нашем случае требуется найти решение, имеющее на бесконечности заданное значение Γ, а в точке $z = 0$ — полюс с главной частью

$$\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z};$$

это следует из формул (5) и (13) § 121. Поэтому, применяя сказанное в § 108, получаем сразу:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N(t)+iT(t)}{t-z}\,dt + \Gamma + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}. \qquad (9)$$

Величины X, Y (компоненты главного вектора внешних напряжений) вычисляются непосредственно по граничным заданиям, а именно, как легко видеть

$$X+iY = -\int_0^{2\pi} (N+iT)\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta.$$

Величины же Γ и Γ′, определяющие напряжения и вращение на бесконечности, следует считать заданными. Легко проверить, что условие однозначности смещений выполняется.

Таким образом, задача решена. Легко проверить, что при $\Gamma = \Gamma' = 0$ полученное для $\Phi(z)$ выражение совпадает в области S^- с выражением, полученным в § 87а (где предполагалось, что напряжения и вращение исчезают на бесконечности).

3. Вторая основная задача для S^+ и S^- решается совершенно аналогично предыдущим, если исходить из формулы (15) § 121. Предоставляем читателю написать решение.

§ 123. Основная смешанная задача для области, ограниченной окружностью. Эту задачу мы еще не решали.

Пусть $L_k = a_k b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) — заданные дуги на окружности L, обозначенные так, что, описывая окружность против часовой стрелки, мы встречаем концы в последовательности $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_1$. Совокупность этих дуг мы обозначим через L', так что

$$L' = L_1 + L_2 + \ldots + L_n,$$

а остальную часть окружности — через L''.

Пусть на L' заданы компоненты смещения, а на L'' — компоненты напряжения.

Так как решение задачи для случая, когда внешние напряжения заданы вдоль всей границы, нами уже получено, то мы можем свести рассматриваемую смешанную задачу к случаю, когда на участках $L_k = a_k b_k$ заданы смещения, а остальная часть границы свободна от внешних напряжений [1]).

[1]) Легко также получить решение непосредственно для общего случая (см. замечание в конце настоящего параграфа).

1. Решение смешанной задачи для круга. Рассмотрим сперва случай, когда область, занятая телом, есть S^+, т. е. круг, ограниченный окружностью L.

Тогда граничное условие принимает вид:

$$u^+ + iv^+ = g(t) \quad \text{на } L', \tag{1}$$

$$\widehat{rr}^+ + i\widehat{r\vartheta}^+ = 0 \quad \text{на } L'', \tag{2}$$

где $g(t)$ — заданная на L' функция. Мы будем предполагать, что производная $g'(t)$ этой функции удовлетворяет условию H.

На основании формулы (15) § 121 легко получаем из условия (1):

$$\varkappa\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2\mu g'(t) \quad \text{на } L', \tag{3}$$

где

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = -ie^{-i\vartheta}\frac{dg}{d\vartheta}. \tag{4}$$

Условие же (2) сводится, как уже было замечено выше, к условию $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0$ на L'', выражающему, что функция $\Phi(z)$ голоморфна на всей плоскости, разрезанной вдоль L'.

Таким образом, задача определения $\Phi(z)$ сводится к нахождению ограниченного на бесконечности решения задачи, рассмотренной нами в § 110.

В нашем случае постоянная, обозначенная в § 110 через g, равна $-\frac{1}{\varkappa}$, а функция

$$f(t) = \frac{2\mu}{\varkappa} g'(t).$$

Согласно формуле (5) § 110

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{1}{\varkappa}\right) = -\frac{\ln(-\varkappa)}{2\pi i} = -\frac{\ln\varkappa}{2\pi i} + \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\gamma = \frac{1}{2} + i\beta,$$

где

$$\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{5}$$

Поэтому в нашем случае согласно формуле (2) § 110

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}, \tag{6}$$

где под $X_0(z)$ подразумевается ветвь, такая, что при больших $|z|$

$$X_0(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{\alpha_{-n-1}}{z^{n+1}} + \cdots \tag{7}$$

Применяя теперь формулу (18) § 110 и принимая во внимание, что функция $\Phi(z)$ должна быть ограничена на бесконечности, получаем:

$$\Phi(z) = \frac{\mu X_0(z)}{\pi i \varkappa} \int_{L'} \frac{g'(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) P_n(z), \tag{8}$$

где $P_n(z)$ — полином степени не выше n:

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n. \tag{9}$$

Остается определить постоянные C_0, C_1, . . ., C_n так, чтобы были удовлетворены все требования, вытекающие из постановки исходной задачи. Во-первых, следует удовлетворить условиям (12) § 121, а во-вторых, требованию, чтобы выполнялось граничное условие (1), а не только условие (3), полученное из предыдущего дифференцированием по ϑ. Последнее можно заменить требованием, чтобы условие (1) выполнялось с точностью до постоянной, одной и той же для всех L_k, ибо тогда можно удовлетворить условию (1) и точно за счет подбора произвольной постоянной в правой части формулы (3) § 121. Легко видеть, что последнее требование может быть выражено равенствами:

$$\int_{b_k a_{k+1}} [\varkappa \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)]\,dt_0 = 2\mu [g(a_{k+1}) - g(b_k)], \tag{10}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots\ n,\ a_{n+1} = a_1),$$

где под $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ следует подразумевать выражения, получаемые из формулы (8). Так как на дугах $b_k a_{k+1}$ имеем $\Phi^+(t_0) = \Phi^-(t_0)$, то предыдущие условия дают:

$$(\varkappa + 1) \int_{b_k a_{k+1}} \Phi_0(t_0)\,dt_0 + \sum_{j=0}^{n} A_{kj} C_j = 2\mu [g(a_{k+1}) - g(b_k)], \tag{11}$$

где

$$\Phi_0(t_0) = \frac{\mu X_0(t_0)}{\pi i \varkappa} \int_{L'} \frac{g'(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-t_0)}, \tag{12}$$

$$A_{kj} = (\varkappa + 1) \int_{b_k a_{k+1}} X_0(t)\, t^{n-j}\,dt. \tag{13}$$

Итак, мы получили n линейных уравнений относительно $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Остается удовлетворить условиям (12) § 121. Легко показать, что второе из этих условий есть следствие уже полученных условий (11). Действительно, из условий (11), эквивалентных условиям (10), следует, как легко видеть, что [1])

$$\int_L [\varkappa \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)]\,dt_0 = 0.$$

[1]) Следует иметь в виду, что в силу условия (3)

$$\int_{a_k b_k} [\varkappa \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)]\,dt_0 = 2\mu [g(b_k) - g(a_k)].$$

Но вследствие того, что $\Phi(z)$ голоморфна в S^+, интеграл от первого слагаемого равен нулю; следовательно,

$$\int_L \Phi^-(t_0)\,dt_0 = 0,$$

а это как раз и означает, что коэффициент B_1 в разложении $\Phi(z)$ по убывающим степеням z вблизи бесконечно удаленной точки равен нулю.

Нам, таким образом, остается выразить первое из условий (12) § 121, которое можно записать и так:

$$\Phi(0) + \overline{\Phi(\infty)} = 0,$$

откуда следует на основании формулы (8):

$$\overline{C}_0 + X_0(0)\,C_n + \frac{\mu X_0(0)}{\pi i \varkappa}\int_{L'} \frac{g'(t)}{X_0^+(t)}\,\frac{dt}{t} = 0. \tag{14}$$

В конечном счете мы имеем $n+1$ линейных уравнений (11) и (14) для определения постоянных $C_0, C_1, \ldots, C_n$ или, лучше сказать, систему $2n+2$ линейных уравнений для определения действительных и мнимых частей этих постоянных.

Остается показать, что полученная система всегда разрешима. Для этого в свою очередь достаточно показать, что однородная система, получающаяся при $g(t) = \text{const}$, не имеет решений, кроме $C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0$. Это же последнее есть простое следствие из теоремы о единственности решения смешанной задачи.

2. Решение смешанной задачи для плоскости с круговым отверстием получается совершенно аналогично предыдущему [1]). В этом случае граничные условия принимают вид:

$$u^- + iv^- = g(t) \quad \text{на } L', \tag{15}$$

$$\widehat{rr}^- + i\widehat{r\vartheta}^- = 0 \quad \text{на } L''; \tag{16}$$

из условия (15), на основании формулы (15) § 121, следует:

$$\Phi^+(t) + \varkappa\Phi^-(t) = 2\mu g'(t), \tag{17}$$

а из условия (16): $\Phi^+ - \Phi^- = 0$ на L'', как и в предыдущем случае.

На этот раз требуется найти решение $\Phi(z)$, ограниченное на бесконечности (как и в предыдущем случае) и имеющее в точке $z=0$ полюс не выше второго порядка, как то следует из формулы (13) § 121.

Мы будем считать заданными значения компонент напряжения и вращения на бесконечности, т. е. значения постоянных Γ, Γ', входящих в формулы (5), (6) § 121, а также главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к L'.

---

[1]) Как было уже упомянуто (примечание на стр. 447), решение для этого случая (при частном предположении $n=1$) было опубликовано Б. Л. Минцбергом [1] в несколько более сложном виде, чем здесь.

Для решения задачи (17) применимы, как и в предыдущем случае, результаты § 110. На этот раз $f(t) = 2\mu g'(t)$ и

$$\gamma = \frac{\ln(-\varkappa)}{2\pi i} = \frac{\ln\varkappa}{2\pi i} + \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\gamma = \frac{1}{2} - i\beta,$$

где β обозначает то же, что и выше:

$$\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}.$$

В нашем случае

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}, \tag{18}$$

где подразумевается ветвь, удовлетворяющая условию (7); общее решение задачи (17), удовлетворяющее указанным выше условиям, дается формулой [§ 110, формула (26)]

$$\Phi(z) = \frac{\mu X_0(z)}{\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \left\{\frac{D_2}{z^2} + \frac{D_1}{z} + P_n(z)\right\} X_0(z), \tag{19}$$

где $P_n(z)$ — полином степени не выше n, а D_1, D_2 — постоянные. Эти постоянные сразу определяются из условия [§ 121, формула (13)], что вблизи точки $z = 0$

$$X_0(z)\left\{\frac{D_2}{z^2} + \frac{D_1}{z}\right\} = \frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + O(1). \tag{20}$$

Так же сразу определяются коэффициенты C_0 и C_1 при z^n и z^{n-1} полинома $P_n(z)$ из условия [§ 121, формула (5)], что при больших $|z|$

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \tag{21}$$

в частности $C_0 = \Gamma$. Остальные коэффициенты $C_2, \ldots, C_n$ определяются из условий, вполне аналогичных условиям (10). Легко видеть, что требование однозначности смещений будет при этом удовлетворено.

Замечание. Мы считали, что часть L'' границы свободна от внешних напряжений. Легко, однако, сразу написать решение и в случае, когда эта часть подвержена действию произвольно заданной нагрузки; для этого достаточно воспользоваться сказанным в § 111 (ср. замечание в конце § 114).

§ 123а. Пример[1]. Пусть к дуге $L' = ab$ кругового отверстия радиуса 1 приложен жесткий штамп, имеющий форму дуги окружности того же

[1]) Этот пример приведен в названной выше статье Б. Л. Минцберга [1]. Автор исходит из полученной им общей формулы, более сложной, чем приведенная в предыдущем параграфе; поэтому ему приходится вычислять некоторые интегралы, тогда как по способу, изложенному в тексте, решение получается почти без всяких вычислений. Так же, почти без вычислений, можно решить и другой пример, приведенный в названной статье.

радиуса, неподвижно сцепленный с упругим телом и вдавливаемый нормальной силой величины P_0, приложенной симметрично. Предполагается, что напряжения и вращение на бесконечности равны нулю.

Будем считать, что середина дуги ab находится на положительной части оси Oy и что, следовательно, $X = 0$, $Y = P_0$. В нашем случае $n = 1$, $g(t) = \text{const}$, $g'(t) = 0$, $\Gamma = \Gamma' = 0$. Поэтому формула (19) § 123 дает сразу:

$$\Phi(z) = X_0(z)\left\{C_0 z + C_1 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}\right\},$$

где

$$X_0(z) = (z-a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-b)^{-\frac{1}{2}-i\beta}$$

при условии $\lim\limits_{z\to\infty} z\, X_0(z) = 1$.

Из условия (20) § 123 следует, если принять во внимание, что $\Gamma' = 0$, $X + iY = P_0$:

$$D_2 = 0, \qquad D_1 X_0(0) = \frac{i\varkappa P_0}{2\pi(\varkappa+1)},$$

а из условия (21) § 123, если принять во внимание, что $\Gamma = 0$ и что при больших $|z|$ имеем $X_0(z) = z^{-1} + O(1)$:

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = -\frac{iP_0}{2\pi(\varkappa+1)}.$$

Легко, далее, установить, если проследить за изменением аргументов $(z-a)$ и $(z-b)$ при переходе точки z из положения, удаленного в направлении Ox, в положение $z = 0$, что

$$X_0(0) = ie^{\omega\beta},$$

где ω — центральный угол, соответствующий дуге ab, и, следовательно,

$$D_1 = \frac{\varkappa P_0 e^{-\omega\beta}}{2\pi(\varkappa+1)}.$$

Внося полученные значения постоянных в выражение для $\Phi(z)$, получаем окончательно:

$$\Phi(z) = \frac{P_0}{2\pi(\varkappa+1)}(z-a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z-b)^{-\frac{1}{2}-i\beta}\left\{\frac{\varkappa e^{-\omega\beta}}{z} - i\right\}.$$

Таким образом, задача решена.

§ 124. Граничные задачи для плоскости, разрезанной вдоль дуг окружности [1]. Пусть упругое тело представляет собой плоскость, разрезанную вдоль дуг $L_1 = a_1 b_1, \ldots, L_k = a_k b_k$ одной и той же окружности. Мы будем считать, как выше, что, обходя окружность против часовой

[1]) Решение этих задач, насколько известно автору, никем еще опубликовано не было (примечание к третьему изданию).

стрелки, мы встречаем концы дуг в последовательности a_1, b_1, . . ., a_n, b_n, a_1. Совокупность этих дуг мы обозначим теперь через L, так что

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n.$$

Радиус окружности мы примем равным единице, а начало координат поместим в центре.

Решение граничных задач для рассматриваемого тела можно легко получить совершенно аналогично случаю плоскости с прямолинейными щелями (§ 120).

Будем исходить из формул (1) — (3) § 121, в которых на этот раз функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определены на всей плоскости, разрезанной вдоль L, и введем вместо $\Psi(z)$ функцию $\Omega(z)$, определенную следующим образом:

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\overline{\Phi'}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{1}$$

откуда

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2}\Phi(z) - \frac{1}{z^2}\overline{\Omega}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\Phi'(z). \tag{2}$$

Из формулы (1) следует, что функция $\Omega(z)$ голоморфна всюду на разрезанной вдоль L плоскости (включая точку $z = \infty$), кроме точки $z = 0$, где она имеет полюс не выше второго порядка. А именно, легко видеть на основании формул (5), (6) § 121, что в окрестности точки $z = 0$

$$\Omega(z) = -\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2} - \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + \text{голоморфная функция}^{1}). \tag{3}$$

Далее, для того, чтобы функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (2), была голоморфна в окрестности точки $z = 0$, функция $\Omega(z)$ должна удовлетворять некоторым условиям, а именно: если

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= A_0 + A_1 z + \ldots \quad \text{при } |z| < 1, \\ \Omega(z) &= B_0 + \frac{B_1}{z} + \ldots \quad \text{при } |z| > 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то для голоморфности $\Psi(z)$ вблизи точки $z = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_0 = \overline{B}_0, \qquad B_1 = 0. \tag{5}$$

Напомним еще, что при больших $|z|$

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{6}$$

Так как компоненты напряжения и смещения выражаются через функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, то они могут быть выражены также через

[1]) Если условие (3) выполнено, то, как легко проверить, функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (2), будет удовлетворять условию (6) § 121.

функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Мы выпишем только формулы:

$$\widehat{rr}+i\widehat{r\vartheta}=\Phi(z)+\Omega\left(\frac{1}{z}\right)+\bar{z}\left(\bar{z}-\frac{1}{z}\right)\overline{\Psi(z)} \tag{7}$$

и

$$2\mu(u'+iv')=iz\left[\varkappa\Phi(z)-\Omega\left(\frac{1}{z}\right)-\bar{z}\left(\bar{z}-\frac{1}{z}\right)\overline{\Psi(z)}\right], \tag{8}$$

где под $\Psi(z)$ следует подразумевать выражение (2) и

$$u'=\frac{\partial u}{\partial\vartheta}, \quad v'=\frac{\partial v}{\partial\vartheta}.$$

Мы будем считать в дальнейшем, что для всех точек $t=e^{i\vartheta}$ на L кроме концов a_k, b_k функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ непрерывно продолжимы на L слева и справа и что

$$\lim_{z\to t}(1-r)\Psi(z)=0. \tag{9}$$

Кроме того, мы будем считать, что вблизи любого конца c

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad |\Omega(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha<1. \tag{10}$$

Приведенные здесь формулы дают возможность решить граничные задачи, решенные в § 120 для случая прямолинейных щелей, при помощи способа, совершенно аналогичного примененному там способу.

Ввиду полной аналогии мы ограничимся решением первой основной задачи, когда на обеих сторонах L заданы внешние напряжения, т. е. заданы значения $\widehat{rr}^{+}+i\widehat{r\vartheta}^{+}$ и $\widehat{rr}^{-}+i\widehat{r\vartheta}^{-}$ на L.

Кроме того, мы будем считать заданными значения напряжений на бесконечности, т. е. значения постоянных B и Γ', определяемых формулами (8) § 121. Вращение на бесконечности мы можем считать равным нулю, т. е. считать, что $C=0$, и поэтому $\Gamma=\overline{\Gamma}=B$.

На основании формул (7) и (9) будем иметь:

$$\Phi^{+}(t)+\Omega^{-}(t)=\widehat{rr}^{+}+i\widehat{r\vartheta}^{+}, \quad \Phi^{-}(t)+\Omega^{+}(t)=\widehat{rr}^{-}+i\widehat{r\vartheta}^{-} \quad \text{на} \quad L, \tag{11}$$

откуда, складывая и вычитая, находим:

$$[\Phi(t)+\Omega(t)]^{+}+[\Phi(t)+\Omega(t)]^{-}=2p(t) \tag{12}$$

$$[\Phi(t)-\Omega(t)]^{+}-[\Phi(t)-\Omega(t)]^{-}=2q(t) \tag{13}$$

на L,

где $p(t)$ и $q(t)$ — заданные на L функции:

$$\begin{aligned} p(t)&=\frac{1}{2}[\widehat{rr}^{+}+\widehat{rr}^{-}]+\frac{i}{2}[\widehat{r\vartheta}^{+}+\widehat{r\vartheta}^{-}],\\ q(t)&=\frac{1}{2}[\widehat{rr}^{+}-\widehat{rr}^{-}]+\frac{i}{2}[\widehat{r\vartheta}^{+}-\widehat{r\vartheta}^{-}]; \end{aligned} \tag{14}$$

мы будем считать, что эти функции удовлетворяют условию H на L.

Принимая во внимание, что функция $\Phi(z)-\Omega(z)$ ограничена на бесконечности и имеет согласно формуле (3) в точке $z=0$ полюс с главной

частью

$$\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2}+\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z},$$

получаем из формулы (13) на основании формулы (5) § 108:

$$\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{q(t)\,dt}{t-z}+D_0+\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z}+\frac{\overline{\Gamma'}}{z^2},$$

где D_0 — постоянная.

Аналогично из формулы (12) получаем на основании формулы (26) § 110 [1]):

$$\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi i\mathrm{X}(z)}\int\limits_L\frac{\mathrm{X}(t)\,p(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\mathrm{X}(z)}\left\{P_n(z)+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\},$$

где $\mathrm{X}(z)$ обозначает одну из ветвей функции

$$\mathrm{X}(z)=\sum_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}(z-b_k)^{\frac{1}{2}},\tag{15}$$

однозначную на разрезанной вдоль L плоскости, а через $\mathrm{X}(t)$ для упрощения письма обозначено значение $\mathrm{X}^+(t)$, принимаемое функцией $\mathrm{X}(z)$ на левой стороне L; далее, D_1 и D_2 обозначают постоянные, а

$$P_n(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\ldots+C_n\tag{16}$$

— полином степени не выше n.

Таким образом,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i\mathrm{X}(z)}\int\limits_L\frac{\mathrm{X}(t)\,p(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{q(t)\,dt}{t-z}+$$

$$+\frac{1}{2\mathrm{X}(z)}\left\{P_n(z)+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\}+\frac{D_0}{2}+\frac{\varkappa(X+iY)}{4\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z}+\frac{\overline{\Gamma'}}{2z^2},\tag{17}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i\mathrm{X}(z)}\int\limits_L\frac{\mathrm{X}(t)\,p(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{q(t)\,dt}{t-z}+$$

$$+\frac{1}{2\mathrm{X}(z)}\left\{P_n(z)+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\}-\frac{D_0}{2}-\frac{\varkappa(X+iY)}{4\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z}-\frac{\overline{\Gamma'}}{2z^2}.\tag{18}$$

Постоянные D_1 и D_2 сразу определяются из условия (3), которое на основании формулы (18) принимает вид:

$$\frac{1}{2\mathrm{X}(z)}\left\{\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\}=-\frac{\varkappa(X+iY)}{4\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{z}-\frac{\overline{\Gamma'}}{2z^2}+O(1)\tag{19}$$

вблизи точки $z=0$. Если постоянные D_1 и D_2 удовлетворяют этому условию (которое определяет их однозначно), то правая часть формулы (17) будет голоморфна вблизи точки $z=0$.

---

[1]) В нашем случае $\mathrm{X}_0(z)=1/\mathrm{X}(z)$, где $\mathrm{X}(z)$ дается формулой (15) настоящего параграфа.

Остальные постоянные, входящие в предыдущие формулы, а именно постоянные

$$D_0,\ C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n, \tag{20}$$

числом $n+2$, определятся из следующих условий: из условия, что $\Phi(\infty)=\Gamma$, из условий (5) и из условий однозначности смещений; последние условия (числом n) выражаются аналогично случаю прямолинейных щелей (§ 120, п. 2).

Легко показать, основываясь на теореме единственности, что эти условия однозначно определяют искомые постоянные [1]).

Мы предоставляем читателю составить решение второй основной задачи, а также смешанной задачи, когда на левом крае заданы внешние напряжения, а на правом — смещения.

§ 124а. Пример. Растяжение плоскости с разрезом вдоль дуги окружности. Пусть упругая плоскость разрезана вдоль дуги ab окружности, пусть края разреза свободны от внешних напряжений и пусть заданы напряжения на бесконечности, т. е. заданы постоянные Γ и Γ', причем $\Gamma=\overline{\Gamma}$ (что обозначает отсутствие вращения на бесконечности).

Мы примем по-прежнему радиус окружности равным единице и поместим начало координат в центре, направив ось Ox к середине дуги ab так, что если 2θ — центральный угол, соответствующий дуге ab, то

$$a=e^{-i\theta},\quad b=e^{i\theta}. \tag{1}$$

В нашем случае $n=1$, $p(t)=q(t)=0$, $X=Y=0$. По формулам (17) и (18) § 124 имеем:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2X(z)}\left\{C_0z+C_1+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\}+\frac{D_0}{2}+\frac{\overline{\Gamma'}}{2z^2}, \tag{2}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2X(z)}\left\{C_0z+C_1+\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right\}-\frac{D_0}{2}-\frac{\overline{\Gamma'}}{2z^2}, \tag{3}$$

где в нашем случае

$$X(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}=\sqrt{z^2-2z\cos\theta+1}. \tag{4}$$

---

[1]) Число названных условий для определения постоянных (20) равно $n+3$, т. е. на единицу больше, чем число искомых величин. Это происходит оттого, что мы считали величину $X+iY$, входящую в формулу (3), вычисленной заранее по заданным граничным напряжениям. Ее, однако, можно считать не определенной заранее, и тогда она определится из перечисленных условий вместе с постоянными (20). Точно так же мы могли бы считать не определенным заранее коэффициент при z^{-2} в формуле (3), но тогда к перечисленным условиям надо было бы добавить условие $\Psi(\infty)=\Gamma'$.

Мы будем считать, что $z^{-1}\,\mathrm{X}(z) \to 1$ при $z \to \infty$. Легко видеть, что при этом условии $\mathrm{X}(0) = -1$, и, следовательно, вблизи точки $z = 0$

$$\frac{1}{\mathrm{X}(z)} = -\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\left(1+\frac{z}{2a}+\frac{3}{8}\frac{z^2}{a^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{z}{2b}+\frac{3}{8}\frac{z^2}{b^2}+\ldots\right) =$$

$$= -1-z\cos\theta-\frac{1+3\cos 2\theta}{4}z^2+\ldots \qquad (5)$$

Поэтому при малых $|z|$

$$\frac{1}{2\mathrm{X}(z)}\left(\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}\right) = -\frac{D_2}{2z^2}-\frac{D_1+D_2\cos\theta}{2z}-\frac{D_1\cos\theta}{2}-\frac{1+3\cos 2\theta}{8}D_2+\ldots \qquad (6)$$

Условие (19) § 124 дает:

$$D_2 = \overline{\Gamma}', \quad D_1 = -\overline{\Gamma}'\cos\theta. \qquad (7)$$

Для определения постоянных D_0, C_0, C_1 мы можем воспользоваться формулой (6) § 124, которая в нашем случае примет вид:

$$\Phi(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \text{ при больших } |z|, \qquad (8)$$

и условиями (5) § 124. Принимая во внимание, что при больших $|z|$

$$\frac{1}{\mathrm{X}(z)} = \frac{1}{z}+\frac{\cos\theta}{z^2}+\ldots, \qquad (9)$$

получаем на основании формул (2) и (8):

$$C_0 + D_0 = 2\Gamma, \qquad C_1 + C_0\cos\theta = 0. \qquad (а)$$

Второе условие (5) § 124 не дает ничего нового (оно совпадает с последним из предыдущих равенств). Для того же, чтобы выразить первое из упомянутых условий, заметим, что на основании формул (2), (6) и (7)

$$A_0 = \Phi(0) = \frac{C_1}{2\mathrm{X}(0)}-\frac{D_1\cos\theta}{2}-\frac{1+3\cos 2\theta}{8}D_2+\frac{D_0}{2} = -\frac{C_1}{2}+\frac{D_0}{2}+\frac{\overline{\Gamma}'\sin^2\theta}{4}$$

и что на основании формулы (3)

$$B_0 = \Omega(\infty) = \frac{C_0-D_0}{2};$$

поэтому первое из условий (5) § 124 дает:

$$C_0 - D_0 = -\overline{C}_1+\overline{D}_0+\frac{1}{2}\Gamma'\sin^2\theta. \qquad (б)$$

Соотношения (а) и (б) определяют все искомые постоянные, а именно, простые вычисления дают:

$$C_0 = \frac{1}{2}(\Gamma'-\overline{\Gamma}')\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{4\Gamma+(\Gamma'+\overline{\Gamma}')\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}, \qquad (10)$$

$$C_1 = -C_0\cos\theta, \qquad D_0 = 2\Gamma - C_0. \qquad (11)$$

Легко проверить, что условие однозначности смещений соблюдено [1]). Таким образом, задача решена.

[1]) Нам не пришлось им воспользоваться, так как мы использовали другие условия, имеющие следствием однозначность смещений.

В частности, если напряжения на бесконечности сводятся к растягивающему напряжению p в направлении, составляющем угол α с

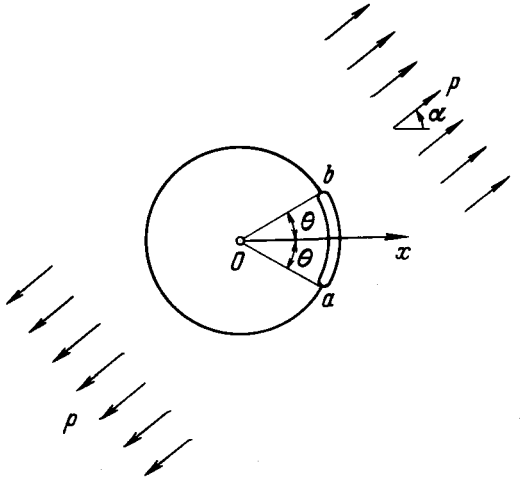


Рис. 56.

осью Ox (рис. 56), то

$$\Gamma = \frac{p}{4}, \qquad \Gamma' = -\frac{p}{2} e^{-2i\alpha}. \tag{12}$$

Если же мы имеем всестороннее растяжение p, то

$$\Gamma = \frac{p}{2}, \qquad \Gamma' = 0. \tag{13}$$

В этом случае

$$D_1 = D_2 = 0, \quad C_0 = \frac{p}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad C_1 = -\frac{p\cos\theta}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}, \quad D_0 = \frac{p\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}, \tag{14}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p}{2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\left\{\frac{z-\cos\theta}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}, \\ \Omega(z) &= \frac{p}{2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\left\{\frac{z-\cos\theta}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В частности, для случая, когда разрез представляет собой полуокружность $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, эти формулы принимают весьма простой вид:

$$\Phi(z) = \frac{p}{3}\left\{\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{1}{2}\right\}, \quad \Omega(z) = \frac{p}{3}\left\{\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-\frac{1}{2}\right\}. \tag{16}$$

IV. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА КРУГ ПРИ ПОМОЩИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Методы решения граничных задач, изложенные в предыдущих отделах, легко распространяются на случай областей, отображаемых на круг при помощи рациональных функций. Мы видели в предыдущей главе, что первая и вторая основные задачи для таких областей легко решаются в замкнутом виде.

Новый способ, излагаемый ниже, приводит к тому же результату, и для получения решения приходится в конечном счете производить примерно такие же выкладки, что и по способу, указанному в предыдущей главе.

Однако способ, излагаемый здесь, позволяет также весьма просто решить и о с н о в н у ю с м е ш а н н у ю з а д а ч у, а также некоторые другие граничные задачи.

§ 125. Преобразование основных формул [1]). Пусть S — конечная или бесконечная область на плоскости z, ограниченная одним простым гладким замкнутым контуром L, и пусть

$$z = \omega(\zeta) \tag{1}$$

— соотношение, отображающее S на круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ; окружность этого круга мы обозначим через γ и в качестве положительного направления на ней выберем направление, обратное движению часовой стрелки.

Функция $\omega(\zeta)$ голоморфна внутри γ, если область S конечна; если область S бесконечна, то функция $\omega(\zeta)$ голоморфна всюду внутри γ, кроме одной лишь точки (соответствующей точке $z = \infty$), где она имеет простой полюс. Не нарушая общности, можно считать, что эта точка расположена в центре γ, т. е. в точке $\zeta = 0$; при этом предположении, которое мы примем,

$$z = \omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \omega_0(\zeta), \tag{1'}$$

где функция $\omega_0(\zeta)$ голоморфна внутри γ, а c — постоянная, отличная от нуля.

Напомним формулы, выражающие компоненты напряжения и смещения в соответствующих криволинейных координатах, через функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ (§ 50):

$$\widehat{\rho\rho} + \widehat{\vartheta\vartheta} = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \tag{2}$$

$$\widehat{\rho\rho} + i\widehat{\rho\vartheta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \frac{\bar{\zeta}^2}{\rho^2\omega'(\zeta)}\{\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)}\,\overline{\Psi(\zeta)}\}, \tag{3}$$

$$2\mu|\omega'(\zeta)|(v_\rho + iv_\vartheta) = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\overline{\omega'(\zeta)}\{\varkappa\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\}, \tag{4}$$

[1]) Результаты, излагаемые в § 125—127, принадлежат И. Н. Карцивадзе [2]; автором настоящей книги внесены некоторые упрощения.

где $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — функции, связанные с $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ соотношениями:

$$\varphi'(\zeta) = \Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta), \qquad \psi'(\zeta) = \Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta). \tag{5}$$

Вместо формулы (4) в большинстве случаев удобнее пользоваться формулой, выражающей компоненты смещения u, v в декартовых координатах:

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \tag{6}$$

Если непосредственно заданы функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, то функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ вполне определены; если же непосредственно заданы функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, то функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ определяются с точностью до произвольных постоянных.

Поэтому в последнем случае формулу (6) можно записать так:

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} + \text{const}, \tag{6'}$$

выделив явно произвольную постоянную.

Будем теперь считать, что $\omega(\zeta)$ — *рациональная функция*, и распространим определение функции $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta| > 1$, положив [1]):

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\omega'(\zeta)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\omega(\zeta)\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \\ + \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{при } |\zeta| > 1. \tag{7}$$

Из предыдущей формулы легко выводим, заменив ζ на $\overline{\zeta}^{-1}$ ($|\overline{\zeta}| = |\zeta| < 1$) и перейдя к сопряженным значениям:

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left\{\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\} - \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta). \tag{8}$$

Последняя формула выражает значения $\Psi(\zeta)$ для $|\zeta| < 1$ (для других значений эта функция нами не определяется) через значения $\Phi(\zeta)$ как для $|\zeta| < 1$, так и для $|\zeta| > 1$.

Мы можем также распространить определение функции $\varphi(\zeta)$ на область $|\zeta| > 1$, поставив условие, чтобы и в этой области имело место соотношение

$$\varphi(\zeta) = \int \Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,d\zeta; \tag{9}$$

интегрируя обе части формулы (7) по ζ, легко получаем, отбрасывая произвольную постоянную:

$$\varphi(\zeta) = -\omega(\zeta)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{при } |\zeta| > 1, \tag{7'}$$

откуда, аналогично предыдущему, выводим:

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi(\zeta) \quad \text{при } |\zeta| < 1. \tag{8'}$$

[1]) Указываемое распространение мы производим так, чтобы значения $\Phi(\zeta)$ слева и справа от γ аналитически продолжали друг друга через участки, соответствующие незагруженным участкам границы L области S, т. е. через участки, на которых $\widehat{\varrho\varrho} = \widehat{\varrho\vartheta} = 0$; при этом мы руководствуемся формулой (3).

Таким образом, мы можем выразить компоненты напряжения и смещения через одну функцию $\Phi(\zeta)$, определенную как при $|\zeta|<1$, так и при $|\zeta|>1$.

Выражение (2) для $\widehat{\varrho\varrho}+\widehat{\vartheta\vartheta}$ остается тем же, а выражение (3) для $\widehat{\varrho\varrho}+i\widehat{\varrho\vartheta}$ можно, как легко видеть, представить следующим образом [1]):

$$\widehat{\varrho\varrho}+i\widehat{\varrho\vartheta}=\Phi(\zeta)-\Phi\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)+\bar\zeta^2\left\{\frac{\omega(\bar\zeta^{-1})}{\omega'(\bar\zeta^{-1})}-\frac{\omega(\zeta)}{\varrho^2\omega'(\zeta)}\right\}\overline{\Phi'(\zeta)}+$$
$$+\bar\zeta^2\overline{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{1}{\omega'(\bar\zeta^{-1})}-\frac{1}{\varrho^2\omega'(\zeta)}\right\}\overline{\Psi(\zeta)}, \qquad (10)$$

где теперь под $\Psi(\zeta)$ следует подразумевать выражение, определяемое формулой (8).

Для компонент смещения u, v будем иметь, заменяя $\psi(\zeta)$ в формуле (6′) выражением (8′):

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(\zeta)+\varphi\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)-\left\{\omega(\zeta)-\omega\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)\right\}\overline{\Phi(\zeta)}+\text{const}. \qquad (11)$$

Напишем здесь же аналогичную формулу:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(\zeta)-\varphi\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)+\left\{\omega(\zeta)-\omega\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)\right\}\overline{\Phi(\zeta)}+\text{const}, \qquad (12)$$

вытекающую из формулы (4) § 50.

В дальнейшем нам понадобится также выражение для $u'+iv'$, где

$$u'=\frac{\partial u}{\partial\vartheta}, \qquad v'=\frac{\partial v}{\partial\vartheta}.$$

Это выражение мы найдем, продифференцировав по ϑ обе части формулы (6), а затем преобразовав полученное выражение подобно тому, как мы преобразовали правую часть формулы (3). Таким образом, легко получим:

$$2\mu(u'+iv')=i\zeta\omega'(\zeta)\left\{\varkappa\Phi(\zeta)+\Phi\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)\right\}-i\varrho^2\omega'(\zeta)\left\{\frac{\bar\zeta\omega(\bar\zeta^{-1})}{\omega'(\bar\zeta^{-1})}-\frac{\omega(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)}\right\}\overline{\Phi'(\zeta)}-$$
$$-i\varrho^2\omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\bar\zeta}{\omega'(\bar\zeta^{-1})}-\frac{1}{\zeta\omega'(\zeta)}\right\}\overline{\Psi(\zeta)}. \qquad (13)$$

При наших обычных условиях функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ голоморфны внутри γ. Нам следует теперь выяснить поведение функции $\Phi(\zeta)$, распространенной формулой (7) на область $|\zeta|>1$, в этой последней области, т. е. вне γ; при этом нам достаточно будет изучить поведение произведения $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)=\varphi'(\zeta)$.

Обратимся для этого к формуле (7), определяющей функцию $\Phi(\zeta)$ при $|\zeta|>1$. Рациональная функция $\omega(\zeta)$ может иметь полюсы в конечном числе точек; все эти точки расположены вне γ, кроме случая, когда

[1]) Для получения формулы (10) мы поступаем так: вычитаем из правой части (3) функцию $\Phi\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)$ и прибавляем ту же функцию, но замененную ее выражением, получаемым из формулы (8), после предварительного перехода к сопряженным значениям.

область S бесконечна и когда, следовательно, $\omega(\zeta)$ имеет полюс первого порядка при $\zeta = 0$.

Обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ полюсы функции $\omega(\zeta)$, расположенные вне γ, не считая точки $\zeta = \infty$, которая также может быть полюсом. Если $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_r - 1$ — порядки этих полюсов, то в тех же точках функция $\omega'(\zeta)$ будет иметь полюсы порядков $m_1, m_2, \ldots, m_r$; далее, если $m + 1$ — порядок полюса функции $\omega(\zeta)$ на бесконечности, то $\omega'(\zeta)$ будет иметь на бесконечности полюс порядка m.

Таким образом, функция $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ будет иметь полюсы порядков не выше $m_1, m_2, \ldots, m_r$ в точках $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$; эти полюсы происходят от первых двух слагаемых правой части формулы (7), ибо, как легко видеть, третье слагаемое представляет собой голоморфную вне γ функцию, включая бесконечно удаленную точку. Кроме того, точка $\zeta = \infty$ может быть полюсом порядка не выше m.

Заметим еще, что в случае бесконечной области функция $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ может иметь внутри γ, а именно в точке $\zeta = 0$, полюс не выше второго порядка.

Таким образом, нам *заранее известны все возможные полюсы функции* $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ и *максимальные их порядки.*

Заметим, наконец, что данной функции $\Phi(\zeta)$, определенной как внутри, так и вне γ и имеющей полюсы указанного типа, не всегда соответствует функция $\Psi(\zeta)$, голоморфная, как это требуется нашими условиями, внутри γ. А именно, формула (8) показывает, что функция $\Psi(\zeta)$, соответствующая данной функции $\Phi(\zeta)$, может иметь полюсы в точках

$$\zeta_1' = \frac{1}{\bar{\zeta}_1}, \ldots, \zeta_r' = \frac{1}{\bar{\zeta}_r},$$

а также в точке $\zeta = 0$, расположенных внутри γ.

Условия голоморфности функции $\Psi(\zeta)$ вблизи указанных точек [1]) дают нам известное (конечное) число линейных соотношений, связывающих некоторое (конечное) число первых коэффициентов разложений

[1]) При этом следует иметь в виду, что главная часть полюса произведения

$$\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

в точке ζ_k' может быть сразу получена из главной части полюса функции

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)$$

в точке ζ_k. А именно, если вблизи точки ζ_k

$$\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) = \frac{B_l}{(\zeta-\zeta_k)^l} + \cdots + \frac{B_1}{\zeta-\zeta_k} + \text{голоморфная функция},$$

то вблизи точки $\zeta_k' = \bar{\zeta}_k^{-1}$

$$\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{(-1)^l \bar{B}_l \zeta_k'^l \zeta^l}{(\zeta-\zeta_k')^l} + \cdots - \frac{\bar{B}_1 \zeta_1' \zeta}{\zeta-\zeta_k'} + \text{голоморфная функция}.$$

Аналогично для полюса в точке $\zeta = 0$.

функции $\Phi(\zeta)$ вблизи точек $\zeta_1', \ldots, \zeta_r'$:

$$\Phi(\zeta) = A_{k0} + A_{k1}(\zeta - \zeta_k') + A_{k2}(\zeta - \zeta_k')^2 + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

с коэффициентами главных частей полюсов функции $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ в точках $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, а также известное число аналогичных линейных соотношений, соответствующих точке $\zeta = 0$.

Этих соотношений мы выписывать не будем, а обозначим их кратко через

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_N = 0. \tag{14}$$

Их всегда легко составить для каждой конкретной области, т. е. для каждой конкретной функции $\omega(\zeta)$.

Особенно просто составляются эти условия в случае, если $\omega(\zeta)$ есть полином:

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_{m+1}\zeta^{m+1}, \tag{15}$$

когда область S конечна, или

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + c_1\zeta + \ldots + c_{m+1}\zeta^{m+1}, \tag{16}$$

когда область S бесконечна. В этом случае функция $\Phi(\zeta)\omega'(\zeta)$ может иметь полюсы лишь в точках $\zeta = \infty$ и $\zeta = 0$ (в последней лишь тогда, когда область S бесконечна).

Заметим еще, что в случае, когда область S бесконечна, будем иметь в окрестности точки $\zeta = 0$ [ср. формулы (14) и (15) § 50]:

$$\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta) = -\frac{\Gamma c}{\zeta^2} + \frac{X + iY}{2\pi(\varkappa + 1)}\frac{1}{\zeta} + O(1), \tag{17}$$

$$\Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta) = -\frac{\Gamma' c}{\zeta^2} - \frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(\varkappa + 1)}\frac{1}{\zeta} + O(1), \tag{18}$$

где c — постоянная, фигурирующая в формуле (1′), и при наших обычных обозначениях:

$$\Gamma = B + iC = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) + \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{\varkappa + 1}\,i,$$

$$\Gamma' = B' + iC' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\,e^{-2i\alpha}, \tag{19}$$

а X, Y обозначают, как всегда, компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к границе S.

В дальнейшем мы будем считать, что функция $\Phi(\zeta)$, определенная при $|\zeta| < 1$ и при $|\zeta| > 1$, непрерывно продолжима на все точки σ окружности γ как слева, так и справа, за исключением, быть может, конечного числа точек $\gamma_k = e^{i\vartheta_k}$, вблизи которых

$$|\Phi(\zeta)| < \frac{\text{const}}{|\zeta - \gamma_k|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1; \tag{20}$$

мы будем считать, кроме того, что для всех точек $\sigma = e^{i\vartheta}$ окружности γ, кроме, быть может, тех же точек $\gamma_k = e^{i\vartheta_k}$,

$$\lim_{\zeta \to \sigma} (1-\rho)\,\Phi'(\zeta) = 0 \quad (\zeta = \rho e^{i\vartheta}); \tag{21}$$

тогда на основании формулы (8) будем иметь также, при тех же возможных исключениях:

$$\lim_{\zeta \to \sigma} (1-\rho)\,\Psi(\zeta) = 0. \tag{22}$$

Наличие точек γ_k мы будем всегда явно оговаривать; отсутствие оговорки будет означать, что таких точек нет.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть на основании формул (21) и (22), что при $\zeta \to \sigma$ два последних слагаемых в правых частях формул (10) и (13) стремятся к нулю, за исключением, быть может, значений $\sigma = \gamma_k$.

З а м е ч а н и е 2. Иногда, в случае бесконечной области S, удобнее пользоваться отображением на область $|\zeta| > 1$, а не на круг $|\zeta| < 1$; но в этом нет ничего принципиального. Читатель легко выяснит сам те видоизменения некоторых предыдущих формул, которые при этом произойдут.

§ 126. Решение первой и второй основных задач. Эти задачи для областей рассматриваемого вида были уже решены нами в предыдущей главе. Формулы, приведенные в предыдущем параграфе, дают также возможность весьма просто решить эти задачи. Например, в случае первой основной задачи, когда граничное условие имеет вид

$$\widehat{\rho\rho^+} + i\widehat{\rho\vartheta^+} = N(\sigma) + iT(\sigma), \tag{1}$$

где $N(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — заданные функции точки σ окружности γ, а именно: заданные внешние нормальное и касательное напряжения в точке t контура L, соответствующей точке σ, из формулы (10) предыдущего параграфа выводим:

$$\Phi^+(\sigma) - \Phi^-(\sigma) = N(\sigma) + iT(\sigma). \tag{2}$$

Таким образом, для определения функции $\Phi(\zeta)$ мы получили точно такое же граничное условие, как и в случае, когда область S — круг (§ 122, п. 1). Существенная разница лишь в том, что на этот раз искомая функция $\Phi(\zeta)$ может иметь полюсы вне γ, и это последнее обстоятельство надо учесть при составлении общего решения граничной задачи (2).

С практической точки зрения удобнее несколько видоизменить условие (2), а именно представить его в виде

$$[\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^+ - [\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^- = [N(\sigma) + iT(\sigma)]\,\omega'(\sigma) \tag{2'}$$

и в качестве искомой функции взять функцию $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$. Распределение полюсов этой последней было указано в предыдущем параграфе; напомним, что в случае, когда область S бесконечна, функция $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ может иметь полюс (не выше второго порядка) также внутри γ, а именно в точке $\zeta = 0$.

Общее решение задачи (2′) имеет вид

$$\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{N(\sigma)+iT(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+R(\zeta), \tag{3}$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, общее выражение которой легко написать, так как нам известны все возможные полюсы функции $\Phi(\zeta)\,\omega'(\zeta)$ и их максимальные порядки.

Неопределенные постоянные коэффициенты, входящие в выражение $R(\zeta)$, определятся из следующих дополнительных условий:

1°. Функция $\Psi(\zeta)$, определяемая формулой (8) § 125, должна быть голоморфной внутри γ.

2°. В случае, когда область S бесконечна, напряжения должны иметь заданные значения на бесконечности, а смещения должны быть однозначными.

Условие 1° выражается соотношениями (14) § 125, представляющими собой линейные алгебраические уравнения относительно действительных и мнимых частей искомых коэффициентов; аналогичными уравнениями выразится условие 2°. Эти уравнения полностью определяют искомые постоянные, за исключением одной действительной постоянной в соответствии с тем, что функция $\Phi(\zeta)$ определяется лишь с точностью до слагаемого вида iC, где C — произвольная действительная постоянная. В случае конечной области упомянутые уравнения будут совместимы лишь при условии, что главный вектор и главный момент внешних усилий равны нулю.

Высказанные утверждения непосредственно вытекают из теоремы единственности и существования решения [1]).

Совершенно аналогично решается и вторая основная задача, сводящаяся на основании формулы (13) § 125 к определению функции $\Phi(\zeta)$ по граничному условию

$$[\varkappa\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^{+}+[\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^{-}=2\mu g'(\sigma), \tag{4}$$

где

$$g'(\sigma)=\frac{dg}{d\sigma}=-ie^{-i\vartheta}\frac{dg}{d\vartheta}, \tag{5}$$

причем $g(\sigma)=g_1+ig_2$, где g_1 и g_2 — граничные значения компонент u, v смещения.

Вычисления, которые приходится производить при решении первой и второй основных задач по указанному здесь способу, приводят к тем же примерно вычислениям, что и по методу, изложенному в предыдущей главе. Поэтому мы на подробностях останавливаться не будем, тем более что первая и вторая основные задачи представляют собой частные случаи

[1]) Проведя более детальный анализ, можно доказать эти утверждения, не опираясь на теорему существования, а используя лишь теорему единственности (ср. замечание 2 в конце § 84); это сделано в цитированной статье И. Н. Карцивадзе.

основной смешанной задачи, которая будет более подробно рассмотрена в следующем параграфе.

Замечание 1. Условия 2°, относящиеся к случаю первой основной задачи для бесконечной области S, выражаются соотношениями (17), (18) § 125, в которых следует считать заданными значения действительной части B постоянной Г и постоянную Г′, определяемые значениями компонент напряжения на бесконечности. Постоянные X и Y можно оставить неопределенными: они сами определятся из остальных условий, названных выше. Однако можно их заранее вычислить по заданным граничным значениям напряжений; тогда, требуя, чтобы функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ удовлетворяли условиям (17), (18), мы получим лишние соотношения, которыми можно заменить некоторые из других менее простых соотношений между искомыми величинами.

В случае второй основной задачи для бесконечной области постоянные X и Y следует считать заданными, как и постоянные Г, Г′.

Замечание 2. При решении первой и второй основных задач можно, конечно, исходить соответственно из формул (12) и (11) § 125. Это особенно удобно в случае конечной области, ибо тогда искомая функция $\varphi(\zeta)$ однозначна. Но и в случае бесконечной области многозначность искомой функции легко устранить путем выделения логарифмического члена, подобно тому, как мы поступали в предыдущей главе.

§ 127. Решение основной смешанной задачи [1]. Перейдем теперь к решению основной смешанной задачи. Пусть $L_1 = a_1b_1$, $L_2 = a_2b_2$, ... , $L_n = a_nb_n$ — дуги контура L, ограничивающего упругое тело S, обозначенные так, что, проходя L в положительном направлении (оставляющем S слева), точки a_1, b_1, . . ., a_n, b_n встречаются в указанной последовательности. Пусть $L' = L_1 + \ldots + L_n$, а L'' — остальная часть контура L.

Пусть на L' заданы значения смещений, а на L'' — внешние напряжения. Не нарушая общности, мы можем считать, что часть L'' свободна от внешних напряжений [2].

Обозначим через α_k, β_k точки окружности γ, соответствующие точкам a_k, b_k контура L, через γ' — часть окружности, соответствующую L', а через γ'' — остальную ее часть. Точки α_k, β_k будут играть роль точек γ_k, о которых говорилось в конце § 125.

Тогда граничные условия задачи на основании формул (10) и (13) § 125 напишутся так:

$$\Phi^+(\sigma) - \Phi^-(\sigma) = 0 \text{ на } \gamma'', \tag{1}$$

$$[\Phi(\sigma)\omega'(\sigma)]^+ + \frac{1}{\varkappa}[\Phi(\sigma)\omega'(\sigma)]^- = f(\sigma) \text{ на } \gamma', \tag{2}$$

---

[1] Решение, аналогичное (в смысле характера результата) приводимому здесь, но более сложное, было впервые дано Д. И. Шерманом [10].

[2] Легко непосредственно решить задачу и в общем случае (см. замечание в конце настоящего параграфа).

где, если g_1, g_2 обозначают граничные значения компонент u, v смещения, заданные на L',

$$f(\sigma) = -\frac{2\mu i}{\varkappa}\bar{\sigma}\left\{\frac{dg_1}{d\vartheta} + i\frac{dg_2}{d\vartheta}\right\} = \frac{2\mu}{\varkappa}\left\{\frac{dg_1}{d\sigma} + i\frac{dg_2}{d\sigma}\right\}; \tag{3}$$

мы будем считать, что $f(\sigma)$ удовлетворяет условию H на γ'.

Формула (1) показывает, что часть γ'' границы не является линией скачков для функции $\Phi(\zeta)$, т. е. что функция $\Phi(\zeta)$ голоморфна на разрезанной вдоль γ' плоскости, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы; то же, разумеется, относится к функции $\Phi(\zeta)\omega'(\zeta)$.

Для определения этой последней функции у нас имеется граничное условие (2), точно такое же, как условие, с которым мы имели дело при решении основной смешанной задачи в случае, когда область S — круг (§ 123, п. 1); только на этот раз искомая функция может иметь полюсы в заранее заданных точках $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r, \infty$ порядков не выше, чем заданные числа $m_1, m_2, \ldots, m_r, m$ (§ 125), а также, в случае, когда область S бесконечна, полюс в точке $\zeta = 0$ не выше второго порядка.

Полагая, как в § 123 (п. 1),

$$\beta = \frac{\ln \varkappa}{2\pi}, \tag{4}$$

$$X_0(\zeta) = \prod_{k=1}^{n}(\zeta-\alpha_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta}(\zeta-\beta_k)^{-\frac{1}{2}+i\beta}, \tag{5}$$

где под $X_0(\zeta)$ подразумевается ветвь, такая, что

$$\lim_{\zeta\to\infty}\zeta^n X_0(\zeta) = 1, \tag{6}$$

получаем, применяя формулу (26) § 110:

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \frac{X_0(\zeta)}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{X_0^+(\sigma)(\sigma-\zeta)} + X_0(\zeta)R(\zeta), \tag{7}$$

где $R(\zeta)$ обозначает рациональную функцию вида

$$R(\zeta) = \frac{D_2}{\zeta^2} + \frac{D_1}{\zeta} + C_0 + C_1\zeta + \ldots + C_{m+n}\zeta^{m+n} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m_r}\frac{B_{kl}}{(\zeta-\zeta_k)^l} \tag{8}$$

(в случае конечной области S имеем: $D_1 = D_2 = 0$).

Остается определить постоянные D_j, C_j, B_{kl}, входящие в выражение (8). Эти постоянные должны быть определены на основании следующих условий:

1°. Функция $\Psi(\zeta)$, соответствующая функции $\Phi(\zeta)$, т. е. связанная с ней формулой (8) § 125, должна быть голоморфна внутри γ. Это условие выражается равенствами (14) § 125.

2°. В случае бесконечной области S компоненты напряжения и вращения должны принимать заданные значения на бесконечности, компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к L', должны также иметь заданные значения, а компоненты смещения должны быть однозначными. Эти условия эквивалентны условиям (17), (18) § 125 при заданных Γ, Γ', X, Y.

3°. Наконец, надо учесть то обстоятельство, что если удовлетворены все предыдущие условия, компоненты смещения u, v будут принимать на дугах $\alpha_k\beta_k$ заданные значения лишь с точностью до некоторых постоянных c_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), ибо, решая задачу, мы исходили из требования, что на этих дугах принимают заданные значения производные u и v по ϑ. Таким образом, к предыдущим условиям следует добавить условие

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0, \tag{9}$$

которое можно заменить более слабым:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n, \tag{10}$$

ибо при соблюдении последнего условия можно удовлетворить и условию (9) за счет произвольной постоянной, входящей в правую часть формулы (6′) § 125.

Условия же (10) могут быть выражены совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 123 для случая, когда S — круг. Поэтому мы считаем излишним выписывать здесь соответствующие формулы.

Выразив перечисленные выше условия, мы получим известное число линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных постоянных, которые и определят их полностью, как легко заключить на основании теорем единственности и существования решения [1]).

Особенно просто решается задача в случае, когда контур L разбит лишь на две дуги $a_1b_1 = L'$ и $b_1a_1 = L''$, т. е. когда $n = 1$; тогда отпадают условия (10).

Замечание 1. Легко также непосредственно решить задачу в случае, когда часть L'' контура L не свободна от внешних напряжений, а несет заданную внешнюю нагрузку. Тогда граничные условия, определяющие функцию $\Phi(\zeta)$, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &[\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^+ + \frac{1}{\varkappa}\,[\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^- = f(\sigma) \quad \text{на } \gamma', \\ &[\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^+ - [\Phi(\sigma)\,\omega'(\sigma)]^- = f(\sigma) \quad \text{на } \gamma'', \end{aligned} \tag{11}$$

где $f(\sigma)$ — заданная на γ функция:

$$\left.\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{2\mu}{\varkappa}\left\{\frac{dg_1}{d\sigma} + i\,\frac{dg_2}{d\sigma}\right\} \quad \text{на } \gamma', \\ f(\sigma) &= \omega'(\sigma)\{N(\sigma) + iT(\sigma)\} \quad \text{на } \gamma''; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

[1]) Теорема единственности доказана в § 40. Существование решения доказано в цитированных уже статьях Д. И. Шермана [17] и Г. Ф. Манджавидзе [2]. Несколько более подробное рассмотрение системы линейных алгебраических уравнений, о которой сказано в тексте, позволяет доказать ее однозначную разрешимость, не опираясь на теорему существования, а лишь при помощи теоремы единственности (ср. замечание 2 в конце § 84).

$N(\sigma)$ и $T(\sigma)$ обозначают то же, что в § 126. Мы будем считать, что $f(\sigma)$ удовлетворяет условию H на каждой из частей γ' и γ'' (но может изменяться скачком при переходе через точки α_k, β_k).

Применяя сказанное в § 111, получаем формулу, вполне аналогичную формуле (7):

$$\Phi(\zeta)=\frac{X_0(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{X_0^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}+X_0(\zeta)R(\zeta), \tag{13}$$

где $X_0(\zeta)$ и $R(\zeta)$ обозначают то же, что и выше, т. е. даются формулами (5) и (8), но интеграл берется уже по всей окружности γ, а $f(\sigma)$ определяется формулами (12). Остальные рассуждения те же, что и выше.

Замечание 2. При решении задачи можно (а иногда удобнее) исходить из более простых формул (11), (12) § 125 (ср. замечание 2 в конце предыдущего параграфа). Не надо при этом упускать из виду, что, разыскивая функцию $\varphi(\zeta)$ по соответствующему граничному условию, мы должны потребовать, чтобы она оставалась ограниченной вблизи точек α_k, β_k, как это следует из условия, наложенного нами на функцию $\Phi(\zeta)$.

§ 127а. Пример. Решение основной смешанной задачи для плоскости с эллиптическим отверстием. Применяя конформное отображение на круг [1]) $|\zeta|<1$, будем иметь в этом случае при обозначениях § 48, п. 5:

$$\omega(\zeta)=R\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right),\quad R>0,\quad 0\leqslant m<1; \tag{1}$$

формулы (7) и (8) § 125 принимают в нашем случае вид:

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)=R\left(\frac{1}{\zeta^2}-m\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{R}{\zeta^2}\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right)\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)-$$
$$-R\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\quad\text{при } |\zeta|>1; \tag{2}$$

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)=-R\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)\Phi(\zeta)-R\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)-$$
$$-R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta)\quad\text{при } |\zeta|<1; \tag{3}$$

формулы же (17), (18) § 125 напишутся так:

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)=-\frac{R\Gamma}{\zeta^2}+\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta}+O(1); \tag{4}$$

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)=-\frac{R\Gamma'}{\zeta^2}-\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(\varkappa+1)}\frac{1}{\zeta}+O(1). \tag{5}$$

Будем считать для простоты, что $n=1$, т. е. что контур L отверстия разделен на две части a_1a_2 и a_2a_1, из которых вторая свободна от внешних напряжений, а на первой заданы смещения.

[1]) Можно также (и даже несколько удобнее) воспользоваться отображением на область $|\zeta|>1$, но мы пользуемся отображением на круг, чтобы иметь возможность непосредственно пользоваться формулами предыдущего параграфа.

Тогда, обозначая через σ_1 и σ_2 точки окружности γ, соответствующие точкам a_1 и a_2 эллипса, будем иметь:

$$X_0(\zeta)=(\zeta-\sigma_1)^{-\frac{1}{2}-i\beta}(\zeta-\sigma_2)^{-\frac{1}{2}+i\beta},\quad \beta=\frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{6}$$

Положим:

$$\sigma_1=e^{i\vartheta_1},\quad \sigma_2=e^{i\vartheta_2},\quad \vartheta_1=\vartheta_0-\frac{\omega}{2},\quad \vartheta_2=\vartheta_0+\frac{\omega}{2}, \tag{7}$$

где ϑ_0 — аргумент середины дуги $\sigma_1\sigma_2$, а ω — центральный угол, соответствующий этой дуге.

При больших $|\zeta|$ будем иметь:

$$X_0(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+\frac{\alpha}{\zeta^2}+\ldots, \tag{8}$$

где

$$\alpha=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+i\beta(\sigma_1-\sigma_2)=e^{i\vartheta_0}\left(\cos\frac{\omega}{2}+2\beta\sin\frac{\omega}{2}\right). \tag{9}$$

Легко далее проверить, что

$$X_0(0)=-e^{-\beta\omega-i\vartheta_0}, \tag{10}$$

так что при малых $|\zeta|$

$$X_0(\zeta)=X_0(0)\left[1-\frac{\zeta}{\sigma_1}\right]^{-\frac{1}{2}-i\beta}\left[1-\frac{\zeta}{\sigma_2}\right]^{-\frac{1}{2}+i\beta}=X_0(0)[1+\alpha_0\zeta+\ldots], \tag{11}$$

где

$$\alpha_0=\frac{\bar\sigma_1+\bar\sigma_2}{2}+i\beta(\bar\sigma_1-\bar\sigma_2)=e^{-i\vartheta_0}\left(\cos\frac{\omega}{2}-2\beta\sin\frac{\omega}{2}\right). \tag{12}$$

Формула (2) показывает, что функция $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ должна быть голоморфна вне γ, включая бесконечно удаленную точку; далее, так как функция $\Phi(\zeta)$ голоморфна внутри γ, то $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ имеет полюс не выше второго порядка при $\zeta=0$.

Поэтому согласно формуле (7) § 127

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)=\frac{X_0(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1\sigma_2}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{X_0^+(\sigma)(\sigma-\zeta)}+\left\{C_0+C_1\zeta+\frac{D_1}{\zeta}+\frac{D_2}{\zeta^2}\right\}X_0(\zeta), \tag{13}$$

где C_0, C_1, D_1, D_2 — постоянные, подлежащие определению.

Постоянные D_1 и D_2 определяются сразу из условия (4); действительно, на основании формул (13) и (11) главная часть полюса в точке $\zeta=0$ функции $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ равна

$$X_0(0)\left\{\frac{D_2}{\zeta^2}+\frac{D_1+\alpha_0D_2}{\zeta}\right\},$$

откуда путем сравнения с формулой (4) выводим:

$$X_0(0)D_2=-R\Gamma,\quad X_0(0)(D_1+\alpha_0D_2)=\frac{X+iY}{2\pi(\varkappa+1)}; \tag{14}$$

из этих формул получаются значения для D_2 и D_1, которые мы не выписываем.

Коэффициенты же C_0 и C_1 определятся при помощи условия (5). Для того, чтобы его выразить, найдем главную часть полюса при $\zeta = 0$ функции $\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)$, определяемой формулой (3). Простые вычисления показывают, что эта главная часть равна

$$\frac{\overline{C}_1 - mD_2X_0(0)}{\zeta^2} + \frac{\overline{C}_0 + a\overline{C}_1}{\zeta}.$$

Сравнивая с формулой (5) и учитывая первое соотношение (14), получаем, переходя к сопряженным значениям:

$$C_1 = -R(m\overline{\Gamma} + \overline{\Gamma}'), \quad C_0 + aC_1 = -\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(\varkappa+1)}. \tag{15}$$

Таким образом, все постоянные определены, и задача решена. При $m = 0$ получим решение для бесконечной плоскости с круговым отверстием. Этот случай был непосредственно рассмотрен нами в § 123 (п. 2).

§ 128. Задача соприкасания с жестким профилем. 1. Постановка задачи. Единственность решения. В очень многих случаях, с которыми приходится иметь дело на практике, граничные задания обусловливаются соприкасанием поверхности рассматриваемого упругого тела с поверхностями других тел.

Некоторые частные случаи задач этого типа были уже рассмотрены нами выше (§ 58, 115—119).

Мы рассмотрим здесь случай, когда данное упругое тело соприкасается с абсолютно жестким телом данной формы, причем *соприкасание происходит вдоль всей границы упругого тела*. Мы будем, далее, считать, что поверхности тел — абсолютно гладкие, так что силы трения отсутствуют.

Эта задача, насколько известно автору, была впервые поставлена и решена Адамаром (Hadamard [2]) для случая упругого шара.

Решение задачи для плоских областей, отображаемых на круг при помощи рациональных функций, было дано автором в статье [19] и воспроизведено с некоторыми дополнениями во втором издании настоящей книги. Ниже (в п. 2) будет приведено решение, несколько отличное по форме, но то же самое по существу.

Ограничимся в дальнейшем плоским случаем и будем считать, что граница рассматриваемого тела состоит из одного простого замкнутого контура; при этом тело может быть конечным или бесконечным (бесконечная упругая пластинка с отверстием). В соответствии с этим мы будем иметь дело с одним из двух случаев.

А. Случай конечной области. В отверстие данной формы, проделанное в неподвижном жестком теле (пластинке), вкладывается упругая шайба, контур которой до деформации мало отличался по форме и положению от контура отверстия [1]).

[1]) Ибо, как всегда, мы рассматриваем малые деформации и смещения.

Б. Случай бесконечной области. В отверстие, проделанное в бесконечном упругом теле (пластинке), вкладывается абсолютно жесткая шайба, контур которой мало отличался от контура отверстия до деформации; положение жесткой шайбы считается заданным. В этом случае (бесконечной области) считается, что заданы значения напряжений и вращения на бесконечности (т. е. при прежних обозначениях — значения постоянных Γ, Γ') и, кроме того, главный вектор (X, Y) внешних усилий, действующих со стороны шайбы на окружающую внешнюю пластинку. Этот главный вектор равен, очевидно, главному вектору сил, приложенных извне к жесткой шайбе (сюда не включаются силы, действующие на контур шайбы со стороны упругой пластинки).

Составим граничные условия, соответствующие нашей задаче, хотя мы могли бы просто сослаться на сказанное в § 115, правда, для частного случая прямолинейной границы. Но здесь мы дадим несколько иное обоснование, быть может, немного более наглядное, а также добавим некоторые замечания.

Прежде всего из условия отсутствия трения следует, что на границе упругого тела

$$T = 0,$$

где T — касательная компонента напряжения, действующего на контур.

Выразим, далее, условие соприкасания контуров упругого и жесткого тел. Мы будем считать во всем дальнейшем, как было уже условлено, что соприкасание происходит вдоль всей границы.

Для большей ясности представим себе дело так, останавливаясь пока на случае А. Пусть упругая шайба предварительно наложена на отверстие в жесткой пластинке (в виде покрышки), так что ее края несколько заходят за края отверстия. Пусть, далее, при помощи подходящих усилий, приложенных к контуру шайбы, точкам этого контура сообщаются нормальные смещения v_n [1]) такой величины, чтобы контур шайбы совпал с контуром отверстия, после чего шайба вкладывается в отверстие и предоставляется самой себе. Шайба придет в некоторое состояние упругого равновесия, которое и требуется определить. Так как точки края шайбы могут свободно скользить по краю отверстия, то касательная компонента v_t смещения точки контура нам заранее не известна. Зато нам известна нормальная компонента v_n этого смещения, ибо она определяется взаимным положением контура отверстия и контура шайбы до деформации. Итак, граничные условия нашей задачи сводятся к следующим:

$$T = 0, \quad v_n = f \quad \text{на контуре,} \tag{1}$$

где f — заданная действительная функция дуги контура.

Обратим внимание еще на следующее обстоятельство. Операцию сжимания шайбы до размеров отверстия (сообщением нормальных

[1]) Ввиду малого различия контура шайбы и отверстия, безразлично, считать ли n нормалью к краю шайбы или к краю отверстия.

смещений v_n) можно выполнять, исходя из различных положений шайбы до деформации; все эти положения могут быть получены из одного, определенного при помощи жесткого перемещения шайбы как целого (как всегда, речь, разумеется, идет о малых смещениях). Если исходить из какого-либо положения шайбы (до деформации), отличного от того, которое было взято при выводе второго условия (1), то величина f, фигурирующая в этом условии, будет иметь другое значение f', которое отличается от f нормальной компонентой того жесткого перемещения, при помощи которого одно первоначальное положение шайбы получается из другого; граничные условия будут уже такими:

$$T = 0, \quad v_n = f' \quad \text{на контуре.} \tag{1'}$$

Но очевидно, что, решив задачу (1), мы сможем получить решение задачи (1'), наложив на первое решение только что упомянутое жесткое перемещение, не влияющее, как известно, на распределение напряжений; таким же образом из решения задачи (1') можем вывести решение задачи (1).

Перейдем теперь к случаю Б (бесконечная область). Повторяя почти буквально сказанное выше, мы опять придем к условиям (1), к которым следует присоединить еще условия, перечисленные раньше (а именно следует присоединить задание величин Г, Г', X, Y). Добавим еще, что жесткие перемещения упругой пластинки сводятся в нашем случае исключительно к поступательным, ибо величина C [1]), характеризующая вращение на бесконечности, задана по условию.

Легко показать, что задача, соответствующая граничным условиям (1), не может допускать двух различных решений. Действительно, вспомним, что для доказательства единственности решения основных задач главную роль играло равенство нулю (на контуре) выражения

$$X_n u + Y_n v,$$

составленного для «разности» двух решений (§ 40). Но это выражение равно нулю и для рассматриваемой теперь задачи. В самом деле, выражение это есть скалярное произведение вектора (X_n, Y_n), изображающего напряжение, приложенное к контуру, и вектора (u, v), изображающего смещение точки контура. Так как, далее, для «разности» двух решений, удовлетворяющих граничному условию (1), мы имеем:

$$T = 0, \quad v_n = 0,$$

то векторы (X_n, Y_n) и (u, v) взаимно перпендикулярны, а следовательно, их скалярное произведение $X_n u + Y_n v$ равно нулю.

Поэтому, повторяя буквально рассуждения § 40, мы убедимся, что компоненты напряжения в обоих решениях одинаковы, а следовательно, смещения могут различаться только жестким перемещением тела как целого.

[1]) Напомним, что по нашим обычным обозначениям $\Gamma = B + iC$.

Очевидно далее, что если исключить случай, когда тело ограничено окружностью, и этого различия в смещениях быть не может. В случае круговой шайбы решения, очевидно, могут отличаться друг от друга жестким поворотом вокруг центра; в случае бесконечной пластинки с круговым отверстием мы опять имеем полную определенность, ибо мы считаем, что вращение на бесконечности задано.

Мы доказали, что если решение поставленной задачи существует, то оно единственно; то, что решение на самом деле существует, было доказано Д. И. Шерманом [22]. Мы не будем останавливаться на этом доказательстве, а укажем эффективный способ решения для областей, отображаемых на круг при помощи рациональных функций [1]).

2. Решение для областей, отображаемых на круг при помощи рациональных функций. Метод, при помощи которого мы будем решать нашу задачу, вполне аналогичен методу, подробно изложенному в § 126 для случая первой и второй основных задач [2]). Поэтому мы сделаем здесь только общие указания и затем поясним применение метода на примерах.

Пусть область S отображена на круг $|\zeta| < 1$ [3]) соотношением

$$z = \omega(\zeta), \tag{2}$$

где, по условию, $\omega(\zeta)$ — рациональная функция; окружность $|\zeta| = 1$ мы по-прежнему обозначим через γ, а положительным направлением на ней выберем направление, обратное движению часовой стрелки.

Граничные условия (1), при обозначениях § 50, запишутся так:

$$\widehat{\rho\vartheta} = 0, \qquad v_\rho = f \text{ на контуре.} \tag{3}$$

Выражения для $\widehat{\rho\vartheta}$ и v_ρ через функции комплексного переменного могут быть получены соответственно из формул (11) и (7) § 50. Чтобы получить выражение для $\widehat{\rho\vartheta}$, достаточно почленно вычесть равенство (11) § 50 из равенства, полученного переходом к сопряженным значениям (тогда в левой части получим $2i\widehat{\rho\vartheta}$). Аналогично получим выражение для v_ρ из формулы (7) § 50. Внося эти выражения в равенство (3), получаем граничные условия задачи в следующем виде:

$$\sigma^2\omega'(\sigma)\{\overline{\omega(\sigma)}\,\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)\} - \overline{\sigma^2\omega'(\sigma)}\{\omega(\sigma)\,\overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\omega'(\sigma)}\,\overline{\Psi(\sigma)}\} = 0,$$

$$\sigma\omega'(\sigma)\left\{\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma)\right\} +$$

$$+ \overline{\sigma\omega'(\sigma)}\left\{\varkappa\varphi'(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)}\right\} = 4\mu f(\sigma)\,|\,\omega'(\sigma)\,|,$$

[1]) Относительно случая, когда граница тела — прямолинейный многоугольник, см. статью Г. Н. Положего [1], в которой даны ссылки и на другие его статьи.

[2]) В цитированной моей статье (а также во втором издании настоящей книги) решение было дано при помощи метода, примененного нами в предыдущей главе к решению основных задач.

[3]) Можно пользоваться и отображением на область $|\zeta| > 1$.

где всюду подразумеваются граничные значения рассматриваемых функций при $\zeta \to \sigma$ изнутри γ; $f(\sigma)$ обозначает заданную действительную функцию точки σ контура, относительно которой мы будем считать, что она удовлетворяет условию H.

Будем пока считать, что в случае, когда область S бесконечна, главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к обводу отверстия (т. е. к границе области S), равен нулю. Будем, кроме того, считать, что напряжения исчезают на бесконечности.

Тогда функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будут голоморфны внутри γ, так же как и функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$.

Введем теперь кусочно-голоморфные (за исключением конечного числа полюсов) функции $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, определенные следующим образом:

$$\Omega_1(\zeta) = \begin{cases} \zeta^2\omega'(\zeta)\left[\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right] & \text{при } |\zeta|<1, \\ \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\omega(\zeta)\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] & \text{при } |\zeta|>1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\Omega_2(\zeta) = \begin{cases} \frac{\varkappa}{\zeta}\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi'(\zeta) - \zeta\omega'(\zeta)\psi(\zeta) & \text{при } |\zeta|<1, \\ -\varkappa\zeta\omega'(\zeta)\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta}\omega(\zeta)\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta}\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) & \\ & \text{при } |\zeta|>1. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда предыдущие граничные условия могут быть, очевидно, записаны так:

$$\Omega_1^+(\sigma) - \Omega_1^-(\sigma) = 0, \tag{6}$$

$$\Omega_2^+(\sigma) - \Omega_2^-(\sigma) = 4\mu\,|\omega'(\sigma)|\,f(\sigma). \tag{7}$$

Функции $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, как было уже сказано, кусочно-голоморфны, за исключением конечного числа полюсов, т. е. они голоморфны в каждой из областей $|\zeta|<1$, $|\zeta|>1$, кроме конечного числа точек, где они имеют полюсы.

Полюсы эти и их максимальные порядки заранее известны, так как они происходят от полюсов рациональной функции $\omega(\zeta)$ и от множителей ζ^{-1}, ζ в правой части (5). Легко видеть, что каждому полюсу ζ_k, расположенному внутри (вне) γ, соответствует полюс $\zeta_k' = 1/\overline{\zeta_k}$ того же порядка, расположенный вне (внутри) γ.

Применяя теперь результаты § 108 к решению граничных задач (6), (7), получаем соответственно:

$$\Omega_1(\zeta) = R_1(\zeta), \tag{8}$$

$$\Omega_2(\zeta) = \frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{|\omega'(\sigma)|\,f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} + R_2(\zeta), \tag{9}$$

где $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ — рациональные функции с неопределенными коэффициентами, имеющие в заданных точках полюсы не выше заданных

порядков. Общие их выражения легко написать, но мы этого делать не будем, а заметим лишь следующее. По самому определению (4) и (5) функций $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$, мы должны иметь:

$$\overline{\Omega}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\Omega_1(\zeta), \qquad \overline{\Omega}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\Omega_2(\zeta),$$

откуда на основании формул (8) и (9) легко заключаем, что рациональные функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ должны тождественно удовлетворять следующим условиям:

$$\overline{R}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)=R_1(\zeta), \tag{10}$$

$$\overline{R}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-R_2(\zeta)-\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma |\omega'(\sigma)|\,f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}. \tag{11}$$

При выводе последнего условия мы воспользовались тем, что если $f(\sigma)$ — действительная функция и если

$$F(\zeta)=\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta},$$

то

$$\overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\overline{\sigma}}{\overline{\sigma}-\frac{1}{\zeta}},$$

или, замечая, что $\overline{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$,

$$\overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\zeta f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma(\zeta-\sigma)}=-\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Соотношения (10), (11) налагают определенные условия на коэффициенты рациональных функций $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$; эти условия вместе с другими, которые будут указаны ниже, и послужат для определения упомянутых коэффициентов.

Применяя формулы (8), (9) к точкам, расположенным внутри γ, получим на основании формул (4) и (5):

$$\zeta^2\omega'(\zeta)\left\{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right\}=R_1(\zeta), \tag{12}$$

$$-\zeta\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi'(\zeta)-\zeta\omega'(\zeta)\psi(\zeta)+\frac{\varkappa}{\zeta}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi(\zeta)=\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,|\omega'(\sigma)|\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+R_2(\zeta). \tag{13}$$

Применение формул (8), (9) к точкам, расположенным вне γ, ничего нового не даст, а приведет лишь к условиям (10), (11), которые мы будем считать выполненными. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением предыдущих уравнений.

Разделяя предыдущие уравнения соответственно на $\zeta^2\omega'(\zeta)$ и $\zeta\omega'(\zeta)$ и замечая, что

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)=\varphi'(\zeta), \qquad \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)=\psi'(\zeta),$$

можем переписать эти уравнения так:

$$\psi'(\zeta)+\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]'=G(\zeta), \tag{14}$$

$$-\psi(\zeta)-\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)+\frac{\varkappa}{\zeta^2}\frac{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi(\zeta)=H(\zeta), \tag{15}$$

где $G(\zeta)$, $H(\zeta)$ — известные функции, содержащие линейным образом некоторое число неопределенных пока постоянных.

