Л. Феликс

Элементарная математика в современном изложении

Л. Феликс

Элементарная математика в современном изложении

Люсьенн Феликс

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Теоретико-множественные концепции, пронизывающие всю книгу Люсьенн Феликс, имеют в наши дни фундаментальное значение не только для теоретической математики, но и для многих физических, технических, биологических и иных научных дисциплин. Эти концепции используются не только при построении вершин науки и ее основ, но также и в педагогическом процессе. Вопросы перестройки математического образования сейчас волнуют педагогов и ученых во всем мире. Это вызвано в первую очередь стремлением приблизить содержание курса математики средней школы к установкам и устремлениям современной математической науки и к запросам практики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Советскому читателю предоставляется возможность ознакомиться с результатами многолетних размышлений интересного французского педагога относительно содержания курса школьной математики и построения стройной логической системы основ математических знаний. Люсьенн Феликс, ученица одного из крупнейших представителей французской математической мысли первых десятилетий нашего века Анри Лебега, довольно точно следует педагогическим идеям своего учителя. Эти идеи продолжают сохранять свежесть и в наши дни. Теоретико-множественные концепции, пронизывающие всю книгу Люсьенн Феликс, имеют в наши дни фундаментальное значение не только для теоретической математики, но и для многих физических, технических, биологических и иных научных дисциплин. Эти концепции используются не только при построении вершин науки и ее основ, но также и в педагогическом процессе. Скажу, например, что в курсах математической статистики, которые предназначены в США для агрономов и других специалистов сельского хозяйства, теоретико-множественным концепциям науки уделяется большое внимание, поскольку именно они позволяют глубже и свободнее взглянуть на реальные явления. Точно так же при построении основ теории надежности выяснилось, что без теоретико-множественного подхода не удается разумно осмыслить самые центральные ее понятия. В связи с этим в работах, предназначенных для инженеров, изложение приходится строить именно на этой базе (см., например, статью Б. В. Гнеденко и Я. Б. Шора «Надежность» в энциклопедии «Автоматизация производства и промышленная электроника», т. 2, М., 1963).

Конечно, книга Люсьенн Феликс не является учебником для школьников. Она предназначена, в первую очередь, для преподавателей, то есть для весьма квалифицированного читателя. Я убежден, что эта книга будет с интересом и пользой изучена нашими педагогами. Несомненно, что многие трактовки и подходы автора вызовут критические замечания и во всяком случае натолкнут читателей на размышления о содержании курса математики средней школы. В 1962 году Люсьенн Феликс была в Москве и выступала с докладом на заседании школьной секции Московского математического общества. Устным изложением она сумела заинтересовать как своими идеями, так и рассказом об экспериментах, которые она проводила лично, а также и другие педагоги под ее руководством в различных школах.

Вопросы перестройки математического образования сейчас волнуют педагогов и ученых во всем мире. Это вызвано рядом обстоятельств и в первую очередь стремлением приблизить содержание курса математики средней школы к установкам и устремлениям современной математической науки и к запросам практики. На международных конференциях по математическому образованию, в особенности после 1957 года, когда был запущен первый советский спутник Земли, проблема того, чему учить по математике школьников, является центральной. Традиционные курсы школьной математики сложились в определенных условиях под влиянием определенных общественных задач и требований, а также при определенном уровне математической науки. С тех пор наука сделала огромный скачок в своем развитии. Она стала непосредственной производительной силой общества. Все это нельзя игнорировать. Необходимо учесть и то, что первоначальный запас знаний и навыков, с которыми дети приходят в школу, резко отличен от того, с которым дети приходили раньше. Они свободно обсуждают в дошкольном возрасте не только особенности марок автомобилей, но и простейшие графики, с которыми они встречаются в повседневной жизни. Они знакомы с использованием электричества, свободно включают и выключают радиоприемники и телевизоры. Вот почему ни содержание школьных программ, ни построение курса математики не может оставаться неизменным. Время от времени все это следует пересматривать с позиции состояния науки, а также с позиции практики и тех требований, которые предъявляет жизнь сегодня или предъявит завтра. Таким образом, и в образовании то, что вчера было превосходно, а сегодня еще хорошо, завтра может оказаться неудовлетворительным. Школьное образование — живой организм, а потому обязано развиваться. Если не учесть этого обстоятельства, то можно жестоко поплатиться падением интереса к предмету, а упадок интереса порождает безразличие, что влечет за собой безделие и инертность.

Разработка структуры школьного курса математики является одной из центральных задач советской педагогической науки. Эта проблема стала центральной и для Комиссии по математическому образованию, которая создана при Президиуме АН СССР и возглавляется академиком А. Н. Колмогоровым. Для успешного продвижения в решении этой проблемы, безусловно, важен личный педагогический и научный опыт, а также научный кругозор. Это является гарантией правильного подхода, далекого от субъективизма, который мешает учесть все основные требования науки и практики к элементам математического образования, к системе математических знаний, закладываемых школьным курсом математики. Для этой цели абсолютно необходимо и систематическое знакомство с теми подходами, которые выработаны в других странах и по тем же вопросам. С этих позиций книга Люсьенн Феликс весьма полезна. В ней читатель найдет много интересного и спорного, а это исключительно важно.

Б. В. Гнеденко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Построение математики может быть признано в нашу эпоху удовлетворительным, лишь если оно выявляет единство этой науки; в математике имеется неразрывность метода, несмотря на разнообразие рассматриваемых структур, начиная с понятий целых чисел и дробей, точек и прямых и так до понятий наиболее сложных.

Результаты, известные еще с детского возраста, занимают в этом здании свое место, скромное и вспомогательное или же важное и фундаментальное. Поэтому, прежде чем приступить к изучению высших разделов математики, логически и психологически необходимо воссоздать в математически удовлетворительной форме совокупность результатов, накопленных при изучении элементарного курса. Действительно, их познание было пропитано чувственными элементами и обосновано обращением к физическому опыту и к не подвергнутой анализу непосредственной пространственной интуиции.

Кроме того, различные математические теории и их приложения используют в качестве вспомогательных средств теоремы арифметики, алгебры или евклидовой геометрии, так что последние нельзя ни игнорировать, ни допускать без доказательства.

При изложении элементарных теорий и разделов, которые их непосредственно продолжают, мы встретимся впервые с понятиями, методами и символами высшей математики.

В настоящей работе принят аксиоматический метод. Действительно, цель настоящей работы — согласовать понятия, уже близкие читателю, хотя хорошо известные формулировки и должны здесь принять новую форму. Задача изложения заключается по существу в том, чтобы выбрать определенные предложения в качестве аксиом и показать, что их достаточно для вывода прочих результатов рассматриваемой теории. Мы старались выбрать в качестве аксиом результаты, наиболее необходимые в соответствии с нашей интуицией, не добиваясь сведения их содержания к минимуму. Постепенное введение аксиом делает очевидным их последовательные взаимоотношения, что подготовляет обобщения, позволяющие выйти за пределы классической области вещественных чисел или евклидова пространства.

Начала математики, построенные таким образом, имеют абстрактный характер. Существующие объекты, постигаемые нами непосредственно, исходя из нашего физического опыта, являются моделями для математических построений лишь постольку, поскольку они соответствуют выявленным структурам. Так, векторы можно представлять стрелками, рисовать фигуры, использовать механические или электрические модели: все модели одной и той же структуры (мы будем говорить об изоморфных структурах) являются с математической точки зрения эквивалентными. Однако в настоящем элементарном изложении мы будем специально изучать на протяжении II и III книг классические модели: множества чисел и множества точек в пространстве одного, двух или трех измерений.

Мы ставим своей целью изучение материала, составляющего по традиции элементарную математику, в такой форме, которая подготовляет последующее изучение высшей математики.

Книга I содержит фундаментальные структуры. Природа изучаемых вопросов иногда требует тонких доказательств (в частности, это касается непрерывных функций), которые читатель может пропустить при первом чтении; но здесь будут введены все понятия, эффективно полезные для дальнейшего. Каждая из глав этой первой книги служит основанием для некоторого отчасти самостоятельного построения: теория чисел, теория уравнений и функций, аффинная и проективная геометрия, геометрия метрическая. Следовательно, нет необходимости изучать эту книгу всю целиком, прежде чем приступить к той или иной главе из последующих книг; она будет служить книгой справок для читателя, желающего посетить какую-либо определенную часть математического здания, откладывая изучение его обоснований на последующее время.

Отсюда следует значительная свобода в использовании этого труда в заключительном математическом классе наших лицеев: можно изменять порядок изложения материала, а также выделять некоторые его разделы в качестве дополнительных для самостоятельного изучения, более или менее углубленного в соответствии с запросами, интересами и степенью зрелости учащихся.

В целом этот труд приводит прямо к первым университетским курсам высшей математики.

Мы надеемся, что читатель найдет здесь полезное и легкое введение, которое побудит его продолжать изучение математики.

Люсьенн Феликс

ЗАМЕЧАНИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Необходимость в книге, которая облегчила бы переход от традиционных элементарных понятий к более современному пониманию математики, все еще актуальна; вот почему мне не представляется целесообразным внесение изменений в эту работу, написанную с указанной целью. Лишь в нескольких местах мы подчеркнули или уточнили мысль, а также, несмотря на желание не загромождать изложение, ввели несколько дополнительных параграфов. Но дополнение отвечает желанию многочисленных читателей, которые спрашивают, какие задачи могут быть поставлены в качестве применения изложенных теорий. С одной стороны, мы выбрали несколько образцов простейших упражнений, связанных с основными структурами. Они составляют введение в изучение структур «самих по себе», как «чистых культур», по выражению профессора Дьедонне. Читатель должен иметь по возможности больше различных примеров групп, колец и т. п. и сравнить их, чтобы обнаружить изоморфные структуры, являющиеся моделями друг друга.

С другой стороны, мы хотели удовлетворить читателей, верных старому воспитанию, которые выражают беспокойство: не приносятся ли в жертву современной форме изложения старые задачи?

Хотя некоторые из этих задач имеют, по-видимому, меньший удельный вес в новой архитектуре математики, они тем не менее существуют и сохраняют свое место. На нескольких простых примерах, взятых прямо из учебников и экзаменационных билетов, мы выявили, как теоретико-множественные понятия и аксиоматический метод представляют их в новом свете и позволяют найти решение методами исследования и изложения, вытекающими из глубокого единства математической науки.

Мне остается поблагодарить издательство Дюно, которому принадлежит значительная доля в успехе этого труда, а также всех читателей, которые соблаговолили сообщить мне свои замечания.

Люсьенн Феликс
июнь 1961

ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Логика

$\Rightarrow$ — «влечет за собой». Дедукция, логический вывод.

$\Leftrightarrow$ — «эквивалентно». Логическая равносильность.

$\forall$ — «любой» или «для всех». Квантор общности.

$\exists x$: — «существует по меньшей мере один x такой, что». Квантор существования.

Теория множеств

$\in$ — «принадлежит». Принадлежность элемента множеству.

$\notin$ — «не принадлежит».

$\subseteq$ — «включено в». Включение одного множества в другое.

$\subset$ — «строго включено в» или «включено» без уточнения.

$\bigcup$ — «объединение». Объединение двух подмножеств.

$\bigcap$ — «пересечение». Пересечение двух подмножеств.

$\complement_A B$ — «дополнение к B по отношению к A».

$\complement B$ — «дополнение к B по отношению к рассматриваемому множеству».

$\varnothing$ — «пустое множество».

Основные множества

N — множество натуральных чисел.

Z, Q, R, R^+, C — множества целых чисел, рациональных чисел, вещественных чисел, вещественных положительных чисел, комплексных чисел.

$(\mathscr{R})$ или (R) — вещественная прямая.

$]a, b[$ — интервал в (R).

$[a, b]$ — сегмент в (R).

(R^2), (R^3), (R^n) — вещественные пространства двух, трех, n измерений.

Отношения

$\equiv$ или $\sim$ — «эквивалентно». Знак отношения эквивалентности.

$=$, $\neq$, $\simeq$ — «равно», «не равно», «равно приближенно» (мало отличается).

$\leqslant$ — «меньше или равно».

$<$ — «строго меньше» или «меньше» без уточнения.

Операции

$|x|$ — «абсолютная величина», если $x \in R$, или «модуль», если $x \in C$.

$+$, $-$, $\cdot$ или $\times$ — «плюс», «минус», «умножить на».

$\dfrac{a}{b}$ или a/b — «a на b». Частное от деления a на b или отношение a к b.

a^q — «a в степени q», $a \in R^+$, $q \in R$. Степень a.

$\sqrt[n]{a}$ — «корень n-й степени из a», $a \in R^+$, $n \in N$.

Отображение одного множества в другое

$x \xrightarrow{f} y$ — при отображении f образом x является $y = f(x)$.

$x \longrightarrow L$ — «x стремится к L» или «L является пределом x».

$f'(x), f''(x), \ldots f^n(x)$ — первая, вторая, ..., n-я производная $f(x)$.

$Pf(x)$ — общая первообразная от $f(x)$.

$P_a^b f(x)$ — первообразная от a до b от $f(x)$. Разность $F(b) - F(a)$ значений частной первообразной $F(x)$.

Векторы

$\vec{v}$ или $\boldsymbol{v}$ — «вектор $\boldsymbol{v}$». Элемент векторного пространства.

$|\vec{v}|$ или $|\boldsymbol{v}|$ — «длина» или «модуль» вектора $\boldsymbol{v}$.

$\overline{AM}$ — мера вектора $\overrightarrow{AM}$ относительно единичного направляющего вектора.

$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ — «$\boldsymbol{v}$ умножить скалярно на $\boldsymbol{w}$». Скалярное произведение двух векторов.

$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$* — «$\boldsymbol{v}$ умножить векторно на $\boldsymbol{w}$». Векторное произведение двух векторов.

---

* В нашей литературе для векторного произведения употребляются обычно следующие обозначения: $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ или $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]$. Однако символику автора целесообразно сохранить, так как в современной литературе для обозначения внешнего произведения в грассмановских алгебрах применяется именно эта символика.— *Прим. ред.*

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Школьная математика состоит из различных частей, которые по традиции рассматриваются, как раздельные и более или менее независимые: таковы алгебра, геометрия, тригонометрия и т. п. Это разделение интуитивно оправдано: либо изучают числа и тогда считают, либо изучают фигуры, которые наблюдают и строят. Уже аналитическая геометрия заставила понять, что указанное отличие не абсолютно. Однако какова логическая ценность таких выводов?

Современная математика занимается не столько объектами исследования, сколько структурой отношений между этими объектами. Так, почти вся традиционная геометрия, будучи определенной, как теория операций, предстает в виде *алгебры*; чертежи становятся бесполезными или даже опасными для изложения доказательств, хотя читателю, конечно, представляется свобода использования набросков в помощь интуиции.

К *алгебраическим структурам* следует еще добавить *топологические структуры* окрестности, предела, непрерывности. Таким образом можно обогатить понятие геометрического пространства и приступить к анализу.

В нашей первой книге излагаются основные структуры и исходная точка различных построений, составляющих в целом элементарную математику; в ней уточняется смысл основных терминов обиходного языка, которые следует лишить слишком интуитивного содержания; вводится также несколько символов, устанавливающих условия существования отношений. Мы будем употреблять эти символы, чтобы выразить сжато, с помощью формул высказывания, которые, таким образом, не будут зависеть от субъективного характера нашей речи, а это лучше выявит их логическое и математическое содержание.

Первая глава

ТЕРМИНОЛОГИЯ И СИМВОЛЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ

§ 1. Первоначальные определения

Мы будем изучать *элементы*, как например числа, точки, векторы, функции и т. п., которые часто будем обозначать строчными латинскими буквами: a, b, x, f и т. п. *Множества* таких элементов будут обозначаться заглавными латинскими буквами: например, множество четных чисел p будет обозначено через P, множество линейных функций f через F, окружность C будет множеством ее точек m и т. д.

а) Чтобы кратко записать, что элемент a принадлежит множеству A, используют *знак принадлежности* $\in$, который в печати иногда заменяется греческой буквой «эпсилон» ε. Так, предложение «Точка m принадлежит окружности C» напишется, если уже известно, что m — это точка, а C — окружность;

$$m \in C.$$

Но множество может само рассматриваться как элемент другого множества. Например, можно рассмотреть множество $\mathfrak{T}$ окружностей плоскости, которые проходят через две данные точки, тогда могут возникнуть записи:

$$m \in C, \quad C \in \mathfrak{T}.$$

Аналогично ученик a принадлежит классу A, который принадлежит множеству $\mathcal{A}$ всех классов данной школы, являющемуся, в свою очередь, элементом множества школ страны. Мы говорим, что здесь имеет место восхождение по *лестнице типов* множеств. Знак принадлежности указывает на такое восхождение.

б) Определим теперь *подмножество* множества. Пусть, например, класс A — множество учеников. Рассмотрим множество B учеников этого класса, которые изучают английский язык: B называется подмножеством A. Если все ученики класса A изучают английский язык, тогда B есть само множество A. Но может случиться также, что ни один ученик класса A не изучает английский язык; тогда говорят, что B — *пустое* подмножество. Подмножество называется *истинным*, если оно не пустое. Определение подмножества B множества A, стало быть, следующее:

«B есть подмножество A» означает, что, каков бы ни был элемент a, «a принадлежит B» влечет за собой: «a принадлежит A». Мы будем писать это условие с помощью двух логических символов:

$\forall$, означающего «любой», «каков бы ни был» «для всех». Это квантор.

$\Rightarrow$, означающего «влечет за собой». Это символ следствия (импликации).

Таким образом, определение подмножества B множества A: Каково бы ни было a, утверждение «a принадлежит B» влечет за собой утверждение «a принадлежит A», запишется так:

$$\forall a : a \in B \Rightarrow a \in A.$$

Отношение между A и его подмножеством B может быть выражено некоторым символом без явного упоминания элемента a. Так, пишут:

$$B \subseteq A,$$

что читается «B включено в A»; символ $\subseteq$ обозначает, стало быть, *включение*. Это же отношение можно записать и так:

$$A \supseteq B,$$

что читается: «A содержит B». Если желают уточнить, что A содержит и другие элементы, кроме элементов из B, тогда используют символ *строгого включения* $\subset$:

$$B \subset A$$

«B строго включено в A». Таким образом, символ включения, в противоположность символу принадлежности, не приводит к восхождению по лестнице типов.

Необходимо подчеркнуть:

транзитивность отношения включения:

$$[C \subseteq B \text{ и } B \subseteq A] \Rightarrow [C \subseteq A].$$

Аналогично для строгого включения. Этот вывод является одной из аксиом теории множеств (см. гл. VI).

в) Пусть A и B — два подмножества множества E. Часто приходится рассматривать множество J элементов, принадлежащих и A и B. Это подмножество J называется *пересечением* A и B, что пишется и читается:

$$J = A \cap B, \text{ «}J\text{ — пересечение } A \text{ и } B\text{».}$$

Символ $=$ означает здесь «есть то же множество, что и ...».

Определение символа пересечения $\cap$ дано, таким образом, записью:

$$\forall m : [m \in A \cap B] \Leftrightarrow [m \in A \text{ и } m \in B].$$

Символ $\Leftrightarrow$ обозначает *логическую равносильность*: каждая из частей есть следствие другой.

Если A и B не имеют общих элементов, то J пусто. Это записывают:

$$A \cap B = \varnothing.$$

(Символ $\varnothing$, который напоминает нуль своей формой, является скандинавской буквой и читается «пустое множество».)

В этом случае говорят, что подмножества A и B разъединены (раздельны).

г) Можно определить также *объединение* двух подмножеств A и B, как подмножество элементов, принадлежащих A или B, или тому и другому (неразделительное «*или*»). Это записывают: $R = A \cup B$, «R равно объединению A и B».

Можно также определить объединение нескольких подмножеств множества E, как множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих подмножеств. Очень важным является, очевидно, случай, когда эти подмножества попарно не пересекаются, в этом случае говорят, что эти подмножества составляют *разбиение их объединения* (это соответствует идее разбиения R). Такое объединение подмножеств, попарно непересекающихся, называется часто *суммой* этих подмножеств.

д) Наконец, если A — подмножество множества E, можно рассмотреть множество элементов E, которые не принадлежат A: это будет *дополнение* множества A, обозначаемое $\complement A$. Его определение требует символа *непринадлежности*: для этого используют перечеркнутый символ принадлежности. Таким образом,

$$[m \in \complement A] \Leftrightarrow [m \notin A \text{ и } m \in E].$$

е) Еще один новый символ будет полезен; это новый квантор «существует по меньшей мере один», обозначаемый $\exists$.

Например, чтобы выразить, что A и B не разъединены, мы напишем:

$$\exists m\colon\ m \in A \cap B.$$

Итак, мы ввели два логических символа:

$$\Rightarrow,\ \Leftrightarrow.$$

Символы теории множеств:

$$\in$$

$$\subseteq \text{ и } \supseteq,\ \subset \text{ и } \supset,\ \cap,\ \cup,$$

два квантора

$$\forall,\ \exists.$$

§ 2. Отношения эквивалентности

Нам часто приходится рассматривать несколько элементов множества как эквивалентные, потому что с этой точки зрения один элемент может быть заменен другим. Например, если мы интересуемся направлением, то две параллельные прямые являются эквивалентными. С точки зрения остатков деления на 5 числа 27 и 32 являются эквивалентными. С точки зрения измерения величин дроби $^2/_3$ и $^4/_6$ являются эквивалентными.

Договоримся употреблять слово *эквивалентность* лишь в случае, когда выполняются следующие три условия:

1. Каждый элемент эквивалентен самому себе.

2. Высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым и какой вторым.

3. Два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой.

Примем для обозначения эквивалентности символ $\equiv$.

Общее определение символа эквивалентности.

1. $\forall a,\ a \equiv a$ (*рефлексивность*).

2. $\forall a,\ \forall b : [a \equiv b] \Rightarrow [b \equiv a]$ (*симметричность* или взаимность).

3. $\forall a,\ \forall b,\ \forall c : [a \equiv b$ и $b \equiv c] \Rightarrow [a \equiv c]$ (*транзитивность*).

Всякое условие, которое позволяет различить среди элементов некоторого множества те, которые будут рассматриваться как эквивалентные, называется *отношением эквивалентности*. Таким образом, всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение является отношением эквивалентности.

Пусть E — множество, в котором определено отношение эквивалентности. Подмножество элементов, эквивалентных некоторому элементу a, называется *классом эквивалентности*: все элементы этого класса эквивалентны между собой (согласно транзитивности) и всякий элемент m из E находится в одном и только в одном классе (полагая, что m может быть и единственным элементом класса, если элементы эквивалентные ему не существуют).

В таком случае E становится объединением непересекающихся классов. Говорят, что *отношение эквивалентности в E определяет на E разбиение на классы эквивалентности*. Множество таких классов называется *фактор-множеством* множества E по отношению эквивалентности $\mathcal{R}$. Обозначают это множество через $E/\mathcal{R}$.

Каждый класс эквивалентности определяется одним из его элементов, который может служить представителем класса. Например, исследование делимости на 5 является изучением разбиения множества натуральных чисел на 5 классов, представителями которых являются 5 остатков: 0, 1, 2, 3, 4. Во множестве прямых одна прямая среди всех, параллельных ей, определяет направление: каждое направление является классом эквивалентности для отношения параллельности; это отношение является отношением эквивалентности.

В качестве символов для отношения эквивалентности используются $=$ и подобные ему: мы уже использовали $\equiv$; известно, что параллельность обозначается через $\|$; иногда используется символ $\sim$. Отметим, что знак, обозначающий «приближенно равно», $\simeq$, или $\neq$, не указывает на отношение эквивалентности, из-за отсутствия транзитивности. Знак $\Leftrightarrow$ показывает логическую эквивалентность во множестве высказываний.

§ 3. Отношение порядка

a) В течение времени мы отличаем понятия «раньше» и «позже». Используем символ $\prec$ для выражения понятия «раньше». Интуитивно припишем ему следующие три свойства:

$$\begin{array}{l} \forall a,\ \forall b,\ \forall c \\ a \in E,\ b \in E,\ c \in E \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a \prec a \text{ ложно (нерефлексивность)} \\ a \prec b \text{ и } b \prec a \text{ взаимоисключаются (несимметричность)} \\ [a \prec b \text{ и } b \prec c] \Rightarrow a \prec c \text{ транзитивность} \end{array} \right.$$

По определению, всякое отношение, обладающее этими свойствами, называется *отношением строгого (или совершенного) порядка.*

Примеры. Отношение «меньше» $<$ между числами. На множестве $\mathcal{P}$ всех подмножеств множества E отношение строгого включения $\subset$.

b) Если между элементами некоторого множества E определено отношение эквивалентности, то используется часто отношение нестрогого (или широкого) порядка. Изобразим его через $\preccurlyeq$. Этот символ определяется так:

$$\begin{array}{l} \forall a,\ \forall b,\ \forall c \\ a \in E,\ b \in E,\ c \in E \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a \preccurlyeq a \text{ верно (рефлексивность)} \\ [a \preccurlyeq b \text{ и } b \preccurlyeq a] \Rightarrow [a = b] \text{ (антисимметричность)} \\ [a \preccurlyeq b \text{ и } b \preccurlyeq c] \Rightarrow [a \preccurlyeq c] \text{ (транзитивность)} \end{array} \right.$$

Примеры. Отношения, обозначаемые $\leqslant$, $\geqslant$, $\subseteq$. Отношение следования $\Rightarrow$ на множестве высказываний.

c) Если в множестве E два любых элемента являются сравнимыми, то есть, если имеется

$$\forall a,\ \forall b,\ a \in E,\ b \in E \left\{ \begin{array}{l} a \prec b \\ \quad \text{или} \\ a \equiv b \text{ (трихотомия)} \\ \quad \text{или} \\ b \prec a \end{array} \right.$$

то говорят, что множество E полностью упорядочено (*totalement ordonné*) * рассматриваемым отношением (отношением строгого порядка).

В случае, когда некоторые элементы не сравнимы, множество называется *частично упорядоченным.*

Примеры частичного упорядочения. Во множестве целых чисел отношение «a является кратным b» есть отношение порядка (не строгого, если считаем, что число является

* В нашей литературе слово «полностью» или «линейно» обычно не употребляют, а просто говорят, что множество «упорядочено».— *Прим. ред.*

кратным самому себе), но такие, например, числа, как 2 и 3, не являются сравнимыми.

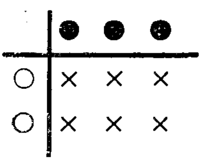
Железнодорожные вокзалы можно упорядочить по принципу «*a*» раньше «*b*», если поезд, идущий в Париж, проходит через «*a*» раньше, чем через «*b*»: два вокзала сравнимы только в том случае, если они находятся на одной железнодорожной линии, ведущей к Парижу.

§ 4. Операции

Рассмотрим одно или несколько множеств, например три множества E, E', E'', которые мы назовем *исходными*. Предположим, что любые три элемента a, a', a'', принадлежащие соответственно множествам E, E', E'', определяют по известному правилу элемент x некоторого множества X. Тогда мы будем говорить, что определена *операция* и что X является *полученным* множеством (*образом данных множеств*); a, a', a'' называются *членами* (*множителями*) *операции*. Мы будем изучать главным образом *бинарные*, то есть двучленные, операции.

Примеры. 1. Исходное множество: множество целых чисел любого знака. Операция: возведение в квадрат. Образ — подмножество целых чисел, состоящее из «точных квадратов».

2. Исходные множества: множества целых чисел и множество дробей. Операция — умножение. Образ — множество дробей.



Черт. 1

3. Исходное множество: точки прямой. Операция — проведение через точку прямой, параллельной заданному направлению. Образ: прямые*, принадлежащие некоторой плоскости.

а) **Произведение двух множеств.** Основная операция над несколькими множествами —«произведение этих множеств» (говорят также «*прямое произведение*» этих множеств). Пусть заданы два исходных множества A и B. Рассмотрим в качестве образа *множество X пар* (a, b), составленных из любого элемента a из A и любого элемента b из B. Это множество X называется *прямым произведением* A на B и записывают: $X = A \times B$.

Пример. A имеет элементы p, q, r; B — u и v; $A \times B$ имеет элементами (p, u); (p, v); (q, u); (q, v); (r, u); (r, v). Прилагаемый график является *моделью* этой операции: множество крестиков является действительно изображением прямого произведения множества черных точек и множества белых точек.

Другой пример. Рассмотрим множество пар, образованных абсциссой и ординатой в аналитической геометрии (на пло-

* Они параллельны заданному направлению — *Прим. ред.*

скости): это прямое произведение двух множеств вещественных чисел изображается множеством точек плоскости, имеющих эти числа своими координатами: каждая пара чисел соответствует точке и, обратно, каждой точке соответствует пара чисел. Мы это выражаем, говоря, что существует *взаимно однозначное соответствие* между множеством этих пар и множеством точек плоскости. Говорят также «одно — однозначное соответствие» или же $1:1$ соответствие. Это основное понятие, позволяющее использовать модели изображения. Таким же образом, если a, b и c принадлежат соответственно трем множествам A, B, C, произведение $A \times B \times C$ — это множество троек (a, b, c).

b) **Внутренние операции.** Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество пар (a, b) его элементов, то есть произведение E на себя: $E \times E$. Бинарная операция, которая ставит в соответствие каждой паре (a, b) элемент из E, называется *внутренней операцией*, определенной на E.

Примеры. На множестве целых чисел сложение и умножение. На множестве дробей (исключая нуль) деление. На множестве векторов (смотри главу III) сложение. Но множество векторов приводит и к другому виду операций. Умножение вектора на число ставит в соответствие каждой паре, состоящей из вектора и числа, другой вектор. Множество чисел рассматривается как множество операторов, действующих на векторы. *Внешней операцией* называют такую, для которой образ совпадает с одним из исходных множеств, в то время как другое исходное множество является *множеством операторов*.

Рассмотрим внутреннюю операцию на E. Ее называют также *законом внутренней композиции между элементами* E (для получения третьего элемента совершают композицию двух элементов из E). Если операция $\bigcirc$ есть внутренняя операция на подмножестве A множества E, то говорят, что A *замкнуто* относительно этой операции, потому что она не выведет нас за пределы подмножества A.

Пусть $\bigcirc$ — внутренняя операция, определенная на E. Условимся обозначать через r результат этой операции, выполненной над элементами a и b:

$$a \bigcirc b = r.$$

Так как r принадлежит E, то он может быть взят в свою очередь в качестве *члена* операции (или объекта операции). Будем иметь, например,

$$a \bigcirc b = r; \quad r \bigcirc c = s,$$

иначе говоря, операция может повторяться.

Условный способ обозначения.

$$[a \bigcirc b = r \text{ и } r \bigcirc c = s] \Rightarrow [(a \bigcirc b) \bigcirc c = s].$$

Если откажемся от скобок в левой части, получим:

$$a \bigcirc b \bigcirc c = s.$$

Аналогично $a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d \bigcirc e$

означает

$$\{[(a \bigcirc b) \bigcirc c] \bigcirc d\} \bigcirc e.$$

Важное замечание. *Запись операций читается слева направо*, если нет других указаний.

с) Свойства операций. Операции, с которыми мы встретимся, часто обладают следующими свойствами (мы обозначаем эквивалентность элементов знаком $=$):

$[A]$

- $[A_1]$ $[a = a'$ и $b = b'] \Rightarrow [a \bigcirc b = a' \bigcirc b']$

  «Два эквивалентных элемента могут заменить друг друга в операции» — «можно оперировать почленно с двумя равенствами». Эквивалентность и сложение совместны.

- $[A_2]$
  - $[A_2']$ $[a \bigcirc b = a' \bigcirc b] \Rightarrow [a = a']$ сокращение справа
  - $[A_2'']$ $[a \bigcirc b = a \bigcirc b'] \Rightarrow [b = b']$ сокращение слева

- $[A_3]$ $a \bigcirc b \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$ ассоциативность для трех членов

- $[A_4]$ $a \bigcirc b = b \bigcirc a$ коммутативность для двух членов

Замечание. Предшествующие эквивалентности, будучи симметричны по определению, могут читаться в обоих направлениях: например, $[A_3]$ означает, что можно отказаться от скобок в правой части.

Каждый раз, когда некоторая внутренняя операция будет определена на множестве, мы должны будем исследовать, верны эти свойства или нет. (Например, деление во множестве дробных чисел, очевидно, некоммутативно!) Заметим, что если $[A_4]$ верно, то $[A_2']$ и $[A_2'']$ эквивалентны и выражают условие *двустороннего сокращения* $[A_2]$.

Следствия из свойств $[A]$

$[C_1]$. Ассоциативность для последовательных членов.

Каждая группа членов, следующих друг за другом, может быть заключена в скобки. Это следует из $[A_1]$ и $[A_3]$ и не требует $[A_4]$. Например, пусть требуется перейти от

$$a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d \bigcirc e \bigcirc f = s \text{ к } a \bigcirc b\, (c \bigcirc d \bigcirc e) \bigcirc f.$$

Используя как определения $[A_1]$ и $[A_3]$, мы напишем:

$$s = [(a \bigcirc b \bigcirc c) \bigcirc d \bigcirc e] \bigcirc f = [(a \bigcirc b \bigcirc c) \bigcirc (d \bigcirc e)] \bigcirc f =$$
$$= [(a \bigcirc b) \bigcirc c \bigcirc (d \bigcirc e)] \bigcirc f =$$
$$= [(a \bigcirc b) \bigcirc \{c \bigcirc (d \bigcirc e)\}] \bigcirc f = a \bigcirc b \bigcirc \{c \bigcirc (d \bigcirc e)\} \bigcirc f =$$
$$= a \bigcirc b \bigcirc \{c \bigcirc d \bigcirc e\} \bigcirc f.$$

$[C_2]$. Полная коммутативность. Можно расположить члены в произвольном порядке.

Это следует из $[A_1]$, $[A_3]$, $[A_4]$. Доказательство разобьем на две части.

1. *Можно менять местами два последовательных члена.*

Пример. Перейти от

$$s = a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc d \bigcirc e \bigcirc f \bigcirc g \text{ к } a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc e \bigcirc d \bigcirc f \bigcirc g.$$

Мы используем определение, а затем $[A_3]$ и $[A_4]$.

$$s = [(a \bigcirc b \bigcirc c) \bigcirc (d \bigcirc e)] \bigcirc f \bigcirc g =$$
$$= [(a \bigcirc b \bigcirc c) \bigcirc (e \bigcirc d)] \bigcirc f \bigcirc g = a \bigcirc b \bigcirc c \bigcirc e \bigcirc d \bigcirc f \bigcirc g.$$

2. *Можно записывать члены в произвольном порядке.*

В самом деле, можно менять местами последовательные члены таким образом, чтобы член, занявший предназначенное место, не перемещался больше в дальнейшем; для этого достаточно переместить на надлежащее место тот член, который должен быть первым с одного из концов (например, слева), затем поступить аналогично со следующим и т. д. Легко подсчитать число необходимых перестановок.

$[C_3]$. Полная ассоциативность. Можно сгруппировать какие угодно члены в одних скобках. Это вытекает из свойств $[A]$, так как согласно $[C_2]$ можно расположить нужные члены вначале слева.

Итак (важно для последующего), всякий раз, когда имеют место свойства $[A]$, выполняются следствия $[C_1]$, $[C_2]$, $[C_3]$.

Определение. *Нейтральным элементом* называется каждый элемент n, для которого

$$\forall a : a \bigcirc n = a, \quad n \bigcirc a = a.$$

Эти два условия следуют одно из другого, если операция коммутативна. Если этот элемент существует, то он единственный согласно $[A_1]$, так как

$$[n \bigcirc n' = n \text{ и } n \bigcirc n' = n'] \Rightarrow [n = n'].$$

Примеры. Для сложения чисел нейтральным элементом является нуль, для умножения это единица.

Вторая глава

ЧИСЛА

Элементы множества часто называются *точками*, потому что их считают неделимыми. Если во множестве определены внутренние операции, то его элементы чаще называют *числами*, используя слово число, ранее применяемое только к натуральным числам.

§ 1. Натуральные числа

Когда мы считаем предметы, то используем натуральные числа. Опыт показывает, каковы те предметы, которые таким образом можно сосчитать: они не должны таять, испаряться, склеиваться и т. д. Натуральные числа нам хорошо служат потому, что они обладают некоторыми хорошо известными свойствами.

Мы сейчас определим эти числа аксиоматически с помощью множества свойств, достаточных, чтобы из них вывести другие. (Заметим, что известная свобода в выборе этих аксиом позволяет дать и другие аксиоматические изложения.)

Аксиомы, определяющие множество N натуральных чисел

I. Сложение

Во множестве N определена внутренняя операция — сложение (обозначаемая $+$), которая сопоставляет каждой паре (a, b) элементов из N элемент $a+b$, называющийся их *суммой*. Эта операция обладает свойствами $[A]$ из первой главы, которые здесь записываются так:

$$[A]\begin{cases} [A_1] & [a=a' \text{ и } b=b'] \Rightarrow [a+b=a'+b'] \\ [A_2] & \begin{cases} [a+b=a'+b] \Rightarrow [a=a'] \\ [a+b=a+b'] \Rightarrow [b=b'] \end{cases} \\ [A_3] & a+b+c=a+(b+c) \\ [A_4] & a+b=b+a. \end{cases}$$

Отсюда вытекают следствия $[C]$: полная коммутативность и полная ассоциативность.

II. Отношение порядка

Определение. Пусть мы имеем пару (a, b) элементов из N; если существует элемент d из N, такой, что $a+d=b$, то мы говорим, что a *меньше, чем* b, и пишем: $a<b$. Таким образом,

$$[a<b] \Rightarrow [\exists d : a+d=b].$$

Аксиома [П] трихотомии. Для каждой пары (a, b) элементов из N либо $a=b$, либо $a<b$, либо $b<a$, причем эти случаи исключают друг друга. Отсюда вытекает, что это отношение есть *отношение порядка* (упорядоченности) на N, причем порядок является *строгим*. В самом деле, это отношение не рефлексивно и не симметрично. Докажем, что оно транзитивно:

$$\left.\begin{matrix} a<b \Leftrightarrow \exists d : b=a+d \\ b<c \Leftrightarrow \exists d' : c=b+d' \end{matrix}\right\} \underset{\text{(согласно } [A])}{\Leftrightarrow} \left\{ c=a+(d+d'), \right.$$

следовательно, $a<c$.

Вывод. Множество N целиком упорядочено отношением $<$.

Условимся писать $b > a$ вместо $a < b$; отношение $>$ называется *обратным* отношением к предыдущему; оно является также отношением строгого порядка, которое читается: «больше чем», или «превосходит».

Отношение $\leqslant$ читается: «меньше или равно» (нестрогая упорядоченность), а $\geqslant$ читается: «больше или равно».

$a < b$ и $u > v$ называются неравенствами *противоположных смыслов*.

Следствия.

а) **Разность.** Пусть $a < b$; чтобы выразить $\exists d,\ b = a + d$, мы пишем: $\exists d,\ b - a = d$.

Операция, которая здесь сопоставляет d паре (a, b), называется *вычитанием*. Она определена *в* N, но не *на* N, потому что не все пары здесь допустимы: операция $b - a$ определена, только если $a < b$.

Свойства разностей. Они вытекают из $[A]$ и $[П]$.

Единственность.

$$\left.\begin{array}{l} [b-a=d] \iff [b=a+d] \\ [b-a=d'] \iff [b=a+d'] \end{array}\right\} \Rightarrow d=d' \ \text{(по } [A_2]).$$

Свойства.

Число d называется разностью между b и a.

$$[D_1]\ b-a=(b+m)-(a+m),\ \forall m\in N.$$

Предложение. Если прибавить одно и то же число к обоим членам вычитания, разность не меняется.

Другие формы этой теоремы:

$[D_1']$ $[p<a<b] \Rightarrow [b-a=(b-p)-(a-p)]$;

$[D_2]$ $a+(b-c)=a+b-c$;

$[D_3]$ $a-(b+c)=a-b-c$;

$[D_4]$ $a-(b-c)=a+c-b$, а также $=a-b+c$ в случае $b<a$;

$[D_5]$ $(b-a)+(b'-a')=(b+b')-(a+a')$.

Принцип доказательств. *Чтобы доказать некоторое равенство, мы можем доказывать другое равенство, полученное прибавлением одного и того же числа к обеим частям первого равенства.* В самом деле, согласно $[A]$

$$[u=v] \iff [u+k=v+k].$$

Таким образом доказывают

$[D_1]$, взяв $k=a+m$, $[D_2]$, взяв $k=c$,

$[D_3]$, приняв $k=b+c$, $[D_4]$, полагая $k=b-c$

и используя $[D_1]$, $[D_5]$, взяв $k=a+a'$.

b) Свойства неравенств.

$$[N_1]\ [a<b] \Rightarrow [a+m<b+m],\ \forall m \in N.$$

Предложение. Если прибавим к обеим частям неравенства одно и то же число, получаем неравенство того же смысла.

$$[N_1']\ [p<a<b] \Rightarrow [a-p<b-p],$$

$$[N_2]\ [a<b \text{ и } a'<b'] \Rightarrow [a+a'<b+b'].$$

Предложение. Складывая почленно два неравенства одного и того же смысла, получаем неравенство того же смысла.

Доказательство с помощью $[D_1]$ и $[D_5]$.

III. Вполне упорядоченные множества

Система, определенная аксиомами $[A]$ и $[\Pi]$, еще слишком общая.

1. Мы должны ее уточнить следующей аксиомой:

$[\Pi\Pi]$ **Аксиома полной упорядоченности.** *Всякое непустое подмножество множества N содержит наименьший элемент.*

В частности:

Аксиома первого элемента. *Множество N имеет наименьший элемент.* Он называется «единицей» и его обозначают знаком 1.

Следствие. В подмножестве, образованном всеми такими элементами x, что $a<x$, то есть такими, что $\exists y : x = a + y$, существует наименьший элемент. Это $a+1$, потому что

$$[1 \leqslant b] \Rightarrow [a+1 \leqslant a+b] \text{ согласно } [N_1].$$

Мы отсюда выводим последовательность натуральных чисел $1, 1+1, 1+1+1$ и т. д. (Слова и т. д., которые заменяются в математике символом $\ldots$, означают, что операция должна неограниченно повторяться.

Последовательность — это множество, обозначаемое, вообще говоря, так: $u_1, u_2, u_3 \ldots$, то есть находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел.)

2. Чтобы получить вывод, верный для *любого элемента из N*, мы пользуемся следующей чрезвычайно важной теоремой:

Теорема о рекуррентном доказательстве *. Речь идет о свойстве, которое для числа $a \in N$ может быть либо истинным, либо ложным. Мы хотели бы доказать, что оно верно для любого $a \in N$. Какие предположения позволят нам сделать этот вывод?

Формулировка теоремы. *Если известно, что*

1) *рассматриваемое свойство верно для* $a=1$,

2) *и если оно верно для* $a=p$, *то оно верно также для* $a=p+1$, *и это утверждение имеет место для любого* p и, *в частности, для* $p=1$.

---

* Этот вид доказательства, называемый чаще доказательством по рекурсии, известен еще под именем математической индукции.— *Прим. ред.*

Тогда можно заключить, что это свойство верно для всех чисел из N.

Это запишется так:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \left\{ \begin{array}{l} \text{Верно для } a=1 \\ \forall p \in N \quad \big[[\text{верно для } a=p] \Rightarrow [\text{верно для } a=p+1]\big] \end{array}\right. \\ 2. & \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{верно для } \forall a \in N]$$

Доказательство. Разбиваем элементы из N на два подмножества: V, содержащее все числа из N, для которых свойство верно, и F, содержащее все числа из N, для которых это свойство не верно. Мы сейчас докажем, что из предположений 1) и 2) вытекает, что F — пусто.

Действительно, если F не пусто, то согласно [*ПП*] оно содержит наименьший элемент q. Это число q не равно 1 в силу первого предположения. Значит, оно больше 1 и, следовательно, существует число $q-1$. Тогда в силу определения q это число $q-1$ принадлежит V; но тогда предположение 2) приводит к выводу, что $(q-1)+1$ тоже принадлежит V, а это находится в противоречии с определением числа q. Значит, q не существует и F пусто. Иначе говоря, любое число принадлежит V и т. д.

С помощью этой теоремы доказывается предположение: *любое число $a \in N$ есть сумма чисел равных* 1: действительно, если это так для $a = p$, то это имеет место и для $a = p+1$.

Замечание. Эта теорема позволяет проводить проверку, отыскание формул. Например, правильность следующих формул:

$$S_n = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\Sigma_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \ \forall n \text{ натуральном},$$

доказывают, установив, что $S_1 = 1$, $\Sigma_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n+(n+1)$, $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + (n+1)^2$.

3) Кардинальное число подмножества множества N

Мы уже определили *взаимно однозначное соответствие между двумя множествами*: это соответствие между каждым элементом одного и каждым элементом другого множества, причем каждому элементу соответствует только один элемент. Если некоторое множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством N, то говорят, что это множество есть *последовательность* (счетное множество). Элементы такого множества можно обозначить $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Говорят также, что оно имеет *мощность счетного множества*. Например, таковым является множество четных чисел $a+a$ $(a \in N)$, потому что $a+a$ взаимно однозначно соответствует a; пишут: $u_n = 2n$.

Подмножество множества N называется *конечным*, если оно обладает наибольшим элементом; например, подмножество элементов x, определенных неравенством $x < 6$, есть *конечное подмножество*: его наибольший элемент есть $6 - 1 = 5$. Но подмножество четных чисел не является конечным.

Пусть A — *конечное непустое подмножество* множества N. Оно вполне упорядочено, как и множество N, и его элементы могут быть расположены в порядке возрастания

$$a < b < c < \ldots < p < q.$$

Можно поставить в соответствие элементу a число 1, элементу b — число $1 + 1$, c — число $1 + 1 + 1$ и т. д. Числу q соответствует вполне определенное число n (потому что можно применить рекуррентное доказательство к множеству элементов $a, b, c, \ldots, q$) и ясно, что n не больше, чем $q + 1 - a$ (равенство $n = q + 1 - a$ имеет место, если $a, b, c \ldots, q$ следуют непосредственно друг за другом в N). Это число n называется *кардинальным (количественным) числом, соответствующим множеству A*; говорят также, что *n — это число элементов множества A*.

Вообще, если дано некоторое множество B и можно установить взаимно однозначное соответствие между B и некоторым конечным подмножеством A множества N, то кардинальное число подмножества A называется *числом элементов* множества B. B называется тогда *набором (collection) объектов* и *n есть число объектов этого набора*. Самые важные из таких наборов — это набор символов нашей письменной нумерации 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и набор слов, которыми мы пользуемся в устной речи для обозначения произвольных чисел.

Отношение между двумя множествами: «иметь одно и то же кардинальное число» — есть отношение эквивалентности (ибо существование взаимно однозначного соответствия транзитивно); это отношение называется *равномощностью* (см. книга II, гл. III).

Приложение к объединению и пересечению двух конечных множеств. Пусть A и B — два конечных подмножества множества E, n и m — их кардинальные числа. Если A и B не пересекаются, то их объединение R имеет кардинальное число $r = n + m$ (мы уже говорили, что в этом случае часто употребляют слово «сумма» вместо слова «объединение»). Если, наоборот, пересечение J подмножеств A и B не пусто, то оно имеет кардинальное число j и

$$n + m = r + j.$$

Если B включено в A, то пересечение есть B, так что $j = m$, $r = n$; множество D элементов A, которые не принадлежат B, содержит $d=n-m$ элементов; D называют *разностью* подмножеств A и B. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ B \subset E \end{array}\right\} \Rightarrow [n+m=r+j];$$

$$[A \cap B=\varnothing] \Longleftrightarrow [n+m=r];$$

$$[B \subset A] \Longleftrightarrow [j=m,\ n=r,\ d=n-m].$$

Поэтому если хотят истолковать сумму двух натуральных чисел операциями над наборами, то нужно брать непересекающиеся множества; чтобы истолковать разность, нужно взять два множества, из которых одно включено в другое.

Таблица сложения. Возьмем в качестве образа натуральных чисел последовательные отрезки строки и столбца плоскости. Образом произведения этих множеств является множество клеток решетки; каждой клетке, находящейся на пересечении столбца с номером a и строки с номером b, мы поставим в соответствие число $a+b$.

Нетрудно видеть, как аксиомы $[A]$ осуществляются в этой таблице.

	1	2		a
1	2	3		$a+1$
2	3	4		$a+2$
b				$a+b$

IV. Умножение

1. Мы покажем, что имеется возможность определить в изучаемом множестве N, уже снабженном операцией сложения и отношением порядка, еще вторую операцию, удовлетворяющую условиям $[A]$ и двум аксиомам, выражающим связь этой операции со сложением. Мы назовем эту операцию *умножением*, и в записи будем обозначать ее точкой, которая, впрочем, часто опускается. Пишут: $a \cdot b$ или ab. Результат есть число, называемое *произведением*, a и b — *сомножители* произведения.

Аксиомы умножения

$[A_1]$ $[a=a'$ и $b=b'] \Rightarrow [ab=a'b']$;

$[A_2]$ $[ab=ab'] \Rightarrow [b=b']$; $[ab=a'b] \Rightarrow [a=a']$;

$[A_3]$ $abc = a(bc)$;

$[A_4]$ $ab = ba$;

$[M_1]$ $a(b+b') = (ab) + (ab')$ — дистрибутивность умножения относительно сложения двух членов.

$[M_2]$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Число 1 является *нейтральным элементом* умножения.

Замечание. $(ab) + (cd)$ пишется без скобок $ab + cd$; согласно договоренности будем опускать скобки, содержащие только произведение.

Следствие. Дистрибутивность для n членов $[M_1']$ $a(b + c + \ldots + k) = ab + ac + \ldots + ak$.

Доказывается рекуррентно; действительно, если дистрибутивность верна для p членов, она верна также для $p + 1$ членов в силу ассоциативности сложения. Отсюда следует формула для умножения суммы на сумму.

2. Нам нужно теперь показать *существование* и *единственность* во множестве N операции, имеющей желаемые свойства.

Чтобы получить произведение ab, рассмотрим b как сумму b членов, равных 1, и используем $[M_1]$ и $[M_2]$.

$$\underset{(b \text{ членов})}{b = 1+1+1+\ldots+1} \Rightarrow \underset{(b \text{ членов})}{ab = a+a+a+\ldots+a}$$

Следовательно, единственное значение, которое подходит для $p = ab$,— это сумма b чисел, каждое из которых равно a. Остается доказать, что это число p удовлетворяет всем принятым аксиомам.

Это видно сразу для $[A_1]$ и $[M_2]$. Ассоциативность сложения дает немедленно $[M_1]$, отношение порядка дает $[A_2]$.

$[A_3]$ вытекает из $[M_1]$, ибо

$$(ab)c = ab + ab + \ldots + ab \qquad (c \text{ членов});$$
$$a(bc) = a(b + b + b + \ldots + b) \qquad (c \text{ членов}).$$

Доказательство $[A_4]$ требует разложения a и b на сумму членов, равных 1:

$$\underset{(b \text{ членов})}{ab = (a + a + \ldots + a)} = (1 + 1 + \ldots + 1) +$$
$$+ (1 + 1 + \ldots + 1) + \ldots + (1 + 1 + \ldots + 1)$$
$$(a \text{ членов в каждой скобке}).$$

Другая группировка членов дает по b членов, равных единице и расположенных в каждом из a рядов, заключенных в скобки, так что получаем

$$\underset{(a \text{ членов})}{b + b + \ldots + b = ba}.$$

Можно также провести и рекуррентное рассуждение, ибо для $b=1$ имеем, очевидно, $a\cdot 1 = 1\cdot a$ и

$$[ap=pa] \Rightarrow [a(p+1)=(p+1)a].$$

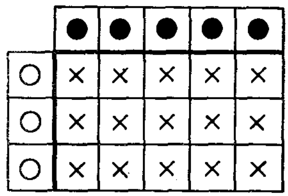
Действительно,

$$a(p+1)=ap+a=pa+1\cdot a=(p+p+\ldots+p)+$$
$$+(1+1+\ldots+1)=(p+1)+(p+1)+\ldots+(p+1)=(p+1)a.$$

Истолкование произведения, как произведения множеств.

Рассмотрим целые числа a и b, как числа объектов двух наборов, например наборов черных точек и белых точек. Число элементов произведения этих множеств удовлетворяет, очевидно, принятым аксиомам. К тому же легко проверить, что оно удовлетворяет нашему генетическому определению:

$$ab=a+a+\ldots+a \qquad (b \text{ членов}).$$



Черт. 2

Немедленно проверяются $[A_1]$, $[A_4]$, $[M_2]$.

$[M_1]$ вытекает из того, что было сказано об объединении раздельных множеств. $[A_2]$ вытекает из отношения порядка. Для $[A_3]$, очевидно, нужно рассмотреть не пары, а тройки. Можно это представить в пространстве: подсчитать $(ab)c$ или $a(bc)$ — означает подсчитать число кубиков всего множества через объединения его раздельных подмножеств, соответствующих тому или иному разбиению (например, на горизонтальные и вертикальные слои).

Это истолкование помогает избежать утомительной записи.

Сказанное выше оправдывает выражение «множество-произведение», потому что для конечных множеств кардинальное число множества-произведения есть произведение кардинальных чисел перемножаемых множеств.

Таблица Пифагора. Таблица умножения, как и таблица сложения или таблица бинарной операции, составляется, как таблица с двумя входами. Она удовлетворяет всем свойствам $[A]$ и $[M]$.

3. Умножение и отношение порядка. Из свойств N неравенств, относящихся к сложению, мы выведем свойства, относящиеся к умножению.

$[NM_1]$ Если $b\neq 1$, то $a<ab$.

$[NM_2]$ $\qquad [a<b] \Rightarrow [am<bm,\ \forall m\in N]$

(умножение обеих частей неравенства на некоторое число).

$[NM_3]$ $\qquad [a < b$ и $a' < b'] \Rightarrow [aa' < bb']$

(почленное умножение двух неравенств одного и того же смысла).

Доказательство. $[NM_1]$ вытекает из свойств сложения, а $[NM_2]$ вытекает из $[N_2]$. Для вывода $[NM_3]$ записываем:

$$\left.\begin{matrix} [a < b] \Rightarrow [aa' < ba'] \\ [a' < b'] \Rightarrow [ba' < bb'] \end{matrix}\right\} \Rightarrow [aa' < bb'].$$

Замечание. Сложение не является дистрибутивным относительно умножения. Действительно,

$$(a+b)\cdot(a+c) = aa + ac + ba + bc > aa + bc \geqslant a + bc.$$

V. Множество N натуральных чисел является архимедовым множеством

По определению, неравенство $b < a$ обеспечивает существование такого числа d, что $a = b + d$.

В общем случае не существует такое число q, чтобы выполнялось равенство $a = bq$ (это видно из таблицы Пифагора). Последовательность b, $2b$, $3b$, . . ., *кратных* b, не содержит все числа; если a не является элементом этой последовательности, то мы покажем, что всегда существуют элементы этой последовательности, превышающие число a.

Архимедово свойство (называемое иногда *аксиомой Архимеда*, потому что при других способах изложения это свойство принимается в качестве аксиомы).

Для любого a, большего или равного b, либо существует такое число q, что $a = bq$, либо существует такое число q, что

$$bq < a < b(q+1).$$

Иначе говоря,

$$\forall a,\ \forall b,\ a \geqslant b : \begin{cases} \exists q : a = bq \\ \qquad \text{или} \\ \exists q : bq < a < b(q+1). \end{cases}$$

Ясно, что эти два случая исключают друг друга и что, если q существует, то оно — единственное. Приступим к доказательству рекуррентным рассуждением, что любое число n из N удовлетворяет свойству «быть превзойденным последовательностью кратных b».

Очевидно, число 1 обладает этим свойством, так как

$$1 < b + 1 \leqslant 2b.$$

Пусть теперь p — число, обладающее этим свойством:

$$\exists k : p < bk.$$

Из этого следует:

$$p + 1 < bk + 1 \leqslant bk + b = b(k+1),$$

так что $p+1$ также обладает этим же свойством. Итак, любое натуральное число a будет превзойдено кратными числа b. Обозначая через bk наименьшее кратное числа b, которое превосходит число a, имеем:

$$[a > b] \Rightarrow [k > 1]$$

и

$$b(k-1) \leqslant a < bk.$$

Таким образом, число $q = k - 1$ удовлетворяет неравенству

$$bq \leqslant a < b(q+1).$$

Эта теорема является исходной для построения теории натуральных чисел (см. кн. II, Арифметика).

Замечание. Каждое бесконечное подмножество множества натуральных чисел является архимедовым.

Определение. Если число m не меньше любого элемента упорядоченного множества, то m называется *мажорантой этого множества*; говорят, что множество мажорируется элементом m. Если мажоранта принадлежит множеству, то она является наибольшим элементом множества. Мы только что убедились, что *последовательность кратных некоторого натурального числа не обладает мажорантой.*

§ 2. Относительные числа *. Симметризация

Мы охарактеризовали натуральные числа. Применяя своего рода удвоение, называемое симметризацией, мы приходим к рассмотрению положительных и отрицательных целых чисел, которые вместе с нулем составляют множество *целых относительных чисел.* Натуральные числа, в отличие от относительных, называют *абсолютными.*

Вообще эта симметризация может быть применена и к более общим множествам элементов, называемых абсолютными, например, если отказаться от аксиомы полной упорядоченности, так что эти рассмотрения могли бы найти свое место и дальше, например, после введения рациональных чисел.

Определение множества положительных чисел не будет тем же самым, что и определение множества абсолютных чисел, однако ввиду изоморфности этих множеств их отождествляют, допуская некоторую вольность (говорят 4 вместо $+4$). Разумеется, это недопустимо в начале изложения рассматриваемой теории.

I. Понятие изоморфизма двух структур

Пусть мы имеем два множества: E с элементами a, b, c, ... и E' с элементами a', b', c', ...; пусть между элементами этих множеств установлено взаимно однозначное соответствие: будем

* В нашей литературе принят термин «целые числа».— *Прим. перевод.*

говорить, что a' — образ a, b' — образ b и т. д. Если в множестве E определена операция $\bigcirc$, то мы можем определить в множестве E' операцию $\bigcirc'$, образ операции $\bigcirc$, с помощью условия, что результат операции $\bigcirc'$, выполненной над какой-либо парой (m', p') был образом результата операции $\bigcirc$ над парой (m, p). Любое свойство операции $\bigcirc$ (коммутативность, ассоциативность) перенесется и на операцию $\bigcirc'$.

Таким образом, множество E и E' будут обладать, относительно этих операций, аналогичным строением, являясь одно образом другого, и отличаясь только обозначениями. Можно было бы даже обозначить операции $\bigcirc$ и $\bigcirc'$ одним и тем же символом, если не бояться внести путаницу, и вычисления тогда формально были бы теми же самыми в E и в E'. Мы будем говорить, что эти две операции индуцируют на E и E' *изоморфные структуры, или же, что* E и E' *изоморфны относительно операций* $\bigcirc$ *и* $\bigcirc'$.

Аналогично, если некоторая структура порядка определена в E, а другая в E' так, что

$$[m \text{ перед } p] \Leftrightarrow [m' \text{ перед } p'],$$

то эти два множества изоморфны относительно этих отношений порядка.

II. Расширение путем симметризации

Наша цель — построить множество Z, достаточно богатое, чтобы одно из его подмножеств было изоморфно множеству N натуральных чисел относительно сложения и отношения порядка, следовательно, и относительно умножения и притом такое, чтобы вычитание в нем было *всегда* возможно. Это и называется *расширением N путем симметризации.*

Уточним используемые аксиомы; аксиома полной упорядоченности встретится лишь в конце.

Аксиомы, определяющие множество Z

a) **Аксиомы, относящиеся к первой операции, называемой сложением** (обозначаемой $+$).

1) Аксиомы $[A]$, откуда следуют $[C]$.

2) Аксиомы, порождающие новые элементы:

$[S_1]$ Существует нейтральный элемент для сложения, называемый *нулем* и обозначаемый 0.

Следовательно,

$$0 \in Z; \quad a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in Z.$$

$[S_2]$ Каждому элементу a из Z сопоставлен элемент a', такой, что $a + a' = 0$. Заметим, что элемент, сопоставленный нулю, есть нуль и что

$$[a' = b] \Leftrightarrow [b' = a], \text{ то есть } (a')' = a.$$

Говорят, что a и a' *симметричны относительно сложения* или же, что они *противоположны*. [Для некоторой операции, обозначенной $\bigcirc$ и имеющей нейтральный элемент ν, два элемента a и a' такие, что

$$a \bigcirc a' = a' \bigcirc a = \nu,$$

называются симметричными. Слово «противоположный» сохраняется для операции, обозначаемой аддитивно (в виде сложения).]

Следствие (оправдывающее выбор этих аксиом).

Каждой паре (a, b) *из* Z *соответствует число* x, *такое, что* $a + b' = x$.

Действительно, $x = a + b'$ является таким числом согласно $[A]$ и $[S_2]$.

Более того, это решение единственно, ибо

$$[b + x = a \text{ и } b + y = a] \Rightarrow [b + x = b + y] \Rightarrow [x = y].$$

Пишут: $x = a - b$, операция называется *вычитанием*, а x называется *разностью* между a и b.

Теорема.

$$[x = b - a] \Rightarrow [a - b = x'],$$

так как

$$[b = a + x \text{ и } a = b + y] \Rightarrow [x + y = 0].$$

Таким образом, в Z существует ассоциативная операция, которая имеет нейтральный элемент, и каждый элемент имеет симметричный элемент; говорят, что такое множество обладает *групповым строением*. Так как операция к тому же коммутативна, то это *коммутативная группа*, называемая также *абелевой группой* по имени знаменитого норвежского математика Абеля (1802—1829). Так как операция названа сложением и обозначена знаком $+$, то это *аддитивная группа*. (Мы будем встречаться с понятием группы на всем протяжении этой книги.)

b) **Аксиомы, относящиеся ко второй операции, называемой умножением.**

1. Мы должны немного изменить аксиомы, относящиеся к натуральным числам:

Аксиомы $[A]$. Сохраняются, кроме $[A_2]$, которая была бы несовместимой с дистрибутивностью.

Ее заменяют через

$$[A_2'''] \; a \neq 0 : [ab = ab'] \Rightarrow [b = b'];$$
$$[ba = b'a] \Rightarrow [b = b'].$$

Значит, можно сокращать на элемент, отличный от нуля.

Аксиомы $[M]$.

$[M_1]$ сохраняется: **распределительность по отношению к сложению.**

$[M_2]$ заменяется через $[M_2']$:

Для умножения существует нейтральный элемент. Мы его обозначим μ. Значит,

$$\forall a \in Z, \ \exists \mu \in Z : a\mu = \mu a = a.$$

2. Теоремы об умножении.

Теорема 1. *Произведение каждого элемента на нуль равно нулю.*

Действительно, по определению $a + 0 = a$. Значит, в силу $[A_1]$:

$$a(a+0) = aa$$

и в силу $[M_1]$

$$aa + a0 = aa,$$

значит,

$$aa + a0 = aa + 0,$$

откуда приведением получается $a0 = 0$. Аналогично $0a = 0$.

Теорема 2. *Если произведение двух сомножителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю.*

Действительно,

$$[ab = 0 \text{ и } a \neq 0] \Rightarrow [ab = a0 \text{ и } a \neq 0] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [b = 0] \text{ (в силу } [A_2'''])\text{.}$$

Теорема 3. *Сравнение ab, ab', $a'b$, $a'b'$.*

$$[b + b' = 0] \Rightarrow [a(b + b') = a0 = 0].$$

Значит, $ab + ab' = 0$.

Таким образом, $(ab)' = ab'$. Аналогично

$$(ab)' = a'b, \ (ab')' = a'b' = ab.$$

Итак, указанные произведения попарно равны и попарно противоположны:

$$ab = a'b', \ a'b = ab' = (ab)'.$$

Теорема 4. *Дистрибутивность умножения по отношению к вычитанию.*

$$c(a - b) = c(a + b') = ca + cb' = ca + (cb)' = ca - cb.$$

Следствие. *Дистрибутивность умножения по отношению к любой последовательности сложений и вычитаний.*

Множество Z снабжено теперь структурой группы относительно сложения и некоторой другой операцией, дистрибутивной относительно первой: в этом случае говорят, что Z имеет *структуру кольца.*

Так как умножение коммутативно, то говорят, что это *коммутативное кольцо.* (В математике изучают также более общие кольца, отбрасывая, например, аксиому сокращения $[A_2']$ или коммутативность умножения. Мы в дальнейшем изучим и некоторое другое кольцо: кольцо многочленов [кн. II].)

Заметим, что во множестве Z умножение не индуцирует структуру группы, ибо не предполагается, что каждый элемент имеет симметричный себе по отношению к умножению (мы будем его называть *обратным*).

c) **Аксиома трихотомии.**

Множество Z еще не вполне охарактеризовано; мы должны прибавить следующую аксиому:

1. **Аксиома** $[T]$. *Элементы множества разбиваются на три класса:*

1) Класс, содержащий только число 0.

2) Класс, замкнутый относительно сложения и умножения. Если P есть это подмножество, то его определение следующее:

$$\forall a,\ \forall b: [a \in P \text{ и } b \in P] \Rightarrow [a+b \in P \text{ и } ab \in P].$$

3) Класс, содержащий все элементы, противоположные элементам из P. Мы назовем это подмножество P'. Назовем *положительными числами* элементы из P, *отрицательными* — элементы из P', *нулем* — нулевой элемент. Аксиома формулируется так: *Каждый элемент из Z есть либо нуль, либо положительное число, либо отрицательное число, причем эти случаи взаимно исключают друг друга. Два противоположных элемента, отличные от нуля, являются один положительным, другой отрицательным. Сумма и произведение двух положительных элементов положительны.*

С л е д с т в и я. (Если приписать некоторый *знак* для характеристики положительных чисел и другой знак для отрицательных чисел, то это следствие называется *правилом знаков*. Мы выберем эти знаки немного далее.)

Согласно теореме 3 об умножении *произведение двух отрицательных чисел положительно*. Вообще, произведение (без нулевых множителей) положительно, если число его отрицательных множителей четно, отрицательно,— если это число нечетно.

В частности, каков бы ни был $a \neq 0$, aa — *положительно*. *Нейтральный элемент* μ удовлетворяет равенству $\mu\mu = \mu$, значит, он *положителен*.

2. **Теорема порядка.** Введем отношение, обозначаемое знаком $<$ и определенное через

$$a < b \iff [b - a \text{ положительно}].$$

Будет ли это отношением порядка? Оно не рефлексивно. Оно также не симметрично, так как

$$b = a + d \iff a = b + d'.$$

Если d — положительно, то d' — отрицательно.

Проверим теперь транзитивность:

$$\left.\begin{array}{l} [a < b] \iff [\exists d \text{ положительно}: b = a + d] \\ [b < c] \iff [\exists d' \text{ положительно}: c = b + d'] \end{array}\right\} \Rightarrow [c = a + (d + d')],$$

но $d + d'$ положителен, значит,

$$[a < b \text{ и } b < c] \Rightarrow [a < c].$$

Следовательно, с помощью таким образом введенного отношения *множество Z целиком упорядочено.*

Следствия.

$$\text{Так как } a-0=a, \quad 0<a \Leftrightarrow a \text{ положительно.}$$

$$\text{Так как } 0-a=a', \; a<0 \Leftrightarrow a \text{ отрицательно.}$$

Следовательно (по транзитивности), *каждое отрицательное число меньше каждого положительного числа.*

3. Определение абсолютной величины.