Из предыдущих уравнений легко исключить функцию $\psi(\zeta)$. Действительно, дифференцируя второе и складывая с первым, получаем после простых приведений:

$$(\varkappa+1)\Omega(\zeta)\varphi'(\zeta)+\varkappa\Omega'(\zeta)\varphi(\zeta)=G(\zeta)+H'(\zeta), \tag{16}$$

где

$$\Omega(\zeta)=\frac{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2\omega'(\zeta)}. \tag{17}$$

Таким образом, функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\varphi'(\zeta)+\nu\frac{\Omega'(\zeta)}{\Omega(\zeta)}\varphi(\zeta)=F(\zeta), \tag{18}$$

где

$$F(\zeta)=\frac{G(\zeta)+H'(\zeta)}{(\varkappa+1)\Omega(\zeta)} \tag{19}$$

— известная функция, содержащая линейным образом некоторое число неопределенных постоянных, а

$$\nu=\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\qquad\left(\frac{1}{2}<\nu<1\right). \tag{20}$$

Интегрируя уравнение (18), получаем:

$$\varphi(\zeta)=[\Omega(\zeta)]^{-\nu}\left[K+\int F(\zeta)[\Omega(\zeta)]^{\nu}\,d\zeta\right], \tag{21}$$

где K — постоянная.

Найдя $\varphi(\zeta)$, можем определить $\psi(\zeta)$ по формуле (15). Неизвестные постоянные, фигурирующие в выражениях для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, определятся из условий (10), (11), а также из условия голоморфности этих функций внутри γ.

Мы считали в случае, когда область S бесконечна, что напряжения исчезают на бесконечности. Это условие несущественно. Если считать, что напряжения имеют на бесконечности заданные конечные значения, то предыдущие рассуждения останутся в силе. Следует лишь учесть, что в рассматриваемом случае функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ имеют полюсы первого порядка при $\zeta=0$ с заданными главными частями, что может отразиться лишь на виде рациональных функций $R_1(\zeta)$, $R_2(\zeta)$.

Мы считали, кроме того, что в случае бесконечной области главный вектор (X, Y) равен нулю.

Если главный вектор (X, Y) отличен от нуля, то этот случай легко сводится к предыдущему при помощи не раз примененного выше приема (см. следующий параграф, пример 2).

З а м е ч а н и е. Совершенно аналогично решается несколько более общая задача, которую получим, заменив условие $T = 0$ условием, что T равно заданной функции от t.

§ 128а. Примеры. 1. К р у г о в а я ш а й б а. В этом случае можем положить:

$$z = \omega(\zeta) = R\zeta, \tag{1}$$

где R — радиус шайбы, и граничные условия (6), (7) § 128, написанные в развернутом виде, принимают вид (мы сокращаем первое уравнение на R^2, а второе на R):

$$[\sigma\Phi'(\sigma) + \sigma^2\Psi(\sigma)]^+ - \left[\frac{1}{\sigma}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^- = 0, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\varkappa}{\sigma}\varphi(\sigma) - \varphi'(\sigma) - \sigma\psi(\sigma)\right]^+ - \left[-\varkappa\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^- = 4\mu f(\sigma). \tag{3}$$

Дальнейшие выкладки несколько упростятся, если мы будем считать

$$\varphi(0) = 0, \tag{4}$$

что мы имеем право сделать, не нарушая общности.

Решая граничные задачи (1) и (3) и принимая во внимание, что функции

$$\frac{1}{\zeta}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad -\varkappa\zeta\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta}\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

голоморфны [1]) при $|\zeta| > 1$ и первая из них исчезает на бесконечности, а функции

$$\zeta\Phi'(\zeta) + \zeta^2\Psi(\zeta), \qquad \frac{\varkappa}{\zeta}\varphi(\zeta) - \varphi'(\zeta) - \zeta\psi(\zeta)$$

голоморфны при $|\zeta| < 1$, получаем, что внутри γ

$$\zeta\Phi'(\zeta) + \zeta^2\Psi(\zeta) = 0, \tag{5}$$

$$-\varphi'(\zeta) - \zeta\psi(\zeta) + \frac{\varkappa}{\zeta}\varphi(\zeta) = \frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} + a, \tag{6}$$

где a — постоянная. Условие (10) § 128 удовлетворено само собой, а условие (11) § 128 дает

$$a + \overline{a} = -\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{2\mu}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\,d\vartheta \tag{7}$$

(множитель $|\omega'(\sigma)| = R$ не фигурирует в правой части, так как выше мы произвели сокращение на R).

[1]) Голоморфность второй из этих функций при $\zeta = \infty$ вытекает из условия (4).

Сравнивая уравнения (5), (6) с уравнениями (14), (15) § 128, видим, что при обозначениях § 128

$$G(\zeta)=0, \qquad H(\zeta)=\frac{A(\zeta)+a}{\zeta}, \tag{8}$$

где для краткости положено:

$$A(\zeta)=\frac{2\mu}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{9}$$

На основании формул (17) и (19) § 128 имеем в нашем случае:

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{\zeta^2}, \qquad F(\zeta)=\frac{\zeta A'(\zeta)-A(\zeta)}{\varkappa+1}-\frac{a}{\varkappa+1}$$

и на основании формулы (21) § 128

$$\varphi(\zeta)=K\zeta^{2\nu}+\frac{\zeta^{2\nu}}{\varkappa+1}\int[\zeta A'(\zeta)-A(\zeta)]\,\zeta^{-2\nu}\,d\zeta+\frac{a\zeta}{\varkappa-1},$$

где K — постоянная, или еще

$$\varphi(\zeta)=K\zeta^{2\nu}+\frac{\zeta^{2\nu}}{\varkappa+1}\int\limits_0^{\zeta}[\zeta A'(\zeta)-A(\zeta)+A(0)]\,\zeta^{-2\nu}\,d\zeta+\frac{A(0)}{\varkappa-1}\zeta+\frac{a\zeta}{\varkappa-1}. \tag{10}$$

Нижний предел интеграла в последней формуле можно взять равным нулю, ибо, как легко видеть, вблизи начала координат разложение выражения

$$[A(\zeta)-A(0)-\zeta A'(\zeta)]\,\zeta^{-2\nu}$$

начинается с члена, содержащего $\zeta^{-2\nu+2}$, причем, как мы знаем,

$$1<2\nu=\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}<2.$$

Постоянные K и a следует определить из условия голоморфности функции $\varphi(\zeta)$ внутри γ и из условия (7), ибо условие (4) удовлетворено.

Очевидно, что $\varphi(\zeta)$ будет голоморфной [1]) тогда и только тогда, когда $K=0$, ибо 2ν — число не целое (оно заключено между 1 и 2).

Условие же (7) определяет действительную часть величины a; мнимая часть ее остается произвольной, как и следовало предвидеть [2]). Полагая эту мнимую часть равной нулю и замечая, что правая часть формулы (7) равна $-A(0)$, получаем:

$$a=\bar{a}=-\frac{1}{2}A(0),$$

---

[1]) Второй член правой части формулы (10), как легко видеть, есть голоморфная функция, ибо многозначность множителя $\zeta^{-2\nu}$ под знаком интеграла компенсируется многозначностью множителя $\zeta^{2\nu}$ перед интегралом. Мы, конечно, подразумеваем, что ветви $\zeta^{2\nu}$ и $\zeta^{-2\nu}$ выбраны так, что

$$\zeta^{-2\nu}=\frac{1}{\zeta^{2\nu}}.$$

[2]) Ибо мнимая часть a влияет лишь на жесткий поворот шайбы.

и по формуле (10) окончательно имеем:

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^{2\nu}}{1+\varkappa}\int_0^{\zeta}[\zeta A'(\zeta)-A(\zeta)+A(0)]\,\zeta^{-2\nu}\,d\zeta+\frac{A(0)}{2(\varkappa-1)}\zeta, \tag{11}$$

после чего $\psi(\zeta)$ определится по формуле (6):

$$\psi(\zeta)=\frac{\varkappa}{\zeta^2}\varphi(\zeta)-\frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta)-\frac{1}{\zeta}A(\zeta)+\frac{A(0)}{2\zeta}; \tag{12}$$

легко проверить, что правая часть голоморфна в точке $\zeta=0$.

Таким образом, задача решена.

2. Бесконечная плоскость с круговым отверстием. Применим в этом случае отображение на область $|\zeta|>1$, так что формула (1) остается в силе.

Если под f подразумевать нормальное смещение, считаемое положительным, когда оно направлено внутрь тела, т. е. от центра, то граничные условия примут вид (по сокращении соответственно на R^2 и R):

$$[[\sigma\Phi'(\sigma)+\sigma^2\Psi(\sigma)]^-=\left[\frac{1}{\sigma}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{1}{\sigma^2}\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^+=0, \tag{13}$$

$$\left[\frac{\varkappa}{\sigma}\varphi(\sigma)-\varphi'(\sigma)-\sigma\psi(\sigma)\right]^-\left[-\varkappa\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma}\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^+=4\mu f(\sigma). \tag{14}$$

Будем пока считать, что главный вектор (X, Y) равен нулю и что напряжение и вращение исчезают на бесконечности. Тогда функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ будут голоморфны при $|\zeta|>1$, включая бесконечно удаленную точку, и при больших $|\zeta|$

$$\Phi(\zeta)=O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\qquad \Psi(\zeta)=O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right);$$

кроме того, не нарушая общности, мы можем считать $\psi(\infty)=0$.

Учитывая только что указанные свойства искомых функций и решая граничные задачи (13), (14), получаем для точек области $|\zeta|>1$:

$$\zeta\Phi'(\zeta)+\zeta^2\Psi(\zeta)=a, \tag{15}$$

$$\varphi'(\zeta)+\zeta\psi(\zeta)-\frac{\varkappa}{\zeta}\varphi(\zeta)=\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma\frac{f(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+b, \tag{16}$$

где a, b — некоторые постоянные, подлежащие определению. Их можно найти на данном же этапе. Действительно, условие (10) § 128 дает:

$$a=\overline{a},$$

а условие (11) § 128 (если учесть, что мы сократили на R):

$$b+\overline{b}=-\frac{2\mu}{\pi i}\int_\gamma f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=-\frac{2\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\,d\vartheta.$$

Кроме того, полагая в уравнениях (15) и (16) $\zeta \to \infty$ и замечая, что [1])

$$[\zeta^2 \Psi(\zeta)]_{\zeta=\infty} = -\frac{1}{R}[\zeta \psi(\zeta)]_{\zeta=\infty},$$

получаем:

$$b = -Ra.$$

Из предыдущих равенств легко получаем:

$$b = -Ra = -\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\, d\vartheta. \tag{17}$$

Сравнивая уравнения (15), (16) с уравнениями (14), (15) § 128, легко убеждаемся, что в нашем случае

$$G(\zeta) = -\frac{b}{\zeta^2}, \qquad H(\zeta) = -\frac{A(\zeta)}{\zeta} - \frac{b}{\zeta},$$

где $A(\zeta)$ определяется формулой (9); только в нашем случае ζ находится вне γ.

Таким образом, мы приходим опять к уравнению (18) § 128, причем теперь

$$F(\zeta) = \frac{G(\zeta) + H'(\zeta)}{(\varkappa+1)\,\Omega(\zeta)} = \frac{A(\zeta) - \zeta A'(\zeta)}{\varkappa+1}.$$

Таким образом, на основании формулы (21) § 128 будем иметь:

$$\varphi(\zeta) = K\zeta^{2\nu} + \frac{\zeta^{2\nu}}{\varkappa+1}\int_\infty^\zeta [A(\zeta) - \zeta A'(\zeta)]\,\zeta^{-2\nu}\, d\zeta;$$

за нижний предел интеграла мы выбрали ∞. Это мы имеем право сделать, ибо интеграл, как легко видеть, сходящийся; с другой стороны, нижний предел можно выбирать произвольно.

Очевидно, что $\varphi(\zeta)$ будет голоморфной только при условии $K = 0$ [2]). Значит, будем иметь окончательно:

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^{2\nu}}{\varkappa+1}\int_\infty^\zeta [A(\zeta) - \zeta A'(\zeta)]\,\zeta^{-2\nu}\, d\zeta. \tag{18}$$

---

[1]) Вспомним, что

$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{\psi'(\zeta)}{R},$$

так что если при больших $|\zeta|$

$$\psi(\zeta) = \frac{A}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

то

$$\Psi(\zeta) = -\frac{A}{R\zeta^2} + O\left(\frac{1}{\zeta^3}\right).$$

[2]) Ибо 2ν число не целое (ср. сказанное в п. 1).

Найдя $\varphi(\zeta)$, можем найти $\psi(\zeta)$ по формуле (16):

$$\psi(\zeta)=\frac{\varkappa}{\zeta^2}\varphi(\zeta)-\frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta)+\frac{1}{\zeta}A(\zeta)+\frac{b}{\zeta}, \tag{19}$$

где b дается формулой (17).

Мы предполагали до сих пор, что главный вектор усилий (давлений), действующих на пластинку со стороны шайбы, равен нулю. Если он отличен от нуля [1]), то, применяя тот же прием, что и в аналогичных случаях первой и второй основных задач (ср. § 78), легко найдем, что решением будут функции:

$$\varphi(\zeta)+\varphi_0(\zeta), \qquad \psi(\zeta)+\psi_0(\zeta),$$

где $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ даются теми же формулами, что и выше, и

$$\varphi_0(\zeta)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta-\frac{X+iY}{4\pi\varkappa}, \tag{20}$$

$$\psi_0(\zeta)=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta-\frac{(\varkappa-1)(X+iY)}{4\pi(1+\varkappa)\zeta^2}. \tag{21}$$

Легко также непосредственно проверить, что функции $\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ решают нашу граничную задачу при $f=0$ и при заданном главном векторе (X, Y).

Полученное нами решение $\varphi+\varphi_0$, $\psi+\psi_0$ соответствует тому случаю, когда на жесткую шайбу, вставленную в упругую пластинку, действуют внешние силы, совокупность которых эквивалентна силе (X, Y), приложенной к центру [2]).

Так же просто решается задача для случая, когда напряжения не исчезают на бесконечности, а имеют заданные (конечные) значения.

3. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием. В этом случае мы могли бы воспользоваться, как и в случае первой и второй основных задач, отображением на область $|\zeta|>1$. Однако вычисления несколько упрощаются, если произвести отображение на круг $|\zeta|<1$.

Итак, положим:

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right), \quad R>0, \quad 0<m<1. \tag{22}$$

Следовательно, в нашем случае:

$$\omega'(\zeta)=-\frac{R}{\zeta^2}(1-m\zeta^2),\ \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right),\ \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=R(m-\zeta^2). \tag{22'}$$

Будем считать, что напряжения и вращение обращаются в нуль на бесконечности; кроме того, будем считать, что главный вектор усилий,

[1]) Напряжения по-прежнему мы считаем равными нулю на бесконечности, как и вращение.

[2]) Если бы эта сила не проходила через центр, то равновесие шайбы было бы невозможно, ибо в силу условия $T=0$ главный момент (относительно центра) усилий, приложенных к ее контуру, равен нулю.

приложенных к обводу отверстия, равен нулю (мы всегда можем привести общий случай к этому уже не раз применявшимся способом).

При этом условии $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будут голоморфны внутри γ и, кроме того, вблизи начала

$$\Phi(\zeta)=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=O(\zeta^2), \qquad \Psi(\zeta)=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=O(\zeta^2). \tag{23}$$

Принимая во внимание предыдущие формулы, легко убеждаемся, что функция $\Omega_1(\zeta)$, определяемая формулой (4) § 128, голоморфна как внутри, так и вне γ (включая точку $\zeta=\infty$).

Функция же $\Omega_2(\zeta)$, определяемая формулой (5) § 128, может иметь в точке $\zeta=0$ полюс первого порядка с главной частью

$$\frac{R}{\zeta}\{\varkappa m\varphi(0)+\psi(0)\}.$$

Сделаем теперь следующее замечание, которое значительно облегчит дальнейшие выкладки. Мы знаем, что, не изменяя смещений (а следовательно, и напряжений), можно прибавить к $\varphi(\zeta)$ любую комплексную постоянную α и одновременно прибавить к $\psi(\zeta)$ постоянную $\varkappa\bar{\alpha}$. Эту постоянную, как легко видеть, всегда можно подобрать так, чтобы [1])

$$\varkappa m\varphi(0)+\psi(0)=0. \tag{24}$$

Таким образом, не нарушая общности, мы можем считать, что условие (24) соблюдено.

Тогда функция $\Omega_2(\zeta)$ будет голоморфна при $|\zeta|<1$, а также, как легко видеть, при $|\zeta|>1$, включая бесконечно удаленную точку.

Поэтому в нашем случае функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ формул (8), (9) § 128 попросту постоянные, которые мы обозначим соответственно через a и b, и формулы (12), (13) § 128 напишутся так:

$$\zeta^2\omega'(\zeta)\left\{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right\}=a, \tag{25}$$

$$-\zeta\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi'(\zeta)-\zeta\omega'(\zeta)\psi(\zeta)+\frac{\varkappa}{\zeta}\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\varphi(\zeta)=A(\zeta)+b \tag{26}$$

(для $|\zeta|<1$), где введено обозначение

$$A(\zeta)=\frac{2\mu}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\sigma)\,|\,\omega'(\sigma)\,|\,d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{27}$$

Из условий (10) и (11) § 128 имеем соответственно:

$$a=\bar{a}, \quad b+\bar{b}=-\frac{2\mu}{\pi i}\int\limits_{\gamma}f(\sigma)\,|\,\omega'(\sigma)\,|\,\frac{d\sigma}{\sigma}=-\frac{2\mu}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(\sigma)\,|\,\omega'(\sigma)\,|\,d\vartheta. \tag{28}$$

Сравнивая уравнения (25) и (26) с уравнениями (14), (15) § 128, убеждаемся, что при обозначениях § 128:

$$G(\zeta)=\frac{a}{\zeta^2\omega'(\zeta)}, \qquad H(\zeta)=\frac{A(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)}+\frac{b}{\zeta\omega'(\zeta)}.$$

[1]) Напомним, что $m\neq 1$ ($m<1$).

Наконец, замечая, что в нашем случае

$$\Omega(\zeta)=\frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2\omega'(\zeta)}=-\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2},$$

получаем по формуле (19) § 128:

$$F(\zeta)=\frac{B(\zeta)}{R(\varkappa+1)}+\frac{2b}{R(\varkappa+1)(m-\zeta^2)(1-m\zeta^2)}+\frac{a-b}{R(\varkappa+1)(m-\zeta^2)}, \tag{29}$$

где для краткости введено обозначение

$$B(\zeta)=\frac{1}{m-\zeta^2}\left\{\zeta A'(\zeta)+\frac{1+m\zeta^2}{1-m\zeta^2}A(\zeta)\right\}. \tag{30}$$

Функция $\varphi(\zeta)$ выражается формулой (21) § 128, которую теперь мы перепишем так:

$$\varphi(\zeta)=K\left(\frac{1-m\zeta^2}{m-\zeta^2}\right)^{\nu}+\left(\frac{1-m\zeta^2}{m-\zeta^2}\right)^{\nu}\int\limits_{-\sqrt{m}}^{\zeta}F(\zeta)\left(\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2}\right)^{\nu}d\zeta, \tag{31}$$

где K — постоянная. Подынтегральная функция имеет внутри γ только две особые точки: $\zeta=\pm\sqrt{m}$, ибо $m<1$, и легко видеть, что интеграл в правой части сходящийся (не забудем, что $\nu>0$). Легко, далее, видеть, что второй член правой части (31) остается конечным при $\zeta\to-\sqrt{m}$. Значит, для голоморфности $\varphi(\zeta)$ вблизи $\zeta=-\sqrt{m}$ необходимо, чтобы $K=0$. Итак, мы должны иметь:

$$\varphi(\zeta)=\left(\frac{1-m\zeta^2}{m-\zeta^2}\right)^{\nu}\int\limits_{-\sqrt{m}}^{\zeta}F(\zeta)\left(\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2}\right)^{\nu}d\zeta. \tag{32}$$

Далее, для того чтобы $\varphi(\zeta)$ оставалась конечной и при $\zeta\to+\sqrt{m}$, очевидно необходимо, чтобы

$$\int\limits_{-\sqrt{m}}^{+\sqrt{m}}F(\zeta)\left(\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2}\right)^{\nu}d\zeta=0. \tag{33}$$

Легко видеть, что при условии (33) правая часть (32) будет голоморфной внутри γ.

Считая, что это условие соблюдено, и подставляя найденное для $\varphi(\zeta)$ выражение в формулу (26), найдем выражение для $\psi(\zeta)$, которое, как легко проверить, будет также голоморфным внутри γ. Нетрудно проверить также, что условие (24) будет соблюдено.

Нам остается найти постоянные a, b, фигурирующие в найденных для $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ выражениях. Для этого у нас имеются соотношения (28) и условие (33). Мы можем считать, что интеграл в правой части (33) взят по отрезку $-\sqrt{m}$, $+\sqrt{m}$ действительной оси и что на пути интегрирования выражение

$$\left(\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2}\right)^{\nu}$$

— положительная величина.

Условие (33) мы можем переписать так:

$$J + (2K_1 - K_2)\, b + K_2 a = 0, \tag{34}$$

где положено:

$$J = \int_{-\sqrt{m}}^{+\sqrt{m}} B(\zeta) \left(\frac{m-\zeta^2}{1-m\zeta^2}\right)^{\nu} d\zeta, \tag{35}$$

$$K_1 = \int_{-\sqrt{m}}^{+\sqrt{m}} \frac{(m-\zeta^2)^{\nu-1}}{(1-m\zeta^2)^{\nu+1}}\, d\zeta, \qquad K_2 = \int_{-\sqrt{m}}^{+\sqrt{m}} \frac{(m-\zeta^2)^{\nu-1}}{(1-m\zeta^2)^{\nu}}\, d\zeta. \tag{36}$$

Постоянные K_1 и K_2 — действительные величины, которые мы можем считать раз навсегда вычисленными для эллипса с данным эксцентриситетом (ибо m зависит лишь от эксцентриситета). Легко видеть, что $K_2 < K_1$.

Величина J может считаться также заданной, ибо функция $f(\sigma)$ задана.

Уравнение (34) вместе с условием (28) определяют a и b. В самом деле, вычитая из уравнения (34) уравнение, полученное переходом к сопряженным значениям, получаем:

$$b - \bar{b} = \frac{\bar{J} - J}{2K_1 - K_2}, \tag{37}$$

что вместе со вторым соотношением (28) определяет b. После этого a найдется из соотношения (34).

Таким образом, задача решена. Легко также обобщить полученное решение на случай, когда напряжения имеют на бесконечности заданные конечные значения и когда главный вектор (X, Y) отличен от нуля.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

РАСТЯЖЕНИЕ, КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ БРУСЬЕВ [1])

В настоящей главе рассматривается задача растяжения, изгиба и кручения цилиндрических (призматических) брусьев, имеющая большое значение для многих областей техники.

Первый отдел посвящен классическим результатам, относящимся к задаче кручения и изгиба однородных брусьев (решение задачи растяжения в этом случае тривиально) и принадлежащим в основном Сен-Венану.

Ввиду того что эти результаты с достаточной полнотой излагаются почти во всех курсах теории упругости, здесь даются только основы теории; более подробно, с примерами, излагаются лишь некоторые результаты, принадлежащие автору, касающиеся применения теории функций комплексного переменного.

Остальные отделы настоящей главы посвящены результатам, относящимся к задаче растяжения, кручения и изгиба брусьев, составленных из различных материалов, которая возникла в связи с некоторыми задачами строительной механики, касающимися железобетонных сооружений. Эти результаты принадлежат в основном автору настоящей книги.

---

[1]) Отделы I—III настоящей главы воспроизводятся здесь в том же виде, как они были напечатаны в первом (1933 г.) и втором (1935 г.) изданиях, если не считать незначительных изменений чисто редакционного характера. В третьем издании было существенно дополнено, в отделе IV, исследование решения задач растяжения и изгиба парами бруса, составленного из различных материалов с различными коэффициентами Пуассона (§ 146, 147, 149), а также добавлено (§ 150) решение задачи изгиба поперечной силой такого бруса, данное в основном А. К. Рухадзе.

В настоящем (пятом) издании воспроизводится текст третьего издания без каких-либо существенных изменений.

Не имея возможности коснуться хотя бы вскользь интересных результатов, полученных А. Я. Горгидзе и А. К. Рухадзе, относящихся к (приближенному) решению задачи растяжения, изгиба и кручения брусьев, составленных из различных материалов и близких к призматическим, а также к учету «вторичных эффектов» для составных призматических брусьев, я ограничиваюсь ссылкой на работы А. Я. Горгидзе [3—10], А. К. Рухадзе [4—7], А. Я. Горгидзе и А. К. Рухадзе [2, 3].

I. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ БРУСЬЕВ (ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА)

§ 129. Постановка вопроса. Рассмотрим однородный изотропный брус, ограниченный цилиндрической (призматической) поверхностью («боковая поверхность») и двумя плоскостями («основаниями»), нормальными к боковой поверхности.

Предположим, что объемные силы отсутствуют, что боковая поверхность бруса свободна от внешних напряжений и что к его основаниям приложены заданные усилия (удовлетворяющие, разумеется, условиям равновесия абсолютно твердого тела).

Направим ось Oz параллельно образующим боковой поверхности, а плоскость Oxy возьмем на одном из оснований бруса, которое будем условно называть «нижним». «Верхнее» основание будет расположено на высоте $z = +l$, где l — длина бруса.

Если поставить вопрос об упругом равновесии нашего бруса при указанных условиях во всей полноте, то он сводится к следующей математической задаче (см. § 20).

Найти величины X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, u, v, w, удовлетворяющие в области V, занятой брусом, уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}&=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}&=0,\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\ Y_z&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad Z_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad X_y=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

и, кроме того, следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos(n,\ x)+X_y\cos(n,\ y)&=0\\ Y_x\cos(n,\ x)+Y_y\cos(n,\ y)&=0\\ Z_x\cos(n,\ x)+Z_y\cos(n,\ y)&=0 \end{aligned}\right\} \text{ на боковой поверхности;} \tag{3}$$

$$X_z,\ Y_z,\ Z_z \text{—заданные функции на основаниях,} \tag{4}$$

т. е. при $z = 0$, $z = l$.

Поставленная в таком виде задача представляет значительные математические трудности, если искать не только теоретическое решение, а такое, которое поддавалось бы фактическому вычислению.

К счастью, оказывается, что для практических целей в большинстве случаев нет надобности (и даже не имеет смысла) ставить задачу с такой полнотой.

Действительно, редко бывает известно *фактическое* распределение внешних напряжений на основаниях бруса; с большей или меньшей точностью бывают известны главный вектор и главный момент этих напряжений; иными словами, бывает известна *совокупность силы и пары*, статически эквивалентная совокупности усилий, приложенных к данному основанию.

С другой стороны, на основании принципа Сен-Венана (см. § 23), если мы имеем дело с брусом, длина которого весьма значительна по сравнению с размерами оснований, мы должны заботиться только о том, чтобы главный вектор и главный момент усилий, приложенных к основаниям, имели заданные значения; действительное же распределение напряжений на основаниях практически не имеет влияния на части бруса, не находящиеся вблизи оснований.

Таким образом, появляется довольно широкий произвол в выборе решения. Этим произволом можно воспользоваться для упрощения задачи следующим образом: заранее частично задаться формой решения, оставляя его, однако, достаточно общим для того, чтобы можно было получить на основаниях бруса совокупность напряжений, статически эквивалентных данным («полуобратный метод» Сен-Венана).

При этом приходится заботиться только об одном из оснований. Действительно, задание главного вектора и главного момента усилий, действующих на одно из оснований, определяет эти элементы и для другого, так как совокупность усилий, приложенных к обоим основаниям, должна быть статически эквивалентна нулю (т. е. удовлетворять условию равновесия абсолютно твердого тела). С другой стороны, всякое решение уравнений (1) всегда дает такое распределение напряжений на поверхности тела, которое статически эквивалентно нулю (см. конец § 20).

Сен-Венану принадлежит большая заслуга полного теоретического решения вопроса в такой упрощенной (ему же принадлежащей) постановке и применения к ряду технически важных случаев.

Результаты Сен-Венана изложены в двух его обширных мемуарах (Saint-Venant [1, 2]) и в ряде других работ, в частности в обширных примечаниях к французскому переводу книги Клебша (Clebsch [2]).

А. Клебш (1833—1872), значительно более молодой и раньше умерший современник Сен-Венана, дал очень стройное решение интересующего нас вопроса (Clebsch [1, 2]); он показал, что если заранее поставить условие:

$$X_x = Y_y = X_y = 0 \quad \text{в области } V, \tag{5}$$

то остается как раз столько произвола, чтобы удовлетворить условиям на основаниях и на боковой поверхности, и что это условие приводит

к решению, которое Сен-Венан получил иным, более длинным путем. Клебш назвал «задачей Сен-Венана» определение упругого равновесия цилиндра (с незагруженной боковой поверхностью) при добавочном условии (5).

Условие (5) имеет, очевидно, следующий физический смысл: если представить себе данный цилиндр состоящим из ряда продольных «волокон» (т. е. продольных тонких призмочек), то эти волокна не оказывают друг на друга давлений и скалывающих усилий в *поперечном* направлении (т. е. волокна могут оказывать друг на друга только скалывающие усилия в продольном направлении).

При соблюдении равенств (5) условия (3) на боковой поверхности, очевидно, сводятся к следующему одному:

$$Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) = 0, \tag{3'}$$

ибо два первых условия (3) будут удовлетворены сами собой.

Мы не будем здесь придерживаться метода изложения Клебша [1], а применим менее стройный, но более простой метод, по существу совпадающий с тем, которым пользуется Ляв (Love [1], гл. XIV и XV).

Отметим еще, что результаты Сен-Венана можно получить, исходя из следующей постановки задачи, принадлежащей В. Фохту (W. Voigt) [2]: найти упругое равновесие рассматриваемого цилиндра (с незагруженной боковой поверхностью), исходя из предположения, что компоненты напряжения зависят линейным образом от координаты z.

Будем для определенности рассматривать усилия, приложенные к верхнему основанию. Совокупность этих усилий статически эквивалентна силе, приложенной в некоторой (произвольной) точке O' и паре. В качестве точки O' мы возьмем точку пересечения оси Oz с верхним основанием. Силу мы можем разложить на две компоненты: по направлению оси Oz и по направлению, к ней перпендикулярному. Точно так же пару можем разбить на две: момент одной из них будет параллелен оси Oz («закручивающая пара»), а момент другой расположен в плоскости основания («изгибающая пара»).

В соответствии с этим задачу нашу можно разбить на следующие четыре:

1° кручение парами, действующими в плоскостях оснований;

2° растяжение (или сжатие) продольными силами, приложенными к основаниям;

3° изгибание парами, плоскости которых перпендикулярны к основаниям;

4° изгибание поперечной силой, приложенной к одному из оснований и действующей в его плоскости (к другому основанию должна быть,

[1]) Хорошее изложение можно найти, например, у Вебстера (Webster [1]); см. также Todhunter a. Pearson [1].

[2]) Изложение см. у Лява (Love [1], гл. XVI).

следовательно, приложена сила, равная и противоположная предыдущей, а также пара сил, так, чтобы вся эта система сил уравновешивалась).

Следует хорошо помнить, что во всем нижеследующем речь идет, конечно, не о сосредоточенных силах и парах сосредоточенных сил, а о силах и парах, статически эквивалентных некоторому распределению напряжений на основаниях.

§ 130. Некоторые формулы. Напомним, для облегчения справок, что уравнения (2) § 129 могут быть заменены следующими, им эквивалентными (§ 19):

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)],\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}[Y_y-\sigma(Z_z+X_x)],\\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{E}[Z_z-\sigma(X_x+Y_y)],\\ \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2(1+\sigma)}{E}Y_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2(1+\sigma)}{E}Z_x,\\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(1+\sigma)}{E}X_y,\end{gathered}\right\} \tag{1}$$

где E — модуль Юнга, а σ — коэффициент Пуассона, которые связаны с λ и μ соотношениями (§ 19):

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\quad \sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \tag{2}$$

$$\lambda=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{3}$$

Напомним еще уравнения совместимости Бельтрами — Мичелла (§ 22), которые в нашем случае отсутствия объемных сил имеют вид:

$$\left.\begin{gathered}\Delta X_x+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0,\quad \Delta Y_y+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0,\quad \Delta Z_z+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0,\\ \Delta Y_z+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}=0,\quad \Delta Z_x+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial x}=0,\quad \Delta X_y+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}=0,\end{gathered}\right\} \tag{4}$$

где

$$\Theta=X_x+Y_y+Z_z. \tag{5}$$

Всякая совокупность функций X_x, . . ., X_y, удовлетворяющих этим условиям (которые в дальнейшем будем называть просто условиями совместимости) и условиям (1) § 129, соответствует некоторому возможному распределению напряжений в теле (при условии однозначности смещений).

В дальнейшем под *уравнениями статики упругого тела* мы будем подразумевать совокупность уравнений (1) и (2) § 129, а под *уравнениями равновесия* — по-прежнему уравнения (1) § 129.

§ 131. Общее решение задачи кручения. Мы переходим к решению поставленных задач и начинаем с кручения.

Пусть оси координат выбраны, как в § 129. Координатную систему будем считать *правой*. Пусть усилия, приложенные к основаниям, статически эквивалентны закручивающим парам, т. е. парам, векторные моменты которых перпендикулярны к плоскостям оснований. Пусть M обозначает (скалярный) момент пары, действующей на верхнее основание ($M > 0$, когда пара стремится закручивать против часовой стрелки, если смотреть сверху, так как, согласно условию, система координат — правая).

На первый взгляд представляется естественным простейшее предположение, что все поперечные сечения цилиндра остаются плоскими и только поворачиваются (каждое в своей плоскости) вокруг Oz на некоторый угол ε. Если нижнее основание удерживается неподвижным, то естественно предположить, что угол ε пропорционален расстоянию z рассматриваемого сечения до нижнего основания, т. е.

$$\varepsilon = \tau z, \tag{1}$$

где τ — постоянная, которая измеряет угол взаимного поворота поперечных сечений, отстоящих друг от друга на единицу высоты. Поэтому τ называется *степенью закручивания* или *круткой*.

При наших предположениях компоненты смещения будут [1]):

$$u = -\varepsilon y = -\tau z y, \quad v = \tau z x, \quad w = 0.$$

Если по этим компонентам вычислим компоненты напряжения, то увидим, что уравнения (1) § 129 будут удовлетворены; но легко также убедиться, что условия (3) § 129 не могут быть выполнены, если только мы не имеем дела с круговым цилиндром (это станет очевидным на основании изложенного ниже). Поэтому ясно, что мы сделали слишком ограничительную гипотезу.

Следующим этапом является предположение (которое, как мы увидим, приведет к цели), что сечения не остаются плоскими, а искривляются (причем все сечения искривляются одинаково). Это предположение приводит, очевидно, к следующим выражениям для компонент смещения:

$$u = -\tau z y, \quad v = \tau z x, \quad w = \tau \varphi(x, y), \tag{2}$$

где τ — постоянная (степень закручивания), а $\varphi(x, y)$ — некоторая функция от x, y, подлежащая определению (в выражении для w мы ввели множитель τ для удобства).

Формулы (2) § 129 дадут для компонент напряжения, соответствующих смещениям (2):

$$X_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad Y_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) \tag{3}$$

[1]) При жестком бесконечно малом повороте плоской фигуры Oxy вокруг начала координат на угол ε имеем:

$$u = -\varepsilon y, \quad v = \varepsilon x.$$

и

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0. \tag{4}$$

Подставляя эти значения в уравнения (1) § 129, увидим, что они будут удовлетворены, если

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Иными словами, φ должна быть гармонической функцией двух переменных x и y в области, занятой телом; так как φ не зависит от z, то достаточно, конечно, рассматривать какое-либо нормальное поперечное сечение S нашего цилиндра.

Далее, условие (3′) § 129 (выражающее условие отсутствия внешних напряжений на боковой поверхности) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\cos(n, y) = 0 \quad \text{на } L,$$

где через L обозначена граница области S, а через n — внешняя нормаль к ней (т. е. нормаль, направленная наружу S). Замечая далее, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(n, y) = \frac{d\varphi}{dn},$$

получаем окончательно граничное условие в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dn} = y\cos(n, x) - x\cos(n, y) \quad \text{на } L. \tag{6}$$

Таким образом, функция φ, называемая *функцией кручения*, должна удовлетворять следующим условиям: она должна быть однозначной [1]) и гармонической в области S, а на контуре этой области ее нормальная производная должна принимать заранее заданное значение, а именно значение

$$y\cos(n, x) - x\cos(n, y).$$

Задача определения φ есть, таким образом, частный случай одной из основных задач теории потенциала —«задачи Неймана», о которой мы уже имели случай говорить (§ 77).

Как известно, задача Неймана [2]), т. е. задача определения функции $\varphi(x, y)$, гармонической в области S, по граничному условию

$$\frac{d\varphi}{dn} = f \quad \text{на } L,$$

где f — заданная на L непрерывная функция, имеет решение тогда и только тогда, когда соблюдено условие

$$\int_L f\, ds = 0,$$

[1]) *Ибо иначе компонента смещения w была бы многозначной функцией*, а мы не рассматриваем здесь многозначных смещений.

[2]) Ниже (§ 140) будет дано решение более общей задачи.

где ds — элемент дуги контура L; при соблюдении этого условия решение определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого [1]).

Эта постоянная не существенна, ибо замена φ на $\varphi + \text{const}$ не изменяет напряженного состояния, как это следует из формул (3), а вызывает лишь жесткое поступательное перемещение бруса как целого в направлении оси Oz. Это следует из формул (2).

Легко показать, что в нашем случае условие существования решения задачи Неймана соблюдено.

Действительно, предполагая, что в качестве положительного направления на L выбрано то, которое оставляет область S слева, и подразумевая под s дугу, отсчитываемую по L в этом направлении, будем иметь:

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds},$$

где t — положительная касательная.

Поэтому

$$\int_L f\,ds = \int_L [y\cos(n, x) - x\cos(n, y)]\,ds = \int_L (y\,dy + x\,dx) = \int_L d\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0,$$

а это и требовалось показать.

Таким образом, мы можем определить функцию $\varphi(x, y)$, решив задачу Неймана.

Формулы (3), (4) показывают, что основания бруса испытывают лишь касательные напряжения.

Легко показать, что если φ удовлетворяет поставленным выше условиям, то главный вектор этих напряжений равен нулю, т. е. что

$$\iint_S X_z\,dx\,dy = 0, \quad \iint_S Y_z\,dx\,dy = 0. \tag{7}$$

Действительно, на основании последнего из уравнений (1) § 129 имеем:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0;$$

поэтому

$$\iint_S X_z\,dx\,dy = \iint_S \left\{X_z + x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)\right\} dx\,dy =$$

$$= \iint_S \left\{\frac{\partial (xX_z)}{\partial x} + \frac{\partial (xY_z)}{\partial y}\right\} dx\,dy = \int_L x\{X_z\cos(n, x) + Y_z\cos(n, y)\}\,ds;$$

но последний интеграл равен нулю в силу условия (3′) § 129. Это доказывает первую из формул (7). Точно так же доказывается и вторая формула.

---

[1]) Разумеется, что сказанное справедливо при некоторых (весьма общих) условиях, налагаемых на границу L области S.

Главный момент внешних напряжений, приложенных к верхнему основанию, определится формулой

$$M = \iint\limits_S (xY_z - yX_z)\,dx\,dy = \mu\tau \iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

т. е.

$$M = \tau D, \tag{8}$$

где

$$D = \mu \iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{9}$$

Формула (8) показывает, что закручивающий момент пропорционален степени закручивания τ. Коэффициент пропорциональности D называется *жесткостью при кручении*. Мы видим, что он представляет собой произведение модуля сдвига μ и величины, зависящей только от формы сечения, но не от материала.

Если функция кручения φ найдена, то тем самым будет определена величина D.

Мы покажем сейчас, что всегда $D > 0$. Поэтому при заданной закручивающей паре, т. е. при заданной величине M, постоянная τ определится по формуле (8), и задача будет решена.

Остается показать, что $D > 0$. Проще всего это заключение выводится из рассмотрения потенциальной энергии, запасенной в закрученном брусе. Действительно, мы знаем, что эта энергия U дается формулой (см. замечание в конце § 24):

$$U = \frac{1}{2}\iint (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,dS,$$

где интеграл берется по всей поверхности бруса. Но в нашем случае подынтегральное выражение равно нулю на боковой поверхности и на нижнем основании, и поэтому остается лишь интеграл, распространенный по верхнему основанию. Но на верхнем основании ($z = l$)

$$u = -\tau l y, \quad v = \tau l x, \quad X_n = X_z, \quad Y_n = Y_z, \quad Z_n = Z_z = 0,$$

и, следовательно,

$$U = \frac{1}{2}\iint\limits_S (uX_z + vY_z)\,dx\,dy = \frac{\tau l}{2}\iint\limits_S (xY_z - yX_z)\,dx\,dy = \frac{\tau^2 l D}{2}.$$

Так как при наличии деформации $U > 0$, то $D > 0$, что и доказывает наше утверждение.

Это утверждение можно доказать и непосредственно. В самом деле, принимая во внимание условие (6), получаем:

$$\iint\limits_S \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial(x\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial(y\varphi)}{\partial x}\right) dx\,dy =$$

$$= -\int\limits_L \varphi\{y\cos(n, x) - x\cos(n, y)\}\,ds = -\int\limits_L \varphi\frac{d\varphi}{dn}\,ds.$$

Но по известной формуле имеем для всякой гармонической функции φ:

$$\int_L \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, ds = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy.$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$0 = \iint_S \left\{ x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy.$$

Умножая обе части последнего равенства на μ и складывая почленно с формулой (9), получаем формулу:

$$D = \mu \iint_S \left\{ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right]^2 \right\} dx\, dy, \tag{9'}$$

из которой и следует наше утверждение [1]).

Замечание 1. Очевидно, что, не изменяя напряжений, мы можем прибавить к найденным значениям u, v, w соответственно члены вида

$$\alpha + qz - ry, \quad \beta + rx - pz, \quad \gamma + py - qx,$$

выражающие жесткое перемещение бруса как целого.

Замечание 2. Так как мы исходили из формул (2), две первые из которых выражают жесткий поворот сечения вокруг оси Oz, то может показаться, что, взяв вместо Oz другую ось, ей параллельную, вокруг которой будем производить поворот сечений, мы получим иное решение задачи. Однако это не так. Действительно, пусть $O_1(a, b)$ — точка пересечения новой оси с плоскостью Oxy. Тогда мы будем иметь:

$$u_1 = -\tau z (y - b), \quad v_1 = \tau z (x - a), \quad w_1 = \tau \varphi_1 (x, y), \tag{2'}$$

где u_1, v_1, w_1 — компоненты смещения, а φ_1 — функция кручения, соответствующие новому положению оси.

Соответствующие напряжения будут даны формулами:

$$X_z = \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - y + b\right), \quad Y_z = \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + x - a\right). \tag{3'}$$

Так же, как и выше, покажем, что функция φ_1 гармоническая и что на L она должна удовлетворять условию:

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = (y - b)\cos(n, x) - (x - a)\cos(n, y) =$$

$$= y\cos(n, x) - x\cos(n, y) - b\cos(n, x) + a\cos(n, y).$$

Предыдущее условие можно, очевидно, переписать так:

$$\frac{d}{dn}(\varphi_1 + bx - ay) = y\cos(n, x) - x\cos(n, y).$$

---

[1]) Если бы $D = 0$, то было бы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x$$

во всей области S; но это, очевидно, невозможно, ибо $y\,dx - x\,dy$ не есть полный дифференциал.

Таким образом, гармоническая функция $\varphi_1 + bx - ay$ должна удовлетворять тем же условиям, что и функция φ, откуда следует, что эти две функции могут отличаться только постоянной, т. е. что

$$\varphi_1(x, y) = \varphi(x, y) + ay - bx + \text{const}. \tag{10}$$

Следовательно, на основании формул (2) и (2′) будем иметь:

$$u_1 = u + \tau bz, \quad v_1 = v - \tau az, \quad w_1 = w + \tau ay - \tau bx + \text{const}. \tag{11}$$

Члены, которые отличают (u, v, w) от (u_1, v_1, w_1), выражают только жесткое перемещение и потому на напряжениях не отражаются; это также легко проверить непосредственно по формулам (3′), которые дают те же значения напряжений, что и формулы (3).

§ 132. Комплексная функция кручения. Функция напряжений. Иногда удобно вводить в рассмотрение вместо функции кручения $\varphi(x, y)$ сопряженную с ней гармоническую функцию $\psi(x, y)$, связанную с $\varphi(x, y)$ условиями Коши — Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Легко выразить граничное условие (6) § 131 при помощи функции ψ.

Предположим для большей общности, что рассматриваемый брус может содержать продольные (цилиндрические) полости, так что граница L области может состоять из нескольких простых замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$, из которых последний охватывает все предыдущие (рис. 16 на стр. 119).

Пусть t обозначает касательную к одному из контуров L_k, проведенную в положительном направлении обхода (оставляющем область S слева). Тогда имеем:

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds},$$

где s — дуга контура L_k, откуда следует на основании условий (1):

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(n, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{d\psi}{ds},$$

или

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\psi}{ds}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$y\cos(n, x) - x\cos(n, y) = x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{3}$$

Таким образом, условие (6) § 131 примет вид

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

откуда следует:

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_k \quad \text{на } L_k, \tag{4}$$

где C_k — постоянные, могущие иметь различные значения на различных контурах L_k.

Функция ψ, сопряженная с данной однозначной гармонической функцией, может быть, вообще говоря, многозначна [1]). Но в нашем случае этого быть не может, ибо, как показывает формула (4), функция ψ возвращается к прежнему значению при обходе по любому из контуров L_k.

Мы знаем, что функция φ определена с точностью до произвольной постоянной; следовательно, ее производные определены вполне, а отсюда следует, что функция ψ определяется равенствами (1) с точностью до произвольной постоянной.

Из этого заключаем, что постоянные $C_1, \ldots, C_{m+1}$, фигурирующие в граничных условиях (4), не могут быть фиксированы произвольным образом. Можно зафиксировать произвольно только одну из них [2]), например положить $C_{m+1} = 0$; тогда все остальные должны иметь вполне определенные (не известные заранее) значения.

Предположим, что мы придали постоянным C_k какие-либо определенные значения. Тогда задача определения ψ есть задача нахождения гармонической функции по заданным ее значениям на контуре, т. е. «задача Дирихле», о которой мы упоминали уже в § 62 (замечание) и в § 77 и которая, как известно, имеет всегда одно вполне определенное решение. Найдя ψ, мы можем найти и φ из уравнений (1). Но если постоянные C_k были выбраны наудачу, то функция φ может оказаться многозначной. Таким образом, *постоянные C_k должны быть определены из условия однозначности функции* $\varphi(x, y)$; как мы сказали, одна из них может быть зафиксирована произвольно.

Потому-то в случае многосвязной области, вообще говоря, удобнее оперировать непосредственно с функцией φ, а не с функцией ψ.

В случае же односвязной области, ограниченной одним простым замкнутым контуром L, однозначность функции φ будет обеспечена сама собой; в граничном условии будет фигурировать одна-единственная постоянная, которую можно произвольно фиксировать. В этом случае часто гораздо удобнее оперировать с функцией ψ.

Часто бывает также очень удобно рассматривать функцию $F(\zeta)$ комплексного переменного [3]) $\zeta = x + iy$, определяемую равенством:

$$F(\zeta) = \varphi + i\psi, \tag{5}$$

где φ — функция кручения, а ψ — сопряженная с ней функция.

Функцию $F(\zeta)$ можно назвать *комплексной функцией кручения*. Она, очевидно, голоморфна в области S.

[1]) См. Добавление III в конце книги.

[2]) То, что мы можем произвольно распоряжаться одной из постоянных, явствует из того, что мы имеем право прибавить любую произвольную постоянную к функции ψ.

[3]) Теперь $x + iy$ мы обозначаем через ζ, а не z, так как z у нас обозначает третью координату.

На основании формул (3) § 131 имеем:

$$X_z - iY_z = \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y - ix\right) = \mu\tau\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} - i(x - iy)\right],$$

откуда, применяя наши обычные обозначения,

$$X_z - iY_z = \mu\tau\{F'(\zeta) - i\bar{\zeta}\}. \tag{6}$$

Можно также с удобством пользоваться так называемой *функцией напряжений*, определяемой равенством:

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{7}$$

Через эту функцию компоненты напряжения выражаются так:

$$X_z = \mu\tau\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad Y_z = -\mu\tau\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{8}$$

Функция Ψ уже не гармоническая, она удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\Delta\Psi = -2. \tag{9}$$

На границе L функция напряжений удовлетворяет условию

$$\Psi = C_k \quad \text{на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{10}$$

где C_k — постоянные, те же, что в условии (4).

Линии, определяемые в плоскости сечения S уравнением

$$\Psi(x, y) = \text{const}, \tag{11}$$

суть «линии касательных напряжений», т. е. линии, касательные к которым в каждой данной точке имеют направление вектора напряжения (X_z, Y_z), действующего на элемент сечения S (рассчитанного, разумеется, на единицу площади). Это непосредственно следует из формул (8). Границы области всегда являются линиями напряжений, что, конечно, очевидно и a priori.

С точки зрения практической представляет большой интерес нахождение тех точек сечения, где абсолютное значение касательного напряжения

$$T = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} \tag{12}$$

достигает наибольшего значения, ибо такие точки являются наиболее опасными в смысле разрушения материала.

Легко показать, что эти точки *расположены на контуре области*. Действительно,

$$T^2 = \mu^2\tau^2\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2\right].$$

Простые вычисления показывают, что, принимая во внимание уравнение (9), будем иметь:

$$\Delta(T^2) = 2\mu^2\tau^2\left\{\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}.$$

Значит, во всей области $\Delta(T^2) > 0$ [1]. А отсюда на основании известной теоремы [2] следует, что функция T^2 может достигнуть своего максимума только на границе области, что и доказывает наше утверждение.

§ 133. О решении задачи кручения для различных частных случаев. Мы видели, что задача кручения может быть сведена либо к задаче Неймана (относительно функции φ), либо к задаче Дирихле (относительно функции ψ; в случае многосвязной области требуется еще определить постоянные C_k из условия однозначности φ; см. предыдущий параграф).

Поэтому для ее решения можно применять все известные методы решения задач Неймана и Дирихле, в настоящее время хорошо разработанные.

Кроме того, ввиду особой простоты граничных значений величин ψ или $d\varphi/dn$, можно рассчитывать на успешное применение более частных методов, специально приспособленных к интересующему нас случаю.

Сам Сен-Венан решил и подробно исследовал (составляя таблицы и графики) задачу кручения для большего числа сечений различного вида, представляющих интерес для техники. Для многих сечений (эллипс, равносторонний треугольник и др.) он получил решение при помощи чрезвычайно простых средств. Для случая прямоугольного сечения он дал решение при помощи хорошо сходящихся рядов.

Мы отсылаем читателя к мемуару Сен-Венана (Saint-Venant [1]), к курсам теории упругости и к посвященной специально кручению небольшой книге А. Н. Динника [1], где можно найти решения для значительного числа различных сечений; см. также книгу Тодхёнтера и Пирсона (Todhunter a. Pearson [1]). Недавно вышла обширная монография Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [1], в которой вопросы кручения изложены с большой полнотой.

Приведем здесь (почти очевидное заранее) решение для случая, когда сечение есть круг или круговое кольцо. Если взять начало координат

[1]) Знак равенства не может иметь места, так как в силу уравнения (9) по крайней мере одна из величин $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}$ по модулю не меньше 1. [Совершенно элементарное рассмотрение показывает, между прочим, что $\Delta(T^2) \geqslant 4\mu^2\tau^2$.]

[2]) Если некоторая функция U, имеющая непрерывные производные второго порядка в области S, удовлетворяет неравенству $\Delta U > 0$, то эта функция может достигнуть максимума только на границе. Действительно, предположим, что U достигает максимума в некоторой внутренней точке (x_0, y_0). Описав из этой точки, как из центра, окружность γ достаточно малого радиуса, будем иметь $\frac{dU}{dn} \leqslant 0$, где n — внешняя нормаль к окружности. С другой стороны, по известной формуле Грина

$$\int_\gamma \frac{dU}{dn}\,ds = \int_\sigma \Delta U\,dx\,dy,$$

где σ — круг, ограниченный γ. Так как $\Delta U > 0$, то получается противоречие, а отсюда и следует наше утверждение.

в центре, то, очевидно, $y\cos(n, x) - x\cos(n, y) = 0$ на границе. Поэтому на всей границе должно быть

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Значит, $\varphi = \text{const}$, и мы можем взять $\varphi = 0$. Смещения и напряжения будут даны формулами:

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = 0, \tag{1}$$

$$X_z = -\mu\tau y, \quad Y_z = \mu\tau x \tag{2}$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю).

Как мы видим, поперечные сечения в нашем частном случае остаются плоскими, чего нет в других случаях.

Жесткость при кручении согласно формуле (9) § 131 будет равна

$$D = \mu \iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \mu I, \tag{3}$$

где I — полярный момент инерции сечения относительно центра. В случае кругового сечения радиуса R, как известно,

$$I = \frac{\pi R^4}{2}, \tag{4}$$

а в случае кругового кольца

$$I = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4), \tag{5}$$

где R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней окружностей.

§ 134. Применение конформного отображения [1]) Задача кручения может считаться решенной, если мы сумеем отобразить область S на круг (в этом случае, конечно, S должна быть односвязной областью). Пусть, действительно,

$$\zeta = x + iy = \omega(\zeta) \tag{1}$$

есть соотношение, отображающее область S на круг $|\zeta| < 1$, окружность которого, как раньше, обозначим через γ.

Если мы выразим комплексную функцию кручения $F(\zeta)$ через ζ и положим:

$$\varphi + i\psi = F(\zeta) = f(\zeta), \tag{2}$$

то $f(\zeta)$ будет функцией, голоморфной внутри γ. Действительная часть ψ функции

$$\frac{1}{i} f(\zeta) = \psi - i\varphi \tag{3}$$

---

[1]) Изложенные в настоящем параграфе результаты были даны автором в статьях [12, 13]. Подробное изложение этих результатов с некоторыми новыми их применениями дано в книге И. С. Сокольникова (Sokolnikoff [1]).

будет удовлетворять на γ следующему граничному условию [см. § 132, формула (4)]:

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \text{const} = \frac{1}{2}z\bar{z} + \text{const},$$

или, в силу соотношения (1), обозначая, как всегда, через $\sigma = e^{i\vartheta}$ точки на γ,

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} \text{ на } \gamma; \tag{4}$$

мы отбросили справа произвольную постоянную.

Но мы имеем уже готовую формулу, позволяющую найти голоморфную внутри γ функцию по граничным значениям ее действительной части. Именно, по формуле (5) § 77 имеем:

$$\frac{1}{i}f(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{2(\sigma-\zeta)}d\sigma + \text{const},$$

откуда, наконец,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma + \text{const}, \tag{5}$$

и задача решена.

Если $\omega(\zeta)$ — *рациональная функция*, то произведение $\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} = \omega(\sigma)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ будет также рациональной функцией от σ. Интеграл в правой части (5) вычислится в этом случае без всякого труда при помощи теоремы о вычетах и даст, очевидно, рациональную функцию от ζ, так что *решение* задачи *выразится через элементарные функции.*

Вообще, если выражение $\omega(\sigma)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, рассматриваемое как функция от σ, представляет собой однозначную аналитическую функцию внутри γ (или вне γ), непрерывную вплоть до γ и имеющую внутри (вне) γ конечное число полюсов, то интеграл в правой части (5) сразу вычисляется на основании теоремы о вычетах.

Для вычисления жесткости при кручении D можно воспользоваться простой формулой, которую сейчас выведем [1]).

Имеем (§ 131):

$$D = \mu\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy + \mu\iint_S \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy = \mu I + \mu D_0, \tag{6}$$

где I есть полярный момент инерции площади S относительно O, а

$$D_0 = \iint_S \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy = \iint_S \left\{\frac{\partial}{\partial y}(x\varphi) - \frac{\partial}{\partial x}(y\varphi)\right\}dx\,dy. \tag{7}$$

Применяя формулу Остроградского — Грина, получаем:

$$D_0 = -\int_L \varphi\cdot(x\,dx + y\,dy) = -\int_L \varphi\,d\frac{1}{2}r^2, \tag{8}$$

где L — контур области.

[1]) Эта формула указана в работах автора [12, 13].

Замечая, что на контуре $r^2 = z\bar{z} = \omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}$ и что

$$\varphi = \frac{1}{2}[f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}],$$

можем переписать последнюю формулу так:

$$D_0 = -\frac{1}{4}\int_\gamma \{f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}\}\, d\{\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}\}. \tag{9}$$

Если $\omega(\zeta)$ — рациональная функция, то $f(\zeta)$ будет также рациональной (см. выше), а значит, будут рациональными и функции $\overline{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, $\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, и предыдущий интеграл легко вычислится в конечном виде на основании теоремы о вычетах.

В этом случае иногда удобно также преобразовать выражение для

$$I = \iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_S \left\{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy^2)\right\} dx\, dy =$$

$$= -\int_L xy\,(x\,dx - y\,dy).$$

Замечая, что

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

легко выводим:

$$I = -\frac{1}{8i}\int_L (z^2 - \bar{z}^2)(z\,dz + \bar{z}\,d\bar{z}).$$

Но, очевидно,

$$\int_L z^3\,dz = \int_L \bar{z}^3\,d\bar{z} = 0, \qquad \int_L z^2\bar{z}\,d\bar{z} = \int_L z^2 d\,\frac{1}{2}\bar{z}^2 = -\int_L \bar{z}^2 z\,dz$$

(последнее равенство мы получаем, интегрируя по частям). Таким образом, получаем:

$$I = \frac{1}{4i}\int_L \bar{z}^2 z\,dz = \frac{1}{4i}\int_\gamma \overline{\omega^2(\sigma)}\,\omega(\sigma)\,d\omega(\sigma). \tag{10}$$

Эта формула в случае, когда функция $\omega(\zeta)$ рациональна, позволяет элементарно вычислить I в конечном виде.

Так же легко решить задачу кручения в случае двусвязной области, когда известна функция $\omega(\zeta)$, отображающая эту область на круговое кольцо. Действительно, в этом случае задача сводится к определению функции $f(\zeta)$, голоморфной внутри кольца и удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\frac{1}{i} f(\zeta) = \frac{1}{2}\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)} + C_1 \quad \text{на } \gamma_1, \\ &\operatorname{Re}\frac{1}{i} f(\zeta) = \frac{1}{2}\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)} + C_2 \quad \text{на } \gamma_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где γ_1 и γ_2 — окружности, ограничивающие кольцо, а C_1, C_2 — две действительные постоянные, из которых одна может быть зафиксирована произвольно. Мы приходим таким образом к задаче, решенной в § 62 (замечание).

В нашем случае роль функции $F(z)$ играет функция $\frac{1}{i} f(\zeta)$, а в разложении (7) § 62 (где надо написать ζ вместо z) следует положить $A = 0$, ибо иначе $f(\zeta)$ была бы многозначной.

Роль функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$ § 62 играют соответственно функции:

$$\frac{1}{2}\omega(\varrho_1 e^{i\vartheta})\,\overline{\omega(\varrho_1 e^{i\vartheta})} + C_1, \qquad \frac{1}{2}\omega(\varrho_2 e^{i\vartheta})\,\overline{\omega(\varrho_2 e^{i\vartheta})} + C_2; \tag{12}$$

здесь ϱ_1 и ϱ_2 обозначают то, что там было обозначено через R_1 и R_2.

Если положить $C_2 = 0$, то постоянная C_1 определится при помощи уравнений (9) § 62.

Вычислив $f(\zeta)$, мы можем для вычисления напряжений либо вернуться к старым переменным x, y, либо же выразить компоненты напряжения при помощи криволинейных координат, связанных с конформным отображением (см. § 49).

Обозначим через $\boldsymbol{T}$ вектор касательного напряжения, действующего в некоторой точке сечения S. Его проекции на оси Ox и Oy суть X_z, Y_z.

Проекции же T_ρ, T_ϑ этого вектора на оси (ϱ), (ϑ) криволинейных координат будут даны формулой (4) § 49, которую мы напишем так, перейдя к сопряженным значениям:

$$T_\rho - iT_\vartheta = \frac{\zeta}{\varrho}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,(X_z - iY_z),$$

откуда, подставляя на место $X_z - iY_z$ значение (6) § 132 и замечая, что

$$F'(\delta) = \frac{dF}{d\delta} = \frac{df}{d\zeta}\cdot\frac{1}{\omega'(\zeta)},$$

получаем окончательно весьма простую и удобную формулу:

$$T_\rho - iT_\vartheta = \frac{\mu\tau\zeta}{\varrho\,|\omega'(\zeta)|}\{f'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)}\,\omega'(\zeta)\}. \tag{13}$$

На границе области должно быть $T_\rho = 0$; поэтому предыдущая формула позволяет непосредственно определить контурное значение касательного напряжения T_ϑ и, в частности, найти его максимум.

§ 134а. Примеры. Применим изложенный в предыдущем параграфе метод к некоторым частным примерам.

1. Эпитрохоидальное сечение. Пусть сечение S ограничено эпитрохоидой, рассмотренной в § 48, п. 3 (рис. 23 на стр. 174).

В этом случае [1])

$$\delta = \omega(\zeta) = b(\zeta^n + a\zeta) \quad (n\text{—целое число} > 1,\ b > 0,\ a \geqslant n). \tag{1}$$

[1]) Мы несколько изменяем обозначения § 48, а именно: пишем теперь b вместо $R \cdot m$ и $1/a$ вместо m.

По формуле (5) § 134 имеем (если заменить $\bar{\sigma}$ на $\frac{1}{\sigma}$):

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma b^2(\sigma^n+a\sigma)\left(\frac{1}{\sigma^n}+\frac{a}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\text{const}=$$

$$=\frac{ib^2}{2\pi i}\int_\gamma\left(1+a^2+a\sigma^{n-1}+\frac{a}{\sigma^{n-1}}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\text{const},$$

откуда на основании формулы (3) § 70 сразу получаем:

$$f(\zeta)=ib^2a\zeta^{n-1} \tag{2}$$

(мы отбросили здесь произвольное постоянное слагаемое), и задача решена.

Для компонент T_ρ, T_ϑ напряжения получим по формуле (13) § 134:

$$T_\rho-iT_\vartheta=\mu\tau\zeta\frac{iab^2(n-1)\zeta^{n-2}-ib^2(\bar{\zeta}^n+a\bar{\zeta})(n\zeta^{n-1}-a)}{\varrho\,|\,\omega'(\zeta)\,|},$$

или, полагая $\zeta=\varrho e^{i\vartheta}$ и отделяя действительные части от мнимых,

$$T_\rho=-\frac{\mu\tau ab^2(n-1)\varrho^{n-2}(1-\varrho^2)\sin(n-1)\vartheta}{|\,\omega'(\zeta)\,|},$$

$$T_\vartheta=-\mu\tau b^2\frac{a\varrho^{n-2}[n-1-(n+1)\varrho^2]\cos(n-1)\vartheta-n\varrho^{2n-1}-a^2\varrho}{|\,\omega'(\zeta)\,|},$$

где

$$|\omega'(\zeta)|=\sqrt{\omega'(\zeta)\,\overline{\omega'(\zeta)}}=b\sqrt{n^2\varrho^{2n-2}+2an\varrho^{n-1}\cos(n-1)\vartheta+a^2}.$$

На контуре (т. е. при $\varrho=1$) будем иметь: $T_\rho=0$ и

$$T=T_\vartheta=\mu\tau b\frac{n+2a\cos(n-1)\vartheta+a^2}{\sqrt{n^2+2an\cos(n-1)\vartheta+a^2}}.$$

Если $n<a$, т. е. если контур не имеет точек возврата, то максимальное значение для T соответствует точкам контура, определяемым уравнением $\cos(n-1)\vartheta=-1$; это — точки, ближайшие к центру. Максимальное значение T равно:

$$T_{\max}=\mu\tau b\frac{a^2-2a+n}{a-n}.$$

Если a приближается к n, то $T_{\max}$ возрастает беспредельно. В случае контура с точками возврата, как на рис. 23, T обращается в ∞ в этих точках.

Для жесткости при кручении легко получим при помощи формул (9) и (10) § 134:

$$D=\frac{\mu\pi b^4}{2}(a^4+4a^2+n).$$

2. Лемниската Бута[1]. Об отображении области, ограниченной этой кривой, было сказано в § 48, п. 6 (рис. 27). Изменяя несколько

[1]) Решение этого примера (как и других, приводимых в настоящем параграфе) было опубликовано автором в 1929 г. в цитированных выше статьях и воспроизведено в первом издании этой книги. В 1942 г. Хиггинс (T. J. Higgins) опубликовал решение той же задачи, полученное более сложным путем (см. Sokolnikoff [1], стр. 184).

обозначения, положим:

$$\omega(\zeta)=\frac{k\zeta}{\zeta^2+a} \quad (a>1,\ k>0); \tag{3}$$

тогда для функции $f(\zeta)$ получим формулу:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{k^2\sigma^2\,d\sigma}{(\sigma^2+a)(1+a\sigma^2)(\sigma-\zeta)}.$$

Подынтегральное выражение, рассмотренное как функция от σ, имеет вне γ два простых полюса: $\sigma_1=i\sqrt{a}$ и $\sigma_2=-i\sqrt{a}$; при больших $|\sigma|$ она порядка $1/\sigma^3$.

Поэтому на основании теоремы о вычетах

$$f(\zeta)=-i(A_1+A_2),$$

где A_1 и A_2 — вычеты, соответствующие точкам σ_1 и σ_2.

Имеем

$$A_1=\left[(\sigma-i\sqrt{a})\frac{k^2\sigma^2}{(\sigma^2+a)(1+a\sigma^2)(\sigma-\zeta)}\right]_{\sigma=i\sqrt{a}}=-\frac{k^2\sqrt{a}}{2i(1-a^2)(i\sqrt{a}-\zeta)};$$

таким же образом получаем:

$$A_2=-\frac{k^2\sqrt{a}}{2i(1-a^2)(i\sqrt{a}+\zeta)},$$

откуда, наконец,

$$f(\zeta)=\frac{iak^2}{(a^2-1)(\zeta^2+a)}. \tag{4}$$

Компоненты напряжения вычисляются, как в предыдущем примере. Мы ограничиваемся вычислением значения $T=T_{\vartheta}$ на контуре. После простых вычислений имеем:

$$T=\frac{\mu\tau k(1+a^2)}{(a^2-1)\sqrt{1-2a\cos\vartheta+a^2}}.$$

Максимальное значение T получается при $\cos 2\vartheta=1$, т. е. на концах малой оси:

$$T_{\max}=\frac{\mu\tau k(a^2+1)}{(a+1)(a-1)^2}$$

Для жесткости при кручении легко получим:

$$D=\frac{\mu\pi k^4(a^4+1)}{2(a^2-1)^4}.$$

3. Петля лемнискаты Бернулли. Приведем еще пример односвязной области, когда $\omega(\zeta)$ не есть рациональная функция.

Положим, считая $|\zeta|<1$:

$$\zeta=\omega(\zeta)=a\sqrt{1+\zeta} \quad (a>0), \tag{5}$$

причем выбирается та ветвь многозначной функции $\sqrt{1+\zeta}$, которая равна 1 при $\zeta=0$. Иначе говоря (рис. 57а),

$$\omega(\zeta)=a\sqrt{r}\,e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Когда ζ описывает окружность γ радиуса 1, то

$$\varphi = \frac{\vartheta}{2} \quad (-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$$

и

$$r = 2\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Следовательно,

$$z = a\sqrt{2\cos\frac{\vartheta}{2}}\, e^{\frac{i\vartheta}{4}}.$$

Если R и ψ обозначают модуль и аргумент z, то на основании предыдущей формулы

$$R = a\sqrt{2\cos\frac{\vartheta}{2}}, \qquad \psi = \frac{\vartheta}{4},$$

откуда

$$R = a\sqrt{2\cos 2\psi}. \tag{6}$$

Значит, z описывает одну петлю лемнискаты Бернулли (рис. 57б)

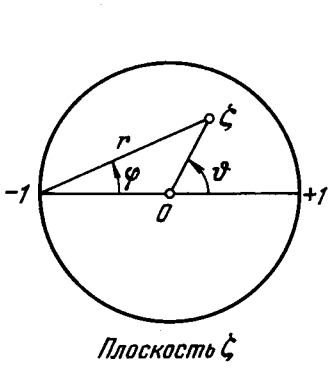


Рис. 57а.

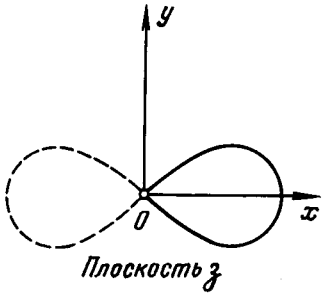


Рис. 57б.

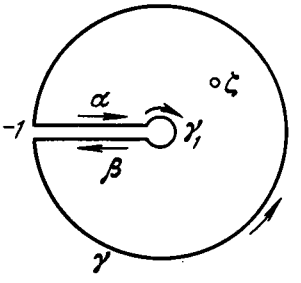


Рис. 58.

и соотношение (5) отображает область, заключенную внутри этой петли, на круг $|\zeta| < 1$.

Для функции $f(\zeta)$ имеем формулу

$$f(\zeta) = \frac{a^2}{2\pi}\int_\gamma \sqrt{1+\sigma}\,\sqrt{1+\frac{1}{\sigma}}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{a^2}{2\pi}\int_\gamma \frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}, \tag{7}$$

где следует взять ту ветвь функции $(1+\sigma)/\sqrt{\sigma}$, которая положительна на γ. Для этого надо взять

$$\sqrt{\sigma} = e^{\frac{i\vartheta}{2}}.$$

Подынтегральная функция будет однозначна в области, ограниченной γ и разрезанной, как указано на рис. 58.

Поэтому (обозначения указаны на чертеже; в частности, γ_1 обозначает бесконечно малую окружность)

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma + \int_\alpha + \int_\beta + \int_{\gamma_1}\right] = A,$$

где A — вычет, соответствующий точке $\sigma = \zeta$, равный, очевидно,

$$\frac{1+\zeta}{\sqrt{\zeta}}.$$

Путем простого преобразования интегралов, взятых по α и β (интеграл по γ_1, очевидно, бесконечно мал), получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1+\sigma}{\sqrt{\sigma}}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1+\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{1-t}{\sqrt{t}}\frac{dt}{t+\zeta}, \tag{8}$$

откуда после элементарных выкладок получим, отбросив аддитивную постоянную:

$$f(\zeta)=\frac{2ia^2}{\pi}\cdot\frac{1+\zeta}{\sqrt{\zeta}}\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta},$$

где под

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta}=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\sqrt{\zeta}}{1-i\sqrt{\zeta}}$$

следует понимать ветвь, определяемую рядом

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\zeta}=\sqrt{\zeta}-\frac{(\sqrt{\zeta})^3}{3}+\frac{(\sqrt{\zeta})^5}{5}-\ldots=\sqrt{\zeta}\left(1-\frac{\zeta}{3}+\frac{\zeta^2}{5}-\ldots\right).$$

Таким образом, задача решена.

4. К о н ф о к а л ь н ы е э л л и п с ы. Н е к о н ц е н т р и ч е с к и е о к р у ж н о с т и. Легко также получается решение при помощи отображения на круговое кольцо для случая, когда сечение (полого) цилиндра ограничено двумя конфокальными эллипсами или двумя (неконцентрическими) окружностями.

Решение для этого последнего случая можно непосредственно получить из приводимого ниже решения примера 1 § 140а.

§ 135. Растяжение продольными силами. Здесь решение совершенно элементарно; оно в сущности уже получено нами в § 19. Именно, если возьмем:

$$Z_z=\frac{F}{S},\quad X_x=Y_y=Y_z=Z_x=X_y=0, \tag{1}$$

где F — величина заданной силы, считаемая положительной в случае растяжения, а S — площадь поперечного сечения бруса, то, очевидно, все требуемые условия будут удовлетворены. Полученное решение соответствует равномерному распределению нормальных напряжений на основаниях. Совокупность напряжений, приложенных к верхнему основанию, будет эквивалентна одной силе F, приложенной к его центру тяжести.

Если заданная сила приложена не в центре тяжести основания, то ее все же можно перенести туда, присоединив пару, плоскость которой перпендикулярна основанию (т. е. изгибающую пару). Таким образом, на полученное решение придется наложить решение задачи об изгибе парой, указанное в следующем параграфе.

Смещения, соответствующие напряжениям (1), как показывает непосредственная проверка, будут:

$$u = -\frac{\sigma F}{SE}x, \quad v = -\frac{\sigma F}{SE}y, \quad w = \frac{F}{SE}z \tag{2}$$

или всякие другие, отличающиеся от предыдущих жестким перемещением бруса как целого.

Величина SE, являющаяся коэффициентом пропорциональности между растягивающей силой F и относительным удлинением бруса, может быть названа *жесткостью при растяжении (сжатии)*.

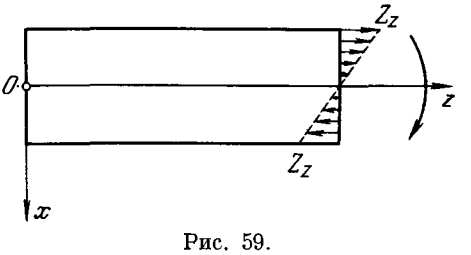


Рис. 59.

§ 136. Изгиб парами, приложенными на концах. И в этом случае решение вполне элементарно.

Согласно распространенному обычаю будем изображать на чертеже брус расположенным горизонтально, направив ось Oz слева направо, а ось Ox — вертикально вниз, как указано на рис. 59 (ось Oy не изображена; она направлена от читателя, ибо мы применяем правую систему координат).

Основания, которые мы раньше называли «нижним» и «верхним», теперь будут соответственно «левым» и «правым».

Кроме того, будем считать, что точка O взята *в центре тяжести левого основания*, так что ось Oz есть «центральная ось», т. е. ось, проходящая через центры тяжести сечений.

Постараемся удовлетворить условиям задачи, полагая

$$Z_z = ax, \quad X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0. \tag{а}$$

Эти значения, очевидно, удовлетворяют уравнениям равновесия и уравнениям совместимости (§ 130). Посмотрим, будут ли напряжения, приложенные (справа) к какому-либо поперечному сечению S, эквивалентны изгибающей паре [1]).

Главный вектор этих усилий равен нулю, так как

$$\iint_S Z_z\,dx\,dy = a\iint_S x\,dx\,dy = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу того, что начало координат находится в центре тяжести сечения.

Главный момент упомянутых усилий относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения и параллельной оси Oy, равен

$$M = -\iint_S Z_z x\,dx\,dy = -a\iint_S x^2\,dx\,dy = -aI, \tag{б}$$

где I — момент инерции основания S относительно оси Oy.

[1]) Ясно, что раз усилия, приложенные, скажем, к правому основанию, должны быть эквивалентны паре, то усилия, приложенные справа к любому поперечному сечению, должны быть эквивалентны той же паре.

Наконец, главный момент этих усилий относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения и параллельной оси Ox, равен

$$\iint_S Z_z y\,dx\,dy = a\iint_S xy\,dx\,dy. \qquad \text{(в)}$$

Если

$$\iint_S xy\,dx\,dy = 0,$$

т. е. если оси координат Ox, Oy суть главные оси инерции сечения S (относительно центра тяжести его), то момент (в) равен нулю и усилия эквивалентны паре, векторный момент которой параллелен оси Oy и определяется формулой (б). При заданной величине M постоянная a определится формулой

$$a = -\frac{M}{I}.$$

Предположим, что координатные оси выбраны только что указанным образом. Тогда мы получим решение задачи изгиба бруса парами, приложенными на концах, моменты которых параллельны одной из главных осей инерции сечения относительно центра его тяжести.

Резюмируем полученный результат. Пусть на правое основание бруса действует пара, векторный момент которой направлен по одной из главных осей инерции основания относительно центра тяжести. Если за оси Ox, Oy взять главные оси инерции какого-либо сечения, например левого основания (относительно центра тяжести), направив ось Oy параллельно моменту пары, то решение задачи изгиба будет дано формулами:

$$Z_z = -\frac{M}{I}x,\quad X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0. \qquad (1)$$

Здесь I обозначает момент инерции основания относительно оси Oy, а M — алгебраическое значение момента пары (положительное, если векторный момент направлен так же, как ось Oy).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что смещения, соответствующие предыдущему распределению напряжений, даются формулами:

$$u = \frac{M}{2IE}(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2),\quad v = \frac{M}{IE}\sigma xy,\quad w = -\frac{M}{IE}xz; \qquad (2)$$

к правым частям можно еще прибавить члены, выражающие жесткое перемещение всего бруса.

Плоскость $x = 0$ является «нейтральной плоскостью»: волокна, расположенные в ней, не растянуты и не сжаты. Волокна, расположенные с одной стороны этой плоскости, растянуты, а расположенные с другой — сжаты.

Нормальное напряжение распределяется на сечении по линейному закону, выражаемому формулой (1) (см. также рис. 59).