Абсолютная величина $|a|$ числа a определяется так:

$$|a|=0 \Leftrightarrow a=0$$

$$|a|=a \Leftrightarrow a \text{ положительно}$$

$$|a|=a' \Leftrightarrow a \text{ отрицательно}$$

Следовательно, $|a|$ неотрицательно.

Теорема 1.

$$|ab|=|a|\cdot|b|.$$

Теорема 2.

$$(|a|+|b|)' \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

Это следует из

$$|a|' \leqslant a \leqslant |a|$$

$$|b|' \leqslant b \leqslant |b|$$

d) Нам остается еще охарактеризовать Z как множество **целых** чисел положительных, отрицательных и нуля, для этого надо ввести аксиому **полной упорядоченности (bonne ordonnance)** в подмножестве P положительных чисел.

[*ПП*]' *Каждое непустое подмножество множества P имеет наименьший элемент.*

[$ПП_1$]' *Само множество P (рассматриваемое как подмножество P) имеет наименьший элемент.*

Теорема. *Наименьшим элементом множества P является нейтральный относительно умножения элемент* μ.

Действительно, пусть p — наименьший элемент; между положительными элементами p и μ существует отношение порядка $p \leqslant \mu$. Следовательно,

$$p-pp=p\mu-pp=p(\mu-p) \geqslant 0.$$

Но неравенство невозможно, потому что положительное число pp было бы меньше p, что противоречит определению p; значит, возможно только равенство и $p=\mu$. Целыми положительными числами являются также μ, $\mu+\mu$, $\mu+\mu+\mu$ и т. д.

Вывод. Множество Z, отвечающее этим условиям, таково, что его подмножество P изоморфно множеству натуральных чисел N по отношению к сложению, умножению, аксиомам порядка, то есть по отношению ко всем свойствам, которые характеризуют N. Значит, *все множества Z будут изоморфны тому, которое мы сейчас построим.*

В качестве P возьмем множество натуральных чисел. Каждому натуральному числу a сопоставим элемент, обозначенный новым символом a'. [Например, числу 4 сопоставим символ $(4)'$]; кроме того, введем символ 0 и подчиним эти символы аксиомам, сформулированным выше.

Нейтральный элемент умножения есть наименьшее натуральное число, значит, 1.

Абсолютные величины являются натуральными числами *. Общепринятое обозначение для числа a' есть $-a$, написанное с помощью знака вычитания. Это не может подать повод к недоразумениям, ибо, каков бы ни был элемент m, $m + a' = m - a$. Следовательно, соглашение сводится к тому, чтобы положить

$$m+(-a)=m-a.$$

Это соглашение сохраняется и тогда, когда a отрицательно: тогда $a' = -a$ — положительно.

Для множества, изоморфного тому, которое мы построили, положительные числа, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с натуральными числами, будут снабжены знаком $+$ при условии $m + (+a) = m + a$.

Следовательно, множество Z относительных целых чисел ** записывается:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots.$$

Важное замечание. Расширение путем симметризации, использованное выше, равно как и соглашение относительно знаков $+$ и $-$, останется в силе, когда мы будем выполнять симметризацию, отправляясь от множеств более богатых, чем множество натуральных чисел (дроби, иррациональные числа), но там придется отказаться от аксиомы полной упорядоченности и ее следствий.

§ 3. Дроби и рациональные числа

Мы знаем, что целых чисел, даже относительных, недостаточно для нужд измерения величин; практика вводит дробь $\frac{3}{4}$ и рассматривает $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{8}$ как эквивалентные с точки зрения измерения. Какие числа вводятся таким образом? Мы их сейчас определим через хорошо известные основные свойства, необходимые для их использования.

* Кроме абсолютной величины нуля, которая равна нулю.— *Прим. ред.*

** В нашей литературе употребляется термин «Множество целых чисел».— *Прим. перевод.*

Математическая постановка вопроса. Определение натуральных чисел позволяет решить уравнение $b + d = a$ (относительно d), только когда a превосходит b. В противном случае никакое число из этого множества не удовлетворит уравнению. Мы видим, что расширение, с помощью которого мы создали множество целых чисел, положительных, отрицательных и нулевых, устранило ограничение и обеспечивает существование разности d, каковы бы ни были a и b из этого множества. Для этого было достаточно ввести нуль и сопоставить каждому элементу a симметричный ему относительно сложения элемент, т. е. *противоположный* ему элемент.

Переходя к умножению, мы знаем, что уравнение $bq = a$ (относительно q), вообще говоря, не имеет решения, когда a и b даны во множестве целых чисел (натуральных или относительных). Число q существует только для некоторых пар (a, b). Мы это выразили утверждением, что множество целых чисел не имеет групповой структуры относительно умножения.

Чтобы сделать обратную умножению операцию всегда выполнимой, можно поступить, как и при сложении: ввести элемент, нейтральный относительно умножения, и каждому элементу сопоставить симметричный ему элемент, который назовется *обратным* ему элементом. Нейтральный элемент называется «единичным» и обозначается через e. Это 1 множества целых чисел. Элемент, обратный b, обозначим, например, через β. Значит, $b\beta = e$, и решение уравнения $bq = a$ есть $q = \beta a$.

Таким образом, вводятся *аликвотные дроби*: половина, треть, четверть и т. п., как это делали египтяне.

Однако мы стремимся построить множество, замкнутое относительно сложения, а сумма двух аликвотных дробей не есть аликвотная дробь. Расширение, которое мы предложили, стало быть, недостаточно богато. Мы введем более богатое множество: множество *дробей*. Но мы увидим, что оно слишком богато; и в конце концов мы придем к множеству наименее богатому из всех подходящих для наших целей: множеству *рациональных* чисел.

1. Дроби

Мы называем дробью *каждую пару a, b целых чисел любых знаков* (можно было бы также ограничиться сначала натуральными числами), причем *b отлично от нуля*. Дробь обозначают a/b, подчиняя этот предварительный символ следующим аксиомам:

a) **Отношение эквивалентности.** В расширении, к которому мы стремимся, из $bq = a$ должно следовать $mbq = ma$; поэтому если q обозначается через a/b, то она должна также обозначаться через ma/mb, и если q обозначается через a/b и a'/b', то она должна также обозначаться через ab'/bb' и $a'b/bb'$. Это оправдывает интуитивно следующее соглашение:

В рассматриваемом множестве существует отношение эквивалентности

$$[E]\ [a/b \equiv a'/b'] \iff [ab' = a'b].$$

Проверим, что это действительно отношение эквивалентности. Рефлексивность и симметрия очевидны. Докажем транзитивность:

$$\left.\begin{array}{l}[a/b \equiv a'/b'] \iff [ab' = a'b] \\ [a'/b' \equiv a''/b''] \iff [a'b'' = a''b']\end{array}\right\} \Rightarrow [aa'b'b'' = a'a''bb'].$$

Так как b, b', b'' отличны от нуля, то $ab'' = ba''$ (даже если $a' = 0$), потому что в этом случае $a = a'' = 0$.

Следствие.

$$a/b = ma/mb.$$

Приложение. Приведение к общему знаменателю (известное правило).

b) **Сложение.** [Мы хотим ввести правило, которое привело бы к $b\,(q + q') = a + a'$.]

1. *Определения сложения двух дробей:* с одним и тем же знаменателем: $a/b + a'/b \equiv (a + a')/b$, с любыми знаменателями: после приведения к общему знаменателю **и** замены дроби эквивалентной ей

$$a/b + a'/b' = (ab' + ba')/bb'.$$

Определение. Всякая дробь, эквивалентная дроби, полученной после приведения данных дробей к общему знаменателю, сложения числителей с сохранением общего знаменателя, называется *суммой данных дробей.*

Таким образом, *сумма определена с точностью до эквивалентности.*

2. *Введенная операция удовлетворяет свойствам* $[A]$ в силу свойств целых чисел, которые фигурируют в числителях после приведения к общему знаменателю. Она удовлетворяет **и** $[S_1]$, но здесь нейтральными элементами являются все эквивалентные между собой дроби, числитель которых нуль, а знаменатель — любое число, отличное от нуля. Дроби $0/p$ называются *нулевыми дробями.*

Эта операция удовлетворяет и $[S_2]$, причем дробями противоположными к a/b являются дроби $(-a)/b$, $a/(-b)$ и все им эквивалентные. Отсюда выводится правило вычитания

$$(a/b) - (a'/b') \equiv (a/b + [(-a')/b'] \equiv (ab' - ba')\,bb'.$$

c) **Умножение.** [Мы желаем ввести правило, которое вело бы **к** $(bb')\,qq' = aa'$.]

1. Определение. $(a/b)\,(a'/b') = (aa')/(bb')$.

Каждая дробь, эквивалентная дроби, имеющей своими членами произведения соответствующих членов данных дробей, называется *произведением данных дробей.*

2. Свойства $[A]$ и $[M]$ проверяются приведением к общему знаменателю. Для $[A_2]$ берется естественно форма $[A_2''']$: сокращение дозволено только на ненулевой элемент.

$[M_2]$ имеет форму $[M_2'']$: существует элемент, нейтральный относительно умножения, который здесь определен только с точностью до эквивалентности: это p/p, каков бы ни был p отличный от нуля.

3. Нейтральный относительно сложения элемент как сомножитель произведения

1) $(a/b)(0/q) \equiv 0/p$;

2) $[a \neq 0$ и $(a/b)(p/q) \equiv 0/n] \Rightarrow [p=0]$.

Формулировки. Произведение любой дроби на нулевую дробь есть нулевая дробь.

Если произведение двух дробей есть нулевая дробь, то хотя бы одна из дробей есть нулевая дробь.

d) **Теорема**, которая оправдывает введение дробей. *Во множестве дробей деление, операция, обратная умножению, возможно, если только делитель не есть нулевая дробь.*

Действительно, каждая ненулевая дробь имеет обратную дробь, определенную с точностью до эквивалентности: если $a \neq 0$, то $(a/b)(b/a) \equiv n/m$ (нейтральный относительно умножения элемент); значит,

$$[a' \neq 0 \text{ и } (a'/b')(u/v) \equiv a/b] \Rightarrow [u/v \equiv (a/b)(b'/a')].$$

II. Рациональные числа

Для обеспечения единственности во введенных выше операциях, достаточно рассмотреть не множество самих дробей, а *множество классов эквивалентности*. Дробь будет являться тогда лишь представителем класса, которому она принадлежит. Обратно, каждый класс характеризуется одной из принадлежащих ему дробей.

Каждый класс называется **рациональным числам.**

Класс нулевых дробей — это рациональное число нуль, представимое, например, дробью $0/1$.

Класс дробей, нейтральных относительно умножения, будет нейтральным относительно умножения рациональным числом μ, представляемым, например, дробью $1/1$.

Если α и β — рациональные числа, то $\alpha = \beta$ будет означать, что α и β являются одним и тем же классом эквивалентных дробей.

Установив это, мы найдем, что все свойства, сформулированные для дробей, сохранят силу и для рациональных чисел, но уже с единственностью результатов операций. Это выражено в следующем заключении.

Множество рациональных чисел образует коммутативную группу по отношению к сложению; умножение, дистрибутивное относительно сложения, придает этому множеству *строение кольца*. К тому же любой элемент, кроме нулевого ω, имеет *обратный эле-*

мент (симметричный относительно умножения). Это последнее обстоятельство преобразует *структуру кольца в структуру тела* (*corps*) *.

Важное замечание. Отметим общие определения структур.

Определение. Множество называется *группой*, если оно снабжено внутренней ассоциативной операцией, имеющей нейтральный элемент и такой, что каждый элемент имеет симметричный.

Множество называется *кольцом*, если оно снабжено двумя внутренними операциями, из которых первая придает ему структуру коммутативной группы, а вторая ассоциативна и дистрибутивна относительно первой.

Кольцо называется *телом*, если вторая операция придает множеству новую групповую структуру, если только удалить из множества элемент, нейтральный относительно первой операции. Первая операция кольца или тела обозначается аддитивно; ее нейтральный элемент есть нуль.

Вторая операция обозначается мультипликативно; она может не быть коммутативной**, но тогда дистрибутивность относительно сложения должна быть обеспечена как справа, так и слева.

Замечание. Мы не использовали все свойства целых чисел, в частности, аксиому порядка; следовательно, мы могли бы производить операции над парами элементов более общего множества, чем множество целых чисел. Мы тогда имели бы структуру тела на множестве, отличном от кольца рациональных чисел. Именно многозначность изученного расширения оправдывает употребление этих общих терминов. Тела, определенные так, как мы сделали выше путем введения отношения эквивалентности между элементами, называются *телами частных*. Мы встретимся с другим примером такого рода, когда перейдем от кольца многочленов к телу рациональных дробей, членами которых являются многочлены.

III. Множество рациональных чисел как расширение множества целых чисел

Множество Z целых чисел изоморфно, по отношению к сложению и умножению, некоторому подмножеству множества Q рациональных чисел.

В самом деле, сопоставим рациональное число, представленное дробью $a/1$, целому числу a. Это соответствие взаимно однозначное и сохраняет сумму и произведение элементов. Мы получаем, следовательно, модель множества Z, взяв целое число a как представляющее символ $a/1$.

---

* Тело с коммутативным умножением называется полем, так что здесь следовало бы говорить *о структуре поля.— Прим. ред.*

** Примером некоммутативного тела может служить алгебра кватернионов (см. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962, стр. 266—268).— *Прим. ред.*

Как раз эту модель и применяют на практике, так что мы будем писать 0 вместо ω, 1 вместо μ, a вместо класса дробей, эквивалентных дроби $a/1$, то есть содержащего дроби $2a/2$, $3a/3$, ...

Но тогда

$$(b/1)(a/b) \equiv a/1$$

запишется:

$$b[a/b] = a,$$

если обозначить через $[a/b]$ рациональное число, представителем которого является a/b. Следовательно, *рациональное число, представляемое дробью a/b, есть частное от деления a на b.* Его записывают $\frac{a}{b}$ и условливаются использовать этот символ $\frac{a}{b}$ как для представления частного от деления a на b (рационального числа, представителем которого является дробь a/b), так и для представления самой дроби. Здесь проявляется определенное злоупотребление в обозначениях, ибо смешиваются два множества с изоморфными структурами.

Для того чтобы изоморфизм между множеством целых чисел и множеством рациональных чисел $a/1$ распространить на отношения порядка, нужно определить это отношение во втором множестве следующим образом:

$$\frac{a}{1} < \frac{b}{1} \iff a < b.$$

Мы собираемся распространить отношение порядка на все множество рациональных чисел.

Отношение совершенного порядка во множестве Q рациональных чисел

а) *Знак рационального числа.* Если две дроби a/b и a'/b' эквивалентны, то равенство $ab' = ba'$, выражающее эту эквивалентность, доказывает, что a' и b' или одного и того же знака, или разного, в зависимости от того, имеют ли один и тот же знак a и b или нет. Кроме того, подмножество, образованное рациональными числами ϱ, представителями которых являются дроби a/b с членами одного и того же знака, замкнуто относительно сложения и умножения. Числами, противоположными числам ϱ, являются дроби $-a/b \equiv a/-b$ с членами противоположных знаков. Это оправдывает следующее определение:

Рациональное число называется положительным, если дроби, ему принадлежащие, имеют члены одного и того же знака. И сами дроби в этом случае называются положительными. Дроби, как и рациональные числа, которые они представляют, называются *отрицательными*, если члены этих дробей имеют противоположные знаки.

b) *Определение отношения порядка, обозначенного* $<$.

$$[a/b < c/d] \Leftrightarrow [(c/d) - (a/b) \text{ положительно}]$$

и для рациональных чисел

$$[\varrho < \sigma] \Leftrightarrow [\sigma - \varrho \text{ положительно}].$$

Путем приведения дробей к общему положительному знаменателю, немедленно проверяется, что это есть отношение порядка, поскольку оно не рефлексивно, не симметрично и транзитивно.

Действительно, тогда достаточно сравнивать числители. Кроме того, проверяется также, что

$$0 < \varrho \Leftrightarrow \varrho \text{ положительно},$$

$$\varrho < 0 \Leftrightarrow \varrho \text{ отрицательно}.$$

Свойства множества Q

Теорема 1. *Множество рациональных положительных чисел архимедово, то есть*

$$\left.\begin{array}{l} \forall\varrho,\ \forall\sigma,\ \varrho \in Q,\ \sigma \in Q \\ 0 < \varrho < \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow [\exists n \in N : \varrho n > \sigma].$$

Существование этого целого положительного n вытекает из аналогичного свойства множества натуральных чисел, как это следует после приведения к общему положительному знаменателю.

Отсюда заключаем, что, как и для натуральных чисел, *последовательность кратных* ϱ, 2ϱ, 3ϱ, ... *положительного рационального числа не мажорируется.*

Теорема 2. *Между двумя любыми рациональными числами существуют рациональные числа.* (Эта теорема противоречит полной упорядоченности натуральных чисел.)

1) *Между* 0 *и каким-либо положительным рациональным числом* r *существуют рациональные числа.* Действительно, пусть a/b есть дробь, принадлежащая r. По предположению, a и b — одного и того же знака; можно их считать положительными. Пишем:

$$a/b \equiv (na)/(nb).$$

Если r' — класс дробей, эквивалентных дроби $a'/(nb)$, то неравенство $0 < r' < r$ обеспечивается неравенством $0 < a' < na$. Но такие значения для a' существуют, когда n выбрано большим, чем 1.

2) Общая теорема выводится отсюда, потому что неравенство $r_1 < r' < r_2$ равносильно неравенству

$$0 < r' - r_1 < r_2 - r_1.$$

Следовательно, нужно принять $r' = r_1 + s$, где s заключен между 0 и $r_2 - r_1$.

Другая формулировка. *Если дано некоторое рациональное число* r, *то для любого произвольно выбранного положительного числа существуют рациональные числа, заключенные между* $r - \varepsilon$ и $r + \varepsilon$,

то есть

$$\forall r,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varrho : r - \varepsilon < \varrho < r + \varepsilon.$$

Рассматриваемое свойство выражают в виде утверждения, что множество Q рациональных чисел *всюду плотно*. Отсюда следует, что рациональных чисел хватает для характеристики результата любого измерения, какова бы ни была желаемая, выбранная заранее точность.

Замечание. Множество Q рациональных чисел более богато, чем множество Z целых чисел. Но мы не можем сказать, что в Q больше элементов, чем в Z; в обоих случаях мы имеем дело с бесконечностью. Если хотят уточнить сравнение двух бесконечностей, то это приводит к понятию, заменяющему понятие кардинального числа набора (конечного множества). Это понятие *мощности множества*. Мы о нем скажем несколько слов в главе III, книги II.

§ 4. Понятие о вещественных числах

Мы только что видели, что множества рациональных чисел достаточно для практики и для экспериментальных наук. Но изучение теоретической геометрии привело школу пифагорейцев к следующему утверждению: если сторона квадрата принята за единицу, то его диагональ измеряется таким числом x, что $x^2 = 2$. Однако никакое рациональное число не удовлетворяет этому уравнению. Действительно, можно арифметически обосновать следующее рассуждение: если бы существовала такая дробь, которая удовлетворяет уравнению $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, то эту дробь можно считать несократимой. Но рассматриваемое равенство может быть записано так: $p^2 = 2q^2$, откуда следует, что p — четно, то есть $p = 2p'$, q — нечетно. Но равенство дальше становится следующим: $4p'^2 = 2q^2$, то есть $2p'^2 = q^2$, что требует, чтобы q было четным. Мы пришли к противоречию.

Согласно свидетельству Платона (V в. до н. э.), этот самый вывод невозможности был известен для $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, . . ., $x^2 = 17$, за исключением, разумеется, $x^2 = 4$, $x^2 = 9$ и $x^2 = 16$.

Математическая постановка вопроса.

Подобно тому как мы проводили расширение множества N натуральных чисел до множества Z для того, чтобы уравнение $b + x = a$ имело всегда решение, а затем расширение множества Z до множества Q рациональных чисел, чтобы уравнение $bq = a$ имело всегда решение (конечно, при условии $b \neq 0$), точно так же мы должны осуществить расширение множества Q для того, чтобы уравнение $x^2 = a$ имело всегда решение, если только a положительно; при этом следует отметить, что каждое из предшествующих множеств оказывалось изоморфным некоторому подмножеству вновь образуемого множества. Однако много других уравнений также не имеют решения во множестве рациональных чисел; поэтому расширение, которое мы предлагаем, может быть более или менее широким. Мы ограничимся вначале квадратными радикалами.

I. Введение квадратных корней

Рассмотрим, что нам дает множество Q рациональных чисел для изучения уравнения $x^2 = a$. Ограничимся случаем a — *целое положительное число.*

Если уравнение неразрешимо во множестве Q рациональных чисел, то это множество разбивается на два класса: класс Q' чисел q' слишком маленьких, так что $q'^2 < a$, и класс Q'' чисел q'' слишком больших, так что $q''^2 > a$.

a) *Множество q' не имеет наибольшего элемента.* Это значит, что, каков бы ни был $q' \in Q'$, существуют другие элементы из Q', большие, чем выбранный элемент. В самом деле, пусть $q' = \frac{m}{p}$. По предположению $\left(\frac{m}{p}\right)^2 < a$. Значит, $ap^2 - m^2 = d$ есть положительное число, причем $d \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь рациональное число $\frac{km+1}{kp}$, очевидно, большее, чем q'. Мы сейчас убедимся, что если взять k достаточно большим, то это число останется в классе Q', то есть, что будем иметь

$$ak^2p^2 > (km+1)^2, \text{ то есть } k^2d > 2km+1.$$

Достаточно взять, например, $k = 2dm$, потому что желаемое неравенство запишется тогда

$$4dm^2(d^2-1) > 1,$$

что обеспечивается при $d > 1$.

Если $d = 1$, нужно взять $k > 2m$.

b) Аналогично *множество Q''*, все элементы которого больше произвольного числа q', *не имеет наименьшего элемента.* Если $q'' = \frac{m}{p}$, мы будем искать на этот раз $\frac{km-1}{kp}$ в классе Q''. Нужно, отправляясь от

$$m^2 - ap^2 = d \geqslant 1,$$

обеспечить затем неравенство $(km-1)^2 > ak^2p^2$, откуда $k^2d > 2km - 1$.

И снова можно взять $k = 2dm$.

c) *Можно найти число $q' \in Q'$ и число $q'' \in Q''$ таким образом, чтобы разность $q'' - q'$ была меньше любого произвольно выбранного положительного рационального числа ε.*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \varepsilon \in Q,\ \exists q' \in Q' \text{ и } \exists q'' \in Q'' : q'' - q' < \varepsilon.$$

Действительно, можно выбрать натуральное число p, такое, что

$$0 < \frac{1}{p} < \varepsilon$$

(для этого достаточно, если $\varepsilon = \alpha/\beta$, взять $p > \beta/\alpha$). Достаточно будет тогда взять $q' = m/p$, $q'' = (m+1)/p$, выбрав натуральное число m, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{m}{p}\right)^2 < a < \left(\frac{m+1}{p}\right)^2.$$

Но это число m, наверное, существует, потому что последовательность квадратов $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ не мажорируется; она превосходит любое натуральное число k (потому что содержит k^2), значит, числа последовательности превзойдут и ap^2.

Свойство c выражают утверждением: можно найти пары q'', q' такие, что *$q'' - q'$ стремится к нулю* (см. гл. IV).

Мы теперь в состоянии усмотреть сущность аксиомы, порождающей новое число, которое надлежит ввести между q' и q''.

II. Аксиома полноты

[Г] *Каждое мажорированное подмножество имеет наименьшую мажоранту* *.

a) Множество, удовлетворяющее свойствам множества Q рациональных чисел и, кроме того, аксиоме [Г], называется *множеством вещественных чисел* и обозначается через R.

В действительности эта аксиома содержит две аксиомы, которые мы можем сформулировать раздельно:

[Γ_1] *Каждое мажорированное подмножество множества Q имеет наименьшую мажоранту, которая принадлежит множеству R, а иногда (в виде исключения) множеству Q.*

[Γ_2] *Каждое мажорированное подмножество R имеет наименьшую мажоранту, принадлежащую R* (без того чтобы выделять в этом случае подмножество Q множества R). Эту мажоранту называют *точной верхней границей* подмножества.

Мы допускаем совместность аксиом, определяющих действительные числа. Множество этих чисел снабжено, следовательно, действиями сложения и умножения со всеми свойствами, сформулированными для Q, и это множество упорядочено; каждое вещественное число положительно, отрицательно или является нулем.

b) В этих условиях докажем существование действительного числа r, удовлетворяющего уравнению $x^2 = a$ (a — натуральное число, отличное от квадрата рационального числа).

Вернемся к разбиению множества Q на два класса Q' и Q''. Так как класс Q' мажорирован, то он имеет наименьшую мажоранту в R, пусть это будет r (мы знаем, что r не принадлежит Q). Но каждое число $q'' \in Q''$ есть мажоранта Q', стало быть, оно больше, чем s. Другими словами, r является минорантой Q''. Значит,

$$\forall q' \in Q' \text{ и } \forall q'' \in Q'',\ q' < r < q''.$$

* В нашей литературе обычно это утверждение имеет такой вид: *Всякое ограниченное сверху множество имеет наименьшую верхнюю грань.— Прим. перевод.*

Существует ли другое число s, принадлежащее R, удовлетворяющее неравенству $q' < s < q''$?

Из этого следовало бы

$$\forall q' \in Q' \text{ и } \forall q'' \in Q'' : 0 \leqslant |s - r| < q'' - q',$$

значит, каков бы ни был положительный ε, определенные числа s и r удовлетворяли бы неравенству

$$0 \leqslant |s - r| < \varepsilon,$$

откуда следует $s = r$.

Таким образом, существует в R число r, притом единственное, такое, что

$$\forall q' \in Q' \text{ и } \forall q'' \in Q'' : q'^2 < r^2 < q''^2.$$

Но мы имеем также $q'^2 < a < q''^2$, значит,

$$0 \leqslant |a - r^2| < q''^2 - q'^2 < 2\varepsilon q'', \ \forall \varepsilon,$$

откуда следует $r^2 = a$. Итак, r есть решение уравнения $x^2 = a$; это единственное положительное решение. Пишут: $r = \sqrt{a}$. Единственное отрицательное решение — $\sqrt{a}$. $\sqrt{a}$ читается как «корень квадратный из a».

c) Мы доказали, допуская совместность аксиом, существование положительного квадратного корня из натурального числа; отсюда выводят существование положительного квадратного корня из любого рационального числа; можно было бы аналогичными методами доказать существование квадратного корня из любого положительного вещественного числа, а также существование корней кубических, четвертой степени, n-й степени. Аналогично можно ввести и много других чисел: пусть, например, надо изучить уравнение

$$f(x) = x^7 - x - 3 = 0$$

для $0 < x < 2$. Мы можем проверить, что из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Во множестве вещественных чисел, заключенных между 0 и 2, выделим множество X' чисел x', таких, что $f(x') < 0$, и множество X'' чисел x'', таких, что $f(x'') > 0$; это нас приведет (см. стр. 49) к утверждению, что существует действительное число r, такое, что

$$f(r) = 0.$$

Такое число, корень уравнения, полученного приравниванием 0 многочлена с целыми коэффициентами, называется *алгебраическим числом*. Множество алгебраических чисел содержит, стало быть, множество радикалов из рациональных чисел со всеми натуральными показателями. Но это не все. Теоретическое исследование длины окружности приводит к рассмотрению вещественного числа π (кн. 1, гл. V). А математик Линдеман, дополняя результаты, полученные Ламбертом (1761) и Эрмитом (1872), доказал в 1882 году, что π не есть алгебраическое число. Такие числа называются *трансцендентными числами*.

III. Свойства множества вещественных чисел

Мы видим, следовательно, что аксиома [Г] вводит смесь весьма разнообразных чисел, необходимых для того, чтобы множество было *полным*. Но, несмотря на это, в математике были введены еще и другие числа, например, для разрешимости уравнения $x^2 + 1 = 0$. Чтобы их образовать, необходимо отказаться от некоторых аксиом, например от аксиом строгого порядка (книга III, гл. VI. Комплексные числа).

Мы, отправляясь от множества рациональных чисел, построили множество R вещественных чисел, опираясь на порождающую аксиому [Г], которую теперь сформулируем уже со всей точностью:

[Г] Аксиома полноты. *Любое мажорированное подмножество A множества R имеет наименьшую мажоранту, называемую точной верхней гранью подмножества A и обозначаемую $Sup\ A$.* (Супремум A.)

Аналогично, рассматривая обратный порядок, определяют *точную нижнюю грань $Inf\ A$* (Инфимум A) любого минорированного подмножества A. Это наибольшая миноранта.

Теоремы.

a) *Множество вещественных чисел архимедово.*

Действительно, последовательность $r,\ 2r,\ 3r, \ldots, nr, \ldots,$ кратных r, не может быть мажорирована, потому что имела бы наименьшую мажоранту s и $s - r$ была бы превзойдена, значит, и s было бы превзойдено (рассуждают рекуррентно для натурального числа n).

b) *Теоремы о вложенных интервалах.*

Определение. *Интервалом* $(a,\ b)$, где a и b принадлежат R, называют множество вещественных чисел, заключенных между a и b. Более точно различают, если это необходимо:

*замкнутый интервал** $[a,\ b]$ — множество чисел x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$;

открытый интервал $]a,\ b[$, множество чисел x, таких, что $a < x < b$;

интервал, замкнутый слева, открытый справа $[a,\ b[$, множество x, таких, что $a \leqslant x < b$, и аналогично интервал, открытый слева и замкнутый справа.

Символами

$$[a,\ +\infty[\text{ и }]a,\ +\infty[$$

обозначают множества чисел, для которых соответственно

$$a \leqslant x \text{ и } a < x.$$

* Или сегмент. — *Прим. ред.*

Аналогично символы

$$]-\infty,\ a]\ \text{и}\ ]-\infty,\ a[$$

обозначают соответственно множества чисел x, для которых

$$x \leqslant a \ \text{и} \ x < a.$$

Последовательность вложенных интервалов. Это по определению такая последовательность интервалов $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, ..., $(a_n,\ b_n)$, . . ., что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1,$$

причем некоторые из этих неравенств могут переходить в равенства, но неравенства должны встречаться и после сколь угодно большого n.

Теорема. *Если дана последовательность замкнутых вложенных интервалов, длина которых стремится к нулю, то существует, и притом единственное, вещественное число, лежащее внутри всех этих интервалов.*

Дано:

$$\begin{cases} [a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N : n > N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon \end{cases}$$

Последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ является неубывающей и мажорируется каждым числом b, следовательно, она имеет точную верхнюю грань, которая принадлежит пересечению всех интервалов. Но пересечение может содержать только одно число (потому что разность двух таких чисел могла бы быть мажорируема ε).

Следовательно, пересечение интервалов сводится к единственному числу ξ. Мы будем говорить, что эта последовательность интервалов является «западней», которая определяет ξ.

Пример приложения. Существование квадратных корней, кубических корней и т. п.

IV. Множество Q рациональных чисел как подмножество множества R вещественных чисел

Пусть r — действительное число; каким бы ни было положительное число ε, в интервале $(r - \varepsilon,\ r + \varepsilon)$ существуют рациональные числа. Как бы ни было мало положительное число ε, а следовательно, как бы мал ни был интервал с серединой r, этот интервал содержит рациональные числа

$$\forall r \in R,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in Q : r - \varepsilon < q < r + \varepsilon.$$

Теорема доказывается с помощью множеств Q' и Q'' рациональных чисел, которые являются приближенными значениями по недостатку и по избытку числа r, как мы уже это делали, чтобы определить $\sqrt{2}$.

Таким образом, каждый интервал (каким бы малым мы его ни выбрали) содержит рациональное число и даже бесконечное множество рациональных чисел. Этот факт выражают утверждением, что *множество Q рациональных чисел повсюду плотно по отношению к множеству R вещественных чисел.* Хотя исследование, выполненное выше, коротко и неполно, для наших нужд его достаточно.

Когда мы будем говорить «число» в алгебре, в анализе, в геометрии, речь будет идти всегда о вещественном числе, если только мы не уточним: натуральное число, целое число, рациональное или иррациональное число. Напротив, в *арифметике*, то есть в *теории чисел*, мы будем изучать последовательно некоторые свойства элементов каждого из множеств N, Z, Q, R в отдельных главах: это содержание второй книги.

Третья глава

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Рассматривая тело действительных чисел как множество операторов, мы построим главу алгебры, моделью которой является так называемая аффинная геометрия, то есть та геометрия, которая определяет фигуры с помощью понятий параллелизма и отношения параллельных отрезков, следовательно, изучает фигуры с помощью параллельных переносов и гомотетии, являясь в конечном счете геометрией параллелограмма и теоремы Фалеса *.

Аксиомы, принятые для осуществления этих структур, порождают абстрактную многозначную теорию. Из привычной для нас геометрической модели мы сохранили терминологию, в частности слова «векторы» и «параллелизм», как опору для наших наглядных представлений.

I. Векторы. Векторные операции

Рассмотрим множество R действительных чисел и множество V элементов $v, v', \ldots, w, \ldots$, которые мы будем называть *векторами*. Чтобы избежать недоразумений, мы будем писать стрелку над буквой, которая обозначает вектор, и будем записывать $\vec{v}, \vec{v}', \ldots, \vec{w}, \ldots$ по крайней мере в начале изложения.

(В геометрической модели эти абстрактные векторы будут иметь в качестве образов то, что называется *свободными векторами*. Однако в других моделях их образы будут другие: например, V

---

* Под теоремой Фалеса автор, по-видимому, подразумевает предложение о пропорциональности третьих сторон треугольников, если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими парами сторон, равны.— *Прим. ред.*

может быть множеством многочленов или множеством линейных функций. Существенно важным является пример, когда V будет множеством G физических величин, длин, площадей, масс, в котором мы определяем $G_1 + G_2$ и rG. (В этой главе мы ограничимся геометрическим изображением.)

a) Существует отношение эквивалентности, обозначаемое $\equiv$ (позже, когда не будет больше опасности недоразумения, мы его будем обозначать $=$); $\vec{v} \equiv \vec{w}$: читается «вектор v эквивалентен w» или же «векторно равен w»; позже мы будем говорить «равен w». (В геометрической модели эта эквивалентность называется *эквиполлентностью* *).

b) Векторное сложение. Во множестве V определена внутренняя операция, называемая «сложением», которая удовлетворяет аксиомам $[A]$:

$$[A]\left[\begin{array}{ll} [A_1] & [\vec{v} \equiv \vec{v}' \text{ и } \vec{w} \equiv \vec{w}'] \Rightarrow [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v}' + \vec{w}'] \\ [A_2] & \left\{\begin{array}{l} [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v} + \vec{w}'] \Rightarrow [\vec{w} \equiv \vec{w}'] \\ [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v}' + \vec{w}] \Rightarrow [\vec{v} \equiv \vec{v}'] \end{array}\right. \\ [A_3] & \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \equiv \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \\ [A_4] & \vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{w} + \vec{v} \end{array}\right.$$

каковы бы ни были элементы $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{w}$, ... из V.

(В геометрической модели при приведении векторов к одному и тому же началу A сумма изображается диагональю параллелограмма, построенного на AB и AC. $[A_1]$ означает, что эта диагональ остается эквиполлентной самой себе, если меняют положение точки A, что непосредственно следует из интуитивной теории параллелограмма. $[A_2]$ и $[A_3]$ становятся тогда очевидными, равно как и $[A_4]$. Мы видим, таким образом, что эти аксиомы хорошо выражают те свойства, которые мы хотели ввести в нашу геометрию.)

Следствие. $[C]$: *полная коммутативность и ассоциативность*, как в первой главе. (Можно проследить за доказательствами на чертеже.)

Аксиомы симметризации.

Мы примем еще (как в главе II, § 2, для множества Z):

$[S_1]$ *Существует нейтральный элемент для сложения*, обозначаемый $\vec{0}$:

$$\forall \vec{v},\ \vec{v} + \vec{0} \equiv \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

(В наглядной геометрии это AB, если точки A и B совпадают.)

* В нашей литературе термин «эквиполлентность» употребляется редко. Обычно говорят просто о равенстве векторов или о равенстве свободных векторов.— *Прим. ред.*

$[S_2]$ *Каждый элемент $\vec{v}$, отличный от $\vec{0}$, имеет соответственный, обозначаемый через $-\vec{v}$, такой, что*

$$\vec{v}+(-\vec{v})\equiv\vec{0}.$$

Два симметричных относительно сложения вектора называются *противоположными.* Это отношение симметрично:

$$-(-\vec{v})\equiv\vec{v},\ \forall\vec{v}\in V.$$

Следствие. *Векторная разность.* Векторное уравнение

$$\vec{v}+\vec{x}\equiv\vec{w}$$

допускает решение

$$\vec{x}\equiv\vec{w}+(-\vec{v}),$$

что записывается

$$\vec{x}=\vec{w}-\vec{v}.$$

Решение единственно с точностью до эквивалентности. (В наглядной геометрии, если AB есть образ $\vec{v}$, то BA есть образ $-\vec{v}$.)

Таким образом, множество V наделено структурой абелевой группы по отношению к этой операции.

c) Умножение вектора на вещественное число. *Это внешняя операция, которая ставит в соответствие каждой паре, состоящей из вещественного числа r и вектора $\vec{v}$, вектор $\vec{w}$.*

Вещественное число пишут впереди: $\vec{w}\equiv r\vec{v}$.

Принимают, что эта операция удовлетворяет следующим аксиомам:

$$[m]\left[\begin{array}{lll}
[m_1] & [r=r' \text{ и } \vec{v}\equiv\vec{v}\,']\Rightarrow[r\vec{v}\equiv r'\vec{v}\,'] & \\
[m_2] & \left\{\begin{array}{l}[m_2'] \text{ Если } r\neq 0,\ [r\vec{v}\Rightarrow r\vec{v}\,']\Rightarrow[\vec{v}\equiv\vec{v}\,'] \\ [m_2''] \text{ Если } \vec{v}\neq\vec{0},\ [r\vec{v}\equiv r'\vec{v}]\Rightarrow[r=r']\end{array}\right\} & \text{Сокращение.} \\
[m_3] & (rr')\vec{v}\equiv r(r'\vec{v}) \quad \text{Ассоциативность.} & \\
[m_4] & \left\{\begin{array}{l}[m_4'] (r+r')\vec{v}\equiv r\vec{v}+r'\vec{v} \\ [m_4''] r(\vec{v}+\vec{v}\,')\equiv r\vec{v}+r\vec{v}\,'\end{array}\right\} & \text{Дистрибутивность.} \\
[m_5] & \left\{\begin{array}{l}[m_5'] \forall\vec{v}\in V: 1\vec{v}\equiv\vec{v} \\ [m_5''] \forall\vec{v}\in V: 0\vec{v}\equiv\vec{0} \\ [m_5'''] \forall r\in R: r\vec{0}\equiv\vec{0}\end{array}\right\} & \text{Нейтральные элементы и умножение.}
\end{array}\right.$$

Подтверждение в наглядной геометрии: если AB представляет $\vec{v}$, то AC, который получается из AB гомотетией с центром A и коэффициентом подобия r, представляет $\vec{w}=r\vec{v}$; свойства, соответствующие аксиомам, распознаются немедленно. $[m_4'']$ соответствует теореме Фалеса.

Следствия. Ассоциативность для любого числа вещественных чисел r, r', r'', ... выводится из $[m_3]$. Дистрибутивность для любого числа вещественных чисел и для любого числа векторов выводится из $[m_4]$.

Замечание. Мы не вводим в V отношение порядка. Позже (V глава) мы введем другое отношение эквивалентности, и между классами эквивалентности (длина векторов) введется отношение порядка. Однако этого вопроса в настоящей главе мы не будем касаться.

Примечание относительно терминологии. Мы только что определили векторное пространство над полем R вещественных чисел. *Вообще можно определить векторное пространство над любым телом* K; тогда это тело называется *телом скаляров*, соответствующим векторному пространству, или же *телом операторов*. Если множество операторов имеет лишь структуру *кольца*, то аксиомы $[m]$ определяют *модуль*.

II. Векторные пространства

Мы знаем, что на плоскости вектор определяется своими проекциями на две оси; в пространстве нужно задавать его проекции на три некомпланарные оси. Эти свойства мы представим в аксиоматической форме, чтобы определить абстрактные векторные пространства с любым числом измерений.

а) Аксиомы n-мерного векторного пространства.

Существует система из n векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, таких, что никакое множество n вещественных чисел r_1, r_2, ..., r_n, которые не все равны нулю, не может удовлетворить векторному равенству:

$$r_1\vec{v}_1+r_2\vec{v}_2+\ldots+r_n\vec{v}_n\equiv\vec{0}.$$

Эта система векторов образует *базис* векторного пространства.

$[\beta_1]$ Аксиома базиса.

$$\exists\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n): \forall\,(r_1, r_2, \ldots, r_n),\ r_1\vec{v}_1+r_2\vec{v}_2+\ldots+r_n\vec{v}_n\not\equiv\vec{0}^*.$$

---

* Если только не все r_1, ..., r_n равны нулю, что можно выразить и так: $r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2\neq 0$, и если не существует большего числа векторов с таким же свойством.— *Прим. ред.*

[β_2] Аксиома компонентов. Если дан базис, то каждому вектору $\vec{v}$ соответствует по крайней мере одно множество n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которое обеспечивает выполнение векторного равенства

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv \vec{v}.$$

Значит,

$$\forall\vec{v} \in V,\ \exists\,(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n) : x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv \vec{v}.$$

Теорема единственности.

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + \ldots + x'_n\vec{v}_n$$

равносильно

$$(x'_1 - x_1)\,\vec{v}_1 + (x'_2 - x_2)\,\vec{v}_2 + \ldots + (x'_n - x_n)\,\vec{v}_n \equiv \vec{0},$$

значит, согласно [β_1]

$$x'_1 = x_1,\ x'_2 = x_2,\ \ldots,\ x'_n = x_n.$$

Определения. Каждый вектор $x_i\vec{v}_i$ (i — натуральное $\leqslant n$) называется *компонентой* вектора $\vec{v}$, а именно компонентой $\vec{v}$ по $\vec{v}_i$, а x_i — *величиной* (*мерой*) *этой компоненты*.

Таким образом, если выбран базис в векторном пространстве, то каждый вектор имеет систему определенных компонент по отношению к этому базису.

Предупреждение. По причинам типографского характера векторы в печатных трудах чаще всего изображаются жирными буквами, а не буквами со стрелкой, так как эти последние служат только для напоминания о геометрическом или кинематическом происхождении этого абстрактного понятия. Мы последуем этому обычаю. Поэтому в последующем будем пользоваться обозначением $\mathbf{v}$ вместо $\vec{v}$ и $\boldsymbol{AB}$ вместо $\overrightarrow{AB}$. В рукописном тексте рекомендуется применять исходные обозначения, чтобы избежать недоразумений.

b) Проблема изменения базиса.

Как мы увидим, эта задача приводится к решению и исследованию систем уравнений первой степени. Самые простые случаи считаются изученными в алгебре, как приложение свойств действительных чисел (см. кн. II). Поэтому, чтобы использовать эти системы, которые мы предполагаем уже непосредственно изученными, мы ограничимся пространствами одного или двух измерений. Напротив, при большем числе измерений непосредственное изучение векторных пространств позволяет исследовать общие системы линейных уравнений. Это исследование составляет содержание *линейной алгебры*, которой мы не будем заниматься. Линейная алгебра вводит матрицы и определители.

Если дан базис векторного пространства, то задача состоит в определении условий, чтобы другая система из n векторов тоже образовывала базис, а также в определении компонент любого вектора по отношению к новому базису, если известны его компоненты относительно старого базиса.

1) Пространство одного измерения $n=1$. Базис состоит из единственного вектора $\boldsymbol{v}_1$. По отношению к этому базису любой вектор $\boldsymbol{v}$ определен через $\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1$. Любой вектор, за исключением $\boldsymbol{0}$, также образует базис. В самом деле, если

$$\boldsymbol{w}_1=a_1\boldsymbol{v}_1,$$

то выводим отсюда

$$\boldsymbol{v}=x_1'\boldsymbol{w}_1=x_1\boldsymbol{v}_1.$$

Значит, согласно теореме единственности

$$x_1=a_1x_1',$$

откуда

$$x_1'=\frac{x_1}{a_1},$$

что всегда имеет смысл, ибо $a_1\neq 0$.

2) Пространство двух измерений $n=2$. Базис состоит из пары векторов $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

а) *Условие того, что пара $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ образует базис.*

Положим (чтобы избежать двойных индексов)

$$\boldsymbol{w}_1\equiv a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{w}_2\equiv a'\boldsymbol{v}_1+b'\boldsymbol{v}_2,$$

что возможно, ибо $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ образует базис. Мы должны выразить, что не существует ненулевых решений векторного уравнения

$$r_1\boldsymbol{w}_1+r_2\boldsymbol{w}_2\equiv 0,$$

которое запишется согласно аксиомам так:

$$(ar_1+a'r_2)\boldsymbol{v}_1+(br_1+b'r_2)\boldsymbol{v}_2\equiv 0.$$

Согласно аксиоме $[\beta_1]$ это равносильно системе уравнений между числами

$$\begin{cases} ar_1+a'r_2=0; \\ br_1+b'r_2=0. \end{cases}$$

Известно (см. кн. II, Алгебра), что условие, которое выражает единственность решения $r_1=r_2=0$, таково:

$$\delta=ab'-a'b\neq 0.$$

В этом и состоит условие того, что $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ составляют базис. Если, наоборот,

$$\delta=ab'-a'b=0,$$

то система дает бесчисленное множество ненулевых решений вида:

$$\begin{cases} r_1 = ka'; \\ r_2 = -ka, \end{cases}$$

следовательно, $a'\boldsymbol{w}_1 \equiv a\boldsymbol{w}_2$.

В этом случае $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$ принадлежат одному и тому же подмножеству одного измерения. В этом случае говорят, что они *коллинеарные* или *параллельные*. Таково в нашем двумерном пространстве условие, выражающее, что векторы не образуют базис.

β) Вычисление новых компонент вектора. Пусть новый базис $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ задан по отношению к старому равенствами

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 = a'\boldsymbol{v}_1 + b'\boldsymbol{v}_2 \end{cases} \quad ab' - a'b \neq 0.$$

Полагаем

$$\boldsymbol{v} \equiv x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 \equiv X\boldsymbol{w}_1 + Y\boldsymbol{w}_2.$$

Исключая $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$, получаем:

$$x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 \equiv (aX + a'Y)\,\boldsymbol{v}_1 + (bX + b'Y)\,\boldsymbol{v}_2.$$

Теорема единственности дает тогда:

$$\begin{cases} x = aX + a'Y; \\ y = bX + b'Y, \end{cases}$$

откуда в силу $ab' - a'b \neq 0$

$$\begin{cases} X = \dfrac{b'x - a'y}{ab' - a'b}; \\[2ex] Y = \dfrac{-bx + ay}{ab' - a'b}. \end{cases}$$

3) В трехмерном пространстве вычисления аналогичны, но более длинные, поэтому мы их не будем выполнять. Даем без доказательства результат: условие того, что три вектора $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ образуют базис, заключается в том, что некоторый многочлен Δ относительно девяти величин (компонент этих векторов) не равен нулю. Если же $\Delta = 0$, они не образуют базиса; тогда говорят, что эти векторы *компланарны*.

С помощью теории определителей можно обобщить эти результаты на произвольное число измерений пространства. Возможность найти формулы, соответствующие изменению базиса, показывает, что *свойство двух векторов быть эквивалентными не зависит от выбора базиса*, что и выражают, называя его *внутренним свойством*. Число векторов базиса определено для каждого векторного пространства: это *число его измерений* (*размерность*).

c) Ориентация векторного пространства.

1) Одномерное пространство. *Вектор $v = kv_1$ называется того же направления, что и v_1, если число k положительно.*

Это отношение транзитивно, потому что согласно формуле преобразования базиса, если v имеет то же направление, что v_1, и v_1 то же направление, что w_1, то правило умножения действительных чисел показывает, что v имеет то же направление, что w_1.

Задать базисный вектор — означает *ориентировать прямую*; любой вектор того же направления, как и базисный, называется *положительным.*

2) Пространство двух измерений.

Если базис (v_1, v_2) выбран, то, как мы видели, пара

$$\begin{cases} w_1 = av_1 + bv_2; \\ w_2 = a'v_1 + b'v_2 \end{cases}$$

образует базис при условии, что $\delta = ab' - ba' \neq 0$.

Если мы предположим числа a, b, a', b' изменяющимися непрерывно, то пара (w_1, w_2) не перестает образовывать базис, если только число $\delta = ab' - ba'$ сохраняет знак. Мы будем говорить, что этот знак характеризует *ориентацию* базиса.

Исходный базис

$$\begin{cases} v_1 = 1v_1 + 0v_2; \\ v_2 = 0v_1 + 1v_2 \end{cases}$$

соответствует значению $ab' - ba' = +1$.

Мы скажем, что все пары векторов (w_1, w_2), таких, что $ab' - ba'$ положительно, *имеют ту же ориентацию*, что (v_1, v_2).

Проверим *транзитивность этого отношения*; предположим, что пара (u_1, u_2) имеет ту же ориентацию, что (w_1, w_2), которая в свою очередь имеет ту же ориентацию, что (v_1, v_2). Значит,

$$\begin{cases} w_1 \equiv av_1 + bv_2; \\ w_2 \equiv a'v_1 + b'v_2; \\ ab' - ba' > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 \equiv Aw_1 + Bw_2; \\ u_2 \equiv A'w_1 + B'w_2; \\ AB' - BA' > 0. \end{cases}$$

Мы видим, что формулы преобразования базиса дают:

$$u_1 \equiv \alpha v_1 + \beta v_2 \equiv (aA + a'B)\, v_1 + (bA + b'B)\, v_2;$$
$$u_2 \equiv \alpha' v_1 + \beta' v_2 \equiv (aA' + a'B')\, v_1 + (bA' + b'B')\, v_2.$$

Но $\alpha\beta' - \beta\alpha' = (ab' - ba')(AB' - BA')$ также положительно.

Таким образом, *в каждом двумерном пространстве, определенном некоторым базисом, существуют две взаимно противоположные ориентации*. Каждый базис, с той же ориентацией, что и базис, выбранный для определения пространства, называется *положительным.*

Естественно, взаимная замена двух векторов базиса меняет его ориентацию. Так же меняет ориентацию и замена одного из векторов базиса на противоположный ему.

3) Трехмерное пространство. Вычисление показывает, что условие того, что три вектора, заданных по отношению к некоторому базису, также образуют базис, заключается в том, что некоторый многочлен Δ от девяти величин (компонент этих векторов) не равен нулю. Этот полином, который для трехмерного пространства играет ту же роль, что $\delta = ab' - ba'$ для двумерного, сохраняет тот же знак, когда векторы меняются, не переставая образовывать базис. Его знак характеризует ориентацию базиса. Вычисления, аналогичные выполненным выше, но более длинные, показывают, что отношение «иметь ту же ориентацию» транзитивно.

Мы примем без доказательства этот результат и делаем следующий вывод:

Задание базиса ориентирует векторное трехмерное пространство. Каждый базис, который имеет ту же ориентацию, что и заданный, называется положительным. Взаимная замена *двух* из трех векторов базиса меняет его ориентацию; то же имеет место, если заменить *один* из векторов базиса противоположным ему.

III. Точечное пространство как образ векторного пространства

а) Мы определим сейчас множество $\mathscr{E}$, элементы которого будут названы *точками* и которое поставлено в соответствие построенному векторному пространству V.

Предположим, что V n-мерно. Мы рассмотрим элемент, который назовем *начальной точкой* и который будем обычно обозначать буквой O, а также n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соответствующих векторам базиса. Записывают:

$$\boldsymbol{OA}_1 \equiv \boldsymbol{v}_1, \ \boldsymbol{OA}_2 \equiv \boldsymbol{v}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{OA}_n \equiv \boldsymbol{v}_n.$$

Каждая точка M, являющаяся элементом $\mathscr{E}$, соответствует вектору $\boldsymbol{v}$ из V, что записывают так: $\boldsymbol{OM} \equiv \boldsymbol{v}$.

Наконец, каждой паре M, P точек ставят в соответствие вектор из V согласно следующему условию:

Если $\boldsymbol{OM} \equiv \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{OP} \equiv \boldsymbol{v}'$, *то принимается* $\boldsymbol{MP} \equiv \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$. Это значит, $\boldsymbol{MP} \equiv \boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OM}$ (*формула Шаля*). Символ $\boldsymbol{MP}$ в точечном пространстве $\mathscr{E}$ также называют вектором, спутывая его с соответствующим образом в V. (Здесь имеется то же злоупотребление в терминологии, как, например, при отождествлении натурального числа с целым положительным.) Это *вектор положения точки P относительно точки M.*

В силу свойств векторного пространства V эквивалентность (или эквиполлентность) двух векторов из $\mathscr{E}$ является внутренним отношением, независящим от базиса, а также от начала O, как это показывает вычисление:

$$\boldsymbol{MP} \equiv \boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OM} \equiv (\boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'P}) - (\boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}) \equiv \boldsymbol{O'P} - \boldsymbol{O'M}.$$

b) Векторная сумма; параллелограмм. Множество четырех точек A, B, C, D таких, что

$$\boldsymbol{AB} \equiv \boldsymbol{DC}, \tag{1}$$

называется *параллелограммом* $ABCD$ или, в силу симметрии отношения эквивалентности, параллелограммом $DCBA$. Но

$$[\boldsymbol{AB} \equiv \boldsymbol{DC}] \Leftrightarrow [\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BD} \equiv \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{DC}] \Leftrightarrow [\boldsymbol{AD} \equiv \boldsymbol{BC}] \tag{2}$$

вследствие формулы Шаля *. Значит, параллелограмм может называться также $ADCB$ и $BCDA$. Замена равенства (1) последним равенством (2) или обратно выражает основное свойство параллелограмма. Мы его назовем *перестановкой средних точек в эквивалентности.*

Примечание относительно перестановки средних. Сопоставим различные формулы, которые будут встречаться в этой I книге.

Во множестве целых чисел имеем:

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a - c = b - d.$$

Во множестве дробей или отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Во множестве векторов:

$$\boldsymbol{AB} \equiv \boldsymbol{CD} \Leftrightarrow \boldsymbol{AC} \equiv \boldsymbol{BD}.$$

Во множестве углов (гл. V, § 3)

$$(a, b) = (c, d) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (a, c) = (b, d) \pmod{2\pi}$$

также и по модулю π.

c) Умножение на число. Прямые. Теорема Фалеса.

1) Расположение на одной прямой. Три точки A, B, M ** называются *расположенными на одной прямой*, если существует число k, такое, что $\boldsymbol{AM} \equiv k\boldsymbol{AB}$.

Если k пробегает множество R вещественных чисел, то множество точек M определяет *прямую*. Это значит, что если A и B даны, то имеется взаимно однозначное соответствие между множеством R вещественных чисел и точками прямой (*вещественной прямой*). A соответствует значению $k = 0$, а B значению $k = 1$.

Пусть M_0 и M_1 — две различные точки прямой $\mathfrak{D}$, определенной через (A, B).

---

* Формулу Шаля можно представить в виде: $\boldsymbol{OP} \equiv \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MP}$.— *Прим. ред.*

** Где A и B — различные точки.— *Прим. ред.*

Из

$$AM_0 \equiv k_0AB, \ AM_1 \equiv k_1AB$$

следует

$$\forall M \in \mathcal{D}, \ M_0M \equiv hM_0M_1,$$

где

$$h = \frac{k - k_0}{k_1 - k_0}.$$

Таким образом, *две любые различные точки прямой определяют ее.*

Всякий вектор $v = \lambda AB$ является, согласно введенной уже терминологии, параллельным или коллинеарным вектору AB и вектору M_0M_1 для любой пары точек этой прямой; его называют *направляющим вектором прямой* AB. Все прямые с одним и тем же направляющим вектором называются *параллельными*; они либо совпадают, либо не имеют ни одной общей точки.

В частности, n прямых, проходящих через начало координат и имеющих направляющими векторами соответственно n базисных векторов, называются *осями координат.*

2) Дистрибутивность умножения по отношению к векторному сложению дает

$$kAB \equiv kAC + kCB.$$

Эта формула будет называться *формулой Фалеса.*

3) Аналитическая геометрия. Если дано начало O и n базисных векторов, то аксиома $[\beta_2]$ сопоставляет каждой точке M пространства $\mathcal{E}$ множество n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью равенства

$$OM \equiv x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n.$$

Эти числа составляют *n координат точки.*

Существует взаимно однозначное соответствие между точкой пространства и таким упорядоченным набором n действительных чисел, так что изучение пространства $\mathcal{E}$ можно заменить изучением множества таких наборов чисел. Эта задача представляет собой *аналитическую геометрию.* Мы дадим первые теоремы аналитической геометрии для пространств двух и трех измерений.

Вывод. Исследование пространства $\mathcal{E}$ есть *геометрия.* Если не вводить других структур, кроме тех, которые мы определили, то единственными основными теоремами являются формула Шаля и формула Фалеса. Соответствующая геометрия называется *аффинной геометрией.* Ее мы разовьем в первой части книги IV (гл. I).

Замечание. В последующем мы будем обозначать эквивалентность векторов с помощью знака равенства ($=$). Мы надеемся, что предшествующие понятия настолько хорошо понятны, что всякого рода недоразумения не будут иметь место. В случае сомнения можно всегда вернуться к символу $\equiv$ и сохранить $=$ только для вещественных чисел.

Четвертая глава

ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОГО МНОЖЕСТВА В ДРУГОЕ. ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

●

Алгебраическая точка зрения

§ 1. Общее понятие об отображении

I. Определение

Пусть E и F — два различных или равных множества. *Отображением множества E во множество F* называют закон, который ставит в соответствие каждому элементу из E один и только один элемент из F. Если этот закон обозначить через L, через x — какой-либо элемент из E, то соответствующий ему элемент y называется его *образом*. Обозначают это соответствие так:

$$x \searrow \underline{\ L\ } \nearrow y \quad \text{(обозначение преобразования)}$$

или же

$$y = L(x) \quad \text{(функциональное обозначение).}$$

Множество образов $L(x)$ элементов x некоторого подмножества $X \subset E$ обозначается через $L(X)$.

Образ $L(E)$ включен в F. Если $L(E) = F$, то говорят, что L есть отображение множества E на множество F; это отображение сюръективно, это сюръекция *.

Очень важен случай, когда каждый элемент из $L(E)$ есть образ лишь одного элемента из E. Тогда отображение называется *инъективным* или *инъектным* ** E в F. В этом случае говорят, что $y = L(x)$ *следует* за x, который *предшествует* y. Наконец, если инъекция является в то же время отображением на множество, то есть сюръекцией, она определяет *взаимно однозначное соответствие* между E и F и ее называют *биективной* ***. Обратно, *взаимно однозначное соответствие* определяет биективное отображение L множества E на множество F и биективное отображение множества F на множество E, которое называется обратным отображению L и обозначается через L^{-1}. Это обозначение будет оправдано в дальнейшем:

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, bend right, "L"'] & y \in F. \arrow[l, bend right, "L^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

---

* Сюръекция — отображение на... — *Прим. перевод.*

** Термин «инъекция» (впрыскивание, вливание) обозначает «взаимно однозначное отображение в». — *Прим. ред.*

*** Биективное отображение — взаимно однозначное отображение на... — *Прим. ред.*

Каждая инъекция L множества E в множество F есть биекция множества E на множество $L(E)$. Эти технические термины, уточняющие слово «функция», являются очень полезными для сокращения формулировок некоторых общетеоретических рассуждений (см., например, в кн. II, гл. III, ч I).

Несколько примеров.

Пример 1. E и F являются каждое множеством вещественных чисел: $x \xrightarrow{L} x+3$. В этом случае $L(E) = F$.

Пример 2. E и F являются каждое множеством вещественных чисел: $x \xrightarrow{f} x^2$. На этот раз $f(E)$ есть множество положительных или нулевых чисел. Каждый y, отличный от нуля, есть образ двух элементов x.

Пример 3.

$$x = y^2 \xrightarrow{\varphi} y.$$

это будет отображением только в том случае, если уточнен знак y. Исходное множество E может быть только множеством положительных или нулевых чисел или же одним из его подмножеств.

Пример 4. Пусть E — множество пар вещественных чисел (x, y), а F — множество вещественных чисел u. Отображение определено через

$$(x, y) \xrightarrow{s} u = x + y.$$

Пишут также, как уже было сказано, $u = s(x, y)$, пользуясь обозначением *функции двух переменных*.

Таким образом,

$$s(x, y) = x + y.$$

Пример 5. E и F совпадают, являясь каждое множеством точек плоскости; отображение $x \xrightarrow{\mathscr{C}} y$ определено условием, что вектор $\boldsymbol{xy}$ эквивалентен данному вектору $\boldsymbol{v}$. Отображение называется параллельным *переносом* (трансляцией) на вектор $\boldsymbol{v}$. Это *точечное соответствие* между точками плоскости.

Пример 6. Пусть E — множество всех точек некоторой окружности, F — множество всех прямых плоскости. Каждой точке x множества E ставят в соответствие касательную к окружности в точке x. Множество $L(E)$ есть множество касательных к окружности, которое также называют «тангенциальной окружностью», являющейся образом «точечной окружности» E.

Произведение двух отображений.

Пусть даны множества E, E_1, E_2 и пусть отображение L_1 каждому $x \in E$ ставит в соответствие образ $x_1 \in E_1$, а отображение L_2 ставит в соответствие x_1 образ $x_2 \in E_2$. Отображение L, которое ставит в соответствие каждому $x \in E$ образ $x_2 \in E_2$, называется произведением отображений L_1 и L_2. Мы используем схему:

$$\begin{tikzcd} \forall x,\ x \in E \arrow[r, "L_1"] \arrow[rr, bend right, "L"'] & x_1 \in E_1 \arrow[r, "L_2"] & x_2 \in E_2. \end{tikzcd}$$

Так как $x_1 = L_1(x)$ и $x_2 = L_2(x_1)$, то пишут: $x_2 = L(x) = L_2[L_1(x)]$ (обозначение *функции от функции*). Но отображение L, если его рассматривать как результат операции, называющейся *умножением* в множестве отображений, будет также обозначаться $L = L_1 \times L_2$, или даже $L = L_1L_2$. Иногда также, чтобы напомнить обозначение функции от функции, пишут $L = L_2 \bigcirc L_1$, что нужно читать справа налево (сначала L_1). Но этим последним обозначением мы не будем пользоваться.

С в о й с т в а п р о и з в е д е н и я д в у х о т о б р а ж е н и й. Отметим сначала, что мы употребляем здесь символ $=$, обозначая этим, что для любого элемента из E мы получим тот же образ, выполняя каждое из двух отображений. Однако нужно заметить, что это отношение эквивалентности имеет смысл лишь по отношению к исходному множеству E. Например, в планиметрии мы увидим, что если E есть множество точек некоторой прямой D, то симметрия S по отношению к прямой Δ и некоторое определенное вращение R дают те же образы, так что можно написать $S = R$; но это не будет справедливым, если расширить исходное множество до множества точек всей плоскости.

Проверим теперь аксиомы $[A]$ для операции умножения. Обоснование следующих утверждений вытекает из рассмотрения схем:

$[A_1]$ $L = L'$ и $M = M' \Rightarrow LM = L'M'$

$$\begin{tikzcd} \forall x,\ x \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, bend right, "L'"'] & x_1 \arrow[r, bend left, "M"] \arrow[r, bend right, "M'"'] & x_2 \end{tikzcd}$$

$[A_3]$ Ассоциативность

$$\begin{tikzcd} \forall x,\ x \arrow[r, "L_1"] & x_1 \arrow[r, "L_2"] \arrow[rr, bend right, "L_2L_3"'] & x_2 \arrow[r, "L_3"] & x_3 \end{tikzcd}$$

$[A_3]$ Сокращение слева $LM = LM' \Rightarrow M = M'$

$$\begin{tikzcd} \forall x,\ x \arrow[r, "L"] & x_1 \arrow[r, bend left, "M"] \arrow[r, bend right, "M'"'] & x_2 \end{tikzcd}$$

Но сокращение справа не всегда разрешено.

$[A_1'']$ $LM = L'M$ совместно с $L \neq L'$

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "M"] & \\ \forall x,\ x \arrow[ur, "L"] \arrow[dr, "L'"'] & & x_2 \\ & x_1' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Сокращение справа разрешается, если x_2 имеет лишь один предшествующий в отображении M, то есть если отображение $E_1 \xrightarrow{M} M(E_1)$ является взаимно однозначным *.

Пример. Рассмотрим во множестве действительных чисел, отличных от нуля, отображения:

$$x \xrightarrow{L} \frac{1}{x}; \quad u \xrightarrow{L'} -\frac{1}{u}; \quad v \xrightarrow{M} v^2.$$

Очевидно, $LM = L'M$, однако $L \neq L'$. Наконец, $[A_2]$ (коммутативность), вообще говоря, не имеет места, как это показывают примеры.

Итак, слово «умножение» означает здесь операцию, не обладающую всеми свойствами $[A]$.

II. Группы отображений множества на себя

(Мы напоминаем, что множество, снабженное ассоциативной операцией, называется группой относительно этой операции, если:

1) произведение двух элементов множества принадлежит этому множеству;

2) существует нейтральный элемент для операции;

3) каждый элемент имеет симметричный элемент, то есть такой, что произведение этих элементов равно нейтральному элементу.)

В отображении множества E на себя может случиться, что некоторый элемент совпадает со своим образом. Говорят тогда, что такой элемент *инвариантен* относительно отображения.

Отображение, относительно которого каждый элемент инвариантен, называется *тождественным отображением*. Это, очевидно, нейтральный элемент умножения отображений. Его изображают через $\mathcal{J}$.

По определению, произведение двух отображений есть отображение и оно ассоциативно. Наконец, мы говорили, что отображение имеет обратное, если оно устанавливает взаимно однозначное соответствие множества E на себя.

$$\left[\forall x,\ x \in E,\ x \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} y\right] \Leftrightarrow [LL^{-1} = \mathcal{J}].$$

Следовательно, *множество взаимно однозначных отображений E на себя образует группу*.

Подмножество таких отображений может также образовывать группу: например, во множестве движений пространства E множество параллельных переносов (трансляций) образует группу: множество гомотетий и параллельных переносов также образует группу. Это будет подгруппа группы подобий (см. кн. IV, гл. I, ч. II).

* Можно было бы сказать, «если M является инъекцией».— *Прим. ред.*

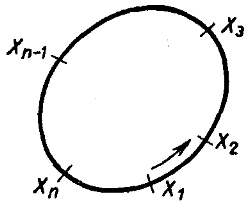
О т о б р а ж е н и е н а с е б я к о н е ч н о г о м н о ж е с т в а. Нумеруя элементы конечного множества (набора), мы из них составляем *конечную последовательность*:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Отображение меняет лишь индексы, и его называют *перестановкой*. Множество перестановок, очевидно, образует группу.