Точки «центрального волокна», имевшие до деформации координаты (0, 0, z), переходят, как показывают формулы (2), в точки с координатами ξ, η, ζ, где

$$\xi = \frac{M}{2IE} z^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = z. \tag{3}$$

Значит, центральное волокно остается в плоскости Oxz, называемой поэтому *плоскостью изгиба*. Она параллельна в нашем случае плоскости изгибающей пары. Радиус кривизны R этой линии (после деформации) определяется (с точностью до малых величин высшего порядка) формулой [1]) (мы считаем, что $R < 0$, если выпуклость направлена вниз):

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\xi}{dz^2},$$

откуда вытекает важное соотношение:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \tag{4}$$

выражающее так называемый *закон Бернулли — Эйлера*: *кривизна центрального волокна пропорциональна изгибающему моменту*. Величина EI называется *жесткостью при изгибе*. Так как для R получилось постоянное значение, то центральное волокно в изогнутом состоянии представляет собою окружность [2]) радиуса R, который надо считать весьма большим ввиду малой деформации, а именно: величина $\frac{1}{R}$ должна быть того же порядка малости, который допускается для деформаций.

Точки, расположенные до деформации в нормальном сечении $z = c$, переходят после деформации в точки с координатами ξ, η, ζ, причем, в частности, на основании последней из формул (2)

$$\zeta = c + w = c - \frac{M}{EI} xc = c\left(1 - \frac{x}{R}\right).$$

Заменяя в правой части x через ξ, что мы имеем право сделать ввиду малости множителя $\frac{1}{R}$, получаем:

$$\zeta = c\left(1 - \frac{\xi}{R}\right);$$

[1]) По известной формуле имеем:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} = \xi''(1+\xi'^2)^{-3/2} = \xi''\left(1 - \frac{3}{2}\xi'^2 + \dots\right),$$

где штрихи обозначают производные по z. Но ввиду малости деформации можно отбросить все члены указанного разложения, кроме первого, а это приводит к формуле текста.

[2]) Уравнение (3) этой линии

$$\xi = \frac{z^2}{2R},$$

представляющее уравнение параболы, не противоречит этому утверждению, так как эта парабола отличается от окружности радиуса R величинами высших порядков.

это есть уравнение плоскости (перпендикулярной к плоскости изгиба). Итак, *нормальные сечения остаются плоскими.*

Если момент изгибающей пары не направлен по одной из главных осей сечения, то эту пару всегда можно разложить на две, каждая из которых удовлетворяет этому условию, и решение задачи получим, налагая два решения только что указанного вида. В этом общем случае плоскость изгиба не совпадает с плоскостью пары; однако и здесь она перпендикулярна к нейтральной плоскости, существующей и в этом случае.

Мы предоставляем читателю доказать эти простые свойства.

§ 137. Изгиб поперечной силой. Расположим оси координат так же, как и в предыдущем параграфе, т. е. возьмем начало координат в центре тяжести одного из оснований («левое основание»), а оси Ox, Oy направим по главным осям инерции этого основания относительно центра тяжести.

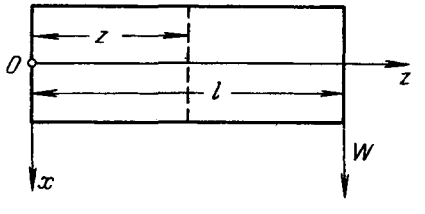


Рис. 60а.

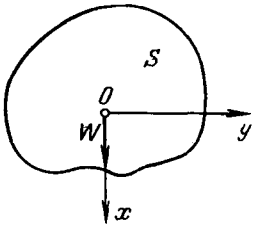


Рис. 60б.

Пусть усилия, действующие на правое основание, эквивалентны одной силе W, приложенной к его центру тяжести и направленной параллельно оси Ox (рис. 60а, 60б). Главный момент M усилий, приложенных (справа) к какому-либо поперечному сечению S, отстоящему от левого основания на расстояние z, относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения и параллельной оси Oy, будет, очевидно, определяться формулой:

$$M = W(l - z), \tag{1}$$

где l — длина бруса.

Если бы на рассматриваемое сечение действовала только пара с моментом M, тогда мы могли бы принять на основании результата предыдущего параграфа, что

$$Z_z = -\frac{M}{I}x,$$

где I — момент инерции сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси Oy.

Попытаемся и теперь удовлетворить условиям задачи, приняв, что

$$Z_z = -\frac{M}{I}x = -\frac{W(l-z)x}{I}. \tag{2}$$

Ясно, однако, что теперь мы не можем уже считать, что все остальные компоненты напряжения равны нулю, ибо тогда усилия, действующие на сечение, не могли бы дать главного вектора W, расположенного в плоскости сечения. Но все же попытаемся решить задачу, считая

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \tag{3}$$

Подставляя эти значения в уравнения (1) § 129, получаем:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Wx}{I} = 0. \tag{4}$$

Из двух предпоследних уравнений следует, что X_z и Y_z не зависят от z. Уравнение же (4) можно переписать так:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(Y_z + \frac{Wxy}{I}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$X_z = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Y_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{Wxy}{I}, \tag{5}$$

где Ω — некоторая функция от x и y. Подставляя выражения для компонент напряжения в уравнения совместимости (4) § 130, увидим, что первое, второе, третье и шестое из них удовлетворяются тождественно, а два остальных дают:

$$\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\Omega}{\partial y} = -\frac{W}{(1+\sigma)I},$$

откуда следует, что

$$\Delta\Omega = -\frac{Wy}{(1+\sigma)I} - 2\mu\tau, \tag{6}$$

где через $-2\mu\tau$ обозначена некоторая постоянная.

Замечая, что имеем тождественно:

$$\Delta\left\{-\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 y + \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{y^3}{3}\right] - \frac{\mu\tau}{2}(x^2+y^2)\right\} = -\frac{Wy}{(1+\sigma)I} - 2\mu\tau,$$

можем написать:

$$\Omega = \psi_1 - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{1}{2}\sigma x^2 y + \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\frac{y^3}{3}\right\} - \frac{\mu\tau}{2}(x^2+y^2), \tag{7}$$

где ψ_1 — некоторая гармоническая функция.

Если φ_1 обозначает гармоническую функцию, с которой сопряжена функция ψ_1, т. е. такую, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x},$$

тогда, очевидно, соотношения (5) могут быть написаны так:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \mu\tau y - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\}, \\ Y_z &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mu\tau x - \frac{W(2+\sigma)}{2(1+\sigma)I}xy. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Наконец, мы всегда можем написать:

$$\varphi_1 = \mu\tau\varphi - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\chi, \tag{9}$$

где φ — функция кручения, определенная выше (§ 131), а χ — некоторая новая гармоническая функция.

Тогда будем иметь окончательно:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\}, \\ Y_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial \chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}, \\ Z_z &= -\frac{W(l-z)}{I}x. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Легко вычислить смещения, соответствующие этим напряжениям [1]). Читатель легко проверит, что следующие выражения удовлетворяют соотношениям (2) § 129:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau zy + \frac{W}{IE}\left\{\frac{1}{2}\sigma(l-z)(x^2-y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right\}, \\ v &= \tau zx + \frac{W}{IE}\sigma(l-z)xy, \\ w &= \tau\varphi - \frac{W}{IE}\left\{x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + \chi + xy^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Значит, самые общие выражения для смещений получим, прибавив еще жесткое перемещение бруса как целого.

Последняя из формул (11) показывает, что функция χ должна быть однозначной, так как w и φ однозначны.

Если подставить в граничное условие на боковой поверхности

$$X_z\cos(n, x) + Y_z\cos(n, y) = 0 \tag{а}$$

выражения (10) и принять во внимание условие (6) § 131, которому должна удовлетворять функция кручения φ, то получим:

$$\frac{d\chi}{dn} = -\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos(n, x) - (2+\sigma)xy\cos(n, y) \tag{12}$$

на границе L области S.

Значит, для нахождения функции χ мы должны решить задачу Неймана, так же как и для нахождения функции кручения.

---

[1]) Эти вычисления можно произвести по общим формулам § 15; можно так же применить простые элементарные приемы (см., например, Love [1], гл. XV).

Легко видеть, что условие существования решения задачи Неймана

$$\int_L \left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos(n,\ x)+(2+\sigma)\,xy\cos(n,\ y)\right\}ds=0$$

соблюдено в нашем случае. Действительно, если применить формулу Остроградского — Грина, левая часть обратится в

$$2(1+\sigma)\iint_S x\,dx\,dy.$$

Но последний интеграл равен нулю, так как, по условию, центр тяжести S находится в O.

Легко вычислить, что главный вектор внешних напряжений, приложенных к правому основанию, параллелен оси Ox и равен W по алгебраическому значению. В самом деле, учитывая формулу (4), имеем:

$$\iint_S X_z\,dx\,dy=\iint_S\left\{X_z+x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{Wx}{I}\right)\right\}dx\,dy=$$

$$=\iint_S\left\{\frac{\partial(xX_z)}{\partial x}+\frac{\partial(xY_z)}{\partial y}\right\}dx\,dy+\frac{W}{I}\iint_S x^2\,dx\,dy=$$

$$=\int_L x\,[X_z\cos(n,\ x)+Y_z\cos(n,\ y)]\,ds+W=W,$$

так как последний интеграл равен нулю в силу соотношения (а).

Аналогично:

$$\iint_S Y_z\,dx\,dy=\iint_S\left\{Y_z+y\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{Wx}{I}\right)\right\}dx\,dy=$$

$$=\iint_S\left\{\frac{\partial(yX_z)}{\partial x}+\frac{\partial(yY_z)}{\partial y}\right\}dx\,dy+\frac{W}{I}\iint_S xy\,dx\,dy=$$

$$=\int_L y\,[X_z\cos(n,\ x)+Y_z\cos(n,\ y)]\,ds+\frac{W}{I}\iint_S xy\,dx\,dy=0,$$

ибо первый интеграл правой части равен нулю в силу соотношения (а), а второй — в силу того, что оси Ox, Oy являются главными осями инерции сечения S.

Однако, если оставить τ произвольным, то усилия, приложенные к этому основанию, дадут еще закручивающую пару; именно: члены, содержащие τ, дадут пару с моментом, определяемым формулой (8) § 131, а члены, содержащие W,— пару с моментом

$$\frac{W}{2(1+\sigma)I}\iint_S\left\{y\frac{\partial\chi}{\partial x}-x\frac{\partial\chi}{\partial y}+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^3-\left(2+\frac{1}{2}\sigma\right)x^2y\right\}dx\,dy. \quad (13)$$

Чтобы избавиться от закручивающей пары, достаточно придать τ такое значение, чтобы сумма указанных моментов равнялась нулю.

Члены, содержащие W, определяют *изгиб* бруса. И здесь плоскость $x=0$ является нейтральной плоскостью, плоскость Oxz — плоскостью

изгиба. Центральная линия (т. е. линия $x = 0$, $y = 0$, проходящая через центры тяжести сечений) обращается в кривую, расположенную в плоскости Oxz, причем радиус кривизны ее (в данной точке, определяемой координатой z) подчиняется тому же закону Бернулли — Эйлера:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \tag{14}$$

где

$$M = W(l - z)$$

обозначает момент усилий, действующих (справа) на поперечное сечение, проходящее через данную точку, относительно оси, находящейся в плоскости сечения и параллельной оси Oy.

Кроме того, члены, содержащие τ, сообщают брусу закручивание вокруг оси Oz.

Непосредственно ясно, что в случае сечения, симметричного относительно оси Ox, будем иметь $\tau = 0$ и закручивание отсутствует.

Наконец, если сила W не параллельна одной из главных осей инерции основания и не проходит через его центр тяжести, то точку приложения можно все же перенести в центр тяжести, присоединив подходящую закручивающую пару, а затем разложить силу на две компоненты, параллельные главным осям инерции. Тогда искомое решение получится наложением решения задачи кручения и двух задач изгиба силами, параллельными главным осям.

Вернемся к рассмотренному выше случаю. Вместо функции χ можно ввести сопряженную с ней функцию χ', определяемую равенствами:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi'}{\partial x}.$$

Тогда, принимая во внимание соотношение [ср. § 132, формула (2)]

$$\frac{d\chi}{dn} = \frac{d\chi'}{ds},$$

получим для χ' граничное условие:

$$\chi' = F_k(s) + C_k \quad \text{на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{15}$$

где L_k обозначают, как в § 132, замкнутые контуры, входящие в состав границы L области S, C_k — постоянные и

$$\begin{aligned} F_k(s) &= -\int \left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^2\right] \cos(n, x)\, ds - (2+\sigma) \int xy \cos(n, y)\, ds = \\ &= -\int \left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^2\right] dy + (2+\sigma) \int xy\, dx = \\ &= -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^3 + \int \left\{(2+\sigma)\, xy\, dx - \frac{1}{2}\sigma x^2\, dy\right\} + \text{const}, \end{aligned}$$

где интегралы взяты по L_k, начиная от произвольной точки этого контура до переменной точки (x, y).

Замечая, что

$$\int x^2\, dy = x^2 y - 2 \int xy\, dx + \text{const},$$

можем предыдущую формулу заменить следующей:

$$F_k(s) = -\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)\frac{y^3}{3} - \sigma\frac{x^2y}{2} + 2(1+\sigma)\int xy\,dx + \text{const}. \qquad (16)$$

Так как последний интеграл, будучи распространен на весь контур L_k, вообще говоря, не равен нулю [1]), то функция χ' будет многозначной. Но в случае односвязного сечения, ограниченного одним замкнутым контуром L, интеграл, взятый по всему контуру L, будет равен нулю [2]) и χ' будет однозначной функцией, как и следовало ожидать.

Иногда удобно так же, как и в случае кручения, рассматривать функцию комплексного переменного

$$G(\mathfrak{z}) = \chi + i\chi'. \qquad (17)$$

§ 138. О решении задачи изгиба для различных сечений. Сен-Венан в своем основном мемуаре об изгибе (Saint-Venant [2]), а также в других статьях дал решение задачи изгиба для ряда сечений, в частности для прямоугольного. Решения Сен-Венана сопровождаются, как и для случая кручения, подробным исследованием, численными примерами и графическими изображениями. Мы отсылаем читателя к упомянутому мемуару, а также к курсам теории упругости и к книге Тодхёнтера и Пирсона (Todhunter a. Pearson [1]).

И в случае изгиба конформное отображение может оказать такие же услуги, как и в случае кручения. Легко, в частности, применить (с очевидными изменениями) сказанное в § 134 к интересующему нас случаю [3]) и решить таким образом задачу изгиба для всех случаев, рассмотренных в § 134а. Но мы на этом здесь не останавливаемся и ограничиваемся простым примером, приводимым в следующем параграфе.

§ 138а. Пример. Изгиб кругового цилиндра или трубы[4]). Рассмотрим сечение, имеющее форму кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями L_1 и L_2 радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$).

Мы имеем в нашем кольце (ср. § 62, замечание):

$$G(\mathfrak{z}) = \chi + i\chi' = A\ln\mathfrak{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}(a_k + ib_k)\mathfrak{z}^k, \qquad (1)$$

[1]) По формуле Остроградского — Грина

$$\int_{L_k} xy\,dx = \mp\iint_{S_k} x\,dx\,dy,$$

где S_k обозначает часть плоскости, которая охватывается контуром L_k. Верхний знак надо взять для контура L_{m+1}, а нижний — для всех остальных. Предыдущий интеграл будет равен нулю только в том случае, когда центр тяжести S_k находится на оси Oy.

[2]) См. предыдущее примечание; вспомним, что, по условию, начало координат находится в центре тяжести основания.

[3]) Это сделано в заметке Д. З. Авазашвили [1]; см. также Ghosh [1].

[4]) Ср. Love [1], глава XV.

откуда, полагая $\zeta = re^{i\vartheta}$,

$$\chi = A \ln r + \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos k\vartheta - b_k \sin k\vartheta) r^n. \qquad (2)$$

Будем в обеих частях формулы (12) § 137 подразумевать под n нормаль, направленную от центра; тогда очевидно:

$$\cos(n, x) = \cos\vartheta, \qquad \cos(n, y) = \sin\vartheta.$$

Замечая, далее, что, как показывают элементарные выкладки,

$$\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^2\right] \cos\vartheta + (2+\sigma) xy \sin\vartheta =$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) r^2 \cos\vartheta - \frac{3}{4} r^2 \cos 2\vartheta \qquad (3)$$

и что

$$\frac{d\chi}{dn} = \frac{\partial\chi}{\partial r},$$

получаем граничные условия в виде:

$$\frac{A}{r} + \sum_{-\infty}^{+\infty} k (a_k \cos k\vartheta - b_k \sin k\vartheta) r^{k-1} =$$

$$= -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) r^2 \cos\vartheta + \frac{3}{4} r^2 \cos 3\vartheta \qquad \text{при } r = R_1,\ R_2;$$

откуда, сравнивая коэффициенты при $\cos k\vartheta$, $\sin k\vartheta$, легко получаем:

$$A = 0, \quad b_k = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad a_k = 0 \quad (k \neq 0, \pm 1, \pm 3),$$

$$a_1 - R_1^{-2} a_{-1} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) R_1^2, \quad a_1 - R_2^{-2} a_{-1} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) R_2^2,$$

$$3a_3 R_1^2 - 3a_{-3} R_1^{-4} = \frac{3}{4} R_1^2, \quad 3a_3 R_2^2 - 3a_{-3} R_2^{-4} = \frac{3}{4} R_2^2.$$

Решая последние уравнения, получаем:

$$a_1 = -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right)(R_1^2 + R_2^2), \quad a_{-1} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) R_1^2 R_2^2,$$

$$a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_{-3} = 0.$$

Величины a_0, b_0 остаются произвольными, как и следовало ожидать.

Окончательно для $\chi(x, y)$ имеем выражение

$$\chi = -\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right)\left\{(R_1^2 + R_2^2) r + \frac{R_1^2 R_2^2}{r}\right\} \cos\vartheta + \frac{1}{4} r^3 \cos 3\vartheta + \text{const}, \qquad (4)$$

и задача решена.

Полагая $R_1 = 0$, получаем решение для сплошного бруса с круговым сечением.

II. КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ [1])

§ 139. Общие формулы. 1. Перейдем теперь к изучению вопроса кручения брусьев, составленных из призматических (цилиндрических) тел, сделанных из различных материалов и спаянных между собой вдоль

[1]) Результаты, изложенные в настоящем отделе, были даны в статьях автора [14, 15].

боковых поверхностей. Каждую составную часть мы будем предполагать однородной и изотропной.

Поперечное нормальное сечение S бруса будет состоять из нескольких областей (участков) S_0, S_1, S_2, . . . , S_m, соответствующих различным материалам, разграниченных некоторыми линиями, которые мы будем называть линиями раздела. В дальнейшем, говоря о части бруса, имеющей сечением область S_j, мы будем иногда называть ее просто частью S_j.

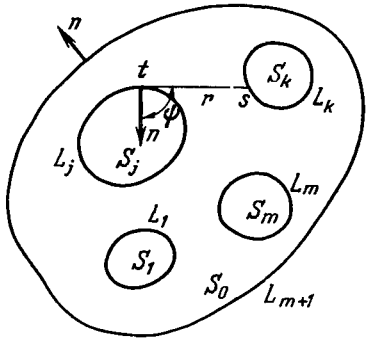


Рис. 61.

Хотя большинство излагаемых ниже результатов справедливо в самом общем случае, мы для определенности будем иногда проводить рассуждения применительно к случаю, который будем условно называть *основным*, когда рассматриваемый брус состоит из ряда параллельных сплошных стержней, не касающихся друг друга и окруженных упругой средой, заполняющей пространство между стержнями и ограниченной снаружи цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны стержням.

Поперечное нормальное сечение S такого бруса будет состоять из ряда раздельных областей S_1, S_2, . . . , S_m, соответствующих стержням, и области S_0, соответствующей окружающему материалу. Границу области S_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) мы обозначим через L_j; граница же области S_0 будет состоять из замкнутых контуров L_1, L_2, . . . , L_m, L_{m+1}, из которых последний содержит внутри себя все предыдущие (рис. 61).

2. Постараемся удовлетворить условиям задачи кручения, полагая, как для случая однородного бруса:

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau\varphi(x, y), \tag{1}$$

где постоянная τ (степень закручивания) и функция $\varphi(x, y)$ подлежат определению; эту функцию мы будем по-прежнему называть *функцией кручения*.

Тогда на основании формул (2) § 129 получим, что в каждой из областей S_j ($j = 0, \ldots, m$) будем иметь так же, как и в случае однородного бруса:

$$X_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \qquad Y_z = \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right), \tag{2}$$

где μ_j обозначает модуль сдвига, соответствующий области S_j; остальные компоненты напряжения обращаются в нуль.

Подставив эти значения в уравнения (1) § 129, убедимся, что эти уравнения сводятся так же, как в случае однородного бруса, к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Итак, и здесь функция φ должна быть гармонической в каждой из областей S_j.

Разница со случаем однородного бруса проявляется только в граничных условиях. Эти условия сводятся к следующим:

1°. Боковая (внешняя) поверхность бруса свободна от внешних напряжений.

2°. Усилия, действующие на элементы поверхностей раздела различных материалов, равны по величине и противоположно направлены.

3°. Компоненты u, v, w смещения остаются непрерывными при переходе через поверхности раздела (ибо по предположению различные части бруса спаяны между собой).

Условие 1° сводится, очевидно, к следующему:

$$X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) = 0 \tag{3}$$

на границе области S, а условие 2° сводится к равенствам

$$[X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y)]_j = [X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y)]_k \tag{4}$$

на линиях раздела участков S_j, S_k. Здесь n обозначает нормаль к соответствующему контуру, причем в формуле (4) подразумевается, что в обеих частях равенства нормаль направлена в одну и ту же сторону. Индексы же j, k указывают, что выражения, заключенные в скобки, вычисляются для материалов, находящихся соответственно в областях S_j, S_k.

В случае, который мы назвали о с н о в н ы м, условия (3) и (4) запишутся соответственно следующим образом (при указанных в п. 1 обозначениях):

$$X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y) = 0 \quad \text{на } L_{m+1} \tag{3'}$$

и

$$[X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y)]_j = \\ = [X_z \cos(n, x) + Y_z \cos(n, y)]_0 \text{ на } L_1, L_2, \ldots, L_m, \tag{4'}$$

где под n мы будем подразумевать *нормаль, внешнюю по отношению к* S_0.

Подставляя на место X_z, Y_z их значения (2), условия (3) и (4) можно объединить в одной формуле:

$$\mu_k \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_k - \mu_j \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = (\mu_k - \mu_j)[y \cos(n, x) - x \cos(n, y)] \tag{5}$$

на линиях раздела, если условиться относить к линиям раздела также контуры, соответствующие свободным поверхностям, *считая, что* $\mu_j = 0$ *для свободного пространства.*

В о с н о в н о м случае предыдущие условия запишутся так:

$$\mu_0 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 - \mu_j \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = (\mu_0 - \mu_j)[y \cos(n, x) - x \cos(n, y)] \text{ на } L_j \tag{5'}$$

$$(j = 1, \ldots, m+1),$$

если условиться считать $\mu_{m+1} = 0$.

Условие же 3° сводится, очевидно, к требованию, чтобы *функция* φ *оставалась непрерывной* при переходе из одного материала в другой.

Иными словами, *функция* φ *должна быть непрерывной во всей области*

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_m,$$

включая линии раздела.

Легко показать, что если функция φ удовлетворяет предыдущим условиям, то главный вектор (X, Y, Z) усилий, приложенных к любому из оснований, скажем к верхнему, равен нулю.

Действительно, прежде всего ясно, что $Z = 0$ (ибо $Z_z = 0$ всюду). Далее, принимая во внимание, что в каждой из областей S_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0,$$

будем иметь:

$$X = \iint_S X_z\, dx\, dy = \iint_S \left\{ \frac{\partial (xX_z)}{\partial x} + \frac{\partial (xY_z)}{\partial y} \right\} dx\, dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \iint_{S_j} \left\{ \frac{\partial (xX_z)}{\partial x} + \frac{\partial (xY_z)}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Преобразовывая последние интегралы по формуле Остроградского — Грина, получаем, наконец:

$$X = \sum_j \int_{L_j} x\, [X_z \cos(\nu, x) + Y_z \cos(\nu, y)]\, ds,$$

где L_j обозначают границы участков S_j, а ν — нормаль, внешнюю по отношению к областям S_j. Интегрирование по линиям раздела двух участков производится два раза, так как эти линии принадлежат границам двух областей. Выражение $X_z \cos(\nu, x) + Y_z \cos(\nu, y)$ принимает в силу условий (4) при этих двух интегрированиях противоположные знаки, не изменяя абсолютного значения [1]); поэтому интегралы по линиям раздела взаимно уничтожаются. Также равны нулю интегралы по линиям, составляющим границу области S, в силу условия (3).

Таким образом, $X = 0$; совершенно аналогично $Y = 0$.

Из предыдущего следует, что усилия, приложенные к основаниям, сводятся к закручивающим парам. Момент M пары, действующей на «верхнее» основание, получим, вычисляя главный момент упомянутых усилий относительно оси Oz. Именно, будем иметь очевидно:

$$M = \tau D, \tag{6}$$

где

$$D = \sum_{j=0}^{m} \iint_{S_j} \mu_j \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\, dy. \tag{6'}$$

[1]) В формуле (4) предполагается, что положительная нормаль n берется одна и та же для участков, примыкающих к линиям раздела с той и другой стороны. Здесь же нормаль ν имеет для таких участков прямо противоположные направления.

D есть жесткость при кручении. Легко показать совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 131, что всегда $D > 0$. При заданном M постоянная τ вычисляется по формуле (6).

Итак, задача в конечном счете свелась к определению гармонической функции φ, непрерывной во всей области S, нормальные производные которой заданы на границе области S и имеют заданные разрывы на линиях раздела участков S_j; и те и другие задания выражаются формулами (5), если понимать их в указанном выше смысле.

В случае, названном нами о с н о в н ы м, искомая гармоническая функция φ, непрерывная во всей области S, должна быть определена по условиям (5′).

3. Ограничиваясь основным случаем, мы дадим в следующем параграфе решение несколько более общей задачи, заменив условия (5′) условиями:

$$\mu_0\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 - \mu_j\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = f_j \quad \text{на } L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{7}$$

где f_j обозначает функцию, заданную на контуре L_j.

В случае задачи кручения имеем:

$$f_j = (\mu_0 - \mu_j)\,[y\cos(n, x) - x\cos(n, y)]. \tag{8}$$

Легко показать, что приведенные условия определяют искомую функцию φ с точностью до произвольной постоянной.

Действительно, имеем:

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\varphi f_j\,ds = \sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\varphi\left[\mu_0\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 - \mu_j\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j\right]ds =$$

$$= \mu_0\int_L \varphi\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 ds - \sum_{j=1}^{m}\mu_j\int_{L_j}\varphi\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j ds,$$

где L обозначает совокупность контуров $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$.

С другой стороны, хорошо известна формула

$$\int_L \varphi\frac{d\varphi}{dn}\,ds = \iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

где φ обозначает функцию, гармоническую в некоторой области S, ограниченной контуром L, а $d\varphi/dn$ — производную по направлению *внешней* нормали. Принимая во внимание, что для областей $S_1, \ldots, S_m$ при наших обозначениях n является внутренней нормалью, получаем окончательно:

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\varphi f_j\,ds = \sum_{j=0}^{m}\mu_j\iint_{S_j}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{9}$$

Из последней формулы следует, что если на всех контурах L_j имеем

$$f_j = 0,$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

во всей области S, а следовательно, $\varphi = \text{const}$.

Если теперь φ_1 и φ_2 обозначают два решения нашей задачи, то

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

будет также решением, соответствующим случаю $f_j = 0$ на всех контурах. Отсюда выводим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const},$$

а это и требовалось доказать.

Перейдем теперь к вопросу о существовании решения и нахождении его.

Прежде всего из условия (7) легко выводим:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j \, ds = \mu_0 \int_L \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 ds - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \int_{L_j} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j ds,$$

откуда, принимая во внимание, что интеграл от нормальной производной гармонической в данной области функции, взятый по границе области, равен нулю, следует:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j \, ds = 0. \tag{10}$$

Следовательно, условие (10) является необходимым для существования решения. Оно оказывается также и достаточным, как мы увидим ниже. Условие это всегда соблюдено в случае задачи кручения, ибо если f_j имеет форму (8), то

$$\int_{L_j} f_j \, ds = 0$$

для каждого контура L_j в отдельности (см. § 131). Тем более будет соблюдено условие (10).

§ 140. Решение при помощи интегральных уравнений [1]. Будем считать, что мы имеем дело с основным случаем (§ 139, п. 1).

Принимая во внимание непрерывность искомой функции φ во всей области S и разрывность ее нормальных производных на контурах L_j, естественно попытаться представить эту функцию в виде потенциала *простого* слоя, распределенного на этих контурах, так как потенциал простого слоя обладает как раз этими свойствами. Мы придем

[1]) Читатель, не знакомый с теорией интегральных уравнений, может пропустить этот параграф.

таким образом к обобщению известной задачи Робена — Пуанкаре [1]). Итак, положим:

$$\varphi(x,\ y) = \int_L \varrho(s) \ln \frac{1}{r}\, ds = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} \varrho(s) \ln \frac{1}{r}\, ds; \tag{1}$$

здесь r обозначает расстояние точки (x, y) до точки s, расположенной на одном из контуров L_j; $\varrho(s)$ (плотность слоя) обозначает искомую непрерывную функцию точки s. Буквой s мы вместе с тем обозначаем дугу того из контуров L_j, по которому производится интегрирование.

На основании известных свойств потенциала простого слоя функция φ, определяемая предыдущим равенством, будет непрерывной во всей области. Нормальная же производная будет разрывна при переходе через контуры L_j. А именно, имеют место известные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j &= -\pi\varrho(t) + \int_L \varrho(s)\, \frac{\cos\psi}{r}\, ds \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 &= \pi\varrho(t) + \int_L \varrho(s)\, \frac{\cos\psi}{r}\, ds; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

здесь $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0$ и $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j$ относятся к точке t одного из контуров L_j, r обозначает расстояние между точками s и t, а ψ — угол между вектором $\overline{ts}$ и нормалью n в точке t (напомним, что n всегда обозначает нормаль, внешнюю по отношению к области S_0; рис. 61).

Граничные условия (7) § 139 обращаются на основании равенств (2) в уравнения:

$$\pi(\mu_0 + \mu_j)\varrho(t) + (\mu_0 - \mu_j) \int_L \varrho(s)\, \frac{\cos\psi}{r}\, ds = f_j(t), \tag{3}$$

где t обозначает точку на контуре L_j $(j = 1, \ldots, m+1)$.

Мы получили, таким образом, уравнение Фредгольма, которое можно записать так:

$$\varrho(t) + \int_L K(t,\ s)\, \varrho(s)\, ds = f(t), \tag{4}$$

где положено:

$$K(t,\ s) = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)}\, \frac{\cos\psi}{r}, \qquad f(t) = \frac{f_j(t)}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \quad \text{при } t \text{ на } L_j. \tag{5}$$

Выясним, при каких условиях уравнение (4) имеет решение. Однородное уравнение

$$\varrho(t) + \int_L K(t,\ s)\, \varrho(s)\, ds = 0, \tag{6}$$

получаемое из уравнения (4), если положить $f(t) = 0$, т. е.

$$f_j(t) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m+1),$$

имеет одно-единственное линейно независимое решение.

[1]) Мы применяем это название, следуя Племелю (Plemelj [2]).

Действительно, функция φ, определяемая равенством (1), где $\varrho(s)$ есть решение однородного уравнения (6), будет удовлетворять граничным условиям (7) § 139 при $f_j = 0$. На основании доказанного в предыдущем параграфе такая функция φ есть постоянная во всей области S. Но при $\varphi = \text{const}$ равенства (2) дают:

$$2\pi\varrho(t) = \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_0 - \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_j = 0 \qquad \text{на } L_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Итак, решение ϱ однородного уравнения (6) есть плотность слоя, распределенного на внешней границе L_{m+1} области S и дающего постоянный потенциал в этой области; это, таким образом, есть двумерный аналог «естественного распределения» электричества на проводнике. Как известно [1]), плотность такого распределения определена с точностью до постоянного множителя, а это и доказывает наше утверждение.

На основании известной теоремы Фредгольма союзное однородное уравнение, т. е. уравнение

$$\varrho(s) + \int_L K(t, s)\,\varrho(t)\,dt = 0, \tag{7}$$

будет также допускать одно-единственное (линейно независимое) решение. Легко найти это последнее. Именно, легко проверить, что этим решением будет

$$\varrho^*(t) = \mu_0 + \mu_j \text{ (когда } t \text{ находится на } L_j;\ j = 1, \ldots, m+1). \tag{8}$$

Действительно, если точка s взята на L_j $(j < m+1)$, то

$$\int_{L_j} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \int_{L_j} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\mu_0 + \mu_j},$$

$$\int_{L_i} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_j}{\pi(\mu_0 + \mu_j)} \int_{L_i} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = 0 \qquad (i \neq j,\ i \neq m+1),$$

$$\int_{L_{m+1}} K(t, s)\,dt = \frac{\mu_0}{\pi\mu_0} \int_{L_{m+1}} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = -2.$$

Все это следует из хорошо известных формул:

$$\int_{L_j} \frac{\cos\psi}{r}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{если } s \text{ вне } L_j, \\ \pi, & \text{если } s \text{ на } L_j, \\ 2\pi, & \text{если } s \text{ внутри } L_j \end{cases}$$

(для L_{m+1} знак меняется на обратный, так как в этом случае по нашим обозначениям n будет внешней нормалью по отношению к этому контуру, а не внутренней, как по отношению к другим контурам L_j).

Принимая во внимание эти формулы, сразу устанавливаем, что величина ϱ^*, определяемая формулой (8), удовлетворяет уравнению (7), если точка s взята на L_j $(j < m+1)$. Наконец, если точка s взята на

[1]) См., например, Plemelj [2], стр. 63.

в § 154. В работе О. И. Бабаковой [2] решается задача о кручении полого стержня с использованием приближенного конформного отображения на кольцо двусвязной области определенного вида, построенного автором в другой работе (Бабакова [1]).

К этому же кругу вопросов относятся работы: Л. К. Капаняна [1], Г. А. Тирского [1], В. Н. Яковлевой [1—3], Динка и Бойку (Dinca, Boicu [1]), Дейча (Deutsh [3]), Морриса и Хоули (Morris a. Hawley [1]) и др.

В работах Угодчикова [7, 8] дается метод решения задач кручения брусьев с односвязным и двусвязным сечениями, связанный с электромоделированием конформного отображения.

Милн-Томсон (Milne-Thomson [2]), исходя непосредственно из равенств вида (8) § 138, изучил задачу изгиба, сведя ее к отысканию однозначной аналитической функции $\Phi(z)$ по граничному условию [1])

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt}{ds}\Phi(t)\right] = a(t), \tag{4}$$

где $a(t) = \operatorname{Im}\left[\frac{dt}{ds}(p + q\bar{t} + rt)\,\bar{t}\right]$, p, q, r — известные постоянные.

К этой работе Милн-Томсона примыкают работы Соломона (Solomon [1, 2]) и Дейча (Deutsh [4, 6]).

§ 168. Составные брусья. В работе Д. И. Шермана [42] методом, указанным в предыдущем параграфе, решена задача кручения эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем из другого материала.

Ю. А. Аменздде [5] решил задачу кручения бруса с квадратным сечением, армированного круговым стержнем.

И. В. Сухаревский [1] построил новые интегральные уравнения для задачи кручения составного бруса, решение которых дает непосредственно распределение касательных напряжений на границе.

В ряде работ дано эффективное решение задач кручения или изгиба составных брусьев частного вида: Кутателадзе [1], Чаттерджи (Chattarji [1]), Динка и Бойку (Dincă, Boicu [2]), Думитреску и Станеску Dumitrescu, Stanescu [1]) и др.

До сих пор речь шла о задачах кручения и изгиба однородных и составных брусьев, боковая поверхность которых свободна от внешних напряжений. В работах Альманси (Almansi [4]) и Мичелла (Michell [4]) была поставлена и решена задача о деформации однородного цилиндрического бруса, на боковой поверхности которого действуют внешние усилия, не

---

[1]) Задача (4) представляет собой частный случай задачи Римана — Гильберта (см. Мусхелишвили [25]); для односвязных и двусвязных областей задача (4) имеет неотрицательный индекс, в остальных случаях индекс отрицателен.

§ 140а. Примеры. В некоторых частных случаях можно, конечно, получить решение задачи, не прибегая к интегральным уравнениям. И здесь конформное отображение может иногда оказать большие услуги, как это будет показано в первом из нижеследующих примеров.

1. Кручение кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем из другого материала [1]). Пусть сечение S бруса состоит из области S_1, ограниченной окружностью L_1, и области S_2, ограниченной той же окружностью L_1 и окружностью L_2, охватывающей первую. Пусть первой области соответствует модуль сдвига μ_1, а второй — модуль μ_2.

Легко непосредственно убедиться, что если окружности L_1 и L_2 концентрические и если начало координат взято в центре, то функция кручения будет постоянной. Следовательно, закручивание стержня и окружающего полого цилиндра происходит так, как если бы эти тела не были связаны друг с другом и жесткость при кручении составного бруса равна сумме жесткостей составных частей.

Случай же, когда L_1 и L_2 не концентричны, значительно сложнее. Будем пользоваться обозначениями § 48, п. 1, только вместо $z = x + iy$ будем теперь писать ζ. Пусть

$$x + iy = \zeta = \frac{\zeta}{1 - a\zeta} = \omega(\zeta) \tag{1}$$

— соотношение, отображающее плоскость ζ на плоскость ζ так, чтобы окружностям L_1 и L_2 соответствовали концентрические окружности γ_1 и γ_2 на плоскости ζ, радиусов ϱ_1 и ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$). Эти радиусы и постоянная a связаны с радиусами r_1 и r_2 окружностей L_1 и L_2 и с расстоянием l между их центрами формулами (7) и (8) § 48. Не забудем, что (§ 48)

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \frac{1}{a}. \tag{2}$$

Области S_1 будет в силу формулы (1) соответствовать круг $|\zeta| < \varrho_1$, а области S_2 — круговое кольцо $\varrho_1 < |\zeta| < \varrho_2$.

Пусть φ — функция кручения; ее значения в областях S_1 и S_2 будем обозначать соответственно через φ_1 и φ_2. Пусть ψ — функция, сопряженная с φ (определяемая отдельно в областях S_1 и S_2); ее значения в S_1 и S_2 будем обозначать через ψ_1 и ψ_2. Функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — гармонические в соответствующих областях.

---

[1]) Решение для этого случая вычислено И. Н. Векуа и А. К. Рухадзе (в то время аспирантами) и изложено в их статье [1]; часть этой статьи мы воспроизводим здесь почти без изменений.

Решение для случая, когда вместо стержня имеется ничем не заполненная полость, дано Макдональдом (Macdonald [1]). Другое решение той же задачи дано Вейнелем (Weinel [1]). См. также статью Бартельса (Bartels [1]).

Граничные условия, которым удовлетворяют φ_1 и φ_2, таковы (см. § 139):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dn} &= y\cos(n,\ x) - x\cos(n,\ y) \quad \text{на } L_2, \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \quad \text{на } L_1, \\ \mu_2\frac{d\varphi_2}{dn} - \mu_1\frac{d\varphi_1}{dn} &= (\mu_2-\mu_1)\,[y\cos(n,\ x) - x\cos(n,\ y)] \quad \text{на } L_1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В настоящем параграфе под n мы будем понимать нормаль, направленную от центра соответствующей окружности, под s — дугу, отсчитываемую против часовой стрелки.

Считая, что частные производные первого порядка функций φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 непрерывны вплоть до границ областей их определения (это подтвердится после получения решения), и принимая во внимание соотношения

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{d\psi_1}{ds}, \quad \frac{d\varphi_1}{ds} = -\frac{d\psi_1}{dn}, \quad \frac{d\varphi_2}{dn} = \frac{d\psi_2}{ds}, \quad \frac{d\varphi_2}{ds} = -\frac{d\psi_2}{dn}, \tag{4}$$

вытекающие из соотношений Коши — Римана, мы можем заменить условия (3) следующими:

$$\left.\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \text{const} \quad \text{на } L_2, \\ \frac{d\psi_1}{dn} &= \frac{d\psi_2}{dn} \quad \text{на } L_1, \\ \mu_2\psi_2 - \mu_1\psi_1 &= \frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1)(x^2+y^2) + \text{const} \quad \text{на } L_1. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Пусть $F(\zeta) = \varphi + i\psi$ — комплексная функция кручения и пусть

$$f(\zeta) = \varphi + i\psi \tag{5}$$

— та же функция, выраженная через переменную ζ. Пусть f_1 и f_2 — значения этой функции в областях σ_1 и σ_2, где σ_1 есть круг $|\zeta| < \varrho_1$, а σ_2 — кольцо $\varrho_1 < |\zeta| < \varrho_2$.

Тогда мы будем иметь:

$$f_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(a'_k + ib'_k)\zeta^k \qquad \text{в области } \sigma_1, \tag{6}$$

$$f_2(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(a''_k + ib''_k)\zeta^k \qquad \text{в области } \sigma_2, \tag{7}$$

откуда, полагая $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$:

$$\psi_1 = b'_0 + \sum_1^{\infty}(a'_k \sin k\vartheta + b'_k \cos k\vartheta)\varrho^k, \tag{6'}$$

$$\psi_2 = b''_0 + \sum_1^{\infty}(\varrho^k a''_k - \varrho^{-k}a''_{-k})\sin k\vartheta + (\varrho^k b''_k + \varrho^{-k}b''_{-k})\cos k\vartheta. \tag{7'}$$

Заметим далее, что

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\zeta\bar{\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\zeta\bar{\zeta}}{(1-a\zeta)(1-\bar{a}\bar{\zeta})} = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{(1-a\zeta)(1-\bar{a}\bar{\zeta})}.$$

Но мы имеем:

$$\frac{1-a^2\varrho^2}{(1-a\zeta)(1-a\bar{\zeta})} = 1 + \frac{a\zeta}{1-a\zeta} + \frac{a\bar{\zeta}}{1-a\bar{\zeta}} =$$
$$= 1 + (a\zeta + a^2\zeta^2 + \ldots) + (a\bar{\zeta} + a^2\bar{\zeta}^2 + \ldots) =$$
$$= 1 + 2a\varrho\cos\vartheta + 2a^2\varrho^2\cos 2\vartheta + \ldots$$

Предыдущий ряд (абсолютно) сходится при $\varrho < \frac{1}{a}$. Значит, мы будем иметь:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{\varrho^2}{1-a^2\varrho^2}\left\{\frac{1}{2} + \sum_1^\infty a^k\varrho^k\cos k\vartheta\right\}. \tag{8}$$

Подставляя ряды (6′), (7′) и (8) в условия (3′) [1]) и сравнивая коэффициенты при $\cos k\vartheta$, $\sin k\vartheta$, получаем без всякого труда для $k \geqslant 1$:

$$\left.\begin{aligned} a_k' = a_k'' = a_{-k}'' &= 0,\\ \varrho_2^{2k}b_k'' + b_{-k}'' &= c_2a^{k-1}\varrho_2^{2k},\\ \nu\varrho_1^{2k}b_k'' + b_{-k}'' &= \nu c_1a^{k-1}\varrho_1^{2k},\\ b_k' = b_k'' - \varrho_1^{-2k}b_{-k}'' &, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$\nu = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}, \qquad c_1 = \frac{a\varrho_1^2}{1-a^2\varrho_1^2}, \qquad c_2 = \frac{a\varrho_2^2}{1-a^2\varrho_2^2}; \tag{10}$$

c_1 и c_2 равны расстояниям центров окружностей L_1 и L_2 до начала координат [см. § 48, формула (6)].

Постоянные b_0', b_0'' остаются совершенно произвольными, как и следовало ожидать. Условие же непрерывности φ дает, как легко видеть, $a_0' = a_0''$; общее значение a_0' и a_0'' остается произвольным. Мы можем поэтому положить:

$$b_0' = b_0'' = a_0' = 0.$$

Из формул (9) следует:

$$\left.\begin{aligned} b_k'' &= c_2a^{k-1} + \frac{\nu l a^k}{1-\nu a^k}a^{k-1},\\ b_{-k}'' &= -l\nu\frac{\varrho_1^{2k}}{1-\nu a^k}a^{k-1},\\ b_k' &= c_2a^{k-1} + l\nu\frac{1+a^k}{1-\nu a^k}a^{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$\alpha = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}, \qquad l = c_2 - c_1. \tag{12}$$

---

[1]) Среднее из них может быть заменено следующим: $\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\varrho}$ (при $\varrho = \varrho_1$). Действительно, как легко видеть, $\frac{d\psi_1}{dn}$, $\frac{d\psi_2}{dn}$ только множителем отличаются от $\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial\varrho}$.

Подставляя эти значения в формулы (6) и (7), получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \frac{ic_2\zeta}{1-a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a^k}{1-\nu a^k}\, a^{k-1}\zeta^k, \\ f_2(\zeta) &= \frac{ic_2\zeta}{1-a\zeta} + il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k a^{k-1}\zeta^k}{1-\nu a^k} - il\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho_1^{2k} a^{k-1}}{1-\nu a^k} \frac{1}{\zeta^k}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эти ряды и их производные, как легко видеть, сходятся абсолютно и равномерно в соответствующих областях, включая и контуры.

Если $\nu = 0$, т. е. если $\mu_1 = \mu_2$, получим для f_1 и f_2 одно и то же выражение

$$f(\zeta) = \frac{ic_2\zeta}{1-a\zeta},$$

т. е.

$$F(\zeta) = ic_2\zeta = ic_2(x+iy).$$

Это — комплексная функция кручения, соответствующая случаю однородного цилиндра. Если начало координат возьмем в центре, то получим:

$$F(\zeta) = \text{const}$$

(см. § 131, замечание 2).

Таким образом, можем сказать, что функция $f_2(\zeta)$, определяемая второй из формул (13), состоит из двух частей: части, соответствующей случаю, когда мы имеем сплошной однородный брус (первый член), и части, выражающей «возмущение», вызванное присутствием стержня.

Раз функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ найдены, то вычисление компонент напряжения при помощи формул § 134 не представляет никаких затруднений [1]). Жесткость при кручении D тоже легко вычисляется при помощи формул § 134. После элементарных выкладок и преобразований получим:

$$D = \mu_2 I + (\mu_1 - \mu_2) I' - \frac{\pi l^2 r_1^2 (\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\mu_2\pi l^2\nu\varrho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k\nu^k}{(1-a^2\varrho_1^2 a^k)^2}, \qquad (14)$$

где

$$I = \frac{\pi r_2^4}{2}, \quad I' = \frac{\pi r_1^4}{2} + \pi r_1^2 l^2; \qquad (15)$$

I обозначает полярный момент инерции сплошного круга радиуса r_2 относительно его центра, а I' — полярный момент инерции сплошного круга радиуса r_1 относительно центра первого круга.

Если D' обозначает жесткость при кручении *отдельно взятого* стержня с модулем сдвига μ_1, а D'' — жесткость при кручении окружающего

[1]) См. упомянутую статью И. Н. Векуа и А. К. Рухадзе.

полого цилиндра, из которого удален стержень [1]), то

$$D' = \mu_1 (I' - \pi l^2 r_1^2),$$

$$D'' = \mu_2 (I - I') - \mu_2 \pi l^2 r_1^2 - 2\mu_2 \pi l^2 \varrho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(1 - a^2 \varrho_1^2 \alpha^k)^2}. \tag{16}$$

Из формул (16) и (14) выводим:

$$D - (D' + D'') = \frac{4\pi\mu_1\mu_2 l^2 r_1^2}{\mu_1 + \mu_2} + 2\mu_2 \pi l^2 \varrho_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k (1 - \nu^{k+1})}{(1 - a^2 \varrho_1^2 \alpha^k)^2}, \tag{17}$$

откуда следует, что

$$D' + D'' < D, \tag{18}$$

как это можно было предвидеть заранее.

Для однородного цилиндра ($\mu_1 = \mu_2$) мы вместо D имели бы

$$D_0 = \mu_2 I.$$

В общем случае при малом r_1 имеем приближенно, пренебрегая четвертой и высшими степенями ϱ_1:

$$D = \mu_2 I + \frac{2\mu_2 (\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} I',$$

откуда следует приближенная формула

$$\frac{D}{D_0} = 1 + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} \frac{I'}{I}. \tag{19}$$

Эта формула совпадает при $\mu_1 = 0$ с формулой Макдональда (Macdonald [1]) для полого цилиндра.

Если цилиндр армирован не одним, а несколькими продольными стержнями из одного и того же материала и если стержни настолько тонки и удалены друг от друга, что районы вызываемых ими «возмущений» практически не перекрываются, то, очевидно, приближенная формула (19) может быть применена и к этому случаю, если подразумевать под I' сумму моментов инерции их сечений относительно центра окружности L_2.

Еще проще решается задача о кручении в случае, когда L_1 и L_2 — конфокальные эллипсы [2]), а также и для случая, когда границы — определенным образом расположенные эпитрохоиды [3]).

2. Кручение прямоугольного бруса, составленного из двух также прямоугольных брусьев [4]). Можно часто также получить решение задачи кручения в случаях,

[1]) Эту последнюю величину получим из формулы (14), положив $\mu_1 = 0$.

[2]) См. статью И. Н. Векуа и А. К. Рухадзе [2].

[3]) См. статью А. К. Рухадзе [2].

[4]) Решение задачи для однородного бруса, принадлежащее Сен-Венану, см., например, у Лява (Love [1], § 221).

исключенных нами из рассмотрения при приведении задачи к интегральному уравнению, например в случаях, когда контуры имеют угловые точки. Один из таких случаев рассмотрен в нижеследующем примере.

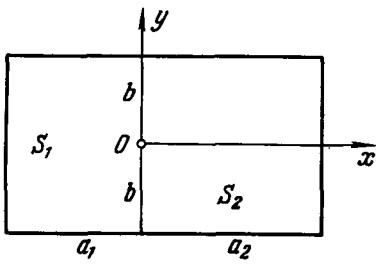


Рис. 62.

Рассмотрим прямоугольный брус, составленный из двух также прямоугольных брусьев, сечения которых — прямоугольники со сторонами a_1, $2b$ и a_2, $2b$, спаянных вдоль грани шириной $2b$ (рис. 62).

Модули сдвигов составляющих брусьев обозначим соответственно через μ_1 и μ_2. Направим ось Oy по линии раздела областей S_1 и S_2, соответствующих различным материалам, и возьмем начало координат в середине этой линии; обозначим через φ_1 и φ_2 значения функции кручения φ в областях S_1 и S_2.

Введем, далее, гармоническую функцию $\Phi = \varphi + xy$, значения которой в областях S_1 и S_2 обозначим через Φ' и Φ''. Как легко непосредственно убедиться, граничные условия сводятся к следующим:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 2y \quad (x = -a_1, \ -b \leqslant y \leqslant b); \qquad \frac{\partial \Phi''}{\partial x} = 2y \quad (x = a_2, \ -b \leqslant y \leqslant b), \tag{а}$$

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \Phi''}{\partial x} = 2(\mu_1 - \mu_2) y \qquad (x = 0, \quad -b \leqslant y \leqslant b), \tag{б}$$

$$\Phi' = \Phi'' \qquad (x = 0, \quad -b \leqslant y \leqslant b), \tag{в}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} &= 0 \qquad (y = \pm b, \quad -a_1 \leqslant x \leqslant 0), \\ \frac{\partial \Phi''}{\partial y} &= 0 \qquad (y = \pm b, \quad 0 \leqslant x \leqslant a_2). \end{aligned}\right\} \tag{г}$$

Будем искать гармонические функции Φ' и Φ'' в виде рядов:

$$\left.\begin{aligned} \Phi' &= \sum_{n=0}^{\infty} (A'_{2n+1} \operatorname{sh} mx + B_{2n+1} \operatorname{ch} mx) \sin my, \\ \Phi'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (A''_{2n+1} \operatorname{sh} mx + B_{2n+1} \operatorname{ch} mx) \sin my, \end{aligned}\right\} \tag{д}$$

где для краткости введено обозначение

$$m = \frac{(2n+1)\pi}{2b}. \tag{е}$$

Каждый член обоих предыдущих рядов есть, очевидно, гармоническая функция. При этом числа m подобраны так, что удовлетворены условия (г); ясно также, что удовлетворено условие (в).

Остается удовлетворить условиям (а) и (б). Для этого заметим, что функцию $2y$ можно в промежутке $(-b, +b)$ представить в виде ряда [1])

$$2y = \sum_{n=0}^{\infty} mA_{2n+1} \sin my, \qquad (ж)$$

где для краткости введено обозначение

$$mA_{2n+1} = 4b \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \qquad (з)$$

т. е.

$$A_{2n+1} = 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

На основании (ж) условия (а) будут удовлетворены, если

$$A'_{2n+1} \operatorname{ch} ma_1 - B_{2n+1} \operatorname{sh} ma_1 = A_{2n+1},$$
$$A''_{2n+1} \operatorname{ch} ma_2 + B_{2n+1} \operatorname{sh} ma_2 = A_{2n+1},$$

а условия (б) — если

$$\mu_1 A'_{2n+1} - \mu_2 A''_{2n+1} = (\mu_1 - \mu_2) A_{2n+1}.$$

Решая три предыдущих уравнения относительно A'_{2n+1}, A''_{2n+1}, B_{2n+1} и подставляя найденные значения в ряды (д), получаем после некоторых очевидных преобразований:

$$\Phi' = 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{[\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{ch} ma_2] \operatorname{ch} m(x+a_1) + \mu_2 \operatorname{sh} ma_2 \operatorname{sh} mx - \mu_1 \operatorname{ch} ma_2 \operatorname{ch} mx}{\mu_1 \operatorname{ch} ma_2 \operatorname{sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{ch} ma_1 \operatorname{sh} ma_2} \sin my,$$

$$\Phi'' = 4b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{[-\mu_1 + (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{ch} ma_1] \operatorname{ch} m(x-a_2) + \mu_1 \operatorname{sh} ma_1 \operatorname{sh} mx + \mu_2 \operatorname{ch} ma_1 \operatorname{ch} mx}{\mu_1 \operatorname{ch} ma_2 \operatorname{sh} ma_1 + \mu_2 \operatorname{ch} ma_1 \operatorname{sh} ma_2} \sin my.$$

Форма коэффициентов показывает, что полученные ряды сходятся довольно быстро (притом равномерно и абсолютно). Так же очевидна законность почленного дифференцирования, которым мы пользовались в процессе вывода.

Функция кручения дается формулами:

$$\varphi_1 = \Phi' - xy \text{ в } S_1; \quad \varphi_2 = \Phi'' - xy \text{ в } S_2.$$

---

[1]) Этот ряд представляет собой ряд Фурье для функции, определенной в промежутке $(-2b, +2b)$ следующим образом. Функция равна:

$2y$	в промежутке	$(-b, +b)$
$4b-2y$	»	$(b, 2b)$
$-4b-2y$	»	$(-b, -2b)$

Жесткость при кручении D вычисляется по формуле (6′) § 139, которая в нашем случае принимает вид:

$$D=\mu_1\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)dx\,dy+$$
$$+\mu_2\iint\limits_{S_2}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Внося в эту формулу предыдущие выражения для φ_1 и φ_2, получаем путем совершенно элементарных выкладок[1]) (ср. случай однородного бруса, Love [1], § 225):

$$D=\frac{8}{3}(\mu_1a_1+\mu_2a_2)\,b^3+$$
$$+\left(\frac{4}{\pi}\right)^5b^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_1^2\operatorname{ch}ma_2+\mu_2^2\operatorname{ch}ma_1-(\mu_1^2+\mu_2^2)\operatorname{ch}ma_1\operatorname{ch}ma_2}{(2n+1)^5(\mu_1\operatorname{ch}ma_2\operatorname{sh}ma_1+\mu_2\operatorname{ch}ma_1\operatorname{sh}ma_2)}-$$
$$-\left(\frac{4}{\pi}\right)^5b^4\mu_1\mu_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}ma_1+\operatorname{ch}ma_2-\operatorname{ch}m(a_1-a_2)-1}{(2n+1)^5(\mu_1\operatorname{ch}ma_2\operatorname{sh}ma_1+\mu_2\operatorname{ch}ma_1\operatorname{sh}ma_2)}.$$

Если a_1 и a_2 велики по сравнению с b (практически при $a_1>5b$, $a_2>5b$), то можем с достаточной точностью принять:

$$\frac{\operatorname{sh}ma_1}{\operatorname{ch}ma_1}=1,\quad\frac{\operatorname{sh}ma_2}{\operatorname{ch}ma_2}=1,\quad\frac{1}{\operatorname{sh}ma_1}=\frac{1}{\operatorname{ch}ma_1}=\frac{1}{\operatorname{sh}ma_2}=\frac{1}{\operatorname{ch}ma_2}=0,$$

и тогда получим для D приближенную формулу (ср. аналогичное значение для случая однородного бруса, Love [1], § 225):

$$D=\frac{8}{3}(\mu_1a_1+\mu_2a_2)\,b^3-\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1+\mu_2}b^4\left(\frac{4}{\pi}\right)^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}=$$
$$=\frac{8}{3}(\mu_1a_1+\mu_2a_2)\,b^3-3{,}361b^4\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1+\mu_2}.$$

3. Отметим в заключение сравнительно недавно опубликованную статью Д. И. Шермана [27], в которой решена задача кручения эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Метод решения, указанный в этой статье, может быть с успехом применен для приближенного решения задач интересующего нас здесь типа и в ряде других случаев, представляющих практический интерес.

---

[1]) В частности, мы пользуемся известным соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

III. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА [1])

Перейдем теперь к рассмотрению остальных случаев упругого равновесия бруса, перечисленных в § 129; речь теперь идет о брусьях, составленных из различных материалов так, как указано в п. 1 § 139.

В этом отделе мы будем предполагать, что *различные материалы*, составляющие брус, *имеют один и тот же коэффициент Пуассона* σ, но, вообще говоря, различные модули упругости.

Если вспомнить, что для очень многих материалов значения σ мало разнятся друг от друга, становится ясным, что это ограничение не так уж значительно [2]). С другой стороны, оно весьма упрощает решение. Именно вследствие этого мы рассматриваем отдельно случай, когда коэффициент Пуассона — один и тот же для всех материалов, составляющих брус. Общий случай будет рассмотрен в следующем отделе.

В частности, для случаев растяжения (сжатия) и изгиба парой почти никакого усложнения, по сравнению с однородным брусом, не получается, как будет показано в § 142, 143.

§ 141. Обозначения [3]). Введем в рассмотрение величину

$$S_E = \iint\limits_S E\,dx\,dy = \sum_j S_j E_j, \tag{1}$$

где E обозначает модуль упругости, соответствующий данной точке сечения и принимающий постоянные значения E_j в отдельных участках S_j сечения, соответствующих различным материалам; площади этих участков обозначены теми же буквами S_j.

Далее, под «приведенным центром тяжести» сечения будем понимать центр тяжести, который получится, если отдельным участкам сечения приписать поверхностные плотности, равные соответствующим модулям упругости; таким образом, если начало координат взято в приведенном центре тяжести сечения, то

$$\iint\limits_S Ex\,dx\,dy = \iint\limits_S Ey\,dx\,dy = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Содержание настоящего отдела заимствовано из статьи автора [15].

[2]) По старой теории Пуассона величина σ должна быть одинакова для всех (однородных, изотропных) материалов и равна $\frac{1}{4}$. Однако это не подтвердилось в действительности. Все же колебания σ для различных материалов значительно меньше, чем колебания E. Например, для меди $\frac{1}{\sigma} = 2{,}87$, $E = 1\,250\,000$ кг/см², а для алюминия $\frac{1}{\sigma} = 2{,}92$, $E = 740\,000$ кг/см². (См. также замечание 2 в конце § 146).

[3]) Понятия, вводимые в настоящем параграфе, и соответствующие формулы применимы и в случае, когда коэффициенты Пуассона различны для различных материалов.

Под «приведенным моментом инерции» сечения будем подразумевать момент инерции, вычисленный при том же предположении относительно плотностей отдельных участков сечения. В частности, приведенный момент инерции относительно оси Oy, находящейся в плоскости сечения, который будем обозначать через I_E, определится формулой:

$$I_E = \int\int_S Ex^2\,dx\,dy = \sum_j E_j I_j, \tag{3}$$

где I_j — обычный момент инерции площади S_j относительно той же оси.

Наконец, главные оси инерции сечения, соответствующие указанному предположению относительно плотностей, будем называть «приведенными главными осями».

Если оси Ox, Oy совпадают с приведенными главными осями инерции, то будем иметь:

$$\int\int_S Exy\,dx\,dy = \sum_j E_j \int\int_{S_j} xy\,dx\,dy = 0. \tag{4}$$

Здесь, а также ниже, в § 142, 143 и в начале § 144, нет надобности считать, что мы имеем дело с «основным» случаем (§ 139, п. 1); достаточно предположить, что брус состоит из ряда однородных, изотропных цилиндрических тел (сплошных или полых), спаянных вдоль боковых поверхностей.

§ 142. Растяжение. Легко видеть, что при указанных обозначениях задача о растяжении бруса продольными силами, приложенными к приведенным центрам тяжести сечений, решается следующими формулами [ср. § 135, формулы (1) и (2)]:

$$\begin{gathered} Z_z = \frac{E_j F}{S_E} \qquad \text{в области } S_j, \\ u = -\frac{\sigma F}{S_E}\,x, \quad v = -\frac{\sigma F}{S_E}\,y, \quad w = \frac{F}{S_E}\,z \end{gathered} \tag{1}$$

(остальные компоненты напряжения равны 0); здесь F обозначает (алгебраическую) величину растягивающей силы (при $F < 0$ имеем сжатие).

Жесткость бруса при растяжении (сжатии) равна S_E (ср. § 135).

§ 143. Изгиб парой. Задача об изгибании парой, момент которой расположен в плоскости основания, также мало чем отличается от задачи для однородного бруса (§ 136).

Возьмем начало координат в приведенном центре тяжести «левого» основания, а за оси Ox, Oy примем приведенные главные оси инерции.

Если момент пары, действующей на «правое» основание, параллелен оси Oy и его алгебраическая величина есть M, то решение дается формулами:

$$Z_z = -\frac{ME_j}{I_E}\,x \qquad \text{в области } S_j \tag{1}$$

(остальные компоненты напряжения равны нулю) и

$$u = \frac{M}{2I_E}(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2), \quad v = \frac{M}{I_E}\sigma xy, \quad w = -\frac{M}{I_E}xz. \tag{2}$$

Непосредственная подстановка в уравнения статики упругого тела показывает, что все они удовлетворяются этими значениями; так же, очевидно, удовлетворяются граничные условия.

Главный вектор внешних напряжений, приложенных, скажем, к правому основанию, равен нулю, так как

$$\iint_S Z_z\,dx\,dy = 0$$

в силу формулы (2) § 141.

Момент этих напряжений относительно оси Oy равен в силу формулы (3) § 141

$$-\iint_S xZ_z\,dx\,dy = \frac{M}{I_E}\iint_S Ex^2\,dx\,dy = M;$$

наконец, момент относительно Ox равен

$$\iint_S yZ_z\,dx\,dy = \frac{M}{I_E}\iint_S Exy\,dx\,dy = 0$$

в силу формулы (4) § 141.

Таким образом, наше решение действительно удовлетворяет всем поставленным условиям.

Легко вычислить, что и в рассматриваемом случае имеет место закон Бернулли — Эйлера, который теперь выражается формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{I_E}. \tag{3}$$

Жесткость при изгибе равна I_E.

§ 144. Изгиб поперечной силой. Перейдем теперь к решению задачи об изгибе поперечной силой. Возьмем начало O координат в приведенном центре тяжести «левого» основания и направим оси Ox, Oy по приведенным главным осям инерции.

Мы всегда можем свести задачу к случаю, когда поперечная сила, приложенная к «правому» основанию, приложена к приведенному центру тяжести его и параллельна оси Ox (ср. § 137).

Принимая во внимание вид формул (10), (11) § 137, относящихся к однородному брусу, попытаемся удовлетворить условиям задачи выражениями следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + A\left[\frac{1}{2}\sigma(l-z)(x^2-y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right], \\ v &= \tau xz + A\sigma(l-z)xy, \\ w &= \tau\varphi - A\left[x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + \chi + xy^2\right], \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где φ обозначает функцию кручения, рассмотренную в предыдущем отделе, $\chi = \chi(x, y)$ — некоторую функцию, подлежащую определению; l — длину бруса; τ, A — некоторые постоянные.

Вычисляя компоненты напряжения, соответствующие этим смещениям, получаем: $X_x = Y_y = X_y = 0$ (как в случае однородного бруса) и, в областях S_j ($j = 0, 1, \ldots, m$),

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu_j\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) - B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right\}, \\ Y_z &= \mu_j\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - B_j\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}, \\ Z_z &= -K_j(l-z)x, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где B_j, K_j — постоянные, которые могут принимать различные значения для различных областей S_j, а именно:

$$B_j = A\mu_j = \frac{AE_j}{2(1+\sigma)}, \qquad K_j = AE_j. \qquad (3)$$

Подставляя далее выражения (2) в уравнения равновесия, т. е. в уравнения (1) § 129, легко убеждаемся, что функция χ должна, как и функция φ, удовлетворять уравнению Лапласа в каждом из участков S_j; обратно, при этих условиях упомянутые уравнения будут удовлетворены.

Перейдем теперь к граничным условиям. Для того, чтобы смещения u, v, w были непрерывны во всем теле, функция χ должна быть, очевидно, непрерывна во всем сечении S (так как функция кручения φ по определению также непрерывна во всей области S).

Условия же относительно напряжений так же, как и в случае кручения, сводятся к требованию, чтобы выражение

$$X_z\cos(n, x) + Y_z\cos(n, y) \qquad (a)$$

обращалось в нуль на свободной боковой поверхности и было непрерывно при переходе через поверхности раздела различных материалов.

Подсчитаем теперь главный вектор и главный момент напряжений, действующих на правое основание. Ясно прежде всего, что компонента главного вектора по оси Oz равна нулю. Компонента его по оси Ox равна

$$X = \int\int_S X_z\,dx\,dy.$$

Вспоминая теперь, что выражения (2) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия, в частности уравнению

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

и внося сюда на место Z_z соответствующее выражение из (2), получаем:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + AE_j x = 0.$$

На основании этого тождества можно написать:

$$X=\sum_j \iint_{S_j}\left\{X_z+x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)+AE_jx^2\right\}dx\,dy=$$

$$=\sum_j \iint_{S_j}\left\{\frac{\partial(xX_z)}{\partial x}+\frac{\partial(xY_z)}{\partial y}\right\}dx\,dy+A\sum_j E_j\iint_{S_j}x^2\,dx\,dy.$$

Но, как было показано в § 139, при названных выше условиях относительно выражения (а)

$$\sum_j \iint_{S_j}\left\{\frac{\partial(xX_z)}{\partial x}+\frac{\partial(xY_z)}{\partial y}\right\}dx\,dy=0;$$

следовательно,

$$X=A\sum_j E_j\iint_{S_j}x^2\,dx\,dy=AI_E. \tag{4}$$

Далее, по условию, должно быть $X=W$, где W — заданная сила. Это условие определяет постоянную A:

$$A=\frac{W}{I_E}. \tag{5}$$

Для компоненты главного вектора по оси Oy получим совершенно аналогичным путем:

$$Y=\iint_S Y_z\,dx\,dy=A\sum_j E_j\iint_{S_j}xy\,dx\,dy.$$

Отсюда следует, на основании формулы (4) § 141, что $Y=0$.

Так как, наконец, при $z=l$ имеем $Z_z=0$, то на правом основании не будет изгибающей пары.

Момент же закручивающей пары будет дан формулой

$$M=\tau D+\frac{W}{2(1+\sigma)I_E}\sum_{j=0}^{m}E_j\iint_{S_j}\left\{y\frac{\partial\chi}{\partial x}-x\frac{\partial\chi}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^3-\left(2+\frac{1}{2}\sigma\right)x^2y\right\}dx\,dy, \tag{6}$$

где D есть жесткость при кручении.

Постоянная τ должна быть определена из условия $M=0$, что всегда можно сделать, когда вычислены функции φ и χ.

Вычислять φ мы умеем на основании сказанного в предыдущем отделе. Остается вычислить функцию χ.

Считая для определенности, что мы имеем дело с «основным» случаем (§ 139, п. 1, рис. 61), легко убеждаемся на основании формул (2), (3), что граничные условия сводятся к следующим при обозначениях предыдущего отдела[1]):

$$\mu_0\left(\frac{d\chi}{dn}\right)_0-\mu_j\left(\frac{d\chi}{dn}\right)_j=f_j \quad \text{на } L_j \quad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m+1), \tag{7}$$

[1]) Не забудем, что, по условию, $\mu_{m+1}=0$.

где

$$f_j = -(\mu_0 - \mu_j)\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)y^2\right]\cos(n, x) + (2+\sigma)\,xy\cos(n, y)\right\}. \tag{8}$$

Таким образом, мы имеем точно такую же задачу, что и в случае кручения, только функции f_j, заданные на контурах, имеют здесь не те же значения, что в упомянутом случае.

Посмотрим теперь, удовлетворено ли условие существования решения (9) § 140. Имеем:

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j} f_j\,ds =$$

$$= -\mu_0\int_L\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos(n, x) + (2+\sigma)\,xy\cos(n, y)\right\}ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\int_{L_j}\left\{\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos(n, x) + (2+\sigma)\,xy\cos(n, y)\right\}ds,$$

или, преобразовывая интегралы по формуле Остроградского — Грина,

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j} f_j\,ds = -\iint_{S_0} 2(1+\sigma)\,\mu_0 x\,dx\,dy -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\iint_{S_j} 2(1+\sigma)\,\mu_j x\,dx\,dy = -\iint_S Ex\,dx\,dy;$$

но последний интеграл равен нулю, так как по предположению начало координат находится в приведенном центре тяжести.

Итак, условие существования выполнено, и наша задача всегда допускает решение, получаемое с помощью того же интегрального уравнения, что и в предыдущем отделе, но только при значениях f_j, определяемых формулой (8).

В частности, *остается в силе замечание*, сделанное в предыдущем отделе, *относительно применимости решения для иных видов сечения*, например для случая составной трубы.

Заметим, наконец, что из формулы, определяющей u, т. е. из первой формулы (1), следует, что кривизна центральной линии (линии, соединяющей приведенные центры тяжести сечений) удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{R} = \frac{W}{I_E}(l - z);$$

иными словами, *закон Бернулли — Эйлера имеет место.*

§ 144а. Пример. Изгиб составной круглой трубы поперечной силой, приложенной к одному из

концов. Пусть сечение бруса состоит из двух концентрических круговых колец S_1, S_2, из которых первое охватывает второе, как указано на рис. 63.

Обозначим через R_2, R_1, R_0 соответственно радиусы внутренней, средней и наружной окружностей, а через E_1, E_2 — модули упругости, соответствующие участкам S_1 и S_2.

Пусть поперечная сила проходит через центр окружностей и параллельна оси Ox. Ввиду полной симметрии ясно, что $\tau = 0$, т. е. закручивания не будет. Найдем теперь функцию $\chi(x, y)$. Значение ее в зонах S_1 и S_2 обозначим соответственно через χ_1 и χ_2.

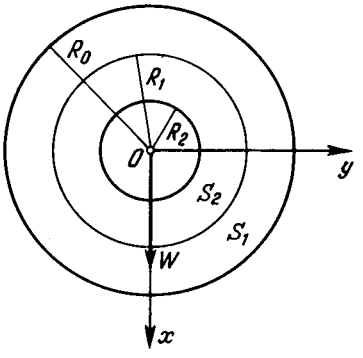


Рис. 63.

Пусть r, ϑ обозначают полярные координаты на плоскости Oxy. Имеем по формуле (3) § 138а:

$$\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right) y^2\right] \cos\vartheta + (2+\sigma)\, xy \sin\vartheta = \\ = -\frac{3}{4} r^2 \cos 3\vartheta + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma\right) r^2 \cos\vartheta. \quad \text{(а)}$$

В соответствии с этим граничные условия примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \chi_1}{\partial r} = -kR_0^2 \cos\vartheta + \frac{3}{4} R_0^2 \cos 3\vartheta && \text{при } r = R_0, \\ &\chi_1 = \chi_2, \\ &E_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial r} - E_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial r_2} = (E_1 - E_2)\left(-kR_1^2 \cos\vartheta + \frac{3}{4} R_1^2 \cos 3\vartheta\right) && \text{при } r = R_1, \\ &\frac{\partial \chi_2}{\partial r} = -kR_2^2 \cos\vartheta + \frac{3}{4} R_2^2 \cos 3\vartheta && \text{при } r = R_2; \end{aligned}\right\} \quad \text{(б)}$$

здесь для краткости положено

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sigma = k$$

и в среднее уравнение вместо модулей сдвига μ_1, μ_2 введены пропорциональные им модули упругости E_1, E_2.

Разлагая гармонические функции χ_1 и χ_2 по известным формулам в ряды и подставляя в предыдущие соотношения, найдем эти функции. Однако легко догадаться, что предыдущим условиям можно удовлетворить, полагая (ср. решение для однородного полого кругового цилиндра, данное в § 138а):

$$\chi_1 = \left(a_1 r + \frac{a_1'}{r}\right) \cos\vartheta + \frac{1}{4} r^3 \cos 3\vartheta \qquad (R_1 \leqslant r \leqslant R_0),$$

$$\chi_2 = \left(a_2 r + \frac{a_2'}{r}\right) \cos\vartheta + \frac{1}{4} r^3 \cos 3\vartheta \qquad (R_2 \leqslant r \leqslant R_1).$$

Подставляя эти выражения в соотношения (б), сразу получаем, что все условия будут удовлетворены, если

$$a_1R_0^2 - a_1' = -kR_0^4,\quad a_2R_2^2 - a_2' = -kR_2^4,$$

$$a_2R_1^2 + a_2' = a_1R_1^2 + a_1',$$

$$E_1(a_1R_1^2 - a_1') - E_2(a_2R_1^2 - a_2') = -k(E_1 - E_2)R_1^4.$$

Решение этих уравнений дает для a_1 и a_2 выражения:

$$a_1 = -k\frac{E_1(R_0^4 - R_1^4)(R_1^2 + R_2^2) + E_2(R_1^2 - R_2^2)[(R_1^2 + R_2^2)^2 + R_0^4 - R_2^4]}{E_1(R_1^2 + R_2^2)(R_0^2 - R_1^2) + E_2(R_0^2 + R_1^2)(R_1^2 - R_2^2)},$$

$$a_2 = -k\frac{E_1(R_0^2 - R_1^2)[(R_0^2 + R_1^2)^2 - R_0^4 + R_2^4] + E_2(R_1^4 - R_2^4)(R_0^2 + R_1^2)}{E_1(R_1^2 + R_2^2)(R_0^2 - R_1^2) + E_2(R_0^2 + R_1^2)(R_1^2 - R_2^2)};$$

затем a_1' и a_2' определяются по формулам:

$$a_1' = a_1R_0^2 + kR_0^4,\quad a_2' = a_2R_2^2 + kR_2^4.$$

Таким образом, задача решена.

Решение для случая, когда окружности не концентрические, дано А. К. Рухадзе [1]. Решение для случая, когда границы — конфокальные эллипсы, дано И. Н. Векуа и А. К. Рухадзе [2]. В статье А. К. Рухадзе [2] дано решение для случая, когда границы — эпитрохоиды.

Легко так же решить задачу изгиба прямоугольного бруса, рассмотренного в § 140а.

IV. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ В СЛУЧАЕ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА [1]

В общем случае, когда коэффициенты Пуассона различных материалов также могут быть различными, задачи растяжения и изгиба значительно усложняются. Именно, оказывается, что здесь уже нельзя, как в случае Сен-Венана и как в случае одинаковых коэффициентов Пуассона, принять $X_x = Y_y = X_y = 0$.

Вследствие этого приходится привлечь к рассмотрению одну вспомогательную задачу о плоской деформации, которой мы и займемся.

§ 145. Одна вспомогательная задача о плоской деформации. Вспомогательная задача, о которой только что говорилось, состоит в следующем. Требуется найти упругое равновесие бруса, составленного из различных материалов так, как это было описано выше (в начале § 139), в предположении, что он подвержен *плоской деформации*, параллельной плоскости Oxy (т. е. что $w = 0$, а u, v зависят лишь от x, y, но не от z), при следующих условиях:

[1]) Задачи растяжения и изгиба парами были решены автором в статье [15]. Здесь дано новое, более подробное исследование решения (примечание к третьему изданию).

1°. Внешние напряжения, приложенные к боковой поверхности бруса, равны нулю:

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0, \tag{1}$$

где, как всегда,

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y), \quad Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y),$$

а n обозначает нормаль к боковой поверхности.

2°. На поверхностях раздела различных материалов:

$$(X_n)_j = (X_n)_k, \quad (Y_n)_j = (Y_n)_k, \tag{2}$$

где n обозначает нормаль к (цилиндрической) поверхности раздела, направленную в определенную сторону, а значки j, k указывают, что берутся значения для материалов, занимающих области с номерами j, k, примыкающие к поверхности раздела. Условия (2) выражают, что напряжения, приложенные к элементам поверхности раздела с той и другой стороны, уравновешивают друг друга.

3°. На поверхностях раздела смещения претерпевают заданные разрывы, т. е.

$$u_j - u_k = g, \quad v_j - v_k = h, \tag{3}$$

где (u_j, v_j), (u_k, v_k) — значения смещений с той и другой стороны поверхности раздела, а g, h — заданные на ней функции (не зависящие от z).