Среди перестановок различают *круговую перестановку*, которая меняет каждый индекс i на $i+1$, а последний n на первый.

Рассмотрим последовательные степени круговой перестановки. Ее n-я степень есть, очевидно, тождественное преобразование, и это множество степеней круговой перестановки образует группу. Этой группе соответствует некоторый порядок элементов, размещенных на линии, аналогичной окружности. Чтобы определить исходную круговую перестановку P, нужно выбрать направление обхода на линии, но так как $P^{n-1} = P^{-1}$, то смысл направления не входит в группу степеней. Эта группа характеризует *цикл* из n элементов. Например, если имеем четыре элемента, то существует три цикла. Если эти элементы — четыре точки плоскости, то множество называется *четырехточечник* или более употребительно, но не в собственном смысле, *четырехугольником*; каждый из трех циклов определяет *четырехсторонник* (чертеж показывает, что они являются один выпуклым, а два самопересекающимися, или же все три невыпуклыми).



Черт. 3

Д р у г о й п р и м е р п о д г р у п п ы г р у п п ы п е р е с т а н о в о к.

Пусть E — множество четырех действительных чисел a, b, c, d. Рассмотрим все перестановки, которые сохраняют значение выражения $ab + cd$. Таких имеется восемь, включая тождественную перестановку. Образом последовательности $\{a, b, c, d\}$ может быть:

$$\{a, b, c, d\}; \quad \{a, b, d, c\}; \quad \{b, a, c, d\}; \quad \{b, a, d, c\};$$

$$\{c, d, a, b\}; \quad \{d, c, a, b\}; \quad \{c, d, b, a\}; \quad \{d, c, b, a\}.$$

(В первой строке переставляются либо первые два элемента, либо последние два; потом отсюда выводят вторую строку, меняя местами первую пару со второй.) Эти восемь перестановок образуют, очевидно, группу.

Такого рода группы играют важную роль в теории уравнений (группы Галуа).

§ 2. Точечные преобразования

(общие понятия)

I. Терминология

Точечным преобразованием называется отображение точечного пространства на себя, либо в аффинной геометрии двух, трех (или n) измерений, либо в метрической геометрии, которую мы введем позже. Преобразование часто применяют к некоторому подмножеству F множества E, называемому *фигурой*. Образ фигуры F есть фигура F'. Если отображение обозначено через $\mathscr{C}$, то

$$F \xrightarrow{\mathscr{C}} F' \quad \text{или} \quad \text{еще} \quad F' = \mathscr{C}(F).$$

Ограничимся случаем, когда преобразование устанавливает между фигурами F и F' — взаимно однозначное соответствие, какова бы ни была фигура F; в этом случае преобразованию $\mathscr{C}$ соответствует обратное преобразование $\mathscr{C}^{-1}$. В этом случае полезно рассмотреть множество положительных и отрицательных степеней преобразования $\mathscr{C}$ и изучить последовательность последующих и последовательность предшествующих точек для какой-либо точки

$$\ldots A^{-2} \xrightarrow{\mathscr{C}} A^{-1} \xrightarrow{\mathscr{C}} A \xrightarrow{\mathscr{C}} A' \xrightarrow{\mathscr{C}} A'' \ldots .$$

Эта последовательность может быть бесконечной или конечной: в последнем случае она повторяется периодически и тождественное преобразование является степенью $\mathscr{C}$. (Пример: вращение на прямой, угол вокруг центра O.)

Если преобразование обратно само себе, то его квадрат есть тождественное преобразование: тогда последовательность точек сводится к паре точек. Преобразование называется тогда *взаимно обратным* или *симметричным*, или *инволютивным* (ибо симметрия по отношению к точке, либо прямой, либо плоскости, а также соответствие, называемое инволюцией, являются простейшими примерами такого преобразования).

Мы знаем, что точка, инвариантная относительно преобразования $\mathscr{C}$, является своим собственным образом (например, центр вращения); для такой точки последовательность предшествующих и последующих точек сводится к ней самой. Множество инвариантных точек образует *точечно инвариантную фигуру* (например, плоскость P относительно симметрии по отношению к этой плоскости).

Нужно отличать это понятие от понятия *фигуры глобально инвариантной или инвариантной в целом*: это такая фигура, которая отображается *на себя* так, что каждая точка из F имеет свой образ в F, но эти точки не обязательно должны быть инвариантными (такова, например, плоскость F, перпендикулярная к плоскости P в ортогональной симметрии по отношению к P). Это отображение F на себя называется *ограничением преобразования по отношению к F*.

Естественно, что это ограничение может быть определено на самой фигуре F. (В нашем примере, это симметрия по отношению к прямой.)

Мы скажем, что некоторый элемент: длина, угол, объем и т. д. — инвариантен относительно преобразования, если он сохраняет свое значение (например, сохранение углов при вращении). Аналогично и некоторое отношение может быть инвариантным (например, отношение параллелизма сохраняется при вращении).

Множество всех преобразований, которые сохраняют некоторое отношение эквивалентности, образует группу в силу транзитивности отношения эквивалентности.

Наконец, при изучении множества преобразований всегда нужно будет выяснить, коммутативно или нет умножение.

II. Классификация точечных преобразований

В аффинной геометрии операции над векторами позволяют определить точечные преобразования, называемые аффинными. Метрическая геометрия позволит ввести метрические преобразования (например, вращение). Аналогичное положение имеет место и для проективной и круговой геометрий, о которых мы скажем позднее несколько слов. Множество всех точечных преобразований некоторой геометрии образует группу, которая характеризует эту геометрию; эта группа может служить для определения этой геометрии.

Мы изучим и не взаимно однозначные точечные преобразования, а также отображения неточечных множеств, где, например, образом точки является прямая линия или плоскость.

III. Трансформирование одного точечного преобразования другим

Пусть $\mathscr{C}$ — точечное преобразование, при котором фигура F имеет образом фигуру F' того же пространства $\mathscr{E}$. Преобразуем все пространство $\mathscr{E}$ или по крайней мере объединение F и F', с помощью отображения $\mathscr{S}$, и пусть образом фигуры F явится фигура Φ, а образом фигуры F' явится фигура Φ'. Благодаря этому между Φ и Φ' устанавливается точечное соответствие, то есть возникает некоторое преобразование $\mathscr{X}$ согласно схеме:

$$\begin{tikzcd} \forall M \in F \arrow[r, "\mathscr{C}"] \arrow[d, "\mathscr{S}"'] & M' \in F' \arrow[d, "\mathscr{S}"] \\ N \in \Phi \arrow[r, "\mathscr{X}"] & N' \in \Phi' \end{tikzcd}$$

Это преобразование $\mathscr{X}$ называется *преобразованием $\mathscr{C}$, трансформированным посредством $\mathscr{S}$*. При этом схема ясно показывает, что $\mathscr{S}$

должно иметь обратное преобразование, чтобы элемент N соответствовал только одному элементу M; таким образом получаем

$$\mathscr{X} = \mathscr{S}^{-1} \times \mathscr{C} \times \mathscr{S},$$

то есть

$$\mathscr{X}(N) = \mathscr{S}\{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}(N)]\}.$$

Если $\mathscr{C}$ и $\mathscr{S}$ принадлежат одной и той же группе преобразований, то $\mathscr{X}$ принадлежит той же группе. Таким образом, трансформирование есть отображение множества точечных преобразований в себя. (Пример: на плоскости, трансформируя вращение на угол α симметрией по отношению к некоторой прямой, получают вращение на угол $-\alpha$.)

§ 3. Числовые функции одной переменной

(общие понятия)

I. Определение

Числовая функция одной переменной является отображением множества R вещественных чисел в себя. Множество $X \subseteq R$ элементов x, которые имеют образ, называются *областью* (*множеством*) *определения функции*. Множество Y, называемое образом X,— *это область* (*множество*) *значений функций*. Отображение обозначается часто буквой f, так что пишут:

$$\forall x,\ x \in X,\ x \searrow\!\underline{\ \ f\ \ }\!\nearrow y \in Y,$$

или короче

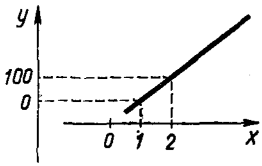
$$\forall x,\ x \in X,\ y = f(x).$$

x называется *переменной или аргументом*. Знак $=$ показывает здесь лишь только название y, данное образу переменной x. Если подмножество X не уточнено, то рассматривают наибольшее подмножество множества R, в котором функция определена (например, если функция есть корень квадратный, то область определения есть множество положительных и нулевых чисел).

График. Итак, каждому x из X соответствует одно y из Y. Это можно рассматривать как некоторое соотношение между x и y и выделить упорядоченные пары (x, y), удовлетворяющие этому соотношению. Эти пары представимы точками некоторой плоскости, имеющими координаты x и y. Вообще, чтобы иметь возможность построить метрическую аналитическую геометрию в этой плоскости, используют ортогональные оси с равными единицами, но это совсем не существенно: часто используют и различные единицы на двух осях, не требуя к тому же совпадения начал этих осей. Во всех этих случаях множество точек, которые представляют пары, удовлетворяющие данному соотношению, образует *график* функции.

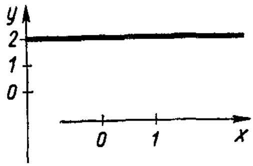
П р и м е р ы.

1) *Факториальная функция* $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x$, определенная на множестве натуральных чисел. Ее обозначают $y = x!$ График этой функции состоит из счетного множества точек.



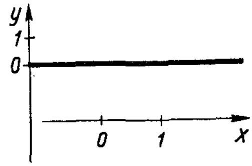
$y = 100(x-1)$

Черт. 4



$y = 2$

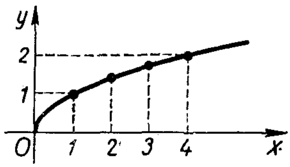
Черт. 5



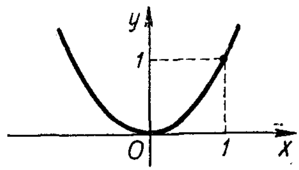
$y = 0$

Черт. 6

2) *Аффинные функции*, для которых графиком является прямая линия.



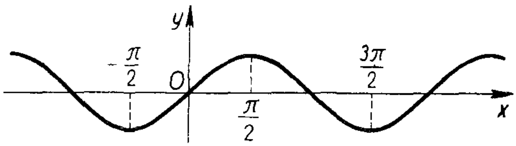
Черт. 7



Черт. 8

3) *Функция квадратный корень.* Функция определена на множестве вещественных неотрицательных чисел. Если мы примем в качестве исходного множества X множество натуральных чисел, то функция будет принимать свои значения в множестве, отличном от исходного.

4) Построим еще графики функций $y = x^2$ и $y = \sin\, x$.



Черт. 9

Обратная функция. Используем теперь график для рассмотрения обратных пар (y, x). Им соответствует отображение $y \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow x$, если соответствие $x \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow y$ взаимно однозначно, так как это позволяет определить обратное отображение. Определяемое в этом случае обратное отображение называется *обратной функцией* данной функции f и ее обозначают, как это делают для любого обратного отображения, f^{-1}, если только обратная функция не получает специального названия, соответствующего названию функции f.

Например, функция «удвоение» $y = 2x$ и функция «деление пополам» $v = \frac{u}{2}$ являются «взаимно обратными».

Функция «квадрат» $y = x^2$ не имеет обратной функции в R, потому что каждое положительное число y есть образ *двух* значений x', x'' аргумента x. Говорят, что эта пара составляет *прообраз* значения y. Говорят также, расширяя значение слова «функция», что обратная квадрату функция является *двузначной*; строго говоря, речь идет о двух функциях: $v = \sqrt{u}$ и $v = -\sqrt{u}$, определенных для $0 \leqslant u$.

Если рассмотреть получающиеся графики, совмещая оси x и u, а также y и v, то обращение функции соответствует симметрии по отношению к биссектрисе первого и третьего координатного углов.

Кривой с уравнением $P(x, y) = 0$, где P — многочлен, например, $x^2 - y^2 = 1$, нельзя, вообще говоря, сопоставить *одну-единственную* функцию $y = f(x)$ или же одну функцию $x = g(y)$. Но часто рассматривают такое уравнение, как определяющее *неявно алгебраическую функцию y от x* и *функцию x от y*. Это расширяет употребление слова «функция».

Для *тригонометрической функции*, например для $y = \sin x$, обращение приводит к *бесконечному множеству значений*, заключенных в символе $v = \arcsin u$. В этом случае, выбрав целое число k, можно определить *единственную* функцию по следующим дополнительным условиям:

$$-\pi/2 + 2k\pi \leqslant v \leqslant \pi/2 + 2k\pi.$$

В частности, главное значение будет определено неравенством

$$-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2.$$

Главное значение часто обозначается с помощью заглавной буквы A

$$v = \operatorname{Arc\,sin} u\,^*.$$

В последующем мы будем понимать слово «функция» в его строгом смысле: однозначная функция.

Замечания. Не нужно смешивать обратные числа $z = \frac{1}{f(x)}$ и обратную функцию $v = f^{-1}(u)$, которая обозначается иногда во избежание недоразумений через $\overset{-1}{f}(u)$.

Аналогично произведение чисел $g(x) \cdot f(x)$ — это не есть произведение отображений, которое мы будем обозначать для большей верности как *функцию от функции*

$$\varphi(x) = g[f(x)], \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

Используют также запись

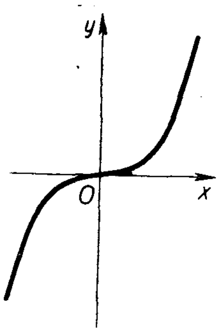
$$\varphi = g \bigcirc f.$$

---

* В нашей литературе чаще многозначное обращение $\sin x$ обозначается через $\operatorname{Arcsin} x$, а главное значение через $\arcsin x$.— *Прим. ред.*

II. Возрастание и убывание числовой функции в области ее определения

Пусть X — множество, на котором определена функция $f(x)$. Функция называется *возрастающей на* X, если отображение сохраняет порядок, иначе говоря, если для каждой пары (x_1, x_2) значений x, принадлежащих X, разность $f(x_2) - f(x_1)$ имеет тот же знак, что и $x_2 - x_1$. Наоборот, если, каковы бы ни были x_1 и x_2 из X, разность $f(x_2) - f(x_1)$ имеет знак числа $-(x_2 - x_1)$, то функция называется *убывающей на* X. Наконец, функция называется постоянной на X, если $f(x_2) - f(x_1) = 0$, каковы бы ни были x_2 и x_1 из X.



Черт .10

Вообще говоря, ни один из этих трех случаев не осуществляется на всей области определения; тогда ищут, нельзя ли разбить эту область на конечное или бесконечное число подмножеств, в которых имеет место один из этих случаев. Про каждое такое подмножество X_1 множества X говорят, что функция *монотонна* на нем; тогда определена и обратная функция, за исключением случая, когда функция постоянна.

На графике возрастание выражается тем, что все хорды M_1M_2 параллельны векторам $\boldsymbol{i} + k\boldsymbol{j}$, где $k > 0$ ($\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы на осях координат).

Действительно, имеем:

$$\boldsymbol{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{j} = (x_2 - x_1)(\boldsymbol{i} + k\boldsymbol{j}),$$

где $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — положительно, согласно определению возрастания. Это число k называется *угловым коэффициентом хорды* $\boldsymbol{M_1M_2}$.

Аналогично убывание функции на X характеризуется тем, что все хорды, соединяющие две точки графика, имеют отрицательные угловые коэффициенты.

П р и м е р ы. 1) k постоянен. Уравнение графика:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k, \quad \text{или} \quad y = kx + (y_1 - kx_1),$$

уравнение первой степени, которое представляет прямую. Функция такова:

$$x \xrightarrow{f} kx + (y_1 - kx_1),$$

что обозначается еще и так: $y = kx + (y_1 - kx_1)$. Ее называют *аффинной функцией*. Из-за старого смешения понятий «линия» и «прямая» ее называли также линейной функцией, термин, сохраненный в настоящее время для функций $y = kx$.

2) Функция $y = x^3$ возрастает на множестве действительных чисел, так как

$$y_2 - y_1 = (x_2)^3 - (x_1)^3 = (x_2 - x_1)\,[x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2],$$

но квадратная скобка может быть записана и в следующем виде: $k = \frac{3}{4}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$, значит, угловой коэффициент k — положителен.

Топологическая точка зрения

§ 1. Общие понятия: окрестности, пределы

Топология — это наука, дающая математическую форму интуитивным понятием, выражаемым словами «быть соседним», «мало отличаться», «стремиться к...». Эти понятия появляются в физике при приближенных измерениях величин и в геометрии на основе интуитивного понятия непрерывности.

I. Окрестности *

1) Окрестности во множестве R вещественных чисел. Пусть дано число a: мы будем называть *окрестностью числа a порядка* α и обозначать $V_\alpha(a)$ множество чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$a - \alpha < x < a + \alpha, \text{ то есть, } x \in \,]a - \alpha,\ a + \alpha[\,.$$

Существенно заметить, что мы предполагаем α *положительным.*

Интервал является *открытым*, что обеспечивает следующие свойства:

$[V_1]$ *Для любого числа b из окрестности числа a существует окрестность, включенная в окрестность числа a.*

Достаточно будет принять за порядок окрестности число, наименьшее из чисел $a + \alpha - b$ и $b - (a - \alpha)$.

То, что число a является серединой интервала, несущественно, окрестностью числа a называют также любой открытый интервал $]a - \beta,\ a + \gamma[$, где числа β и γ положительны: действительно, такой интервал содержит окрестность порядка α, где α — наименьшее из чисел β и γ. Окрестностью числа a (без уточнения порядка) называют также всякое подмножество, содержащее открытый интервал, которому принадлежит a. Мы ограничимся использованием

---

* Термин «окрестность» (*voisinage* — соседство) подчеркивает, что речь идет о множестве элементов, находящихся в определенном смысле в соседстве с данным элементом, то есть близких к нему.— *Прим. ред.*

в качестве окрестности лишь интервала, причем обычно a будет его серединой. Легко усмотреть два следующих важных свойства:

$[V_2]$ *Объединение и пересечение двух окрестностей числа a являются снова окрестностями числа a.*

$[V_3]$ *Если два числа a и b различны, то существуют раздельные (непересекающиеся) окрестности этих чисел* (то есть окрестности без общих точек). Это свойство отделимости. Достаточно взять, например, $V_\alpha(a)$ и $V_\alpha(b)$, где $\alpha = \frac{1}{3}(b - a)$.

2) Окрестности любого множества.

Пусть a — элемент множества E; нужно определить множество $\mathscr{V}$ подмножеств $V(a)$, содержащих a, которые удовлетворяли бы свойствам $[V_1]$, $[V_2]$, а если возможно, и $[V_3]$. Множество $\mathscr{V}$ будет упорядочено относительно включения.

a) Во множестве вещественных чисел мы дали определение в соответствии с понятием расстояния между двумя точками действительной прямой: $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$. Во множестве точек прямой *окрестности точки* A с абсциссой a являются *открытыми отрезками*, содержащими A, то есть образами открытых интервалов, содержащих a. Мы будем брать вообще отрезки с серединой в A и будем называть такие окрестности $V_\alpha(A)$ и $V_\alpha(a)$. Они определены, следовательно, условием $|x-a|<\alpha$. Таким образом, если заменить число a элементом $x \in V_\alpha(a)$, то это значит совершить относительно a *абсолютную ошибку* $|x - a|$, меньшую чем α.

Можно условиться принять другое определение окрестности во множестве вещественных чисел, связанное с понятием *относительной ошибки*: x будет лежать в окрестности a, если x/a лежит в окрестности 1. Тогда окрестность $W_\beta(a)$ будет множеством таких x, что

$$0<1-\beta<x/a<1+\beta, \text{ то есть } |x-a|<\beta|a|.$$

Если α дано, то включение $W_\beta(a) \subset V_\alpha(a)$ обеспечивается неравенством $\beta < \alpha/|a|$.

Если β дано, то включение $V_\alpha(a) \subset W_\beta(a)$ обеспечивается неравенством $\alpha < \beta|a|$, что возможно только в ограниченном интервале (a_1, a_2), не содержащем 0. Во множестве вещественных чисел на вещественной прямой эти два определения дают *различные топологии*.

b) Точки пространства двух измерений (или трех, или n измерений).

В аффинной геометрии точка A определена через $\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

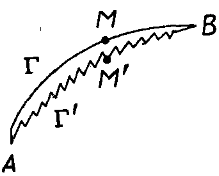
Мы определим естественным образом окрестность $V_{\alpha,\beta}(a)$ как множество точек M, $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, удовлетворяющих условиям:

$$x \in \,]a-\alpha,\ a+\alpha[\text{ и } y \in \,]b-\beta,\ b+\beta[,$$

то есть находящихся внутри параллелограмма, который зависит от базиса; но если преобразуют базис, то берут пересечение обоих соответствующих параллелограммов.

В метрической геометрии (см. следующую главу) принимают определение, соответствующее понятию расстояния между двумя точками. Окрестностью порядка α точки A здесь будет множество точек M, для которых $AM < \alpha$. Это *открытый круг*. В более общем случае n-мерного пространства такого рода подмножество называется *открытым шаром*.

c) Окрестности прямой во множестве $\mathfrak{D}$ прямых D плоскости. Прямая D зависит от двух параметров: ее определяют, например, уравнением $y = mx + p$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие между парами (m, p) множества R^2 и прямыми D. Или же вводят пары точек, в которых прямая пересекает координатные оси, или же основание перпендикуляра, опущенного на прямую D из выбранной точки. Две прямые будут называться *соседними*, если оба параметра, которые их определяют, имеют соседние значения. Эти определения удовлетворяют условиям $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$. Всякая окрестность одного вида содержит окрестности других типов, так что различные предложенные определения задают одну и ту же топологию.



Черт. 11

Следует отметить, что на двух соседних прямых невозможно установить соответствие через соседние точки, так как топология линейчатой плоскости * не связана с топологией точечной плоскости. Обе точки зрения могут быть связаны, если рассмотреть ограниченную область плоскости и отрезки прямых.

d) Окрестности отображения. Рассмотрим, например, множество вращений в планиметрии. Вращение r определено положением центра и значением угла, то есть всего тремя параметрами. Два вращения r' и r'' будут называться соседними, если параметры принимают соседние значения. Соответствующие этим вращениям образы M' и M'' одной и той же точки, вообще говоря, не являются соседними; они будут соседними лишь в случае, когда рассматривается ограниченная область, содержащая центры вращения.

e) Окрестности кривой. Во множестве кривых две дуги Γ и Γ', соединяющие A с B, могут называться соседними, если можно установить такое отображение Γ на Γ', что каждая точка $M \in \Gamma$ и его образ $M' \in \Gamma'$ будут находиться на расстоянии, меньшем чем α друг от друга. Такое соседство приемлемо для изучения площади, но, очевидно, для изучения длины нужно будет потребовать большего, а именно следует, кроме указанного, потребовать, чтобы

* То есть топология множества всех прямых, лежащих на плоскости.— *Прим. ред.*

касательные к обоим кривым в соответствующих точках имели соседние друг другу направления: исследование длин дуг требует близости не только точечной, но и тангенциальной.

Если кривые являются графиками числовых функций одной и той же переменной, то можно будет считать функции соседними, близкими, если их графики близки, с менее или более сильными требованиями: точечной близости или также и тангенциальной близости (последняя затрагивает близость производных функций).

II. Пределы

Пусть в двух множествах E и F элементов x и y определены окрестности $V_\alpha(x_0)$ и $W_\beta(y_0)$. Некоторое отображение f множества E в множество F ставит в соответствие элементу x его образ $y = f(x)$. Следует изучить, как соответствуют друг другу при этом отображении окрестности. Покажем на примере.

Пример касательной прямой к окружности в некоторой ее точке. (Мы используем хорошо известные свойства, вытекающие из определения.)

Итак, пусть E — множество точек M окружности ($OM = R$) и пусть $A \in E$. Мы рассматриваем окрестности порядка α, определенные через

$$M \in V_\alpha(A) \iff \widehat{AOM} < \alpha.$$

С другой стороны, пусть F — множество прямых D, проходящих через A. Мы определяем окрестность порядка ε прямой D_0 через

$$D \in W_\varepsilon(D_0) \iff \widehat{D_0D} < \varepsilon.$$

Наконец, каждой точке M мы ставим в соответствие прямую D, проходящую через M. Эта прямая AM определена, только если M не совпадает с A, так что отображение определено лишь в $E - \{A\}$ (множество E, из которого удалили точку A). Образ множества $V_\alpha(A) - \{A\}$ есть множество прямых D, для которых

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \widehat{AO,\ D} < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому если рассмотреть прямую T, проходящую через A и перпендикулярную к радиусу OA, то видно, что этот образ является окрестностью $W_\varepsilon(T)$ при $\varepsilon = \alpha/2$, из которой удалена прямая T.

Обратно, для произвольного $\varepsilon > 0$, $W_\varepsilon(T) - \{T\}$ является образом $V_\alpha(A) - \{A\}$ при $\alpha = 2\varepsilon$.

(Отсюда вытекает интуитивное рассуждение: если согласиться пренебречь углом ε, то можно заменить прямую AM прямой T, при условии, что M достаточно близка к A.)

Полученное обратное предложение запишется так:

$$\forall \varepsilon,\ \exists \alpha : [M \in V_\alpha(A) - \{A\}] \Rightarrow [D \in W_\varepsilon(T)].$$

Это может быть выражено одной из следующих фраз:
«D стремится к T, когда M стремится к A»,
«D имеет предел T, когда M стремится к A».
Пишут (с помощью прямых стрелок):

$$«D \longrightarrow T, \text{ когда } M \longrightarrow A», \text{ или еще } \underset{M \longrightarrow A}{D \longrightarrow T}.$$

Отметим, что эти высказывания имеют смысл, лишь взятые целиком, так что каждая часть высказывания в отдельности ничего не выражает.

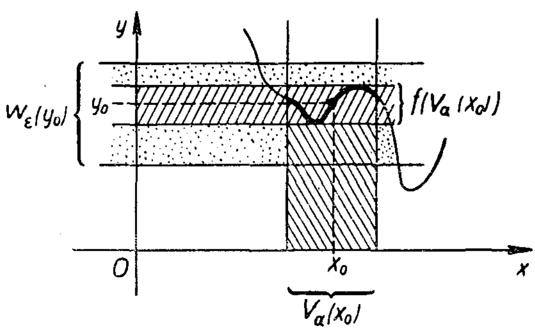
§ 2. Локальное исследование числовой функции

a) Мы предполагаем, что функция $y = f(x)$ определена в каждой точке интервала $]a, b[$; поскольку интервал открыт, он является окрестностью любой своей точки. Все окрестности $V_\alpha(x_0)$, которые мы будем рассматривать, считаем содержащимися в $]a, b[$; это значит, что мы возьмем α достаточно малым, чтобы обеспечить выполнение этого условия.

Итак, пусть $x_0 \in\ ]a, b[$; мы положим $y_0 = f(x_0)$. Образом окрестности $V(x_0)$ является подмножество вещественных чисел, содержащее y_0, но если не делать никаких допущений о функции f, то нет уверенности, что этот образ окрестности точки x_0 является окрестностью точки y_0. Нас интересует следующий случай.

Непрерывность в точке x_0.

Функция называется непрерывной в точке x_0, если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно обеспечить, чтобы $y \in W_\varepsilon(y_0)$, для любого x, взятого из окрестности $V_\alpha(x_0)$, где положительное число α может быть определено через ε.



Черт. 12

Иначе говоря, *функция, определенная на* $]a, b[$, *непрерывна в точке* x_0 *этого интервала, если, какого бы ни было положительное число* ε, *ему можно сопоставить положительное число* α, *такое, что неравенство* $|x - x_0| < \alpha$ *влечет неравенство* $|y - y_0| < \varepsilon$,

то есть

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |y - y_0| < \varepsilon.$$

Это означает, как показывает и график, что образ окрестности $V_\alpha(x_0)$ принадлежит окрестности $W_\varepsilon(y_0)$. При этом отнюдь не ищут обязательно наибольшее число α, которое удовлетворяет указанному условию.

Пример. Функция первой степени $y = mx + p$ непрерывна в каждой точке, ибо неравенство $|y - y_0| < \varepsilon$ обеспечивается при $|x - x_0| < \varepsilon/|m|$. Но можно взять, например, $\alpha = \frac{\varepsilon}{2|m|}$.

Ясно видно, что α зависит от ε. Если функция будет не первой степени, то α, очевидно, зависит также и от x_0.

Мы знаем, как выразить условие непрерывности в точке с помощью понятия предела: в этом простом случае нет необходимости исключать x_0. Формулировка будет следующей: *Функция, определенная на* $]a, b[$, *называется непрерывной в точке* x_0 *этого интервала, если* $f(x)$ *стремится к* $f(x_0)$, *когда* x *стремится к* x_0.

b) *Функция называется определенной в окрестности* x_0, *если она определена в точках, отличных от* x_0 *в любой окрестности* $V_\alpha(x_0)$, *каким бы малым ни было число* α.

Может случиться, что она не определена в точке x_0; тогда ставится вопрос, имеет ли она предел L, когда x стремится к x_0, то есть если X есть область определения $f(x)$, то существует ли L такое, что

$$\forall\varepsilon,\ \exists\alpha: [x \in X,\ |x - x_0| < \alpha] \Rightarrow [|f(x) - L| < \varepsilon].$$

Наиболее простым случаем, а он будет единственным, с которым мы встретимся в книге III, является случай, когда функция определена во всем интервале $]a, b[$, за исключением x_0. Тогда, если функция имеет предел L, когда x стремится к x_0, ее можно сделать *определенной и непрерывной в точке* x_0: для этого достаточно будет приписать значение L образу точки x_0. В этом случае говорят, что L есть *истинное значение функции в точке* x_0.

c) Производная в точке.

Предположим, что функция определена на открытом интервале $]a, b[$ и непрерывна в точке x_0. Выбрав ε, а значит, и окрестность $W_\varepsilon(y_0)$, мы ей можем поставить в соответствие окрестность $V_\alpha(x_0)$, такую, что

$$x \in V_\alpha(x_0) \Rightarrow y \in W_\varepsilon(y_0).$$

Точка M с координатами (x, y) графика функции близка точке M_0 с координатами (x_0, y_0). Но мы желаем еще уточнить, близко ли направление прямой M_0M какому-либо определенному направлению. Мы рассмотрим поэтому угловой коэффициент прямой M_0M:

$$g(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

то есть функцию, которая не определена для $x = x_0$, но которая определена в любой другой точке окрестности $V_\alpha(x_0)$.

Если $g(x)$ имеет предел k, когда x стремится к x_0, то есть если

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \alpha' : |x - x_0| < \alpha' \Rightarrow \left| \frac{y - y_0}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon'$$

то говорят, что *функция f имеет производную в точке x_0* и что эта производная равна числу k. Это означает, что прямые M_0M множества прямых плоскости, проходящих через M_0, находятся в окрестности произвольно малого порядка ε' прямой T, проходящей через M_0 и имеющей угловой коэффициент k, когда M находится в окрестности достаточно малого порядка α' точки M_0. По определению, эта прямая T называется *касательной* к графику в точке M_0. Таким образом, утверждать, что функция имеет производную в точке x_0 или что ее график имеет касательную в точке M_0, — это одно и то же *, причем значение производной является угловым коэффициентом этой касательной.

1) **Важные замечания.** Мы уже неоднократно предполагали, что функция имеет предел для некоторого значения x_0 аргумента. Мы должны доказать теперь теорему:

Единственность предела. *Если функция имеет предел L, когда x стремится к x_0, то этот предел единствен.*

Иначе говоря, функция не может стремиться к двум различным пределам L и L_1, когда x стремнтся x_0. Это вытекает из свойства отделимости $[V_3]$, которое справедливо для наших окрестностей, определенных во множестве вещественных чисел, в котором функция принимает свои значения: если $L \neq L_1$, то можно рассмотреть две раздельные (*непересекающиеся*) окрестности $W_\varepsilon(L)$ и $W_\varepsilon(L_1)$. Для достижения раздельности достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{3} | L - L_1 |$. Тогда, если L есть предел, то существует α такое, что образ окрестности $V_\alpha(x_0)$ заключается в окрестности $W_\varepsilon(L)$, значит, этот образ не имеет точек в окрестности $W_\varepsilon(L_1)$, и L_1 не может быть пределом.

2) **Теорема.** *Если две функции f и g, определенные в окрестности точки x_0, принимают одинаковые значения при всех x из $]a, b[$, кроме может быть $x = x_0$, то, если одна из них имеет предел L, когда x стремится к x_0, другая функция имеет этот же предел.*

Эта теорема является непосредственным следствием определения предела. В частности, если одна из них, например $g(x)$, непрерывна в точке x_0, то другая имеет в этой точке предел, равный $g(x_0)$.

---

* Касательную в точке M_0 графика определяют обычно более широко, допуская, что прямая T, в окрестности которой лежат прямые MM_0, может быть параллельной оси y. Этот случай получится, когда при $x \to x_0$ предел $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ не существует, но зато предел $\frac{x-x_0}{y-y_0}$ существует и равен нулю.— *Прим. ред.*

Пример. Сравнить при $x = 3$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ и } g(x) = x + 3.$$

Функция f становится определенной и непрерывной при $x = 3$, если мы ей припишем значение $g(3) = 6$.

3) Теоремы, касающиеся операций над пределами и над непрерывными функциями, имеющими производную, будут изучены в книге III. Все же нам понадобится уже в настоящей книге использовать в последующем некоторые свойства, вытекающие непосредственно из определений: предел суммы конечного числа функций, каждая из которых имеет предел, равен сумме этих пределов. Аналогично и для произведения.

d) Возрастание и убывание в точке. Пусть дана функция $f(x)$, определенная в $]a, b[$, и точка x_0 в этом интервале. Если существует окрестность $V_\alpha(x_0)$, в которой функция удовлетворяет условию

$$\forall x \in V_\alpha(x_0),\ g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

то функция называется *возрастающей в точке* x_0 *. (Таким образом сравнивают каждое значение из $]a, b[$ с одним выбранным значением x_0, в отличие от рассмотрения возрастания в интервале, когда сравнению подвергаются по два произвольных значения x_1 и x_2 из этого интервала.)

Если функция имеет в точке *положительную производную* k, то она возрастающая в этой точке, так как тогда можно определить α так, что неравенство $|g(x) - k| < \frac{1}{2}k$ будет выполнено, откуда $g(x) > 0$.

Обратно, пусть $g(x) > 0$ для каждого x из $]a, b[$. Ничто не доказывает, что $f(x)$ имеет производную в x_0; но если эта производная существует, то она не может быть отрицательной. Отсюда следующие предложения:

Теоремы. *Если функция, определенная в* $]a, b[$, *непрерывна в* $x_0 \in]a, b[$ *и имеет в этой точке производную* k, *то*

$$k > 0 \Rightarrow f(x) - \text{возрастающая в } x_0,$$

$$k < 0 \Rightarrow f(x) - \text{убывающая в } x_0.$$

Если $f(x)$ *возрастает, в* $x_0 \Rightarrow k \geqslant 0$.
Если $f(x)$ *убывает, в* $x_0 \Rightarrow k \leqslant 0$.

---

* Определение убывающей в точке x_0 функции аналогично.— *Прим. ред.*

§ 3. Переход от локального исследования к глобальному

В этом параграфе мы предполагаем, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой точке этого отрезка. Речь идет о переходе от одной точки x_1 к другой точке x_2 через цепочку окрестностей.

I. Основные теоремы

а) **Теорема о равномерной непрерывности**

Согласно определению непрерывности функции в точке, если выбрано положительное число ε, то каждой точке x_0 интервала $]a, b[$ соответствует число α_0, такое, что

$$x \in]x_0 - \alpha_0, \ x_0 + \alpha_0[\Rightarrow |y - y_0| < \varepsilon.$$

В каждой окрестности $V_{\alpha_0}(x_0)$ длины $2\alpha_0$ график функции аппроксимирован с точностью до ε отрезком прямой $y = y_0$. Но, чтобы можно было утверждать, что это дает покрытие интервала $]a, b[$ *конечным числом* таких окрестностей, необходимо знать ненулевой минорант этих длин $2\alpha_0$ для различных точек x_0. Это требование приводит к новому понятию:

Определение равномерной непрерывности.

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *равномерно непрерывной*, если, каков бы ни был $\varepsilon > 0$, ему можно поставить в соответствие число d, такое, что для любой пары точек x_1, x_2 этого отрезка неравенство

$|x_1 - x_2| < d$ обеспечивает выполнение неравенства $|y_1 - y_2| < \varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon, \ \forall x_1 \text{ и } x_2 \in [a, b], \ \exists d > 0 : |x_1 - x_2| < d \Rightarrow |y_1 - y_2| < \varepsilon.$$

Это условие кажется более сильным, чем непрерывность в каждой точке, однако оказывается, что в случае числовых функций на отрезке действительных чисел оба понятия совпадают. Это следует из теоремы:

Теорема о равномерной непрерывности. *Всякая функция, определенная на отрезке и непрерывная в каждой его точке, является равномерно непрерывной на этом отрезке.*

(Далее мы приводим доказательства различных теорем. Эти доказательства при первом чтении можно пропустить.)

Следствия. Если покрыть отрезок $[a, b]$ конечным числом последовательных интервалов (i_p) длины d, то можно, выбирая произвольно значение x_p аргумента x в каждом интервале (i_p), аппроксимировать с точностью до ε данную функцию объединением отрезков прямых, изображающих постоянные функции $y = y_p$ в каждом из интервалов (i_p). Введенная функция $g(x)$ — «кусочно постоянная» — называется *ступенчатой функцией*.

Таким образом, если $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то она аппроксимируется с точностью до ε бесконечным множеством ступенчатых функций. Обратно, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение отрезка $[a, b]$ на интервалы длины не менее чем d, а также ступенчатая функция $g(x)$, которая на каждом из этих интервалов постоянна и удовлетворяет условию

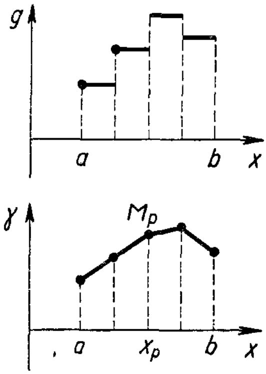
$$\forall x \in [a, b], \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon/2,$$

то непрерывная функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на $[a, b]$, потому что

$$|x_1 - x_2| < d \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Другими функциями, тоже аппроксимирующими с точностью до ε данную функцию, являются «кусочно линейные функции», которые будут уже непрерывными. Так называют функции, график которых представляет собой объединение отрезков, соединяющих последовательные точки

$$M_p(x_p, y_p) \text{ и } M_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1}).$$



Черт. 13

График $\gamma(x)$ (на втором рисунке) изображает такую функцию.

b) **Теорема о границах.**

Множество Y значений функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на отрезке, ограниченно сверху и снизу. Эти границы принадлежат указанному множеству, то есть они являются значениями функции при определенных значениях x на отрезке.

c) **Теорема о промежуточных значениях.**

Все значения функции, содержащиеся между границами множества Y, принадлежат множеству Y.

Последние две теоремы выражают, что образом отрезка множества x служит отрезок во множестве Y *.

Доказательства.

Мы будем определять действительные числа через «западни», определенные в главе II, § 4, п. III, то есть через последовательность вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

$$\forall \varepsilon, \ \exists N : n > N \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

Пусть ξ — число, определенное этой последовательностью. Заметим, что всякая окрестность $V_\alpha(\xi)$ числа ξ содержит отрезок этой последовательности:

$$\forall \alpha, \ \exists N : n > N \Rightarrow V_\alpha(\xi) \supset [a_n, b_n].$$

---

* Однако это отображение не обязательно инъективно. Оно будет инъективным лишь для монотонной функции (см. п. II в).— *Прим. ред.*

а) Теорема о равномерной непрерывности.

1) Если функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$ длины $b-a=\delta$, то она будет и *равномерно непрерывной* на этом отрезке, если любому $\varepsilon>0$ соответствует такое $d>0$, что $f(x)$ аппроксимируются с точностью до ε постоянными функциями на каждом отрезке, включенном в $[a, b]$ и имеющем длину не более чем d. Это позволяет ввести для $x \in [a, b]$ одну из ступенчатых функций $g(x)$, близких к $f(x)$ и принимающих конечное число k значений.

Если отрезок $[a, b]$ разбит на p частных отрезков с помощью $p-1$ промежуточных значений $a<a'<a''<\ldots<a^{p-1}<b$, то равномерная непрерывность на каждом частичном отрезке влечет за собой равномерную непрерывность на $[a, b]$, потому то $f(x)$ оказывается аппроксимированной через ступенчатые функции, которые принимают

$$k_1+k_2+\ldots+k_p$$

постоянных значений. (Очевидно, достаточно рассмотреть одну из этих функций g.)

2) Если бы функция f не являлась равномерно непрерывной на $[a, b]$, то при разбиении этого отрезка на части по меньшей мере в одном из частичных отрезков непрерывность этой функции не была равномерной. Условимся, что будем разбивать отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка длины $(^1/_2)\,\delta$ и обозначать через $[a_1, b_1]$ тот из них, на котором непрерывность функции неравномерна.

Повторяя разбиение, мы получим «западню»:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

$$b_n-a_n=\delta/2^n.$$

Это будет последовательность отрезков, на которых непрерывность не является равномерной. Но эта последовательность определяет число ξ, при котором f непрерывна. Следовательно, любому числу $\varepsilon>0$ соответствует окрестность $V_\alpha(\xi)$, в которой функция аппроксимируется с точностью до ε постоянной функцией $f(\xi)$. Но поскольку эта окрестность содержит $[a_n, b_n]$, то получается противоречие. Следовательно, непрерывность на $[a, b]$ необходимо является равномерной.

b) Теорема о границах.

Если ε выбран, то, благодаря равномерной непрерывности, мы аппроксимируем функцию $f(x)$ с помощью ступенчатой функции $g(x)$. Эта последняя принимает лишь k значений, следовательно, она *ограничена*; отсюда следует, что и $f(x)$ является ограниченной на $[a, b]$. Это значит, что множество значений $f(x)$ в $Y \subset R$ имеет точную верхнюю грань M и точную нижнюю грань m.

Рассмотрим, например, M.

В разбиении отрезка $[a, b]$ на два равных отрезка, которое мы уже выполняли, каждый из этих отрезков дает свою верхнюю грань, и наибольшее значение этих граней равно M. Это значит, что M является верхней гранью функции по меньшей мере в одном из частичных отрезков, который мы и обозначим $[a_1, b_1]$. Повторяя разбиение, мы получим «западню». В каждом отрезке этой последовательности точной верхней гранью является M.

Пусть ξ — число, определенное этой «западней». Очевидно, $f(\xi) \leqslant M$. Но неравенство $f(\xi) < M$ невозможно, так как отсюда следовало бы, что существует окрестность $V_\alpha(\xi)$, где точная верхняя грань меньше M, хотя эта окрестность и содержит отрезки $[a_n, b_n]$.

Таким образом, обозначая $\xi = x_M$, имеем: $f(x_M) = M$. Аналогично доказывается существование числа $x_m \in [a, b]$, такого, что $f(x_m) = m$. Разность $M - m$ называется *колебанием* функции на $[a, b]$.

c) Теорема о промежуточных значениях.

Пусть μ заключено между m и M. Предположим для определенности, что $x_m < x_M$ и пусть $\mathscr{H}$ — множество $x \in [x_m, x_M]$, для которых $f(x) \geqslant \mu$. Это множество не пусто, потому что оно содержит x_M. Оно минорировано через x_m, следовательно, имеет точную нижнюю грань x_μ. Это значит, что:

1) x_μ является минорантой $\mathscr{H}$:

$$x \in \mathscr{H} \Rightarrow x \geqslant x_\mu,$$

2) это наибольшая миноранта:

$$\forall V_\alpha(x_\mu), \quad V_\alpha(x_\mu) \cap \mathscr{H} \neq \varnothing.$$

Тогда $f(x_\mu) > \mu$ невозможно, потому что существовала бы окрестность $V_\alpha(x_\mu) \subset \mathscr{H}$, то есть $V_\alpha(x_\mu)$ содержала бы $x < x_\mu$, что противоречит предыдущему пункту 1).

Но $f(x_\mu) < \mu$ также невозможно, потому что тогда существовала бы окрестность $V_\alpha(x_\mu)$, элементы которой удовлетворяли бы $f(x) < \mu$ и имели бы

$$V_\alpha(x_\mu) \cap \mathscr{H} = \varnothing,$$

что противоречит пункту 2).

Таким образом, должно быть $f(x_\mu) = \mu$.

Замечание. Можно выразить свойства b) и c) так: *При отображении с помощью непрерывной функции образом отрезка $[a, b]$ является также отрезок.*

II. Приложения к непрерывным дифференцируемым функциям

Предположим, что функция $y = f(x)$ не только определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, но, кроме того, имеет и производную k в каждой точке x_0 этого отрезка *. Множество этих чисел k обра-

* В этом случае функцию называют дифференцируемой на отрезке $[a, b]$.— *Прим. ред.*

зует *производную функцию* $f'(x)$. Мы дополняем теорему о гранях, отмечая, что $f'(x_m)$ и $f'(x_M)$ равняются нулю, если x_m и x_M находятся *внутри* отрезка, то есть если эти значения принадлежат открытому интервалу $]a, b[$. Действительно, отношение

$$g(x) = \frac{f(x) - m}{x - x_m}$$

имеет знак разности $x - x_m$, следовательно, оно не имеет постоянного знака в окрестности точки x_m. Предел этого отношения $f'(x_m)$, который по предположению существует, может равняться лишь нулю. Аналогично для $f'(x_M)$.

Правило.

Если $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и если она достигает своих точных граней в x_m и x_M, принадлежащих $]a, b[$, то производная в этих точках равняется нулю.

Следствие.

Теорема Ролля. *Если непрерывная и определенная на $[a, b]$ функция имеет производную в каждой точке $]a, b[$ и если $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно значение $\xi \in]a, b[$, для которого производная равна нулю.*

Действительно, если функция постоянна на $[a, b]$, то ее производная равна нулю в каждой точке; если она непостоянна, то она имеет либо точную верхнюю грань M, достигаемую на $]a, b[$, либо точную нижнюю грань m, достигаемую на $]a, b[$, либо обе грани. Например, если она принимает значения больше, чем $f(a) = f(b)$, то существует M, откуда $x_M \in]a, b[$ и $f'(x_M) = 0$.

Следствие. Теорема о конечных приращениях. Пусть теперь $f(a) \neq f(b)$; тогда прямая AB, где A — точка с координатами $\{a, f(a)\}$ и B — точка с координатами $\{b, f(b)\}$, уже не параллельна оси $x = b$. Эта прямая, как мы видели, является графиком функции

$$\varphi(x) = kx + f(a) - ka, \text{ где } k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ непрерывна и имеет производную внутри рассматриваемого отрезка * и на его концах равняется нулю; поэтому к ней можно применить теорему Ролля; следовательно, существует число $\xi \in]a, b[$, такое, что

$$F'(\xi) = 0;$$

но

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \varphi'(\xi) = f'(\xi) - k,$$

значит, $f'(\xi) = k$.

---

* То есть на интервале $]a, b[$.— *Прим. ред.*

Итак, *при указанных условиях существует точка интервала* $]a, b[$, *в которой касательная к графику функции параллельна хорде* AB. Этот вывод записывается так:

$$\exists \xi : f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

(Слово «конечное» в выражении «конечное приращение» употребляется в противовес «бесконечно малому приращению», как называли раньше при определении производной приращения $b-a$ и $f(b)-f(a)$, стремящиеся к 0. И сейчас иногда еще называют такого рода приращения «бесконечно малыми», конечно, в несобственном смысле.)

Исследование возрастания функции на отрезке с помощью производной.

Будем предполагать в дальнейшем, что функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную в интервале $]a, b[$.

a) Если функция постоянна на отрезке, то мы знаем, что ее производная равна нулю в любой точке интервала. Обратно, предположим, что ее производная равна нулю в каждой точке $]a, b[$. Тогда согласно теореме о конечных приращениях каждая хорда графика параллельна оси $x = b$, значит, функция постоянна на отрезке. Отсюда следует два очень важных заключения:

Если функция имеет производную, тождественно равную нулю внутри отрезка, то эта функция постоянна на отрезке.

Если две функции имеют одну и ту же производную $\varphi(x)$ *внутри некоторого отрезка, то эти функции отличаются друг от друга лишь постоянным числом.* (Действительно, исчисление пределов показывает, что производная разности есть разность производных.) Мы будем пользоваться этой теоремой в главе VI книги 1.

b) Если функция, имеющая производную внутри отрезка, возрастает на этом отрезке, то она также возрастает и в каждой точке этого отрезка, причем ее производная положительна или равна нулю.

Обратно, предположим, что производная строго положительна в любой точке интервала. Согласно теореме о конечных приращениях, все хорды имеют положительные наклоны, следовательно, функция является возрастающей на этом интервале. Возрастание обозначают символом $\nearrow$; так что:

$$f'(x)>0,\ \forall x \in (a, b) \iff f(x) \nearrow (a, b);$$

$$f'(x)<0,\ \forall x \in (a, b) \iff f(x) \searrow (a, b).$$

Отсюда вытекает, что для определения интервалов, где непрерывная функция, имеющая производную, возрастает или убывает, достаточно изучить знак этой производной. Во всяком интервале, где знак производной не меняется, функция является возрастающей (при знаке $+$) или убывающей (при знаке $-$). В каждом из этих случаев функция называется *монотонной* в интервале. Соответствие между x и y в этом случае взаимно однозначно и, согласно теореме о промежуточных значениях, обратная функция f^{-1} определена и непрерывна на отрезке $[m, M]$.

Определения. Непрерывная функция имеет *максимум* в x_0, если она является возрастающей в интервале (a, x_0) и убывающей в интервале (x_0, b); следовательно, $f(x_0)$ есть точная верхняя грань функции $f(x)$ на (a, b). Если функция имеет производную, то $f'(x_0) = 0$. Подобным же образом определяют *минимум*.

III. Расширение понятий окрестности и предела

Возникает необходимость присоединить к множеству действительных чисел два элемента, обозначаемых через $+\infty$ и $-\infty$, которые определяются как точная верхняя и точная нижняя грани множества действительных чисел; таким образом, от открытого множества R переходят к замкнутому множеству $\overline{R}$, называемому «замкнутой прямой».

В отрезке $[a, b]$ концы a и b не имеют, естественно, окрестностей, включенных в отрезок $[a, b]$; приходится рассматривать «правые полуокрестности» для a, то есть полуинтервалы $[a, a+\alpha[$ и левые полуокрестности для b, то есть полуинтервалы $]b-\beta, b]$. Аналогично определятся правые полуокрестности для $-\infty$: полуинтервалы $[-\infty, A[$, и левые полуокрестности для $+\infty$: полуинтервалы $]A, +\infty]$. В соответствии с этим вводятся определения правого или левого предела, а также предела, равного $-\infty$ или $+\infty$. Например, «$f(x)$ стремится к L, когда x стремится к $+\infty$», означает:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A : x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Аналогично «$f(x)$ стремится к $+\infty$, когда x стремится к x_0», означает:

$$\forall A > 0, \ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

Основные теоремы справедливы лишь для ограниченных интервалов (a, b), то есть для небесконечных интервалов. Функция в них считается определенной, когда она не бесконечна. Все же если функция стремится к бесконечности при $x = b$, например, то теорема о промежуточных значениях остается в силе.

Если в точке x_0 функция не имеет производной, но если отношение приращений имеет правый предел k_1, то будем говорить, что k_1 является правой полупроизводной. Может случиться, что функция имеет в точке различные правую и левую полупроизводные: тогда говорят, что график представляет собой *угловую точку* с *полукасательными* (Пример. $y = |x|$ в $x = 0$*).

* При $x = 0$ левая полупроизводная функции $y = |x|$ равна -1, правая полупроизводная равна $+1$.— *Прим. ред.*

Отметим, наконец, что непрерывность в точке выражается соединением двух условий:

$$\forall \varepsilon,\ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon; \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon,\ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \qquad (2)$$

Условие (1) характеризует *нижнюю полунепрерывность*, а условие (2) — *верхнюю полунепрерывность*.

IV. Применение понятия непрерывности

Понятие непрерывности, изученное для числовых функций, переносится и на другие отображения. В геометрии элементы множества точек, прямых, кругов... или множества преобразований, параллельных переносов, гомотетий, ... могут зависеть от значений длины, угла..., которые мы называем *параметрами*. Непрерывность может быть рассмотрена, если в этом множестве выбрано определение окрестности. Тогда говорят, что в этом множестве выбрана некоторая *топология*.

В кинематике параметром является *время*. Фигура может непрерывно изменяться с течением времени. Если фигура остается равной самой себе (понятие метрической геометрии), то говорят, что она подвергается *движению*.

Если координаты точки M являются непрерывными функциями параметра t, пробегающего интервал (t_0, t_1) множества вещественных чисел, то будем говорить, что M порождает *дугу кривой*. Если соответствие, установленное таким образом между t и M, является взаимно однозначным, то *дуга* называется *простой*. (Такая дуга не может самопересечься, образуя двойную точку.) Кривая, которая становится простой дугой, когда ее лишают *какой-либо* из ее точек, называется *простой замкнутой кривой* или *кривой Жордана* (пример: окружность, контур параллелограмма и т. д.).

Если удалить две точки простой замкнутой кривой, то множество точек распадается на две простые дуги без общих точек. Это множество больше уже не является *связным*. Эти понятия, очевидно, существенны для изучения разбиений пространства на области кривыми и поверхностями, о чем мы здесь лишь упоминаем.

Пятая глава

ВВЕДЕНИЕ В МЕТРИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

§ 1. Определение евклидовых метрических пространств

Мы сейчас построим геометрию, называемую *евклидовой метрической геометрией*. Мы ее получим из аффинной геометрии присоединением новых аксиом. Это значит, что мы сохраняем, как существенное, понятие параллелизма. Самостоятельное аксиоматическое построение метрической геометрии позволило бы показать при более позднем введении аксиом параллельности, что здесь возможно разветвление и появление других геометрий, в частности, геометрии Лобачевского (см. кн. III, гл. III). Наиболее существенные свойства векторного евклидового метрического пространства приведут нас к выбору трех аксиом, *очень наглядных* и достаточно сильных, чтобы немедленно получить свойства равнобедренного треугольника и теорему Пифагора. Они позволяют быстро найти те основные положения, на которых легко построить элементарную геометрию, называемую синтетической, в противоположность геометрии аналитической.

Будем исходить из векторного пространства более чем одного измерения. Векторы распределены на классы эквивалентности с помощью отношения параллелизма. Если вектор $\boldsymbol{v}$ параллелен выбранному вектору $\boldsymbol{u}$, то, как мы знаем, существует число k, такое, что $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$. Если считать вектор $\boldsymbol{u}$ единичным вектором данного направления, то k есть относительная мера (относительная величина) вектора $\boldsymbol{v}$. Число $|k|$ будем называть длиной вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначать $|\boldsymbol{v}|$. Наконец, условимся обозначать, как это принято, знаком $=$ эквивалентность векторов, которую мы ранее из предосторожности обозначали $\equiv$.

I. Введение метрики

Внести в векторное пространство метрику — это значит сделать возможным сравнение длин непараллельных векторов. Нужно, следовательно, предположить, что некий инструмент, который мы назовем «переноситель длины», позволяет определить на множестве векторов *новое отношение эквивалентности*. Два вектора, эквивалентные согласно этому отношению, будут считаться имеющими одну и ту же длину. Иначе говоря, длина есть некоторый класс эквивалентности. Будем писать: $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}|$ (используя снова знак $=$).

Аксиома L_1 переноса длины. *Если дан вектор $\boldsymbol{u}$ направления δ* и некоторое направление δ_1, то существует единственная пара противоположных векторов $\boldsymbol{v}$ и $-\boldsymbol{v}$, имеющих каждый ту же длину, что и $\boldsymbol{u}$, и направление δ_1.*

Если $\boldsymbol{u}$ взят как единичный вектор направления δ, то $\boldsymbol{v}$ или $-\boldsymbol{v}$ тоже будет рассматриваться как единичный вектор направления δ_1. Таким образом, каждый вектор *имеет длину*, измеряемую числом $|k|$, и, обратно, каждое неотрицательное число есть мера длины векторов некоторого класса эквивалентности. Мы будем говорить кратко, что $|k|$ есть *длина этих векторов*. Число 0 есть

---

* Предполагается, что $\boldsymbol{u}$ не является нуль-вектором. Для нуль-векторов аксиома пополняется требованием, что число 0 есть длина нуль-вектора.— *Прим. ред.*

длина нулевых векторов. Чтобы рассмотренное выше понятие можно было использовать, нужно ввести аксиомы, уточняющие связь между различными, но равными по длине единичными векторами, то есть между единичными векторами различных направлений. Мы изберем аксиомы, связанные с векторной суммой.

Аксиома (p) **перпендикулярности.** Каждому единичному вектору $\boldsymbol{i}$ ставится в соответствие единичный вектор $\boldsymbol{j}$, такой, что два вектора $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{s}' = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ имеют одинаковую длину *. Это записывается так:

$$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}| = |-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|.$$

Говорят, что вектор $\boldsymbol{j}$ *перпендикулярен* вектору $\boldsymbol{i}$; ясно, что он также перпендикулярен вектору $-\boldsymbol{i}$. Заметим, что вектор $\boldsymbol{j}$ не может быть параллельным вектору $\boldsymbol{i}$, потому что в этом случае было бы $\boldsymbol{j}$ равно $\boldsymbol{i}$ или $\boldsymbol{j}$ равно $-\boldsymbol{i}$, что невозможно. Действительно,

$$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}| = |2\boldsymbol{i}| = 2, \text{ а } |\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}| = 0.$$

Следовательно, пара векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ образует базис. Такой базис называется *ортонормированным* (или *ортонормальным*).

Аксиома (i) **изотропности** (или эквивалентности ортонормальных базисов). *Пусть* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ *есть ортонормальный базис* и пусть $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$; тогда длина вектора $\boldsymbol{v}$ есть симметричная функция чисел $|x|$ и $|y|$:

$$|\boldsymbol{v}| = \mathfrak{L}(x, y) = \mathfrak{L}(y, x),$$

причем $\mathfrak{L}$ не меняет значения при изменении знака числа x или числа y. Эта *функция зависит только от чисел x и y*, так что векторы, имеющие те же компоненты по отношению к каким-либо ортогональным базисам, имеют ту же длину. В частности, 8 векторов $\pm x\boldsymbol{i} \pm y\boldsymbol{j}$, $\pm y\boldsymbol{i} \pm x\boldsymbol{j}$ имеют ту же длину. Это совместимо с аксиомой (p), ибо из этого утверждения вытекает

$$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}| = |-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|,$$

но, кроме того, из него следует также $|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}|$, что выражает перпендикулярность вектора $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$. Значит, для двух единичных векторов *отношение перпендикулярности симметрично*. Таким образом, каждый из векторов $\pm\boldsymbol{i}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\pm\boldsymbol{j}$ и обратно.

Отыскание функции $\mathscr{L}(x, y)$.

Пусть мы имеем ортонормальный базис $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ в двумерном векторном пространстве и *единичный вектор* $\boldsymbol{u}$, определенный по отношению к этому базису: $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$. Мы должны иметь, следова-

* В этой аксиоме единственность соответствующего вектора j не требуется. Иначе говоря, если дан произвольный единичный вектор i, то существует по меньшей мере один единичный вектор j, удовлетворяющий указанным условиям.— *Прим. ред.*

тельно, $\mathfrak{L}(\alpha,\ \beta)=1$. Среди 8 единичных векторов $\pm\alpha\boldsymbol{i}\pm\beta\boldsymbol{j}$ и $\pm\beta\boldsymbol{i}\pm\alpha\boldsymbol{j}$ имеются два перпендикулярных к $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j} \text{ и } -\boldsymbol{v}=-\beta\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j},$$

потому что векторы

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{i}+(\beta-\alpha)\,\boldsymbol{j} \text{ и } \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(\alpha-\beta)\,\boldsymbol{i}+(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{j},$$

очевидно, имеют одинаковую длину. Иначе говоря, $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ образуют ортонормальный базис. Выразим теперь $\boldsymbol{i}$ с помощью векторов этого базиса, исключая $\boldsymbol{J}$; получаем:

$$(\alpha^2+\beta^2)\,\boldsymbol{i}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}.$$

Поэтому, определяя длину этого вектора, направленного по $\boldsymbol{i}$, получаем:

$$(\alpha^2+\beta^2)\equiv\mathfrak{L}(\alpha,\ \beta)=1.$$

Значит, если единичный вектор $\boldsymbol{u}$ отнесен к ортонормальному базису, то есть $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$, то $\alpha^2+\beta^2=1$. Отсюда для не единичного вектора имеем:

$$\boldsymbol{U}=k\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\ \ x=k\alpha,\ \ y=k\beta.$$

Откуда его длина есть

$$|\boldsymbol{U}|=|k|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

Поэтому *единственной функцией* $\mathfrak{L}(x,\ y)$, *удовлетворяющей поставленным требованиям, может быть только* $\mathfrak{L}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет *всем* наложенным условиям, в частности,

$$|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|=|-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|=\sqrt{2}.$$

Следствие. *Единственность пары единичных векторов* $\boldsymbol{j}$ *и* $-\boldsymbol{j}$, *перпендикулярных вектору* $\boldsymbol{i}$ *в двумерном векторном пространстве*.

Пусть мы имеем единичный вектор этого пространства:

$$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}, \text{ где } \alpha^2+\beta^2=1.$$

Тогда

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{i}|=\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1+2\alpha};$$

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}|=\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1-2\alpha}.$$

Эти две длины равны только для $\alpha=0$, $\beta=\pm1$, значит, вектором $\boldsymbol{u}$, перпендикулярным к $\boldsymbol{i}$, будет только $\boldsymbol{j}$ или $-\boldsymbol{j}$.

Следовательно, если дан единичный вектор $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$, то единственными единичными векторами двумерного векторного пространства, перпендикулярными к вектору $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$, являются

$$\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j} \text{ и } -\boldsymbol{v}=-\beta\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j},$$

которые нами уже были выделены.

Направления двух единичных взаимно перпендикулярных векторов называются *перпендикулярными направлениями*, а векторы, имеющие такие направления, называются взаимно перпендикулярными. Таковы векторы:

$$\boldsymbol{U}=k\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{V}=k'\boldsymbol{v}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j},$$

где

$$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j},\ \alpha^2+\beta^2=1.$$

Отсюда выводится:

$$\left\{\begin{array}{l} x=k\alpha; \\ y=k\beta; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x'=k'\beta; \\ y'=-k'\alpha, \end{array}\right. \quad \text{откуда } xx'+yy'=0. \tag{2}$$

Обратно, пусть

$$\boldsymbol{U}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=k\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{V}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}=k'\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — единичны; соотношение $xx'+yy'=0$ влечет за собой перпендикулярность векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. Действительно, полагая $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}=\alpha'\boldsymbol{i}+\beta'\boldsymbol{j}$, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\alpha'+\beta\beta'=0; \\ \alpha^2+\beta^2=1,\ \alpha'^2+\beta'^2=1, \end{array}\right. \quad \text{то есть } \frac{\alpha'}{\beta}=\frac{-\beta'}{\alpha}=\varrho,$$

где

$$\varrho^2=\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{\alpha^2+\beta^2}=1.$$

Следовательно,

$$\varrho=\pm 1 \text{ и } \left\{\begin{array}{l} \alpha'=\beta \\ \beta'=-\alpha \end{array}\right., \text{ или } \left\{\begin{array}{l} \alpha'=-\beta \\ \beta'=\alpha \end{array}\right..$$

Вывод. *В двумерном векторном пространстве, когда векторы отнесены к ортонормальному базису, длина вектора определяется формулой*

$$|\boldsymbol{U}|=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{1}$$

а условие перпендикулярности двух векторов (его называют также *условием ортогональности*) выражается так:

$$xx'+yy'=0. \tag{2}$$

II. Приложения к точечному двумерному пространству

Пространство отнесено к ортонормальному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ с началом в O. Каждая точка M определена через $\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

а) *Расстоянием между двумя точками* M, M' называют длину $|\boldsymbol{MM'}|=|\boldsymbol{M'M}|$, которую обозначают через MM'. Таким образом,

$$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

b) Соотношения в треугольнике. Пусть дан треугольник ABC, $\boldsymbol{AB} = c\,\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{AC} = b\boldsymbol{v}$, $b > 0$, $c > 0$, где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — единичные векторы на AB и AC. Пусть $\boldsymbol{u}'$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\boldsymbol{u}$, такой, что в выражении вектора $\boldsymbol{v}$ по отношению к полученному ортонормальному базису:

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}' \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1),$$

число β было положительным. Мы говорим в этом случае, что вектор $\boldsymbol{u}'$ находится с той же стороны, что и вектор $\boldsymbol{v}$ по отношению к носителю вектора $\boldsymbol{u}$. Отсюда выводим:

$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC} - \boldsymbol{AB} = b\boldsymbol{v} - c\boldsymbol{u} = (b\alpha - c)\,\boldsymbol{u} + b\beta\boldsymbol{u}'.$$

Полагаем $|\boldsymbol{BC}| = BC = a$, откуда

$$a^2 = (b\alpha - c)^2 + (b\beta)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\alpha. \tag{3}$$

Следовательно, $\alpha = 0 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. Это случай, когда AB перпендикулярно к AC. Говорят, что *треугольник прямоугольный в A*; сторона BC называется гипотенузой треугольника. Полученный результат — *теорема Пифагора*.

В общем случае

$$\alpha > 0 \iff a^2 < b^2 + c^2 \text{ и } \alpha < 0 \iff a^2 > b^2 + c^2.$$

Число α, введенное через $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}'$, называется *косинусом пары* векторов (u, v) и пишут: $\alpha = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Число β называется *синусом* этой же пары и пишут: $\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Мы изучим эти числа в дальнейшем. Здесь заметим лишь, что каждое из них заключено между -1 и $+1$, потому что они удовлетворяют соотношению $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Поэтому из формулы (3) вытекает

$$(b-c)^2 \leqslant a^2 \leqslant (b+c)^2, \text{ значит, } |b-c| \leqslant a \leqslant b+c, \tag{3'}$$

где равенства могут иметь место лишь для $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, то есть в случае, когда все три точки A, B, C находятся на одной прямой. Соотношение (3′) называется *неравенством треугольника*. Это условие, достаточное для того, чтобы три положительных числа a, b, c являлись длинами трех сторон некоторого треугольника, ибо когда b и c даны, то если α принимает все значения отрезка $[-1, +1]$, то a принимает все значения между $|b - c|$ и $b + c$, согласно равенству (3).

c) *Если дана прямая d, то через каждую точку A проходит единственный перпендикуляр к этой прямой*, потому что его направление определено единичными векторами $\boldsymbol{j}$ и $-\boldsymbol{j}$, перпендикулярными к направляющим векторам $\boldsymbol{i}$ и $-\boldsymbol{i}$ прямой d.