Так как речь идет о плоской деформации и все рассматриваемые функции не зависят от z, то мы можем ограничиться рассмотрением одного какого-либо поперечного сечения бруса, как мы делали в предыдущих главах.

Легко показать обычным путем, что если существует решение поставленной задачи, то оно будет единственным (с точностью до жесткого перемещения тела как целого). То, что решение всегда существует, можно считать физически очевидным. Действительно, наша задача соответствует следующей физической задаче, которую краткости ради мы сформулируем для случая, когда имеем только две составные части с поперечными сечениями S_1 и S_2, разделенными линией L. Возьмем два бруса, состоящих из тех же материалов, что и данные, но имеющих сечения S_1', S_2', отличные от S_1 и S_2. Именно, будем считать, что сечение S_1' получается из S_1 путем сообщения точкам линии L смещений $(-u_1, -v_1)$, а сечение S_2' — из сечения S_2 путем сообщения точкам той же линии смещений $(-u_2, -v_2)$; при этом будем считать, что

$$u_1 - u_2 = g, \quad v_1 - v_2 = h.$$

Если теперь вынудить соответствующие боковые поверхности наших брусьев, с сечениями S_1' и S_2', придти в соприкосновение так, чтобы соприкоснулись соответствующие точки, и спаять вдоль этих поверхностей, поддерживая деформацию плоской, то в полученном составном брусе

возникнут напряжения и деформации, как раз соответствующие нашей задаче.

Существование решения (при некоторых обычных предположениях общего характера) можно также доказать математически. Это сделано в упомянутой уже в главе V (§ 103) работе Д. И. Шермана [20], который рассматривает случай, названный нами основным (§ 139, п. 1). На доказательстве мы здесь останавливаться не будем.

Напомним для дальнейшего, что при плоской деформации

$$X_z = Y_z = 0 \text{ во всем брусе,} \tag{4}$$

$$Z_z = \lambda_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \sigma_j (X_x + Y_y) \text{ на участках } S_j, \tag{5}$$

где λ_j, σ_j — значения постоянной Ламе λ и коэффициента Пуассона σ для участка S_j.

§ 146. Задача растяжения и изгиба парами. В случае составного бруса, но при условии одинаковости коэффициентов Пуассона, нам удалось весьма просто решить задачи о растяжении и об изгибе парами, причем оказалось возможным рассмотреть *раздельно* задачу о растяжении силой с линией действия по оси Oz, и изгиба парами, плоскости которых параллельны плоскостям Oxz и Oyz. Возможность такого раздельного рассмотрения была обусловлена специальным выбором системы осей Oxy в плоскости «левого» («нижнего») основания (а именно, начало O было взято в приведенном центре тяжести, а оси Ox, Oy были направлены по главным приведенным осям инерции этого основания).

Мы увидим ниже, что в случае различных коэффициентов Пуассона только что указанный выбор осей координат, вообще говоря, уже не дает возможности решить упомянутые задачи раздельно [1]). Поэтому в этом параграфе мы под Oxy будем подразумевать любую (прямоугольную) систему координат в плоскости левого основания S и не будем считать, что плоскость изгибающей пары параллельна одной из плоскостей Oxz, Oyz.

1. Обозначим через M_y и M_x проекции векторного момента изгибающей пары на оси Oy и Ox, а через F — величину растягивающей силы, с линией действия по оси Oz.

Начнем с того, что, руководствуясь видом решений для случая одинаковых коэффициентов Пуассона, постараемся удовлетворить условиям

[1]) Однако, как мы увидим в § 148, можно и в нашем случае найти специальную систему координат, позволяющую раздельное рассмотрение упомянутых задач; но нахождение такой системы связано с решением некоторых вспомогательных задач о плоской деформации.

задачи линейной комбинацией следующих трех решений:

$$Z_z = E_j x, \quad u = -\frac{1}{2}(z^2 + \sigma_j x^2 - \sigma_j y^2), \quad v = -\sigma_j xy, \quad w = xz, \tag{1}$$

$$Z_z = E_j y, \quad u = -\sigma_j xy, \quad v = -\frac{1}{2}(z^2 + \sigma_j y^2 - \sigma_j x^2), \quad w = yz, \tag{2}$$

$$Z_z = E_j, \quad u = -\sigma_j x, \quad v = -\sigma_j y, \quad w = z \tag{3}$$

в областях S_j (остальные компоненты напряжения равны нулю).

Если бы все коэффициенты Пуассона были одинаковы и если бы оси координат были выбраны так, как было указано в начале параграфа, то эти решения, умноженные на подходящие постоянные [1]), дали бы соответственно решения задач об изгибе парой в плоскости Oxz, об изгибе парой в плоскости Oyz и о растяжении силой, направленной по Oz.

В действительности же, построенные таким образом решения не удовлетворяют условиям упомянутых задач уже потому, что соответствующие смещения имеют разрывы на линиях раздела участков S_j, S_k.

Для того, чтобы устранить эти разрывы, построим решения трех вспомогательных задач о плоской деформации, которые представляют собой частные случаи задачи, сформулированной в § 145, соответственно при следующих значениях функций g, h, фигурирующих в формуле (3) § 145:

$$g_1 = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2), \quad h_1 = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy, \tag{1a}$$

$$g_2 = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy, \quad h_2 = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(y^2 - x^2), \tag{2a}$$

$$g_3 = (\sigma_j - \sigma_k)\, x, \quad h_3 = (\sigma_j - \sigma_k)\, y \tag{3a}$$

на линиях раздела областей S_j, S_k.

Эти три задачи мы для краткости будем называть соответственно задачами (1a), (2a), (3a) и будем считать их решенными.

Будем обозначать компоненты смещений и напряжений, соответствующих этим трем вспомогательным задачам, верхними значками $^{(1)}$, $^{(2)}$, $^{(3)}$. В частности, будем иметь в областях S_j:

$$Z_z^{(1)} = \sigma_j (X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}), \tag{1b}$$

$$Z_z^{(2)} = \sigma_j (X_x^{(2)} + Y_y^{(2)}), \tag{2b}$$

$$Z_z^{(3)} = \sigma_j (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}). \tag{3b}$$

Наложение решений (1), (2), (3), умноженных соответственно на некоторые постоянные a_1, a_2, a_3, и решений (1a), (2a), (3a), умноженных соответственно на те же постоянные, даст, как легко видеть, решение задачи об изгибе и растяжении бруса при следующих значениях моментов

[1]) «Умножить решение на постоянную» — значит умножить на эту постоянную компоненты смещения и напряжения.

M_y, M_x изгибающих пар и величины F растягивающей силы:

$$\left.\begin{aligned} -M_y &= (I_{11}+K_{11})\,a_1+(I_{12}+K_{12})\,a_2+(I_{13}+K_{13})\,a_3,\\ M_x &= (I_{21}+K_{21})\,a_1+(I_{22}+K_{22})\,a_2+(I_{23}+K_{23})\,a_3,\\ F &= (I_{31}+K_{31})\,a_1+(I_{32}+K_{32})\,a_2+(I_{33}+K_{33})\,a_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$I_{\alpha\beta}=\iint\limits_S Ex^{(\alpha)}x^{(\beta)}\,dx\,dy=\sum E_j\iint\limits_S x^{(\alpha)}x^{(\beta)}\,dx\,dy, \tag{5}$$

$$K_{\alpha\beta}=\iint\limits_S x^{(\alpha)}Z_z^{(\beta)}\,dx\,dy, \tag{6}$$

где α, $\beta = 1, 2, 3$ и где под $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ следует подразумевать соответственно x, y, 1. Подробнее:

$$\left.\begin{aligned} &I_{11}=\iint\limits_S Ex^2\,dx\,dy,\quad I_{22}=\iint\limits_S Ey^2\,dx\,dy,\quad I_{12}=I_{21}=\iint\limits_S Exy\,dx\,dy,\\ &I_{33}=\iint\limits_S E\,dx\,dy=S_E,\\ &I_{13}=I_{31}=\iint\limits_S Ex\,dx\,dy=S_Ex_0,\quad I_{23}=I_{32}=\iint\limits_S Ey\,dx\,dy=S_Ey_0, \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

где $S_E=\sum\limits_j E_jS_j$ обозначает то же, что раньше, а x_0, y_0 — координаты приведенного центра тяжести основания S; I_{11} и I_{22} представляют собой приведенные моменты инерции основания S относительно осей Oy и Ox, а $I_{12}=I_{21}$ — приведенный центробежный момент инерции относительно этих осей.

Далее:

$$\left.\begin{aligned} &K_{11}=\iint\limits_S xZ_z^{(1)}\,dx\,dy,\quad K_{12}=\iint\limits_S xZ_z^{(2)}\,dx\,dy,\quad K_{13}=\iint\limits_S xZ_z^{(3)}\,dx\,dy,\\ &K_{21}=\iint\limits_S yZ_z^{(1)}\,dx\,dy,\quad K_{22}=\iint\limits_S yZ_z^{(2)}\,dx\,dy,\quad K_{23}=\iint\limits_S yZ_z^{(3)}\,dx\,dy,\\ &K_{31}=\iint\limits_S Z_z^{(1)}\,dx\,dy,\quad K_{32}=\iint\limits_S Z_z^{(2)}\,dx\,dy,\quad K_{33}=\iint\limits_S Z_z^{(3)}\,dx\,dy; \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

эти постоянные мы будем считать вычисленными.

Наша задача будет решена, если мы определим неизвестные постоянные a_1, a_2, a_3 из системы (4) при заданных M_y, M_x, F.

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} I_{11}+K_{11} & I_{12}+K_{12} & I_{13}+K_{13}\\ I_{21}+K_{21} & I_{22}+K_{22} & I_{23}+K_{23}\\ I_{31}+K_{31} & I_{32}+K_{32} & I_{33}+K_{33} \end{vmatrix},$$

как будет показано ниже (п. 3), *всегда отличен от нуля*; *точнее*, $\Delta > 0$. Поэтому система (4) однозначно определяет постоянные a_1, a_2, a_3, и нашу задачу можно считать решенной.

2. Прежде, чем перейти к доказательству неравенства $\Delta > 0$, остановимся на некоторых формулах, связанных с выражением для потенциальной энергии деформации, на которые нам придется опираться.

Вспомним, что в § 20 было введено в рассмотрение выражение

$$2W(e) = \lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{yz}^2 + 2e_{zx}^2 + 2e_{xy}^2), \quad (7)$$

представляющее собой рассчитанную на единицу объема, удвоенную потенциальную энергию, соответствующую деформации с компонентами $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$; эту деформацию мы будем кратко обозначать через (e); в соответствии с этим мы пишем теперь $W(e)$ вместо того, чтобы, как в § 20, писать просто W.

Выражение $W(e)$ представляет собой неособенную положительную квадратичную форму [1]) компонент деформации (e), обращающуюся в нуль лишь при $(e) = 0$ (то есть при $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = e_{xz} = e_{xy} = 0$).

Вспомним теперь, что компоненты напряжения, соответствующего деформации (e), выражаются формулами:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x = \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, & Y_y = \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, & Z_z = \lambda\theta + 2\mu e_{zz}, \\ Y_z = 2\mu e_{yz}, & Z_x = 2\mu e_{zx}, & X_y = 2\mu e_{xy} \\ & (\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) & \end{array}\right\} \quad (8)$$

и что в соответствии с этим выражение (7) может быть переписано еще так:

$$2W(e) = X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + 2Y_z e_{yz} + 2Z_x e_{zx} + 2X_y e_{xy}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь две различные деформации (e') и (e'') и будем отмечать соответствующие компоненты деформаций и напряжений одним и двумя штрихами. Введем в рассмотрение выражение, аналогичное (9):

$$2W(e', e'') = X_x' e_{xx}'' + Y_y' e_{yy}'' + Z_z' e_{zz}'' + 2Y_z' e_{yz}'' + 2Z_x' e_{zx}'' + 2X_y' e_{xy}'' =$$
$$= X_x'' e_{xx}' + Y_y'' e_{yy}' + Z_z'' e_{zz}' + 2Y_z'' e_{yz}' + 2Z_x'' e_{zx}' + 2X_y'' e_{xy}'. \quad (10)$$

Если под компонентами напряжения X_x' и т. д., X_x'' и т. д. подразумевать их выражения через компоненты деформации e_{xx}' и т. д., e_{xx}'' и т. д., то $W(e', e'')$ представляет собой билинейную форму этих последних компонент. Равенство между собой двух выражений в первой и второй строках формулы (10) доказывается непосредственной проверкой; оно

[1]) Напомним, что квадратичная форма $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *неособенной положительной*, если $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ при всех (действительных) значениях переменных, кроме $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Форма эта называется *особенной положительной*, если при всех значениях переменных $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, причем существуют и такие (действительные) значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не все равные нулю, что $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

показывает, что

$$W(e', e'') = W(e'', e'), \tag{10'}$$

т. е. что *билинейная форма* $W(e', e'')$ *симметрична*.

Если деформации (e') и (e'') совпадают, т. е. $(e') = (e'') = (e)$, то

$$W(e, e) = W(e), \tag{11}$$

где $W(e)$ обозначает то же, что в формуле (7) или (9).

В § 20 была доказана формула

$$\iint\limits_{\Sigma} (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, d\Sigma = 2 \iiint\limits_{V} W(e)\, dx\, dy\, dz = 2U, \tag{12}$$

где Σ обозначает поверхность деформированного тела, n — внешнюю нормаль, а V — область, им занятую; через U обозначена потенциальная энергия деформации всего тела.

Совершенно аналогично доказываются формулы (мы предоставляем доказательство читателю):

$$\left.\begin{aligned} 2U_{12} &= \iint\limits_{\Sigma} (X'_n u'' + Y'_n v'' + Z'_n w'')\, d\Sigma = 2 \iiint\limits_{V} W(e', e'')\, dx\, dy\, dz, \\ 2U_{21} &= \iint\limits_{\Sigma} (X''_n u' + Y''_n v' + Z''_n w')\, d\Sigma = 2 \iiint\limits_{V} W(e'', e')\, dx\, dy\, dz; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

обозначения U_{12} и U_{21} введены для сокращения письма.

Из формулы (10') следует равенство $U_{12} = U_{21}$, или подробнее:

$$\iint\limits_{\Sigma} (X'_n u'' + Y'_n v'' + Z'_n w'')\, d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} (X''_n u' + Y''_n v' + Z''_n w')\, d\Sigma, \tag{14}$$

выражающее так называемую *теорему Бетти* (Betti) (вернее, теоремой Бетти называется несколько более общее равенство для случая, когда имеются также объемные силы).

Нам придется применять предыдущие формулы лишь в случае плоской деформации бруса. В этом случае $X_z = Y_z = w = 0$ и все рассматриваемые функции не зависят от z. Поэтому

$$\begin{aligned} W(e', e'') &= X'_x e''_{xx} + Y'_y e''_{yy} + 2X'_y e''_{xy} = X''_x e'_{xx} + Y''_y e'_{yy} + 2X''_y e'_{xy} = \\ &= \lambda (e'_{xx} + e'_{yy})(e''_{xx} + e''_{yy}) + 2\mu (e'_{xx} e''_{xx} + e'_{yy} e''_{yy} + 2e'_{xy} e''_{xy}) \end{aligned} \tag{15}$$

и

$$W(e, e) = W(e) = \lambda (e_{xx} + e_{yy})^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + 2e_{xy}^2). \tag{16}$$

В случае плоской деформации удобнее применять формулы (12) — (14) не ко всему брусу, а к слою высотой 1, заключенному между двумя нормальными поперечными сечениями.

Тогда вместо формулы (12) будем, очевидно, иметь формулу

$$\int\limits_{L} (X_n u + Y_n v)\, ds = 2 \iint\limits_{S} W(e)\, dx\, dy = 2U, \tag{17}$$

где U теперь обозначает потенциальную энергию, рассчитанную на единицу длины (высоты) бруса, а вместо формул (13), (14) — формулу

$$2U_{12} = 2U_{21} = \int_L (X'_n u'' + Y'_n v'')\, ds = \int_L (X''_n u' + Y''_n v')\, ds = \\ = 2 \int_S \int W(e', e'')\, dx\, dy. \quad (18)$$

В предыдущих формулах S обозначает поперечное сечение бруса, а L — его границу.

В случае, если, как во вспомогательной задаче о плоской деформации § 145, компоненты смещения претерпевают разрывы на линиях раздела участков S_j, *под L следует подразумевать совокупность границ этих областей*. Поэтому, если L_j — граница участка S_j, интеграл берется по всем L_j, причем те части контуров L_j, которые принадлежат границам двух соседних участков S_k, S_l, проходятся по два раза: один раз в качестве границы участка S_k, другой раз в качестве границы участка S_l [см. ниже формулы (21) и (22)].

3. Вернемся к интересующему нас вопросу. Будем обозначать через $(e^{(1)})$, $(e^{(2)})$, $(e^{(3)})$ деформации, соответствующие вспомогательным задачам о плоской деформации (1а), (2а), (3а), а через $U_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) — выражения (18), вычисленные в предположении, что в качестве (e'), (e'') взяты соответственно $(e^{(\alpha)})$, $(e^{(\beta)})$, и докажем, что

$$K_{\alpha\beta} = 2U_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (19)$$

где $K_{\alpha\beta}$ — постоянные, определяемые формулами (6); из этого, в частности, будет следовать, что $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$.

Для доказательства преобразуем формулу

$$2U_{\alpha\beta} = \int_L [X_n^{(\alpha)} u^{(\beta)} + Y_n^{(\alpha)} v^{(\beta)}]\, ds \quad (20)$$

следующим образом. Как было сказано, под L следует подразумевать совокупность всех контуров, ограничивающих участки S_j области S. Поэтому

$$2U_{\alpha\beta} = \sum_j \int_{L_j} [X_n^{(\alpha)} u_j^{(\beta)} + Y_n^{(\alpha)} v_j^{(\beta)}]\, ds, \quad (21)$$

где L_j — границы участков S_j, а $u_j^{(\beta)}$, $v_j^{(\beta)}$ — граничные значения компонент $u^{(\beta)}$, $v^{(\beta)}$ при приближении к границе L_j из области S_j; n обозначает нормаль к L_j, внешнюю по отношению к S_j.

Замечая теперь, что на границе области S, по условию, $X_n = Y_n = 0$ и что при интегрировании линии раздела L_{kl} двух участков S_k, S_l пробегаются по два раза, легко заключаем, что формулу (21) можно написать еще так:

$$2U_{\alpha\beta} = \sum_{k,\, l} \int_{L_{kl}} \{X_\nu^{(\alpha)} (u_k^{(\beta)} - u_l^{(\beta)}) + Y_\nu^{(\alpha)} (v_k^{(\beta)} - v_l^{(\beta)})\}\, ds, \quad (22)$$

где на этот раз линии L_{kl} проходятся по одному разу и где ν обозначает нормаль, направленную от S_k к S_l.

Пользуясь этой формулой, легко доказать справедливость соотношений (19). Докажем, например, что $K_{12} = K_{21} = 2U_{12}$. Имеем согласно предыдущей формуле:

$$2U_{12} = \sum_{k,\ l} \int_{L_{kl}} \{X_\nu^{(1)} (u_k^{(2)} - u_l^{(2)}) + Y_\nu^{(1)} (v_k^{(2)} - v_l^{(2)})\}\, ds.$$

Замечая, что в силу формул (2а)

$$u_k^{(2)} - u_l^{(2)} = (\sigma_k - \sigma_l)\, xy,\ v_k^{(2)} - v_l^{(2)} = \frac{1}{2}(\sigma_k - \sigma_l)(y^2 - x^2)$$

и внося эти выражения в предыдущую формулу, получаем:

$$2U_{12} = \sum_{k,\ l} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{L_{kl}} \left\{ X_\nu^{(1)} xy + \frac{1}{2} Y_\nu^{(1)} (y^2 - x^2) \right\} ds.$$

Преобразуя теперь последнее выражение, подобно тому, как мы преобразовали формулу (21) в (22), только в обратном порядке, получаем:

$$2U_{12} = \sum_j \sigma_j \int_{L_j} \left[X_n^{(1)} xy + \frac{1}{2} Y_n^{(1)} (y^2 - x^2) \right] ds,$$

где L_j и n обозначают то же, что в формуле (21).

Замечая, далее, что

$$X_n^{(1)} = X_x^{(1)} \cos(n, x) + X_y^{(1)} \cos(n, y),$$
$$Y_n^{(1)} = Y_x^{(1)} \cos(n, x) + Y_y^{(1)} \cos(n, y)$$

и преобразуя интегралы по формуле Остроградского — Грина, получаем [1]):

$$2U_{12} = \sum_j \sigma_j \iint_{S_j} y (X_x^{(1)} + Y_y^{(1)})\, dx\, dy,$$

или, наконец, принимая во внимание формулу (1b),

$$2U_{12} = \iint_S y Z_z^{(1)}\, dx\, dy = K_{21}.$$

Точно так же, применяя для вычисления $2U_{12} = 2U_{21}$ формулу

$$2U_{12} = \int_L [X_n^{(2)} u^{(1)} + Y_n^{(2)} v^{(1)}]\, ds,$$

получаем: $2U_{12} = K_{12}$. Таким образом, $2U_{12} = K_{12} = K_{21}$, а это и требовалось показать.

Остальные равенства (19) доказываются совершенно аналогично; проведение доказательств мы предоставляем читателю.

[1]) При этом следует принять во внимание, что

$$\frac{\partial X_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{(1)}}{\partial y} = 0.$$

На основании формул (19) мы можем рассматривать определитель Δ как дискриминант следующей квадратичной формы величин a_1, a_2, a_3:

$$2\Omega(a_1, a_2, a_3) = 2G_0(a_1, a_2, a_3) + 2G(a_1, a_2, a_3), \tag{23}$$

где

$$2G_0(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta, \tag{24}$$

$$2G(a_1, a_2, a_3) = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} K_{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta = 2\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} U_{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta. \tag{25}$$

Легко видеть, что квадратичная форма G_0 — неособенная положительная, т. е. что $G_0(a_1, a_2, a_3) > 0$, если не все a_1, a_2, a_3 равны нулю. Действительно, из самого определения постоянных $I_{\alpha\beta}$ следует, что

$$2G_0(a_1, a_2, a_3) = \int\int_S E(a_1x + a_2y + a_3)^2\,dx\,dy,$$

откуда и следует наше утверждение.

Отметим, что $G_0(a_1, a_2, a_3)$, как легко проверить при помощи формулы (12), представляет собой рассчитанную на единицу длины бруса потенциальную энергию деформации, полученной наложением деформаций, соответствующих решениям (1) — (3), умноженным соответственно на a_1, a_2, a_3 (при этом следует считать, что составные части бруса деформируются независимо друг от друга, т. е. не спаяны между собой).

Легко также доказать, что квадратичная форма $G(a_1, a_2, a_3)$ — неособенная положительная, если не все коэффициенты Пуассона равны между собой (если коэффициенты Пуассона одинаковы, то, очевидно, все $K_{\alpha\beta}$ равны нулю и форма $G(a_1, a_2, a_3)$ равна нулю тождественно). Именно, не трудно показать, что $G(a_1, a_2, a_3)$ представляет собой рассчитанную на единицу длины бруса потенциальную энергию деформации, соответствующей наложению решений вспомогательных задач (1а), (2а), (3а), умноженных соответственно на a_1, a_2, a_3.

В самом деле, пусть по-прежнему $(e^{(1)})$, $(e^{(2)})$, $(e^{(3)})$ — (плоские) деформации, соответствующие задачам (1а), (2а), (3а), и пусть (e) обозначает деформацию:

$$(e) = a_1(e^{(1)}) + a_2(e^{(2)}) + a_3(e^{(3)}),$$

т. е. деформацию, компоненты $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ которой равны соответственно:

$$e_{xx} = a_1e_{xx}^{(1)} + a_2e_{xx}^{(2)} + a_3e_{xx}^{(3)}, \quad \ldots, \quad e_{xy} = a_1e_{xy}^{(1)} + a_2e_{xy}^{(2)} + a_3e_{xy}^{(3)}.$$

Для рассчитанной на единицу длины потенциальной энергии этой деформации имеем согласно формуле (17)

$$2U = \int\int_S W(e)\,dx\,dy,$$

где $W(e)$ определяется формулой (16). Но, как легко видеть,

$$W(e) = a_1^2 W(e^{(1)}) + a_2^2 W(e^{(2)}) + a_3^2 W(e^{(3)}) + 2a_2a_3 W(e^{(2)}, e^{(3)}) + \\ + 2a_3a_1 W(e^{(3)}, e^{(1)}) + 2a_1a_2 W(e^{(1)}, e^{(2)}),$$

и, следовательно, принимая во внимание определение величин $U_{\alpha\beta}$, $2U = 2G(a_1, a_2, a_3)$, а это мы и хотели показать.

Легко видеть, что если не все коэффициенты Пуассона одинаковы и если хоть одна из величин a_1, a_2, a_3 отлична от нуля, то деформация необходимо имеет место [1]), и, следовательно, $U > 0$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Форма $\Omega(a_1, a_2, a_3)$, будучи суммой двух положительных форм G_0 и G, одна из которых, а именно G_0, наверное неособенная, является тем более неособенной положительной. Но, как известно, дискриминант Δ такой формы наверное положителен, и утверждение, высказанное относительно Δ в конце п. 1, доказано.

Замечание 1. То обстоятельство, что форма $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ — неособенная положительная, можно было бы доказать проще, не разбивая ее на сумму форм G_0 и G. Такое доказательство можно провести, основываясь на том, что, как легко непосредственно показать, $\Omega = G_0 + G$ представляет собой потенциальную энергию деформации, соответствующей указанной выше комбинации решений (1) — (3) и (1а) — (3а).

Однако мы поступили иначе, желая явно выделить добавочные коэффициенты $K_{\alpha\beta}$, характеризующие влияние неодинаковости коэффициентов Пуассона различных материалов.

Замечание 2. Коэффициенты $K_{\alpha\beta}$, вообще говоря, весьма малы, если коэффициенты Пуассона различных материалов мало разнятся друг от друга; точнее, *они имеют тот же порядок, что квадраты и произведения разностей* $\sigma_j - \sigma_k$. В самом деле, обозначая временно через σ_{jk} разности $\sigma_j - \sigma_k$, фигурирующие в правых частях формул (1а) — (3а), и рассматривая σ_{jk} как некоторые независимые величины, легко убеждаемся, что решения вспомогательных задач, соответствующих формулам (1а) — (3а), зависят от σ_{jk} линейно. Далее, принимая во внимание фор-

---

[1]) Если деформация отсутствует, то, очевидно, на линиях раздела L_{jk} участков S_j, S_k будем иметь:

$$u_j - u_k = -\varepsilon_{jk} y + \alpha_{jk}, \qquad v_j - v_k = \varepsilon_{jk} x + \beta_{jk},$$

где ε_{jk}, α_{jk}, β_{jk} — постоянные; с другой стороны, на основании (1а) — (3а) на этих линиях должны быть:

$$u_j - u_k = (\sigma_j - \sigma_k)\left[\frac{1}{2} a_1 (x^2 - y^2) + a_2 xy + a_3 x\right],$$

$$v_j - v_k = (\sigma_j - \sigma_k)\left[a_1 xy + \frac{1}{2} a_2 (y^2 - x^2) + a_3 y\right];$$

сравнивая эти выражения, легко убеждаемся, при помощи элементарных рассуждений, что если $\sigma_j \neq \sigma_k$, то необходимо $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\varepsilon_{jk} = \alpha_{jk} = \beta_{jk} = 0$.

мулу (22) и то обстоятельство, что $X_\nu^{(\alpha)}$, $Y_\nu^{(\alpha)}$ линейно зависят от σ_{jk}, убеждаемся, что $K_{\alpha\beta}$ линейно зависит от квадратов и произведений величин σ_{jk}, а это и доказывает наше утверждение.

§ 147. Частные случаи. 1. Растяжение бруса, обладающего осью симметрии. Предположим, что ось Oz является осью симметрии бруса, причем симметрия понимается как в смысле геометрическом, так и в смысле упругих свойств.

Тогда очевидно, что O является приведенным центром тяжести «левого» основания. Направив оси Ox, Oy по приведенным осям инерции этого основания, будем иметь: $I_{12} = 0$. Далее, на основании симметрии и вида функций g_3, h_3 формулы (3а) предыдущего параграфа, легко заключаем, что решение соответствующей этой формуле вспомогательной задачи о плоской деформации будет также симметрично относительно O и, в частности,

$$Z_z^{(3)}(-x, -y) = Z_z^{(3)}(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$K_{31} = K_{13} = \int\int_S xZ_z^{(3)}\,dx\,dy = 0, \qquad K_{32} = K_{23} = \int\int_S yZ_z^{(3)}\,dx\,dy = 0.$$

Поэтому уравнения (4) предыдущего параграфа принимают вид (не забудем, что в нашем случае $x_0 = y_0 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} -M_y &= (I_{11} + K_{11})\,a_1 + K_{12}a_2, \\ M_x &= K_{21}a_1 + (I_{22} + K_{22})\,a_2, \\ F &= (S_E + K_{33})\,a_3. \end{aligned}\right\}$$

Если мы хотим решить задачу растяжения силой величины F, направленной по оси симметрии Oz, мы должны в предыдущих уравнениях взять $M_y = M_x = 0$, что дает:

$$a_1 = a_2 = 0,$$
$$a_3 = \frac{F}{S_E + K_{33}}. \tag{1}$$

Если коэффициенты Пуассона различных материалов, составляющих брус, все равны между собой, то $K_{33} = 0$, и мы имеем результат, полученный раньше. Если же не все коэффициенты Пуассона одинаковы, то необходимо $K_{33} > 0$ [1]).

Так как a_3 представляет собой относительное удлинение бруса под действием растягивающей силы F, то $S_E + K_{33}$ есть жесткость при растяжении, и предыдущая формула показывает, что *различие коэффициентов Пуассона (при неизменном S_E) увеличивает жесткость при растяжении, независимо от знаков разностей $\sigma_j - \sigma_k$.*

[1]) В этом случае форма $2G(a_1, a_2, a_3)$ неособенная положительная, и поэтому коэффициенты K_{11}, K_{22}, K_{33} все положительны; последнее следует из того, что $K_{11} = 2G(1, 0, 0)$; аналогично для K_{22} и K_{33}.

2. Изгиб парой бруса, обладающего плоскостью симметрии. Пусть плоскость Oxz является плоскостью симметрии бруса (как в смысле геометрическом, так и в смысле упругих свойств). В этом случае мы можем считать, что O совпадает с приведенным центром тяжести «левого» основания; оси Ox и Oy будут главными приведенными осями инерции этого основания относительно O.

При таком выборе осей в формулах (4) предыдущего параграфа $I_{13} = I_{23} = I_{12} = 0$. Далее, на основании симметрии и вида функций g_1, h_1 формул (1а) предыдущего параграфа, легко заключаем, что решение соответствующей задачи о плоской деформации также симметрично относительно оси Ox; в частности $Z_z^{(1)}(x,-y) = Z_z^{(1)}(x, y)$. Аналогично легко заключаем, что $Z_z^{(2)}(x,-y) = -Z_z^{(2)}(x, y)$. Поэтому

$$K_{12} = K_{21} = \int\int_S yZ_z^{(1)}\,dx\,dy = 0,\quad K_{23} = K_{32} = \int\int_S Z_z^{(2)}\,dx\,dy = 0,$$

и уравнения (4) предыдущего параграфа принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} -M_y &= (I_{11} + K_{11})\,a_1 + K_{13}a_3,\\ M_x &= (I_{22} + K_{22})\,a_2,\\ F &= K_{31}a_1 + (S_E + K_{33})\,a_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если мы хотим решить задачу об изгибе парой, плоскость которой перпендикулярна к плоскости симметрии, то должны положить $M_y = 0$, $F = 0$, что дает:

$$a_1 = a_3 = 0,$$
$$a_2 = \frac{M_x}{I_{22} + K_{22}}. \tag{3}$$

Если не все коэффициенты Пуассона одинаковы, то $K_{22} > 0$.

Если же мы хотим решить задачу об изгибе парой, плоскость которой параллельна плоскости симметрии, то должны положить $M_x = 0$, $F = 0$, что дает:

$$a_2 = 0,\quad a_3 = -\frac{a_1K_{31}}{S_E + K_{33}},\quad -a_1 = \frac{M_y}{I_{11} + K}, \tag{4}$$

где для краткости положено:

$$K = K_{11} - \frac{K_{13}^2}{S_E + K_{33}} = \frac{S_EK_{11} + K_{11}K_{33} - K_{13}^2}{S_E + K_{33}}. \tag{5}$$

Если не все коэффициенты Пуассона одинаковы, то $K > 0$, ибо $K_{11}K_{33} - K_{13}^2 > 0$ [1]).

Легко видеть, что в обоих рассмотренных случаях изгиба закон Бернулли — Эйлера имеет место и что жесткость при изгибе в первом

[1]) $K_{11}K_{33} - K_{13}^2$ есть дискриминант неособенной положительной квадратичной формы переменных a_1, a_3:

$$2G(a_1, 0, a_3) = K_{11}a_1^2 + 2K_{13}a_1a_3 + K_{33}a_1^3.$$

случае равна

$$I_{22}+K_{22}, \tag{6}$$

а во втором

$$I_{11}+K; \tag{7}$$

не забудем, что I_{22} и I_{11} представляют собой приведенные моменты инерции соответственно относительно осей Ox и Oy.

Мы видим, что в обоих случаях *различие коэффициентов Пуассона увеличивает (при неизменных I_{11} и I_{22}) жесткость при изгибе, независимо от знаков разностей* $\sigma_j - \sigma_k$.

В § 149 будут приведены некоторые простые примеры.

§ 148. Главная ось растяжения и главные плоскости изгиба. Уравнения (4) § 146 можно значительно упростить, если вместо произвольной системы координат Oxy в плоскости «левого» («нижнего») основания взять некоторую другую систему $O'x'y'$ в той же плоскости, придав новой оси $O'z'$ то же направление, что и старой оси Oz. А именно, как мы сейчас увидим, эту новую систему координат можно подобрать так, чтобы в правых частях уравнений (4) § 146 исчезли все коэффициенты, не расположенные на главной диагонали.

Пусть $K'_{\alpha\beta}$ обозначают постоянные, вычисленные для системы $O'x'y'$ так, как были вычислены постоянные $K_{\alpha\beta}$ для системы Oxy. Легко найти формулы, выражающие величины $K'_{\alpha\beta}$ через величины $K_{\alpha\beta}$; мы предоставляем читателю найти эти формулы перехода (см. также замечание в конце параграфа), а сами ограничимся выводом лишь тех из них, которые понадобятся нам в процессе рассуждений.

Для большей наглядности мы осуществим переход к новым осям в два приема, произведя сначала перенос начала, а затем поворот осей координат.

Пусть новая система осей $O'x'y'$ отличается от старой Oxy лишь положением начала и пусть a, b обозначают координаты нового начала O' относительно старых осей, так что для новых и старых координат одной и той же точки будем иметь:

$$x'=x-a,\quad y'=y-b.$$

Легко видеть, что в нашем случае $K'_{33}=K_{33}$. Действительно, во вспомогательной задаче, соответствующей формулам (3а) § 146, но поставленной применительно к новой системе $O'x'y'$, будем иметь для скачков смещений на линиях раздела:

$$u_j-u_k=(\sigma_j-\sigma_k)\,x'=(\sigma_j-\sigma_k)\,(x-a)=(\sigma_j-\sigma_k)\,x+\text{const},$$
$$v_j-v_k=(\sigma_j-\sigma_k)\,y'=(\sigma_j-\sigma_k)\,(y-b)=(\sigma_j-\sigma_k)\,y+\text{const},$$

и ясно, что решение этой задачи приводит к тому же распределению напряжений, что решение задачи при следующих скачках:

$$u_j-u_k=(\sigma_j-\sigma_k)\,x,\quad v_j-v_k=(\sigma_j-\sigma_k)\,y,$$

ибо постоянные, фигурирующие в правых частях предпоследних формул, можно устранить жестким перемещением некоторых из частей, составляющих брус. Таким образом, в частности, компонента напряжения $Z_z^{(3)}$ будет одной и той же для этих вспомогательных задач в системах Oxy и $O'x'y'$.

Значит, величина

$$K_{33} = \int\int_S Z_z^{(3)}\, dx\, dy$$

остается неизменной при переходе к новой системе.

Вычислим еще величины $K'_{13} = K'_{31}$ и $K'_{23} = K'_{32}$. Принимая во внимание формулы (6′) § 146 и только что сказанное насчет $Z_z^{(3)}$, будем иметь:

$$K'_{13} = \int\int_{S'} x' Z_z^{(3)}\, dx'\, dy' = \int\int_S (x-a)\, Z_z^{(3)}\, dx\, dy,$$

откуда

$$K'_{13} = K_{13} - aK_{33} \tag{1}$$

и аналогично

$$K'_{23} = K_{23} - bK_{33}. \tag{2}$$

Обозначая через $I'_{\alpha\beta}$ величины, вычисленные для системы $O'x'y'$ так, как были вычислены величины $I_{\alpha\beta}$ для системы Oxy, подберем a, b так, чтобы

$$I'_{13} + K'_{13} = S_E x'_0 + K'_{13} = 0,\quad I'_{23} + K'_{23} = S_E y'_0 + K'_{23} = 0,$$

или на основании предыдущих формул, если принять во внимание, что $x'_0 = x_0 - a$, $y'_0 = y_0 - b$,

$$a = \frac{S_E x_0 + K_{13}}{S_E + K_{33}},\quad b = \frac{S_E y_0 + K_{23}}{S_E + K_{33}}. \tag{3}$$

Если придать a и b предыдущие значения, то формулы, соответствующие формулам (4) § 146, но составленные для новой системы осей, приобретают следующий, более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} -M_y &= (I_{11} + K_{11})\, a_1 + (I_{12} + K_{12})\, a_2, \\ M_x &= (I_{21} + K_{21})\, a_1 + (I_{22} + K_{22})\, a_2, \\ F &= (S_E + K_{33})\, a_3; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

для упрощения письма мы отбросили штрихи, т. е. написали M_y, M_x, $I_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ вместо $M_{y'}$, $M_{x'}$, $I'_{\alpha\beta}$, $K'_{\alpha\beta}$. В соответствии с этим новую систему $O'x'y'$ мы будем теперь обозначать опять через Oxy.

Прямую, на которой расположена новая ось Oz, мы будем называть *главной осью растяжения* (сжатия) [1].

---

[1]) Главную ось растяжения можно определить еще так. Возьмем в формулах (4) § 146 $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, тогда получим:

$$M_y = -(S_E x_0 + K_{13})\, a_3,\quad M_x = (S_E y_0 + K_{23})\, a_3,\quad F = (S_E + K_{33})\, a_3.$$

Таким образом, в нашем случае усилия, приложенные к «правому» основанию, статически эквивалентны растягивающей силе величины $F \neq 0$, направленной по оси Oz,

Это название оправдывается тем, что если к основаниям бруса приложены растягивающие силы величины F, имеющие линией действия главную ось растяжения, то решение задачи растяжения мы получим, положив:

$$a_1 = a_2 = 0,$$
$$a_3 = \frac{F}{S_E + K_{33}},$$

так что растяжение не будет сопровождаться изгибом.

Предыдущая формула показывает, что жесткость при растяжении равна

$$S_E + K_{33}. \tag{5}$$

Так как при неодинаковых коэффициентах Пуассона $K_{33} > 0$, то мы видим, что различие коэффициентов Пуассона (при неизменном S_E) *увеличивает жесткость при растяжении независимо от знаков разностей* $\sigma_j - \sigma_k$,— факт, отмеченный нами выше лишь для случая осевой симметрии.

Можно еще упростить формулы (4) путем поворота координатных осей Oxy в своей плоскости.

Если новая система $Ox'y'$ повернута относительно старой на угол α, то, согласно известным формулам,

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha; \tag{6}$$
$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \qquad y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \tag{7}$$

Выразим величины K'_{11}, $K'_{12} = K'_{21}$, K'_{22}, составленные применительно к новой системе, через величины K_{11}, $K_{12} = K_{21}$, K_{22}. Для этого сравним вспомогательные задачи о плоской деформации, соответствующие формулам (1а), (2а) § 146, с такими же вспомогательными задачами, но поставленными применительно к новой системе.

Имеем для скачков смещений в упомянутых задачах для старой системы:

$$u_j - u_k = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2), \quad v_j - v_k = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy \tag{I}$$

в случае первой задачи и

$$u_j - u_k = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy, \quad v_j - v_k = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(y^2 - x^2) \tag{II}$$

в случае второй задачи. Для соответствующих же задач, поставленных применительно к новой системе, будем иметь:

$$u'_j - u'_k = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x'^2 - y'^2), \quad v'_j - v'_k = (\sigma_j - \sigma_k)\, x'y' \tag{I'}$$

и

$$u'_j - u'_k = (\sigma_j - \sigma_k)\, x'y', \quad v'_j - v'_k = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(y'^2 - x'^2). \tag{II'}$$

и паре, момент которой перпендикулярен к линии действия силы. Но такая система сил, как известно, статически эквивалентна одной силе той же величины и того же направления. Линия действия этой последней силы, как легко подсчитать, и есть главная ось растяжения, определенная в тексте.

Для сравнения этих задач, выразим граничные условия (I′), (II′), пользуясь старой системой координат Oxy. А именно, внося в правые части формул (I′) на место x', y' выражения (7), получаем:

$$u_j' - u_k' = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2)\cos 2\alpha + (\sigma_j - \sigma_k)\, xy \sin 2\alpha;$$

$$v_j' - v_k' = (\sigma_j - \sigma_k)\, xy \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2)\sin 2\alpha.$$

Вводя теперь на место компонент скачков $u_j' - u_k'$, $v_j' - v_k'$ компоненты $u_j - u_k$, $v_j - v_k$ тех же скачков в старых координатах и принимая во внимание, что

$$u_j - u_k = (u_j' - u_k')\cos\alpha - (v_j' - v_k')\sin\alpha,$$
$$v_j - v_k = (u_j' - u_k')\sin\alpha + (v_j' - v_k')\cos\alpha,$$

получаем [1]):

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2 - y^2)\cos\alpha + (\sigma_j - \sigma_k)\, xy \sin\alpha, \\ v_j - v_k &= (\sigma_j - \sigma_k)\, xy \cos\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(y^2 - x^2)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Мы видим, таким образом, что решение задачи, соответствующей условиям (I′), мы получим, сложив решения задач, соответствующих условиям (I) и (II), предварительно умножив их соответственно на $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Таким образом, если через $Z_z'^{(1)}$ мы обозначим компоненту Z_z напряжения, соответствующего задаче (I′), а через $Z_z^{(1)}$, $Z_z^{(2)}$ — по-прежнему компоненты Z_z напряжений, соответствующих задачам (I), (II), то

$$Z_z'^{(1)} = Z_z^{(1)}\cos\alpha + Z_z^{(2)}\sin\alpha. \tag{9}$$

Аналогично получим, что для задачи (II′)

$$Z_z'^{(2)} = -Z_z^{(1)}\sin\alpha + Z_z^{(2)}\cos\alpha. \tag{10}$$

Пользуясь формулами (9) и (10), легко выразить K_{11}', K_{12}', K_{22}' через K_{11}, K_{12}, K_{22}. Например, для K_{12}' будем иметь:

$$K_{12}' = K_{21}' = \int\int_S y' Z_z'^{(1)}\, dx'\, dy' =$$

$$= \int\int_S (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)(Z_z^{(1)}\cos\alpha + Z_z^{(2)}\sin\alpha)\, dx\, dy,$$

откуда

$$K_{12}' = K_{12}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(K_{11} - K_{22})\sin 2\alpha. \tag{11}$$

Выражение для K_{11}' и K_{22}' мы предоставляем написать читателю (см. также замечание в конце параграфа).

---

[1]) Вывод формул (8) можно упростить, если вместо x, y рассматривать $\zeta = x + iy$, а вместо u, v рассматривать $u + iv$.

Найдем теперь выражение для приведенного центробежного момента инерции I'_{12} относительно новой системы. Имеем:

$$I'_{12} = \iint\limits_S Ex'y'\,dx'\,dy' = \iint\limits_S E\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)\,dx\,dy,$$

откуда

$$I'_{12} = I_{12}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22})\sin 2\alpha; \tag{12}$$

мы видим полную аналогию с формулой (11) (см. также замечание в конце параграфа).

Подберем теперь угол α так, чтобы

$$I'_{12} + K'_{12} = I'_{21} + K'_{21} = 0. \tag{13}$$

Пользуясь формулами (11) и (12), получаем:

$$(I_{12} + K_{12})\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_{11} + K_{11} - I_{22} - K_{22})\sin 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(I_{12} + K_{12})}{I_{11} + K_{11} - I_{22} - K_{22}}. \tag{14}$$

Придав α одно из значений, удовлетворяющих этому условию (остальные значения отличаются целым кратным прямого угла), мы придем к системе осей $Ox'y'$, для которой уравнения (4) принимают весьма простой вид, о котором говорилось в начале параграфа:

$$-M_{y'} = (I'_{11} + K'_{11})\,a_1,\quad M_{x'} = (I'_{22} + K'_{22})\,a_2,\quad F = (S_E + K_{33})\,a_3,$$

ибо, как легко видеть, и для новой системы $I'_{13} + K'_{13} = S_E x'_0 + K'_{13} = 0$, $I'_{23} + K'_{23} = S_E y'_0 + K'_{23} = 0$ и, кроме того, $K'_{33} = K_{33}$.

Плоскости $Ox'z$ и $Oy'z$ мы будем называть *главными плоскостями изгиба*.

Мы видим, что если ось Oz совмещена с главной осью растяжения, а плоскости $Ox'z$, $Oy'z$ — с главными плоскостями изгиба, то задачи о растяжении силами, имеющими линией действия ось Oz, и об изгибе парами, плоскости которых параллельны плоскостям $Ox'z$, $Oy'z$, могут быть решены независимо друг от друга.

Отбрасывая штрихи, мы запишем последние уравнения так:

$$-M_y = (I_{11} + K_{11})\,a_1,\quad M_x = (I_{22} + K_{22})\,a_2,\quad F = (S_E + K_{33})\,a_3. \tag{15}$$

Легко видеть, что закон Бернулли — Эйлера имеет место для изгиба парами, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, и что жесткости при изгибе равны соответственно

$$I_{11} + K_{11},\quad I_{22} + K_{22}; \tag{16}$$

жесткость при растяжении равна

$$S_E + K_{33},$$

как было уже отмечено выше.

З а м е ч а н и е. Мы предоставляем читателю проверить [1]), что при переходе от одной системы осей Oxy к другой $O'x'y'$ *величины* $K_{\alpha\beta}$ *преобразуются по тем же формулам, что величины* $I_{\alpha\beta}$.

Например, при переносе начала координат O в новое положение $O'(a, b)$ будем иметь:

$$I'_{11} = \int\int_S Ex'^2\,dx'\,dy' = \int\int_S E(x-a)^2\,dx\,dy = I_{11} - 2aI_{13} + a^2 I_{33};$$

в соответствии с этим

$$K'_{11} = K_{11} - 2aK_{13} + a^2 K_{33}.$$

Из сказанного вытекает, что с точки зрения упрощения обозначений было бы целесообразно не рассматривать отдельно величины $K_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta}$, а рассматривать лишь их суммы: $I^*_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}$, которые только и фигурируют в уравнениях (4) § 146. Мы не сделали этого (ср. замечание 1 к § 146) с целью явно выделить слагаемые $K_{\alpha\beta}$, появляющиеся лишь в случае, когда коэффициенты Пуассона различны.

§ 149. Применение комплексного представления. Примеры. 1. При решении встретившихся нам вспомогательных задач о плоской деформации удобно, как и во многих других случаях, пользоваться функциями комплексного переменного

$$\zeta = x + iy.$$

Общее решение уравнений плоской теории упругости для однородного изотропного тела (§ 32) запишем теперь так:

$$u + iv = \alpha\varphi(\zeta) - \beta\overline{\zeta\varphi'(\zeta)} - \beta\overline{\psi(\zeta)}, \tag{1}$$

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(\zeta), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)], \tag{2}$$

где $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — аналитические функции комплексного переменного ζ в рассматриваемой области. Мы ввели здесь новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2\mu} = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} = \frac{(3-4\sigma)(1+\sigma)}{E}, \quad \beta = \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\sigma}{E}. \tag{3}$$

В интересующем нас случае вспомогательной задачи § 145 постоянные α, β принимают различные значения α_j, β_j для различных областей S_j, составляющих сечение S бруса, а функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ голоморфны в каждой из этих областей [2]).

Напомним еще, что компоненты X_n, Y_n вектора напряжения, приложенного к элементу ds любого контура со стороны положительной нормали n, определяются формулой:

$$(X_n + iY_n)\,ds = -id[\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}], \tag{4}$$

---

[1]) Вместо простой проверки можно вывести указываемое свойство путем рассмотрения общего выражения для потенциальной энергии деформированного бруса.

[2]) Многозначные члены в функциях φ, ψ отпадают в нашем случае, так как главные векторы усилий, приложенных к границам участков S_j, все равны нулю.

причем предполагается, что положительные направления нормали n и элемента ds расположены друг относительно друга, как соответственно оси Ox, Oy.

В соответствии с этим условие (1) § 145 может быть выражено так:

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \text{const} \tag{5}$$

на границе области S, а условие (2) того же параграфа — так:

$$[\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}]_j = [\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}]_k + \text{const} \tag{6}$$

на линиях раздела участков S_j, S_k.

Далее, условие (3) § 145 напишется так:

$$[\alpha\varphi(\zeta) - \beta\zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \beta\overline{\psi(\zeta)}]_j - [\alpha\varphi(\zeta) - \beta\zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \beta\overline{\psi(\zeta)}]_k = f \tag{7}$$

на линиях раздела областей S_j, S_k, где f — заданная на этих линиях функция. В случаях (1а), (2а), (3а) § 146 будем иметь соответственно:

$$f = g_1 + ih_1 = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)\zeta^2, \tag{8_1}$$

$$f = g_2 + ih_2 = -\frac{i}{2}(\sigma_j - \sigma_k)\zeta^2, \tag{8_2}$$

$$f = g_3 + ih_3 = (\sigma_j - \sigma_k)\zeta. \tag{8_3}$$

2. Рассмотрим в качестве примера случай, когда свободная поверхность есть круговой цилиндр, а поверхность раздела двух сред — также круговой цилиндр с той же осью. Область S_1 пусть будет ограничена окружностью радиуса R_1, а область S_2 — той же окружностью и окружностью радиуса $R_2 > R_1$; начало координат O мы поместим в центре этих окружностей.

Вследствие симметрии очевидно, что ось Oz будет совмещена с главной осью растяжения, а плоскости Oxz, Oyz — с главными плоскостями изгиба.

В нашем случае легко найти решение вспомогательных задач, разлагая функции φ и ψ в области S_1 по положительным степеням ζ и в области S_2 — по отрицательным и положительным степеням. Подстановка в равенства (5), (6) и (7) сразу определит коэффициенты; произвольные постоянные, которые могут остаться, не имеют никакого влияния на распределение напряжений (это следует из единственности решения задачи).

Однако интересующие нас случаи настолько просты, что легко сразу угадать форму решения и вместо бесконечных рядов брать с самого начала только несколько членов (см. ниже).

3. Решим сперва з а д а ч у о р а с т я ж е н и и. Легко догадаться, что в этом случае достаточно взять:

$$\varphi_1(\zeta) = A_1\zeta, \quad \psi_1(\zeta) = 0 \text{ в области } S_1,$$

$$\varphi_2(\zeta) = A_2\zeta, \quad \psi_2(\zeta) = \frac{B_2}{\zeta} \text{ в области } S_2,$$

где A_1, A_2, B_2 — действительные постоянные, а значки 1 и 2 при φ и ψ указывают на принадлежность функций областям S_1 и S_2.

Условия (5), (6) и (7) при $f = (\sigma_1 - \sigma_2)\zeta$ дают соответственно, если отбросить фигурирующие в этих условиях произвольные постоянные:

$$\begin{aligned} &2A_2\zeta + B_2\bar{\zeta}^{-1} = 0 \qquad \text{при } |\zeta| = R_2, \\ &2A_1\zeta = 2A_2\zeta + B_2\bar{\zeta}^{-1} \quad \text{при } |\zeta| = R_1, \\ &(\alpha_1 - \beta_1) A_1\zeta = (\alpha_2 - \beta_2) A_2\zeta - \beta_2 B_2\bar{\zeta}^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\zeta \quad \text{при } |\zeta| = R_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Полагая, далее, $\zeta = re^{i\vartheta}$, $\bar{\zeta} = re^{-i\vartheta}$, получаем по сокращении на $e^{i\vartheta}$:

$$2A_2R_2 + \frac{B_2}{R_2} = 0, \quad 2A_1R_1 = 2A_2R_1 + \frac{B_2}{R_1},$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) A_1R_1 = (\alpha_2 - \beta_2) A_2R_1 - \frac{\beta_2 B_2}{R_1} + (\sigma_1 - \sigma_2) R_1.$$

Предыдущие уравнения определяют коэффициенты A_1, A_2, B_2. Именно:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(R_2^2 - R_1^2)}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2) R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2}, \\ A_2 &= -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2) R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2}, \\ B_2 &= \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2 R_2^2}{(\alpha_1 - \beta_1)(R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2) R_1^2 + 2\beta_2 R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Напомним, что α_1, β_1, α_2, β_2 даются формулами (3), где E и σ надо взять с соответствующими значками, так что

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{2(1+\sigma_1)(1-2\sigma_1)}{E_1}, \quad \alpha_2 - \beta_2 = \frac{2(1+\sigma_2)(1-2\sigma_2)}{E_2}, \quad \beta_2 = \frac{1+\sigma_2}{E_2}.$$

Так как коэффициенты Пуассона σ всегда меньше $^1/_2$, то предыдущие величины все положительны.

Налагая полученное решение вспомогательной задачи, умноженное на постоянную a_3, на решение (3) § 146, также умноженное на a_3, получим решение исходной задачи, если придадим a_3 значение:

$$a_3 = \frac{F}{S_E + K_{33}}, \tag{11}$$

где F — величина растягивающей силы,

$$S_E = S_1E_1 + S_2E_2 = \pi [R_1^2E_1 + (R_2^2 - R_1^2) E_2] \tag{12}$$

и

$$K_{33} = \iint_S Z_z^{(3)}\, dx\, dy,$$

где $Z_z^{(3)} = \sigma_j (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)})$ в S_j $(j = 1, 2)$; мы применяем здесь обозначения § 146.

В нашем случае

$$\sigma_j (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}) = 4\sigma_j \operatorname{Re} \varphi_j'(\zeta) = 4\sigma_j A_j \text{ в } S_j \ (j = 1, 2).$$

Поэтому

$$K_{33}=4\,(S_1\sigma_1A_1+S_2\sigma_2A_2)=\frac{4\pi\,(\sigma_1-\sigma_2)^2\,(R_2^2-R_1^2)\,R_1^2}{(\alpha_1-\beta_1)\,(R_2^2-R_1^2)+(\alpha_2-\beta_2)\,R_1^2+2\beta_2R_2^2}\,; \qquad (13)$$

как и следовало ожидать, при $\sigma_1\neq\sigma_2$, $K_{33}>0$ и содержит множителем $(\sigma_1-\sigma_2)^2$.

4. Перейдем теперь к задаче об изгибе парой, считая, что плоскость пары параллельна плоскости Oxz. В этом случае условиям вспомогательной задачи о плоской деформации, соответствующей формуле (8_1), можно удовлетворить, полагая:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1=A_1\zeta^2,\quad \psi_1=0 \ \text{ в } S_1,\\ &\varphi_2=A_2\zeta^2,\quad \psi_2=\frac{B_2}{\zeta^2}+C_2 \ \text{ в } S_2,\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где A_1, A_2, B_2, C_2 — действительные постоянные.

Подстановка этих значений в соотношения (5), (6) и (7) при $f=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\,\zeta^2$ дает, как легко видеть, четыре уравнения для определения постоянных A_1, A_2, B_2, C_2, решая которые без всякого труда получаем значения этих постоянных. Мы выписываем значения трех первых, так как постоянная C_2 не влияет на распределение напряжений:

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\,(R_2^4-R_1^4)}{\alpha_1\,(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2R_1^4+\beta_2R_2^4}\,,\\ A_2&=-\frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\,R_1^4}{\alpha_1\,(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2R_1^4+\beta_2R_2^4}\,,\\ B_2&=\frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\,R_1^4R_2^4}{\alpha_1\,(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2R_1^4+\beta_2R_2^4}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Напряжение $Z_z^{(1)}$, соответствующее этой вспомогательной задаче, выражается формулой

$$Z_z^{(1)}=\sigma_j\,(X_x^{(1)}+Y_y^{(1)})=4\sigma_j\,\mathrm{Re}\,\varphi'(\zeta)=8\sigma_jA_jx \ \text{ в } S_j\ (j=1,2).$$

Поэтому согласно обозначениям § 146

$$K_{11}=\iint\limits_S xZ_z^{(1)}\,dx\,dy=8\sigma_1A_1\iint\limits_{S_1}x^2\,dx\,dy+8\sigma_2A_2\iint\limits_{S_2}x^2\,dx\,dy=$$

$$=2\pi\sigma_1A_1R_1^4+2\pi\sigma_2A_2\,(R_2^4-R_1^4),$$

или на основании формулы (15)

$$K_{11}=\frac{\pi\,(\sigma_1-\sigma_2)^2\,(R_2^4-R_1^4)\,R_1^4}{\alpha_1\,(R_2^4-R_1^4)+\alpha_2R_1^4+\beta_2R_2^4}\,. \qquad (16)$$

Таким образом, жесткость при изгибе равна

$$I_E+K_{11} \qquad (17)$$

(мы пишем I_E вместо I_{11}), где K_{11} дается предыдущей формулой, а

$$I_E=\frac{\pi}{4}\,[E_1R_1^4+E_2\,(R_2^4-R_1^4)]; \qquad (18)$$

как и следовало ожидать, при $\sigma_1\neq\sigma_2$, $K_{11}>0$ и содержит множитель $(\sigma_1-\sigma_2)^2$.

§ 150. Задача об изгибе поперечной силой [1]). Направим ось Oz по главной оси растяжения, а в качестве плоскостей Oxz, Oyz возьмем главные плоскости изгиба (§ 148).

Для такой системы при обозначениях § 146 будем иметь:

$$I_{13}+K_{13}=S_E x_0+K_{13}=0, \quad I_{23}+K_{23}=S_E y_0+K_{23}=0,$$
$$I_{12}+K_{12}=0, \tag{1}$$

где x_0, y_0 обозначают координаты приведенного центра тяжести «левого» основания.

Предположим, что изгибающая сила величины W приложена в точке, где ось Oz пересекает «правое» («верхнее») основание, и направлена параллельно оси Ox.

Решение для общего случая найдем, комбинируя соответствующее указанному случаю решение с аналогичным решением, которое получим, поменяв ролями оси Ox и Oy, и с решением задачи кручения (§ 139).

Принимая во внимание вид решения, полученного нами в § 144 для случая одинаковых коэффициентов Пуассона, естественно и в нашем случае пытаться найти решение задачи в виде:

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)} &= -\tau yz + A\left[\tfrac{1}{2}\sigma_j (l-z)(x^2-y^2)+\tfrac{1}{2}lz^2-\tfrac{1}{6}z^3\right], \\ v^{(0)} &= \tau xz + A\sigma_j (l-z)\,xy, \\ w^{(0)} &= \tau\varphi(x, y) - A\left[\chi(x, y)+x\left(lz-\tfrac{1}{2}z^2\right)+xy^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

в областях, соответствующих сечениям S_j; в этих формулах τ, A — постоянные, подлежащие определению, $\varphi(x, y)$ — функция кручения, определенная так, как в § 139, а $\chi(x, y)$ — некоторая функция, *непрерывная во всей области* S и подлежащая определению.

Компоненты напряжения, соответствующие смещениям (2), выражаются в областях с сечениями S_j формулами:

$$X_x^{(0)}=Y_y^{(0)}=X_y^{(0)}=0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} X_z^{(0)} &= \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-B_j\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma_j x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma_j\right)y^2\right], \\ Y_z^{(0)} &= \tau\mu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-B_j\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}+(2+\sigma_j)\,xy\right], \\ Z_z^{(0)} &= -K_j(l-z)\,x, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$B_j=A\mu_j, \quad K_j=AE_j. \tag{5}$$

Однако деформация (2) не может удовлетворять условиям задачи потому, что компоненты смещения u, v не являются непрерывными при

[1]) Приводимое в этом параграфе решение было дано в статье А. К. Рухадзе [3] однако не все утверждения, высказанные в этой статье, справедливы. Они станут справедливыми, если под системой осей $Oxyz$ подразумевать систему, принятую нами в тексте, а не ту, которой пользуется А. К. Рухадзе, и если внести в его рассуждения одно (несущественное) изменение.

переходе через линии раздела областей S_j, S_k. А именно, на этих линиях:

$$\left.\begin{aligned} u_j^{(0)} - u_k^{(0)} &= \frac{1}{2} A(\sigma_j - \sigma_k)(l-z)(x^2-y^2), \\ v_j^{(0)} - v_k^{(0)} &= A(\sigma_j - \sigma_k)(l-z)\,xy. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эти разрывы уже нельзя устранить при помощи наложения некоторого решения задачи о плоской деформации, так как разрывы зависят и от координаты z.

Мы все же начнем с решения вспомогательной задачи о плоской деформации, сформулированной в § 145 при следующих значениях компонент скачков смещения на линиях раздела:

$$u_j - u_k = g = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_k)(x^2-y^2), \quad v_j - v_k = h = (\sigma_i - \sigma_k)\,xy; \tag{7}$$

это есть задача (1а) § 146.

Будем, как в § 146, обозначать компоненты смещений и напряжений, соответствующих этой задаче, верхним значком $^{(1)}$ и, считая вспомогательную задачу решенной, рассмотрим пространственную деформацию, характеризуемую следующими компонентами смещения:

$$u^* = (l-z)\,u^{(1)}, \quad v^* = (l-z)\,v^{(1)}, \quad w^* = 0. \tag{8}$$

Компоненты напряжения, соответствующего смещениям (8), даются формулами:

$$X_x^* = (l-z)\,X_x^{(1)}, \quad Y_y^* = (l-z)\,Y_y^{(1)}, \quad X_y^* = (l-z)\,X_y^{(1)}, \tag{9}$$

$$Z_z^* = (l-z)\,Z_z^{(1)} = \sigma_j (l-z)(X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}), \tag{10}$$

$$X_z^* = -\mu_j u^{(1)}, \quad Y_z = -\mu_j v^{(1)} \tag{11}$$

в областях, соответствующих сечениям S_j.

Составим, наконец, деформацию, полученную наложением деформаций, соответствующих смещениям (2) и смещениям (8), умноженным на $-A$, т. е. деформацию, соответствующую смещениям:

$$u = u^{(0)} - Au^*, \quad v = v^{(0)} - Av^*, \quad w = w^{(0)}. \tag{12}$$

Компоненты напряжения, соответствующего этим смещениям, даются формулами:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= X_x^{(0)} - AX_x^*, \quad Y_y = Y_y^{(0)} - AY_y^*, \quad Z_z = Z_z^{(0)} - AZ_z, \\ Y_z &= Y_z^{(0)} - AY_z^*, \quad Z_x = Z_x^{(0)} - AZ_x^*, \quad X_y = X_y^{(0)} - AX_y^*. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Подставив эти значения в уравнения равновесия, легко убедимся, что они будут удовлетворены, если функция $\chi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\chi(x, y) = \varrho(x, y) \tag{14}$$

каждой из областей S_j, где через $\varrho(x, y)$ обозначена функция, определяемая формулой

$$\varrho(x, y) = \frac{\lambda_j + \mu_j}{\mu_j}\theta^{(1)}, \qquad \theta^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \quad \text{в области } S_j; \tag{15}$$

эту функцию мы считаем заданной, так как считаем решенной вспомогательную задачу о плоской деформации.

Предполагая, далее, для определенности, что мы имеем дело с о с н о в н ы м с л у ч а е м составного бруса (§ 139, п. 1), и выражая граничные условия на свободной боковой поверхности и на поверхностях раздела, легко получаем при прежних обозначениях:

$$\mu_0\left(\frac{d\chi}{dn}\right)_0-\mu_j\left(\frac{d\chi}{dn}\right)_j=f_j \quad \text{на} \quad L_j \ (j=1, 2, \ldots, m+1, \ \mu_{m+1}=0), \tag{16}$$

где f_j обозначает заданную на L_j функцию:

$$f_j=-\left\{\frac{1}{2}(\mu_0\sigma_0-\mu_j\sigma_j)\,x^2+\right.$$
$$\left.+\left[\mu_0\left(1-\frac{\sigma_0}{2}\right)-\mu_j\left(1-\frac{\sigma_j}{2}\right)\right]y^2-\mu_0u_0^{(1)}+\mu_ju_j^{(1)}\right\}\cos(n,\ x)-$$
$$-\{[\mu_0(2+\sigma_0)-\mu_j(2+\sigma_j)]\,xy-\mu_0v_0^{(1)}+\mu_jv_j^{(1)}\}\cos(n,\ y). \tag{17}$$

Мы пришли, таким образом, к знакомой нам граничной задаче (16), но только на этот раз искомая функция $\chi(x, y)$ удовлетворяет не уравнению Лапласа $\Delta\chi=0$, а несколько более общему уравнению Пуассона (14).

Легко, однако, свести эту задачу к случаю, когда искомая функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть, в самом деле, $\chi_0(x, y)$ — какое-либо частное решение уравнения (14); такое частное решение всегда легко найти [1]). Полагая

$$\chi(x, y)=\chi_0(x, y)+\chi^*(x, y), \tag{18}$$

где $\chi^*(x, y)$ — новая искомая функция, удовлетворяющая уже, очевидно, уравнению $\Delta\chi^*=0$, приходим к граничному условию:

$$\mu_0\left(\frac{d\chi^*}{dn}\right)_0-\mu_j\left(\frac{d\chi^*}{dn}\right)_j=f_j^* \quad \text{на} \quad L_j \ (j=1, 2, \ldots, m+1; \ \mu_{m+1}=0), \tag{19}$$

где

$$f_j^*=f_j-\mu_0\left(\frac{d\chi_0}{dn}\right)_0+\mu_j\left(\frac{d\chi_0}{dn}\right)_j \quad \text{на} \quad L_j. \tag{20}$$

Мы знаем, что условие разрешимости задачи (19) заключается в следующем:

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}f_j^*\,ds=0. \tag{21}$$

Преобразуем несколько последнюю формулу. Внося на место f_j^* выражение (20), получаем:

$$\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}f_j\,ds-\mu_0\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left(\frac{d\chi_0}{dn}\right)_0ds+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\int_{L_j}\left(\frac{d\chi_0}{dn}\right)_j ds=0,$$

[1]) Таким частным решением, например, будет, как известно, логарифмический потенциал

$$\chi_0(x, y)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\varrho(\xi, \eta)\ln r\,d\xi\,d\eta,$$

где $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$. Однако на практике обычно удобнее находить частное решение при помощи различных элементарных приемов.

или, преобразуя последние интегралы по известной формуле Грина,

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j\,ds - \mu_0 \iint_{S_0} \Delta\chi_0\,dx\,dy - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \iint_{S_j} \Delta\chi_0\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j\,ds - \iint_{S} \mu\Delta\chi_0\,dx\,dy = 0,$$

или, наконец, вспоминая, что $\Delta\chi_0 = \varrho\,(x, y)$,

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int_{L_j} f_j\,ds - \iint_{S} \mu\varrho\,dx\,dy = 0. \tag{22}$$

Проверим, удовлетворено ли в нашем случае это условие. Внося в условие (22) значения f_j, даваемые формулой (17), и преобразуя интегралы по формуле Остроградского — Грина, легко получаем, что условие (22) сводится в нашем случае к следующему:

$$-\iint_{S} 2\mu\,(1+\sigma)\,x\,dx\,dy + \iint_{S} \mu\theta^{(1)}\,dx\,dy - \iint_{S} \mu\varrho\,dx\,dy = 0,$$

или, принимая во внимание, что

$$2\mu\,(1+\sigma) = E, \quad \mu\varrho = (\lambda+\mu)\,\theta^{(1)}, \quad \lambda\theta^{(1)} = Z_z^{(1)},$$

к следующему:

$$-\iint_{S} Ex\,dx\,dy - \iint_{S} Z_z^{(1)}\,dx\,dy = 0,$$

или, наконец,

$$S_E x_0 + K_{13} = 0;$$

но это последнее условие удовлетворено в силу формулы (1).

Таким образом, граничная задача (16) в нашем случае разрешима; решение ее определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого, не влияющего на распределение напряжений.

Если взять в формулах (2) в качестве $\chi\,(x, y)$ только что указанное решение, то формулы (12), (13) определят решение нашей исходной задачи, удовлетворяющее всем требуемым условиям на боковой поверхности и на поверхностях раздела.

Покажем теперь, что постоянные A и τ можно всегда подобрать так, чтобы усилия, приложенные к «правому» («верхнему») основанию, также удовлетворяли требуемым условиям.

Вычислим для этого главный вектор (X, Y, Z) и главный момент этих усилий. Так как при $z = l$ имеем $Z_z^{(0)} = Z_z^* = 0$, то, очевидно, $Z = 0$.

Далее,

$$X = \iint_{S} X_z\,dx\,dy. \tag{23}$$

Преобразуем эту формулу. В силу уравнений равновесия имеем:

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0;$$

внося сюда на место $Z_z = Z_z^{(0)} - AZ_z^*$ значение, вытекающее из формул (4), (5) и (10), получаем соотношение:

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+A\,(E_j x+Z_z^{(1)})=0 \quad \text{в } S_j. \tag{24}$$

Таким образом, мы можем написать:

$$X_z=\frac{\partial\,(xX_z)}{\partial x}+\frac{\partial\,(xY_z)}{\partial y}+A\,(E_j x+Z_z^{(1)})\,x \quad \text{в } S_j.$$

Следовательно, формулу (23) можно переписать так:

$$X=\iint\limits_S\left\{\frac{\partial\,(xX_z)}{\partial x}+\frac{\partial(xY_z)}{\partial y}\right\}dx\,dy+A\left\{\iint\limits_S Ex^2\,dx\,dy+\iint\limits_S xZ_z^{(1)}\,dx\,dy\right\}.$$

Первый интеграл, как было показано в § 139, равен нулю. Следовательно, согласно обозначениям § 146,

$$X=A\,(I_{11}+K_{11}). \tag{25}$$

Далее, применяя тот же прием к вычислению интеграла

$$Y=\iint\limits_S Y_z\,dx\,dy,$$

легко получаем:

$$Y=A\,(I_{12}+K_{12}),$$

откуда в силу формулы (1) следует, что $Y = 0$.

Итак, главный вектор внешних усилий, приложенных к «правому» основанию, параллелен оси Ox.

Легко, далее, видеть, что главный момент этих усилий относительно точки, где ось Oz пересекает «правое» основание, параллелен оси Oz и что его величина M дается формулой:

$$M=\tau D+A\sum_j \mu_j\iint\limits_{S_j}\left\{y\frac{\partial\chi}{\partial x}-x\frac{\partial\chi}{\partial y}+\left(1-\frac{1}{2}\sigma_j\right)y^3-\right.$$
$$\left.-\left(2+\frac{1}{2}\sigma_j\right)x^2y\right\}dx\,dy+A\sum_j\mu_j\iint\limits_{S_j}(xv^{(1)}-yu^{(1)})\,dx\,dy, \tag{26}$$

где D — жесткость при кручении; мы знаем, что всегда $D > 0$.

Следовательно, мы удовлетворим всем условиям задачи, если подберем постоянную A так, чтобы $X = W$, а τ так, чтобы $M = 0$. Первое условие, если принять во внимание формулу (25), определяет A:

$$A=\frac{W}{I_{11}+K_{11}}; \tag{27}$$

второе же условие на основании формул (26) и (27) определяет τ, ибо $D \neq 0$.

Таким образом, задача решена. Легко видеть, что закон Бернулли — Эйлера имеет место и в рассматриваемом случае и что жесткость при изгибе равна

$$I_{11} + K_{11}, \tag{28}$$

как и в случае изгиба парой.

В случае, когда линии раздела и внешняя граница области S — концентрические окружности, как в примерах предыдущего параграфа, задача легко решается в конечном виде.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

КРАТКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РАБОТ ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ [1])

Со времени выхода четвертого издания этой книги (1954 г.) и английского ее перевода [2]), осуществленного И. Р. М. Радоком с третьего русского издания (1949 г.), появилось большое число работ, тесно связанных с изложенными в ней методами. В этой главе дается краткий обзор полученных различными авторами новых результатов, охватывающий примерно десятилетний период после сдачи в печать предыдущего издания книги.

Представлялось совершенно невозможным отразить все работы, так или иначе связанные с методами, изложенными в этой книге, так как таких работ оказалось чрезвычайно много. Поэтому пришлось произвести определенный отбор, что представляло, по понятным причинам, весьма трудную задачу. Задача была несколько облегчена тем, что за последние годы появились обширные обзоры по затронутым здесь вопросам [3]) и систематическое изложение плоской теории упругости в книгах Грина и Зерна (Green a. Zerna [1]) и Снеддона и Берри (Sneddon a. Berry [1]). Здесь упоминаются также некоторые работы, вышедшие ранее четвертого издания, но не упомянутые в нем по тем или иным причинам.

Мы сочли возможным почти не касаться здесь вопросов, связанных с анизотропными телами, так как они не излагаются и в основном тексте

---

[1]) Настоящую главу составили Г. И. Баренблатт, А. И. Каландия и Г. Ф. Манджавидзе.

[2]) N. I. Muskhelishvili, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff, Groningen, 1953 (в 1963 г. вышло второе издание).

[3]) Отметим обзорные работы: Гудьера и Ходжа (Goodier a. Hodge [1]), Дворжака (Dvořák [1]), Д. И. Шермана [36]. Упомянем также книгу Бабушки, Ректориса и Вычихло (Babuška, Rektorys, Vyčichlo [1]), в которой подробно излагаются с некоторыми дополнениями и изменениями главнейшие результаты настоящей книги.

Некоторое удивление на общем фоне вызывает недавно вышедшая книга Милн-Томсона (Milne-Thomson [1]) вследствие не совсем обычного способа цитирования детально излагаемых в ней результатов, полученных ранее другими авторами. Авторы эти либо вовсе не упоминаются, либо упоминаются лишь в связи со второстепенными вопросами.

и так как этим вопросам посвящены известные монографии С. Г. Лехницкого [1, 4] и Г. Н. Савина [8], которые упоминались в § 104.

Как было уже сказано, нас будут преимущественно интересовать исследования, основанные на методах решения задач теории упругости, изложенных в основном тексте настоящей книги. Из всех этих методов, непосредственно связанных с именем Н. И. Мусхелишвили, самое широкое применение благодаря своей чрезвычайной простоте и эффективности находит метод, использующий совместно аппараты интегралов типа Коши и конформного отображения (§§ 78—85). Во всем дальнейшем, упоминая о методе Мусхелишвили без ссылок и пояснений, мы будем иметь в виду именно этот метод.

В этой главе применяются некоторые термины, не применяемые в основном тексте книги, но получившие широкое распространение.

Так, аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, фигурирующие в формулах общего комплексного представления смещений и напряжений [§ 32, формулы (1), (9), (10)], в литературе часто называются комплексными потенциалами Колосова — Мусхелишвили. В нашем изложении мы будем иногда пользоваться термином «комплексные потенциалы», подразумевая под этим функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

I. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА С ОДНИМ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Наиболее эффективные способы решения граничных задач плоской теории упругости, использующие аппарат теории функций комплексного переменного, основываются на возможности построения в простой аналитической форме (в виде полинома или рациональной функции) функции, реализующей точно или приближенно конформное отображение данной области на единичный круг. По этой причине методы теории функций оказываются все еще мало приспособленными к эффективному решению задач для многосвязных областей.

Тем не менее для некоторых частных классов многосвязных областей удается построить достаточно эффективные решения, о чем будет сказано в следующих параграфах.

§ 151. Эффективные решения граничных задач для двусвязных областей. Метод Д. И. Шермана. За последнее время был разработан способ эффективного построения решений граничных задач плоской теории упругости для некоторого класса двусвязных областей. Этот класс включает в себя конечные и бесконечные области, ограниченные двумя замкнутыми контурами специального вида. Условием, определяющим упомянутый класс областей, служит требование, чтобы для односвязной области, внешней либо внутренней по отношению к одному из замкнутых контуров, входящих в состав полной границы и содержащей внутри себя второй контур, изучаемая задача допускала эффективное решение.

Таким образом, полная граница области может состоять из окружностей, эллипсов, правильных многоугольников с закругленными вершинами и т. п.

Метод, о котором идет речь, был предложен Д. И. Шерманом [28, 24]. Этот метод, примененный в его первоначальном виде к решению задач кручения и изгиба упругих брусьев, был впоследствии использован в задачах о плоской деформации. При подборе конкретных примеров особое внимание уделялось специальным вопросам плоской теории упругости, представляющим интерес для математического исследования проблем горного дела. В частности, в связи с этими проблемами был рассмотрен ряд конкретных задач о весомых средах в виде плоскости и полуплоскости, ослабленных двумя отверстиями.