Медиатрисой отрезка называется перпендикуляр к направлению этого отрезка, проведенный через его середину. Из аксиомы (*i*) вытекает, что каждая точка медиатрисы одинаково удалена от концов отрезка. Вообще теорема Пифагора показывает, что расстояние от заданной точки до переменной точки M некоторой прямой есть возрастающая функция расстояния точки M от основания перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую.

Теорема. *Если дана некоторая прямая d, то каждой точке M можно поставить в соответствие точку M', такую, что d является медиатрисой отрезка MM'.*

В самом деле, это условие выражает, что середина H отрезка MM' есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d. Следовательно, эта точка H определена, и M' получается отсюда построением:

$$MH \perp d, \ H \in d, \ \boldsymbol{MM'} = 2\boldsymbol{MH},$$

где использован обычный символ $\perp$, обозначающий ортогональность. Определенное таким образом точечное преобразование $M \searrow\!\!\_\_\!\!\nearrow M'$ при заданной прямой d называется *переворачиванием вокруг* d (или еще симметрией относительно d; говорят также, обращение вокруг d) *. Прямая d называется *осью симметрии* (но слово «ось» употреблено здесь в несобственном смысле, так как на прямой d не выбрано положительное направление, как это делается обычно, когда используют слово «ось»).

Теорема. *Расстояние между двумя точками инвариантно относительно симметрии.* Это вытекает из аналитического выражения симметрии: пусть $\boldsymbol{i}$ — единичный направляющий вектор прямой d, $\boldsymbol{j}$ — перпендикулярный ему единичный вектор и $\boldsymbol{O}$ — некоторая точка прямой d. Рассматриваемое соответствие определено так:

$$\forall M, \ \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{OM'} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}.$$

Поэтому для пары точек и для их образов имеем:

$$\boldsymbol{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{M'_1M'_2} = (x_2 - x_1)\,\boldsymbol{i} - (y_2 - y_1)\,\boldsymbol{j}$$

и расстояние $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ сохраняется.

Точечное преобразование, которое сохраняет расстояние, называется *изометрией*. Отсюда *симметрия является изометрией.*

d) Окружность.

1) Пусть даны точка O и положительное число R, причем в метрической плоскости единичный вектор считается выбранным. Рассмотрим множество единичных векторов $\boldsymbol{v}$. Множество точек M, определенных через $\boldsymbol{OM} = R\boldsymbol{v}$, называется *окружностью*. O есть ее центр и R — длина ее радиуса. Аналитически если α и β — пара действительных чисел, удовлетворяющих соотношению $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то окружность есть геометрическое место точек M, определенных через $\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R\alpha\boldsymbol{i} + R\beta\boldsymbol{j}$, то есть координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = R^2$.

Теорема. *Каждая прямая, проходящая через центр окружности, есть ось симметрии, оставляющей окружность инвариантной в целом.*

---

* Русский термин «симметрия, или зеркальное отражение». — *Прим. перевод.*

Действительно, каждый вектор $\boldsymbol{OM}$ сохраняет свое начало и свою длину в такой симметрии. Эти оси называются *диаметрами* окружности. Обратно, *фигура, остающаяся инвариантной в любой симметрии относительно оси, проходящей через точку* O, *есть множество всех окружностей с центром в* O.

Действительно, пусть M — любая точка этой фигуры. Тогда вектор $\boldsymbol{OM}'$ той же длины, что $\boldsymbol{OM}$, симметричен ему по отношению к медиатрисе отрезка MM', проходящей через O; поэтому вся окружность с центром в O, проходящая через M, является составной частью искомой фигуры.

2) Возьмем теперь точку M окружности с центром в O и радиуса R.

$$\boldsymbol{OM} = R(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}),\quad \alpha^2+\beta^2=1,$$

и будем рассматривать α и β как переменные, связанные написанным равенством и изменяющиеся так, как это показывается в следующей таблице:

α	$-1 \nearrow 0 \nearrow +1 \searrow 0 \searrow -1$
β	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$

Первая часть таблицы, которая соответствует неравенствам $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками M и действительными числами λ отрезка $[-1, +1]$ с помощью равенства $\lambda = \alpha$.

Установленное соответствие непрерывно, потому что окрестности M на окружности соответствует окрестность L на действительной прямой. (Здесь окрестностью точки M в плоскости является множество точек, расстояние которых от M меньше некоторой заданной величины.) Этот результат выражают следующим утверждением: говорят, что соответствующая часть окружности есть *простая дуга*. Эта дуга называется *полуокружностью*, потому что ее объединение с дугой, ей симметричной по отношению к надлежащим образом выбранной прямой, составляет окружность в целом: эта прямая есть диаметр, соединяющий *два конца дуги*, которые являются образами концов отрезка $[-1, +1]$.

Рассмотрим вторую часть таблицы (не повторяя значение $\alpha = +1$):

$$+1 > \alpha \geqslant -1,\quad \beta \leqslant 0.$$

Она позволяет установить непрерывное взаимно однозначное соответствие между остальными точками окружности и действительными числами полуинтервала $]+1, +3]$ с помощью соотношения

$$\lambda = 2 - \alpha.$$

Точки всей кривой находятся, следовательно, в непрерывном взаимно однозначном соответствии с действительными числами отрезка [—1, 3], если только принять оба конца этого отрезка за одну точку. Это выражают утверждением, что окружность является *замкнутой простой кривой*. Ясно, что отрезок [—1, 3] может быть заменен любым другим отрезком * (сравнить гл. IV).

3) Задание окружности (с центром в O и с радиусом R) определяет три точечных подмножества, элементы M которых характеризуются следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} OM = R \text{ — окружность,} \\ OM < R \text{ — область, внутренняя по отношению к окружности,} \\ OM > R \text{ — область, внешняя по отношению к окружности.} \end{array}\right.$$

Пусть A и B — две точки, расположенные во внутренней области. Тогда отрезок AB целиком расположен в этой области, так как он заключен в хорде, определенной прямой AB. В таком случае говорят, что эта область *выпуклая*.

Если A и B расположены обе во внешней области, то их также можно соединить простой дугой, не имеющей общих точек с окружностью: например, рассматривают отрезок AC полупрямой OA, где C принадлежит окружности, имеющей центр в O и проходящей через B, и берут потом одну из дуг этой окружности.

Наоборот, если точки A и B принадлежат одна, например A, внутренней области, а другая, например B, — внешней, то любая простая дуга, соединяющая A и B, имеет по крайней мере одну общую точку с окружностью. Действительно, точка M, порождающая дугу, находится во взаимно однозначном непрерывном соответствии с числом t, пробегающим некоторый отрезок $[a, b]$, следовательно, координаты x и y точки M являются непрерывными функциями переменного числа t, а значит, непрерывной функцией от t является и расстояние $d = OM$. Поэтому d принимает все промежуточные значения между OA и OB (согласно теореме гл. IV), значит, в частности, d принимает также значение R.

Первые два результата выражают, что каждая из областей, как внутренняя, так и внешняя, *связана*. Можно доказать, что третий

---

* В оригинале вторая полуокружность взаимно однозначно отображается на полуинтервал $]+1, +2]$ с помощью соотношения $\lambda = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha$ и, следовательно, вся окружность на отрезок [—1, 2], если принять оба конца этого отрезка за одну точку. Мы предпочли упростить расчеты.

В оригинале говорится об отображении всей окружности на отрезок [0, 2], что является, по-видимому, опиской или опечаткой, однако, возможно, что автор предполагал первую полуокружность отображать на отрезок [0, 1] с помощью соотношения $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$, тогда, действительно, вся окружность отобразится на отрезок [0, 2].— *Прим. ред. и перевод.*

результат вытекает из факта, что окружность есть замкнутая простая кривая.

4) Расстояние точки от множества.

Пусть A — точка, либо принадлежащая, либо не принадлежащая множеству точек E. Множество расстояний AM, когда M пробегает E, имеет точную нижнюю грань d (аксиома полной упорядоченности), которая называется *расстоянием точки A до множества E*:

$$A \notin E \Rightarrow d \geqslant 0; \quad A \in E \Rightarrow d = 0.$$

Теорема 1. *Расстояние от точки A до прямой Δ — это расстояние от точки A до основания перпендикуляра к Δ, проходящего через A.*

Если прямая определена уравнением

$$M \in \Delta \iff \boldsymbol{OM} = \lambda \boldsymbol{i}$$

и если

$$\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j},$$

то

$$d^2 = \operatorname{Inf}\,[(a-\lambda)^2 + b^2],$$

откуда $d = |b|$, получаемое при $\lambda = a$.

Следствие. *Множество точек, расстояние которых от некоторой прямой Δ задано, есть объединение двух параллельных к Δ прямых.*

Теорема 2. *Множество точек, равноотстоящих от двух пересекающихся прямых, есть объединение двух прямых.*

Пусть даны две пересекающиеся прямые Δ_1 и Δ_2. Окружность с центром в точке $\Delta_1 \cap \Delta_2$ пересекает Δ_1 в A и A', а Δ_2 в B и B'. Медиатриса μ отрезка AB и отличная от нее медиатриса μ' отрезка AB' являются двумя осями симметрии, переводящими Δ_1 в Δ_2, значит, все точки объединения $\mu \cup \mu'$ удовлетворяют условию. Других точек нет, так как каждому расстоянию d соответствует пара прямых δ_1, δ_1', параллельных к Δ_1, и пара прямых δ_2 и δ_2', параллельных к Δ_2, откуда получается множество четырех подходящих точек

$$(\delta_1 \cup \delta_1') \cap (\delta_2 \cup \delta_2'),$$

которое может быть только множеством четырех известных точек

$$(\delta_1 \cup \delta_1') \cap (\mu \cup \mu').$$

5) Топология, соответствующая метрике.

а) Как мы уже отметили в главе IV, окрестность порядка α некоторой точки A есть множество точек M, для которых $AB < \alpha$. Это внутренняя область окружности с центром в A и радиусом α. Эта окрестность $V_\alpha(A)$ называется *открытым кругом*. Она удовлетворяет общему определению *открытого множества* Θ:

$$\forall M \in \Theta, \ \exists \alpha : V_\alpha(M) \subset \Theta.$$

Замкнутый круг определяется так: $AM \leqslant \alpha$.

Точки окружности называются принадлежащими *границе* открытого круга, согласно следующему метрическому определению: *границей множества называется множество точек, расстояние которых до множества, а также до дополнительного множества равны нулю.*

Объединение множества и его границы называется *замкнутым множеством.* Дополнение замкнутого множества не имеет ни одной граничной точки. Откуда вытекает, что оно удовлетворяет определению открытого множества.

Объединение открытого множества и лишь части его границы не открыто и не замкнуто. Не нужно думать, что каждое открытое множество и его граница аналогичны области, которую можно закрасить, и ее контуру, как это внушают элементарные примеры: круг и его окружность, внутренняя область треугольника и ломаная, его заключающая.

b) Касательные.

Введение топологии позволило определить касательные к кривым. Исследование касательных к окружности было выполнено с помощью понятия угла (гл. IV, ч. II, § 1, п. II). Но мы возвращаемся к изучению этого вопроса с новой точки зрения.

6) Касательные к окружности.

a) Касательная в точке A. Выберем ортонормальный базис $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, такой, что $\boldsymbol{OA} = R\boldsymbol{i}$. Любая точка M окружности определена через $\boldsymbol{OM} = R\,[x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}]$, где $x^2 + y^2 = 1$, откуда $\boldsymbol{AM} = R\,[(x-1)\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}]$.

Утверждать, что M находится в окрестности порядка α точки A равносильно неравенству

$$(1-x)^2 + y^2 < \alpha^2,$$

откуда следует:

$$|x-1| < \alpha \text{ и } |y| < \alpha.$$

Прямая AM параллельна вектору

$$\boldsymbol{W}_M = \frac{x-1}{y}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$$

Выполнение неравенства

$$\left|\frac{x-1}{y}\right| < \varepsilon$$

обеспечивается при $\alpha < \varepsilon$, так как $\left|\frac{x-1}{y}\right| = \left|\frac{-y}{x+1}\right|$ *.

---

* Второе отношение получается из первого с помощью уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Чтобы удовлетворить требованию $\left|\frac{-y}{x+1}\right| < \varepsilon$, достаточно потребовать $\frac{\alpha}{|x+1|} < \varepsilon$, так как $|y| < \alpha$.

Таким образом, при неотрицательном x достаточно потребовать $\alpha \leqslant \varepsilon$. (Это требование можно, конечно, ослабить, если учесть, что $(x + 1) > 2 - \alpha$, откуда $\alpha < \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Однако приведенное в оригинале условие $\alpha < 3\varepsilon$ недостаточно.) — *Прим. ред.*

Поэтому, когда M стремится к A, направление $\boldsymbol{AM}$ стремится к направлению $\boldsymbol{j}$, перпендикулярному к радиусу OA. Перпендикуляр t в A к прямой OA является, следовательно, согласно определению, касательной в A к окружности.

b) Непрерывная касательная в точке A. Возьмем две произвольные точки M_1 и M_2 в окрестности порядка α точки A и рассмотрим прямую, являющуюся носителем хорды M_1M_2. Эта прямая имеет точки в окрестности точки A, с другой стороны, ее направление совпадает с направлением вектора

$$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$$

или вектора

$$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=-\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

где

$$\left|\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\right|<\frac{2\alpha}{2(1-\alpha)},$$

который меньше ε при $\alpha<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Поэтому, когда M_1 и M_2 стремятся к A по какому-либо закону, то прямая M_1M_2 имеет предельное положение, которое является касательной At. Говорят, что эта касательная есть *непрерывная касательная в A*. (Например, если прямая M_1M_2 вращается вокруг некоторой точки плоскости, то вывод сохраняет свою силу.)

III. Метрическая геометрия в трехмерном пространстве

a) Две прямые могут быть поставлены в изометрическое соответствие дважды бесконечным числом способов. (Можно выбрать произвольно образ точки на одной из прямых, а также соответствующее направление.)

Изометрическое соответствие двух плоскостей.

Пусть в плоскости P дана система координат, состоящая из точки O и ортонормального базиса $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Нужно выбрать в плоскости P' образ точки O, образ вектора $\boldsymbol{i}$ и ориентацию, которая ставится в соответствие ориентации $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Изометрия тогда определена равенством координат: это такое линейное соответствие, в котором ортонормальный базис переходит в ортонормальный. Это преобразование определено образом некоторой точки O, образом некоторой полупрямой Ox и образом полуплоскости, ограниченной носителем полупрямой Ox.

b) *Плоскость, перпендикулярная некоторому направлению.*

Пусть $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор, определяющий данное направление. Через некоторую точку O трехмерного пространства проводим

$$\boldsymbol{OS}=\boldsymbol{i} \text{ и } \boldsymbol{OS'}=-\boldsymbol{i},$$

затем в двух плоскостях, проходящих обе через SS', берем соответственно единичные векторы $\boldsymbol{j}_1$ и $\boldsymbol{j}_2$, перпендикулярные к $\boldsymbol{i}$, и рассматриваем точки A и B, определенные через $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{j}_2$.

В плоскостях SAS' и SBS', как мы знаем,

$$SA = S'A \text{ и } SB = S'B.$$

Значит, в изометрии, которая ставит в соответствие друг другу полуплоскости ABS и ABS', каждая из которых ограничена прямой AB, S и S' являются соответствующими точками.

Пусть теперь M — некоторая точка прямой AB. Она инвариантна в этой изометрии, следовательно, $MS = MS'$. Это доказывает, что в плоскости SMS' точка M находится на медиатрисе отрезка SS', так что OM перпендикулярно к $\boldsymbol{i}$. Но так как точка M произвольна на прямой AB, то вектор $\boldsymbol{j}$, направляющий для OM, произволен в плоскости, определенной векторами $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$. Откуда теорема:

Если некоторое направление перпендикулярно к двум векторам, служащим направляющими векторами плоскости, то оно перпендикулярно к любому вектору, параллельному этой плоскости.

Обратно, пусть вектор $\boldsymbol{j}_3$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{i}$ в некоторой плоскости, отличной от SOA и SOB. Прямая, для которой вектор $\boldsymbol{j}_3$ служит направляющим вектором и которая выходит из O, является единственным перпендикуляром к вектору в этой плоскости. Значит, она совпадает с прямой OM пересечения этой плоскости с плоскостью OAB. Поэтому все векторы, перпендикулярные к $\boldsymbol{i}$, параллельны одной и той же плоскости, определенной произвольными двумя из этих перпендикуляров.

Параллельные между собой плоскости, определенные указанным образом и зависящие от выбора точки O, называются *плоскостями, перпендикулярными к направлению, определенному вектором* $\boldsymbol{i}$.

Если выбрать в такой плоскости два единичных вектора, взаимно перпендикулярные $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, то три единичных вектора $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будут попарно перпендикулярными. Говорят, что они образуют *ортонормальный базис пространства.*

Выберем точку O и возьмем в качестве осей координат три оси, определенные направляющими векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, образующими ортонормальный базис. Мы получаем *прямоугольный координатный трехгранник* (*триэдр*), по отношению к которому любая точка M пространства определяется своими координатами x, y, z:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Длина вектора $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ равняется $\sqrt{x^2 + y^2}$. Но так как $\boldsymbol{v}$ находится в плоскости, определенной векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, то этот вектор перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{k}$, и, следовательно, длина отрезка OM, согласно теореме Пифагора, такова:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

С л е д с т в и е. *Формула для расстояния между двумя точками, заданными своими координатами:*

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (\mathfrak{D})$$

З а м е ч а н и е. Три прямые, определенные попарно перпендикулярными векторами, называются ортогональными.

IV. Ориентация метрических пространств двух и трех измерений

a) Д в у м е р н о е п р о с т р а н с т в о. Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ — ортонормальный базис; другой базис

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} = \alpha'\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} \end{cases}$$

имеет ту же ориентацию, что и базис $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, или иную, в зависимости от знака выражения $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, не равного нулю по предположению (см. гл. III). Так как при тождественном преобразовании $\alpha = \beta' = 1$, $\beta = \alpha' = 0$, то ориентация сохраняется при

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' > 0.$$

Если дан единичный вектор $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и два перпендикулярных ему единичных вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = -\beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1 = +\beta\boldsymbol{i} - \alpha\boldsymbol{j},$$

то ортонормальный базис $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)$ имеет ту же ориентацию, что и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, а $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$ имеет противоположную ориентацию. Мы будем говорить, что вектор $\boldsymbol{v}_1$ *прямо перпендикулярен* (*directement perpendiculaire*) вектору $\boldsymbol{u}$ по отношению к $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.

Исследование, выполненное в главе III, показывает, что если $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ той же ориентации, что и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, то вектор $\boldsymbol{v}$ прямо перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{u}$ также и по отношению к $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$. (Это можно проверить вычислением.)

b) Т р е х м е р н о е п р о с т р а н с т в о. Пусть дан ортонормальный базис $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Чтобы написать условие ортогональности двух единичных векторов:

$$\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{v} = \alpha'\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \gamma'\boldsymbol{k} \ \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \end{cases}$$

мы напишем: $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|$. Мы получаем, таким образом, что $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$.

Выразим, что третий единичный вектор $\boldsymbol{w} = \alpha''\boldsymbol{i} + \beta''\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k}$ перпендикулярен к каждому из первых двух. Для этого к трем предыдущим равенствам присоединим

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0.$$

Отсюда получается *:

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{\gamma''}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\pm 1=\varepsilon\cdot 1.$$

Второй базис тождественен первому, если

$$\begin{cases} \alpha=1,\ \beta=\gamma=0; \\ \beta'=1,\ \alpha'=\gamma'=0; \\ \gamma''=1,\ \alpha''=\beta''=0. \end{cases}$$

Чтобы получить этот случай, нужно взять $\varepsilon=+1$, значит, новый ортонормальный базис будет той же ориентации, что и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, если взять

$$\alpha''=\beta\gamma'-\gamma\beta',\ \beta''=\gamma\alpha'-\alpha\gamma',\ \gamma''=\alpha\beta'-\beta\alpha'.$$

В следующем параграфе мы будем исследовать только что введенные важные выражения.

§ 2. Произведения векторов в трехмерном пространстве

В предыдущем параграфе для каждой пары единичных векторов, отнесенных к ортонормальному базису

$$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{v}=\alpha'\boldsymbol{i}+\beta'\boldsymbol{j}+\gamma'\boldsymbol{k},$$

выявилось, с одной стороны, число

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

приравнивание которого нулю выражает ортогональность векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, а с другой стороны, возник единичный вектор $\boldsymbol{w}$, перпендикулярный к плоскости, направление которой определено векторами $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, и такой, что базис $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ имеет ту же ориентацию, что и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Этот вектор определяется следующей формулой:

$$\boldsymbol{w}=(\beta\gamma'-\gamma\beta')\,\boldsymbol{i}+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\,\boldsymbol{j}+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\,\boldsymbol{k}.$$

В аналитической геометрии редко случается, чтобы заданные векторы были единичными. Рассмотрим поэтому два любых вектора, отнесенных к ортонормальному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

---

* Поясним расчеты.

Из двух последних уравнений находим:

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{\gamma''}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\varepsilon.$$

Рассматривая квадраты этих отношений, получаем:

$$\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=\varepsilon^2\{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2\}.$$

Левая часть равна $+1$. Выражение в фигурных скобках равно:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2,$$

то есть тоже равно $+1$. Таким образом, $\varepsilon^2=1$, $\varepsilon=\pm 1$.— *Прим. ред.*

$\boldsymbol{A}$, имеющий длину a, $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{u} = a(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k})$;

$\boldsymbol{B}$, имеющий длину b, $\boldsymbol{B} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = b\boldsymbol{v} = b(\alpha'\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \gamma'\boldsymbol{k})$.

Если даны числа x, y, z, x', y', z', то проекции векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ * вычисляются с помощью таких радикалов, как a и b, согласно некоторой форме теоремы Пифагора. Мы избегаем этих выражений, вводя относительное число $p = xx' + yy' + zz'$ и вектор $\boldsymbol{Q} = (yz' - zy')\boldsymbol{i} + (zx' - xz')\boldsymbol{j} + (xy' - yx')\boldsymbol{k}$.

Число p называется *скалярным произведением* двух векторов и обозначается $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Вектор $\boldsymbol{Q}$ называется *векторным произведением* векторов и обозначается: $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$;

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = ab(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = xx' + yy' + zz'. \tag{2}$$

В частности, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = a^2$.

I. Скалярное произведение

1) Из формулы (2) вытекает непосредственно, что скалярное произведение *коммутативно*. Следует отметить, что может ставиться вопрос лишь о скалярном произведении двух векторов, потому что это произведение является числом, так что речь не идет о внутренней операции. Таким образом, $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ — это произведение вектора $\boldsymbol{C}$ на число.

2) Из формулы (1) непосредственно усматривается свойство, связанное с умножением на действительное число m. Это свойство выражается равенством

$$(m\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = m(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}).$$

3) Скалярное умножение *дистрибутивно по отношению к сложению векторов*, что вытекает из выражения (2), имеющего билинейную форму, то есть линейную в отдельности относительно x, y, z и x', y', z', так что

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}_1) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}_2).$$

Отсюда вообще

$$(\Sigma \boldsymbol{A}_i) \cdot (\Sigma \boldsymbol{B}_j) = \Sigma (\boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{B}_j) \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{matrix}$$

4) *Скалярное произведение является внутренним* (intrinsèque), *то есть оно не зависит от выбора ортонормального базиса, если только единица длины фиксирована.* Можно доказать это существенное свойство, вычисляя выражения векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в новом базисе. Но более изящно и более интересно вывести этот результат из дистрибутивности по отношению к сложению и из свойства

* Друг на друга.— *Прим. перевод.*

которое нам служило точкой отправления: *Ортогональность двух векторов выражается равенством нулю их скалярного произведения.* Заметим сначала, что скалярное произведение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ не меняется, если заменить вектор $\boldsymbol{B}$ его ортогональной проекцией $\boldsymbol{B}_1$ на $\boldsymbol{A}$, так как это означает прибавить к вектору $\boldsymbol{B}$ вектор, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{A}$. Но $\boldsymbol{B}_1 = \frac{b_1}{a} A$, где b_1 есть алгебраическая мера вектора $\boldsymbol{B}_1$ по отношению к единичному вектору $\boldsymbol{u}$, который имеет то же направление, что $\boldsymbol{A}$.

Поэтому $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_1 = ab_1$.

Значит, *скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них на алгебраическую меру ортогональной проекции другого вектора на первый.*

Отсюда вытекает, что это произведение не зависит от положения и даже ориентации ортонормального базиса, если только единица длины не изменяется. Если же менять единицу длины и новую единицу получить умножением старой единицы длины на число λ, то это приводит к делению на λ чисел a и b_1, то есть к делению скалярного произведения на λ^2.

Следствие. *Знак скалярного произведения указывает на порядок* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}'$ или, наоборот, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}$ компланарных векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и вектора $\boldsymbol{A}'$, перпендикулярного к $\boldsymbol{A}$ с той стороны, где находится $\boldsymbol{B}$. Это положение мы выразим в третьем параграфе, где будут введены углы, следующим образом: угол $(\boldsymbol{AB})$ будет острым, прямым или тупым в зависимости от того, будет ли скалярное произведение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ положительным, нулевым или отрицательным.

Примеры приложений

В аналитической геометрии скалярное произведение используется постоянно:

1) Плоскость, например, может быть охарактеризована, как множество точек M, таких, что если $\boldsymbol{A}$ — заданная точка, а $\boldsymbol{v}$ — заданный вектор, то $\boldsymbol{AM}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{v}$. Это записывается так: $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{AM} = 0$.

2) Сфера, определенная своим центром 0 и точкой A, является геометрическим местом точек M, таких, что

$$\boldsymbol{OM}\cdot\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OA}, \text{ то есть } (\boldsymbol{OM}\cdot\boldsymbol{OM}) - (\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OA}) = 0,$$

что можно записать:

$$(\boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OA})(\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{OA}) = 0$$

согласно дистрибутивности и коммутативности. Поэтому если мы введем точку A', определенную равенством $\boldsymbol{OA}' = -\boldsymbol{OA}$, то определение запишется $\boldsymbol{AM}\cdot\boldsymbol{A'M} = 0$, откуда теорема:

Каждая сфера является геометрическим местом точек M, таких, что если A и A' — две диаметрально противоположные точки на этой сфере, то AM и $A'M$ взаимно перпендикулярны.

3) Дистрибутивность и коммутативность показывают немедленно, что для любой совокупности четырех точек A, B, C, D имеем:

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}+\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{DB}+\boldsymbol{AD}\cdot\boldsymbol{BC}=0$$

(ввести векторы с началом в A).

В частности, если два из этих скалярных произведения обращаются в нуль, то и третье обращается также в нуль, откуда теорема:

На плоскости три высоты треугольника пересекаются в одной точке (роль точек A, B, C, D играют вершины треугольника и точка пересечения двух высот. Они образуют то, что называется *ортоцентрическим четырехугольником*).

Если в двух парах противоположных ребер тетраэдра ребра ортогональны, то и в третьей паре они тоже ортогональны. Тетраэдр в этом случае называется тетраэдром с ортогональными противоположными ребрами.

Мы видим, что вычисления со скалярными произведениями аналогичны вычислениям с относительными числами, являющимися мерами векторов в одномерной геометрии: но интерпретация зависит от числа измерений пространства, в котором оперируют.

В физике, когда один из векторов геометрический (изображает прямолинейный путь), а другой — представляет силу, скалярное произведение измеряет *работу*, откуда вытекают многочисленные приложения.

II. Векторное произведение (3-мерная геометрия)

Пусть мы имеем снова два вектора:

$$\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=a\boldsymbol{u}=a(\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k});$$
$$\boldsymbol{B}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}=b\boldsymbol{v}=b(\alpha'\boldsymbol{i}+\beta'\boldsymbol{j}+\gamma'\boldsymbol{k})$$

и их векторное произведение

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=(yz'-zy')\,\boldsymbol{i}+(zx'-xz')\,\boldsymbol{j}+(xy'-yx')\,\boldsymbol{k}=$$
$$=ab\boldsymbol{w}=ab\,[(\beta\gamma'-\gamma\beta')\,\boldsymbol{i}+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\,\boldsymbol{j}+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\,\boldsymbol{k}].$$

В частности, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{A}=0$.

1) *Векторное произведение некоммутативно*

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\equiv-(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}).$$

Иногда говорят, что векторное произведение *антисимметрично* (антикоммутативно).

В частности,

$$\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

Для того чтобы получить векторное произведение, кроме выбора единицы длины, необходимо еще уточнить ориентацию базиса, как это следует из определения.

2) Каково бы ни было действительное число m, немедленно проверяется, что

$$(mA \wedge B) = m(A \wedge B).$$

3) *Векторное произведение дистрибутивно по отношению к сложению векторов.* Это вытекает из линейности мер всех трех компонент векторного произведения как относительно x, y, z, так и относительно x', y', z'.

Таким образом,

$$A \wedge (B_1 + B_2) = (A \wedge B_1) + (A \wedge B_2),$$

откуда

$$(\Sigma A_i) \wedge (\Sigma B_j) = \Sigma (A_i \wedge B_j).$$

Но в вычислениях нужно учитывать некоммутативность. Например,

$$(A - B) \wedge (A + B) = 2(A \wedge B);$$

$$(A + B) \wedge (A - B) = -2(A \wedge B).$$

Таким образом, вычисления здесь выглядят иначе, чем те, которые мы исследовали до сих пор.

4) *Векторное произведение не зависит от базиса, если только сохранять единицу и ориентацию пространства.*

Используем метод, аналогичный тому, который был использован при рассмотрении скалярного произведения. В силу дистрибутивности по отношению к сложению векторов и так как векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю, мы можем *заменить в векторном произведении $A \wedge B$ один из векторов, например B, через ортогональную проекцию этого вектора на плоскость, перпендикулярную другому.*

Пусть векторы A и B неколлинеарны и пусть u — единичный вектор направления A, а u' — единичный вектор, компланарный векторам A и B * и такой, что векторы $A \wedge u'$ и $A \wedge B$ имеют одинаковое направление. Мы имеем: $A = au$ и $B = b_1 u + b_2 u'$, где b_2 — положительно.

Отсюда получается $A \wedge B = ab_2 (u \wedge B') = ab_2 w$, где $w = u \wedge u'$. Это выражение показывает ясно, что векторное произведение определено независимо от базиса, если единица длины и ориентация пространства выбраны.

Далее, полагая $A' = au'$ и учитывая, что $u \cdot u' = 0$ (см. внизу примечание перевод.), получаем: $A' \cdot B = ab_2$. Отсюда важная формула

$$A \wedge B = (A' \cdot B)\, w.$$

5) Поскольку при выбранных единице длины и ориентации пространства векторное произведение двух сомножителей является

* u' — ортогональный к u.— *Прим. перевод.*

вектором, то можно рассматривать произведение 3, 4, . . ., n векторов. Например,

$$(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}) \wedge \boldsymbol{j} \equiv \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j} \equiv -\boldsymbol{i}.$$

Но *векторное произведение нескольких векторов неассоциативно*. Это хорошо видно хотя бы из приведенного примера, ибо

$$\boldsymbol{i} \wedge (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j}) \equiv \boldsymbol{i} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Можно также рассматривать *смешанные произведения*, в которых одна из операций — скалярное умножение, а другая — векторное.

Таким образом,

$$(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \ \boldsymbol{i} \cdot (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1;$$

$$(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0.$$

Но такое выражение, как $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{C}$, не имеет никакого смысла, потому что в скобках стоит число.

Примеры приложений. Векторное произведение не является обычным вектором, ибо если векторы-множители заданы, то этого еще недостаточно. А именно необходимо еще задать единицу длины и ориентацию. Такого рода объект называют иногда *полярным вектором*. Он вводится в физике под названием *вектор-момент* (например, силы). В геометрии этот вектор служит, чтобы охарактеризовать своим направлением направление и ориентацию плоскости и чтобы своей мерой определять площади плоских фигур. Векторное произведение определяет третий вектор ортонормального базиса, два первых вектора которого заданы.

Пусть задана прямая D, определенная точкой A и направляющим вектором $\boldsymbol{u}$. Тогда касательная в точке M к окружности, полученной вращением точки M вокруг оси D, имеет направление вектора

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{AM}.$$

Если M описывает окружность с угловой скоростью ω, то откладывают на D в подходящем направлении вектор Ω меры ω, и тогда скорость точки M есть

$$\boldsymbol{v} = \Omega \wedge \boldsymbol{AM}.$$

Это основная формула при изучении движения твердого тела.

III. Тригонометрические обозначения

В противоположность аналитической геометрии, которая использует систему координат, традиционная, так называемая синтетическая геометрия вводит с самого начала не только длины, но и углы. Исторически это объясняется прежде всего наглядностью, а затем уже в научной стадии нуждами астрономии и геодезии, где измерение углов является основным.

С принятой нами точки зрения метрического векторного пространства скалярные и векторные произведения естественным образом связываются с парами векторов или с парами направлений, определенных их направляющими векторами, и прежде чем введем в следующем параграфе понятие угла, распространим определения косинуса и синуса, введенные ранее (в § 1, п. II, *в*) для единичных векторов, на пары любых векторов.