Отверстия в весомой полуплоскости при использовании рассматриваемого здесь метода Д. И. Шермана следует считать расположенными на значительном расстоянии от прямолинейной границы. При таком предположении можно по выделении так называемых начальных напряжений отказаться от точного удовлетворения условий на границе полуплоскости. Это позволяет при определении дополнительных напряжений, обусловленных наличием вырезов, заменить полуплоскость без заметного искажения картины напряженного состояния вблизи отверстий всей плоскостью комплексного переменного.

Дадим краткое описание метода. Предположим, что рассматриваемая упругая, изотропная и однородная среда заполняет конечную или бесконечную двусвязную область S, ограниченную линией L, состоящей из двух простых, не имеющих общих точек, замкнутых контуров L_1 и L_2. В случае конечной области будем считать L_2 внешней границей среды, а L_1 — внутренней. Задача сводится к определению в области S голоморфных функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ по граничному условию (см. § 41; мы несколько изменяем обозначения)

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 2f(t) + C_j \quad \text{на} \quad L_j\,(j = 1, 2), \tag{1}$$

где $2f(t)$ — заданная непрерывная функция на L (в § 41 она обозначена через $f_1^0 + if_2^0$), подчиненная в случае конечной области условию

$$\operatorname{Re} \int_L f(t)\,\overline{dt} = 0,$$

а C_j — постоянные, подлежащие определению. В случае, когда S — конечная область, одну из постоянных C_j можно выбирать произвольно. В случае бесконечной области, если считать решения φ_0, ψ_0 исчезающими на бесконечности, обе постоянные определяются единственным образом.

Предлагаемый способ позволяет свести рассматриваемую задачу для двусвязной области к вспомогательной задаче для односвязной области, а затем после решения этой последней — к уравнению Фредгольма для вспомогательной функции, вводимой только на одном из кон-

туров L_1 или L_2. Для некоторого важного класса задач это уравнение Фредгольма с практической точки зрения значительно проще, чем другие известные уравнения Фредгольма, построенные другими методами.

Рассмотрим для определенности случай конечной области и введем вспомогательную функцию $\omega(t)$, определенную на одном из контуров, скажем, на L_2, согласно равенству

$$\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 2\omega(t) \quad \text{на } L_2. \tag{2}$$

Складывая и вычитая почленно равенства (1) (при $j = 2$) и (2), получим, считая $C_2 = 0$:

$$\varphi_0(t) = \omega(t) + f(t),$$
$$\psi_0(t) = -[\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t)] + [\overline{f(t)} - \bar{t}f'(t)].$$

Доопределим искомые функции φ_0, ψ_0, положив их вне контура L_2 равными нулю. Предыдущие равенства на основании известных формул предельного перехода в интегралах типа Коши позволяют утверждать, что голоморфные в области S функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} - F(z), \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t)}{t-z}\,dt - G(z), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{f(t)} - \bar{t}f'(t)}{t-z}\,dt$$

аналитически продолжимы через контур L_2 и, таким образом, представляют собой функции, регулярные всюду вне контура L_1. В этих вновь введенных функциях φ и ψ граничное условие (1) на контуре L_1 примет вид:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \Omega[\omega(t)] \quad \text{на } L_1, \tag{4}$$

где Ω - некоторый линейный оператор.

Равенство (4) представляет собой граничное условие первой основной задачи для бесконечной односвязной области S_1, ограниченной контуром L_1, при некоторой, пока неизвестной правой части Ω; эту задачу мы будем называть вспомогательной. Будем временно считать функцию $\omega(t)$ заданной и допустим, кроме того, что φ и ψ могут быть эффективно найдены по граничному условию (4). Предполагая процесс определения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ выполненным, можно считать эти функции представленными в форме некоторых вполне определенных операторов, зависящих от $\omega(t)$.

Подставляя, далее, соответствующие значения $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в равенство (2), получаем искомое соотношение для определения вспомогательной функции $\omega(t)$. При определенных предположениях относительно контура L_1 это соотношение будет представлять собою интегральное

уравнение Фредгольма второго рода. В частности, это будет иметь место, если область, ограниченная контуром L_1, может быть конформно отображена на круг при помощи рациональной функции и если вспомогательная задача решается методом Мусхелишвили. Уравнение не будет содержать неизвестной величины C_1, точнее, оно будет ее содержать в виде определенного функционала от искомой функции $\omega(t)$.

Мы не будем заниматься здесь исследованием полученного интегрального уравнения, требующим отдельного рассмотрения случаев конечной и бесконечной областей. Отсылая за подробностями к названным выше работам Д. И. Шермана, отметим только, что этим путем оказалось возможным довести решение до конца для обширного класса случаев.

Упомянутое выше интегральное уравнение Фредгольма решается во всех рассмотренных конкретных случаях посредством сведения его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $\omega(t)$ в комплексный ряд Фурье. Исследование получающейся при этом системы, составляющее, как правило, весьма существенную часть решения задачи, показывает, что эта система во всех рассмотренных случаях регулярна при любых относительных размерах области. В случае, когда границы L_1 и L_2 не очень близки одна к другой, система оказывается вполне регулярной и допускает применение метода последовательных приближений.

§ 151а. Некоторые конкретные задачи. Метод Д. И. Шермана применительно к плоским задачам теории упругости впервые был проиллюстрирован на сравнительно простом случае весомой полуплоскости, ослабленной двумя неодинаковыми круговыми отверстиями (Шерман [24]). В более поздних исследованиях того же автора (например, [29]) метод неоднократно подвергался существенной переработке. В результате удалось в значительной степени сократить число промежуточных этапов решения и объем вычислительных операций, что и позволило сделать весь процесс решения более обозримым и придать ему в основной своей части рекуррентный характер.

Впоследствии Д. И. Шерманом и его учениками был решен ряд конкретных задач плоской теории упругости, представляющих интерес с точки зрения приложений. Мы укажем на некоторые из них.

Самому Д. И. Шерману принадлежат решения задач об упругой весомой полуплоскости, ослабленной двумя заглубленными и близко расположенными одно относительно другого эллиптическим и круговым отверстиями [30], периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы [31, 32] (см. также § 152), одним эллиптическим отверстием, расположенным близко от прямолинейной границы [33], и других аналогичных задач.

Л. Н. Кислер [1] решала задачу о весомой среде с эллиптическим и круговым отверстиями в несколько более общей постановке, когда

отверстия расположены одно относительно другого произвольно. Несколько модифицировав промежуточные этапы расчетного процесса, она значительно упростила вычислительную схему. Это позволило ей сравнительно легко выполнить численные расчеты и провести подробный анализ поля напряжений для некоторых, практически наиболее интересных случаев взаимного расположения отверстий. Частный случай двух круговых, несимметричных относительно прямолинейной границы отверстий изучался Л. Н. Кислер несколько ранее [2].

И. Г. Араманович [1] рассмотрел практически интересную задачу о напряжениях в упругой полуплоскости с незаглубленным отверстием круговой формы, подкрепленным упругим же кольцом из другого материала. Внешние воздействия здесь могут быть разнообразными, как, например, нормальное давление на внутреннем контуре впаянного кольца, растяжение полуплоскости параллельными прямолинейной границе силами, сосредоточенная нагрузка на краю полуплоскости и др.

Применяя изложенный выше метод, И. Г. Араманович построил интегральное уравнение Фредгольма на действительной оси. Интегральное уравнение заменяется затем бесконечной системой алгебраических линейных уравнений, квазирегулярной при любой близости кругового отверстия к краю полуплоскости. Из рассмотренных в той же работе конкретных примеров, детально разобранных до конца и доведенных до численных результатов, особый интерес представляет случай близких между собой границ.

В другой работе И. Г. Арамановича [2] рассматривается случай полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, когда на прямолинейной границе среды задаются условия смешанного типа (равновесие жесткого штампа на границе полуплоскости, ослабленной отверстием). Несколько видоизменяя метод Д. И. Шермана, автор сначала сводит задачу к интегральному уравнению Фредгольма, а затем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, квазирегулярной при любых относительных размерах области.

Впоследствии этот же метод неоднократно применялся к изучению напряженного состояния конечных и бесконечных двусвязных областей при довольно общих конфигурациях их границ (Перлин [3, 4], Гурьев [1], Мошкин [1, 2]).

Упомянем, далее, некоторые другие работы о двусвязных областях, выполненные различными способами.

М. З. Народецкий [1] построил решение в специальном случае неограниченной пластинки с двумя круговыми отверстиями, когда внешние усилия, действующие на среду, представляют собой равномерные нормальные давления на контурах отверстий. В работах Соломона и Дрэгическу (Solomon, Drăghicescu [1]), а также Сейка (Seika [1]) дается применение обобщенного алгоритма Шварца для некоторых конечных областей. В первой из названных работ рассмотрен квадрат, ослабленный

симметричным квадратным отверстием, при простейшем нагружении, а во второй — конфокальное эллиптическое кольцо, сжатое двумя противоположными сосредоточенными силами, приложенными к точкам внешнего контура и направленными вдоль большой оси эллипса. Анализ в обоих случаях базируется на методах Мусхелишвили, используемых для решения последовательно чередующихся плоских задач для внутренних и внешних односвязных областей; в случае квадратов используются конформное отображение (посредством интеграла Кристофеля — Шварца) и интегралы типа Коши, в случае же эллипсов — отображение на круговое кольцо с последующим применением степенных рядов. На конкретных примерах проведены подробные вычисления. Позже в работе Сейка (Seika [2]) рассмотрен случай круга, симметрично ослабленного квадратным отверстием.

Более прямой и удобный алгоритм для софокусного эллиптического кольца был ранее предложен М. П. Шереметьевым [2], удачно применившим метод функциональных уравнений Мусхелишвили в соединении с методом степенных рядов. Этот подход позволит, по-видимому, получить сравнительно простые решения и в некоторых других случаях.

В работе Ю (Yi-Yuan Yu [2]) исследована методом степенных рядов весьма интересная задача о тяжелом круговом кольце, опертом в одной точке. В статье М. З. Народецкого [2] рассмотрен квадрат, симметрично ослабленный круговым вырезом; на противоположных сторонах квадрата приложены равномерные растягивающие усилия. Приближенные выражения для искомых комплексных потенциалов автор берет в виде специально подобранных полиномов от z и $1/z$ и получает для определения неизвестных коэффициентов полиномов конечную систему линейных алгебраических уравнений. Для некоторых конкретных значений параметров проведены численные расчеты и построены эпюры нормальных напряжений на контуре отверстия.

§ 152. Пластинки со многими отверстиями. Периодическая задача. Д. И. Шерман предложил улучшенный вариант метода степенных рядов для случая бесконечной или полубесконечной области с двумя одинаковыми круговыми отверстиями (Шерман [34]).

Опыт численного решения конкретных задач показал, что бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, получаемые в результате использования степенных рядов непосредственно для комплексных потенциалов φ и ψ, в ряде случаев весьма неудобны по своей структуре. К тому же ряды для напряжений оказываются, как правило, медленно сходящимися. Для устранения этого неудобства Д. И. Шерман вводит вместо функции $\psi(z)$ новую функцию

$$\chi(z) = z\varphi'(z) + \psi(z),$$

непосредственно связанную (по крайней мере на действительной оси)

с компонентами напряжения. Рассуждениями, вполне аналогичными приведенным в § 78 при построении функционального уравнения (18), вновь введенная функция χ исключается из рассмотрения, и получаемое на этот раз функциональное уравнение после надлежащего разложения функции φ в степенной ряд непосредственно приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Оказывается, что полученная таким образом система более удобна для исследования и ведет к цели гораздо быстрее [1]).

Эти соображения были использованы Д. И. Шерманом для изучения периодической задачи плоской теории упругости, к которой мы сейчас переходим.

Представим себе упругую изотропную и однородную бесконечную среду, ослабленную бесконечным рядом одинаковых и периодически расположенных отверстий круговой формы. Центры отверстий будем считать расположенными на одной и той же прямой.

В случае полуплоскости дополнительно считается, что указанная прямая параллельна границе полуплоскости и находится от нее на расстоянии, значительно превосходящем радиус отверстий.

Способ эффективного построения решения периодической задачи в указанной постановке был еще в 1935 г. предложен в работе Хоуленда (Howland [1]). Автор рассматривает бесконечную пластинку, подверженную на бесконечности параллельным или нормальным к линии центров отверстий растягивающим усилиям. Эффективное рассмотрение основано в этой работе на некотором алгоритме последовательных приближений, сходимость которого доказывается при малом значении отношения радиуса отверстия к расстоянию между двумя ближайшими центрами. Численные расчеты приводятся при указанном отношении — назовем его ε,— равном 0,25.

Д. И. Шерман методом, примененным им в случае двух одинаковых круговых отверстий [34], рассмотрел периодическую задачу (с круговыми же отверстиями) для весомой полуплоскости [31]. Сущность этого метода, как указывалось выше, заключается в одновременном использовании специально подобранных представлений комплексных потенциалов в форме степенных рядов и функционального уравнения, аналогичного уравнению § 78. Решение задачи, как и в рассмотренных выше непериодических случаях, было сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Этот подход позволил Д. И. Шерману проследить за распределением напряжений вблизи отверстий в значительном диапазоне изменения числа ε, характеризующего относительные размеры области, и провести анализ поля напряжений для достаточно близких между собой отверстий.

[1]) Следует отметить, что введение функции $\chi(z)$, вообще говоря, упрощает схему решения основных задач не только при их рассмотрении методом степенных рядов.

В другой работе Д. И. Шермана [32] изучается более общий случай некруговых периодических отверстий. Ослабляющие среду отверстия имеют здесь форму криволинейного квадрата, отображение внешности которого на внешность круга дается двучленной формулой, содержащей ζ и ζ^{-3}. Рассмотрение базируется на том же методе, приводящем к системе линейных уравнений.

Периодическая задача в случае криволинейных отверстий довольно общих очертаний изучалась еще раньше в работе И. И. Воровича и А. С. Космодамианского [1].

Авторы на основе присущих рассматриваемой ими задаче геометрической и силовой симметрии находят некоторые интегральные представления искомых периодических функций комплексного переменного через новые функции комплексного же аргумента, голоморфные в бесконечной плоскости с одним отверстием и исчезающие на бесконечности. Затем эти вновь введенные функции разлагаются в ряды по степеням предполагаемого малым параметра d/l, где d — диаметр отверстия, а l — расстояние между центрами ближайших отверстий.

После этого задача сводится к бесконечному ряду последовательно решаемых плоских задач для односвязной области — плоскости с одним отверстием.

Подход авторов позволяет в принципе довести решение до расчетных формул каждый раз, когда отображение внешности отверстия на внешность круга осуществляется посредством рациональной функции. Вопрос о сходимости процесса не был рассмотрен.

Подробный анализ с численными расчетами был проведен в случае одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий, когда пластинка растягивается на бесконечности усилиями, направленными под некоторым углом α к оси Ox, являющейся линией центров отверстий. Границы отверстий считаются незагруженными.

Так же до конца, с доведением до численных результатов, был разобран случай, когда в круговые отверстия в пластинке при тех же внешних воздействиях впаяны жесткие шайбы (вторая основная задача). Все численные расчеты проводились при $\varepsilon = 0{,}15$.

Как видно из приведенных в работе графиков для максимальных напряжений, в случае первой задачи при $\alpha = 0$ (растяжение пластинки усилиями, параллельными линии центров) наибольшее влияние соседних отверстий наблюдается при малых отношениях a/b полуосей эллипса (a — полуось в направлении Ox). При этом максимальное напряжение в пластинке уменьшается по сравнению со случаем, когда среда имеет лишь одно отверстие.

При растяжении же усилиями, перпендикулярными линии центров, наибольшее возмущение вносится, наоборот, при больших отношениях a/b, причем максимальные напряжения возрастают с переходом от одного отверстия к ряду отверстий.

В случае второй задачи получается обратная картина. Здесь при $\alpha = 0$ концентрация напряжений вблизи отверстий увеличивается с переходом от одного отверстия к ряду отверстий, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, наоборот, уменьшается.

Случай конечного числа одинаковых круговых отверстий при специального вида внешних воздействиях на бесконечности рассматривался методом Д. И. Шермана [34] в работе А. С. Космодамианского [1].

В этом же направлении следует отметить работы группы китайских ученых, которыми были рассмотрены вопросы концентрации напряжений в плоскости с конечным числом отверстий различной формы и высказаны некоторые соображения о возможности применения указанного метода. Достаточно полную библиографию этих работ можно найти в статье Чен Лин-си [1].

Этим же методом П. И. Перлиным и Л. Ф. Толченовой [2] была в условиях циклической симметрии рассмотрена задача для кругового кольца, ослабленного двумя рядами круговых отверстий; центры отверстий, принадлежащих какому-либо одному из рядов, расположены на одной и той же концентрической с кольцом окружности.

Для отверстий, близко расположенных друг к другу, А. С. Космодамианский [2] применил способ, позволяющий использовать в задачах такого типа метод Бубнова — Галеркина. Вместе с тем как для конечного, так и бесконечного числа одинаковых криволинейных отверстий, как это показано в других работах А. С. Космодамианского (например, [3]), представляется в ряде случаев целесообразным применить к практическому расчету схему, основанную на методе Мусхелишвили. Указанные выше приближенные способы использовались А. С. Космодамианским [4, 5] при изучении напряженного состояния пластинки, ослабленной конечным числом отверстий различных очертаний. В случае неодинаковых отверстий А. С. Космодамианский [6] использовал метод последовательных приближений.

В статье В. М. Буйвола [1] изучается напряженное состояние круговой области, ослабленной конечным числом одинаковых и равноотстоящих одно от другого круговых отверстий, центры которых расположены на одной и той же окружности, концентрической с границей. К решению задачи применяется уравнение Лауричелла — Шермана (§ 101), которое на основе присущего задаче свойства циклической симметрии преобразуется к более простому виду, удобному для численного решения. Это видоизмененное уравнение решается затем численно способом, указанным в работе А. Я. Горгидзе и А. К. Рухадзе [1].

В выполненных в последнее время работах Койтера (Koiter [1, 2]) были поставлены в наиболее общей форме и решены представляющие значительный теоретический и прикладной интерес задачи о поле

напряжений в бесконечном упругом теле, ослабленном двоякопериодической системой конгруэнтных отверстий произвольной формы. Исследованию задачи теории упругости Койтер предпослал специальную работу математического характера (Koiter [1]), в которой изучил свойства надлежащим образом обобщенного интеграла типа Коши. Обобщение заключается в том, что вместо обычного ядра Коши $\frac{1}{t-z}$ вводится ядро $\zeta(z-t)$, где ζ — дзета-функция Вейерштрасса. Койтер обобщил на введенные таким образом интегралы формулы Сохоцкого — Племеля (§ 68), сформулировал и доказал соответствующую теорему о граничных значениях двоякопериодических и квазипериодических функций и для случая, когда отверстия имеют круговую форму, исследовал разложения таких функций. В работе Koiter [2] автор рассмотрел первую граничную задачу теории упругости для тела с двоякопериодической системой отверстий и привел ее, используя комплексное представление, указанное в гл. II настоящей книги, к задаче определения двоякопериодических аналитических функций вида, рассмотренного в его работе Koiter [1]. Далее, он доказал единственность решения поставленной таким образом задачи теории упругости и получил функциональное уравнение для функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$, которое привел к уравнению Фредгольма второго рода. Это уравнение представляет собой соответствующее обобщение на случай бесконечносвязной области уравнения (9) § 98, соответствующего случаю односвязной области.

Используя полученное интегральное уравнение Фредгольма и опираясь на известные свойства этих уравнений, Койтер показал в работе Koiter [2] существование решения поставленной задачи теории упругости, а также наметил исследование предельных случаев.

Следует отметить, что плоские задачи теории упругости для бесконечного тела с двоякопериодической системой круговых отверстий были впервые рассмотрены В. Я. Натанзоном [1] и позднее Сайто (Saito [1]), которые путем разложения в ряды обоих комплексных потенциалов φ и ψ получили для коэффициентов упомянутых разложений двоякобесконечную систему уравнений. Преимуществом указанных выше рассмотрений Койтера является их более общий характер (отверстия могут иметь произвольную форму), а также, по-видимому, более эффективный подход к теоретическому исследованию. Следует отметить также работы Хорвея (Horway [1, 2]), в которых задача теории упругости (с учетом температурных членов) для тел с двоякопериодической системой отверстий рассматривалась при помощи некоторого приближенного метода.

Многие из упоминающихся выше задач, в частности задача о равновесии тяжелой полуплоскости при наличии ослабляющих ее отверстий, тесно связаны с важным вопросом о напряженном состоянии массива горных пород с выработками тех или иных размеров и очертаний. Подобные задачи делаются особенно трудными в случае более чем одного отверстия,

когда в качестве основного фактора, определяющего напряженное состояние среды, выступает взаимное влияние близлежащих отверстий.

В случае двух круговых и эллиптических, а затем и бесконечного числа таких же периодически расположенных отверстий характер и степень этого взаимного влияния были подробно исследованы Д. И. Шерманом и его учениками. Детальное изучение этого круга вопросов позволило впоследствии высказать некоторые суждения по поводу явления горного удара (Д. И. Шерман [30]).

§ 153. Бесконечная плоскость с одним отверстием. Случай одного отверстия в однородной бесконечной среде поддается исследованию сравнительно легко. Вопрос о концентрации напряжений в этом случае давно привлекал внимание исследователей, так что к настоящему времени он изучен с достаточной полнотой.

Здесь мы дополним то, о чем было кратко сказано в § 89 настоящей книги.

Если функция, реализующая конформное отображение внешности отверстия на круг, рациональна, то при решении задачи не возникает принципиальных затруднений. В случае более общего очертания контуров отверстий, когда эта функция уже не рациональная, обычно используется способ решения, основанный на приближенном конформном отображении. Один из возможных подходов такого рода был предложен в свое время Г. Н. Савиным. Напомним сущность его метода (см. § 89).

Будем рассматривать задачу о напряжениях в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в форме прямолинейного многоугольника. Отобразим данную область посредством интеграла Кристофеля — Шварца на единичный круг вспомогательной плоскости ζ и представим отображение в виде разложения в ряд по степеням ζ. Удержав в этом ряду конечное число первых его членов, мы получим приближенное отображение, переводящее окружность в близкую к исходному контуру кривую, при помощи рациональной функции вида:

$$z = \omega(\zeta) = C\left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{n} C_k \zeta^k\right) \tag{1}$$

или в частном случае

$$z = C\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta^n\right), \tag{2}$$

где C, C_k, m — некоторые постоянные. Изменяя в формуле (1) число n и постоянные C, C_k, можно получить отверстия различных форм и размеров. Отсюда как частные случаи получаются отверстия, имеющие форму круга, эллипса, криволинейного четырехугольника и треугольника, овала, близкого к прямоугольнику, закругленному полуокружностями у коротких сторон, и др. Например, последняя из перечисленных форм отверстия, представляющая значительный практический интерес,

получится при помощи отображения (1) при $n = 3$ и $C_2 = 0$. Плоская задача в случае такого отверстия была, по-видимому, впервые исследована в работе Гринспэна (Greenspan [1]).

Если отображение представлено в указанной только что форме, метод Мусхелишвили немедленно приводит к требуемому результату.

Этим приемом Г. Н. Савиным и его учениками было рассмотрено большое число конкретных задач в случае криволинейных отверстий названного вида для различных их расположений по отношению к внешним усилиям и различных отношений характерных размеров. Решения почти во всех примерах представлены в легко обозримом виде и сопровождаются графиками распределения напряжений по контуру отверстия, таблицами и диаграммами. Значительная часть этих результатов подробно изложена в монографии Г. Н. Савина [8].

Подход Г. Н. Савина дал широкие возможности для применения методов теории функций к эффективному рассмотрению известного класса конкретных практических задач. В результате этих исследований интерес к концентрации напряжений в ослабленных отверстиями упругих телах значительно возрос. Круг вопросов существенно расширился и стал предметом изучения многих авторов.

Следуя Г. Н. Савину, А. А. Бойм [1] рассмотрел задачу о равновесии тяжелой полуплоскости, ослабленной сводчатым отверстием, отображение внешности которого на круг дается четырехчленной формулой вида (1) (см. также Бойм [2]); Г. С. Грушко [1] исследовал поле напряжений вблизи полукруглого отверстия, определяемого приближенно формулой отображения (1) с пятью членами, в изгибаемой моментами изотропной балке. В. Н. Кожевникова [1] в задаче о пластинке с прямоугольным отверстием, изгибаемой в своей плоскости, удержала в разложении отображающей функции слагаемые до девятой степени ζ. Далее, в работах Ю (Yi-Yuan Yu [3]) и Э. С. Хачияна [1] рассмотрен случай овалообразного отверстия, определяемого трехчленным выражением, причем в первой из этих работ изучены напряжения возле жесткого подкрепления, а во второй — в растягиваемой пластинке без подкрепления. Е. Ф. Бурмистров [1, 2] рассмотрел более общий случай одного класса криволинейных отверстий, как в случае плоской деформации, так и применительно к задаче об изгибе тонких пластинок и провел на конкретных примерах подробные вычисления. Аналогичные задачи рассматривались также в работах Эван-Ивановского (Evan-Iwanowski [1]), Е. П. Аникина [1] и Исида (Isida [1]). В работе Конроя (Conroy [1]) рассмотрен случай общего вида симметричного относительно прямой отверстия в ненагруженном на бесконечности однородном теле, когда на взаимно симметричных и равных по полярному углу участках обвода отверстия приложены равномерные нормальные усилия одной и той же интенсивности. Решение здесь дается при помощи метода, основанного на применении конформного отображения и степенных рядов, указанного в § 63 настоящей книги.

§ 154. Продолжение. В рассмотренных выше работах, относящихся к вопросу о напряжениях в среде с отверстиями, форма контура отверстия задавалась посредством тех или иных конкретных отображений, доставляемых в большинстве случаев конечными отрезками рядов в разложениях интеграла Кристофеля — Шварца. Для многих практически важных форм контура отверстия аппроксимация отображения отрезками упомянутых рядов с небольшим числом членов оказывается далеко не достаточной. Распределение напряжения вблизи отверстий существенно зависит от дифференциальных свойств контура отверстия, и поэтому весьма важно уметь находить более точные отображения, оставаясь при выполнении последующих операций в рамках умеренных в целом вычислительных трудностей.

М. И. Найман (см., например, [1]) в случае отверстия в форме правильного прямолинейного многоугольника с закругленными углами рассматривал, наряду с отрезками рядов, получаемых разложением интеграла Кристофеля — Шварца, аналогичные им полиномы с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты он определял из условия равенства нулю кривизны в отдельных точках границы и таким путем достигал при равных количествах удержанных в отображающей функции членов заметного выпрямления сторон многоугольника по сравнению с разложением интеграла Кристофеля — Шварца. Тем же автором были рассмотрены и некоторые другие формы отверстий и найденные отображения с успехом применены к решению задач кручения круговых цилиндров, ослабленных теми или иными продольными выточками. Подобные отображения использовались впоследствии и в случае плоской деформации для некоторых простейших профилей.

Несколько иной подход был предложен Кикукава (Kikukawa [1]). Рассматривая бесконечную упругую среду с вырезом, этот автор исходит из некоторого приближенного отображения в простой форме, например в случае прямолинейного многоугольника с закругленными вершинами — из отображения вида (1) § 153 с небольшим числом членов. Это отображение, принимаемое за начальное, уточняется затем с помощью известной формулы так называемого близкого отображения [1]):

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \frac{\zeta\omega_0'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\delta n_0(\sigma)}{|\omega_0'(\sigma)|}\,\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\,\frac{d\sigma}{\sigma}. \qquad (1)$$

Здесь γ — окружность единичного радиуса в плоскости ζ, $\sigma = e^{i\vartheta}$ — точка на ней, а $\delta n_0(\sigma)$ — расстояние по нормали между заданной точной кривой и приближенной, соответствующей отображению $\omega_0(\zeta)$. Разложив интеграл в правой части (1) в степенной ряд и удержав в нем несколько первых членов, автор находит отображение более точное, чем $\omega_0(\zeta)$, и принимает найденную таким образом в явной форме функцию $\omega(\zeta)$ за отображающую. Все остальное делается как обычно при использовании

[1]) См., например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1].

метода степенных рядов, основанного на конформном отображении (см. гл. III); исходные граничные условия задачи в криволинейных координатах, установленные автором, представляют собой хорошо известные условия (той же первой основной задачи) в форме, предложенной Г. В. Колосовым (§ 51, формула (11)). Анализ завершается приведением к системе линейных алгебраических уравнений, решаемой приближенными способами.

Кикукава рассмотрел ряд вырезов различных очертаний и довел решение во многих конкретных примерах до численных результатов. Помимо бесконечных областей, ограниченных замкнутыми кривыми, лежащими в конечной части плоскости, ему удалось включить в рассмотрение и некоторый класс областей, границы которых удаляются в бесконечность.

Как выяснилось из проведенных автором численных расчетов, поправочный член в отображении (1) вносит существенное изменение в распределение напряжений вблизи отверстий. В случае, например, отверстия, имеющего форму ромба с закругленными углами, заметное влияние на концентрацию напряжений оказывают лишь два первых члена в разложении поправочного интеграла. Тем не менее для получения окончательной картины напряженного состояния, приемлемой при более или менее точном анализе, приходится в большинстве случаев удержать значительное количество членов разложения.

Методом, примененным Кикукава, Брчич (Brčič [1]) рассмотрел конкретную задачу для случая бесконечной плоскости, ослабленной двусторонними вырезами в форме прямолинейных полуполос с закругленными углами.

II. КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ СРЕДА. ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ОТВЕРСТИЯ

С точки зрения практических приложений представляет значительный интерес задача об определении напряженного состояния в различных по форме и упругим свойствам деталях, соединенных тем или иным способом в одно сплошное тело. Речь идет о напряжениях в пластинке, имеющей некоторое количество отверстий, в которые вставлены сплошные или ослабленные отверстиями шайбы с заданным упругим натягом.

Соединение деталей на практике осуществляется обычно посредством прессовки или посадки в горячем либо холодном состоянии. Предполагается, что контуры сопряженных между собой упругих частей приводятся в соприкасание без зазоров и удерживаются от скольжения друг по другу [1]). Полная граница L полученного таким образом составного тела будет,

[1]) В случае, когда контур шайбы в недеформированном состоянии совпадает с контуром соответствующего отверстия в пластинке, мы будем полагать, что шайба впаяна в отверстие вдоль обвода, либо будем допускать наличие большого трения между (вложенной) шайбой и окружающей пластинкой. В иных предположениях, за исключением весьма частных случаев внешних воздействий на составное тело, получается смешанная задача теории упругости.

очевидно, состоять из наружного контура пластинки (если, разумеется, она не простирается в бесконечность во все стороны), из контуров неподкрепленных отверстий и, наконец, из внутренних контуров вставленных шайб, если они имеются. Тело может испытывать воздействия, вызываемые натягом, и, кроме того, может подвергаться любым внешним усилиям, приложенным внутри и на границе. Условия на границе L будут здесь при любом нагружении обычными (мы всегда будем иметь в виду случай первой основной задачи), на линиях же раздела контактирующих тел должен быть задан скачок упругих смещений при соблюдении равенства соответствующих векторов внешнего напряжения.

§ 155. Включения из того же материала. Общий способ исследования задачи в случае, когда пластинка имеет конечное число отверстий и сопряженные между собой упругие детали изготовлены из одного и того же материала, был предложен Д. И. Шерманом [14]. Этот способ изложен в § 109 настоящей книги. Напомним для удобства некоторые относящиеся к нему положения.

Будем для простоты считать, что вставляемые в отверстия упругие детали представляют собой сплошные шайбы. Тогда, согласно упомянутому способу, рассматриваемая задача приводится к обычной плоской задаче для полной составной области, занимаемой сопряженными телами (без каких-либо условий на линиях раздела). Порядок связности составной области, очевидно, меньше порядка связности области, занимаемой пластинкой, на число вставленных в нее шайб. При этом, однако, вновь полученная задача будет соответствовать уже несколько измененным внешним усилиям. Линию раздела как бы можно устранить за счет подходящего дополнительного воздействия на всю упругую систему в целом.

В случае, когда упругие включения имеют круговую форму, поправочный член в правой части граничного условия, соответствующий фиктивному воздействию, может быть представлен в явном виде. Он имеет особенно простую форму в часто встречающемся в приложениях случае, когда скачок смещения направлен по нормали к линии раздела и величина его постоянна.

В конечном счете в случае круговых включений, заполняющих все отверстия в пластинке, метод Мусхелишвили приводит к замкнутому решению, если односвязная область, занимаемая сопряженными телами, конформно отображается на круг посредством рациональной функции.

Именно этим путем решение задачи в ряде случаев было найдено в замкнутом виде и доведено до численных результатов. При этом, наряду с задачей о плоской деформации или обобщенном плоском напряженном состоянии (плоская задача), рассматривались аналогичные задачи о поперечном изгибе тонких пластинок. Ряд конкретных результатов в этом направлении дан в работах: Ю. А. Аменздде и С. А. Алескеровой [1],

Д. В. Вайнберга и А. Г. Угодчикова [1], П. И. Перлина и Л. Ф. Толченовой [1], А. Г. Угодчикова [1—5], Н. Д. Тарабасова [4—6] и В. В. Тунина [1].

Отметим, что в работе А. Г. Угодчикова [1] составная область может представлять собой любую конечную односвязную область плоскости комплексного переменного. Для эффективного применения метода Мусхелишвили следует здесь, разумеется, заменить рассматриваемую область другой, близкой к ней областью, соответствующей некоторому полиномиальному отображению на круг. Это приближенное отображение строится методом электрического моделирования конформных отображений, разработанных тем же автором [6].

В работе Хэмпла (Hample [1]) указано элементарное решение задачи в случае двух одинаковых круговых или же бесконечного ряда круговых периодических включений в неограниченной пластинке. Решение находится этим автором непосредственно через функцию напряжения, без привлечения аппарата комплексного переменного.

§ 156. Включения из различных материалов. Жесткому подкреплению отверстий вполне равносилен в смысле трудностей, сопутствующих решению, случай тех же отверстий, ничем не подкрепленных; в первом случае на обводе отверстия должны быть соблюдены граничные условия второй основной задачи, а во втором — аналогичные условия первой задачи. Эти два случая по существу не отличаются друг от друга, и поэтому задачу о жестких включениях отдельно рассматривать мы не будем.

Иначе обстоит дело для упругих включений с упругими характеристиками, отличными от упругих характеристик окружающей пластинки: здесь задача становится значительно сложнее.

Метод решения, аналогичный изложенному выше (§151) для случая двусвязных областей, был применен Д. И. Шерманом [35] в задаче о напряжениях в кусочно-однородных средах, когда составное неоднородное тело, занимающее конечную односвязную область, состоит из соединенных между собой двух различных по упругим свойствам деталей. Отверстие в однородной пластинке конечных размеров, ограниченной двумя замкнутыми контурами, заполняется сплошной шайбой из другого материала. На внешней границе пластинки задаются обычные условия первой задачи, а на линии раздела двух сред требуется равенство напряжений при наличии заданного скачка упругих смещений.

Для нахождения вспомогательной функции $\omega(t)$, вводимой на этот раз на границе пластинки, получается, как и прежде, система интегральных уравнений Фредгольма, полностью решающая в теоретическом смысле исходную граничную задачу. В частном случае круговой пластинки с эксцентрическим круговым включением, рассмотренном для иллюстрации метода, интегральные уравнения заменяются бесконечной системой линейных алгебраических уравнений.

В работе Хардимана (Hardiman [1]) рассмотрена неограниченная пластинка с впаянным без предварительного натяга эллиптическим ядром, подвергнутая на бесконечности однородному растяжению, и указано решение этой задачи в замкнутом виде. Любопытно, что индуцированное при этих условиях поле напряжений в эллиптическом диске также оказалось однородным.

Случай концентрических круговых включений в пластинке, когда каждая из последовательно включаемых в отверстие деталей представляет собой концентрическое круговое кольцо, легко поддается эффективному рассмотрению методом степенных рядов. Решение задачи для этого случая давно известно (см., например, Г. Н. Савин [8]). Это решение для одного включения при некоторых простейших видах нагружения на бесконечности и на внутреннем контуре подкрепляющего кольца содержится также в статье Хардимана (Hardiman [2]).

Метод степенных рядов применительно к задаче о кольцевых подкреплениях отверстий оказывается принципиально пригодным для эффективного решения каждый раз, когда бесконечная односвязная область, занятая сопряженными телами, конформно отображается на внешность круга посредством рациональной функции и подкрепляющее кольцо переходит при этом в концентрическое круговое. Эффективное решение задачи для случая отображения вида (2) § 153 было дано М. П. Шереметьевым [3], [7], который скомбинировал метод степенных рядов с методом интегралов типа Коши. Частный случай крепления в форме софокусного эллиптического кольца ($n = 1$) рассматривался позже в работах Ода (Oda [1]) и Левина (Levin [1]). В первой из этих работ приводятся два численных примера применительно к задаче о давлении окружающих пород на крепь туннеля с круговым и эллиптическим поперечными сечениями. Во второй работе решение представлено в форме степенных рядов, достаточно удобных для численных расчетов.

И. А. Прусов [1] рассмотрел задачу об усилении отверстия в растягиваемой бесконечной пластинке кольцом переменного сечения, ограниченным по внешнему контуру окружностью, а по внутреннему — эллипсом. Задача решается приближенно методом, основанным на приведении к задаче линейного сопряжения, примененным впервые к решению задач плоской теории упругости в работе Н. И. Мусхелишвили [22] (см. гл. VI настоящей книги). В другой работе И. А. Прусов [2] рассмотрел тем же методом случай полуплоскости с подкрепленным круговым отверстием; ранее эта задача иным методом была решена в упомянутой в § 151а работе И. Г. Арамановича [1].

§ 157. Усиление отверстий тонкими кольцами. Плоские задачи об усилении кольцами отверстий (так же как и аналогичные им задачи, относящиеся к поперечному изгибу тонких пластинок) можно значительно упростить в случае, когда подкрепляющее кольцо представляет собой

в плане тонкую криволинейную полосу. Такое кольцо обычно принимают за упругую линию, напряженное и деформированное состояния которой описываются элементарными уравнениями теории сопротивления материалов.

Усилия X_n, Y_n, действующие на кольцо со стороны окружающей пластинки, будем временно считать известными и определим, исходя из теории малых деформаций криволинейных стержней, напряженное состояние кольца при заданных на всей его границе внешних воздействиях [1]). Тогда все основные величины, характеризующие деформацию кольца,— изгибающий момент, нормальные и поперечные силы, а также упругие смещения оси кольца — выразятся через внешнюю нагрузку в элементарной форме. Если теперь найденные выражения для упругих смещений точек внешнего контура кольца подставить в соответствующее условие сопряжения на линии раздела сред, то получатся два комплексных соотношения для определяемых в области пластинки функций φ и ψ; в эти соотношения войдут неизвестные усилия X_n, Y_n. Влияние подкрепления тонким кольцом выражается, таким образом, в том, что в обычных условиях первой и второй основных задач на обводе отверстия контурные усилия и смещения будут, помимо известных величин, содержать две подлежащие определению в ходе решения задачи действительные функции.

После этого применение методов, изложенных в настоящей книге, приводит к эффективному решению задачи, если область вне контура спая конформно отображается на внешность круга при помощи рациональной функции. Подобным образом эта задача изучалась для определенного класса отверстий при различных предположениях относительно характера деформации кольца и нагружения пластинки. Существенные результаты в этом направлении были получены в работах Г. Н. Савина, М. П. Шереметьева, Радока, Н. П. Флейшмана и некоторых других авторов. Остановимся вкратце на некоторых, сравнительно новых публикациях.

В работе М. П. Шереметьева [4] рассмотрена растянутая в двух направлениях бесконечная плоскость с подкрепленным отверстием. Подкрепляющее кольцо постоянного сечения принимается за плоский упругий стержень, работающий на изгиб и растяжение. Выводятся соотношения общего вида, характеризующие деформации такого стержня, после чего в соответствии с изложенной выше схемой задача ставится в терминах теории функций комплексного переменного. Полученная задача решается для случая кругового отверстия методом рядов. Следует отметить, что та же задача с той же полнотой была решена немного позже Радоком (Radok [1]), который, по-видимому, не был знаком с работой М. П. Шереметьева. В другой работе М. П. Шереметьева [5] изучается изгиб бесконечной тонкой пластинки, подкрепленной кольцом постоянного сечения,

[1]) Предполагается, что на внутреннем контуре кольца задаются условия, соответствующие первой основной задаче.

приложенными по краю моментами и нормальными усилиями. Кольцо, подкрепляющее край отверстия в пластинке (или край пластинки), рассматривается как нерастяжимая упругая линия, работающая на изгиб и кручение. Метод решения здесь вполне аналогичен указанному выше для случая плоского напряженного состояния. Подробный анализ попрежнему ограничивается случаем кругового отверстия при однородном поле на бесконечности, когда на бесконечности действуют равномерно распределенные изгибающие и крутящие моменты.

Влияние кольцевого подкрепления в изгибаемых пластинках изучалось также в статьях Н. П. Флейшмана [1, 2]. На той же основе, что и в предыдущих работах, автор существенно упростил схему решения в случае кругового отверстия и подробно рассмотрел два примера об изгибе неограниченной пластинки, подверженной на бесконечности действию односторонних изгибающих и всесторонних крутящих моментов соответственно. На этих же примерах автор указал эффективный способ подбора оптимального крепления, при котором полностью или почти полностью устраняется концентрация напряжений.

Задача в случае эллиптического отверстия в изгибаемой пластинке была сведена М. П. Шереметьевым [6] к некоторой линейной граничной задаче типа задачи линейного сопряжения теории аналитических функций, причем линия скачков представляет собой окружность. Эта последняя задача решается методом последовательных приближений, причем за начальное приближение принимается решение для случая кругового отверстия.

Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман [1] рассмотрели общую задачу о подкреплении края пластинки весьма тонким стержнем переменного сечения, работающим на изгиб (при изгибе пластинок) или растяжение (в случае плоского напряженного состояния). Устанавливается некоторое приближенное условие на подкрепленном крае пластинки, обобщающее известные граничные условия основных задач плоской теории упругости и задач теории изгиба тонких пластинок.

Полученная задача теории функций допускает, подобно основным плоским задачам, решение в замкнутой форме, если область пластинки конформно отображается на круг посредством рациональной функции. Это и иллюстрируется на примере эллиптического отверстия в бесконечной пластинке.

Не имея возможности остановиться на этих вопросах более детально, мы отсылаем читателя для ознакомления с некоторыми подробностями и обобщениями на случаи более общего вида подкрепления отверстий к книге М. П. Шереметьева [7], а также к работам А. Н. Кулика [1] и Т. Л. Мартиновича [1, 2] [1]).

---

[1]) После сдачи рукописи в печать появилась монография Г. Н. Савина и Н. П. Флейшмана [2], содержащая детальное рассмотрение этого круга вопросов.

III. СПЛОШНАЯ ОДНОРОДНАЯ СРЕДА (СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ). НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Изучение напряженного состояния в сплошных пластинках в последние годы шло главным образом в направлении рассмотрения сложных по очертанию и характеру нагружения упругих деталей, весьма трудных для точного анализа, но особо интересных для приложений. Значительное внимание уделялось неограниченным пластинкам, ослабленным надрезами различных форм у границы среды, полигональным пластинкам, а также пластинкам тех или иных очертаний, подверженным действию разрывных нагрузок.

§ 158. Пластинки с полигональным контуром. Разрывные нагрузки. Методы теории функций комплексного переменного стали в последнее время с успехом применяться к конечным полигональным пластинкам. Для решения задачи функция, реализующая отображение нагруженной области на круг, представляется при помощи интеграла Кристофеля — Шварца в явном виде (в виде степенного ряда), после чего используется метод степенных рядов. При этом часто, особенно если функция, выражающая контурные воздействия, не является регулярной, к рассмотрению привлекаются функциональные уравнения Мусхелишвили (§ 78). Укажем некоторые, наиболее характерные работы в этом направлении.

Упомянем прежде всего работу Грэя (Gray [1]). В начале работы автор воспроизводит с некоторым изменением содержание § 84 настоящей книги. Отличие заключается в том, что автор использует разложения в степенные ряды не функций

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}, \quad \varphi(\zeta),$$

как в § 84, а функций

$$\omega(\zeta), \quad \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Поэтому полученные автором системы алгебраических уравнений несколько отличаются от соответствующих систем § 84 настоящей книги. В работе подробно рассмотрен пример квадрата, растянутого вдоль диагонали сосредоточенными силами, приложенными в противоположных вершинах. Весьма любопытно, что систему уравнений в этом случае удается решать методом итераций.

В работе Хоскина и Радока (Hoskin a Radok [1]) в связи с расчетом стреловидного крыла рассмотрена задача о напряжениях в квадратной пластинке при некотором сложном нагружении. К противоположным вершинам квадрата приложены направленные по диагонали сосредоточенные силы, и, кроме того, две смежные стороны его подвержены распределенным по определенному закону касательным напряжениям. Рассматриваемый нагруженный квадрат заменяется близким к нему крио-

линейным четырехугольником с закругленными вершинами, соответствующим пятичленному выражению для отображающей функции, после чего задача решается применением функциональных уравнений Н. И. Мусхелишвили. В работе особое внимание уделено количественному анализу изучаемого упругого состояния. Приводятся численные результаты в виде таблиц и графиков при различных значениях параметров задачи.

В работе Уинслоу (Winslow [1]) рассматривается прямоугольная пластинка при специальном ее нагружении, когда компоненты внешних усилий X_n, Y_n представляют собой полиномы от x и y.

В работе Деверола (Deveral [1]) к многоугольным пластинкам, изгибаемым поперечными силами, применяется метод степенных рядов, изложенный в § 63. Сохраняя в отображающей функции три или четыре члена, автор находит приближенное решение для нагруженных равномерными усилиями квадрата, прямоугольника и равностороннего треугольника. Проводятся численные расчеты, и значения максимальных прогибов в пластинке сравниваются с их значениями, найденными другими авторами иным путем.

Для области с кусочно-прямолинейными границами Г. Н. Положий [1—3] изучал третью основную задачу теории упругости. Так принято иногда называть задачу о соприкасании с жестким профилем, когда на границе среды задаются нормальные смещения и касательные напряжения (см. § 128). В граничных условиях этой задачи, после их надлежащего преобразования, при старших производных искомых функций появляется коэффициент, содержащий кривизну контура в качестве множителя. Благодаря этому в случае контуров, состоящих из отрезков прямых, задача существенно упрощается и приводится к двум последовательно решаемым граничным задачам теории аналитических функций. Этим путем Г. Н. Положий построил решение задачи в случае, когда граница области, конечной или бесконечной, представляет собой полигональный контур довольно общего вида. При решении задачи автор сформулировал некоторые физические условия, касающиеся порядка роста напряжений вблизи углов, при которых теорема единственности решения остается справедливой.

В. Е. Жуков [1] рассмотрел представляющий интерес для приложений случай специального вида многоугольника с резко меняющимися линейными размерами. Автор, отправляясь от приближенного отображения в виде конечного ряда по Кристофелю — Шварцу, применяет к решению задачи метод Мусхелишвили в несколько измененном виде. Этот видоизмененный метод впервые использовался в работах Д. М. Волкова (например [1]). В одном конкретном примере разрывной нагрузки (к отдельным участкам контура пластинки приложены распределенные по некоторому закону растягивающие усилия) решение доводится до численных результатов, причем в отображающей функции удерживается член, содержащий ζ^{25}.

В работах М. М. Фридмана [4], Г. Г. Чанкветадзе [1] и вышедшей несколько позже работе Ю (Yi-Yuan Yu [4]) при помощи метода Мусхелишвили дано решение в замкнутой форме задачи о поперечном изгибе круглой пластинки, когда в нескольких точках края, а также во внутренних точках срединной плоскости приложены сосредоточенные силы и моменты.

Басали (Bassali [1]) нашел тем же методом решение задачи для несколько более общего случая, когда на круглую пластинку, помимо сосредоточенных сил, действуют нормальные усилия, распределенные по площади некоторого эксцентрического круга. Эта последняя нагрузка имеет вид: $p_1 = p_0 R_0^{n-2}$, где p_0 — постоянная, R_0 — расстояние от переменной точки до центра круга, а $n \geqslant 2$. В другой работе того же автора (Bassali [2]) рассмотрена та же задача для пластинки с круговым отверстием. В работе Bassali a. Dawoud [1] решена в замкнутой форме задача об изгибе заделанной по контуру пластинки, подверженной действию сосредоточенной нагрузки. Здесь предполагается, что область пластинки, представляющая собой плоскость с криволинейным отверстием, соответствует двучленному или трехчленному отображению вида (1) § 153. Укажем еще на работу (Bassali a. Nassif [1]), где рассмотрен упруго заделанный по контуру круг, изгибаемый нормальной нагрузкой, распределенной равномерно по площади некоторого эллипса, имеющего общий центр с кругом. Басали и его соавторами опубликовано значительное количество работ по конкретным задачам теории изгиба тонких пластинок. Указания на некоторые из них читатель может найти в только что названной статье (Bassali a. Nassif [1]).

§ 159. Пластинки с границами, уходящими в бесконечность. Способ решения, указанный в цитированной выше работе Грэя (Gray [1]), был применен тем же автором к задаче о плоской деформации прямолинейной полосы, изгибаемой в своей плоскости сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке ее края перпендикулярно к граничной линии (Gray [2]). Полученная в этом случае система уравнений, не поддающаяся уже решению методом итераций, приводится к удобному виду при помощи некоторых преобразований. После этого система решается численно и дается подробный анализ напряженного состояния. Отметим, что заданную сосредоточенную силу на границе полосы автор заменяет совокупностью некоторых двух систем сосредоточенных сил, приложенных к границе, и искомое решение представляет, таким образом, в виде наложения решений двух частных задач для той же полосы. Одна из этих задач, а именно задача о полосе, сжимаемой двумя прямо противоположными, нормальными к границе сосредоточенными силами, приложенными в противоположных точках границы, поддается рассмотрению по схеме автора сравнительно легко. Отметим, что эта частная задача решалась в замкнутом виде различными способами. Данное в работе Зоннтага (Sonntag [1]) ее решение, основанное на конформном отображении полосы, отличается от известных

ранее решений быстрой сходимостью содержащихся в нем несобственных интегралов.

Н. С. Курдин [1] указал решение в замкнутой форме для случая внешности параболы, когда среда подвержена действию сосредоточенной нагрузки, приложенной в точке ее края.

В работе Бухвальда и Тиффена (Buchwald a. Tiffen [1]) изучается поперечный изгиб свободно опертой по краям неограниченной тонкой пластинки, когда срединная поверхность ее представляет собой полуплоскость или прямолинейную полосу. Условия свободного опирания по контуру, как было указано выше, вырождаются на его прямолинейных участках, а это позволяет авторам найти решение для рассматриваемых случаев элементарно, в интегралах типа Коши и интегралах Фурье. Рассмотрение авторов включает доказательство теоремы единственности упругого состояния, справедливой при известных условиях на бесконечности, и подробное решение для одного частного случая (внутренних) сосредоточенных нагрузок.

Некоторые случаи односвязных областей с границами, уходящими в бесконечность, рассматривались также в работах Сейка (Seika [3]) и Шиоя (Shioya [1]). В первой из этих работ рассмотрена задача о плоской деформации полуплоскости, растянутой равномерными усилиями на бесконечности, когда прямолинейная ее граница ослаблена симметричным вырезом в форме буквы U. Растягивающие усилия параллельны прямолинейной границе полуплоскости $y = 0$, граница упругой среды свободна от внешних усилий. Полуплоскость с указанным вырезом, близким по форме к полуовалу, отображается при помощи функции

$$z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3}\right), \tag{1}$$

где R, m, n — действительные постоянные, на полуплоскость с выброшенным у границы полукругом. После обычной процедуры представления искомых потенциалов в виде сумм двух функций, первые слагаемые которых дают напряжения в растягиваемой сплошной полуплоскости, а вторые соответствуют дополнительным напряжениям, возникшим вследствие ослабления среды, искомые функции представляются (без надлежащего обоснования) специально подобранными рядами Лорана. Использование степенных рядов дает здесь возможность свести задачу к некоторой бесконечной системе линейных уравнений, которая решается затем приближенно методом возмущений. За параметры возмущения берутся считаемые малыми числа m и n, входящие в формулу (1) и характеризующие форму и размеры выреза. В названной работе Shioya [1] точно таким же путем рассмотрена задача об одностороннем изгибе неограниченной пластинки, занимающей полуплоскость с удаленным у границы полуэллипсом. В обеих работах до конца разобраны численные примеры для различных параметров задачи, приведены таблицы для коэффициента концентрации напряжений и построены эпюры напряжений и моментов. Судя по полученным

здесь численным результатам, таким путем можно, по-видимому, получить картину напряженного состояния, достаточно близкую к истинной. Тем не менее подход этот требует обоснования.

§ 160. Различные специальные вопросы. Недавно С. М. Белоносову [1—3] удалось получить интегральные уравнения плоской задачи, пригодные, вообще говоря, и в случае угловых точек [1]). Рассматриваемая область (конечная или бесконечная), ограниченная кусочно-гладким контуром L, отображается на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ плоскости вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Затем для искомых комплексных потенциалов φ и ψ, регулярных в правой полуплоскости, получаются функциональные уравнения, аналогичные уравнениям, данным в § 78. Эти функциональные уравнения после применения к ним одностороннего преобразования Лапласа приводят к интегральному уравнению с действительным симметричным ядром относительно неизвестной плотности интегрального представления. Если контур L не содержит угловых точек и вообще достаточно гладок, то ядро уравнения, определенное для обеих переменных на всей бесконечной прямой, является фредгольмовым. В общем случае при наличии угловых точек оно уже не будет фредгольмовым, но будет принадлежать к типу ядер Карлемана. Для частных случаев клина и бесконечной полосы интегральное уравнение допускает обращение по формуле Римана — Меллина и решение задачи находится в замкнутом виде (в квадратурах). Ядра интегральных операторов, входящих в решение задачи, не выражаются, правда, в элементарных функциях, но их всегда можно аппроксимировать с достаточной точностью простыми кусочно-аналитическими функциями. В названной выше работе С. М. Белоносова [2] рассмотрен с доведением до численных расчетов пример клина, когда к одной из его граней на некотором расстоянии от вершины приложена сосредоточенная нагрузка. Аналогичная задача была также решена в статье Годфри (Godfrey [1]) с помощью преобразования Меллина.

Тем же путем, при помощи конформного отображения на круговое кольцо и последующего (не взаимно-однозначного) отображения на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$, С. М. Белоносов построил в другой работе [4] аналогичные интегральные уравнения для произвольной двусвязной области. Детальное изучение этих уравнений, проведенное на примере кругового кольца, позволило автору построить для этого случая решения в замкнутой форме (в квадратурах) обеих основных задач. Найденное

---

[1]) Как показал Л. Г. Магнарадзе (указания см. в § 99), интегральные уравнения Мусхелишвили (§ 98) сохраняют силу и для контуров с углами, если входящие в уравнения интегралы понимать в некотором обобщенном смысле. Интегральные уравнения С. М. Белоносова, построенные при помощи предварительного конформного отображения (см. ниже), отличны от уравнений Мусхелишвили.

решение второй задачи сравнивается с известным в литературе решением той же задачи в степенных рядах [1]).

Следует отметить, что в ряде случаев, представляющих интерес для приложений, те или иные интегральные уравнения, служащие цели общих исследований граничных задач, могут быть непосредственно применены и к построению эффективного решения. Мы имеем в виду прежде всего возможности, доставляемые уравнениями Лауричелла — Шермана (§ 101). Идея практического применения интегральных уравнений основывается на следующем соображении.

Предположим, что нам известна функция, реализующая конформное отображение занятой упругой средой односвязной области или области, дополняющей эту последнюю до полной плоскости комплексного переменного, на единичный круг. Если с помощью этой функции произвести замену переменной в упомянутом интегральном уравнении плоской задачи, то оно преобразуется в уравнение на окружности единичного радиуса, причем ядро вновь полученного уравнения будет выражено в явном виде через граничные значения отображающей функции. При элементарных полиномиальных отображениях вида (1) § 153 ядро это будет сохранять простую структуру, и к решению интегрального уравнения можно применить обычный метод рядов Фурье. Этот прием решения, впервые примененный Д. И. Шерманом к задаче о сплошном эллипсе, использовался впоследствии в ряде конкретных случаев. Мы ограничимся ссылкой на работы Л. Д. Корбуковой [1, 2] и Н. Д. Тарабасова [4].

Хиллом (Hill [1]) для несжимаемого материала ($\sigma = 1/2$) была обнаружена любопытная зависимость между решениями первой и второй основных плоских задач. Пусть φ и ψ — решение задачи о плоской деформации, например, при некоторых, заданных на границе среды внешних усилиях X_n и Y_n. Тогда, как показал Хилл, упругие смещения точек контура u^*, v^*, соответствующие комплексным потенциалам $\varphi^* = i\varphi$ и $\psi^* = i\psi$, могут быть определены непосредственно по заданным X_n и Y_n, минуя решение самой задачи. Решение первой задачи, таким образом, всегда может быть приведено к решению второй, сопряженной в указанном смысле задачи теории упругости. При том же предположении относительно упругих свойств материала имеет место, разумеется, и обратная зависимость.

IV. СМЕШАННЫЕ И КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Смешанные и контактные задачи относятся к числу наиболее важных для приложений и, по-видимому, наиболее трудных задач линейной теории упругости.

---

[1]) Указанные здесь результаты подробно изложены в появившейся недавно монографии С. М. Белоносова [5].

Общий метод решения некоторого типа смешанных и контактных задач, использующий аппарат теории функций комплексного переменного, и решение ряда конкретных задач изложены в гл. VI настоящей книги, а также в гл. V второго издания книги Н. И. Мусхелишвили [25].

§ 161. Смешанные задачи плоской теории упругости и теории изгиба пластинок. Как было уже упомянуто в § 103 настоящей книги, Д. И. Шерман [17] дал способ решения основной смешанной плоской задачи теории упругости для многосвязной области. Г. Ф. Манджавидзе [1, 2] подробно исследовал сингулярное интегральное уравнение Д. И. Шермана, построенное для решения указанной задачи. Это же уравнение позволило Г. Ф. Манджавидзе [2] решить смешанную задачу изгиба нормально нагруженной тонкой изотропной пластинки, когда часть края пластинки заделана, а остальная — свободна. Если область, занятую пластинкой, можно отобразить конформно на круг при помощи полинома, то эту задачу, как и основную смешанную задачу (см. § 127), можно решить эффективно. Это сделано в статьях М. Е. Карапетяна [1] и Станеску (Stanescu [1]).

А. И. Каландия [2] построил систему сингулярных интегральных уравнений для решения общей задачи изгиба пластинки, когда часть края заделана, другая — оперта, а остальная — свободна. Им же была построена система интегральных уравнений Фредгольма для решения задачи изгиба пластинки, когда часть края пластинки заделана, а остальная часть оперта (Каландия [1]).

В работе А. И. Каландия [10] предлагается способ, позволяющий находить приближенное решение некоторых задач об изгибе тонких пластинок, а также плоских задач теории упругости, когда упругая среда занимает полукруг. Задача решается приведением к некоторому сингулярному интегральному уравнению и последующим применением к этому уравнению численного метода решения; в работе способ изложен применительно к задаче изгиба пластинки, имеющей форму полукруга, когда пластинка заделана по полуокружности и свободна по диаметру.

В работах Д. И. Шермана [37, 38] были построены вполне регулярные бесконечные алгебраические линейные системы для решения задачи изгиба равномерно нагруженной круглой пластинки, когда одна часть дуги круговой границы оперта, а по оставшейся части дуги пластинка заделана или свободна. В работах Зорского (Zorski [1—4]) с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и теории граничных задач линейного сопряжения решены задачи изгиба пластинок, когда пластинка имеет вид полуплоскости, квадрата или полуполосы и когда заданы смешанные граничные условия (край пластинки частично заделан, частично оперт или частично свободен).

При помощи метода интегральных уравнений Фредгольма в работах Новацкого (Nowacki [1]) и Калиского и Новацкого (Kaliski a. Nowacki [1]) были изучены смешанные задачи для прямоугольных пластинок.

Л. М. Куршин [1] построил интегральное уравнение для решения смешанной задачи для квадранта, когда на одной стороне квадранта равны нулю смещения, на другой — внешние напряжения и когда во внутренней точке квадранта приложена сосредоточенная сила.

В работе Я. С. Уфлянда [1] при помощи преобразования Меллина решена задача о плоской деформации клина, на одной грани которого заданы смещения, а на другой — напряжения. Следует отметить, что применение метода интегральных преобразований к задачам теории упругости подробно рассматривается в монографиях Снеддона (Sneddon [2]) и Я. С. Уфлянда [2].

И. Г. Альперин [1] решил задачу смешанного типа: бесконечная полоса сжимается в поперечном направлении полубесконечными абсолютно жесткими тисками на постоянную величину, без трения.

В работе М. Я. Беленького [1] рассмотрена смешанная задача для полосы, когда на части ее границы задано нормальное смещение, на оставшейся части — нормальное напряжение, касательное же напряжение равно нулю вдоль всей границы; построено и исследовано интегральное уравнение для нахождения нормального напряжения; для одного частного случая дано приближенное решение.

Ряд работ посвящен решению смешанных задач для полосы методом Винера — Хопфа. Построив приближенное решение интегрального уравнения типа Винера — Хопфа, Койтер (Koiter [3]) дал решение задачи изгиба пластинки в виде полосы, когда одна грань заделана или оперта, другая грань частично заделана, частично оперта.

Тем же методом в работе Соколовского (Sokolowski [2]) решена задача, рассмотренная в указанной выше работе И. Г. Альперина [1], а также рассмотрен случай, когда нормальное смещение изменяется по показательному закону.

В работах Соколовского (Sokolowski [1]), Мачинского (Matczyński [1]) методом Винера — Хопфа решены некоторые задачи смешанного типа для полосы (часть полосы оперта, остальная часть упруго закреплена; часть полосы свободна от напряжений, остальная часть упруго сжимается).

Г. П. Черепанов [1], используя граничные задачи линейного сопряжения, решил в общей постановке основную смешанную задачу плоской теории упругости для плоскости с разрезами, расположенными на одной прямой (ср. § 120 настоящей книги). Им же (Черепанов [2]) дано решение основных граничных задач плоской теории упругости в неоднородной бесконечной пластинке с разрезами вдоль одной прямой или окружности.

В § 128 упомянута работа Д. И. Шермана [22], в которой выведены уравнения Фредгольма для решения рассматриваемой там задачи о соприкасании упругого тела с жестким профилем. В последующей работе Д. И. Шермана [39] выведена другая, более удобная система уравнений Фредгольма для решения той же задачи.

§ 162. Контактные задачи плоской теории упругости. В работе В. И. Моссаковского и П. А. Загубиженко [1] применением метода, изложенного в § 120, решается контактная задача для бесконечной упругой плоскости, ослабленной прямолинейной щелью, которая сжимается силами, направленными под углом к линии щели. Ширина щели в недеформированном состоянии считается постоянной, тогда в средней части противоположные края щели смыкаются. Границы участка смыкания определяются из условия конечности напряжений на концах этого участка, аналогичного соответствующему условию § 116.

Как уже упоминалось выше, И. Г. Араманович [1] построил квазирегулярную бесконечную линейную систему для решения контактной задачи о давлении штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость, имеющую круговое отверстие, симметрично расположенное вблизи места ее соприкосновения со штампом.

В работе М. П. Шереметьева [1] рассматривается несколько задач об упругом равновесии бесконечной пластинки с круговым отверстием, в которое вложена круглая абсолютно жесткая или упругая шайба того же радиуса. Для решения этих задач построены интегро-дифференциальные уравнения типа уравнения Прандтля теории крыла конечного размаха.

В работе В. В. Панасюка [1] также построено интегро-дифференциальное уравнение для решения задачи о давлении абсолютно жесткого круглого диска, вставленного в круговое отверстие того же радиуса в бесконечной пластинке, когда к диску приложена сосредоточенная сила.

В. В. Панасюк [2, 3] построил интегро-дифференциальное уравнение, являющееся обобщением интегро-дифференциального уравнения контактной задачи на случай, когда штамп произвольной формы (близкой к круговой) давит на круговое отверстие вдоль части их общей границы, причем площадку соприкосновения уже нельзя считать малой.

В работе А. И. Каландия [6] это уравнение получено другим методом; кроме того, построено интегро-дифференциальное уравнение для контактной задачи, когда в круговое отверстие в бесконечной упругой среде вставлена упругая круглая шайба того же радиуса, но с другими, вообще говоря, упругими постоянными.

Упомянутые интегро-дифференциальные уравнения сходны с уравнением типа Прандтля теории крыла конечного размаха. Для решения этих уравнений был предложен приближенный метод Мультоппа. В работе А. И. Каландия [7] дается обоснование приближенного метода Мультоппа, а также некоторые применения этого метода к плоским контактным задачам.

А. И. Каландия [8, 9] решил также контактные задачи для случая, когда в круговое отверстие, проделанное в бесконечной упругой среде, вложена упругая шайба из другого материала, имевшая первоначально несколько меньший радиус.

М. П. Шереметьев [8] предложил способ приближенного решения уравнения типа Прандтля, построенного в его работе [1].

В работе А. Г. Угодчикова и А. Я. Крылова [1] решается задача о контакте между круговым диском, нагруженным в центре сосредоточенной силой, и круговым кольцом, по внешнему контуру которого действует заданная нагрузка.

В работе Буффлера (Buffler [1]) построена система двух сингулярных интегральных уравнений для определения напряженного состояния в случае, когда две пластинки, близкие по своей форме к полуплоскостям, соединены вдоль отрезка.

V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБОБЩЕННОМУ БИГАРМОНИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ

В этом отделе мы коснемся двух вопросов, на первый взгляд имеющих мало общего между собой, но на самом деле тесно связанных, так как оба приводят к рассмотрению некоторого уравнения четвертого порядка, представляющего обобщение бигармонического уравнения.

§ 163. Плоская статическая задача теории упругости для анизотропных тел, обладающих плоскостью упругой симметрии. Об этой задаче кратко упоминалось в § 104 основного текста книги. Здесь мы скажем о ней несколько более подробно.

Методы теории функций комплексного переменного, как показал впервые С. Г. Лехницкий (его работы были опубликованы в тридцатых годах; см., например, [1]), применимы и к случаю однородного анизотропного тела, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную данной плоскости, которую мы примем за плоскость Oxy. Если тело подвергается плоской деформации, параллельной этой плоскости, то функция напряжений (функция Эри) удовлетворяет вместо бигармонического уравнения более общему уравнению (имеется в виду случай отсутствия объемных сил):

$$a_0\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+a_1\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\,\partial y}+a_2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2}+a_3\frac{\partial^4 U}{\partial x\,\partial y^3}+a_4\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0, \tag{1}$$

где $a_0, \ldots, a_4$ — действительные постоянные, зависящие от упругих свойств рассматриваемого тела (аналогичное уравнение имеет место и для обобщенного плоского напряженного состояния пластинки).

И в этом случае удается построить общее представление решения плоской теории упругости при помощи двух функций комплексных переменных. Это представление существенно зависит от корней так называемого характеристического уравнения

$$a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4=0. \tag{2}$$

Как показал С. Г. Лехницкий, это уравнение не имеет действительных корней.

Если уравнение (2) имеет кратные корни

$$s=\alpha+i\beta,\quad \bar{s}=\alpha-i\beta,$$

то общее действительное решение уравнения (1) представится в виде

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \tag{3}$$

как в случае изотропного тела, но на этот раз комплексное переменное z имеет вид

$$z = x + sy = (x + \alpha y) + i\beta y, \quad (x, y) \text{ в } S,$$

где S обозначает область, занятую телом.

Произведя аффинное преобразование

$$x' = x + \alpha y, \qquad y' = \beta y, \tag{4}$$

мы придем к обычному комплексному переменному

$$z' = x' + iy',$$

изменяющемуся в области S', получаемой из области S аффинным преобразованием (4).

Формула (3) и вытекающие из нее выражения для компонент напряжения и смещения, которые мы не приводим, показывают, что этот случай [т. е. случай кратных корней уравнения (2)] представляет собою почти полную аналогию со случаем изотропного тела, и поэтому мы на нем не останавливаемся.

В случае, когда уравнение (2) не имеет кратных корней, т. е. имеет четыре различных попарно сопряженных корня:

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \bar{s}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \bar{s}_2 = \alpha_2 - i\beta_2,$$

общее действительное решение уравнения (1) представляется в виде

$$2U(x, y) = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)} \tag{5}$$

при помощи двух аналитических функций переменных

$$z_1 = x + s_1 y, \qquad z_2 = x + s_2 y,$$

которые можно заменить обычными комплексными переменными

$$z' = x' + iy', \qquad z'' = x'' + iy'',$$

изменяющимися соответственно в областях S', S'', полученных из области S соответствующими аффинными преобразованиями, аналогичными преобразованию (4); контуры этих областей мы обозначим соответственно через L' и L''. Мы для простоты предполагаем область S, занятую телом, односвязной.

Мы видим, что рассматриваемый случай значительно сложнее, чем случай изотропного тела, так как здесь приходится иметь дело с функциями двух различных комплексных переменных, изменяющихся в двух различных областях. Однако и в рассматриваемом случае удается получить решения граничных задач при помощи методов, аналогичных изложенным в основном тексте книги, но более сложных. Ряд важных результатов в этой области принадлежит С. Г. Лехницкому, С. Г. Михлину, Г. Н. Савину, Д. И. Шерману и др.

Мы ограничимся указанием одного общего и важного результата. В общем случае первая и вторая основные граничные задачи сводятся

к решению следующей граничной задачи теории функций комплексного переменного: найти две функции

$$\Phi_1(z'), \qquad \Phi_2(z''),$$

аналитические, соответственно, в областях S' и S'', по следующему граничному условию:

$$\Phi_2(t'') = A_1\Phi_1(t') + A_2\overline{\Phi_1(t')} + F(t'), \tag{6}$$

где A_1 и A_2 — определенные постоянные; $F(t')$ — заданная функция точки контура L'; t'' — точка контура L'', соответствующая точке t'. Основная смешанная задача сводится также к задаче вида (6), но в этом случае коэффициенты A_1 и A_2 являются кусочно-постоянными, а функция $F(t')$ задана с точностью до кусочно-постоянного слагаемого, не определенного заранее.

Применяя конформное отображение областей S' и S'' на заданную область Σ, скажем на единичный круг (в случае, когда область S односвязна), получаем граничную задачу вида

$$\varphi_2(\alpha(t)) = a_1\varphi_1(t) + a_2\overline{\varphi_1(t)} + f(t), \tag{7}$$

где a_1, a_2, f, α — заданные функции на границе Γ области Σ (при этом функция $\alpha(t)$ переводит контур Γ в самого себя взаимно-однозначно), а φ_1 и φ_2 — искомые аналитические функции в области Σ.

Граничная задача (7) или (6) принадлежит к типу задач, которые называются «задачами сопряжения со сдвигом», так как точки, в которых сопрягаются граничные значения искомых функций, сдвинуты друг относительно друга. Задачи этого типа хорошо изучены за последнее время Д. А. Квеселава, Н. П. Векуа (см., например, второе издание книги Н. И. Мусхелишвили [25]) и др.

С такой точки зрения основная смешанная задача плоской теории упругости анизотропного тела изучена Г. Ф. Манджавидзе [3].

§ 164. Стационарные динамические смешанные задачи. Представляют интерес работы, посвященные применению методов теории функций комплексного переменного к решению стационарных динамических смешанных задач теории упругости. Впервые такие задачи были поставлены и исследованы в работах Л. А. Галина [1, 4].

Л. А. Галин рассмотрел задачу о штампе, движущемся с постоянной скоростью V, меньшей скорости распространения поперечных волн $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$, вдоль границы упругой полуплоскости [1]). Он исходил из динамических уравнений теории упругости в смещениях. Перейдя от неподвижных координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ к подвижным координатам $x = \tilde{x} + Vt$, $y = \tilde{y}$,

[1]) В работах Л. А. Галина имеются неточности; мы приводим его формулы в исправленном виде.

в которых задача оказывается стационарной, Л. А. Галин выразил компоненты смещения через вторые производные некоторой функции, для которой после преобразования переменных получил линейное уравнение в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, аналогичное тому, которое получается для функции напряжений в плоской задаче теории анизотропной упругости. Следуя С. Г. Лехницкому, Л. А. Галин составил общее решение упомянутого уравнения, которое приводит к следующим выражениям для напряжений и смещений:

$$u = -2\,\mathrm{Im}\,[A\varphi(z_1) + B\psi(z_2)], \qquad v = 2\,\mathrm{Re}\,[C\varphi(z_1) + D\psi(z_2)],$$
$$X_x = -2\,\mathrm{Im}\,[L\varphi'(z_1) + F\psi'(z_2)], \qquad Y_y = -2\,\mathrm{Im}\,[G\varphi'(z_1) + H\psi'(z_2)],$$
$$X_y = 2\,\mathrm{Re}\,[M\varphi'(z_1) + N\psi'(z_2)],$$

где A, B, C, D, L, F, G, H, M, N — величины, зависящие от упругих постоянных материала и безразмерной скорости штампа $m = v/c_2$.

Здесь и далее используются обозначения:

$$k_1^2 = 1 - \frac{v^2}{c_1^2}, \quad k_2^2 = 1 - \frac{v^2}{c_2^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}, \quad m = \frac{v}{c_2},$$

λ, μ — постоянные Ламе, ϱ — плотность материала. Функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ представляют собой аналитические функции комплексных переменных

$$z_1 = x + ik_1 y, \qquad z_2 = x + ik_2 y,$$

производные которых связаны линейными зависимостями с другими аналитическими функциями w_1 и w_2. Эти последние функции в свою очередь определяются формулами:

$$w_1 = u_1 - iv_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y)_{y=0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad w_2 = u_2 - iv_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X_y)_{y=0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Далее, имеет место соотношение

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{1}{\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y)_{y=0} \frac{d\zeta}{\zeta - x} + \frac{q}{p} (X_y)_{y=0},$$

где введены обозначения:

$$p = \frac{2E}{(1+\sigma)m^2} \left\{ \sqrt{1-m^2}\, \sqrt{1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} m^2} - \left(1 - \frac{m^2}{2}\right) \right\} \left[1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} m^2 \right]^{-1/2},$$

$$q = \frac{2}{m^2} \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{2}\right) - \sqrt{1-m^2}\, \sqrt{1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} m^2} \right\} \left[1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} m^2 \right]^{-1/2}$$

В силу формул Сохоцкого — Племеля (§ 68) имеем на границе полуплоскости при $z = x$:

$$u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (Y_y)_{y=0} \frac{d\zeta}{\zeta - x}, \quad v_1 = \pi (Y_y)_{y=0}$$

Предыдущие формулы дают возможность привести задачу о стационарно движущемся штампе к задаче Римана — Гильберта для функций w_1 и w_2.

Л. А. Галин предполагает, что на поверхности штампа действуют силы кулонова трения с коэффициентом k, так что $k\,(Y_y)_{y=0} = (X_y)_{y=0}$. Таким образом, если штамп простирается от $x = a$ до $x = b$, то задача Римана — Гильберта для определения аналитической в нижней полуплоскости функции $w_1(z)$ принимает вид

$$v_1 = 0 \quad (-\infty < x \leqslant a, \qquad b \leqslant x < \infty, \qquad y = 0),$$
$$-p\pi f'(x) = u_1 + kqv_1 \qquad (a \leqslant x \leqslant b, \qquad y = 0).$$

В частности, для случая, когда коэффициент трения равен нулю, для определения $w_1(z)$ получается смешанная задача, та же, что и для неподвижного штампа. Когда $w_1(z)$ известна, $w_2(z)$ находится элементарно. Решение этих задач получается в замкнутом виде применением хорошо известных методов (см. Мусхелишвили [25]). Л. А. Галиным подробно исследованы различные частные случаи (в частности, случай параболического штампа) и вычислены распределения нормальных и касательных напряжений под штампом.

Стационарные динамические задачи для полуплоскости были независимо, но позднее рассмотрены методом, близким к изложенному, Снеддоном (Sneddon [4]), исследовавшим также частный случай равномерно движущейся по границе полуплоскости сосредоточенной силы. Радок (Radok [1]) также независимо пришел к изложенному методу, исходя из уравнений в напряжениях. Им были рассмотрены примеры движущегося параболического штампа, движущейся дислокации и движущейся трещины постоянной длины в однородном поле растягивающих напряжений. Следует отметить, что две последние задачи были исследованы ранее, соответственно, в работах Эшелби (Eshelby [1]) и Иоффе (Yoffe [1]), использовавших другой метод.

В работе Крэггса (Craggs [1]) была по существу тем же методом рассмотрена задача о полубесконечной прямолинейной трещине, распространяющейся с постоянной скоростью под действием перемещающейся с той же скоростью нагрузки.

В работе Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [2], выполненной одновременно с предыдущей, была исследована стационарная задача о расклинивании хрупкого тела движущимся с постоянной скоростью тонким жестким полубесконечным клином, так что перед клином движется свободная трещина.

В обеих последних работах было обнаружено любопытное обстоятельство: оказалось, что при стремлении скорости перемещения нагрузки (или клина) к скорости распространения поверхностных волн Релея, несколько меньшей скорости распространения поперечных волн, наступают своеобразные резонансные явления. В частности, напряжения во всех точках тела стремятся при этом к бесконечности, а длина свободной трещины перед клином стремится к нулю. Это привело авторов указанных работ к заключению, что релеевская скорость является предельной скоростью

распространения трещин. Следует отметить, что резонансные явления возникают при стремлении скорости к релеевской не только в задачах, связанных с трещинами, но и в задачах о подвижном штампе и прочих стационарных динамических задачах рассматриваемого типа.

Во всех перечисленных работах скорость движения нагрузки предполагалась дозвуковой. В работе Коула и Хута (Cole a. Huth [1]) задача о перемещении сосредоточенной силы по границе полупространства, исследованная впервые Снеддоном (Sneddon [4]), была рассмотрена для произвольных скоростей, в том числе лежащих в интервале между скоростью распространения поперечных и скоростью распространения продольных волн и скоростей, бо́льших скорости распространения продольных волн.

В работе Эрингена (Eringen [1]) была рассмотрена задача о диске, по поверхности которого с постоянной угловой скоростью движется нагрузка. Эта задача естественно обобщает рассмотренные выше задачи о нагрузке, движущейся с постоянной скоростью вдоль границы полуплоскости.

VI. ТЕОРИЯ ТРЕЩИН

В последние годы значительное внимание привлекли к себе задачи теории трещин, связанные с математической теорией хрупкого разрушения. Теория хрупкого разрушения, предполагающая, что тело сохраняет свойство линейной упругости (т. е. подчиняется обобщенному закону Гука) вплоть до разрушения, берет свое начало от работ Гриффитса (Griffith [1, 2]). Длительное время считалось, что область применимости этой теории ограничена немногими материалами типа стекла вследствие наличия в разрушающихся телах значительных областей пластических деформаций. Интенсивное развитие теории хрупкого разрушения началось после работ Ирвина (Irwin [1]) и Орована (Orowan [1]), показавших, что в большом числе практически важных случаев разрушение происходит квазихрупким образом, т. е. так, что пластическая область хотя и существует, но имеет очень малые размеры и сосредоточивается в непосредственной близости поверхности трещин. Эта важная идея открыла возможность применять теорию хрупкого разрушения во многих практических задачах.

Методы, развитые в настоящей книге, находят широкое применение в теории хрупкого разрушения. Изложение теории трещин, как и во всей этой главе, ведется, в основном, именно с точки зрения методов настоящей книги, поэтому в ряде случаев результаты различных авторов излагаются иначе, чем они были первоначально получены.

§ 165. Постановка задач. Основные представления. Трещины математически рассматриваются как поверхности разрыва смещений в недеформированном теле, ограниченные некоторой гладкой линией — контуром трещины. Для простоты ограничимся здесь изложением теории трещин нормального разрыва, когда претерпевает разрыв только нормаль-

нормальная компонента смещения; теория непосредственно распространяется на общий случай.

Возьмем вблизи произвольной точки O гладкого контура поверхности разрыва нормальных смещений окрестность, характерный размер которой мал сравнительно с радиусом кривизны контура в точке O. Деформацию в этой окрестности можно считать плоской и соответствующей прямолинейному бесконечному разрезу в бесконечном теле под действием некоторой системы симметричных относительно поверхности разреза нагрузок (рис. 64). Нагрузки могут быть приложены на поверхности разреза и внутри тела; нагрузки, приложенные на поверхности разреза, не

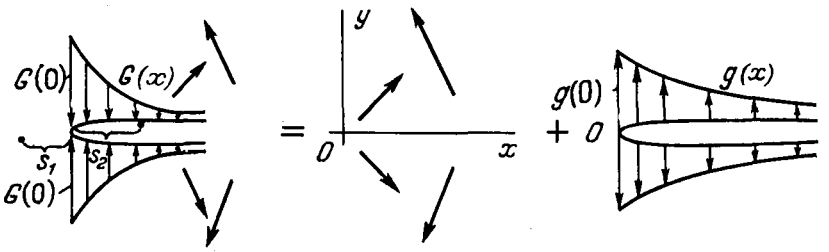


Рис. 64.

уменьшая общности, можно считать нормальными. Поле упругих элементов можно представить в виде суммы двух полей (рис. 64), первое из которых соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных внутри тела, а второе — телу с разрезом под действием симметричных нагрузок, приложенных только на поверхности разреза. Форма деформированной поверхности разреза определяется только вторым напряженным состоянием, так как нормальные смещения на месте разреза для первого напряженного состояния равны по симметрии нулю. Этот прием приведения нагрузки к распределенной по поверхности разрыва обоснован в наиболее общем виде Бюкнером (Bueckner [1]). Анализ первого напряженного состояния выполняется обычными методами; его можно считать известным.

Примем, что линия разреза (сечение поверхности разреза) соответствует положительной полуоси Ox; нормальные напряжения $g(x)$, приложенные на линии разреза во втором напряженном состоянии, представляют собой разность напряжений, приложенных на поверхности разреза в суммарном поле $G(x)$, и напряжений на месте разреза, соответствующих первому напряженному состоянию.

Для определения второго напряженного состояния воспользуемся методом § 120. Имеем в силу формул (8) § 32 и формул (7) и (9) § 120:

$$X_x^{(2)} + Y_y^{(2)} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \tag{1}$$

$$Y_y^{(2)} - iX_y^{(2)} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\,(u^{(2)} + iv^{(2)}) = \varkappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi(z)} \tag{3}$$

(индексом 2 отмечены величины, относящиеся ко второму напряженному состоянию). В силу формул (20)—(22) § 120, без труда распространяемых на случай полубесконечного разреза, имеем:

$$\Phi(z)=\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{z}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\,g(t)\,dt}{t-z}, \tag{4}$$

$$\varphi(z)=\omega(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{z}}{\sqrt{t}-\sqrt{z}}\,dt. \tag{5}$$

На разрезе ($x \geqslant 0$, $y = 0$) и его продолжении ($x \leqslant 0$, $y = 0$) выполняются соотношения

$$X_x^{(2)}=Y_y^{(2)}=2\operatorname{Re}\Phi(z),\qquad X_y^{(2)}=0,\qquad v^{(2)}=\frac{4(1-\sigma^2)}{E}\operatorname{Im}\varphi(z). \tag{6}$$

Отсюда и из формул, описывающих поведение интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования (Мусхелишвили [25]), получается выражение для растягивающих нормальных напряжений вблизи конца разреза на его продолжении

$$Y_y^{(2)}=-\frac{1}{\pi\sqrt{s_1}}\int_0^\infty \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{t}}+g(0)+O(\sqrt{s_1}) \tag{7}$$

(s_1 — малое расстояние рассматриваемой точки от конца разреза). Для распределения нормальных смещений точек линии разреза вблизи его конца получаем:

$$v^{(2)}=\pm\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi E}\sqrt{s_2}\int_0^\infty \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{t}}+O(s_2^{3/2}) \tag{8}$$

(s_2 — малое расстояние рассматриваемой точки линии разреза от его конца; знаки плюс и минус отвечают соответственно верхнему и нижнему берегам разреза).

Из соотношений (7) и (8) непосредственно вытекают формулы для характеристик суммарного напряженного состояния вблизи контура произвольной поверхности нормального разрыва:

$$Y_y=\frac{N}{\sqrt{s_1}}+G(0)+O(\sqrt{s_1}),\qquad v=\mp\frac{4(1-\sigma^2)N\sqrt{s_2}}{E}+O(s_2^{3/2}), \tag{9}$$

где N — «коэффициент интенсивности напряжений», т. е. величина, зависящая от действующих нагрузок, конфигурации тела и поверхностей разрыва в нем, а также от координат рассматриваемой точки O. В зависимости от знака N могут, вообще говоря, встретиться три возможности.

Если $N > 0$, то в точке O контура поверхности разрыва действует бесконечное растягивающее напряжение. Форма деформированной поверхности разрыва и распределение нормальных напряжений Y_y вблизи точки O имеют вид, представленный на рис. 65 а.

Если $N < 0$, то в точке O контура действует бесконечное сжимающее напряжение. Форма деформированной поверхности разрыва и распределение напряжений Y_y вблизи точки O имеют вид, представленный на рис. 65 б. В этом случае противоположные берега трещины заходят один за другой, как бы перехлестываясь: непосредственно очевидно, что этот случай физически нереален. Если, наконец, $N = 0$, то действующее вблизи контура растягивающее напряжение ограничено и при подходе к точке

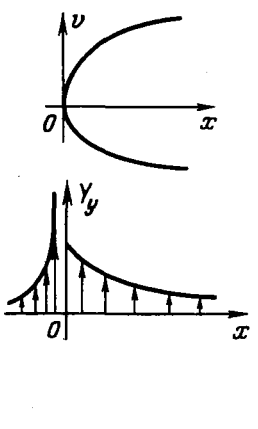


Рис. 65 а.

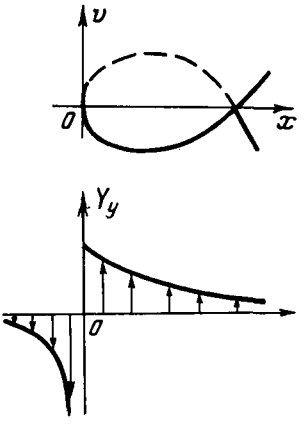


Рис. 65 б.

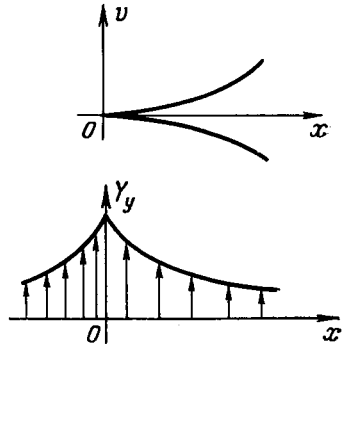


Рис. 65 в.

O напряжение стремится к приложенному на поверхности в этой точке контура нормальному напряжению, так что имеют место непрерывность напряжений Y_y на контуре и плавное смыкание противоположных берегов поверхности разрыва на контуре (рис. 65 в).

Исследование распределения напряжений и деформаций вблизи края поверхности нормального разрыва было начато Вестергардом (Westergaard [1, 2]), Снеддоном (Sneddon [1, 2]), Снеддоном и Эллиотом (Sneddon a. Elliott [1]) и продолжено Г. И. Баренблаттом [1], Уильямсом (Williams [1]) и Ирвином (Irwin [2—4]). Полученные результаты относятся к произвольной поверхности нормального разрыва смещений. Покажем, что для равновесной трещины во всех точках контура $N = 0$. Рассмотрим возможное состояние упругой системы, которое отличается от действительного равновесного состояния только некоторым изменением формы контура трещины в малой окрестности произвольной его точки O (рис. 66 а, б). Новый контур представляет собой некоторую кривую, окружающую точку O и лежащую в плоскости трещины. Эта кривая касается исходного контура трещины в точках A и B, близких к O; во всех остальных местах контуры всех трещин остаются неизменными. Ввиду близости точек касания A и B к точке O исходный контур трещины на участке AB можно считать прямолинейным. Распределение нормальных смещений точек новой поверхности трещины и распределение растягивающих напряжений в этих

точках до образования новой поверхности трещины имеют, согласно предыдущему, с точностью до малых величин вид

$$v = \pm \frac{4(1-\sigma^2) N \sqrt{h-y}}{E}, \qquad Y_y = \frac{N}{\sqrt{y}}, \tag{10}$$

где N — коэффициент интенсивности напряжений в точке O.

Энергия δW, освободившаяся при образовании новой поверхности трещины и равная работе, потребной для закрытия этой новой поверхности, составляет

$$\delta W = \int_{\delta S} Y_y |v| \, dS = \frac{4(1-\sigma^2) N^2}{E} \int_a^b dx \int_0^h \sqrt{\frac{h-y}{y}} \, dy =$$

$$= \frac{2(1-\sigma^2) \pi N^2}{E} \int_a^b h \, dx = \frac{2(1-\sigma^2) \pi N^2 \delta S}{E}, \tag{11}$$

где δS — величина площади новой поверхности трещины.

Равновесная трещина отличается от произвольной поверхности нормального разрыва именно тем, что освободившаяся энергия δW обращается в нуль. Отсюда и из (11) следует:

$$N = 0. \tag{12}$$

Таким образом, справедливо важное утверждение, характеризующее структуру равновесной трещины вблизи ее контура:

1. *Растягивающее напряжение на контуре трещины конечно.*

2. *Противоположные берега трещины плавно смыкаются на ее контуре.*

В гипотетической форме условие конечности напряжений и плавности смыкания противоположных берегов на краях трещины было впервые

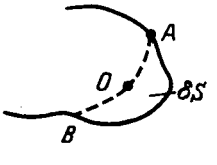


Рис. 66 а.

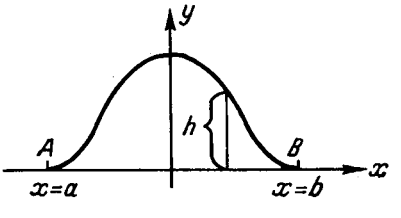


Рис. 66 б.

предложено С. А. Христиановичем (Желтов и Христианович [1], Баренблатт и Христианович [1]). Приведенное выше доказательство этого условия дано в работе Г. И. Баренблатта [2]. Формула (11) для случая плоской деформации вне связи с конечностью напряжений и плавностью смыкания на краю трещины была указана в работах Ирвина (Irwin [2—4]).

Условие С. А. Христиановича (12) позволяет при заданной системе сил, действующих на тело, сформулировать задачу теории равновесных трещин. В рамках плоской задачи и для простейшего случая, когда симметрия тела и приложенных нагрузок обеспечивает развитие прямоли-

нейных трещин, эта задача ставится следующим образом. Для данного расположения начальных трещин и данной системы сил, действующих на тело, требуется найти напряжения, деформации и координаты концов трещин так, чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям равновесия, граничным условиям и *обеспечить конечность напряжений и плавное смыкание противоположных берегов на краях трещин.*

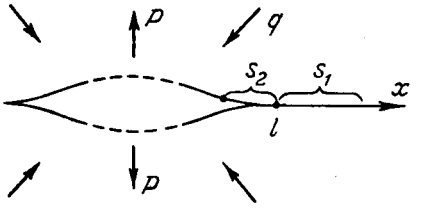


Рис. 67.

Разберем решение этой задачи на примере изолированной прямолинейной трещины в бесконечном упругом теле, сжатом на бесконечности всесторонним напряжением q. Трещина поддерживается в раскрытом состоянии сосредоточенными силами P, приложенными в противоположных точках ее поверхности (рис. 67). Используя результаты § 82а, можно получить решение уравнений равновесия, удовлетворяющее граничным условиям, при произвольной длине трещины $2l$. Напряжения и смещения при этом выражаются формулами (1) и (8) § 32, причем

$$\Phi(z)=\frac{2\zeta^2}{l(\zeta^2-1)}\left\{\frac{P}{\pi(\zeta^2+1)}-\frac{ql(\zeta^2+1)}{4\zeta^2}\right\}, \qquad (13)$$

$$z=\frac{l}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

Уравнения равновесия и граничные условия *не определяют* длины трещины $2l$. Распределения напряжений Y_y на продолжении трещины и нормальных смещений v точек линии трещины вблизи ее конца представляются в виде

$$Y_y=\left(\frac{P}{\pi l}-q\right)\sqrt{\frac{l}{8s_1}}+O(1),$$
$$v=\pm\frac{(1-\sigma^2)}{E}\left(\frac{P}{\pi l}-q\right)\sqrt{8s_2 l}+O(s_2^{3/2}). \qquad (14)$$

Конечность напряжений и плавность смыкания берегов трещины на ее концах одновременно обеспечиваются при условии

$$l=\frac{P}{\pi q},$$

которое и определяет размер трещины при данных нагрузках P и q.

Попытаемся теперь определить размер $2l$ изолированной прямолинейной трещины в бесконечном теле, растягиваемом на бесконечности однородным напряжением p_0 в направлении, перпендикулярном трещине. Если считать, что концы трещины свободны от напряжений, то из результатов п. 1 § 82а вытекает, что растягивающее напряжение на продолжении трещины вблизи ее конца зависит от расстояния от конца s_1 следующим

образом:

$$Y_y = \frac{p_0\sqrt{l}}{\sqrt{2s_1}} + O(1).$$

Отсюда получается, что ни при каком l напряжение Y_y в конце трещины не будет конечным и равновесной трещины не существует. Этот парадоксальный результат объясняется тем, что из-за предположения о том, что поверхность трещины свободна от напряжений, здесь не приняты во внимание силы сцепления, действующие вблизи концов трещины на ее поверхности, и, таким образом, неполностью отражены нагрузки, действующие на тело.

Итак, для построения адекватной теории трещин хрупкого разрушения необходимо дополнить модель хрупкого тела сравнительно с классической моделью упругого тела путем учета сил сцепления, действующих вблизи края трещины на ее поверхности. Известно, что интенсивность сил сцепления, действующих между двумя телами, существенно зависит от расстояния между этими телами, сначала возрастая с увеличением расстояния до некоторой весьма значительной максимальной величины и затем быстро убывая. В настоящее время не существует достоверных данных, позволяющих определить зависимость сил сцепления от расстояния и тем более распределение сил сцепления по поверхности трещины. Тем не менее имеющиеся сведения о силах сцепления дают возможность сформулировать весьма общие предположения, позволяющие существенно упростить анализ и, в конечном счете, вообще исключить силы сцепления из рассмотрения.

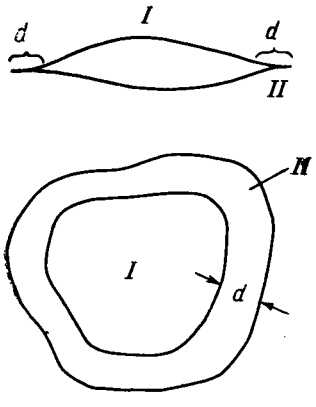


Рис. 68.

Поверхность трещины естественно разделить на две части (рис. 68). В первой части — *внутренней области трещины* — противоположные берега трещины далеко отстоят один от другого, так что их взаимодействие пренебрежимо мало и поверхность трещины можно считать свободной от напряжений, обусловленных взаимодействием противоположных берегов. Во второй части, прилегающей к контуру трещины,— *концевой области трещины* — противоположные берега трещины близко подходят один к другому, так что действующие на этой части поверхности силы сцепления имеют значительную интенсивность. (Для трещин квазихрупкого разрушения за поверхность трещины следует принять границу пластической и упругой областей, так что концевая область включает в себя границу пластической головки трещины.)

Физический анализ приводит к следующим двум основным гипотезам.

Первая гипотеза. *Ширина d концевой области мала сравнительно с размером всей трещины.*

Вторая гипотеза. *Форма нормального сечения поверхности трещины в концевой области* (*и, следовательно, локальное распределение сил сцепления по поверхности трещины*) *не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях* (*температура, состав и давление окружающей атмосферы и т. п.*) *всегда одинакова.* Под нормальным сечением здесь понимается сечение плоскостью, нормальной к контуру трещины. Вторая гипотеза означает, в частности, что вблизи концов форма поверхности трещин в условиях плоской задачи всегда одинакова.

Согласно второй гипотезе концевая область при расширении трещины как бы поступательно перемещается в другое место. Вторая гипотеза применима только для тех точек контура трещины, где достигается максимально возможная интенсивность сил сцепления, так что при сколь угодно малом увеличении приложенных к телу нагрузок в этой точке происходит расширение трещины.

Равновесные трещины, на контуре которых имеется хотя бы одна такая точка, естественно назвать *подвижно-равновесными* в отличие от *неподвижно-равновесных трещин*, этим свойством не обладающих и не расширяющихся при бесконечно малом увеличении нагрузки.

Приведенные выше гипотезы являются единственными предположениями, лежащими в основе теории трещин. В явной форме они были сформулированы в работах Г. И. Баренблатта [3—7].

Рассматриваемое тело, по предположению, является линейно упругим вплоть до разрушения, так что поле упругих элементов в теле с трещинами можно представить в виде суммы двух полей: поля, вычисленного без учета сил сцепления, и поля, соответствующего действию одних только сил сцепления. Поэтому величину N, входящую в формулы (9) и равную, по доказанному, нулю, можно записать в виде $N = N_0 + N_m$, где N_0 соответствует действующим на тело нагрузкам и той же конфигурации трещин, но без учета сил сцепления, а N_m — той же конфигурации трещин и одним только силам сцепления.

В силу первой гипотезы можно считать при определении N_m, что упругое поле соответствует рассмотренной выше конфигурации бесконечного тела с полубесконечным прямолинейным разрезом, на поверхности которого приложены симметричные нормальные напряжения. Отсюда и из (7) следует, что

$$N_m = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{G(t)\,dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{d}\frac{G(t)\,dt}{\sqrt{t}}, \qquad (15)$$

где $G(t)$ — распределение сил сцепления, отличных от нуля только в концевой области $0 \leqslant t \leqslant d$.

В силу второй гипотезы интеграл в правой части (15) представляет собой константу, являющуюся характеристикой данного материала при

данных условиях. Эта константа, обозначаемая через K:

$$K = \int_0^d \frac{G(t)\,dt}{\sqrt{t}}, \tag{16}$$

и называемая *модулем сцепления*, является единственной характеристикой сил сцепления, входящей в формулировку задач о трещинах при принятых предположениях. В некоторых случаях используется другая характеристика сил сцепления: плотность поверхностной энергии — энергия, затрачиваемая на образование единицы площади новой поверхности трещины T. Величины K и T связаны соотношением

$$K^2 = \frac{\pi ET}{1-\sigma^2}. \tag{17}$$

Из формул (15) и (16) следует, что для точек контура трещины, в которых достигается максимальная интенсивность сил сцепления и, следовательно, выполняется вторая гипотеза, имеет место условие

$$N_0 = \frac{1}{\pi} K, \tag{18}$$

так что растягивающее нормальное напряжение в точках тела, лежащих на продолжении трещины, вычисленное без учета сил сцепления, стремится к бесконечности по закону

$$Y_y = \frac{K}{\pi\sqrt{s}} + O(1), \tag{19}$$

где s — малое расстояние до конца трещины. Выполнение условия (18) или (19) для одного из концов трещины означает достижение системой трещин в данном теле состояния подвижного равновесия. Важно отметить, что достижение трещиной состояния подвижного равновесия не следует, вообще говоря, связывать с началом неустойчивого быстрого развития трещины и тем более полным разрушением тела. Дело в том, что подвижно-равновесная трещина может быть как устойчивой, так и неустойчивой; только в случае неустойчивости подвижного равновесия условие (18) будет условием начала быстрого развития трещины.

Если на контуре трещины существуют точки, где интенсивность сил сцепления меньше максимально возможной (например, точки контуров нерасширенных надрезов или точки контуров трещин, получившихся при уменьшении нагрузки из трещин, существовавших при большей нагрузке), то в таких точках вторая гипотеза неприменима. Силы сцепления, действующие в концевой области поверхности трещины вблизи таких точек, меньше сил сцепления, действующих в концевой области вблизи точек рассмотренного выше типа. Поэтому для таких точек выполняется условие

$$N_0 < \frac{1}{\pi} K. \tag{20}$$

При повышении нагрузки силы сцепления в концевой области возрастают, обеспечивая конечность напряжения и плавность смыкания на краю трещины. Однако трещина не распространяется, пока силы сцепления на данном ее конце не достигнут максимальной интенсивности, так что станет применима вторая гипотеза и будет выполняться условие (18).

Условия (18) и (20) позволяют при определении положений концов трещин вообще исключить силы сцепления из рассмотрения, ограничившись их суммарной интегральной характеристикой, модулем сцепления. Специальные оценки показывают, что влияние сил сцепления на поля напряжений и смещений существенно только в окрестности концов трещин, имеющей размер порядка ширины d концевой области. Силы сцепления определяют структуру трещин вблизи их концов и только через свою интегральную характеристику K — положение концов трещин.

Полученные условия дают возможность сформулировать основные задачи теории равновесных трещин. В общей форме основная задача теории равновесных трещин ставится следующим образом. Задается некоторая система начальных трещин в теле и процесс нагружения, т. е. система действующих на тело нагрузок, зависящая от одного монотонно возрастающего параметра λ. Для исходного состояния значение параметра λ можно считать равным нулю. Требуется определить форму трещин, а также найти распределение напряжений и смещений в теле, соответствующее каждому $\lambda > 0$. Предполагается, что изменения нагрузок достаточно медленные, так что динамические эффекты не учитываются.

Решение этой задачи для общего случая криволинейных трещин весьма затруднительно. В принципе оно должно осуществляться методом последовательных шагов, причем направление развития трещины определяется условием локальной симметрии напряженного состояния вблизи конца трещины, вытекающим из второй гипотезы.

В случае, когда симметрия тела, нагрузок и начальных трещин обеспечивает возможность развития системы прямолинейных трещин и растягивающие нагрузки монотонно возрастают с увеличением λ, конфигурация системы трещин в теле определяется только текущей нагрузкой, а не всей историей процесса нагружения, как в общем случае.

Задача теории трещин формулируется при этом следующим образом: в теле, ограниченном контуром Σ, задана система начальных прямолинейных трещин Γ_0. Требуется найти поле упругих элементов и положение системы прямолинейных трещин Γ, охватывающей первоначальную систему Γ_0, соответствующие данной нагрузке, т. е. данному значению λ.

Сформулированная задача математически сводится к решению системы дифференциальных уравнений равновесия теории упругости в области, ограниченной контуром Σ и прямолинейными разрезами, при граничных условиях, соответствующих данной нагрузке. При этом концы трещин

системы Г должны быть определены так, чтобы в концах системы трещин Γ_0 выполнялись условия (18) или (20).

Может оказаться, что решения поставленной задачи не существует. Это означает, что приложенная нагрузка превосходит разрушающую, так что при ее приложении наступает разрушение тела. Предельное значение параметра λ, до достижения которого существует решение задачи, соответствует разрушающей нагрузке.

§ 166. Частные задачи. Ниже мы остановимся на ряде конкретных задач теории трещин, рассмотренных к настоящему времени. Как видно из предыдущего, основным этапом в решении задач о равновесии систем трещин является вычисление коэффициентов интенсивности N, соответствующих каждому из концов трещин. Большинство полученных результатов основано на использовании методов, развитых в настоящей книге.

Начнем с изолированной прямолинейной трещины, причем будем считать, что на обоих ее концах достигнута максимальная интенсивность сил сцепления. Предполагается, таким образом, что изолированная прямолинейная подвижно-равновесная трещина в бесконечной плоскости простирается от $x = a$ до $x = b$. Обозначим через $p(x)$ распределение нормальных напряжений, которые возникают на месте трещины в сплошном теле при тех же нагрузках; это распределение находится обычными методами и считается заданным. Для нахождения упругих полей в теле без учета сил сцепления можно воспользоваться результатами § 120. Имеем:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}\, p(t)\, dt}{t-z}, \tag{1}$$

откуда для коэффициентов интенсивности напряжений в концах a и b (без учета сил сцепления) получаем:

$$N_a = \frac{1}{\pi\sqrt{b-a}} \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\, dx, \quad N_b = \frac{1}{\pi\sqrt{b-a}} \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx. \tag{2}$$

Удовлетворяя в точках a и b условию (18) § 165, получаем:

$$\int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx = K\sqrt{b-a}, \quad \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\, dx = K\sqrt{b-a}. \tag{3}$$

В частности, в случае симметричной трещины $a = -b = -l$, $p(x) = p(-x)$ имеем:

$$\int_0^l \frac{p(x)\, dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}}. \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) представляют собой конечные уравнения, определяющие координаты концов трещины. Отметим, что в принципе эти уравнения аналогичны, соответственно, условиям (10)—(11) и (11′) § 119, определяющим положения концов площадки контакта в задаче о вдавливании штампа.

Упомянем некоторые важные частные случаи. При $p(x) \equiv p_0 = \text{const}$ (однородное поле напряжений) формула (4) дает

$$l = \frac{2K^2}{\pi^2 p_0^2}. \tag{5}$$

Это соотношение было получено Гриффитсом (Griffith [1, 2]) гораздо более сложным путем, так как он использовал решение Инглиза (Inglis [1]). Если $p(x) = P\delta(x)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция [1]); этот случай соответствует трещине, поддерживаемой сосредоточенными силами P, приложенными посредине ее противоположных берегов), то формула (4) дает

$$l = \frac{P^2}{2K^2}. \tag{6}$$

Представляет особый интерес развитие изолированной трещины при пропорциональном нагружении (когда все нагрузки меняются пропорционально некоторому параметру). В случае симметричной прямолинейной трещины имеем $p(x) = \lambda f(x)$. Переходя к безразмерной переменной $\xi = x/l$, приводим соотношение (4) к виду

$$\frac{\sqrt{2}\lambda}{K} = \varphi(l) = \left[\sqrt{l}\int_0^1 \frac{f(l\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]^{-1}. \tag{7}$$

Таким образом, зависимость размера трещины l от параметра нагружения λ вполне определяется функцией $\varphi(l)$, входящей в формулу (7). Функция $\varphi(l)$ обладает следующими свойствами:

1°. Если на краю трещины не приложены сосредоточенные силы, то при малых l функция $\varphi(l) \to \infty$ по закону

$$\varphi(l) = \frac{2}{\pi f(0)\sqrt{l}}. \tag{8}$$

2°. Если растягивающие нагрузки, приложенные к телу с каждой стороны трещины, ограничены и равны λP, то при $l \to \infty$ функция $\varphi(l) \to \infty$ по закону

$$\varphi(l) = \frac{2\sqrt{l}}{P}. \tag{9}$$

Из этого следует, что при выполнении сделанных предположений функция $\varphi(l)$ имеет по крайней мере один положительный минимум и по одному участку убывания и возрастания. Если нагрузка с обеих сторон трещины не ограничена, то функция φ может не иметь участков возрастания.

Сформулированные свойства функции $\varphi(l)$ важны при анализе устойчивости трещины. По определению, равновесная трещина является *устойчивой*, если никакое достаточно малое изменение положения ее концов

---

[1]) Эта обобщенная функция удовлетворяет соотношениям:

$$\delta(x) \equiv 0 \quad (x \neq 0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

не приводит к возникновению сил, стремящихся еще более удалить тело от нарушенного состояния равновесия. Очевидно, что неподвижно-равновесные трещины всегда устойчивы. Можно показать, что для устойчивости подвижно-равновесной трещины необходимо, чтобы ее размер l возрастал с увеличением параметра нагружения λ, откуда и из (7) получаем, что устойчивы только те состояния подвижного равновесия трещины, описываемые уравнением (7), для которых $\varphi'(l) > 0$, т. е. соответствующие участкам возрастания кривой (7).

Полученные сведения дают возможность полностью проанализировать развитие изолированной прямолинейной трещины при пропорциональном нагружении. Пусть, например, функция $\varphi(l)$ имеет вид, представленный на рис. 69, а начальная длина трещины при нулевой нагрузке, l_0, соответствует первому неустойчивому участку. Тогда при увеличении параметра λ до значения, определяемого ординатой точки *1*, размер трещины не меняется, трещина остается неподвижно-равновесной. По достижении точки *1* трещина становится подвижно-равновесной и при малейшем увеличении нагрузки изображающая точка перескакивает на устойчивую ветвь кривой $\varphi(l)$. Это означает, что размер трещины скачком меняется от l_0 до l_2. При дальнейшем увеличении параметра λ размер трещины непрерывно увеличивается до достижения точки *3*, после чего происходит полное разрушение тела. Значение параметра λ, соответствующее точке *3*, определяет разрушающую нагрузку. Исследование развития изолированной прямолинейной трещины при пропорциональном нагружении в случае других форм зависимости $\varphi(l)$ проводится вполне аналогично. В частности, очевидно, что если растягивающие нагрузки по обе стороны трещины ограничены, то значение λ, отвечающее разрушающей нагрузке, бесконечно.

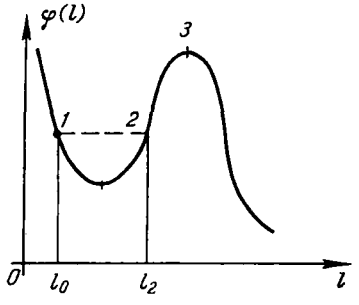


Рис. 69.

Разнообразные задачи, связанные с развитием изолированной прямолинейной трещины в различных условиях, были рассмотрены в работах Снеддона и Эллиота (Sneddon a. Elliott [1]), Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [1], Ю. П. Желтова [1], Масубути (Masubuchi [1]), Дагдейла (Dugdale [1]), В. В. Панасюка [4, 5], М. Я. Леонова и В. В. Панасюка [1], Е. А. Морозовой и В. З. Партона [1]. Изложенное здесь исследование задачи о развитии изолированной прямолинейной трещины было выполнено в работах Г. И. Баренблатта [1, 4, 5, 8].

Для приложений существенное значение имеет рассмотрение задач о трещинах, выходящих на поверхность тела. Получение эффективных аналитических решений в этом случае затруднено, так как отображение соответствующей области на полуплоскость не может быть выполнено

при помощи рациональных функций. Поэтому приходится прибегать к численным решениям. В важной работе Бови (Bowie [1]) рассмотрена задача о системе k симметрично расположенных трещин одинаковой длины, выходящих на свободную поверхность кругового выреза в бесконечном теле (рис. 70). Тело растягивается на бесконечности всесторонним растягивающим напряжением или одноосным растягивающим напряжением (в последнем случае рассматривается случай одной или двух трещин, перпендикулярных направлению растяжения). Для приближенного решения задачи Бови воспользовался методом § 89, подобрав функцию $z = \omega(\zeta)$, отображающую область, изображенную на рис. 70, на внешность единичного круга $|\zeta| > 1$ следующим образом. Для получения достаточно точного описания поля напряжений и деформаций в окрестности концов трещины Бови взял производную отображающей функции в виде

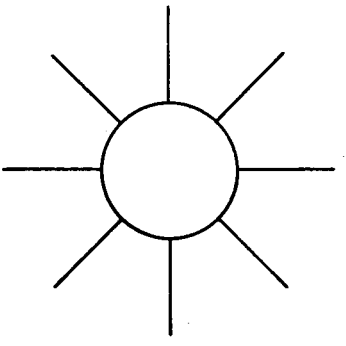


Рис. 70.

$$\omega'(\zeta) = (1 - \zeta^{-k})\, g(\zeta), \tag{10}$$

где $g(\zeta)$ — полином, все нули которого лежат внутри единичного круга. Используя далее приближенное полиномиальное представление функции $\Phi(\zeta)$, автор получил из условия обращения в нуль коэффициентов при положительных степенях лорановского разложения $\Psi(\zeta)$ систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов этого полиномиального представления. Для обеспечения удовлетворительной точности численных расчетов Бови пришлось удерживать около тридцати членов в представлении отображающей функции (численные расчеты были выполнены для случаев $k = 1$ и $k = 2$). На основе полученного приближенного решения Бови вычислил изменение потенциальной энергии тела из-за наличия трещин и определил критические напряжения, при которых трещины становятся подвижно-равновесными.

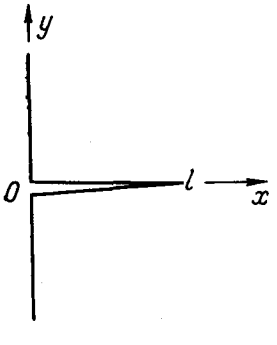


Рис. 71.

Задача о прямолинейной трещине, выходящей на прямолинейную свободную границу полуплоскости (рис. 71), была независимо рассмотрена в работах Уиглсуэрта (Wigglesworth [1]) и Ирвина (Irwin [5]). Уиглсуэрт исследовал случай произвольного распределения нормальных и касательных напряжений по краям трещины. При симметричном распределении напряжений, используя методы, аналогичные методам отдела II гл. 6, он привел задачу к интегральному уравнению для функции $w(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — упругие смещения точек верхнего края

трещины:

$$\int_0 L(x, t)\, w(t)\, dt = -\frac{4(1-\sigma^2)}{E} \int_0^x p(x)\, dx; \qquad (11)$$

$L(x, t)$ — некоторое сингулярное ядро, а $p(x)$ выражается через заданные на разрезе распределения напряжений. Уравнение (11) решается автором методом интегральных преобразований; подробные вычисления делаются для частного случая постоянных нормальных напряжений и касательных напряжений, равных нулю. Результаты вычислений дают возможность определить коэффициенты интенсивности напряжений и используя условие (18) § 165, найти критические напряжения.

Ирвин (Irwin [5]) исследовал только частный случай, когда граница полуплоскости и трещина свободны от напряжений, а на бесконечности приложены постоянные напряжения, параллельные границе полуплоскости. Он представил искомое решение в виде суммы трех полей, первое из которых соответствует трещине в безграничном теле под действием постоянных растягивающих напряжений на бесконечности, второе — такой же трещине под действием приложенных на ее поверхности симметрично распределенных по закону $Y_y = Q(x)$ нормальных напряжений, третье — полуплоскости $x \geqslant 0$ без трещины, на границе которой $x = 0$ задано симметричное относительно оси x распределение нормальных напряжений $X_x = P(y)$. Удовлетворяя граничным условиям на свободной границе и краях трещины, Ирвин получил для функций $Q(x)$ и $P(y)$ систему интегральных уравнений, которую решал методом последовательных приближений. На основе полученного решения Ирвин нашел выражение для коэффициента интенсивности напряжений и тем самым для критических напряжений. Более полное, чем в работе Бови (Bowie [1]) решение для случая одной трещины, выходящей на границу круговой полости, свободной от напряжений, было дано в работе Уиглсуэрта (Wigglesworth [2]). Уиглсуэрт предполагал, что на поверхности трещины действуют распределенные по произвольному закону нормальные и касательные напряжения, и, используя методы, аналогичные развитым в отделе III гл. 6 (см. также монографию Грина и Зерна (Green and Zerna [1]), привел задачу к сингулярному интегральному уравнению, которое решал методом интегральных преобразований.

Бюкнер (Bueckner [2]) независимо от Уиглсуэрта рассмотрел задачу об одной прямолинейной трещине, выходящей на границу круговой полости в бесконечном теле. На бесконечности и на границе полости напряжение не приложено, на поверхности трещины касательные напряжения отсутствуют, а нормальные — приложены симметрично и меняются по произвольно заданному закону — $p(x)$. Такая постановка задачи возникает при расчете разрыва вращающихся дисков. Как и Уиглсуэрт, Бюкнер исходил из сингулярного интегрального уравнения для поперечного смещения точек поверхности трещины. Он построил однопараметрическое

семейство точных частных решений этого уравнения, соответствующих некоторым специальным распределениям $p_n(x)$. В общем случае Бюкнер предлагает представить $p(x)$ в виде линейной комбинации $p_n(x)$:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n p_n(x),$$

причем коэффициенты α_n предлагается определять по методу наименьших квадратов или по методу коллокаций. Коэффициент интенсивности напряжений выражается через коэффициенты α_n простым соотношением. Если длина трещины много меньше радиуса круговой полости, то в пределе получается случай прямолинейной границы. Расчеты Бюкнера для этого частного случая при $p(x) \equiv \text{const}$ хорошо согласуются с результатами расчетов Уиглсуэрта (Wigglesworth [1]) и Ирвина (Irwin [5]).

В той же работе Бюкнер рассмотрел задачу о трещине, выходящей на поверхность бесконечно длинной полосы конечной ширины при произвольной симметричной относительно линии трещины нагрузке. Он показал, что с высокой степенью точности можно заменить получающееся в этом случае интегральное уравнение уравнением с вырожденным ядром. Численное решение проведено в этой работе для случая, когда нагрузка создается пáрами, приложенными на бесконечности.

Во всех работах, рассматривавших трещины, выходящие на границу полости, полученные результаты относились к случаям, когда подвижно-равновесные трещины неустойчивы. Таким образом, при повышении нагрузок развитие начальной трещины не происходит, пока она не становится подвижно-равновесной, после чего происходит разрушение тела. Следовательно, нагрузка, при которой начальная трещина становится подвижно-равновесной, совпадает с разрушающей, что, вообще говоря, не имеет места.

Перейдем теперь к рассмотрению задач о трещинах в ограниченных телах и системах трещин. Задача о прямолинейной трещине в полосе конечной ширины была рассмотрена в работе Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [1], а также в неопубликованной работе Тэйта (R. I. Tait, см. Sneddon [3]). Трещина предполагается симметричной относительно средней линии полосы, направление ее распространения — нормальным к свободной границе. Нагрузку, поддерживающую трещину в открытом состоянии, считаем симметричной относительно линии трещины и средней линии полосы.

В соответствии с приближенным методом, указанным в § 89, в качестве первого приближения удобно взять решение задачи теории упругости для внешности периодической системы разрезов. Решение этой последней задачи в работе Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [1] получено двумя методами: предельным переходом при $n \to \infty$ из решения задачи о плоскости с одинаковыми и одинаково загруженными n разрезами, которое получается методом, изложенным в § 120, и непосредственно, путем

отображения внешности периодической системы разрезов на бесконечнолистную риманову поверхность и решения соответствующей краевой задачи. В этой же работе были проведены оценки возможности использовать первое приближение в рассмотренных задачах, а также на основе полученных решений предложены соотношения, определяющие размеры трещин при данных нагрузках.

Тэйтом решение рассматриваемой задачи было получено в рядах с использованием метода решения соответствующих дуальных интегральных уравнений, развитого Трантером (Tranter [1]). Тэйт рассмотрел также при помощи аналогичного метода в том же приближении задачу о паре симметричных и произвольно симметрично нагруженных трещин, выходящих на границу полосы. Отметим, что частные случаи задачи о трещине внутри полосы были в том же приближении рассмотрены ранее: случай равномерной нагрузки был рассмотрен Вестергардом (Westergaard [1]) и независимо Койтером (Koiter [1]), который построил решение с помощью предельного перехода при $n \to \infty$ из решения задачи о плоскости с одинаковыми разрезами, подвергнутой на бесконечности однородному растягивающему напряжению. Задача о периодической системе трещин, поддерживаемых равными и противоположно направленными сосредоточенными силами, приложенными в противоположных точках поверхности трещин, была решена Ирвином (Irwin [2, 3]) путем непосредственного подбора комплексного потенциала Вестергарда (см. стр. 112).

Был рассмотрен также ряд задач о системах прямолинейных трещин, расположенных вдоль одной прямой. Как видно, методы, изложенные в § 120, позволяют свести к квадратурам решение любой подобной задачи. Одной из простейших задач такого типа является задача о развитии системы из двух коллинеарных прямолинейных трещин одинаковой длины в бесконечном теле, растягиваемом на бесконечности однородными напряжениями. Эта задача была рассмотрена Уилмором (Willmore [1]) и позднее В. В. Панасюком и Б. Л. Лозовым [1]; в работе Винна и Вундта (Winne and Wundt [1]) дано неправильное решение этой задачи.

В работе Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [1] дано решение задачи о двух равных коллинеарных трещинах при одинаковой произвольной симметричной нормальной нагрузке, приложенной на поверхности трещин, полученное методом § 120. Численные расчеты в этой работе проведены для случая, когда нагрузка представляет собой сосредоточенную силу. Эта же задача была рассмотрена в работе Трантера (Tranter [2]) методом преобразований Фурье путем надлежащего обобщения техники дуальных интегральных уравнений. В работе В. В. Панасюка и Б. Л. Лозового [2] методом § 120 рассмотрена задача о системе двух коллинеарных трещин неравной длины в бесконечном теле, растягиваемом приложенным на бесконечности однородным напряжением.

В работе В. В. Панасюка и Б. Л. Лозового [3] рассмотрены задачи об изгибе полосы при наличии в ней поперечных трещин. Исследованы

частные случаи чистого изгиба полосы с трещиной, изгиба консольной балки с трещиной, изгиба балки с равномерно распределенной нагрузкой. Как и в работе Бюкнера (Bueckner [2]), решение строилось приближенно в смысле п. 5 § 82; учитывалось, что часть поверхности трещины смыкается, причем на участке смыкания возникают касательные напряжения, подчиняющиеся закону Кулона. Задачи в упомянутом приближении приведены авторами к сингулярному интегральному уравнению; границы участка контакта определены из условия конечности напряжений, рассмотренного в § 116. Из условия (18) § 165 найдены предельные нагрузки, при которых трещина становится подвижно-равновесной; ввиду неустойчивости подвижного равновесия для всех рассмотренных задач эти предельные нагрузки совпадают с разрушающими.

В работе Койтера (Koiter [2]) исследована задача о бесконечном ряде параллельных трещин в однородном поле напряжений сдвига. В случае, когда расстояние между трещинами $2b$ велико сравнительно с длиной трещин $2c$, автор получает приближенное решение, суммируя надлежащим образом решения для изолированных трещин (§ 120) и осуществляя затем разложение в ряд по малому параметру c/b. В противоположном случае, когда расстояние между трещинами мало сравнительно с длиной трещин, приближенное решение приводится автором к решению смешанной задачи теории упругости для бесконечной полосы, которое получается путем применения преобразования Фурье и использования для решения получающегося уравнения метода Винера — Хопфа. Численные расчеты показали, что при расчете упругой энергии полученные асимптотики с большой точностью совпадают на некотором интервале значений отношения длины трещин к расстоянию между ними, что позволяет ограничиться этими асимптотиками для расчета упругой энергии и, следовательно, критических напряжений во всем диапазоне значений параметра c/b.

В связи с теорией трещин большой интерес представляет так называемая задача о расклинивании: задача о развитии трещин в упругом теле при забивании в него жесткого клина. Задача о расклинивании представляет собой смешанную задачу теории упругости и к настоящему времени рассмотрена только для бесконечного тела. Наиболее характерным свойством расклинивания является то, что поверхность клина никогда полностью не соприкасается с телом: в передней части клина всегда имеется свободный участок и перед клином образуется свободная трещина, которая смыкается на некотором расстоянии от передней точки клина (рис. 72).

Задача о расклинивании бесконечного тела неподвижным клином была рассмотрена в работах Г. И. Баренблатта и С. А. Христиановича [1], Г. И. Баренблатта [4] и Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [2].

Предполагается, что однородное изотропное тело расклинивается тонким, симметричным, абсолютно жестким полубесконечным клином, имеющим на бесконечности толщину $2h$ (рис. 72а, б). Впереди клина образуется свободная трещина, которая плавно смыкается в некоторой точке O;

положение точки O относительно передней точки клина C заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения задачи. Если клин имеет закругленную переднюю часть (рис. 72 а), то положение точек схода клина с поверхности трещины заранее неизвестно и также должно быть определено в ходе решения задачи. Если же клин имеет срезанную переднюю часть (рис. 72 б), как, например, в случае клина постоянной толщины, то положение точек схода вполне определено: они совпадают с углами передней части клина. Однако напряжения в точках схода в этом случае бесконечны.

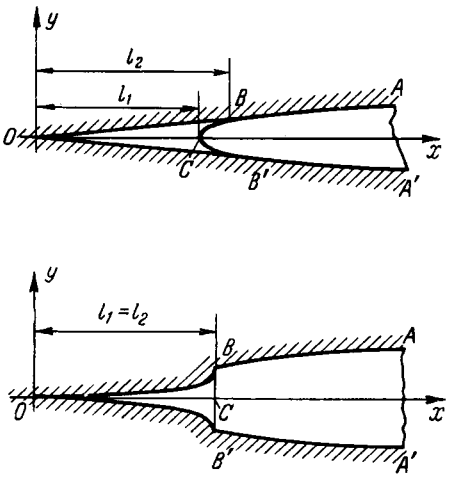


Рис. 72 а и б.

Поле упругих напряжений и деформаций удовлетворяет во внешности трещины уравнениям теории упругости. Ввиду сделанного предположения о тонкости клина можно снести граничные условия со всей линии трещины на ось Ox (рис. 72 а и б). Если считать, что силы трения на линии соприкосновения клина с расклиниваемым телом равны нулю, граничные условия без учета сил, действующих в концевой области трещины, записываются в виде

$$\begin{aligned} X_y = 0, \quad Y_y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l_2, \quad y = 0), \\ v = \pm f(x - l_1), \quad X_y = 0 \quad (l_2 \leqslant x < \infty, \quad y = 0), \end{aligned} \tag{12}$$

где l_1 и l_2 — расстояния от точки смыкания трещины соответственно до передней точки клина и до точек схода поверхности трещины с клина; $f(t)$ — функция, определяющая уравнение поверхности клина в системе координат с началом в передней точке клина, знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза.

Как видно, задача о расклинивании представляет собой смешанную задачу, являющуюся своеобразной комбинацией контактной задачи теории упругости и задачи теории трещин.

Положение точек схода поверхности трещин с клина в случае клина с закругленной передней кромкой и положение точки смыкания берегов трещины относительно передней точки клина определяются из следующих двух условий:

1°. Напряжения в точках схода поверхности трещины с клина должны быть конечными. Это условие аналогично соответствующему условию для контактной задачи, сформулированному в § 116.

2°. Напряжения в конце трещины конечны, или, что то же, имеет место плавное смыкание противоположных берегов трещины на ее конце. Так

как интенсивность сил сцепления в конце трещины максимальна, растягивающее напряжение Y_y вблизи конца трещины, вычисленное без учета сил сцепления, должно стремиться к бесконечности согласно формуле (19) § 165.

В цитированных выше работах было дано решение поставленной задачи двумя методами. Согласно первому методу она сводится при помощи результатов § 95 к интегральному уравнению Фредгольма первого рода и затем к сингулярному интегральному уравнению и некоторому условию на бесконечности. Решение сингулярного интегрального уравнения, удовлетворяющее упомянутому условию, находится сразу. Согласно второму методу решение задачи приводится к решению смешанной задачи теории аналитических функций для полуплоскости, которое легко получается применением формулы Келдыша — Седова (см. Мусхелишвили [25]).

Сформулированные выше два условия приводят к следующей системе уравнений для определения неизвестных констант l_1 и l_2:

$$\begin{aligned} h &= \int_{l_2}^{\infty} f'(t-l_1)\sqrt{\frac{t}{t-l_2}}\,dt, \\ h &= \int_{l_2}^{\infty} f'(t-l_1)\sqrt{\frac{t-l_2}{t}}\,dt + \frac{2K\sqrt{l_2}\,(1-\sigma^2)}{E}. \end{aligned} \tag{13}$$

В частности, когда толщина клина постоянна, первое условие (13) не имеет места и заменяется условием $l_1 = l_2 = l$, второе условие дает выражение для длины свободной трещины перед забиваемым клином:

$$l = \frac{E^2h^2}{4(1-\sigma^2)^2K^2}. \tag{14}$$

В работе Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [2] рассмотрены также другие частные формы клина: клин с малым закруглением в передней части и клин, закругленный по степенному закону. Исследование первого из названных примеров показало, что малое закругление оказывает незначительное влияние на длину свободной трещины перед клином. В этой работе исследован также случай, когда на щеках клина действуют силы кулонова трения.

И. А. Маркузон [1] рассмотрел задачу о расклинивании бесконечного тела клином конечной длины. Численные расчеты проведены И. А. Маркузоном для случая клина постоянной толщины. В этой работе исследовано также влияние однородного сжимающего или растягивающего напряжения на бесконечности на длину свободной трещины, образующейся при расклинивании тела клином конечной длины.

Г. П. Черепанов [1] рассмотрел и в замкнутом виде решил некоторую задачу линейного сопряжения для двух функций, к которой, в частности, сводится общая смешанная задача плоской теории упругости для внешности произвольной системы прямолинейных разрезов, расположенных вдоль

одной прямой, и, следовательно, многие задачи теории трещин. Г. П. Черепановым рассмотрен конкретный пример задачи о расклинивании упругого тела полубесконечным клином постоянной толщины, на поверхности которого имеет место полное сцепление клина с расклиниваемым телом, а не проскальзывание, соответствующее ранее рассмотренному случаю отсутствия сил трения на щеках клина. Выражение для длины свободной трещины получено Г. П. Черепановым в весьма простом конечном виде; расчеты показали, что изменение длины трещины вследствие полного сцепления незначительно.

VII. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ

За время, прошедшее после выхода предыдущего издания этой книги, появилось довольно значительное число работ, продолжавших исследование кручения и изгиба призматических брусьев. Мы ограничимся лишь краткой информацией об этих работах, имея в виду, что в самое последнее время вышла книга Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [1], специально посвященная проблемам кручения упругих тел, содержащая подробный обзор литературы. Следует также отметить монографии Цан Вэй-чана, Линь Хун-суня, Ху Хай-чана и Е Кай-юаня [1] и Вебера и Гюнтера (Weber u. Günther [1]), посвященные проблемам кручения стержней.

§ 167. Однородные брусья. Как было показано в § 132 настоящей книги, решение задачи кручения призматического бруса, который имеет продольные (цилиндрические) полости, можно свести к отысканию гармонической в области сечения функции $\psi(x, y)$ по граничному условию

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_k \text{ на } L_k \tag{1}$$

($k = 1, 2, \ldots, m+1$; $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$ составляют полную границу сечения) или, что то же самое, к отысканию однозначной аналитической функции $f(\zeta) = iF(\zeta)$ ($F(\zeta)$ — так называемая комплексная функция кручения) по граничному условию

$$f(t) + \overline{f(t)} = |t|^2 + c_k \text{ на } L_k; \tag{2}$$

C_k (c_k) — действительные постоянные, одну из которых можно зафиксировать произвольно.

Аналогично задачу изгиба поперечной силой для таких брусьев можно свести (§ 138) к отысканию аналитической (вообще говоря, неоднозначной) функции $f(\zeta)$ по граничному условию

$$f(t) + \overline{f(t)} = \lambda_k(t) + c_k \text{ на } L_k, \tag{3}$$

где c_k — действительные постоянные, одну из которых можно зафиксировать произвольно, а $\lambda_k(t)$ — заданные функции:

$$\lambda_k(t) = -(2+\sigma)\frac{y^3}{3} - \sigma x^2 y + 4(1+\sigma)\int xy\,dx.$$

Д. И. Шерман предложил метод эффективного решения этих задач для двусвязных областей определенного вида, заключающийся в следующем [1]): на одном из контуров, ограничивающих область сечения, вводится вспомогательная функция, для определения которой строится интегральное уравнение типа Фредгольма, которое затем решается при помощи разложения вспомогательной функции в ряд по степеням параметра, характеризующего частично размеры сечения, главным образом сравнительную близость граничных контуров; для решения задачи с высокой степенью точности оказалось достаточным найти незначительное число приближений. В работах Д. И. Шермана [40], [41], [44—47], Д. И. Шермана и М. З. Народецкого [1] этим методом решены задачи кручения и изгиба брусьев, поперечные сечения которых являются двусвязными областями, ограниченными окружностью и эллипсом, окружностью и квадратом с закругленными вершинами, неконфокальными эллипсами и т. п. В работе Р. Д. Степанова и Д. И. Шермана [1] изучено кручение круглого бруса, ослабленного двумя продольными цилиндрическими круговыми полостями. В работе Д. И. Шермана [43] изучены бесконечные системы линейных уравнений, построенные для решения задач, рассмотренных в упомянутых выше работах (Шерман [40], Степанов и Шерман [1]).

Этому же кругу вопросов (кручению и изгибу брусьев, поперечными сечениями которых являются двусвязные области) посвящены работы: Аменздде [1—4, 6—9], Бахтияров [1], Исмаилов [1] и др.

В работе Якоба (Jacob [1]) задача кручения трактуется как видоизмененная задача Дирихле, решение которой было дано в работах Якоба и Мусхелишвили; в той же работе задача кручения решена в явном виде (в квадратурах) для кругового цилиндра, имеющего радиальные трещины.

Как было указано в § 134 настоящей книги, задача кручения может считаться решенной, если (в случае односвязной области) мы сумеем отобразить область сечения на круг [2]). В этом направлении отметим работы: А. В. Батырева [1], Е. А. Ширяева [1, 2], Басали (Bassali [3]), Гамбургера, Динка, Маня (Hamburger, Dinca, Manea [1]), Герцига (Herzig [1]) и др., в которых задача кручения решается для односвязных областей частного вида; иногда для этой цели удобно использовать отображение на полукруг; см. работы Дейча (Deutsh [1, 2, 5]). В случае двусвязной области такую же существенную роль играет отображение на круговое кольцо (причем часто задача решается приближенно путем приближенного построения функции, реализующей конформное отображение).

М. И. Найман [2] решил задачу о кручении кругового цилиндра, имеющего отверстие в виде правильного прямолинейного многоугольника с закругленными вершинами, используя отображения, указанные выше

[1]) Об аналогичном методе уже говорилось более подробно в § 151.

[2]) То же самое справедливо, очевидно, и для задачи изгиба.

в § 154. В работе О. И. Бабаковой [2] решается задача о кручении полого стержня с использованием приближенного конформного отображения на кольцо двусвязной области определенного вида, построенного автором в другой работе (Бабакова [1]).

К этому же кругу вопросов относятся работы: Л. К. Капаняна [1], Г. А. Тирского [1], В. Н. Яковлевой [1—3], Динка и Бойку (Dinca̍, Boicu [1]), Дейча (Deutsh [3]), Морриса и Хоули (Morris a. Hawley [1]) и др.

В работах Угодчикова [7, 8] дается метод решения задач кручения брусьев с односвязным и двусвязным сечениями, связанный с электромоделированием конформного отображения.

Милн-Томсон (Milne-Thomson [2]), исходя непосредственно из равенств вида (8) § 138, изучил задачу изгиба, сведя ее к отысканию однозначной аналитической функции $\Phi(z)$ по граничному условию [1])

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dt}{ds}\Phi(t)\right] = a(t), \tag{4}$$

где $a(t) = \operatorname{Im}\left[\frac{dt}{ds}(p + q\bar{t} + rt)\,\bar{t}\right]$, p, q, r — известные постоянные.

К этой работе Милн-Томсона примыкают работы Соломона (Solomon [1, 2]) и Дейча (Deutsh [4, 6]).

§ 168. Составные брусья. В работе Д. И. Шермана [42] методом, указанным в предыдущем параграфе, решена задача кручения эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем из другого материала.

Ю. А. Аменздаде [5] решил задачу кручения бруса с квадратным сечением, армированного круговым стержнем.

И. В. Сухаревский [1] построил новые интегральные уравнения для задачи кручения составного бруса, решение которых дает непосредственно распределение касательных напряжений на границе.

В ряде работ дано эффективное решение задач кручения или изгиба составных брусьев частного вида: Кутателадзе [1], Чаттерджи (Chattarji [1]), Динка и Бойку (Dinca̍, Boicu [2]), Думитреску и Станеску Dumitrescu, Stanescu [1]) и др.

До сих пор речь шла о задачах кручения и изгиба однородных и составных брусьев, боковая поверхность которых свободна от внешних напряжений. В работах Альманси (Almansi [4]) и Мичелля (Michell [4]) была поставлена и решена задача о деформации однородного цилиндрического бруса, на боковой поверхности которого действуют внешние усилия, не

---

[1]) Задача (4) представляет собой частный случай задачи Римана — Гильберта (см. Мусхелишвили [25]); для односвязных и двусвязных областей задача (4) имеет неотрицательный индекс, в остальных случаях индекс отрицателен.

зависящие от координаты z (ось z направлена вдоль образующих цилиндра). Для случая, когда эти усилия полиномиально зависят от z, задача решена в работе (Almansi [4]) и позже — другим методом Г. Ю. Джанелидзе [1, 2].

Г. М. Хатиашвили [1—6] изучил упомянутые выше задачи для брусьев, составленных из различных материалов; он же дал эффективное решение для некоторых частных случаев.

VIII. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В последние годы методы решения плоских задач, основанные на использовании аппарата комплексного переменного, стали применяться к пространственным осесимметричным задачам определенного класса. Возможность такого применения появилась благодаря зависимостям между осесимметричными и плоскими состояниями упругого тела, которые удалось установить в явной форме при некоторых условиях.

§ 169. Метод суперпозиции плоских решений. Из данного состояния плоской деформации сплошного цилиндра можно при дополнительном условии симметрии упругих полей получить некоторое осесимметричное состояние. Достигается это путем суперпозиции плоских решений, осуществляемой вращением плоского деформированного состояния, эквивалентной с аналитической точки зрения некоторому интегральному преобразованию. Обратный переход от осесимметричного состояния к вспомогательному плоскому осуществляется посредством некоторого линейного перемещения данного осесимметричного состояния.

Установление этих связей в аналитической форме позволяет (А. Я. Александров; см. ниже) выразить напряжения и смещения осесимметричного состояния через аналитические функции комплексного переменного, а это дает в свою очередь возможность свести осесимметричные задачи упругого равновесия к граничным задачам теории аналитических функций. К этим последним задачам в ряде случаев можно применить метод степенных рядов. При помощи этих же комплексных представлений осесимметричного напряженного состояния удается в частных случаях, например для шара и пространства с шаровой полостью, получить решение основных задач в замкнутой форме (в квадратурах). С этими и некоторыми другими результатами применения теории аналитических функций к пространственным задачам теории упругости можно познакомиться по работам А. Я. Александрова [1—6], А. Я. Александрова и В. С. Вольперта [1], А. Я. Александрова и Ю. И. Соловьева [1], В. И. Моссаковского [1] и Н. А. Ростовцева [1, 2]. Укажем еще на работу М. Я. Беленького [2], где используется идея Вебера (Weber [1]) о преобразовании функции Эри в функцию напряжения для осесимметричного случая.

§ 170. Применение p-аналитических функций. В задачах о напряженном состоянии в условиях осевой симметрии Г. Н. Положим [4, 5] были использованы так называемые p-аналитические функции комплексного переменного. Пусть пара действительных функций $u_1(r, \xi)$, $v_1(r, \xi)$ от действительных переменных r, ξ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{p}\frac{\partial v_1}{\partial r},$$

где p — заданная функция от тех же аргументов. Функция вида $f(\zeta) = u_1 + iv_1$ называется p-аналитической функцией от комплексного аргумента $\zeta = r + i\xi$ с характеристикой p.

Если в условиях осевой симметрии обозначить через r, θ, ξ цилиндрическую систему координат, то, как показал Г. Н. Положий [4], комбинацию $2\mu(ru + iw)$, где u, w — компоненты вектора смещений в направлении осей r и ξ, можно выразить через две произвольные p-аналитические функции от $\zeta = r + i\xi$ с характеристикой $p = 1/r$ по формуле, вполне аналогичной представлению Колосова — Мусхелишвили для случая плоской деформации. Эта формула после использования соответствующим образом определенных аналогов интегралов типа Коши для p-аналитических функций позволяет свести решение основных граничных задач в рассматриваемом случае к решению некоторых одномерных интегральных уравнений относительно граничных значений p-аналитических функций комплексного переменного.

Г. Н. Положим были также установлены формулы, позволяющие выразить друг через друга элементы напряженного состояния для случаев осевой симметрии и плоского случая. Путем сведения к плоской задаче решение ряда задач о напряжениях в условиях осевой симметрии было найдено в замкнутом виде. Для ознакомления с этим кругом вопросов мы отсылаем читателя к названным выше работам Г. Н. Положего [4, 5], а также к работам Г. Н. Положего и В. С. Чемериса [1, 2], Г. Н. Положего и О. М. Капшивого [1] и В. С. Чемериса [1, 2].

Добавления

ДОБАВЛЕНИЕ I

О ПОНЯТИИ ТЕНЗОРА

1. Тензорное исчисление быстро завоевывает себе место в современной математике, как чистой, так и прикладной, и начинает проникать в техническую литературу, в частности в литературу по теории упругости.

Поэтому мы считаем необходимым дать по крайней мере самые элементарные сведения о понятии *тензора*, ограничиваясь для простоты применением исключительно прямоугольных координат [1]). Чтобы сделать более естественным приводимое ниже определение тензора, начнем с некоторых замечаний относительно понятия вектора (вектор есть частный вид тензора, а именно тензор первого ранга).

Будем считать известным обычное геометрическое определение вектора как отрезка, имеющего направление.

Будем, далее, обозначать оси координат не через Ox, Oy, Oz, как в элементарной аналитической геометрии, а через Ox_1, Ox_2, Ox_3. В соответствии с этим компоненты вектора $\boldsymbol{P}$ будем обозначать не через ξ, η, ζ, как в тексте книги, а через ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Мы будем обращать внимание только на длину и направление вектора, а не на положение начала; таким образом, будем считать вектор вполне заданным, если даны его компоненты ξ_1, ξ_2, ξ_3 (проекции на оси координат). Вектор $\boldsymbol{P}$ с компонентами ξ_1, ξ_2, ξ_3 мы будем обозначать так: (ξ_1, ξ_2, ξ_3) или, еще короче, так: (ξ_i); индекс i принимает значения 1, 2, 3.

Итак, вектор в пространстве характеризуется *тремя* скалярными величинами.

Существует много физических и геометрических величин, которые *при данном выборе осей координат* также характеризуются тремя скалярными величинами, например: скорость, сила (приложенная к данной точке) и пр. Но не всякую из них целесообразно представлять вектором, как это мы, например, делаем со скоростью или силой. Дело в следующем. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — числа, характеризующие данную физическую величину *при данном выборе осей координат*. Мы, конечно, всегда можем

---

[1]) Надо, впрочем, отметить, что главные преимущества тензорного исчисления выступают как раз при применении криволинейных координат общего вида.

построить вектор

$$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$$

с компонентами ξ_1, ξ_2, ξ_3 и сказать, что он изображает данную физическую величину *при данном выборе осей координат*. Но это соответствие между данной физической величиной и вектором может нарушиться при замене одной системы осей координат другими. А именно, может случиться, что числа ξ_1', ξ_2', ξ_3', характеризующие нашу физическую величину в новой системе координат, не совпадут с компонентами вектора $\boldsymbol{P}$ в этой новой системе, и вектор $\boldsymbol{P}'$, имеющий (в новой системе) компоненты ξ_1', ξ_2', ξ_3', может быть отличным от $\boldsymbol{P}$. Для того, чтобы представление нашей физической величины вектором не зависело от случайного выбора системы осей координат, очевидно надо, чтобы при переходе от одной системы осей к другой величины ξ_1, ξ_2, ξ_3, характеризующие физическую величину, изменялись по тому же закону, что и компоненты вектора. Только в этом случае мы будем говорить, что данная физическая величина представлена вектором или что она — векторная величина. Векторную величину мы будем часто называть просто вектором, отождествляя ее с вектором, который ее представляет.

Вспомним теперь закон изменения компонент вектора при переходе от одной системы к другой. Изменим несколько обозначения, принятые в книге. Именно, косинусы углов осей старой и новой систем будем теперь обозначать так:

	x_1	x_2	x_3
x_1'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
x_2'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
x_3'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

(А)

Тогда соотношения, связывающие новые компоненты ξ_1', ξ_2', ξ_3' вектора $\boldsymbol{P}$ со старыми ξ_1, ξ_2, ξ_3, напишутся так:

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{3} l_{ik}\xi_i', \qquad \xi_i'=\sum_{k=1}^{3} l_{ik}\xi_k \tag{1}$$

Между элементами таблицы (А) существуют следующие известные соотношения:

$$\sum_{i=1}^{3} l_{ki}l_{mi}=\delta_{km}, \qquad \sum_{i=1}^{3} l_{ik}l_{im}=\delta_{km}, \tag{2}$$

где символ δ_{km} имеет следующее значение: $\delta_{km}=1$, если $k=m$, и $\delta_{km}=0$, если $k\neq m$.

Рассмотрим теперь два вектора:

$$\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\ \text{и}\ \boldsymbol{P}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3).$$

Скалярное произведение этих векторов определяется формулой

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=\sum_{i=1}^{3}a_i\xi_i.$$

На основании известного определения скалярного произведения [1])

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}=A\cdot P\cdot\cos(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P})$$

видим, что оно не зависит от выбора осей координат, т. е. что

$$a_1'\xi_1'+a_2'\xi_2'+a_3'\xi_3'=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3. \tag{3}$$

Читатель легко проверит это также непосредственно, применяя формулы (1) и (2).

Обратно, если a_1, a_2, a_3 суть три числа, связанные с осями координат так, что *линейная форма*

$$F=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=\sum_{i=1}^{3}a_i\xi_i, \tag{4}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — компоненты *произвольного* вектора, инвариантна при переходе от одной системы осей к другой, то тройка чисел (a_1, a_2, a_3) представляет собой векторную величину (т. е. вектор). Для того, чтобы это показать, достаточно проверить, что величины a_1, a_2, a_3 преобразуются при переходе от одной системы осей к другой по тому же закону (1), что и компоненты вектора. Сделаем эту проверку. Имеем по условию:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i'\xi_i'=\sum_{k=1}^{3}a_k\xi_k;$$

внося в правую часть вместо ξ_k выражение (1), получаем:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i'\xi_i'=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_k l_{ik}\xi_i'=\sum_{i=1}^{3}\xi_i'\sum_{k=1}^{3}l_{ik}a_k.$$

Так как предыдущее равенство должно быть справедливым при всяких значениях ξ_1', ξ_2', ξ_3', то коэффициенты при ξ_i' должны быть равны:

$$a_i'=\sum_{k=1}^{3}l_{ik}a_k,$$

что совпадает со второй из формул (1), если вместо a писать ξ. Таким образом, наше предложение доказано. Итак: *если линейная форма*

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\xi_i$$

инвариантна при замене координат, причем ξ_i *суть компоненты некоторого произвольного вектора, то и* a_i *суть компоненты некоторого вектора.*

---

[1]) Буквами A, P обычного шрифта мы обозначаем длины векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$, а через $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P})$ — угол между ними.

2. Положив в основу обобщения понятия вектора только что указанное его свойство, мы придем естественным путем к понятию тензора. А именно, вместо линейной формы (4) п. 1 рассмотрим *билинейную форму*

$$F=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\xi_i\eta_j=\sum_{i,\,j=1}^{3}a_{ij}\xi_i\eta_j=a_{11}\xi_1\eta_1+a_{12}\xi_1\eta_2+a_{13}\xi_1\eta_3+$$
$$+a_{21}\xi_2\eta_1+a_{22}\xi_2\eta_2+a_{23}\xi_2\eta_3+$$
$$+a_{31}\xi_3\eta_1+a_{32}\xi_3\eta_2+a_{33}\xi_3\eta_3, \qquad (1)$$

зависящую линейно от компонент каждого из *двух* векторов:

$$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{Q}=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3).$$

Потребуем от коэффициентов a_{ij} этой формы, чтобы при переходе от одной системы осей к другой они изменялись по закону, оставляющему форму F инвариантной. При этом условии мы будем говорить, что *совокупность девяти величин* a_{ij}, зависящих от двух индексов i, j, *представляет тензор второго* (по числу индексов) *ранга*; a_{ij} называются *компонентами* этого тензора (относительно данной системы осей). Тензор этот будем обозначать символом (a_{ij}).

Легко на основании определения найти закон изменения компонент a_{ij} при замене системы координат. Пусть a'_{ij}, ξ'_i, η'_i — компоненты тензора (a_{ij}) и векторов $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ в новой системе. По определению имеем:

$$\sum_{i,\,j=1}^{3}a'_{ij}\xi'_i\eta'_j=\sum_{k,\,m=1}^{3}a_{km}\xi_k\eta_m.$$

Внося в правую часть выражения

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{3}l_{ik}\xi'_i, \qquad \eta_m=\sum_{j=1}^{3}l_{jm}\eta'_j,$$

получаем после перестановки знаков суммирования:

$$\sum_{i,\,j=1}^{3}a'_{ij}\xi'_i\eta'_j=\sum_{i,\,j=1}^{3}\xi'_i\eta'_j\sum_{k,\,m=1}^{3}l_{ik}l_{jm}a_{km},$$

откуда, сравнивая коэффициенты при произведениях $\xi'_i\cdot\eta'_j$, имеем:

$$a'_{ij}=\sum_{k,\,m=1}^{3}l_{ik}l_{jm}a_{km}. \qquad (2)$$

Это и есть искомые формулы преобразования.

Тензор второго ранга называется *симметричным*, если $a_{ij}=a_{ji}$. Легко видеть на основании формулы (2), что это свойство симметричности сохраняется при переходе от одной системы координат к другой.

В случае симметричного тензора можно для его определения пользоваться, вместо билинейной формы (1), квадратичной формой 2Ω $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, которую получим из F, полагая $\xi_i=\eta_i$. Тогда мы получим определение, данное в § 5 настоящей книги (примечание на стр. 26). Формулы пре-

образования для компонент тензора напряжения, данные в § 5, совпадают с формулами (2), если последние переписать в старых обозначениях.

Простейшим симметричным тензором является тензор (δ_{ij}), определяемый формулой:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Что (δ_{ij}) есть тензор, видно из того, что выражение

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} \delta_{ij}\xi_i\eta_j = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

есть, очевидно, инвариант (скалярное произведение векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$). Тензор (δ_{ij}) называется *единичным*.

Тензор называется *антисимметричным*, если $a_{ij} = -a_{ji}$. Так как в частности, по условию, должно быть: $a_{ii} = -a_{ii}$, то в антисимметричном тензоре $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Таким образом, антисимметричный тензор характеризуется всего тремя величинами: p_1, p_2, p_3, где для краткости положено:

$$p_1 = a_{32} = -a_{23}, \quad p_2 = a_{13} = -a_{31}, \quad p_3 = a_{21} = -a_{12}.$$

Легко видеть на основании (2), что свойство антисимметричности сохраняется при замене одной системы осей другой.

3. Два тензора (a_{ij}) и (b_{ij}) называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$. *Суммой* тензоров (a_{ij}) и (b_{ij}) называется тензор (c_{ij}), компоненты которого равны суммам соответствующих компонент данных тензоров:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Что (c_{ij}) есть тензор, следует из того, что

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} c_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\xi_i\eta_j + \sum_{i,\,j=1}^{3} b_{ij}\xi_i\eta_j.$$

Так как слагаемые правой части инвариантны, то и левая часть инвариантна, а это и доказывает тензорный характер совокупности величин c_{ij}. Аналогично определяется разность.

Если (a_{ij}) есть тензор, то величины $a^*_{ij} = a_{ji}$ определяют некоторый тензор (a^*_{ij}); это также следует непосредственно из определения тензора.

Всякий тензор (a_{ij}) может быть (единственным образом) представлен как сумма симметричного тензора (e_{ij}) и антисимметричного (p_{ij}). Действительно, положим: $a_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$. Переставляя значки i, j и замечая, что, по условию, $e_{ji} = e_{ij}$, $p_{ji} = -p_{ij}$, получаем: $a_{ji} = e_{ij} - p_{ij}$. В соединении с предыдущим равенством это дает:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad p_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \tag{1}$$

Легко видеть, что тензоры (e_{ij}) и (p_{ij}) удовлетворяют поставленным условиям.

Приведем несколько примеров тензоров.

Пусть (a_i) и (b_i) — два вектора. Положим: $c_{ij} = a_i b_j$. Совокупность величин c_{ij} есть тензор. Действительно, пусть (ξ_i), (η_i) — два произвольных вектора. Имеем:

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} c_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_i b_j \xi_i \eta_j = \sum_{i=1}^{3} a_i\xi_i \cdot \sum_{j=1}^{3} b_j\eta_j.$$

Правая часть есть инвариант (произведение двух инвариантов). Следовательно, и левая часть есть инвариант, а это и доказывает утверждение.

Мы знаем, что (c^*_{ij}), где $c^*_{ij} = c_{ji} = a_j b_i$, есть также тензор. Следовательно, если положить

$$p_{ij} = c^*_{ij} - c_{ij} = a_j b_i - a_i b_j, \tag{2}$$

то (p_{ij}) есть также тензор, очевидно антисимметричный.

Этот тензор называется *векторным произведением двух данных векторов*. В векторном исчислении векторное произведение рассматривается не как тензор, а как вектор. Чтобы сделать это понятным, заметим следующее. Введем обозначения:

$$p_1 = p_{32} = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad p_2 = p_{13} = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad p_3 = p_{21} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{3}$$

Посмотрим, будет ли совокупность величин (p_1, p_2, p_3) вектором. Для этого применим критерий, указанный в конце п. 1 настоящего Добавления, т. е. рассмотрим произвольный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и проверим, будет ли выражение

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3$$

инвариантом. Очевидно, имеем:

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Но из аналитической геометрии известно, что предыдущий определитель представляет собой объем параллелепипеда, построенного на векторах (ξ_i), (a_i), (b_i); при этом объем этот снабжен знаком, который зависит от ориентации осей координат: объем меняет знак, когда мы переходим от левой системы осей к правой, или наоборот. Знак не будет меняться, если ограничиться только правыми или только левыми системами координат. Только при этом условии выражение (4) будет инвариантом и совокупность величин p_1, p_2, p_3 можно рассматривать как вектор, не зависящий от выбора осей координат [1]).

---

[1]) Легко показать (предоставляем это читателю), что при переходе от правой системы к левой или обратно вектор (p_1, p_2, p_3), определяемый формулами (2) и (3), будет изменять направление на обратное.

Покажем, наконец, что при только что указанном ограничении относительно выбора осей координат всякий антисимметричный тензор второго ранга может быть представлен вектором[1]). Действительно, пусть (p_{ij}) — любой антисимметричный тензор второго ранга. Составим сумму

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} p_{ij}\xi_i\eta_j = -(p_1\zeta_1 + p_2\zeta_2 + p_3\zeta_3), \tag{а}$$

где (ξ_i), (η_i) — два произвольных вектора и где положено:

$$\left.\begin{aligned} p_1 = p_{32} = -p_{23},\quad p_2 = p_{13} = -p_{31},\quad p_3 = p_{21} = -p_{12},\\ \zeta_1 = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2,\quad \zeta_2 = \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3,\quad \zeta_3 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но на основании сказанного выше $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ есть вектор. С другой стороны, левая часть формулы (а) есть инвариант. Следовательно, и правая часть есть инвариант, причем $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ — произвольный вектор. Значит, (p_1, p_2, p_3) есть вектор, а это и требовалось доказать.

4. Аналогично тому, как мы ввели понятие тензора второго ранга, можно ввести понятие тензора любого ранга n. Для этого достаточно ввести в рассмотрение, вместо билинейной формы, n-линейную форму, линейно зависящую от компонент каждого из n произвольных векторов.

Например, совокупность коэффициентов a_{ijk} трилинейной формы

$$F = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k,$$

где ξ_i, η_i, ζ_i — компоненты трех произвольных векторов, определяет *тензор третьего ранга* (a_{ijk}), компонентами которого являются числа a_{ijk}. Так же определяется тензор любого ранга n. Вектор с этой точки зрения следует рассматривать как тензор первого ранга, который определяется при помощи линейной формы

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\xi_i.$$

5. Вернемся к тензору второго ранга (a_{ij}). Пусть (ξ_i) — некоторый вектор. Составим выражения:

$$\xi_i^* = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\xi_j. \tag{1}$$

Легко показать, что $(\xi_i^*) = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ есть вектор. Действительно, пусть (η_i) — произвольный вектор. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i^*\eta_i = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\eta_i\xi_j$$

есть инвариант, ибо правая часть есть инвариант на основании самого определения тензора.

---

[1]) Речь все время идет о пространстве трех измерений. В других случаях это утверждение неправильно.

Очевидно, что, обратно, если величины ξ_1^*, ξ_2^*, ξ_3^*, определяемые формулой (1), где ξ_1, ξ_2, ξ_3 представляют компоненты произвольного вектора, суть компоненты вектора, то a_{ij} суть компоненты тензора.

Итак, соотношение (1) приводит в соответствие каждому вектору (ξ_i) вполне определенный вектор (ξ_i^*). Поэтому вектор (ξ_i^*) называется *линейной векторной функцией* вектора (ξ_i), определяемой тензором (a_{ij}).

Пример такой векторной функции мы встречали в тексте книги. Именно: соотношения (2) § 3 показывают, что вектор напряжения (X_n, Y_n, Z_n), действующего на площадку с нормалью n, есть линейная векторная функция вектора $\boldsymbol{n}$, определяемая тензором напряжений. Здесь $\boldsymbol{n}$ обозначает вектор длины 1, имеющий направление нормали n.

Особый интерес представляет случай, когда тензор (a_{ij}) симметричный, т. е. когда $a_{ij} = a_{ji}$. На этом случае мы и остановимся. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\xi_i\xi_j = \\ = a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + 2a_{31}\xi_3\xi_1 + 2a_{12}\xi_1\xi_2. \qquad (2)$$

Тогда соотношения (1) можно записать так:

$$\xi_i^* = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}. \qquad (3)$$

Мы докажем важное предложение: *подходящим выбором новых осей координат*[1]) Ox_1', Ox_2', Ox_3' *всякая квадратичная форма* 2Ω может быть приведена к *«каноническому виду»*

$$2\Omega = \lambda_1\xi_1'^2 + \lambda_2\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2, \qquad (4)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — *действительные постоянные* (*мы предполагаем, что величины* a_{ij} — *действительные*). Это предложение равносильно следующему. При подходящем выборе новых осей координат можно добиться, чтобы новые компоненты a_{ij}' данного симметричного тензора (a_{ij}), имеющие различные индексы, обратились в нуль, т. е. чтобы

$$a_{23}' = a_{31}' = a_{12}' = 0$$

(остальные же, т. е. «диагональные», компоненты:

$$a_{11}' = \lambda_1, \quad a_{22}' = \lambda_2, \quad a_{33}' = \lambda_3,$$

будут при этом, вообще говоря, отличны от нуля).

Если форма 2Ω имеет указанный канонический вид, то соотношения (3) в новой системе координат сведутся к следующим:

$$\xi_1'^* = \lambda_1\xi_1', \quad \xi_2'^* = \lambda_2\xi_2', \quad \xi_3'^* = \lambda_3\xi_3'. \qquad (5)$$

Эти соотношения показывают, что если вектор (ξ_i') направлен по одной из новых осей координат, то соответствующий ему вектор $(\xi_i'^*)$ будет ему параллелен. Например, вектор (ξ_i'), параллельный оси Ox_1', имеет компо-

[1]) Речь все время идет о прямолинейных прямоугольных координатах.

ненты ξ_1', 0, 0 при $\xi_1' \neq 0$. Соответствующий ему вектор будет иметь компоненты $\xi_1'^* = \lambda_1 \xi_1'$, 0, 0, т. е. будет ему параллелен.

Поэтому, чтобы привести форму 2Ω к требуемому виду, надо прежде всего разыскать направления, обладающие указанным свойством.

Итак, поставим себе вопрос относительно соотношений (1): при каком направлении вектора (ξ_i), не равного нулю, соответствующий вектор (ξ_i^*) параллелен ему? Для того чтобы векторы (ξ_i) и (ξ_i^*) были параллельны, как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi_1^* = \lambda \xi_1, \qquad \xi_2^* = \lambda \xi_2, \qquad \xi_3^* = \lambda \xi_3,$$

где λ — некоторое число. Внося сюда значения (1) для ξ_i^*, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\,\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\,\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - \lambda)\,\xi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для того чтобы предыдущая система линейных однородных уравнений относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 допускала решение, отличное от решения $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, необходимо и достаточно, как известно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю, т. е. чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Предыдущее уравнение есть уравнение третьей степени относительно λ. Как будет показано ниже, все его корни действительны. Теперь же заметим только, что это уравнение, как уравнение нечетной степени, имеет по крайней мере один действительный корень. Обозначим его через λ_3.

Если в системе (6) придать λ значение λ_3, то эта система будет допускать такие решения, что не все ξ_i равны одновременно нулю. Пусть ξ_1^0, ξ_2^0, ξ_3^0 — одно из таких решений. Вектор (ξ_i^0) определяет такое направление, что для любого вектора (ξ_i), параллельного ему, соответствующий вектор (ξ_i^*) будет также ему параллелен.

Всякое такое направление называется *главным направлением*, соответствующим тензору (a_{ij}).

Возьмем теперь новую систему осей Ox_1'', Ox_2'', Ox_3'', направив ось Ox_3'' по найденному главному направлению. Две другие оси (перпендикулярные к этому направлению и между собой) оставим пока произвольными.

Будем обозначать компоненты тензоров и векторов относительно новой системы теми же буквами, что и раньше, но снабженными двумя штрихами. Система уравнений (6), которая кратко может быть записана

так:

$$\xi_i^* = \lambda \xi_i,$$

в новых координатах примет вид

$$\xi_i''^* = \lambda \xi_i'',$$

где

$$\xi_i''^* = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}'' \xi_j''.$$

Подробнее она перепишется так:

$$\begin{aligned}
(a_{11}'' - \lambda)\,\xi_1'' + a_{12}''\xi_2'' + a_{13}''\xi_3'' &= 0,\\
a_{21}''\xi_1'' + (a_{22}'' - \lambda)\,\xi_2'' + a_{23}''\xi_3'' &= 0,\\
a_{31}''\xi_1'' + a_{32}''\xi_2'' + (a_{33}'' - \lambda)\,\xi_3'' &= 0.
\end{aligned}$$

При $\lambda = \lambda_3$ эти уравнения должны иметь решение $(0, 0, \xi_3'')$ при $\xi_3'' \neq 0$. Отсюда следует:

$$a_{13}'' = 0, \quad a_{23}'' = 0, \quad a_{33}'' = \lambda_3.$$

Следовательно, в новой системе координат квадратичная форма 2Ω примет следующий вид:

$$2\Omega = a_{11}''\xi_1''^2 + 2a_{12}''\xi_1''\xi_2'' + a_{22}''\xi_2''^2 + \lambda_3\xi_3''^2. \tag{8}$$

Если $a_{12}'' = 0$, то цель достигнута. В противном случае достаточно, не изменяя оси Ox_3'', повернуть оси Ox_1'', Ox_2'' в их плоскости так, чтобы в выражении 2Ω исчез член с произведением $\xi_1''\xi_2''$.

Это всегда можно сделать. Действительно, пусть новые оси суть Ox_1', Ox_2', Ox_3' и пусть ось Ox_1' составляет с осью Ox_1'' угол α. Тогда мы будем иметь формулы перехода:

$$\xi_1'' = \xi_1' \cos\alpha - \xi_2' \sin\alpha, \quad \xi_2'' = \xi_1' \sin\alpha + \xi_2' \cos\alpha, \quad \xi_3'' = \xi_3'.$$

Подставляя эти выражения в формулу (8), после элементарных преобразований получаем:

$$2\Omega = a_{11}'\xi_1'^2 + 2a_{12}'\xi_1'\xi_2' + a_{22}'\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2, \tag{9}$$

где, в частности,

$$a_{12}' = -(a_{11}'' - a_{22}'')\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}''(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}(a_{11}'' - a_{22}'')\sin 2\alpha + a_{12}''\cos 2\alpha.$$

Очевидно, $a_{12}' = 0$, когда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}''}{a_{11}'' - a_{22}''}. \tag{10}$$

Если α_0 есть какой-либо угол, удовлетворяющий этому условию, то

$$\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

тоже удовлетворяет ему, а также все углы вида

$$\alpha_0 + \frac{k\pi}{2},$$

где k — целое число.

Таким образом, мы найдем две взаимно перпендикулярные оси, удовлетворяющие поставленному условию (обе эти оси перпендикулярны к оси Ox_3', совпадающей с Ox_3''). Взяв одну из них за ось Ox_1' (а перпендикулярную к ней ось за ось Ox_2'), приведем форму 2Ω к требуемому виду (4), где λ_1, λ_2, λ_3 — действительные числа. Таким образом, мы не только доказали возможность указанного приведения, но и получили способ фактически его произвести и найти направления соответствующих новых осей.

Мы знаем, что λ_3 есть один из корней уравнения (7). Покажем, что λ_1 и λ_2 суть два другие корня того же уравнения. Для этого заметим сперва, что определитель

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{11}$$

есть инвариант, т. е. не изменяется при замене осей координат (этот определитель называется *дискриминантом* квадратичной формы 2Ω). Действительно, при переходе к новым осям Ox_1', Ox_2', Ox_3' этот определитель превратится в

$$D_0' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix},$$

где в силу формул (2) п. 2 настоящего Добавления (стр. 638)

$$a_{ij}' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} l_{ik} l_{jm} a_{km} = \sum_{k=1}^{3} l_{ik} b_{kj},$$

где временно введено обозначение

$$b_{kj} = \sum_{m=1}^{3} l_{jm} a_{km}.$$

На основании известной теоремы умножения определителей имеем:

$$D_0' = \Delta \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{где } \Delta = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}.$$

На основании той же теоремы умножения:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \cdot D_0.$$

Следовательно, $D_0' = \Delta^2 D_0$. Но на основании хорошо известного свойства косинусов l_{ij}, $\Delta = \pm 1$, откуда следует $D_0' = D_0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь тензор с компонентами $A_{ik} = a_{ik} - \lambda\delta_{ik}$, где λ — произвольное число, а (δ_{ik}) — единичный тензор (см. стр. 639). Определитель, составленный из компонент тензора (A_{ik}),

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

на основании сказанного не зависит от выбора координат, т. е. D_λ есть инвариант.

Пусть теперь новые оси Ox_1', Ox_2', Ox_3' выбраны так, что новые компоненты a_{ik}' тензора (a_{ik}), имеющие различные индексы, равны нулю, а значит, квадратичная форма 2Ω принимает вид:

$$\lambda_1\xi_1'^2 + \lambda_2\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2.$$

Определитель D_λ, составленный применительно к новым осям, будет равен

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda).$$

Следовательно, будем иметь тождество

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda),$$

откуда и видно, что действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть корни уравнения

$$D_\lambda = 0.$$

Нами, таким образом, попутно доказана важная теорема алгебры, гласящая, что все корни уравнения (7), называемого вековым уравнением, действительны (при существенном предположении, что a_{ij} действительны и, кроме того, $a_{ij} = a_{ji}$).

Вернемся к рассмотрению линейной векторной функции, определяемой равенством (1), продолжая предполагать $a_{ij} = a_{ji}$. Мы видим, что всегда можно найти по крайней мере одну тройку взаимно перпендикулярных главных направлений и что, если придать координатным осям эти направления, форма 2Ω примет вид:

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \lambda_3\xi_3^2,$$

а соотношения (1) — вид:

$$\xi_1^* = \lambda_1\xi_1, \qquad \xi_2^* = \lambda_2\xi_2, \qquad \xi_3^* = \lambda_3\xi_3 \tag{12}$$

(мы теперь отбрасываем штрихи в обозначении компонент вектора относительно новой системы).

Выясним теперь вопрос, существуют ли какие-либо главные направления, отличные от трех найденных. Если (ξ_1, ξ_2, ξ_3) есть вектор, парал-

лельный какому-либо главному направлению, то на основании определения вектор (ξ_i^*) должен быть параллелен вектору (ξ_i), т. е. должно быть:

$$\xi_1^* = \lambda\xi_1, \qquad \xi_2^* = \lambda\xi_2, \qquad \xi_3^* = \lambda\xi_3.$$

На основании соотношений (12) отсюда получаем:

$$(\lambda_1 - \lambda)\,\xi_1 = 0, \qquad (\lambda_2 - \lambda)\,\xi_2 = 0, \qquad (\lambda_3 - \lambda)\,\xi_3 = 0, \tag{13}$$

откуда еще раз заключаем, что λ может иметь только одно из трех значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (иначе должно было бы быть $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$).

Предположим сперва, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны между собой. Полагая в формуле (13) $\lambda = \lambda_1$, видим, что уравнениям (13) удовлетворяют только следующие значения: $\xi_1 =$ произвольная величина, $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Таким образом, вектор (ξ_i), соответствующий $\lambda = \lambda_1$, параллелен оси Ox_1; это дает одно из возможных главных направлений (уже нам известных). Так же точно убедимся, что значениям $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_3$ соответствуют направления осей Ox_2 и Ox_3.

Таким образом, если все три корня уравнения (7) различны, мы имеем только три главных направления; эти направления взаимно перпендикулярны.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тогда при $\lambda = \lambda_3$ получим опять только одно направление, а именно направление оси Ox_3. Но при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ увидим, что решение уравнений (13) будет: $\xi_1 =$ произвольная величина, $\xi_2 =$ произвольная величина, $\xi_3 = 0$. Значит, главными направлениями, соответствующими этому значению λ, будут все направления, перпендикулярные к оси Ox_3 (и только эти направления). Из этих направлений всегда можно выбрать бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных направлений (которые будут также перпендикулярны к направлению Ox_3).

Наконец, очевидно, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ уравнения (13) удовлетворяются при всяких значениях ξ_1, ξ_2, ξ_3. Иначе говоря, в этом случае всякое направление будет главным.

ДОБАВЛЕНИЕ II

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

1. Начнем со случая двух измерений. Пусть S обозначает некоторую область на плоскости Oxy. Мы будем рассматривать только такие *связные*[1]) области, которые ограничены одним или несколькими простыми[2]) замкнутыми контурами. Такие области могут быть и бесконечными (бесконечная плоскость с отверстиями), но пока мы ограничимся рассмотрением конечных областей.

Область S называется *односвязной*, если любой разрез, проведенный от одной какой-либо точки ее границы до другой, нарушает ее связность, т. е. разбивает ее на раздельные области.

Область называется *многосвязной*, если могут быть проведены такие разрезы, которые, идя от одной точки границы до другой, не разбивают область на части.

Легко видеть, что область, ограниченная одним простым замкнутым контуром, односвязна. Напротив, область, ограниченная несколькими простыми замкнутыми контурами, многосвязна. Действительно, пусть граница области состоит из контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_{m+1}$, из которых последний охватывает все остальные (рис. 73). Если разрезать область по какой-либо линии a_1b_1, соединяющей точку a_1 контура L_1 с точкой b_1 внешнего контура L_{m+1}, то такой разрез («купюра») не нарушает ее связности.

Если, кроме a_1b_1, провести еще аналогичные разрезы $a_2b_2, \ldots \ldots a_mb_m$, не пересекающие друг друга, то связность все же не нарушается, но, как легко видеть, всякий новый разрез уже нарушит связность. Таким образом, разрезы $a_1b_1, \ldots, a_mb_m$ числом m обращают нашу область в односвязную.

Если для превращения данной области в односвязную требуется провести m разрезов, то говорят, что область $(m+1)$-связна или что ее связность равна $m+1$.

---

[1]) Область называется связной, если любые две ее точки могут быть соединены непрерывной линией, не выходящей из области.

[2]) Простым называется контур, не пересекающий сам себя.

Мы видим, что в нашем случае связность области равна числу замкнутых контуров, ее ограничивающих. Например, область, заключенная между двумя концентрическими окружностями,— двусвязная.

Односвязная область отличается от многосвязной еще следующим свойством. Если провести внутри односвязной области S любой простой замкнутый контур, то область, ограниченная этим контуром, целиком принадлежит области S; этот контур путем непрерывной деформации может быть сжат в одну точку, все время оставаясь в области.

В случае же многосвязной области существуют такие контуры, которые этим свойством не обладают. Например, на рис. 73 контур L_1' (пунктир) есть один из таких контуров: его нельзя сжать в одну точку, не разрывая его и не выводя из области S.

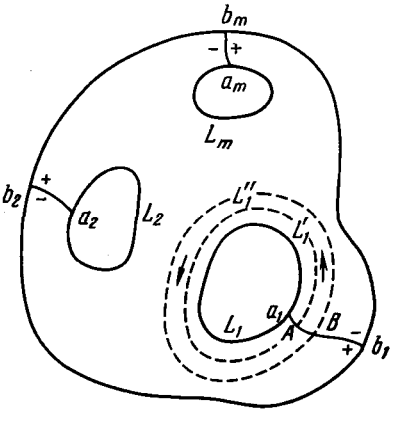


Рис. 73.

2. Пусть дано дифференциальное выражение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однозначные и непрерывные функции в некоторой области S, обладающие непрерывными производными первого порядка. Поставим себе вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции P и Q, для того чтобы выражение (1) было полным дифференциалом некоторой однозначной функции $F(x, y)$, т. е. чтобы существовала однозначная фукция $F(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$dF = P\,dx + Q\,dy \qquad (2)$$

или, что сводится к тому же, условиям

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (2')$$

Хотя этот вопрос излагается во всех, даже элементарных, курсах анализа, мы все же считаем нужным остановиться на нем, чтобы обратить внимание читателя на некоторые обстоятельства, весьма существенные для наших целей.

Предположим сперва, что область S односвязна. Возьмем в ней какую-либо постоянную точку $M_0(x_0, y_0)$ и соединим ее произвольной линией M_0M, не выходящей из S, с переменной точкой $M(x, y)$. Если функция $F(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), существует, то, интегрируя обе части этого равенства вдоль пути M_0M, получаем:

$$F(x, y) = \int_{M_0M} (P\,dx + Q\,dy) + C, \qquad (3)$$

где $C = F(x_0, y_0)$ — постоянная.

По условию, $F(x, y)$ есть однозначная функция от x, y; значит, значение ее в точке $M(x, y)$ должно зависеть только от положения M, но не от пути интегрирования M_0M. Таким образом, если функция $F(x, y)$ существует, то *криволинейный интеграл*

$$\int_{M_0M} (P\,dx + Q\,dy)$$

не должен зависеть от пути интегрирования (расположенного, разумеется, в области S). Это условие можно выразить и так: интегралы

$$\int_L (P dx + Q\,dy),$$

взятые по любым замкнутым контурам L (целиком расположенным внутри S), должны равняться нулю. Действительно, соединив какие-либо две точки A и B любого замкнутого контура L соответственно с точками M_0 и M (рис. 74), будем иметь по условию:

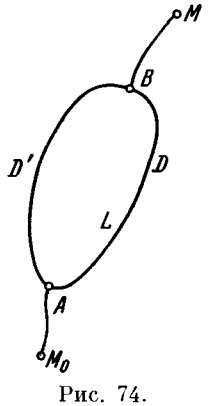


Рис. 74.

$$\int_{M_0ADBM} - \int_{M_0AD'BM} = 0;$$

но так как интегралы по линиям M_0A и BM в обоих членах левой части равны между собой, то

$$0 = \int_{ADB} - \int_{AD'B} = \int_L,$$

а это и требовалось доказать.

На основании известной формулы Остроградского — Грина имеем:

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy) = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{4}$$

где σ обозначает область, ограниченную контуром L. Из сказанного следует, что интеграл в правой части должен равняться нулю для всякой части σ области S. Значит, подынтегральная функция должна быть равной нулю в каждой точке области S, т. е. мы должны иметь:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{5}$$

во всей области S. Это есть, как мы видим, необходимое условие существования функции $F(x, y)$. Оно оказывается также *достаточным*.

Действительно, при соблюдении этого условия криволинейный интеграл

$$\int (P\,dx + Q\,dy)$$

не зависит от пути интегрирования, а только от конечной и начальной точек пути. Это непосредственно следует из предыдущего: если

A и B— две любые точки области S, а ADB и $AD'B$ — два любых пути, соединяющих эти точки, то

$$\int_{ADB} = \int_{AD'B},$$

ибо (рис. 74)

$$\int_{ADB} - \int_{AD'B} = \int_{L},$$

а последний интеграл равен нулю в силу формулы (4) и условия (5). Мы подразумевали при этом, что пути ADB и $AD'B$ не пересекают друг друга, так что их соединение образует простой замкнутый контур. Но легко убедиться, что это несущественно: если пути пересекаются в одной или нескольких точках, то разность интегралов по этим путям может быть сведена к сумме интегралов по двум или большему числу замкнутых контуров.

В частности, интеграл в правой части формулы (3) при зафиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$ будет представлять собой однозначную функцию от x и y, и, значит, формула (3) определит однозначную функцию $F(x, y)$, если придать C произвольное (постоянное) значение. Легко, далее, проверить, что мы действительно будем иметь равенства (2′).

В самом деле, продолжив путь интегрирования в формуле (3) прямолинейным отрезком MM', параллельным Ox, до точки $M'(x + \Delta x, y)$, будем, очевидно, иметь:

$$F(x+\Delta x, y) = F(x, y) + \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx,$$

откуда следует

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx = P(x, y),$$

т. е. первое из равенств (2′); таким же образом доказывается и второе.

Мы видим, таким образом, что условие (5) необходимо и достаточно для существования однозначной функции $F(x, y)$, удовлетворяющей условию (2) или условиям (2′). При соблюдении этого условия функция $F(x, y)$ определяется формулой (3) с точностью до постоянной C, которая совершенно произвольна.

До сих пор мы считали область S односвязной. Посмотрим теперь, какие добавления требуются в случае многосвязной области.

Условие (5) и здесь является необходимым: вывод ничем не отличается от вывода для случая односвязной области. Надо только при применении формулы (4) брать такие контуры L, чтобы области σ, ими ограничиваемые, целиком принадлежали S (в случае односвязной области это выполняется само собой). Выясним теперь вопрос о достаточности этого условия. Мы покажем, что и в нашем случае условие это обеспечивает

существование функции $F(x, y)$, определяемой формулой (3), но что функция эта будет, вообще говоря, многозначной.

Начнем со следующего замечания. Разрежем область S купюрами

$$a_1b_1, \ldots, a_mb_m,$$

как было указано в предыдущем пункте, и полученную таким образом односвязную область обозначим через S^*.

Мы должны представлять себе, что вдоль каждой линии a_kb_k соприкасаются два края разрезанной области, так что каждая точка этой линии должна считаться за две, одна из которых принадлежит одному, а другая — другому краю. В соответствии с этим на каждом разрезе мы будем различать два края, которые условно будем обозначать знаками (—) и (+).

Так как область S^* односвязна, то функция $F(x, y)$, определенная формулой (3), где путь интегрирования не должен выходить из S^*, т. е. не должен пересекать купюр, будет на основании сказанного выше однозначна в S^*.

Это, однако, не значит, что в точках, принадлежащих различным краям одной и той же купюры, значения функции F будут одинаковы (ибо эти точки должны считаться различными точками области S^*). Возьмем, например, какую-либо точку A на купюре a_1b_1 и обозначим через F^+ и F^- значения функции F в точках A^+, A^- краев (+) и (—), совмещенных в геометрической точке A. Имеем по формуле (3):

$$F^- = \int\limits_{M_0A^-} (P\,dx + Q\,dy) + C, \qquad F^+ = \int\limits_{M_0A^+} (P\,dx + Q\,dy) + C,$$

где первый интеграл взят по любой линии M_0A^-, находящейся в S^* и идущей из M_0 к точке A, подходя к ней со стороны (—); второй же интеграл взят по пути M_0A^+, также выходящему из M_0, но подходящему к A со стороны (+) (рис. 73; на нем не изображены точка M_0 и упомянутые пути интегрирования). В качестве пути интегрирования для второго интеграла мы можем взять путь интегрирования M_0A^- первого интеграла, дополнив его линией L_1', один раз окружающей контур L_1 и ведущей от края (—) к краю (+), не выходя из разрезанной области S^*. Таким образом, будем иметь:

$$F^+ = \int\limits_{M_0A^-} + \int\limits_{L_1'} + C = F^- + J_1,$$

где J_1 определяется формулой

$$J_1 = \int\limits_{L_1'} (P\,dx + Q\,dy),$$

причем L_1' есть простой замкнутый контур, ведущий по области S^* от края (—) к краю (+) купюры a_1b_1 и не пересекающий других купюр (рис. 73). Этот контур пересекает купюру a_1b_1, переходя со стороны (+) на сторону (—).

Легко видеть, что J_1 не зависит от выбора контура L_1', лишь бы он один раз окружал контур L_1, идя по S^* от края (—) к краю (+) купюры a_1b_1. Действительно, пусть L_1'' есть другой такой контур, пересекающий a_1b_1 в некоторой точке B. Рассмотрим замкнутый контур, не выходящий из S^*, составленный из отрезка AB положительного края купюры, пути L_1'', пройденного в *отрицательном* направлении [1]), далее из отрезка BA отрицательного края купюры и, наконец, контура L_1'.

Имеем:

$$\int (P\,dx+Q\,dy)=0,$$

где интеграл взят по только что указанному замкнутому контуру. Так как, далее, интегралы по AB и BA взаимно уничтожаются, то остается:

$$-\int\limits_{L_1''}(P\,dx+Q\,dy)+\int\limits_{L_1'}(P\,dx+Q\,dy)=0,$$

а это и доказывает наше утверждение [перед первым интегралом мы взяли знак (—), считая, что L_1'' обозначает контур, пройденный в положительном направлении].

Совершенно аналогично получим для любой купюры a_kb_k, что

$$F^+=F^-+J_k,$$

где

$$J_k=\int\limits_{L_k'}(P\,dx+Q\,dy), \tag{6}$$

а L_k' — любой замкнутый контур, окружающий L_k, пересекающий только одну купюру a_kb_k, переходя со стороны (+) на сторону (—).

Интеграл в формуле (6) может, в частности, быть взят по самой границе L_k, если функции P и Q непрерывны вплоть до границы.

Легко теперь выяснить, какую функцию $F(x, y)$ определяет формула (3), если рассматривать *неразрезанную* область, т. е. если допустить, что путь интегрирования может пересекать купюры.

Обозначим через $F_0(x, y)$ то значение, которое дает формула (3) в разрезанной области, т. е. когда путь интегрирования не пересекает купюр.

Рассмотрим теперь произвольный путь интегрирования M_0M (рис. 75); пусть он пересекает купюры несколько, скажем n, раз. Будем следовать из точки M_0 по пути интегрирования до первой встречи с одной из купюр a_kb_k. На части пути интегрирования после перехода через эту купюру, но до следующей встречи с какой-либо из купюр, возьмем две последовательные точки A и B и заменим участок AB пути линией AM_0B, идущей из A в M_0 и возвращающейся в B, не пересекая ни одной из купюр. Это, конечно, не изменит значения интеграла (ибо при замене мы оставались

[1]) То есть ведущего по области S^* от края (+) к краю (—).

в разрезанной области). Первоначальный путь от M_0 до M оказывается замененным замкнутым контуром M_0AM_0, один раз охватывающим контур L_k, и путем M_0BM, который пересекает купюры уже не n, а $n-1$ раз.

Интеграл, взятый по замкнутому контуру M_0AM_0, равен на основании формулы (6) $+J_k$ или $-J_k$, в зависимости от того, пересекает ли путь интегрирования купюру a_kb_k, переходя от края (+) к краю (—), или наоборот. Таким образом, мы можем выбросить из (видоизмененного) пути интегрирования замкнутую часть M_0AM_0 при условии, что к окончательному результату прибавляется $\pm J_k$.

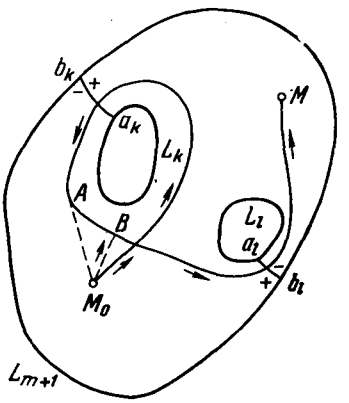


Рис. 75.

Продолжая действовать таким образом, мы можем свести путь интегрирования к пути, не пересекающему ни одной купюры. К интегралу, взятому по этому пути, надо будет добавить величины $\pm J_k$; каждую из них следует добавить столько раз, сколько раз первоначальный путь интегрирования пересекает соответствующую купюру; знак (+) надо брать в случае пересечения от стороны (+) к стороне (—); знак же (—) следует брать в противном случае.

Так как путь интегрирования, не пересекающий купюр, дает значение $F_0(x, y)$, то мы будем иметь окончательный результат в следующем виде:

$$F(x, y) = F_0(x, y) + n_1J_1 + n_2J_2 + \ldots + n_mJ_m, \tag{7}$$

где $n_1, \ldots, n_m$ — целые числа (положительные или отрицательные), которые легко подсчитываются на основании сказанного выше по числу пересечений пути M_0M с купюрами (при этом следует принимать во внимание направление пересечения). Например, в случае рис. 75

$$F(x, y) = F_0(x, y) + J_k + J_l.$$

Для того чтобы функция $F(x, y)$ была однозначной, необходимо и достаточно, чтобы наряду с условием (5) было соблюдено условие

$$J_1 = J_2 = \ldots = J_m = 0. \tag{8}$$

Все сказанное выше можно применить и к случаю, когда контур L_{m+1} уходит целиком в бесконечность, так что область S превращается в бесконечную плоскость с отверстиями.

3. В случае трех измерений имеем совершенно аналогичные результаты. И здесь следует различать односвязные и многосвязные трехмерные области (тела). *Односвязной* называется область, обладающая тем свойством, что всякая замкнутая линия, проведенная внутри тела, может сжаться в одну точку путем непрерывной деформации,

не выходя из области (примеры: шар и куб). В противном случае область *многосвязна*. Примерами многосвязных областей могут служить, например, тор (т. е. тело, полученное вращением круга вокруг оси, лежащей в его плоскости и не пересекающей его) или куб, имеющий одно или несколько сквозных отверстий, и т. п.

Тор есть тело *двусвязное*, ибо его можно сделать односвязным путем проведения одного разреза (перегородки); здесь уже, в противоположность случаю двух измерений, разрез будет не линией, а поверхностью.

Вообще тело будет $(m+1)$-связным, если его можно сделать односвязным при помощи m разрезов. Обратим внимание на то, что тело, ограниченное *одной* замкнутой поверхностью, не обязательно односвязно (пример: тор); наоборот, тело может быть ограничено несколькими замкнутыми поверхностями, но быть односвязным (пример: область, заключенная между двумя концентрическими сферами).

Пусть теперь дано дифференциальное выражение

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz, \tag{1}$$

где P, Q, R — однозначные и непрерывные функции, имеющие непрерывные первые производные в некоторой о д н о с в я з н о й области V.

Совершенно аналогично сказанному в предыдущем пункте, можем показать, что для существования однозначной функции $F(x, y, z)$, удовлетворяющей условию

$$dF = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0, \tag{3}$$

где L — любой замкнутый контур в области V.

При этом условии функция F определится формулой

$$F(x, y, z) = \int_{M_0 M} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) + C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная, а интеграл взят по любому пути (находящемуся в V), соединяющему постоянную точку M_0 с переменной точкой $M(x, y, z)$.

Преобразуем условие (3). Для этого вспомним известную формулу Стокса:

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint_\sigma \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right\} d\sigma, \tag{5}$$

где σ — любая (разомкнутая) поверхность (не выходящая из V), имеющая своей границей контур L, а n — нормаль к этой поверхности σ,

проведенная в определенную сторону. В силу этой формулы условие (3) примет вид

$$\iint_\sigma \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n, x)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n, y)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right\} d\sigma=0, \qquad (6)$$

причем оно должно быть соблюдено для любой поверхности σ (находящейся внутри V). Взяв в качестве σ какую-либо площадку, нормальную к оси Ox, получим, в частности:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz=0,$$

откуда выводим (ввиду произвольности площадки σ) первую из следующих формул:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (7)$$

(две последние формулы выводятся круговой перестановкой).

Обратно, условия (7) являются, очевидно, достаточными для наличия условия (3) и, значит, для существования однозначной функции $F(x, y, z)$, определяемой формулой (3).

В случае многосвязной области при наличии условий (7) функция $F(x, y, z)$, определяемая равенством (4), может оказаться многозначной. Именно, рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениям предыдущего пункта (читатель легко воспроизведет их сам), можно установить следующее. Если мысленно провести m разрезов (перегородок) так, чтобы обратить данную $(m+1)$-связную область в односвязную, а через $F_0(x, y, z)$ обозначить функцию, определяемую формулой (4), при условии, что путь интегрирования не пересекает перегородок, то при произвольном пути интегрирования будем иметь:

$$F(x, y, z)=F_0(x, y, z)+n_1J_1+\ldots+n_mJ_m, \qquad (8)$$

где $n_1, \ldots, n_m$ — целые числа, а $J_1, \ldots, J_m$ — постоянные, представляющие собой интегралы по замкнутым путям. А именно:

$$J_k=\int_{L_k} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz), \qquad (9)$$

где L_k — простой замкнутый контур, который пересекает только перегородку с номером k, переходя от стороны (+) к стороне (—). Целые числа n_k определяются по такому же правилу, как в предыдущем параграфе.

Для того чтобы функция F была однозначна, необходимо и достаточно, чтобы наряду с условиями (7) были соблюдены условия:

$$J_1=J_2=\ldots=J_m=0. \qquad (10)$$

ДОБАВЛЕНИЕ III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО ЗАДАННОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ОТ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

1. Пусть

$$p(x,\ y)+iq(x,\ y)=f(z) \tag{1}$$

— функция комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфная в некоторой области S плоскости z. Как известно, в этом случае действительная и мнимая части p и q связаны соотношениями Коши — Римана:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}\,. \tag{2}$$

Из элементов теории функций комплексного переменного известно, что, обратно, если две однозначные действительные функции p и q, имеющие непрерывные первые производные, связаны соотношениями (2), то $p + iq$ является голоморфной функцией переменной z в данной области [1]).

Функция q, связанная с данной функцией p соотношениями (2), называется сопряженной с ней.

Не всякая функция p может быть действительной частью голоморфной функции комплексного переменного. Действительно, дифференцируя уравнение (2) соответственно по x и по y и складывая, получаем:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\Delta p=0; \tag{3}$$

значит, функция p должна быть гармонической; точно так же можно показать, что q должна быть гармонической. Под гармонической функцией во всем дальнейшем мы будем понимать функцию, удовлетворяющую (в данной области S) уравнению (3) и имеющую непрерывные производные до второго порядка. Мы будем считать также во всем дальнейшем, что функция p однозначна.

Легко показать, что ко всякой гармонической функции p можно подобрать сопряженную функцию q. Действительно, на основании

[1]) Голоморфная функция, как известно, имеет производные любого порядка (и больше того: разлагается в ряд Тэйлора в окрестности любой точки). Значит, и функции p, q обладают тем же свойством.

уравнения (2) имеем для определения q:

$$dq = -\frac{\partial p}{\partial y}\,dx + \frac{\partial p}{\partial x}\,dy.$$

Условие существования функции q (см. Добавление II) в нашем случае сводится к следующему:

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

которое соблюдено в силу уравнения (3). Следовательно, функция q определяется с точностью до произвольной постоянной формулой

$$q(x,\ y) = \int\limits_{M_0 M} \left(-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx + \frac{\partial p}{\partial x}\,dy\right) + C, \tag{4}$$

где M_0M — произвольный путь, соединяющий некоторую (произвольную) постоянную точку M_0 с переменной точкой $M\ (x,\ y)$ и не выходящий из данной области S.

Формулу (4) можно переписать в несколько более простом виде. Пусть t обозначает касательную к пути интегрирования (направленную в сторону движения от M_0 к M), а n — нормаль, направленную вправо, если смотреть вдоль t (рис. 15 на стр. 110). Тогда

$$dx = ds\cdot\cos(t,\ x) = -ds\cdot\cos(n,\ y), \qquad dy = ds\cdot\cos(t,\ y) = ds\cdot\cos(n,\ x),$$

где ds — элемент пути интегрирования, и, следовательно,

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx + \frac{\partial p}{\partial x}\,dy = \left\{\frac{\partial p}{\partial y}\cos(n,\ y) + \frac{\partial p}{\partial x}\cos(n,\ x)\right\} ds = \frac{dp}{dn}\,ds.$$

Значит, формула (4) может быть переписана так [1]):

$$q(x,\ y) = \int\limits_{M_0 M} \frac{dp}{dn}\,ds + C. \tag{4'}$$

В случае, когда область S односвязна, функция q, определенная формулой (4) или (4'), будет однозначна, и на основании сказанного функция

$$f(z) = p + iq$$

будет голоморфна в области S; *она определяется при заданном p с точностью до чисто мнимой произвольной постоянной Ci.*

В случае многосвязной области функция $f(z) = p + iq$, где q определяется формулой (4) или (4'), будет голоморфной во всякой односвязной области, выделенной из S (и, в частности, в разрезанной области S^*; см. Добавление II). Но если ничем не ограничить путь интегрирования (кроме условия, чтобы он заключался в S), функция $f(z)$ может оказаться

[1]) Формула (4') может быть сразу написана, если заметить, что

$$\frac{dq}{ds} = \frac{dp}{dn}.$$

Это соотношение непосредственно выводится из соотношений Коши — Римана.

многозначной. А именно, при обходе по замкнутому контуру, охватывающему один из контуров L_k (обозначения здесь те же, что в Добавлении II), функция q прирастает на некоторую постоянную B_k, а следовательно, функция $f(z)$ получает чисто мнимое приращение iB_k.

Постоянные B_k определяются формулами:

$$B_k = \int_{L_k} \left(-\frac{\partial p}{\partial y}\, dx + \frac{\partial p}{\partial x}\, dy \right) ds = \int_{L_k} \frac{dp}{dn}\, ds \quad (k = 1, \ldots, m); \tag{5}$$

интегралы могут быть взяты также по самим линиям L_k, если частные производные функции p непрерывны вплоть до границы.

Для того чтобы функция $f(z)$ была однозначна в многосвязной области S, необходимо и достаточно, чтобы все постоянные B_k равнялись нулю.

2. В связи с предыдущим сделаем еще одно замечание относительно неопределенного интеграла от голоморфной в некоторой области S функции $f(z)$. Под неопределенным интегралом

$$\int f(z)\, dz$$

мы понимаем функцию, определяемую равенством

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz + \text{const}, \tag{1}$$

где интеграл взят по произвольному пути, не выходящему из S, соединяющему произвольную неподвижную точку z_0 с переменной точкой z, а const — произвольная (вообще комплексная) постоянная.

Если S — односвязная область, то $F(z)$ будет однозначной функцией. Это следует из того, что в силу известной теоремы Коши интеграл

$$\int f(z)\, dz,$$

взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю, а значит,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

не зависит от пути интегрирования (ср. аналогичные рассуждения в Добавлении II, п. 2).

Если же область S — многосвязная (мы будем считать, что она имеет вид, указанный в п. 1 Добавления II), то функция $F(z)$ может оказаться многозначной, именно: при обходе по контуру L_k, один раз охватывающему L_k (обозначение см. в Добавлении II), она получит приращение

$$\alpha_k + i\beta_k = \int_{L_k} f(z)\, dz. \tag{2}$$

Интеграл в правой части, вообще говоря, будет отличен от нуля, ибо область, заключенная внутри L_k', не принадлежит целиком области S. Величина $\alpha_k + i\beta_k$ не зависит от выбора контура L_k', лишь бы он один раз охватывал контур L_k , не пересекая других купюр, кроме $a_k b_k$, и описывался в определенном направлении. Это может быть доказано совершенно тем же путем, как аналогичное обстоятельство относительно функции $F(x, y)$, доказанное в п. 2 Добавления II. Рассуждая точно так же, как в Добавлении II, легко установить, что функция $f(z)$, определяемая формулой (1), может быть представлена в виде

$$f(z) = f_0(z) + n_1(\alpha_1 + i\beta_1) + \ldots + n_m(\alpha_m + i\beta_m), \tag{3}$$

где $f_0(z)$ — однозначно определенная функция в разрезанной области S^*, а $n_1, \ldots, n_m$ — целые числа, определяемые совершенно так же, как в Добавлении II.

ДОБАВЛЕНИЕ IV

ОДИН ВЫВОД ФОРМУЛ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. В гл. II был приведен простой вывод формул общего представления решения уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил, по существу совпадающих с формулами Г. В. Колосова.

Эти формулы можно, разумеется, вывести и другими простыми способами. Одним из них является тот, которым пользовался сам Г. В. Колосов [1, 2]. Я не остановился на этом в основном тексте, так как способ получения формул общего представления существенного значения не имеет: существенно лишь то, как используются эти формулы для решения конкретных задач. Однако вследствие того, что некоторые авторы придают способу вывода формул общего представления определенное (на мой взгляд — преувеличенное) значение, я счел целесообразным сказать здесь несколько слов об упомянутых способах и привести один из них, охватывающий также случай наличия объемных сил.

2. Большинство выводов, приводимых различными авторами, основано на следующем приеме. Вместо действительных переменных x, y вводятся комплексные переменные

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy,$$

так что различные функции действительных переменных, скажем функция $f(x, y)$, представляются в виде функций двух переменных z, $\bar{z}$:

$$f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right) = \varphi(z, \bar{z}); \qquad (*)$$

при этом с функцией $\varphi(z, \bar{z})$ оперируют иногда как с функцией двух независимых комплексных переменных z и $\bar{z}$. Например, общее решение уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \varphi(z, \bar{z}), \qquad (**)$$

где $\varphi(z, \bar{z})$ — заданная и $\Phi = \Phi(z, \bar{z})$ — искомая функции, пишут в виде

$$\Phi(z, \bar{z}) = \int \varphi(z, \bar{z})\, d\bar{z} + \Psi(z), \qquad (***)$$

где $\Psi(z)$ —«произвольная» (подразумевается — аналитическая) функция

от z. Очевидно, что таким рассуждениям можно придать определенный смысл лишь в частных случаях (о некоторых из них см. ниже п. 3) и при весьма существенных оговорках[1]). Формулы вида (***) иногда применял и Г. В. Колосов; см., например, его книгу [6], § 8 и статью [3]. Следует, однако, отметить, что выводы формул общего представления (при отсутствии объемных сил), данные в его основных работах [1, 2], предшествующих названным, можно считать вполне строгим, если добавить к ним некоторые, впрочем почти очевидные, пояснения.

Ниже, в п. 4, приведем один вывод, аналогичный упомянутым выше, но строго обоснованный, и начнем с некоторых предварительных замечаний.

3. Введем в рассмотрение следующие операции:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

применимые к любым дифференцируемым в некоторой области S функциям $F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$, где U и V — действительные функции действительных переменных x, y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right], \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right] - \frac{i}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0,$$

то, в силу условий Коши — Римана, $F(x, y) = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z, и обратно, а если

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

то $F(x, y) = \overline{\varphi(z)}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z, и обратно.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y), \tag{3}$$

где $F = F(x, y)$ — искомая, а $f(x, y)$ — заданная функции, или в раскрытом виде систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 2f_1(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 2f_2(x, y). \tag{3а}$$

Если $f(x, y) \equiv 0$, то уравнение (3) и эквивалентная ему система (3а) обращаются в однородные и выражают условие Коши — Римана. Ясно, что общим решением однородного уравнения, соответствующего уравне-

[1]) Если иметь в виду обычное определение понятия функции $f(x, y)$ двух действительных переменных x, y, то уже само представление такой функции в виде (*) не имеет определенного смысла, так как его можно осуществить бесчисленным множеством способов; с одинаковым правом мы можем, например, написать, как это часто и делают (см., в частности, ниже п. 5), что $f(x, y) = \varphi(z)$ или что $f(x, y) = \psi(\bar{z})$, подразумевая под этим, что каждому значению $z = x + iy$ или $\bar{z} = x - iy$ соответствует определенное значение $f(x, y)$.

нию (3), является произвольная аналитическая функция $F(z)$ комплексного переменного z и что общее решение неоднородного уравнения (3) получим, прибавив к какому-либо его частному решению произвольную аналитическую функцию от z.

Что же касается частных решений, то при некоторых общих условиях, которые будут указаны ниже, одним из таких решений будет функция $F_0(x, y)$, определяемая формулой [1])

$$F_0(x, y) = -\frac{1}{\pi}\iint_S \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

где $z = x + iy$ — произвольная точка области S, а $\zeta = \xi + i\eta$.

Мы будем считать здесь и в дальнейшем, что область S подчинена тем же общим условиям, как и в основном тексте книги, и что в случае бесконечной области

$$f(x, y) = O\left(\frac{1}{|z|^{1+\alpha}}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad \alpha = \text{const} > 0. \tag{4a}$$

Справедливость утверждения, что функция $F_0(x, y)$, определяемая формулой (4), является (частным) решением уравнения (3), можно доказать при некоторых условиях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, непосредственной проверкой, не совсем, впрочем, простой, так как дифференцирование под знаком интеграла здесь недопустимо вследствие сильной сингулярности подынтегрального выражения [2]). В п. 5 настоящего Добавления мы приведем доказательство, применимое к случаю, когда функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области S. В п. 6 будут указаны и более общие условия, при которых наше утверждение остается справедливым.

Общее решение уравнения (3) будет дано формулой

$$F(x, y) = F_0(x, y) + \Omega(z),$$

где $\Omega(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Аналогично одно из частных решений $F_0^*(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial z} = f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y) \tag{5}$$

дается формулой

$$F_0^*(x, y) = -\frac{1}{\pi}\iint_S \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}}, \tag{6}$$

а общее решение — формулой

$$F(x, y) = F_0^*(x, y) + \overline{\Omega(z)},$$

где $\Omega(z)$ — произвольная аналитическая функция.

---

[1]) Формула эта была, по-видимому, впервые указана Д. Помпей (Pompeiu [1, 2]).

[2]) Если бы было допустимо дифференцирование под знаком интеграла, мы получили бы $\frac{\partial F_0}{\partial \bar{z}} = 0$, что неверно.

Отметим еще, что во многих частных случаях можно получить решение уравнений (3) или (5) совершенно элементарно.

Например, если $f(x, y)$ представляет собою полином или, более общо, рациональную функцию от x, y, то эту функцию можно представить в виде полинома или рациональной функции от z и $\bar{z}$:

$$f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = f_0(z, \bar{z})$$

(теперь уже такое представление имеет определенный смысл) и тогда, например, решение уравнения (5), как легко непосредственно проверить, представится в виде

$$F(x, y) = \int f_0(z, \bar{z})\, dz + \overline{g(z)}, \tag{7}$$

где $g(z)$ — произвольная аналитическая функция от z, а интеграл вычисляется так, как если бы величина $\bar{z}$ оставалась постоянной [1]). Как было уже сказано в п. 2, формула (7) теряет смысл в общем случае.

Вообще на практике можно часто обойтись без применения формул (4) или (6), пользуясь теми или иными приемами. Приведем два простых примера, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть требуется решить уравнение вида (5):

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \tag{8}$$

где $f(\xi, \eta)$ — заданная непрерывная функция в S, удовлетворяющая в случае бесконечной области условию (4а) при $\alpha > 1$.

Замечая, что, очевидно,

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\ln(\zeta - z) + \overline{\ln(\zeta - z)}\right] = -2\frac{\partial}{\partial z}\ln|\zeta - z|,$$

можем представить уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_S f(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial z}\ln|\zeta - z|\, d\xi\, d\eta = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_S f(\xi, \eta)\ln|\zeta - z|\, d\xi\, d\eta$$

(дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо), откуда непосредственно следует, что одним из частных решений уравнения (8) будет

$$F_0(x, y) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_S f(\xi, \eta)\ln|\zeta - z|\, d\xi\, d\eta. \tag{9}$$

Поступая аналогично, мы можем представить частное решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \tag{10}$$

в виде

$$F_0(x, y) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{11}$$

[1]) Этот прием с определенными оговорками может быть распространен на случай, когда $f(x, y)$ — аналитическая функция от x, y. См., например, И. Н. Векуа [1].

4. Перейдем теперь к упомянутому выше выводу формул общего представления [1]). Будем исходить из уравнений плоской теории упругости в смещениях (u, v) [§ 27, формула (4)]:

$$\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + X = 0, \quad \mu\Delta v + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y = 0 \tag{1}$$

в области S, где, как всегда, u, v — компоненты смещения, X, Y — компоненты объемной силы и

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Уравнения (1) можно записать в виде одного комплексного уравнения:

$$4\mu\frac{\partial^2 W}{\partial\bar{z}\,\partial z} + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}} + F = 0 \tag{2}$$

где положено

$$W = u + iv, \quad F = F(x, y) = X + iY. \tag{3}$$

Отметим, что

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\overline{\partial W}}{\partial\bar{z}}.$$

Операцию $\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial\bar{z}}$ следует рассматривать как $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)$, понимая операции $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, как указано в п. 3 [формулы (1)].

Уравнение (2) можно еще представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[4\mu\frac{\partial W}{\partial z} + 2(\lambda+\mu)\theta\right] = -F, \tag{3'}$$

откуда, применяя формулу (4) п. 3, выводим

$$4\mu\frac{\partial W}{\partial z} + 2(\lambda+\mu)\theta = \frac{1}{\pi}\iint_S \frac{F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta - z} + 2(1+\varkappa)\varphi'(z), \tag{4}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\varphi'(z)$ — произвольная аналитическая функция, которую мы представили в виде производной от произвольной аналитической функции, а множитель $2(1+\varkappa)$ введен для удобства; как всегда,

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3 - 4\sigma.$$

Складывая формулу (4) с формулой, полученной переходом к сопряженным значениям, находим:

$$\theta = \frac{\varkappa-1}{2\mu(1+\varkappa)}\operatorname{Re}\left\{2(1+\varkappa)\varphi'(z) + \frac{1}{\pi}\iint_S \frac{F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta - z}\right\}.$$

Подставляя это значение θ в формулу (4) и пользуясь на этот раз формулами (9) и (11) п. 3, получим после простых выкладок и введения

[1]) Вывод этот принадлежит И. Н. Векуа; он был опубликован в статье Векуа и Мусхелишвили [1].

надлежащих обозначений следующую формулу:

$$2\mu W = 2\mu(u+iv) =$$

$$= \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\frac{1}{\pi}\iint_S F(\xi,\eta)\ln|\zeta - z|\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2(1+\varkappa)}\frac{1}{\pi}\iint_S \overline{F(\xi,\eta)}\frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\,d\xi\,d\eta, \qquad (5)$$

где $\psi(z)$ — некоторая произвольная аналитическая функция.

Формула (5) дает общее представление решения уравнений плоской теории упругости в смещениях. Если в (5) положить $F(\xi, \eta) = 0$, то получим формулу, относящуюся к случаю отсутствия объемных сил, которой мы постоянно пользовались в основном тексте. Полагая же $\varphi(z) = \psi(z) = 0$, мы получим как раз то частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемных сил, которое было найдено иным путем в § 57а.

Для вывода формул, выражающих компоненты напряжения, воспользуемся формулами:

$$X_x + Y_y = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$X_x - Y_y + 2iX_y = 4\mu\frac{\partial W}{\partial \bar{z}},$$

вытекающими из формул (2) § 25.

Подставляя в эти формулы выражение (5) для W, получим без труда:

$$X_x + Y_y = \operatorname{Re}\left[\frac{2}{(\varkappa+1)\pi}\iint_S \frac{F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta - z} + 4\varphi'(z)\right],$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = -\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{1}{\pi}\iint_S \frac{\overline{F(\xi,\eta)}}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \frac{1}{\varkappa+1}\frac{1}{\pi}\iint_S F(\xi,\eta)\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta + 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi(z)]. \qquad (6)$$

Эти формулы при отсутствии объемных сил, т. е. при $F(x, y) = 0$, совпадают с приведенными в основном тексте.

Следует еще отметить, что аналогичные выводы формул общего представления при наличии объемных сил имеются и в некоторых работах Г. В. Колосова, например в его книге [6]. Однако выводы эти нельзя признать строгими (по крайней мере без существенных оговорок), так как автор пользуется приемом, о котором говорилось в п. 2, в частности формулами вида (***).

Для случая, когда существует потенциал объемных сил, т. е. когда

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

где $V = V(x, y)$ — некоторая функция от x, y, формулы общего представления были даны С. Г. Михлиным [10].

Этот же случай был позднее рассмотрен Стевенсоном (Stevenson [1, 2]). В первой из указанных работ этот автор пользуется формулами вида (***) п. 2, во второй же он дает вывод формул общего представления, не пользуясь формулами вида (***). В полученных им формулах общего представления фигурирует некоторая функция $W(z, \bar{z})$, определяемая условием

$$\frac{\partial}{\partial z} W(z, \bar{z}) = U(z, z), \qquad U(z, z) = V(x, y);$$

автор не дает явного выражения для этой функции.

Формулы общего представления при наличии объемных сил и некоторые их приложения даны также Ю (Yi-Yuan Yu [1]) и Ф. Шеленговским [1].

5. Приведем в заключение временно опущенное нами доказательство утверждения, что формула (4) п. 3 дает одно из частных решений уравнения (3) п. 3. Это относительно простое доказательство было сообщено мне И. Н. Векуа.

Для упрощения обозначений мы будем теперь вместо $f(\xi, \eta)$ писать $f(\zeta)$, где по-прежнему $\zeta = \xi + i\eta$, а вместо $F_0(x, y)$ писать $F(x, y)$ или $F(z)$, так что формула (4) п. 3 представится в виде

$$F(x, y) = F(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_S \frac{f(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \tag{1}$$

Мы будем по-прежнему считать, что в случае бесконечной области при больших $|\zeta|$

$$|f(\zeta)| = O\left(\frac{1}{|\zeta|^{1+\alpha}}\right), \quad \alpha > 0. \tag{1a}$$

Кроме того, мы будем считать, что функция $f(\zeta)$, т. е. функция $f(\xi, \eta)$ формулы (4) п. 3, непрерывно дифференцируема, т. е. имеет непрерывные частные производные по ξ и η.

Нам надлежит доказать, что в любой точке $z = x + iy$ области S

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right] = f(z). \tag{2}$$

Очевидно, достаточно доказать справедливость этой формулы для сколь угодно малой окрестности S_0 произвольно фиксированной точки z_0 области S. В качестве S_0 мы возьмем круг радиуса ε с центром в точке z_0, целиком расположенный в области S. В дальнейшем мы будем считать, что z изменяется внутри круга S_0.

Функцию $F(z)$ можно теперь представить в виде

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z),$$

где $F_0(z)$ и $F_1(z)$ обозначают интегралы вида (1), но взятые соответственно по областям S_0 и $S - S_0$.

Очевидно, что $F_1(z)$ — голоморфная в S_0 функция и поэтому

$$\frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} = 0$$

в области S_0. Следовательно, нам остается показать, что в этой области

$$\frac{\partial F_0}{\partial \bar{z}} = f(z),$$

где

$$F_0 = F_0(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{S_0} \frac{f(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}. \tag{3}$$

Распространим теперь функцию $f(\zeta)$, фигурирующую в предыдущем интеграле и заданную в круге S_0, на всю плоскость так, чтобы полученная новая функция $f_*(\zeta)$, определенная уже на всей плоскости и совпадающая в области S_0 с функцией $f(\zeta)$, была непрерывна и непрерывно дифференцируема всюду и удовлетворяла условию (1а). Такое распространение можно, как легко видеть, осуществить бесчисленным множеством способов.

Положим теперь:

$$F_*(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_P \frac{f_*(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z} = F_0(z) + F_{**}(z),$$

где P обозначает всю плоскость, а $F_0(z)$ и $F_{**}(z)$ — интегралы, распространенные соответственно по областям S_0 и $P - S_0$.

Ясно, что $F_{**}(z)$ — голоморфная в S_0 функция и поэтому

$$\frac{\partial F_{**}(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Таким образом, нам остается показать, что в области S_0

$$\frac{\partial F_*(z)}{\partial \bar{z}} = f_*(z) = f(z).$$

Заменой переменных интегрирования функцию $F_*(z)$ можно представить в виде [1])

$$F_*(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_P \frac{f_*(\zeta + z)}{\zeta}\, d\xi\, d\eta.$$

Отсюда сразу вытекает, что функция $F_*(z)$ непрерывно дифференцируема на всей плоскости P. Дифференцируя под знаком интеграла (что теперь допустимо), получим:

$$\frac{\partial F_*(z)}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_P \frac{1}{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_*(\zeta + z) \right] d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_P \frac{1}{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f_*(\zeta + z) \right] d\xi\, d\eta$$

---

[1]) Мы могли бы произвести такую замену и в интеграле (3). Но тогда область интегрирования сделалась бы переменной (зависящей от z) и при дифференцировании интеграла пришлось бы учитывать это обстоятельство.

или еще

$$\frac{\partial F_*(z)}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\iint\limits_{P_h}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[\frac{f_*(\zeta+z)}{\zeta}\right]d\xi\,d\eta,$$

где P_h обозначает область, заключенную между концентрическими окружностями $|\zeta| = h$ и $|\zeta| = \frac{1}{h}$, а h — положительная величина.

Применим теперь формулу Остроградского — Грина, преобразующую двойной интеграл в простой. Как легко видеть, эту формулу можно в комплексной форме представить так:

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial\bar{\zeta}}\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{2i}\int\limits_L F\,d\zeta,$$

где S — некоторая конечная область на плоскости, а L — ее граница, снабженная определенным положительным направлением; мы предполагаем, что область S и ее граница L подчинены тем же условиям, что в основном тексте книги.

В нашем случае эта формула дает

$$\frac{\partial F_*}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2i}\int\limits_{|\zeta|=h}\frac{f_*(\zeta+z)}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{2i}\int\limits_{|\zeta|=\frac{1}{h}}\frac{f_*(\zeta+z)}{\zeta}\,d\zeta\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f_*(he^{i\vartheta}+z)\,d\vartheta - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f_*\left(\frac{1}{h}e^{i\vartheta}+z\right)d\vartheta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_*(z)\,d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\infty)\,d\vartheta = f_*(z) = f(z)$$

и утверждение доказано.

6. Можно показать, что равенство (2) п. 5 имеет место и в случае, когда функция $f(z) = f(x, y)$, не будучи дифференцируемой, удовлетворяет условию Гёльдера [1]). Доказательство этого предложения дано в монографии И. Н. Векуа [8], гл. 1, § 8.

Если функция $f(x, y)$ лишь непрерывна, то формула (2) п. 5, вообще говоря, несправедлива, так как в этом случае функция $F(x, y)$ может не иметь частных производных по x и y в обычном смысле. Но можно обобщить понятие частных производных таким образом, чтобы функция $F(x, y)$ оставалась дифференцируемой и в этом случае. А именно, если понимать частные производные в смысле С. Л. Соболева, то в случае, когда функция $f(x, y)$ лишь непрерывна, равенство (2) п .5 имеет место почти всюду в S. Более того, это равенство имеет место почти всюду в S, если функция $f(x, y)$ лишь интегрируема по Лебегу. Доказательство этих результатов дано И. Н. Векуа [8].

[1]) То есть условию

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leqslant \text{const}\cdot[|x_2 - x_1|^{\mu} + |y_2 - y_1|^{\mu}], \quad \mu = \text{const} > 0.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) РУССКИЙ АЛФАВИТ

А б р а м о в В. М.

[1] Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, т. XVII, № 4, 1937, стр. 173—178.

А в а з а ш в и л и Д. З.

[1] О применении теории функций комплексного переменного к задачам кручения и изгиба. Прикл. матем. и механ., т. IV, вып. 1, 1940, стр. 129—134.

А л е к с а н д р о в А. Я.

[1] Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости для бесконечной плиты. Докл. АН СССР, т. 128, № 1, 1959, стр. 57—60.

[2] Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. Докл. АН СССР, т. 129, № 4, 1959, стр. 754—757.

[3] Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций. Докл. АН СССР, т. 139, № 2, 1961, стр. 337—340.

[4] О решении осесимметричных задач теории упругости методами теории функций комплексного переменного. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Сиб. отд. АН СССР, 1961, стр. 42—46.

[5] Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими состояниями. Прикл. матем. и механ., т. XXV, вып. 5, 1961, стр. 912—920.

[6] О решении пространственной осесимметричной упругой задачи с объемными силами или температурными напряжениями при помощи аналитических функций. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 4, 1962, стр. 130—133.

А л е к с а н д р о в А. Я. и В о л ь п е р т В. С.

[1] О применении одного метода решения осесимметричных задач теории упругости к задаче о шаре и о пространстве с шаровой полостью. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., № 6, 1961, стр. 106—109.

А л е к с а н д р о в А. Я. и С о л о в ь е в Ю. И.

[1] Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. Прикл. матем. и механ., т. XXVI, вып. 1, 1962, стр. 138—145.

А л ь п е р и н И. Г.

[1] Напряжения в бесконечной полосе равномерно сжатой на половине длины. Харьковский гос. унив. Уч. зап., т. XXVIII; Зап. научн.-иссл. и-та матем. и механ. и Харьковск. матем. общества, серия 4, т. XX, 1950, стр. 109—118.

А м е н з а д е Ю. А.

[1] О регуляризации бесконечной системы уравнений в задаче изгиба круглого призматического бруса с эллиптической полостью. Докл. АН Аз. ССР, т. XI, № 3, 1955, стр. 155—160.

[2] К вопросу изгиба полых призматических стержней. Тр. Аз. НИИ по добыче нефти, вып. 1, 1954, стр. 54—60.
[3] Изгиб круглого призматического бруса с эллиптической полостью. Инж. сб., т. XXIV, 1956, стр. 97—113.
[4] Изгиб призматического бруса, ослабленного круговою полостью. Тр. Аз. НИИ им. М. Азизбекова, вып. XIV, 1956; ДАН СССР, т. 114, № 1, 1957; Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. X, № 3, 1957, стр. 47—63.
[5] Кручение призматического бруса с квадратным сечением, армированного круговым стержнем. Сообщ. АН Груз ССР, т. XVIII, № 3, 1957; Изв. АН Аз. ССР, № 2, 1958, стр. 35—53.
[6] Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием. Докл. АН СССР, т. 119, № 6, 1958.
[7] Местные напряжения при изгибе круглого призматического бруса с эллиптической несоосной полостью, Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958, стр. 356—359.
[8] Местные напряжения при кручении призматического бруса квадратного сечения с круглым несоосным отверстием. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1959, № 5, стр. 143—148.
[9] Місцеві напруження при згіні круглого призматичного бруса з еліпсоідальною неспіввісною порожниною. Прикладна механ., т. VII, вып. 2, 1961, 135—147.

Амензаде Ю. А. и Алескерова С. А.
[1] Однонаправленное растяжение пластин звена втулочно-роликовой цепи. Докл. АН Аз. ССР, т. 15, № 2, 1959, стр. 111—117.

Аникин Е. П.
[1] Концентрация напряжений в пластинке с прямоугольным вырезом. Тр. Дальневосточного политехн. ин-та, вып. 45, 1956, стр. 63—81.

Араманович И. Г.
[1] О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. Докл. АН СССР, т. 104, № 3, 1955, стр. 372—375.
[2] Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием. Докл. АН СССР, т. 112, № 4, 1957, стр. 611—614.

Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л.
[1] Кручение упругих тел, Физматгиз, Москва, 1963.

Бабакова О. И.
[1] О приближенном конформном отображении двусвязной области на кольцо. Тр. Харьк. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, т. V, сер. инж.-физ., вып. 1, 1955, стр. 35—50.
[2] Кручение стержня квадратного сечения с круглым отверстием. Тр. Харьк. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, т. XIV, сер. инж.-физ., вып. 2, 1958, 53—58.

Баренблатт Г. И.
[1] О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Прикл. матем. и механ., т. XX, вып. 4, 1956, стр. 475—486.
[2] Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XXIV, вып. 2, 1960, стр. 316—332.
[3] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. Прикл. матем. и механ., т. XXIII, № 3, 1959, стр. 434—444.
[4] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. Прикл. матем. и механ., т. XXIII, № 4, 1959, стр. 706—721.
[5] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. Прикл. матем. и механ., т. XXIII, № 5, 1959, стр. 893—900.

[6] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Докл. АН СССР, т. 127, № 1, 1959, стр. 47—50.

[7] Об основных представлениях теории равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. Сб. «Проблемы механики сплошных сред», Изд. АН СССР, М.—Л., 1961, стр. 41—58.

[8] Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1961, № 4, стр. 3—56.

Баренблатт Г. И. и Христианович С. А.

[1] Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1955, стр. 73—86.

Баренблатт Г. И. и Черепанов Г. П.

[1] О влиянии границ на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР, ОТН, сер. механ. и машиностр., 1960, № 3, стр. 79—88. Поправки: там же, 1962, № 1, стр. 153—154; и Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1966, № 1.

[2] О расклинивании хрупких тел. Прикл. матем. и механ., т. XXIV, № 4, 1960, стр. 667—682.

Батырев А. В.

[1] Кручение цилиндрических стержней. Уч. зап. Ростовск. гос. ун-та, т. XVIII, вып. 3, 1953, стр. 3—16.

Бахтияров И. А.

[1] Кручение призматического бруса коробчатого профиля. Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 6, 1959, стр. 145—158.

Бегиашвили А. И.

[1] Решение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости. Докл. АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940, стр. 914—916.

Беленький М. Я.

[1] Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 283—292.

[2] Некоторые осесимметричные задачи теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XXIV, вып. 3, 1960, стр. 582—584.

Белоносов С. М.

[1] Новая форма интегральных уравнений плоской статической задачи теории упругости. Тр. Воронежск. гос. ун-та, физ.-мат. сб., т. 27, 1954, стр. 30—42.

[2] Плоская задача теории упругости для клина при заданных на границе напряжениях или смещениях. Докл. АН СССР, т. 131, № 5, 1960, стр. 1042—1045.

[3] Плоская задача теории упругости для бесконечной полосы при заданных на границе напряжениях и смещениях. Докл. АН СССР, т. 131, № 6, 1960, стр. 1291—1293.

[4] Об одном методе решения плоских статических задач теории упругости для двусвязных областей. Сиб. матем. журн., 1961, т. II, № 3, стр. 341—365.

[5] Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей, Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.

Бернштейн С. Н.

[1] Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. II, т. XIV, № 3, 1914, стр. 139—144; № 5, 1915, стр. 200—201.

Бицадзе А. В.

[1] О местных деформациях при сжатии упругих тел. Сообщ. АН Груз. ССР, т. V, № 8, 1944, стр. 761—770.

Бойм А. А.

[1] Про напруги у вагомій півплощині, ослабленій склепистим отвором. Прикладна механ. АН УРСР, т. II, вып. 4, 1956, стр. 388—391.

[2] Про напруження в безконечній стиснутій пластинці, послабленій трапецоїдальним або склепистим отвором, край якого підкріплений пружним кільцем. Прикладна механ. АН УРСР, т. III, вып. 4, 1957, стр. 471—476.

Буйвол В. М.

[1] Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією. Прикладна механ. АН УРСР, т. V, вып. 3, 1959, стр. 276—287.

Бурмистров Е. Ф.

[1] О концентрации напряжений около овальных отверстий некоторого вида. Инж. сб., т. 17, 1953, стр. 199—202.

[2] К вопросу о концентрации напряжений около некруглых отверстий в изгибаемых тонких плитах. Инж. сб., т. 30, 1960, стр. 99—106.

Бухаринов Г. Н.

[1] Решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной криволинейным контуром частного вида. Сб. «Экспер. методы определения напряжений и т. д.» (работы Лаборатории оптического метода Ин-та мат. и мех. Ленинградск. гос. ун-та, Л.—М., 1935, стр. 135—149.

Вайнберг Д. В.

[1] Напряженное состояние составных дисков и пластин, Киев, 1952.

Вайнберг Д. В. и Угодчиков А. Г.

[1] Напряжения изгиба в тонкой плите при соединениях с натягом. Прикладна механ. АН УРСР, т. IV, вып. 4, 1958, стр. 396—400.

Векуа И. Н.

[1] Новые методы решения эллиптических уравнений, М.-Л., 1948.

[2] Приложение метода акад. Н. Мусхелишвили к решению граничных задач плоской теории упругости анизотропной среды. Сообщ. АН Груз. ССР, т. 1, № 10, 1940, стр. 719—724.

[3] Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщ. АН Груз. ССР, т. III, № 7, 1942, стр. 641—648.

[4] Интегрирование уравнений сферической оболочки. Прикл. матем. и механ., т. IX, вып. 5, 1945, стр. 368—388.

[5] К теории тонких пологих упругих оболочек. Прикл. матем. и механ., т. XII, вып. 1, 1948, стр. 69—74.

[6] О решении граничных задач теории оболочек. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XV, № 1, 1954, стр. 3—6.

[7] Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. 21, 1955, стр. 191—215.

[8] Обобщенные аналитические функции, Москва, 1959.

Векуа И. Н. и Мусхелишвили Н. И.

[1] Методы теории аналитических функций в теории упругости. Тр. Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. механике (27 янв.—3 фев. 1960), Изд. АН СССР, 1962, стр. 310—338.

Векуа И. Н. и Рухадзе А. К.

[1] Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, № 3, 1933, стр. 373—386.

[2] Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. Прикл. матем. и механ., т. I, вып. 2, Л., 1933, стр. 167—178.

Волков Д. М.

[1] Некоторые эффективные методы решения плоских статических задач теории упругости. Ученые записки Ленинградск. ун-та, № 96, 1948.

Волков Д. М. и Назаров А. А.

[1] Об одной предельной задаче и ее применении к плоской теории упругости. Матем. сб., т. 40, вып. 2, 1933, стр. 210—228.

[2] Плоская задача теории упругости в случае односвязной и двусвязной областей. Прикл. матем. и механ., т. 1, вып. 2, Л., 1933, стр. 209—227.

Воровнч И. И. и Космодамианский А. С.

[1] Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной рядом одинаковых криволинейных отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 4, 1959, стр. 69—76.

Галин Л. А.

[1] Смешанная задача теории упругости с силами трения для полуплоскости. Докл. АН СССР, т. XXXIX, № 3, 1943, стр. 88—93.

[2] Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. Прикл. матем. и механ., т. IX, вып. 5, 1945, стр. 413—424.

[3] Плоская упруго-пластическая задача. Пластические области у круговых отверстий в пластинках и балках. Прикл. матем. и механ., т. X, вып. 3, 1946, стр. 367—386.

[4] Контактные задачи теории упругости. М.—Л., 1953.

Гегелия Т. Г.

[1] О некоторых основных пространственных задачах теории упругости. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. 28, 1962, стр. 53—78.

Глаголев Н. И.

[1] Упругие напряжения вдоль основания плотины. Докл. АН СССР, т. XXXIV, № 7, 1942, стр. 204—208.

[2] Определение напряжений при давлении системы жестких профилей. Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 5, 1943, стр. 383—388.

[3] Сопротивление перекатыванию цилиндрических тел. Прикл. матем. и механ., т. IX, вып. 4, 1945, стр. 318—333.

Головин Х.

[1] Одна из задач статики упругого тела. Изв. СПб. технолог. ин-та за 1880—1881 гг., СПб., 1882.

Горгидзе А. Я.

[1] Метод последовательных приближений в применении к плоской задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. IV, № 5—6, стр. 254—256.

[2] Об одном применении метода последовательных приближений в теории упругости. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. IV, 1938, стр. 13—42.

[3] Вторичные эффекты в задаче растяжения бруса, составленного из различных материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 111—114.

[4] Вторичные эффекты кручения составного бруса. Сообщ. АН Груз. ССР, т. VII, № 8, 1946, стр. 515—519.

[5] Растяжение и кручение составных брусьев, близких к призматическим. Сообщ. АН Груз. ССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 605—612.

[6] Кручение растянутого призматического бруса, составленного из различных материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. IX, № 3, 1948, стр. 161—165.

[7] Кручение и изгиб составных брусьев, близких к призматическим. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. XVI, 1948, стр. 117—141 (на груз. яз., с кратким резюме на русском яз.).

[8] Изгиб парой сил растянутого призматического бруса, составленного из различных материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. IX, № 9—10, 1948, стр. 539—545.

[9] Изгиб парой сил закрученного составного стержня. Тр. Грузинск. политехн. ин-та, № 17, 1948, стр. 79—87.

[10] Растяжение и изгиб парой сил естественно закрученных брусьев. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIII, № 2, 1952, стр. 73—80.

Горгидзе А. Я. и Рухадзе А. К.

[1] О численном решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости. Сообщ. АН Груз. ССР, т. I, № 4, 1940, стр. 255—258.

[2] О вторичных эффектах при кручении армированного кругового цилиндра. Сообщ. АН Груз. ССР, т. III, № 8, 1942, стр. 759—766.

[3] Вторичные эффекты в задаче растяжения и изгиба парой бруса, составленного из различных материалов. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. XII, 1943, стр. 79—94.

Грушко Г. С. Згин тонкої ізотропної плити, ослабленної отвором у формі півкола. Прикладна механ., АН УРСР, т. I, вып. 2, 1955, стр. 177—181.

Гурьев М. Ф.

[1] Распределение напряжений в растягиваемой конечной прямоугольной пластинке, ослабленной круговым отверстием. Докл. АН УССР, вып. 2, 1953, стр. 133—139.

Джанелидзе Г. Ю.

[1] Статика упруго-пластических стержней. Автореферат дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук, Ленинградск. политехн. ин-т, 1949.

[2] Задача Альманзи. Тр. Ленинградск. политехн. ин-та имени М. И. Калинина, № 210, 1960, 25—38.

Динник А. Н.

[1] Кручение. Теория и приложения. М.—Л., 1938.

Динник А. Н., Моргаевский А. Б. и Савин Г. Н.

[1] Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок. Тр. Совещания по управлению горным давлением, Изд. АН СССР, 1938, стр. 7—55.

Желтов Ю. П.

[1] Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующейся жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8, стр. 56—62.

Желтов Ю. П. и Христианович С. А.

[1] О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1955, стр. 3—41.

Жуков В. Е.

[1] Напряжения в пластине с резко меняющейся шириной. Тр. Ленинградск. корабл. ин-та, вып. II, 1953, стр. 62—76.

Исмаилов М. У.

[1] Об определении напряжений в скручиваемом круглом брусе, ослабленном призматической полостью. Уч. зап. Аз. ун-та, 1957, № 11, стр. 39—48.

Каландия А. И.

[1] Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 271—282.

[2] Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки. Прикл. матем. и механ., т. XVI, 1952, вып. 5, стр. 513—532.

[3] Решение некоторых задач об изгибе упругой пластинки. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 3, 1953, стр. 293—310.

[4] О задаче равновесия упругой пластинки с опертыми краями. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. XIX, 1953, стр. 193—210.

[5] Изгиб упругой пластинки в виде эллиптического кольца. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 6, 1953, стр. 691—704.

[6] К контактным задачам теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XXI, вып. 3, 1957, стр. 389—398.

[7] Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости. Матем. сб., т. 42, вып. 2, 1957, стр. 249—272.

[8] Плоская задача типа Герца о сжатии цилиндрических тел. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XXI, № 1, 1958, стр. 3—10.

[9] О задаче Герца о сжатии упругих тел. Тр. вычисл. центра АН Груз. ССР, т. I, 1960, стр. 113—123.

[10] Об одном способе решения задач теории упругости для полукруга. Сб. Проблемы механики сплошной среды. Москва, Изд. АН СССР, 1961, стр. 161—169.

Канторович Л. В. и Крылов В. И.
[1] Приближенные методы высшего анализа, Л.—М., 5-е изд. 1962.
Капанян Л. К.
[1] Выбор отображающих функций при решении задачи о кручении полых призматических стержней. Сб. научн. тр. Ереванск. политехн. ин-та, 1958, № 14, стр. 13—19.
Карапетян М. Е.
[1] Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. Тр. Тбилисск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1957, вып. 31, стр. 63—70.
Карцивадзе И. Н.
[1] Основные задачи теории упругости для упругого круга. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. XII, 1943, стр. 95—104 (на груз. яз., с кратким резюме на русском яз.).
[2] Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сообщ. АН Груз. ССР, т. VII, № 8, 1946, стр. 507—513.
Кислер Л. Н.
[1] Об определении поля напряжений в весомой полуплоскости с эллиптическим и круговым отверстиями. Изв. АН СССР, ОТН, механ. и машиностр., № 2, 1961, стр. 159—163.
[2] О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми несимметрично расположенными отверстиями. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 3, 1960, стр. 34—42.
Кожевникова В. Н.
[1] Распределение напряжений возле прямоугольного отверстия в бесконечной пластинке, изгибаемой в своей плоскости. Уч. зап. Львовск. гос. ун-та, т. 29, 1954, стр. 112—130.
Колосов Г. В.
[1] Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909.
[2] Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 62, 1914, S. 383—409.
[3] Влияние коэффициентов упругости на распределение напряжений в плоской задаче теории упругости. Изв. Электротехн. ин-та, вып. 17, Л., 1931, стр. 85—88.
[4] Sur l'extension d'un théorème de Maurice Levy. C. R. Paris, t. 188, 1929, p. 1593.
[5] Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au problème plan de l'élasticité. C. R. Paris, t. 193, 1931, p. 389.
[6] Применение комплексной переменной к теории упругости, М.—Л., 1935.
Колосов Г. В. и Мусхелишвили Н. И.
[1] О равновесии упругих круглых дисков. Изв. Электротехн. ин-та, т. XII, Петроград, 1915, стр. 39—55.
Корбукова Л. Д.
[1] Изгиб эллиптической анизотропной пластинки, заделанной по краю. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 12, 1958, стр. 78—84.
[2] Изгиб квадратной анизотропной пластинки, заделанной по краю. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 3, 1959, стр. 184—189.
Космодамианский А. С.
[1] Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 2, 1960, стр. 132—135.
[2] Про напружений стан ізотропної пластинки, ослабленої скінченним числом нескінченних рядів кругових отворів. Доповіді АН УРСР, 1961, стр. 1444—14449.
[3] О напряженном состоянии горного массива, ослабленного большим количеством выработок квадратного сечения. Тр. ВНИМИ., сб. 45, Л., 1962, стр. 194—203.

[4] Пружна рівновага ізотропної пластинки, ослабленої скінченним числом криволінійних отворів. Прикладна механ., т. VII, вып. 6, 1961, стр. 663—671.
[5] Приближенные методы определения напряженного состояния упругого горного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения. Тр. ВНИМИ, сб. 45, Л., 1962, стр. 180—193.
[6] О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения. Тр. ВНИМИ, сб. 42, Л., 1961, стр. 20—31.

Кулик А. Н.
[1] Розтяг квадратної пластинки з підкріпленим круговим отвором. Прикладна механ. АН УРСР, т. II, вып. 4, 1956, стр. 378—387.

Купрадзе В. Д.
[1] Методы потенциала в теории упругости, Москва, 1963.

Курдин Н. С.
[1] О напряженном состоянии в полубесконечных областях при действии сосредоточенных сил. Инженерный ж., № 4, 1962, стр. 303—311.

Куршин Л. М.
[1] Смешанная плоская задача теории упругости для квадранта. Прикл. матем. и механ., т. XXIII, вып. 5, 1959, стр. 981—984.

Кутателадзе Г. А.
[1] Кручение и изгиб поперечной силой цилиндрического бруса, составленного из различных упругих материалов, поперечное сечение которого разграничено гипертрохоидами (на груз. яз.). Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1 (42), 1956, стр. 1—6.

Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.
[1] Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, «Наука», М., 1965.

Лейбензон Л. С.
[1] Курс теории упругости. 2-е изд., М.—Л., 1947.

Леонов М. Я. и Панасюк В. В.
[1] Развиток найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикладна механ. АН УРСР, т. V, вып. 4, 1959, стр. 391—401.

Лехницкий С. Г.
[1] Анизотропные пластинки, М.—Л., 1947, 2-е изд., 1957.
[2] О влиянии кругового отверстия на распределение напряжения в балках. Сб. Оптический метод изучения напряжений в деталях машин, М.—Л., 1935.
[3] О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. Прикл. матем. и механ., т. II, вып. 2, 1938, стр. 181—210.
[4] Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1950.

Локшин А. С.
[1] Sur l'influence d'un trou elliptique dans la poutre qui éprouve une flexion C. R. Paris, t. 190, 1930, p. 1178.

Лурье А. И.
[1] К задаче равновесия пластинки с опертыми краями. Изв. Ленинградск. политехн. ин-та, т. XXXI, 1928, стр. 305—320.
[2] Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки. Прикл. матем. и механ., т. IV, вып. 1, 1940, стр. 93—102.

Магнарадзе Л. Г.
[1] Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Докл. АН СССР, т. XVI, № 3, 1937, стр. 157—161.
[2] К решению основных задач плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Докл. АН СССР, т. XIX, № 9, 1938, стр. 673—676.
[3] Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. IV, 1938, стр. 43—76.

[4] Некоторые граничные задачи математической физики для поверхностей с угловыми линиями. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. VII, 1939, стр. 25—46.

Манджавидзе Г. Ф.

[1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XI, № 5, 1950, стр. 269—274.

[2] Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 279—296.

[3] Сингулярные интегральные уравнения как аппарат решения смешанных задач плоской теории упругости. Международный симпозиум по приложениям теории функций в механике сплошной среды (Тбилиси, сентябрь, 1963). Аннотации докладов, М., 1963.

Маркузон И. А.

[1] О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. Прикл. матем. и механ., т. XXV, № 3, 1961, стр. 356—361.

Маркушевич А. И.

[1] Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

Мартинович Т. Л.

[1] Згин пластинки у вигляді еліптичного конфокального кільця з підкріпленим краєм. Прикладна механ. АН УРСР, т. IV, вып. 1, 1958, стр. 70—79.

[2] Згин бесконечної пластинки з квадратним отвором, підкріпленим тонким пружним кільцем. Прикладна механ. АН УРСР, т. IV, вып. 3, 1958, стр. 343—348.

Минцберг Б. Л.

[1] Смешанная граничная задача теории упругости для плоскости с круговым отверстием. Прикл. матем. и механ., т. XII, вып. 4, 1948, стр. 415—422.

Михлин С. Г.

[1] Le problème fondamental biharmonique à qeux dimensions. C. R. Paris, t. 197, 1933, p. 608.

[2] Приведение основных задач плоской теории упругости к интегральному уравнению Фредгольма. Докл. АН СССР, новая серия, 1934, т. I, стр. 295.

[3] La solution du problème plan biharmonique et des problèmes de la théorie statique d'elasticite à deux dimensions.
Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 37, 1934.

[4] О распределении напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 29, 1934.

[5] Метод последовательных приближений в бигармонической проблеме. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 39, 1934.

[6] Теорема единственности для основной бигармонической проблемы. Матем. сб., т. 41, вып. 2, 1934, стр. 284—291.

[7] Quelques remarques relatives à la solution des problèmes plans d'elasticité. Матем. сб., т. 41, вып. 3, 1934, стр. 408—420.

[8] Некоторые случаи плоской задачи теории упругости для неоднородной среды. Прикл. матем. и механ., т. II, вып. 1, 1934, стр. 82—90.

[9] Плоская задача теории упругости. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 65, 1935.

[10] Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 66, 1935.

[11] Плоская деформация в анизотропной среде. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 76, 1936.

[12] О напряжениях в породе над угольным пластом. Изв. АН СССР, ОТН, 1942, № 7—8, стр. 13—28.

[13] Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, М.—Л., 1947.
[14] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва, 1962.

Морозова Е. А. и Партон В. З.
[1] О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин. Ж. прикл. механ. и техн. физ., № 5, 1961, стр. 112—114.

Моссаковский В. И.
[1] Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. Прикл. матем. и механ., т. XVIII, вып. 2, 1954, стр. 187—196.

Моссаковский В. И. и Загубиженко П. А.
[1] Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН СССР, т. XCIV, № 3, 1954, стр. 409—412.

Мошкин П. Н.
[1] Задача об упругой полуплоскости с двумя отверстиями, одно из которых есть круг, а второе — эллипс. Уч. зап. Новосиб. пед. ин-та, вып. 13, 1958, стр. 17—47.
[2] Задача о весомой упругой полуплоскости с двумя эллиптическими отверстиями. Уч. зап. Новосиб. пед. ин-та, вып. 13, 1958, стр. 49—62.

Мусхелишвили Н. И.
[1] О тепловых напряжениях в плоской задаче теории упругости. Изв. Электротехн. ин-та, т. XIII, Петроград, 1916, стр. 23—37.
[2] Sur l'équilibre des corps elastiques sommis à l'action de la chaleur. Изв. Тифлисск. ун-та, № 3, 1923.
[3] Sulla deformatione piana di un cilindre elastico isotropo. Rendiconti d. R. Acad. dei Lincei. 5 ser., v. XXXI, 1922, p. 548—551.
[4] Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Изв. Росс. Акад. наук, 1919, стр. 663—686.
[5] Application des intégrales analogues a celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathematique. Tiflis, édition, de L'Université, 1922.
[6] Sur l'intégration approchée de l'équation biharmonique. C. R. Paris, t. 185, 1927, p. 1184.
[7] Sur la solution du problème biharmonique pour l'aire extérieure ă une ellipse. Math. Ztschr., Bd. 26, 1927, S. 700—705.
[8] Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 13, 1933, S. 264—282.
[9] Nouvelle méthode de réduction de problème biharmonique fondamental à une équation de Fredholm. C. R. Paris, t. 192, 1931, p. 77.
[10] Thèorèmes d'existence relatifs au problème biharmonique et aux problèmes d'élasticité à deux dimensions. Ibid., p. 221.
[11] Recherches sur les problèmes aux limites relatifs a l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions. Math. Ann., Bd. 107, 1932, S. 282—312.
[12] Sur le problème de torsion des cylindres élastiques isotropes. Rendic. d. R. Acad. dei Lincei, 6 ser., v. IX, 1929, p. 295—300.
[13] Zum Problem der Torsion der homogenen isotropen Prismen. Изв. Тифлисск. политехн. ин-та, т. I, 1929, стр. 1—20.
[14] Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées. C. R. Paris, t. 194, 1932, p. 1435.
[15] К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов. Изв. АН СССР, 1932, вып. 7, стр. 907—945.

[16] Решение плоской задачи теории упругости для сплошного эллипса. Прикл. матем. и механ., т. I, вып. 1, 1933, стр. 5—16.
[17] Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. III, № 1, стр. 7—11.
[18] Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. III, № 2, стр. 73—77.
[19] Об одной новой контурной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1934, т. III, № 3, стр. 141—144.
[20] Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости. Докл. АН СССР, т. VIII, № 2, 1935, стр. 51—54.
[21] О численном решении плоской задачи теории упругости. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. I, 1937, стр. 83—87 (на груз. яз., с кратким резюме на русском яз.).
[22] Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сообщ. АН Груз. ССР, т. II, № 10, 1941, стр. 873—880.
[23] Основные граничные задачи теории упругости для плоскости с прямолинейными разрезами. Сообщ. АН Груз. ССР, т. III, № 2, 1942, стр. 103—110.
[24] К задаче равновесия жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения. Сообщ. АН Груз. ССР, т. III, № 5, 1942, стр. 413—418.
[25] Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.— Л., 1946 (2-е издание, 1962).

Найман М. И.

[1] Напряжения в балке с криволинейным отверстием. Тр. ЦАГИ, вып. 313, Москва, 1937.
[2] Кручение кругового цилиндра, имеющего сосную многогранную полость. В сб. Расчеты на прочность, вып. 3, 1958, стр. 170—193.

Народецкий М. З.

[1] Об одной задаче плоской теории упругости, разрешаемой в замкнутой форме. Сообщ. Груз. ССР, т. 19, № 3, 1957, 263—266.
[2] Растяжение квадратной пластинки, ослабленной круговым вырезом в центре. Инж. сб., т. 14, 1953, стр. 101—108.

Натанзон В. Я.

[1] О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Матем. сб., т. 42, № 5, 1935, стр. 617—636.

Панасюк В. В.

[1] Давление диска на круговое отверстие в упругой плоскости. Научн. зап. ин-та маш. и автомат. АН УССР, т. I, 1953, стр. 110—120.
[2] Контактная задача для кругового отверстия. Научн. зап. ин-та маш. и автомат. АН УССР, т. III, сер. машин., вып. 2, 1954, стр. 59—79.
[3] Тиск штампа на границу кругового отвору. Доповіді Академії наук УРСР, № 1, 1954, стр. 37—40.
[4] Определение напряжений и деформаций вблизи мельчайшей трещины. Научн. зап. ин-та маш. и автомат. АН УССР, 1960, т. 7, стр. 114—127.
[5] До теорії поширення тріщин при деформації крихкого тіла. Доповіді Академії наук УРСР, № 9, 1960, стр. 1185—1189.

Панасюк В. В. и Лозовой Б. Л.

[1] Вивчення величини рустнусочих напружень для пластини з двома тріщинами рівної довжини. Доповіді Академії наук УРСР, № 7, 1961, стр. 876—880.
[2] Определение предельных напряжений при растяжении упругой плоскости с двумя неравными трещинами. Сб. Вопросы механики реального твердого тела, вып. 1, Изд. УССР, 1962, стр. 37—56.

[3] Некоторые задачи изгиба полосы с прямолинейной трещиной. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 1, 1962, стр. 138—143.

Папкович П. Ф.

[1] Теория упругости, Л.— М., 1939.

Перлин П. И.

[1] Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстий. В сб. Исследования по механике и прикладной матем. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, № 5, 1960, стр. 30—40.

[2] Решение плоских упруго-пластических задач для двусвязных областей. Инженерный ж., № 4, 1961, стр. 68—75.

[3] Метод расчета контейнеров для прессования из плоского слитка. Вестн. машин., № 5, 1959, стр. 57—58.

[4] О свойствах бесконечных систем уравнений в задачах теории упругости двухсвязных тел. В сб. Исследования по механике и прикладной матем. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, вып. 5, 1960, стр. 125—133.

Перлин П. И. и Толченова Л. Ф.

[1] Контейнеры для плоских слитков. Тр. ВНИИ мет. маш., № 1, 1960.

Положий Г. Н.

[1] Решение третьей основной задачи плоской теории упругости для произвольного конечного выпуклого многоугольника. Докл. АН СССР, т. 73, № 1, 1950, стр. 49—52.

[2] Решение некоторых задач плоской теории упругости для областей с угловыми точками. Укр. матем. ж., № 4, 1949, стр. 16—41.

[3] Общее решение задачи соприкасания с жестким профилем для произвольного многоугольника и произвольного многоугольного отверстия. Наукові записки Київ. ун-ту, т. 16, вып. 2, 1957, стр. 35—51.

[4] К вопросу о (p, q)-аналитических функциях комплексного переменного и их применениях. Revue des Mathem. pures et appl. t. II, 1957, p. 331—361.

[5] Про одне інтегральне перетворення узагальнених аналітичних функцій. Вістник КДУ, сер. астр. мат. механ., вып. 1, № 2, 1959, стр. 19.

Положий Г. М. и Капшивий О. М.

[1] Про розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для скінченного циліндра. Прикладна механ., т. VII, вып. 6, 1961, стр. 616—627.

Положий Г. М. и Чемерис В. С.

[1] Об интегральных уравнениях осесимметричной теории упругости. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (сб. статей), Москва, 1961, стр. 399—412.

[2] До питання про застосовування p-аналітичних функцій в осесиметричній теорії пружності. Доповіді Академії наук УРСР, № 12, 1958, стр. 1284—1287.

Привалов И. И.

[1] Введение в теорию функций комплексного переменного, 8-е изд., М.— Л., 1948.

Прусов И. А.

[1] Розтяг бесконечної пластинки з круговим отвором, підкріпленим кільцем змінного перерізу. Наук. зап. Львів. ун-ту, серія мех.-мат., т. 44, вып. 8, 1957.

[2] Пружна півплощина з підкріпленим круговим отвором. Наук. зап. Львів. ун-ту, серія мех.-мат., т. 44, вып. 8, 1957, стр. 17—21.

Ростовцев Н. А.

[1] Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 5, 1953, стр. 611—614.

[2] Комплексные потенциалы в задаче о штампе круглом в плане. Прикл. матем. и механ., т. XXI, вып. 1, 1957, стр. 77—82.

Рухадзе А. К.
[1] Изгиб поперечной силой кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, 1933, № 9, стр. 1297—1308.
[2] Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитрохоидами. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. I, 1937, стр. 125—139 (на груз. яз., с кратким резюме на русском яз.).
[3] К задаче изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. I, № 2, 1940, стр. 107—114.
[4] Вторичные эффекты в задаче изгиба парой бруса, составленного из различных материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 115—122.
[5] К вопросу деформации брусьев, близких к призматическим, составленных из различных упругих материалов. Тр. Груз. политехн. ин-та, № 23, 1951, стр. 23—37.
[6] Задача растяжения силой естественно закрученных призматических брусьев, составленных из различных упругих материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIII, № 3, 1952, стр. 137—144.
[7] Задача изгиба парой естественно закрученных призматических брусьев, составленных из различных упругих материалов. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIII, № 5, 1952, стр. 265—272.

Савин Г. Н.
[1] Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном какими-либо отверстиями. Тр. Днепропетровск. инж.-строит. ин-та. Сообщ. 10, 1936.
[2] Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле. Тр. Днепропетровск. инж.-стр. ин-та, вып. 20, 1937.
[3] Основна плоска статична задача теорії пружності для анізотропного середовища. Наукові праці Інст. будівельн. механіки АН УРСР, № 32, 1938.
[4] Про один метод розв'язання основної плоскої статичної задачи теорії пружності анізотропного середовища. Збірник праць інст. мат. АН УРСР, № 3, 1939, стр. 123—139.
[5] Тиск абсолютно твердого штампа на пружне анізотропне середовище. Доповіді АН УРСР, відділ техн. наук, № 6, 1939, стр. 27—34.
[6] Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды. Докл. АН СССР, т. XXIII, № 3, 1939, стр. 217—220.
[7] Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом равных вырезов. Докл. АН СССР, т. XXIII, № 6, 1939, стр. 515—518.
[8] Концентрация напряжений около отверстий, М.— Л., 1951.

Савин Г. М. и Флейшман Н. П.
[1] Пластинки, краї яких підкріплені тонкими ребрами. Прикладна механ. АН УРСР, т. VII, в. 4, 1961, стр. 349—361.
[2] Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Наукова думка, Киев, 1964.

Садовский М. А.
[1] Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech. Bd. 8, 1928, S. 107—121.
[2] Über Randwertaufgaben für die elastische Halbebene und die geschlitzte elastische Vollebene. Ibid., Bd. 10, 1930, S. 77—81.

Смирнов В. И.
[1] Курс высшей математики, т. II, III.
[2] Über die Randezuordnung bei konformer Abbildung. Math. Ann. Bd. 104, 1932.

Соболев С. Л.
[1] Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. Матем. сб., т. 2 (44), вып. 3, 1937, стр. 465—499.
[2] Алгорифм Шварца в теории упругости. Докл. АН СССР, нов. сер., т. XIII, 1936, стр. 235—238.

Соколов П.
[1] Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Бюлл. Научно-техн. ком. УВМС РККА, вып. IV, 1930, стр. 39—71.
Сохоцкий Ю. В
[1] Об определенных интегралах в функциях, употребляемых при разложениях в ряды, С.-Петербург, 1873.
Степанов Р. Д. и Шерман Д. И.
[1] Кручение круглого бруса, ослабленного продольными цилиндрическими круговыми полостями. Инж. сб., т. XI, 1952, стр. 127—150.
Сухаревский И. В.
[1] К задаче о кручении составного многосвязного бруса. Инж. сб., т. 19, 1954, стр. 107—124.
Тарабасов Н. Д.
[1] Определение напряжений в пластинке с несколькими запрессованными в нее шайбами. Докл. АН СССР, т. 63, № 1, 1948, стр. 15—18.
[2] Расчеты на прочность прессовых соединений. Докл. АН СССР, т. 67, № 4, 1949, стр. 615—618.
[3] Расчеты на прочность составных кольцевых деталей. Докл. АН СССР, т. 70, № 6, 1950, стр. 977—980.
[4] Напряженные соединения машиностроительных деталей и их расчеты. В сб. Расчеты на прочность, вып. 3, 1958.
[5] Определение в некоторых деталях напряжений, возникающих от напряженной посадки. В сб. Расчеты на прочность, вып. 2, 1958.
[6] Напряженное состояние многосвязной полуплоскости от запрессовки в нее дисков. Инж. сб., т. 25, 1959, стр. 136—144.
Тимошенко С. П.
[1] Курс теории упругости, Петроград, ч. I, 1914; ч. II, 1916.
Тирский Г. А.
[1] Кручение полого стержня, ограниченного крыловыми профилями Жуковского — Чаплыгина. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 2, 1959, стр. 114—121.
Тунин В. В.
[1] Про запресування еліптичної шайби у отвір круглої плити. Прикладна механ. АН УРСР, т. VI, вып. 1, 1960, стр. 106—109.
Угодчиков А. Г.
[1] Определение напряжений при запрессовке круглых шайб в пластинку, ограниченную кривой частного вида. Докл. АН СССР **77**, № 2, 1951, стр. 213—216.
[2] До розв'язання плоскої задачі для складового ізотропного середовища за допомогою електромоделювання конформного перетворення. Доповіді АН УРСР, № 4, 1957, стр. 343—347.
[3] Про розрахунок посадочних напружень в машинобудівельних деталях. Прикладна механ., АН УРСР, т. III, вып. 2, 1957, 202—208.
[4] Про одну аналогію при дослідженні концентрації напружень поблизу отворів. Прикладна механ., АН УРСР, т. VI, вып. 4, 1960, стр. 429—434.
[5] Определение напряжений при запрессовке в пластину нескольких круглых шайб с переменным натягом. Инж. сб., т. 27, 1960, стр. 157—161.
[6] Электромоделирование задачи конформного преобразования круга на наперед заданную односвязную область. Укр. матем. ж., т. 7, № 2, 1955, стр. 221—230.
[7] Розрахунок на кручення призматичних ізотропних стержнів з однозв'язним поперечним перерізом. Прикладна механ., т. II, вып. 1, 1956, 67—72.
[8] Кручення порожнистих призматичних стержнів. Прикладна механ. т. II, вып. 2, 1956, 217—223.

Угодчиков А. Г. и Крилов А. Я.
[1] До розв'язання однієї контактної задачі. Прикладна механ., т. VIII, вып. 1, 1962, стр. 20—31.
Уфлянд Я. С.
[1] Смешанная задача теории упругости для клина. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., № 2, 1959, стр. 156—158.
[2] Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд. АН СССР, М.— Л., 1963.
Фалькович С. В.
[1] О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. Прикл. матем. и механ., т. IX, вып. 5, 1945, стр. 425—432.
Флейшман Н. П.
[1] Изгиб бесконечной плиты с подкрепленным круговым отверстием. Уч. зап. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., т. 29, вып. 1 (6), 1954, стр. 105—111.
[2] Изгиб круглой кольцевой плиты, край которой подкреплен тонким упругим кольцом. Уч. зап. Львов. ун-та, сер. физ.-мат., т. 22, вып. 5, 1953, стр. 84—95.
Фок В. А.
[1] Sur la réduction du problème plan d'élasticité à une équation intégrale de Fredholm. C. R. Paris, t. 182, 1926, p. 264.
[2] Приведение плоской задачи теории упругости к интегральному уравнению Фредгольма. ЖРФХО, ч. физ., т. 58, 1927, вып. 1, стр. 11—20.
Фок В. А. и Мусхелишвили Н. И.
[1] Sur l'équivalence de deux méthodes de réduction de problème plan biharmonique dà une equation intégrale. C. R. Paris, t. 196, 1933, p. 1947.
Фридман М. М.
[1] Изгиб тонкой изотропной плиты с криволинейным отверстием. Прикл. матем. и механ., т. IX, вып. 4, 1945, стр. 334—338.
[2] Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края. Прикл. матем. и механ., т. XVI, 1952, стр. 429—436.
[3] Математическая теория упругости анизотропных сред. Прикл. матем. и механ., т. XIV, вып. 3, 1950, стр. 321—340.
[4] Изгиб круглой плиты сосредоточенными силами. Прикл. матем. и механ., т. 15, вып. 2, 1951, стр. 258—260.
Халилов З. И.
[1] Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 4, 1950, стр. 405—414.
Хатиашвили Г. М.
[1] К вопросу о деформации цилиндрического составного бруса с нагруженной боковой поверхностью. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIII, № 6, 1952, стр. 335—341.
[2] К вопросу о деформации составного цилиндрического бруса с боковой нагрузкой, меняющейся вдоль образующей цилиндра. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIV, № 4, 1953, стр. 197—204.
[3] Упругое равновесие составного цилиндрического бруса с нагруженной боковой поверхностью в случае различных коэффициентов Пуассона. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XVI, № 1, 1955, стр. 20—25.
[4] Упругое равновесие составного цилиндрического бруса при меняющейся вдоль образующей цилиндра боковой нагрузке. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XVIII, № 4, 1957, стр. 393—400.
[5] Упругое равновесие кругового цилиндрического бруса, составленного из двух различных упругих материалов. Тр. Вычисл. центра АН Груз. ССР, т. I, 1960, стр. 181—199.

[6] Задача Альманси — Митчеля для составного бруса. Тр. вычисл. центра АН Груз. ССР, т. II, 1961, стр. 213—239.

Хачиян Э. Е.

[1] Растяжение пластинки с овалообразным отверстием. Тр. Ереванск. ун-та, № 8, 1958, стр. 185—196.

Холмянский М. М.

[1] К решению систем алгебраических уравнений основных задач плоской теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 317—322.

Цян Вэй-чан, Линь Хун-сунь, Ху Хай-чан, Е Кай-юань

[1] Теория кручения цилиндрических тел (на китайском языке). Пекин, 1956.

Чанкветадзе Г. М.

[1] Изгиб круглой пластинки, опертой в нескольких точках. Инж. сб., т. 14, 1953, стр. 73—80.

Чаплыгин С. А.

[1] Собрание сочинений, т. III, М.— Л., 1950.

Чемерис В. С.

[1] Одномірні інтегральні рівняння осесиметричної теорії пружності. Вест. Киевск. ун-та, № 3, сер. мат.-мех., вып. 2, 1960, стр. 105—113.

[2] До питання про застосовування p-аналітичних функцій в осесиметричній теорії пружності. Доповіді АН УРСР, № 7, 1960, стр. 903—906.

Чен Лин-Си

[1] К вопросу о концентрации напряжений при наличии многих отверстий. Сб. Проблемы механики сплошной среды, Москва, Изд. АН СССР, 1961, стр. 494—498.

Черепанов Г. П.

[1] Решение одной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. XXVI, вып. 5, 1962, стр. 907—912.

[2] О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, сер. механ. и машиностр., № 1, 1962, стр. 131—138.

Шапиро Г. С.

[1] Напряжения у отверстия в бесконечном клине. Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, № 3, 1941, стр. 184—199.

Шеленговский Ф.

[1] Решение плоской задачи теории упругости в прямоугольных координатах с учетом действия массовых сил. Бюлл. Польск. Ак. наук, отд. 4, т. 4, № 2, 1956, стр. 113—118.

Шереметьев М. П.

[1] Упругое равновесие бесконечной пластинки с вложенной абсолютно жесткой или упругой шайбой. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 4, 1952, стр. 437—448.

[2] Упругое равновесие эллиптического кольца. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 1, 1953, стр. 107—113.

[3] Влияние упругого кольца, впаянного в криволинейное отверстие, на однородно напряженное плоское поле. Укр. матем. ж., № 3, 1949, стр. 68—80.

[4] Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сб., т. 14, 1953, стр. 81—100.

[5] Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. матем. ж., т. 5, № 1, 1953, стр. 58—79.

[6] Изгиб бесконечной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием, край которой подкреплен тонким кольцом. Инж. сб., т. 25, 1959, стр. 51—63.

[7] Пластинки с подкрепленным краем, Львов, Изд. Львовск. ун-та, 1960.

[8] Решение уравнения некоторых контактных задач теории упругости (уравнение типа Прандтля). Сб. Проблемы механики сплошной среды, Изд. АН СССР, Москва 1961, 508—526.

Шерман Д. И.

[1] Об одном методе решения статической задачи о напряжениях для плоских многосвязных областей. Докл. АН СССР, новая серия, т. I, № 7, 1934, стр. 376—378.

[2] К решению второй основной задачи теории упругости для плоских многосвязных областей. Докл. АН СССР, т. IV (IX), № 3, 1935, стр. 119—122.

[3] К новому методу Н. И. Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости. Докл. АН СССР, т. I (X), № 5, 1936, стр. 201—206.

[4] Определение напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 53, 1935.

[5] Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 54, 1935.

[6] Статические плоские задачи теории упругости. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. II, 1937, стр. 163—225.

[7] О распределении характеристических чисел интегральных уравнений плоской теории упругости. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 82, 1938.

[8] Статическая плоская задача теории упругости для изотропных неоднородных сред. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 86, 1938, стр. 1—50.

[9] Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 86, 1938, стр. 51—78.

[10] Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 88, 1938.

[11] О некоторых свойствах интегральных уравнений теории упругости. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 100, 1940.

[12] Упругая плоскость с прямолинейными разрезами. Докл. АН СССР, т. XXVI, № 7, 1940, стр. 635—638.

[13] Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. Докл. АН СССР, т. XXVII, № 4, 1940, стр. 330—334.

[14] Об одной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940, стр. 907—910.

[15] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. Докл. АН СССР, т. XXXVII, № 9, 1940, стр. 911 913.

[16] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940, стр. 25—28.

[17] Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей. Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940, стр. 29—32.

[18] О напряжениях в эллиптической пластинке. Докл. АН СССР, т. XXXI, № 4, 1941, стр. 309—310.

[19] Новое решение плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ДАН СССР, т. XXXII, № 5, 1941, стр. 314—315 (см. еще Прикл. матем. и механ., т. VI, вып. 6, 1942, стр. 509—514).

[20] Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 4, 1943, стр. 301—309.

[21] Пространственная статическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе. Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 5, 1943, стр. 341—360.

[22] Об одной смешанной задаче теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 6, 1943, стр. 413—420.

[23] О напряженном состоянии некоторых запрессованных деталей. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1948, стр. 1371—1388.
[24] О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Прикл. матем. и механ., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 297—316.
[25] О напряжениях в плоской весомой среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными отверстиями. Прикл. матем. и механ., вып. 6, 1951, стр. 751—761.
[26] К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Упругая весомая среда, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1952, стр. 840—857; № 7, 1952, стр. 992—1010.
[27] Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб., т. X, 1951, стр. 81—108.
[28] Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двухсвязных областей. Докл. АН СССР, т. 55, № 8, 1947, стр. 701—704.
[29] К вопросу о напряженном состоянии весомой полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями. Тр. Ин-та физ. Земли АН СССР, т. 3, 1959.
[30] О напряжениях в весомой среде, ослабленной эллиптическим и круговым отверстиями. Инж. сб., т. 27—28, 1960, стр. 124—156.
[31] Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой формы, ч. 1, Инж. сб., т. 31, 1961, стр. 24—75.
[32] Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруглой формы, ч. 2, Инж. журнал, т. I, вып. 1, 1961, стр. 92—104.
[33] Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы. В сб. Пробл. механ. сплош. среды, Изд. АН СССР, 1961, стр. 527—563.
[34] О напряжениях в плоской весомой среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями. Прикл. матем. и механ., т. 15, вып. 6, 1951, стр. 751—761.
[35] On the Problem of plane strain in nonhomogeneous media. Symposium held in Warsaw. Pergamon Press, 1958.
[36] Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд. АН СССР, М.—Л., 1962, стр. 405—467.
[37] Об изгибе круглой пластинки, частично защемленной и частично опертой по контуру. Докл. АН СССР, т. 101, № 4, 1955, стр. 623—626.
[38] Об изгибе круглой пластинки, частично опертой и частично свободной по контуру. Докл. АН СССР, т. 105, № 6, 1955, стр. 1180—1183.
[39] Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями. Докл. АН СССР, т. 114, № 4, 1957, стр. 733—736.
[40] Об одной задаче кручения. Докл. АН СССР, 1948, т. XIII, № 5, 499—502.
[41] О напряжениях в скручиваемом круговом брусе, ослабленном призматической полостью. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1951, стр. 969—995.
[42] Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб., т. X, 1951, стр. 81—108.
[43] О свойствах бесконечных систем уравнений в задачах кручения некоторых двухсвязных профилей. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 4, 1953, стр. 470—476.
[44] Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью. Инж. сб., т. XVII, 1953, 121—150.
[45] Про один метод розв'язання деяких задач кручення, згину і плоскої теорії пружності для неоднозв'язних областей. Прикладна механ., т. III, вып. 4, 1957, стр. 363—377.

[46] Про напружений стан скручуваного квадратного бруса з симетричною круговою порожниною. Прикладна механ., т. IV, вып. 3, 1958, 250—262.
[47] К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью. Инж. сб., т. XXV, 1959, стр. 2—19.

Шерман Д. И., и Народецкий М. З.
[1] О кручении некоторых призматических полых тел. Инж. сб., т. VI, 1950, стр. 17—46.

Ширяев Е. А.
[1] О кручении круглого бруса с трещиной по дуге окружности или по радиусу. Прикл. матем. и механ., т. XX, вып. 4, 1956, 555—558.
[2] Кручение круглого бруса с двумя вырезами. Прикл. матем. и механ., т. XXII, вып. 4, 1958, 549—553.

Штаерман И. Я.
[1] К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. Докл. АН СССР, т. XXV, № 5, 1939, стр. 360—362.
[2] Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. Докл. АН СССР, т. XXIX, № 3, 1940, стр. 179—181.
[3] Некоторые особые случаи контактной задачи. Докл. АН СССР, т. XXXVIII, № 7, 1943, стр. 220—224.
[4] Контактные задачи теории упругости, М.— Л., 1949.

Яковлева В. И.
[1] Про кручення деяких порожнистих призматичних стержнів. Прикладна механ., т. II, вып. 3, 1956, 325—332.
[2] О кручении полого призматического стержня эллиптического сечения. Тр. Грузинск. политехн. ин-та, № 1 (42), 1956, 107—112.
[3] Применение конформного отображения к решению некоторых задач кручения. Научн. зап. Ук. полиграф. ин-та, 12, № 1, 1958, 231—249.

Янчевский С. А.
[1] Функции комплексного переменного, Л., 1934.

б) ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Almansi E.
[1] Sulle ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno. Rend. Circ. Math. Palermo, t. XII, 1899, p. 225—262.
[2] Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}=0$. Ann. Mat. Pura Appl., ser. III, t. 2, 1899, p. 1—51.
[3] Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi. Rend. R. Accad. Lincei, ser. 5, v. XVI, 1907, p. 865—868.
[4] Sopra la deformazione dei cilindri sollecitate lateralmente. Rend. R. Accad. Lincei, ser. 5, v. X, 1901, p. 333—338, 400—408.

Babuška I., Rektorys K., Vyčichlo F.
[1] Matematická theorie rovinné pruznosti, Praha, 1955.

Bartels R. C. F.
[1] Torsion of hollow cylindres. Trans. Amer. Math. Soc., v. 53, N. 1, 1943, p. 1—13.

Bassali W. A.
[1] The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 53, N.3, 1957, p. 728—743.
[2] The transverse flexure of thin perforated elastic plates supported at several points. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 53, N. 3, 1957, p. 744—754.
[3] The torsion of elastic cylinders with regular curvilinear cross sections. J. Math. and Phys., v. XXXVIII, N. 4, 1960, p. 232—245.

Bassali W. A. and Dawoud R. H.
[1] Green's functions for thin isotropic plates containing holes. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 53, N.3, 1957, p. 755—763.
Bassali W. A. and Nassif M.
[1] A thin circular plate normally and uniformly loaded over a concentric elliptic patch. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 55, N. 1, 1959, p. 101—109.
Boggio T.
[1] Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane. Atti Accad. Torino, v. XXXV, 1900, p. 219—239.
[2] Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane. Atti R. Ist. Veneto, t. LXI_2, 1901/2, p. 619—636.
[3] Integrazione dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in un'area ellittica. Atti R. Ist. Veneto, t. LX_2, 1900/1, p. 591—609.
[4] Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare. Atti Accad. Torino, v. 47, 1911/12, p. 22—37.
Born M.
[1] Dynamik der Kristallgitter. Leipzig u. Berlin, 1915. Есть русский перевод, под редакцией Я. И. Френкеля, составляющий первую часть книги «Теория твердого тела», Л.— М., 1938.
Bowie O. L.
[1] Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. J. Math. and Phys., v. 35, 1956, p. 60—71.
Brčič V.
[1] Contribution à la solution du problème plan d'élasticité. Actes IX Congr. Internat. Mécan. Appl., t. 6, Bruxelles, 1957.
Buchwald T. and Tiffen R.
[1] Boundary-value problems of simply-supported elastic plates. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 9, N. 4, 1956, p. 489—498.
Bueckner H. F.
[1] The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. Trans. ASME, v. 80, N. 6, 1958, p. 1225—1230.
[2] Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: «Boundary Problems in Differential Equations», Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 215—230.
Bufler H.
[1] Einige strenge Lösungen für den Spannungszustand in ebenen Verbundkörpern. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 39, H. 5/6, 1959, S. 218—236.
Burgatti P.
[1] Teoria matematica della elasticità. Bologna, 1931.
Chattarji P. P.
[1] Torsion of composite epitrochoidal sections. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 39, H. 3/4, 1959, S. 135—138.
Clebsch A.
[1] Theorie der Elastizität der festen Körper. Leipzig, 1862.
[2] Théorie de l'élasticité des corps solides (перевод предыдущей книги Б. Сен-Венана и Фламана с обширными примечаниями Сен-Венана), Paris, 1883.
Coker E. C. and Filon L. N. G.
[1] A treatise on photoelasticity, Cambridge, 1931. Имеется русский перевод: Э. Кокер и Л. Файлон, Оптический метод исследования напряжений, М.— Л., 1936.
Cole J. D. and Huth I.
[1] Stresses produced in a halfplane by moving loads. Appl. Mech., v. 25, N. 4, 1958, p. 433—436.

Conroy M. F.
[1] The elastic stresses at the boundary of a symmetrically shaped hole in an infinite plate loaded by normal boundary forces in the plane of the plate. Bull. Calcutta Math. Soc., v. 48, N. 1, 1956, p. 47—54.
Craggs I. W.
[1] On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. Phys. Solids. v. 8, N. 1, 1960, p. 66—75.
Deutsch E.
[1] Sur le problème de la torsion de certains cylindres élastiques isotropes. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 251, N. 21, 1960, p. 2281—2283.
[2] On the flexure of some prismatic beams. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. XIV, N. 4, 1961, p. 471—479.
[3] Asupra torsiunii barelor prismatice cu secțiune dublu conexă. Studi și cercetări matematice. An. XII, N. 1, 1961, p. 275—287.
[4] Încovoierea unei bare prismatice avînd secțiunea transversală mărginită de lemniscata lui Booth. Studii și cercetări de mecanică aplicată, An. XII, N. 6, 1961, p. 1399—1405.
[5] Torsion of an elastic cylinder whose cross-section is a half elliptic limacon. Bull. Acad. Polon. Sér. Sci. Techn., v. X, N. 2, 1962, p. 85—90.
[6] On the flexure problem. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. XV, part 3, 1962, p. 303—315, 317—324.
Deverall L. I.
[1] Solution of problems in bending of plates by method of Muskhelishvili. J. Appl. Mech., v. 24, N. 2, 1957, p. 295—298.
Dincă Fl., Boicu N.
[1] Asupra torsiunii unor bare cilindrice cu secțiune dublu conexă. Studii și cercetări de mecanică aplicată, An. IX, N. 3, 1958, p. 733—739.
[2] Asupra torsiunii unor bare cilindrice neomogene. Studii și cercetări de mecanică aplicată, An. X, N. 1, 1959, p. 265—270.
Dini U.
[1] Sulla integrazione della equazione $\Delta^2 u = 0$. Ann. di Mat., ser. II, t. V, 1871/3.
Dugdale D. S.
[1] Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, v. 8, N. 2, 1960, p. 100—104.
Dumitrescu L., Stanescu C.
[1] Torsiunea unei bare cilindrice neomogene. Studii și cercetări de mecanică aplicată, An. VIII, N. 1, 1957, p. 11—114.
Dvořák I.
[1] Koncentrace napětí v okoli otvorů. Aplikace matematiky, sv. 5, č. 2, 3, 1960, str. 81—108, 170—194.
Eringen A. C.
[1] Response of an elastic disk to impact and moving loads. Quart. J. Mech. pl. Math., v. 8, part 4, 1955, p. 385—393.
Eshelby I. D.
[1] Uniformly moving dislocation. Proc. Phys. Soc., A62, p. 5, N. 353A, 1949.
Evan — Iwanowski R. M.
[1] Stress solutions for an infinite plate with triangular inlay. J. Appl. Mech. v. 23, N. 3, 1956, p. 336—338.
Filon L. N. G.
[1] On an approximative solution for the bending of a beam of rectangular cross-section etc. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 201, 1903, p. 63—155.
[2] On the relation between corresponding problems in plane stress and in generalized plane stress. Quart. J. Math. Oxford Ser., v. 1, 1930, p. 289—299.

[3] On stresses in multiply-connected plates. British Association for the Advancement of Science. Report of the eighty-ninth meeting (1921). London, 1922, p. 305—315.

Föppl A.

[1] Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. V, 4. Aufl., 1922.

Föppl L.

[1] Konforme Abbildung ebener Spannungszustände. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 11, 1931, S. 81—92.

Fredholm I.

[1] Solution d'un probléme fondamental de la théorie de l'élasticité. Ark. Mat. Astronom. Fys., Bd. 2, N. 28, 1906, p. 3—8.

Ghosh S.

[1] On the flexure of an isotropic elastic cylinder. Bull. Calcutta Math. Soc., v. 39, N. 1, 1947, p. 1—14.

Godfrey D. E. R.

[1] Generalized plane stress in an elastic wedge under isolated loads. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 8, N. 2, 1955, p. 226—236.

Goodier J. N. and Hodge P. G.

[1] Elasticity and plasticity. N. Y. J. Wiley, 1958. Имеется русский перевод: Гудьер Дж. Н. и Ходж Ф. Г., Упругость и пластичность, ИЛ, 1960.

Goursat E.

[1] Cours d'analyse mathématique, t. III, 3-me éd., Paris, 1927. Имеется русский перевод: Э. Гурса, Математический анализ, 3-е изд., ОНТИ, НКТП СССР, 1936.

[2] Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$. Bull. Soc. Math. France, v. 26, 1898, p. 236.

Grammel R.

[1] Mechanik der elastischen Körper. Bearbeitet von. G. Angenheister, A. Busemann, O. Föppl, J. W. Geckeller, A. Nadai, P. Pfeiffer, Ph. Pöschl, P. Riekert, E. Trefftz, redigiert von R. Grammel. Berlin, 1928. (Книга является 6-м томом Handbuch der Physik, изданного Шпрингером (Springer); отдельные главы книги переведены на русский язык: Е. Трефftц, Математическая теория упругости, М.—Л., 1932; И. В. Геккелер, Статика упругого тела, М.—Л. 1934; П. Пфейфер, Колебания упругих тел, М.—Л., 1934.)

Gray C. A. M.

[1] Polynomial approximations in plane elastic problems. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. IV, 1951, p. 444—448.

[2] An iterative solution to the effects of concentrated loads applied to long rectangular beams. Quart. Appl. Math., v. 11, N. 3, 1953, p. 263—271.

Green A. E. and Zerna W.

[1] Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1954.

Greenspan H.

[1] Effect of a small hole on the stresses in a uniformly loaded plate. Quart. Appl. Math., v. 2, N. 1, 1944, p. 60—71.

Griffith A. A.

[1] The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A., v. 221, 1920, p. 163—198.

[2] The theory of rupture. Proc. First Internat. Congress Appl. Mech. Delft, 1924, p. 55—63.

Hadamard J.

[1] Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mém. des Savants Etrangers, v. 33, N. 4, Paris, 1908.

[2] Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope. Ann. Ecole Norm. Sup., 3-me sér., t. XVIII, 1901, p. 313—342.

Hamburger L., Dincă Fl., Manea V.
[1] Asupra torsiunii unor bare cilindrice. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, An. VIII, N. 4, 1957, p. 1091—1100.
Hample M.
[1] Stress in an infinite plane with a) two, b) an infinite row of shrink-fitted circular pins. Actes IX Congr. Internat. Mécan. Appl., t. 6, Bruxelles, 1957.
Hardiman N. I.
[1] Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 7, part 2, 1954, p. 226—230.
[2] Two-dimensional problems in elasticity involving different media. Proc. London Math. Soc., v. 7, N. 28, 1957, p. 584—597.
Harnack A.
[1] Beiträge zur Theorie des Cauchyschen Integrals. Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., 1885; перепечатано в Math. Ann., Bd. 35, 1899, S. 1—18.
Herzig A.
[1] Zur Torsion von Stäben. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 33, N. 12, 1953, S. 410—428.
Hill R.
[1] On related pairs of plane elastic states. J. Mech. Phys. Solids, v. 4, N. 1, 1955, p. 1—9.
Horvay G.
[1] Thermal stresses in perforated plates. Proc. First US National Congr. Appl. Mech., 1952, p. 247—258.
[2] The plane-stress problem of perforated plates. J. Appl. Mech., v. 19, 1952, p. 355.
Hoskin B. C. and Radok J. R. M.
[1] The root section of a swept wing. A problem of plane elasticity. J. Appl. Mech., v. 22, N. 3, 1955, p. 337—347.
Howland R. C. I.
[1] Stress in a plate containing an infinite row of holes. Proc. Roy. Soc. Ser. A. v. 148, 1935, p. 471—491.
Howland R. C. I. and Stevenson A. C.
[1] Biharmonic analysis in a perforated strip. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A., v. 232, 1933, p. 155—222.
Inglis C. E.
[1] Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Trans. Inst. Naval Architects London, v. LV, 1913, p. 219—230.
Irwin G. R.
[1] Fracture dynamics. In: «Fracturing of Metals», ASM, Cleveland, 1948, p. 147—166.
[2] Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., v. 24, 1957, p. 361—364.
[3] Relation of stresses near a crack to the crack extension force. Proc. IX Internat. Congr. Appl. Mech. Brussels, 1957, p. 245—251.
[4] Fracture. In: «Handbuch der Physik», Bd. VI, Springer, Berlin, 1958, p. 551—590.
[5] The crack extension force for a crack at a free surface boundary. NRL Report, N. 5120, 1958.
Isida M.
[1] On the tension of an infinite strip containing a square hole with rounded corners. Bull. JSME, v. 3, N. 10, 1960, p. 254—259.
Jacob C.
[1] Asupra torsiunii barelor cilindrice. Bul. ştiinţ., secţ. de ştiinţe matematice şi fisice, An. IV, N. 4, 1952, p. 669—677.

Jeffery G. B.
[1] Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 221, 1921, p. 265—293.

Kaliski S. and Nowacki W.
[1] Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions. Arch. Mech. Stos., t. VIII, N. 4, 1956, p. 413—448.

Kikukawa M.
[1] On plane-stress problems in domains of arbitrary profiles. Proc. Japan Nation. Congr. Appl. Mech., 3, 4, 1953, 1954.

Kirchhoff G.
[1] Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. I, Mechanik, 4. Aufl., Leipzig, 1897. (первое издание вышло в 1876 г.). Имеется русский перевод: Кирхгоф Г. Р., Механика. Лекции по математической физике, М., Изд. АН СССР, 1962.

Koiter W. T.
[1] Some general theorems on doubly-periodic and quasiperiodic functions. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Ser. A, v. 62, N.2, 1959, p. 120—128.
[2] Stress distribution in an infinite elastic sheet with doubly-periodic set of equal holes. In: «Boundary Problems in Differential Equations», R. E. Langer, ed. Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1960, p. 191—213.
[3] Approximate solution of Wiener-Hopf type integral equations with applications. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., v. LVII, Ser. B, N.5, 1954, p. 558—564, 565—574, 575—579.
[4] An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Ing.-Arch., Bd. 28, 1959, p. 168—172.
[5] An infinite row of parallel cracks in an infinite elastic sheet. In: «Problems of Continuum Mechanics», contrib. in honour of the 70th birthday of acad. N. I. Muskhelishvili. Philadelphia, Pennsylvania, 1961, p. 246—259. В одновременном русск. изд.: «Проблемы механики сплошной среды», к 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили, стр. 202—214.

Korn A.
[1] Sur les équations de l'élasticité. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3-me sér., t. 24, 1907, p. 9—75.
[2] Über die Lösung des Grundproblems der Elastizitätstheorie. Math. Ann., Bd. 75, 1914, S. 497—544.
[3] Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont données à la surface. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 2-me sér., t. X, 1908, p. 165—269.
[4] Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3-me sér., t. 25, 1908, p. 529—583.

Lamé G.
[1] Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.

Lauricella G.
[1] Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi. Rend. R. Accad. Lincei, ser. 5, v. XV, 1906, p. 426—432.
[2] Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica. Il Nuovo Cimento, ser. 5, t. XIII, 1907, p. 104—118, 155—174, 237—262, 501—518.
[3] Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Math., t. 32, 1909, p. 201—256.

Levin E.
[1] Elastic equilibrium of a plate with a reinforced elliptical hole. J. Appl. Mech., v. 27, N. 2, 1960, p. 283—288.

Levy M.
[1] Sur la légitimitè de la règle dite du trapeze dans l'étude de la résistance des barrages en maconnerie. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 126, 1898, p. 1235.
Lichtenstein L.
[1] Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie. Math. Z., Bd. 20, 1924, S. 21—28.
Love A. E. H.
[1] A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edit., Cambridge, 1927. Имеется русский перевод: А. Л я в, Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.
Macdonald H. M.
[1] On the torsional strength of a hollow schaft. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 8, 1893, p. 62—68.
Masubuchi K.
[1] Dislocation and strain energy release during crack propagation in residual stress field. Proc. 8th Japan Nation. Congr. Appl. Mech. 1958—1959, p. 147—150.
Matczyński M.
[1] Plane state of stress in a plate strip with discontinuous boundary conditions. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., v. X, N. 7, 1962, p. 262—267.
Michell J. H.
[1] On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates. Proc. London Math. Soc., v. 31, 1900, p. 100—124.
[2] Elementary distributions of plane stress. Ibid., v. 32, 1901, p. 35—61.
[3] The inversion of plane stress. Ibid., v. 34, 1902, p. 134—142.
[4] The theory of uniformly loaded beams. Quart. J. Math., v. 32, 1900, p. 28—42.
Milne — Thomson L. M.
[1] Plane elastic systems. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1960.
[2] Flexure. Trans. Amer. Math. Soc., v. 90, N. 1, 1959, p. 143—160.
Morris R. M. and Hawley F. J.
[1] Torsion and flexure of solid cylinders with cross-sections transformable to a ring-space. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. XI, part 4, 1958, p. 462—477.
Nowacki W.
[1] Plyty prostokatne o mieszanych warunkach brzegowych. Arch. Mech. Stos., t. III, N. 3—4, 1951; t. V, N. 2, 1953, p. 193—220.
Oda I.
[1] О распределении напряжений возле эллиптического туннеля с креплением. Trans. Japan Soc. Civil. Eng., N. 24, 1955, p. 12—28 (на японском языке).
Orowan E. O.
[1] Fundamentals of brittle behavior of metals. In: «Fatigue and Fracture of Metals», N. Y., Wiley, 1950, p. 139—167.
Osgood W. F.
[1] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, Leipzig, 1912.
Plemelj J.
[1] Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend. Monatsh. Math. Phys., XIX Jahrgang, 1908, S. 205—210.
[2] Potentialtheoretische Untersuchungen. Leipzig, 1911.
Pompeiu D.
[1] Sur une classe de fonctions d'une variable complexe. Rend. Circ. Mat. Palermo, v. 33, 1912, p. 108—113.

[2] Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales. Ibid., v. 35, 1913, p. 277—281.

Poritsky H.

[1] Thermal stresses in cylindrical pipes. Philos. Mag., ser. 7, v. 24, N. 160, 1937, p. 209—223.

[2] Application of analytic functions to two-dimensional biharmonic analysis. Trans. Amer. Math. Soc., v. 59, N. 2, 1946, p. 248—279.

Pöschl T.

[1] Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Aussenraum der Ellipse. Math. Z., Bd. 11, 1921, S. 89—96.

Radok J. R. M.

[1] Problems of plane elasticity for reinforced boundaries. J. Appl. Mech., v. 22, N. 2, 1955, p. 249—254.

[2] On the solutions of problems of dynamic plane elasticity. Quart. Appl. Math., v. XIV, N. 3, 1956, p. 289—298.

Saint-Venant B., de.

[1] Mémoire sur la torsion des prismes, etc. Mém. des Savants Etrangers, t. XIV, Paris, 1855, p. 233—560.

[2] Mémoire sur la flexion des prismes, etc. Journ. de Math. (Liouville), 2-me sér., t. 1, 1856, p. 89—189.

Saito H.

[1] Stress in a plate containing infinite parallel rows of holes. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 37, N. 3—4, 1957, S. 111—115.

Seika M.

[1] The stresses in an elliptic ring under concentrated loading. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 38, H. 3—4, 1958, S. 99—105.

[2] Stresses in a thick cylinder having a square hole. J. Appl. Mech., v. 25, N. 4, 1958, p. 571—574.

[3] Stresses in a semi-infinite plate containing a V-type notch under uniform tension. Ing.-Arch., Bd. 27, N. 5, 1960, p. 285—294.

Shioya S.

[1] On the transverse flexure of a semi-infinite plate with an elliptic notch. Ing.-Arch., Bd. 29, N. 2, 1960, p. 93—99.

Sneddon I. N.

[1] The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, v. 187, 1946, p. 229—260.

[2] Fourier transforms, N. Y., 1951.
Имеется русский перевод: И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, Москва, 1955.

[3] Crack problem in the mathematical theory of elasticity. North Carolina State College. File N. ERD — 126/1, Contr. N. Nour 486 (06), 1961.

[4] Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 2, 1952, p. 57—62.

Sneddon I. N. and Berry D. S.

[1] The classical theory of elasticity, из VI тома второго издания. Handbuch der Physik, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer — Verlag, 1958. Имеется русский перевод: И. Н. Снеддон и Д. С. Берри, Классическая теория упругости, Физматгиз, Москва, 1961.

Sneddon I. N. and Elliot H. A.

[1] The opening of a Griffith crack under internal pressure. Quart. Appl. Math., v. 4, N. 3, 1946, p. 262—267.

Sokolnikoff I. S.

[1] Mathematical theory of elasticity. N. Y.— London, 1946, second edition, 1956.

Sokolowski M.
[1] Some problems of a plate strip with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. Stos., t. 13, N. 2, 1961, p. 239—256.
[2] Stresses in a rigidly clamped plate strip. Arch. Mech. Stos., t. 14, N. 2, 1962 p. 271—283.
Solomon L.
[1] În legătură cu problemă lui Saint-Venant. Com. Acad. R. P. Romîne, t. XI, 1961, N. 7/1, p. 807—814; N. 7/2, p. 815—820; N. 11, p. 1315—1323; t. XII, 1962, N. 1, p. 7—17.
[2] Some remarks on Saint-Venant's problem. Arch. Mech. Stos., v. 14, N. 5, 1962, p. 841—864.
Solomon L., Drăghicescu D.
[1] Asupra utilizarii transformarilor conforme in problema plana a elasticitatii pentru domenii dublu conexe. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, An. 8, N. 4, 1957, p. 1115—1132.
Sonntag R.
[1] Die Methode der konformen Abbildung ebener Spannungszustände von L. Föppl, angewandt auf Probleme des Parallelstreifens. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 34, N. 10—11, 1954, S. 435—438.
Stanescu C.
[1] O problemă de tip mixt din incovoierea plăcilor elastice. Studii şi cercetări di mecanică aplicată, An. IX, N. 2, 1958, p. 411—421.
Stevenson A. C.
[1] Complex potentials in two-dimensional elasticity. Proc. Roy. Soc. Ser. A, v. 184, N. 997, 1945, p. 129—179, 218—229.
[2] Some boundary problems of two-dimensional elasticity. Philos. Mag., v. 347, N. 238, 1943, p. 766—793.
Tedone O.
[1] Sui problemi di equilibrio elastico a dui dimensioni-Ellisse. Atti Accad. Torino, v. 41 (1905—1906), 1906, p. 86—101.
Tiffen R.
[1] Uniqueness theorems of two-dimensional elasticity theory. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. V, N. 2, 1952, p. 237—252.
[2] Boundary-value problems of the elastic half-plane. Ibid., p. 344—351.
[3] Solution of two-dimensional elastic problems by conformal mapping on to half — plane. Ibid., p. 352—360.
Timoshenko S. P.
[1] History of strength of materials. New York, 1953. Имеется русский перевод: Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений, Гос. тех.-теор. издат., Москва, 1957.
Timoshenko S. P. and Goodier J. N.
[1] Theory of elasticity, 2nd ed., New York, 1951.
Timpe A.
[1] Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Z. Math. Phys., Bd. 52, 1905, S. 348—383.
[2] Die Airysche Funktion für den Ellipsenring. Math Z., Bd. 17, 1923, S. 189—205.
Todhunter I. and Pearson K.
[1] A history of theory of elasticity and of the strength of materials, v. I, 1886; v. II_1, II_2, Cambridge, 1893.
Tranter C. J.
[1] Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., v. 4, part 2, 1959, p. 49—57.

[2] The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 14, part 3, 1961, p. 283—292.

Tuzi Z.

[1] Effect of a circular hole on the stress distribution in a beam under uniform bending moment. Philos. Mag., ser. 7, v. 9, N. 56, 1930, p. 210—224.

Volterra V.

[1] Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3-me sér., t. 24, 1907, p. 401—517.

[2] Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der Mathematischen Physik, gehalten im September 1909 an der Clark-University. Deutsch von E. Lamla, Leipzig u. Berlin, 1914.

[3] Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm, Paris, 1912.

Weber C.

[1] Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern. Z. Angew. Math. Mech., Bd. 5, H. 6, 1925, S. 466—468.

Weber C. und Günther W.

[1] Torsionstheorie, Berlin, 1958.

Webster A. G.

[1] The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies, Leipzig, 1904 (или следующие издания, перепечатанные с первого без именений. Имеется русский перевод: А. Г. Вебстер, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, Гос. тех.-теор. издат., Л.—М., 1933 (перевод с 3-го английского издания).

Weinel E.

[1] Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring. Ing.-Arch., Bd. III, H.1, 1932, S. 67—75.

Westergaard H. M.

[1] Bearing pressures and cracks. J. Appl. Mech., v. 6, N. 2, 1939, p. A49—A53.

[2] Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete. J. Amer. Concr. Inst., v. 5, N. 2, 1933/1934, p. 93—102.

Weyl H.

[1] Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers. Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXXIX, 1915, p. 1—49.

Wigglesworth L. A.

[1] Stress distribution in a notched plate. Mathematika, v. 4, 1957, p. 76—96.

[2] Stress relief in a cracked plate. Mathematika, v. 5, N. 9, 1958, p. 67—81.

Williams M. L.

[1] On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., v. 24, N. 1, 1957, p. 109—114.

Willmore T. J.

[1] The distribution of stress in the neighborhood of a crack. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 2, N. 1. 1949, p. 53—64.

Winne D. H. and Wundt B. M.

[1] Application of the Griffith-Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks including analytical and experimental studies. Trans. ASME, v. 80, 1958, p. 1643—1658.

Winslow A. M.

[1] Stress solutions for rectangular plates by conformal transformation. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 10, N. 2, 1957, p. 160—168.

Yi-Yuan Yu

[1] On the complex representation of the general extensional and flexural problems of thin plates and their analogies. J. Franklin Inst., v. 260, N. 4, 1955, p. 269—283.

[2] Gravitational stresses in a circular ring resting on concentrated support. J. Appl. Mech., v. 22, N.1, 1955, p. 103—106.

[3] Solution for the exterior of a general ovaloid under arbitrary loading and its application to square rigid core problems. Proc. First US Nation. Congr. Appl. Mech., Publ. ASME, N. Y., 1952, p. 227—238.

[4] Bending of isotropic thin plates by concentrated edge couples and forces. J. Appl. Mech., v. 21, N. 2, 1954, p. 129—139.

Yoffe E. H.

[1] The moving Griffith crack. Philos. Mag., v. 42, N. 330, 1951, p. 739—750.

Zorski H.

[1] Plates with discontinuous supports. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., v. VI, N. 3, 1958, p. 127—132.

[2] Plates with discontinuous supports, II. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., v. VI, N. 3, 1958, p. 133—140.

[3] Plates with discontinuous supports. Arch. Mech. Stos., t. X, N. 3, 1958, p. 271—313.

[4] A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. Stos., t. X, N. 3, 1958, p. 371—398.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию 3
Предисловие к четвертому изданию 4
Предисловие к третьему изданию 4
Из предисловия к первому изданию 5
Предисловие академика А. Н. Крылова к первому изданию 7

Глава первая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

I. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 1. Объемные силы 15
§ 2. Напряжения 17
§ 3. Компоненты напряжения. Зависимость напряжения от ориентировки площадки 17
§ 4. Уравнения, связывающие компоненты напряжения 20
§ 5. Замена координат. Инвариантная квадратичная форма. Тензор напряжений 23
§ 6. Поверхность напряжений. Главные напряжения 27
§ 7. Нахождение главных напряжений и главных осей 31
§ 8. Случай плоского напряженного состояния 32

II. ДЕФОРМАЦИЯ

§ 9. Общие замечания 35
§ 10. Аффинное преобразование 36
§ 11. Бесконечно малое аффинное преобразование 38
§ 12. Разложение бесконечно малого преобразования на чистую деформацию и жесткое перемещение 40
§ 13. Инвариантная квадратичная форма, связанная с деформацией. Поверхность деформаций, главные оси. Замена координат 45
§ 14. Деформация общего вида 48
§ 15. Определение смещений по компонентам деформации. Условия совместимости Сен-Венана 51

III. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 16. Основной закон теории упругости (обобщенный закон Гука) 57
§ 17. Случай изотропного тела 60
§ 18. Основные уравнения статики упругого изотропного тела 64
§ 19. Простейшие случаи упругого равновесия. Основные упругие постоянные 66

§ 20. Основные граничные задачи статики упругого тела. Единственность решения 70
§ 21. Основные уравнения в компонентах смещения 76
§ 22. Уравнения в компонентах напряжения 76
§ 23. Замечание о фактическом решении основных задач. Принцип Сен-Венана 79
§ 24. Динамические уравнения. Об основных задачах динамики упругого тела 79

Глава вторая

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 25. Плоская деформация 87
§ 26. Деформация тонкой пластинки силами, действующими в ее плоскости 90
§ 27. Основные уравнения плоской теории упругости 93
§ 28. Приведение к случаю отсутствия объемных сил 98

II. ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 29. Некоторые термины и предложения 100
§ 30. Функция напряжений 103
§ 31. Комплексное представление бигармонической функции 108
§ 32. Комплексное представление смещений и напряжений 110
§ 33. Механическое значение функции f. Выражения для главного вектора и главного момента 113
§ 34. Степень определенности введенных функций 115
§ 35. Общие формулы для конечной многосвязной области 118
§ 36. Случай бесконечной области 122
§ 37. Некоторые свойства, вытекающие из аналитического характера решения. Об аналитическом продолжении через данный контур 127
§ 38. Замена прямоугольных координат 130
§ 39. Полярные координаты 132
§ 40. Основные граничные задачи. Единственность решения 134
§ 41. Приведение основных задач к задачам теории функций комплексного переменного 139
§ 41а. Дополнительные замечания 147
§ 42. Понятие регулярного решения. Единственность регулярного решения 149
§ 43. О сосредоточенных силах, приложенных к границе 153
§ 44. Зависимость напряженного состояния от упругих постоянных . . . 154

III. МНОГОЗНАЧНЫЕ СМЕЩЕНИЯ. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 45. Многозначные смещения. Дислокации 156
§ 46. Температурные напряжения 159

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

§ 47. Конформное отображение 163
§ 48. Простейшие примеры конформного отображения 168
§ 49. Криволинейные координаты, связанные с конформным отображением на круговую область 177
§ 50. Преобразование формул плоской теории упругости 178
§ 51. Граничные условия в преобразованной области 180

Глава третья

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

I. О РЯДАХ ФУРЬЕ

§ 52. О рядах Фурье в комплексной форме 182
§ 53. О характере сходимости рядов Фурье 185

II. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОКРУЖНОСТЬЮ

§ 54. Решение первой основной задачи для круга 186
§ 55. Решение второй основной задачи для круга 189
§ 56. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием 190
§ 56а. Примеры. 1. Одностороннее растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием. 2. Всестороннее растяжение. 3. Равномерное нормальное давление, приложенное к обводу кругового отверстия. 4. Сосредоточенная сила, приложенная в точке неограниченной плоскости. 5. Сосредоточенная пара 193
§ 57. О сосредоточенных силах вообще 197
§ 57а. Применение к случаю наличия объемных сил 200
§ 58. Некоторые случаи равновесия бесконечной пластинки со вставленной круговой шайбой из другого материала. 1. Бесконечная пластинка с круговым отверстием, в которое вложена упругая круговая шайба, имевшая первоначально несколько больший радиус. 2. Растяжение пластинки со вложенной или впаянной жесткой шайбой. 3. Растяжение пластинки со вложенной или впаянной упругой шайбой 201

III. РЕШЕНИЕ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

§ 59. Решение первой основной задачи для кругового кольца 208
§ 59а. Примеры и обобщения. 1. Труба, подверженная равномерному внешнему и внутреннему давлениям. 2. Распределение напряжений при вращении кольца вокруг центра. 3. Некоторые обобщения 212
§ 60. Многозначные смещения в случае кругового кольца 214
§ 61. Приложение 218
§ 62. Температурные напряжения в полом круговом цилиндре 221

IV. ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 63. Случай односвязной области 224
§ 64. Пример применения отображения на круговое кольцо. Решение основных задач для сплошного эллипса 230

Глава четвертая

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ

I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

§ 65. Некоторые обозначения и термины 236
§ 66. Интегралы типа Коши 239
§ 67. Значения интеграла типа Коши на линии интегрирования. Главное значение интеграла по Коши 240
§ 68. Граничные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля 245

§ 69. О производных интеграла типа Коши 247
§ 70. Некоторые элементарные формулы, облегчающие вычисление интегралов типа Коши 249
§ 71. Об интегралах типа Коши по бесконечной прямой 254
§ 72. Продолжение 261

II. О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 73. Некоторые общие предложения 263
§ 74. Обобщение 266
§ 75. Теорема Гарнака (Harnack) 266
§ 76. Некоторые специальные формулы для круга и полуплоскости 267
§ 77. Простейшие приложения: решение основных задач теории потенциала для круга и полуплоскости 272

Глава пятая

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНИМ ЗАМКНУТЫМ КОНТУРОМ

§ 78. Приведение основных задач к функциональным уравнениям 279
§ 79. Приведение к уравнениям Фредгольма. Теоремы существования . . 283
§ 79а. О некоторых других применениях предыдущих интегральных уравнений 292

II. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА КРУГ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

§ 80. Решение первой основной задачи для круга 293
§ 80а. Примеры. 1. Круговой диск под действием сосредоточенных сил, приложенных к контуру. 2. Диск под влиянием сосредоточенных сил и пар, приложенных к внутренним точкам. 3. Вращающийся диск с прикрепленными сосредоточенными массами 296
§ 81. Решение второй основной задачи для круга 302
§ 82. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием 303
§ 82а. Примеры. 1. Растяжение пластинки с эллиптическим отверстием. 2. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному давлению. 3. Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному касательному напряжению T. 4. Эллиптическое отверстие, часть края которого подвержена равномерному давлению. 5. Приближенное решение задачи об изгибе полосы (балки) с эллиптическим отверстием 306
§ 83. Решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием 314
§ 83а. Примеры. 1. Растяжение бесконечной пластинки с жестким эллиптическим ядром. 2. Случай, когда эллиптическое ядро удерживается от поворота. 3. Случай, когда на эллиптическое ядро действует пара с заданным моментом. 4. Случай, когда на эллиптическое ядро действует сила, приложенная к центру 316

§ 84. Общее решение первой основной задачи для областей, отображаемых на круг при помощи полиномов 318
§ 85. Обобщение на случай отображения при помощи рациональных функций 325
§ 86. Решение второй основной задачи. О решении основной смешанной задачи 329
§ 87. Другой способ решения основных задач 329
§ 87а. Пример. Решение первой основной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием 330
§ 88. Дальнейшие примеры. Приложение к некоторым другим граничным задачам 333
§ 89. Приложение к приближенному решению в общем случае 334

III. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 90. Общие формулы и предложения для случая полуплоскости 338
§ 91. Общие формулы для полубесконечных областей 343
§ 92. Основные формулы, связанные с конформным отображением на полуплоскость 346
§ 93. Решение первой основной задачи для полуплоскости 348
§ 93а. Пример 351
§ 94. Решение второй основной задачи 353
§ 95. Решение основных задач для областей, отображаемых на полуплоскость при помощи рациональных функций. Случай параболического контура 355

IV. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ. ОБОБЩЕНИЯ

§ 96. Об интегральных уравнениях С. Г. Михлина 358
§ 97. Об одном общем методе решения задач для многосвязных областей . . 359
§ 98. Интегральные уравнения, предложенные автором 360
§ 99. Применение к контурам с угловыми точками 368
§ 100. О численном решении интегральных уравнений плоской теории упругости 369
§ 101. Интегральные уравнения Шермана — Лауричелла 369
§ 102. Решение первой и второй основных задач по методу Д. И. Шермана 372
§ 103. О решении основной смешанной задачи и некоторых других граничных задач по способу Д. И. Шермана 379
§ 104. Обобщения на случай анизотропных тел 380
§ 105. О других применениях общих представлений решения 381

Глава шестая

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

I. ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ

§ 106. Кусочно-голоморфные функции 383
§ 107. Задача сопряжения 385
§ 108. Определение кусочно-голоморфной функции по заданному скачку . . 385

§ 109. Одно приложение 388
§ 109а. Пример 390
§ 110. Решение задачи $F^+ = gF^- + f$ 391
§ 111. Случай разрывного коэффициента 401

II. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ЩЕЛЯМИ

§ 112. Преобразование общих формул для полуплоскости 404
§ 113. Решение первой и второй основных задач для полуплоскости. 1. Первая основная задача. 2. Вторая основная задача 407
§ 114. Решение основной смешанной задачи 409
§ 114а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. 3. Действие эксцентрически приложенной силы 415
§ 115. Задача давления жестких штампов при отсутствии трения 420
§ 116. Продолжение 424
§ 116а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием. 3. Штамп с закругленным основанием 427
§ 117. Равновесие жесткого штампа на границе упругой полуплоскости при наличии трения 430
§ 117а. Примеры. 1. Штамп с прямолинейным горизонтальным основанием. 2. Штамп с прямолинейным наклонным основанием 433
§ 118. Другой способ решения граничных задач для полуплоскости 434
§ 119. Задача соприкасания двух упругих тел 435
§ 120. Граничные задачи для плоскости с прямолинейными разрезами. 1. Общие формулы. 2. Первая основная задача. 3. Вторая основная задача. 4. Одна смешанная задача 439

III. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ, И ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ, РАЗРЕЗАННОЙ ВДОЛЬ ДУГ ОКРУЖНОСТИ

§ 121. Преобразование общих формул для области, ограниченной окружностью 447
§ 122. Решение первой и второй основных задач для области, ограниченной окружностью 450
§ 123. Основная смешанная задача для области, ограниченной окружностью 452
§ 123а. Пример 456
§ 124. Граничные задачи для плоскости, разрезанной вдоль дуг окружности 457
§ 124а. Пример. Растяжение плоскости с разрезом вдоль дуги окружности . . 461

IV. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОТОБРАЖАЕМЫХ НА КРУГ ПРИ ПОМОЩИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 125. Преобразование основных формул 464
§ 126. Решение первой и второй основных задач 469
§ 127. Решение основной смешанной задачи 471
§ 127а. Пример. Решение основной смешанной задачи для плоскости с эллиптическим отверстием 474
§ 128. Задача соприкасания с жестким профилем 476
§ 128а. Примеры. 1. Круговая шайба. 2. Бесконечная плоскость с круговым отверстием. 3. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием . . 483

Глава седьмая

РАСТЯЖЕНИЕ, КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ БРУСЬЕВ

I. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ОДНОРОДНЫХ БРУСЬЕВ (ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА)

§ 129. Постановка вопроса 492
§ 130. Некоторые формулы 495
§ 131. Общее решение задачи кручения 496
§ 132. Комплексная функция кручения. Функция напряжений 501
§ 133. О решении задачи кручения для различных частных случаев 504
§ 134. Применение конформного отображения 505
§ 134а. Примеры. 1. Эпитрохоидальное сечение. 2. Лемниската Бута. 3. Петля лемнискаты Бернулли. 4. Конфокальные эллипсы. Неконцентрические окружности 508
§ 135. Растяжение продольными силами 512
§ 136. Изгиб парами, приложенными на концах 513
§ 137. Изгиб поперечной силой 516
§ 138. О решении задачи изгиба для различных сечений 521
§ 138а. Пример. Изгиб кругового цилиндра или трубы 521

II. КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

§ 139. Общие формулы 522
§ 140. Решение при помощи интегральных уравнений 527
§ 140а. Примеры. 1. Кручение кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем из другого материала. 2. Кручение прямоугольного бруса, составленного из двух также прямоугольных брусьев 531

III. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

§ 141. Обозначения 539
§ 142. Растяжение 540
§ 143. Изгиб парой 540
§ 144. Изгиб поперечной силой 541
§ 144а. Пример. Изгиб составной круглой трубы поперечной силой, приложенной к одному из концов 544

IV. РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ В СЛУЧАЕ РАЗЛИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА

§ 145. Одна вспомогательная задача о плоской деформации 546
§ 146. Задача растяжения и изгиба парами 548
§ 147. Частные случаи. 1. Растяжение бруса, обладающего осью симметрии. 2. Изгиб парой бруса, обладающего плоскостью симметрии 557
§ 148. Главная ось растяжения и главные плоскости изгиба 559
§ 149. Применение комплексного представления. Примеры 564
§ 150. Задача об изгибе поперечной силой 568

Глава восьмая

КРАТКИЙ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РАБОТ ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ

I. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА С ОДНИМ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ

§ 151. Эффективные решения граничных задач для двусвязных областей. Метод Д. И. Шермана 575
§ 151а. Некоторые конкретные задачи 578
§ 152. Пластинки со многими отверстиями. Периодическая задача 580
§ 153. Бесконечная плоскость с одним отверстием 585
§ 154. Продолжение 587

II. КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ СРЕДА. ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ОТВЕРСТИЯ

§ 155. Включения из того же материала 589
§ 156. Включения из различных материалов 590
§ 157. Усиление отверстий тонкими кольцами 591

III. СПЛОШНАЯ ОДНОРОДНАЯ СРЕДА (СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 158. Пластинки с полигональным контуром. Разрывные нагрузки 594
§ 159. Пластинки с границами, уходящими в бесконечность 596
§ 160. Различные специальные вопросы 598

IV. СМЕШАННЫЕ И КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 161. Смешанные задачи плоской теории упругости и теории изгиба пластинок 600
§ 162. Контактные задачи плоской теории упругости 602

V. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБОБЩЕННОМУ БИГАРМОНИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ

§ 163. Плоская статическая задача теории упругости для анизотропных тел, обладающих плоскостью упругой симметрии 603
§ 164. Стационарные динамические смешанные задачи 605

VI. ТЕОРИЯ ТРЕЩИН

§ 165. Постановка задач. Основные представления 608
§ 166. Частные задачи 618

VII. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ БРУСЬЕВ

§ 167. Однородные брусья 628
§ 168. Составные брусья 630

VIII. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 169. Метод суперпозиции плоских решений 631
§ 170. Применение p-аналитических реакций 632

ДОБАВЛЕНИЯ

Добавление I. О понятии тензора 635
Добавление II. Об определении функции по ее полному дифференциалу в многосвязной области 648
Добавление III. Определение аналитической функции комплексного переменного по заданной действительной части. Неопределенный интеграл от голоморфной функции 657
Добавление IV. Один вывод формул комплексного представления . . . 661
Цитированная литература 670

Николай Иванович Мусхелишвили

Некоторые основные задачи математической теории упругости

М., 1966 г., 708 стр. с илл.

Редактор *Р. Л. Салганик*

Художественный редактор *И. И. Румянцев*

Художник *Н. И. Максимов*

Технический редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 28/X 1965 г. Подписано к печати 1/II 1966 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 44,25. Условн. печ. л. 61,95. Уч.-изд. л. 47,99. Тираж 11000 экз. Т-01432. Цена книги 3 р. 27 к.

Заказ № 1349

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
53	14 св.	$=\frac{\partial q}{\partial x}d+x\frac{\partial q}{\partial y}d+y\frac{\partial q}{\partial z}dz$	$=\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy+\frac{\partial q}{\partial z}dz$
126	16 сн.	$*(z)$	$\varphi^*(z)$
391	4 сн.	$-F_*^-f$	$-F_*^-(t)$
406	21 св.	$+\varphi(z)-$	$+\varphi(\bar{z})-$
447	1 сн.	e^{-2iv}	$e^{-2i\vartheta}$
569	5 сн.	**каждой**	**в каждой**
622	2 св.	$\int\limits_0^{\cdot}$	$\int\limits_0^{t}$
661	8 сн.	$\frac{z-\bar{z}}{2}\Big)=\varphi(z,\ z)$	$\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)=\varphi(z,\ \bar{z})$
664	6 св.	$z-z$	$z-\bar{z}$
667	9 св.	$U(z,\ z)$	$U(z,\ \bar{z})$

Зак. 1349