Пусть даны два вектора $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{B} = b\boldsymbol{v}$, где a и b положительны, а $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ единичны. Мы полагаем по определению $\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ и $\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Вводя единичный вектор $\boldsymbol{u}'$, перпендикулярный к $\boldsymbol{u}$ и компланарный с $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, и полагая $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}'$, мы имели по определению $\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha$, $\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta$. Следовательно,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = ab\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

$$|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}| = |\sin(u, v)|,\ |\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}| = ab\,|\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})|$$

и, поскольку

$$[\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})]^2 + [\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})]^2 = 1,$$

получаем:

$$[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}]^2 + [|\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}|]^2 = a^2b^2.$$

Приложения

1) *Основная формула для треугольников*

Возведем в скалярный квадрат оба члена векторного равенства $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC} - \boldsymbol{AB}$. Получаем:

$$\boldsymbol{BC}^2 = \boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{AB}^2 - 2(\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{AB}) =$$
$$= \boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{AB}^2 - 2AC\cdot AB\cdot\cos(\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AB}).$$

2) *Основная формула для трехгранников*

Пусть $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ — единичные векторы, направленные по трем ребрам трехгранника, а $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$ — единичные векторы, перпендикулярные к $\boldsymbol{u}$ соответственно в плоскостях $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$. Выполним почленно скалярное умножение равенств $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}'$ и $\boldsymbol{w} = \alpha'\boldsymbol{u} + \beta'\boldsymbol{u}''$. Получаем, так как

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'' = 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \alpha\alpha' + \beta\beta'(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{u}''),$$

то есть

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\cdot\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\cdot\cos(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'').$$

Обозначим, как обычно, через a, b, c плоские углы граней, а через A — двугранный угол с ребром $\boldsymbol{u}$ *:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

* Его ребро противоположно грани с плоским углом a.— *Прим. перевод.*

§ 3. Углы

Мы возвращаемся k § 1 и вводим углы независимо от § 2, где мы изучали произведения векторов.

I. Косинус и синус упорядоченной пары единичных векторов

Будем рассматривать векторы, компланарные ортонормальному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Пусть дан вектор $\boldsymbol{u}$ и прямо перпендикулярный ему вектор $\boldsymbol{v}$, определенные равенствами:

$$\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{v} = -\beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j}, \tag{1}$$

где

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Пусть $\boldsymbol{w}$ — какой-либо единичный вектор, компланарный с предыдущими. Напомним формулу преобразования базиса:

$$\boldsymbol{w} \equiv a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \equiv (\alpha a - \beta b)\,\boldsymbol{i} + (\beta a + \alpha b)\,\boldsymbol{j}, \tag{2}$$

$$a^2 + b^2 = 1.$$

По определению, мы полагаем (как и ранее)

$$\begin{cases} a = \operatorname{cosinus}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}); \\ b = \operatorname{sinus}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \end{cases}$$

или короче

$$\begin{cases} a = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}); \\ b = \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}). \end{cases}$$

В частности,

$$\begin{cases} \alpha = \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) \\ \beta = \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha a - \beta b = \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}); \\ \beta a + \alpha b = \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}). \end{cases}$$

Фундаментальная система. Формула преобразования базиса дает:

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}) = \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) - \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}),$$

$$\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}) = \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}).$$

$\forall\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ компланарных, единичных.

Косинус и синус упорядоченной пары единичных векторов вполне определены, если плоскость ориентирована. Если ориентация меняется, то косинус не меняется, а синус принимает противоположное значение ($\boldsymbol{j}$ меняется на $-\boldsymbol{j}$).

Непосредственные следствия

1) Из (1) получается:

$$\boldsymbol{i} = \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{j} = \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v},$$

откуда

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}) = \cos(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{v}) = \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}) = \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{j});$$
$$\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) = -\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}) = \sin(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{v}) = -\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}) = \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{j}).$$

В частности,

$$\begin{cases} \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 1; \\ \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}) = -1; \\ \sin(\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}) = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 0; \\ \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{j}) = -1; \\ \sin(\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{j}) = 0. \end{cases}$$

2) Если выбраны два произвольных числа a и b, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 = 1$, то каждому единичному вектору соответствует в ориентированной плоскости определенный единичный вектор $\boldsymbol{w}$, такой, что $\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = a$, $\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = b$, и, обратно, каждой паре $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ единичных векторов, заданных в указанном порядке, соответствует пара чисел (a, b), удовлетворяющих равенству $a^2 + b^2 = 1$.

Определение. Мы будем говорить, что пары $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1)$, которые соответствуют одной и той же паре чисел a, b, *конгруэнтны*. Это, очевидно, определяет отношение эквивалентности между парами единичных векторов. Мы сейчас распространим это отношение на пары любых векторов.

II. Конгруэнтность пар векторов. Углы

а) Мы называем *направляющим единичным вектором вектора* $\boldsymbol{V}$ единичный вектор $\boldsymbol{v}$, такой, что $\boldsymbol{V} = k\boldsymbol{v}$, где k — положительное число, то есть $k = |\boldsymbol{V}|$.

Мы говорим, что пара $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ любых векторов конгруэнтна другой паре $(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2')$, если их пары направляющих единичных векторов $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ и $(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')$ конгруэнтны. Мы будем писать:

$$(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) \equiv (\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2').$$

В частности, все пары, состоящие из двух коллинеарных векторов, конгруэнтны между собой. Все те пары, в которых второй вектор прямо перпендикулярен к первому, конгруэнтны между собой.

Каждый класс эквивалентности характеризуется парой чисел a и b, являющихся соответственно косинусом и синусом пар единичных векторов этого класса. Эти числа будут называться косинусом и синусом каждой пары этого класса.

Каждый класс эквивалентности называется *углом упорядоченной пары векторов*. Угол пар, конгруэнтных паре $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$, называется *нулевым углом*, а угол пар, конгруэнтных паре $(\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i})$, называется *развернутым углом*.

b) **Сложение углов.** Мы определим сейчас во множестве этих классов эквивалентности внутреннюю операцию, которую назовем сложением.

Пусть мы имеем класс, представленный парой $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$, и другой, представленный парой $(\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2')$. Выберем некоторый единичный вектор, например $\boldsymbol{i}$, и определим два вектора также единичных, подчинив их требованиям

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}) \equiv (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) \text{ и } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2').$$

Фундаментальная система (1) показывает, что пара $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w})$ вполне определена с точностью до эквивалентности, каков бы ни был вектор $\boldsymbol{i}$. Эта пара определяет класс эквивалентности, называемый *класс-сумма* данных классов, и мы будем писать:

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}) \equiv (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) + (\boldsymbol{V}_1', \boldsymbol{V}_2').$$

В частности, $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}) \equiv (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ (*формула Шаля*). Поэтому если мы обозначим через C и C' классы слагаемые, то система (1) запишется так:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(C+C') = \cos C \cos C' - \sin C \cdot \sin C'; \\ \sin(C+C') = \sin C \cos C' + \cos C \sin C'. \end{array}\right. \tag{1'}$$

Свойства сложения

1) Существует *нейтральный элемент*: это класс, который мы назвали нулевым углом. Каждому углу соответствует *противоположный* ему угол, потому что $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})$.

Единственность противоположного класса вытекает из (1') и из соотношений

$$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 = 1, \quad (\cos C')^2 + (\sin C')^2 = 1,$$

так как

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(C+C') = 1 \\ \sin(C+C') = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos C = \cos C' \\ \sin C = -\sin C'. \end{array}\right.$$

Операция сложения углов удовлетворяет аксиомам $[A]$ первой главы.

$[A_1]$ вытекает из определения, $[A_4]$ (коммутативность) вытекает из формул (1);

$[A_3]$ получается немедленно из формулы Шаля

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \equiv (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \equiv$$
$$\equiv (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \equiv (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{w}).$$

$[A_2]$ выводится из предыдущих свойств и из существования противоположного элемента. На основании этих свойств вводится *вычитание* — действие, обратное сложению.

2) Однако установить взаимно однозначное соответствие между множеством этих классов и множеством положительных и отрицательных чисел невозможно из-за следующего свойства.

Развернутый угол противоположен самому себе. В самом деле,

$$(\boldsymbol{i},\ -\boldsymbol{i})+(-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i})=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}).$$

c) **Мера углов.** Мы желаем сопоставить классам, которые мы назвали углами, положительные, отрицательные или нулевые числа таким образом, чтобы сумме двух классов соответствовала сумма соответствующих им чисел. Мы сейчас это осуществим с помощью следующей леммы:

1) Биссектриса пары векторов. Пусть $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ — данные векторы. Существует и притом единственное направление (то есть существует единичный вектор $\boldsymbol{w}$ и противоположный ему вектор $-\boldsymbol{w}$), которое образует с данными векторами противоположные углы

$$(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{V}_1)\equiv-(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{V}_2),$$

то есть, согласно соотношению Шаля, $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2)$.

Если единичный вектор $\boldsymbol{i}$ есть направляющий для $\boldsymbol{V}_1$, а $\boldsymbol{j}$ перпендикулярен ему, то

$$\boldsymbol{V}_2=|\boldsymbol{V}_2|(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}),\quad \boldsymbol{w}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

и найденное для $\boldsymbol{w}$ условие дает:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a; \\ 2xy=b, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} a^2+b^2=1; \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x^2=a+1; \\ 2xy=b, \end{cases}$$

что определяет два противоположных вектора. Мы можем выделить один из этих векторов, скажем $\boldsymbol{w}$, так, чтобы x был положительным. Тогда y, если он отличен от нуля, имеет знак b.

Если угол $(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2)=0$, то вектор $\boldsymbol{w}$ совпадает с $\boldsymbol{i}$. Мы назовем $\boldsymbol{w}$ *главным биссекторным вектором пары* $(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2)$.

2) Можем ли мы сопоставить число каждому углу так, чтобы противоположные числа соответствовали противоположным углам и сумма чисел соответствовала сумме углов? Мы должны придать значение O нулевому углу, то есть нейтральному относительно сложения углов элементу. Обозначим через p число, соответствующее развернутому углу; тогда число $-p$ будет также соответствовать этому углу. Но тогда $2p$ также должно соответствовать нулевому углу, так что если число θ соответствует некоторому углу, то число $\theta+2kp$, где k — целое положительное или отрицательное число, также должно соответствовать этому же углу. Таким образом, *мера углов, если она может быть установлена, определится лишь с точностью до* $2p$.

Мы возьмем p положительным и придадим значение $+p/2$ углу $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$, когда $\boldsymbol{j}$ прямо перпендикулярен вектору $\boldsymbol{i}$ в ориентированной плоскости.

3) Согласно формуле Шаля, достаточно рассмотреть единичные векторы $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, у которых a и b — положительны, и сопоставить соответствующим парам $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})$ числа, заключенные между 0 и $p/2$.

Поэтому мы разделим прямой угол $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ пополам с помощью главного биссекторного вектора, потом каждый из полученных углов снова разделим пополам и т. д., сопоставляя на каждом этапе полученным конгруэнтным углам числа

$$\frac{p}{2}, \quad \frac{p}{2^2}, \quad \frac{p}{2^3}, \ \ldots$$

Каждому заданному углу $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})$ сопоставляется таким образом точное или приближенное значение вида

$$\frac{p}{2}\left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ldots + \frac{n_q}{2^q}\right),$$

где числители $n_1, n_2, \ldots, n_q$ равны 0 или 1, и, обратно, каждому числу этого типа соответствует угол $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u})$. Если взять натуральное q достаточно большим, то скобка представляет собой приближенное значение любого числа, заключенного между 0 и 1 с любой желаемой точностью: речь идет, очевидно, о числе, написанном в двоичной системе счисления, у которого целая часть равна нулю, а число цифр, правее запятой, равно q.

Таким образом, после перехода к пределу ($q \to \infty$) *мы сопоставляем каждому рассмотренному углу некоторое число* θ, *заключенное между* 0 *и* $p/2$, *и обратно.* Мы будем писать:

$$\theta = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}).$$

Для любого угла значение его меры, заключенное между $-p$ и p, называется *главным значением*. Другие значения получатся из главного путем прибавления какого-либо кратного $2p$ числа. Равенства, касающиеся углов, пишутся с точностью до кратного $2p$. В действительности это *сравнения по модулю* $2p$ (см. кн. II, гл. I, § 2).

§ 4. Пределы, связанные с тригонометрическими функциями. Радиан. Вычисление числа π

I. Углы и хорды

Пусть в окружности единичного радиуса дан ортонормальный базис

$$\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{j}$$

и

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) = \varphi, \quad \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}.$$

откуда

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{i} = (a-1)\,\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}; \\
a^2 + b^2 = 1; \\
c^2 = (a-1)^2 + b^2 = 2\,(1-a)^{*}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Рассмотрим теперь половинный угол

$$\frac{\varphi}{2} = (\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{OD} = \boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

$\boldsymbol{v}$ определено равенствами (см. § 3, II, c):

$$\begin{cases} 2x^2 = a + 1; \\ 2xy = b, \end{cases}$$

откуда

$$x^2 = 1 - \frac{c^2}{4};$$

$$AD^2 = c'^2 = 2\,(1-x) = 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{4}}\right) = 2\,\frac{1-x^2}{1+x} = \frac{c^2}{2\,(1+x)} < \frac{c^2}{2}.$$

Значит, хорда c', соответствующая половинному центральному углу, удовлетворяет неравенству $c' < c/\sqrt{2}$. Но углу $p/2$ отвечает хорда с длиной $\sqrt{2}$, значит, углу, измеряемому числом $(p/2)\,(1/2^q)$, будет отвечать хорда длины, меньшей чем $(1/\sqrt{2})^{q-1}$. Таким образом, *когда угол стремится к нулю, то хорда окружности единичного радиуса также стремится к нулю.*

При этом, так как согласно теореме Пифагора

$$(1-a)^2 + b^2 = c^2,$$

числа $1 - a = 1 - \cos\varphi$ и $b = \sin\varphi$ также стремятся к нулю, так что *функции* $\cos\varphi$ *и* $\sin\varphi$ *непрерывны в окрестности значения* $\varphi = 0$.

Формулы

$$\cos(\theta_0 + \varphi) = \cos\theta_0 \cos\varphi - \sin\theta_0 \sin\varphi;$$

$$\sin(\theta_0 + \varphi) = \sin\theta_0 \cos\varphi + \cos\theta_0 \sin\varphi,$$

в которых мы положим $\varphi \to 0$, доказывают *непрерывность функций* $\cos\theta$ и $\sin\theta$ *для всех значений* θ. Чтобы получить *производную* от функций косинус и синус по отношению к углу, мы разделим на φ приращения:

$$\cos(\theta_0 + \varphi) - \cos\theta_0 = \frac{\cos\theta_0}{1+\cos\varphi}\,(-\sin^2\varphi) - \sin\theta_0 \sin\varphi;$$

$$\sin(\theta_0 + \varphi) - \sin\theta_0 = \frac{\sin\theta_0}{1+\cos\varphi}\,(-\sin^2\varphi) + \cos\theta_0 \sin\varphi.$$

---

* $c^2 = |\,\boldsymbol{AC}\,|^2$.

Когда φ стремится к нулю, то $\cos\varphi$ стремится к 1, а $\sin\varphi$ стремится к 0; вопрос сводится, следовательно, к нахождению предела $(\sin\varphi)/\varphi$. (Мы здесь используем теоремы о пределах, которые будут доказаны в кн. III). Но в единичном круге длина c хорды, соответствующей углу φ, такому, что $\cos\varphi = a$ и $\sin\varphi = b$, удовлетворяет согласно (*I*) равенству

$$c^2 = 2(1-a) = 2\frac{b^2}{1+a},$$

откуда $\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{2}{1+a}}$. Но когда φ стремится к 0, то $a \to 1$. Итак, получаем:

В окружности единичного радиуса отношение хорды, соответствующей углу, который стремится к нулю, к синусу этого же угла, стремится к 1.

Следовательно, предел отношения $(\sin\varphi)/\varphi = b/\varphi$ тот же, что и предел отношения c/φ.

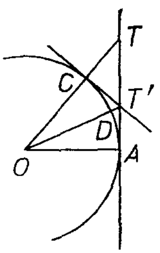
Но это последнее отношение и его предел, если он существует, очевидно, зависят от выбранного числа p, которое соответствует развернутому углу, а не от единицы длины, потому что мера хорды c не связана с ней.

Мы сейчас покажем, что этот предел существует и отличен от нуля. *Тогда можно будет выбрать число p так, чтобы этот предел равнялся 1.*

При этом выборе числа p производная $\cos\theta$ *равняется* $-\sin\theta$, *а производная* $\sin\theta$ *равняется* $+\cos\theta$.

II. Предел отношения длины хорды единичного круга к мере φ центрального угла

Мы должны вернуться к формуле (II) $c'^2 = 2\left(1 - \sqrt{1-\frac{c^2}{4}}\right)$ и исследовать соответствие, которое она устанавливает между последовательными углами, каждый из которых половина предыдущего и соответствующими хордами.



Черт. 14

Дополним фигуру, образованную тремя радиусами OA, OC, OD, которые определяют углы $(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OC}) = \varphi$ и $(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OD}) = \varphi/2$, проведением касательных с окружности в точках A и C. Они пересекутся в точке T' на продолжении радиуса OD. Мы уже положили $AC = c$, $AD = c'$. Положим $AT = t$, $AT' = t'$. Сравнение наклонных дает

$$\frac{c}{2} < c' < t' < \frac{t}{2},$$

значит, продолжая деление углов пополам, будем иметь:

$$c < 2c' < 2^2c'' < \ldots < 2^nc^{(n)} < \ldots < 2^nt^{(n)} < \ldots < 2^2t'' < 2t' < t.$$

Разделим все члены на $\varphi = 2^n\varphi^{(n)}$*

$$\frac{c}{\varphi} < \frac{c'}{\varphi'} < \ldots < \frac{c^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t'}{\varphi'} < \frac{t}{\varphi}.$$

Значит, $c^{(n)}/\varphi^{(n)}$ имеет предел λ, когда n стремится к бесконечности (гл. II, § 3).

От чего зависит λ? Очевидно, от числа p, выбранного в качестве меры развернутого угла.

λ не зависит от единицы длины, потому что мы рассматриваем единичную окружность. Наконец, λ не зависит от исходного угла φ, так как c, являясь непрерывной функцией от $\cos\varphi$, будет также непрерывной функцией аргумента φ, поэтому предел λ, который является не чем иным, как производной c по φ, при $\varphi = 0$, не может иметь несколько значений.

Таким образом, отношение λ/p есть абсолютная постоянная, то есть некоторое определенное число в метрической геометрии. Эту постоянную обозначают $1/\pi$, так что π *есть мера, которую нужно поставить в соответствие развернутому углу для того, чтобы предел* λ *отношения длины хорды единичной окружности к центральному углу равнялся 1, когда центральный угол стремится к* 0.

Единица измерения углов, определенная таким образом, называется *радианом.* Согласно 2) *если угол* θ *выражен в радианах*, то $\cos\theta$ и $\sin\theta$ *имеют соответственно производные* $-\sin\theta$ и $+\cos\theta$.

III. Приближенное вычисление числа π

Используем формулы (II). Мы получим значения $c^{(n)}/\varphi^{(n)}$, значит, приближенные значения по недостатку числа π.

Начало вычислений от $\varphi = \frac{\pi}{3}$		Приближенные значения числа π
$\varphi = \frac{\pi}{3}$	$c = 1$	3
$\varphi' = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$c' = \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$3\cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$\varphi'' = \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{2^2}$	$c'' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$3\cdot 2^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
$\varphi''' = \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{2^3}$	$c''' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$3\cdot 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

Закономерность ясна.

---

* Таким образом введено обозначение $\varphi^{(n)} = \frac{\varphi}{2^n}$. — *Прим. ред.*

Начало вычислений от $\varphi=\frac{\pi}{2}$		Приближенные значения числа π
$\varphi=\frac{\pi}{2}$	$c=\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
$\varphi'=\frac{\pi}{2^2}$	$c'=\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\varphi''=\frac{\pi}{2^3}$	$c''=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\varphi'''=\frac{\pi}{2^4}$	$c'''=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Таким образом, получаем:

$$\pi=\lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

(всего n радикалов).

Другое вычисление π

Используем тригонометрические формулы для преобразования выражения

$$c^{(n)}=2\sin(\varphi/2^n),$$

прежде чем делить на $\varphi^{(n)}=\varphi/2^n$.

$$\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=2^2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}=$$

$$=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2^n}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}}}}$$

(n радикалов)

Следовательно,

$$\frac{\varphi^{(n)}}{c^{(n)}}=\frac{\varphi}{2\cdot 2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}=\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ \ldots\ \cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

Если принять $\varphi=\pi/2$, то $\cos\varphi=0$, откуда получаем:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\ldots}\right.$$

$$\left.\ldots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}\right],$$

где имеются n множителей и k-й множитель содержит k радикалов. [Формула Виета (1540—1603) по А. Лебегу.]

Полученные формулы малоудобны для приближенного вычисления π. Не исследуя дальше этот вопрос, отметим лишь замечательную формулу Уоллиса (1616—1703):

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)},$$

а также формулу его друга Броункера (1620—1684):

$$\frac{4}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\dots\cfrac{(2n+1)^2}{2}}}}\right].$$

Следует отметить разнообразие вышеприведенных выражений.

Известно, что современные счетные машины позволили получить десять тысяч первых десятичных знаков числа $\pi\simeq 3,1415926\ldots$, которое является не только иррациональным (Ламберт, 1761), но и неалгебраическим (Линдеман, 1882). Следовательно, это *трансцендентное* число.

Шестая глава

БУЛЕВА АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ. МЕРЫ. ВЕРОЯТНОСТЬ

Сначала мы вернемся к уже изученным ранее операциям над множествами и сделаем некоторые дополнения; затем мы введем некоторые меры, которые можно поставить в соответствие множествам.

§ 1. Алгебра множеств

Рассмотрим некоторое множество E, которое будем называть *основным*, и его подмножества $A, B, \ldots$. Мы уже определили *отношение включения*

$$A\subseteq B\Leftrightarrow[\forall a,\ a\in A\Rightarrow a\in B].$$

Включение строгое $A\subset B$, если существуют элементы, принадлежащие множеству B, но не принадлежащие множеству A. Множество этих элементов часто обозначают $B-A$.

Во множестве $\mathcal{P}$ подмножеств множества E введены три внутренние операции:

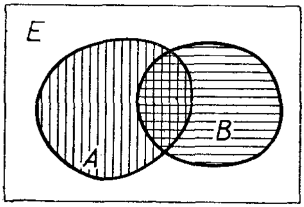
а) *Пересечение* $A\cap B$ — это множество всех элементов, принадлежащих одновременно множеству A и множеству B.

б) *Объединение* $A\cup B$ — это множество элементов, которые принадлежат множеству A, или множеству B, или обоим (не исключающее «или»).

c) *Дополнение* $\complement_A$ — это множество элементов основного множества, не принадлежащих множеству A. Это множество обозначают часто и через A'. Можно также определить дополнение множества A по отношению к подмножеству B, в которое A включено ($A \subset B$), как множество тех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A. Такое дополнение обозначают через $\complement_B A$, но это не есть новая операция, так как $\complement_B A = A' \cap B$.

Чтобы операция пересечения была всегда возможной, необходимо ввести пустое множество $\varnothing$, как принадлежащее множеству $\mathcal{P}$.

Заметим, что, переходя от элемента к подмножеству или к основному множеству E, а затем к множеству подмножеств $\mathcal{P}$, мы поднимаемся по лестнице типов (на что указывает знак принадлежности $\in$). Наоборот, отношение $\subset$ и операции $\cap$ и $\cup$ сохраняют тип.



Черт. 15

Свойства операций. Простые примеры (множества предметов, точек) приводят нас к свойствам, представляющим аксиомы теории. Эти свойства *видны* на схеме, называемой *диаграммой Эйлера*. Каждое подмножество изображено множеством точек, внутренних по отношению к простой плоской замкнутой линии (то есть линии без кратных точек); множество A изображено внутренней по отношению к линии областью, а $\complement_A$ — внешней. $A \cap B$ — это часть, заполненная квадратиками, а $A \cup B$ — это то, что попало под штриховку. Легко усмотреть области, изображающие

$$(A \cup B)', \quad \complement_A (A \cap B), \quad \complement_B (A \cap B).$$

Перечислим свойства, принимаемые за аксиомы.

(1) и (1′) Идемпотентность
(2) и (2′) Коммутативность
(3) и (3′) Ассоциативность

Пересечение

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Объединение

(1′) $A \cup A = A$

(2′) $A \cup B = B \cup A$

(3′) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(4) и (4′) Двойная дистрибутивность

$$(4) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$(4') \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(В этих формулах знак = означает, что подмножества, фигурирующие по обе стороны этого знака, содержат одни и те же элементы.)

Мы умеем (гл. 1) выводить из этих формул коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность для любого данного числа членов. Но обе операции: объединение и пересечение — ничем не отличались до сих пор в аксиомах друг от друга; отличие появляется, когда вводят в следующих аксиомах основное множество E и пустое множество $\varnothing$:

$$(5) \qquad A \cup E = E$$

и

$$(6) \qquad A \cap \varnothing = \varnothing,$$

а определение дополнения задают равенствами

$$(7) \qquad A \cup A' = E;$$

$$(8) \qquad A \cap A' = \varnothing.$$

A и B называются *раздельными* (дизъюнктивными), если $A \cap B = \varnothing$.

Теория, которая развивается с помощью этих аксиом, называется *булевой алгеброй множеств*. Но нельзя ли доказать эти равенства? Исследуем, например, (4): первый член состоит из элементов множества E, которые принадлежат множеству A, или множеству B, или множеству C, или обоим. Но, очевидно, это те же самые элементы, которые принадлежат или множествам A и B, или множествам A и C, причем это «или» не является исключающим. Это доказательство предполагает формализованным употребление слов «и», «или». Добавляя сюда отрицание, необходимое для введения дополнений, мы получаем аристотелеву логику, так что написанные равенства являются ни чем иным, как формализацией аристотелевой логики. Отсюда возникает возможность логического исчисления, доступного, например, счетным машинам.

Следствие. Естественно, что простейшие следствия столь же интуитивно очевидны, как и сами аксиомы; мы сейчас проведем несколько доказательств, чтобы дать почувствовать, что приведенная система аксиом достаточна для нужд теории.

Общий способ доказательства равенства

$A = B$ равносильно соединению двух утверждений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Поэтому равенство характеризуется одной из следующих систем:

$$\text{I)} \quad \begin{cases} A \cup B = A, \\ A \cap B = A, \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{II)} \quad \begin{cases} A' \cup B = E, \\ A' \cap B = \varnothing, \end{cases}$$

или, например

$$\begin{cases} A \cup B = A, \\ A' \cup B = E \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

Основные равенства

1) Равенство (5) равносильно равенству $A \cap E = A$ и (6) равносильно равенству $A \cup \varnothing = A$; это лишь перевод включений $\varnothing \subseteq A \subseteq E$.

2) Симметрия отношения дополнения

$$(A')' = A.$$

Действительно, положим $B = (A')'$ и используем (7) и (8):

$$A' \cup B = E \quad \text{и} \quad A' \cap B = \varnothing,$$

тогда, согласно II), $A = B$.

3) Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

Действительно, первое из этих равенств вытекает из (4) и (1):

$$A \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Пусть теперь D — подмножество, представленное каждым из этих членов; остается показать, что $D = A$, то есть, прибегая к системе I), что $A \cup D = D$ и $A \cap D = D$. Но эти соотношения очевидны из первой, соответственно второй записи D в силу идемпотентности.

4) Закон дополнения

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{и} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Докажем, например, первое из этих равенств. Полагая $A \cup B = R$, мы должны доказать, что $R' = A' \cap B'$. Используем систему II), поскольку речь идет о дополнениях. Мы должны проверить, что

$$R \cup (A' \cap B') = E \quad \text{и} \quad R \cap (A' \cap B') = \varnothing;$$

но достаточно развернуть левые части:

$$R \cup (A' \cup B') = (R \cup A') \cap (R \cup B') =$$
$$= (A \cup A' \cup B) \cap (A \cup B \cup B') = E \cap E = E;$$
$$R \cap (A' \cap B') = (A \cup B) \cap (A' \cap B') =$$
$$= (A \cap A' \cap B') \cup (A' \cap B \cap B') = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Таким образом, дополнение некоторого булевого выражения получается путем замены каждого подмножества его дополнением и взаимной замены знаков $\cup$ и $\cap$.

5) К а н о н и ч е с к а я ф о р м а. Существование единой канонической формы для всех булевых выражений имеет теоретическое значение, потому что позволяет распознать равенство двух булевых выражений путем отождествления, аналогично тому, как это делается для многочленов.

a) Любое выражение из n букв A, B, ..., L (которые могут входить и через дополнения A', B', ..., L') может быть написано в форме объединения пересечений, причем каждое пересечение содержит все n букв, со штрихами или без штрихов; единственное исключение имеет место для пустого множества $\varnothing$.

Так, для трех букв речь идет об объединении членов вида $A \cap B \cap C$, $A \cap B' \cap C$, $A \cap B' \cap C'$ и т. д. (восемь возможных выражений). Докажем, что любое выражение можно записать в такой форме: сначала следует избавиться от всех штрихованных скобок с помощью формул дополнений. Потом с помощью формулы (4) избавляются от скобок, заключающих объединения. Тогда остаются лишь скобки, заключающие пересечения, которые мы назовем членами объединения, выражение стало, таким образом, *многочленом Буля*. Остается дополнить члены, которые не содержат всех букв: так, если член обозначен T и если буква, которую следует ввести, есть K, то мы используем формулу $T = (T \cap K) \cup (T \cap K')$. Выражение T приведено теперь к канонической форме.

П р и м е р. Проверить, что

$$[(A \cup B) \cap (A' \cup C)] \cup (A \cup B')' =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C').$$

b) Остается доказать, что равные выражения соответствуют одной и той же канонической форме. Для краткости дадим интуитивное доказательство с помощью диаграммы Эйлера: подмножества A, B, ..., L и их дополнения определяют на множестве E разбиение, причем каждая из полученных раздельных областей является в точности изображением одного из членов канонических форм, полученных с помощью этих букв. Два равных выражения изображаются одной и той же областью, составляющие которой представляют члены канонической формы.

П р и м е р п р и л о ж е н и я. Доказать

$$A \cap B \subseteq (A \cap P) \cup (B \cap P'), \quad \forall P.$$

Мы знаем, что это эквивалентно выражению

$$(A \cap B) \cap [(A \cap P) \cup (B \cap P')] = A \cap B.$$

Но обе части равенства имеют ту же каноническую форму

$$(A \cap B \cap P) \cup (A \cap B \cap P').$$

Дополняя это соотношение очевидным включением, мы получаем полезное иногда двойное включение

$$A \cap B \subseteq (A \cap P) \cup (B \cap P') \subseteq A \cup B, \quad \forall P.$$

З а м е ч а н и е. Логическое «*и*» имеет ту же операторную структуру, что и $\cap$, а *не исключающее «или»*— ту же структуру, что и $\cup$. Можно отсюда вывести, что *исключающее «или»* записывается в следующей канонической форме:

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

Теорема единственности канонической формы помогает выяснению ситуаций, выраженных в сложной форме, в частности в статистике.

П р и м е р. Шарики, одни белые (множество B), другие различно окрашенные, сделаны некоторые из стекла (множество V), другие из иных материалов. Некоторые из них находятся в корзине (множество P), а некоторые нет. Выяснить смысл предложения: «взять белые стеклянные шарики из тех, которые остаются после того, как были удалены белые шарики, не находящиеся в корзине».

Переводим: нужно взять $B \cap V \cap (B \cap P')'$, то, что дает после упрощений $B \cap V \cap P$. Нужно взять белые стеклянные шарики, находящиеся в корзине.

Алгебра множеств будет в особенности полезной, когда подмножества будут снабжены мерой.

§ 2. Меры

I. Определения

Говорят, что некоторому семейству $\mathscr{F}$ подмножеств множества E, замкнутому относительно объединения и пересечения, отнесена *мера* (или на семействе определена мера), если:

α) Каждому из подмножеств ставится в соответствие действительное число, положительное или нуль.

β) Объединению двух непересекающихся подмножеств поставлено в соответствие сумма чисел, соответствующих каждому члену объединения. Число нуль, в частности, ставится в соответствие пустому множеству. В противном случае единственность не могла бы иметь место, так как пустое множество — это нейтральный элемент относительно объединения.

Чтобы сделать возможными переходы к пределу, следует распространить β) не только на конечное число подмножеств, но также и на бесконечное счетное множество подмножеств.

Следствие. Мера подмножества (принадлежащего к $\mathscr{F}$), представленного в канонической форме, равна сумме мер всех членов этого булева многочлена, потому что эти члены являются попарно непересекающимися множествами. Это соображение позволяет вычислить и меру объединения; например, для двух членов имеем:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B),$$

так как

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B') \text{ и } B = (A \cap B) \cup (A' \cap B),$$

откуда $\operatorname{mes}(A \cup B) = \operatorname{mes} A + \operatorname{mes} B - \operatorname{mes}(A \cap B)$.

Также находим, что

$$\operatorname{mes}(A \cup B \cup C) = \operatorname{mes} A + \operatorname{mes} B + \operatorname{mes} C -$$
$$- \operatorname{mes}(A \cap B) - \operatorname{mes}(B \cap C) - \operatorname{mes}(C \cap A) + \operatorname{mes}(A \cap B \cap C).$$

Такого рода формулы являются основой исчисления вероятностей, которое мы введем в § 3.

Основные аксиомы α), β) проверяются в многочисленных случаях. Множествам сопоставляют числа со многих различных точек зрения; откуда вытекают разнообразные меры. Мы введем сейчас наиболее простые из них. Когда мы имеем дело со множествами, каждое из которых имеет конечное число элементов, то это число есть *естественная мера множества*: это натуральное число, которое, очевидно, удовлетворяет обеим аксиомам. Однако положение меняется, если бесконечным множествам ставить в соответствие их кардинальные числа: мы уже сказали кое-что о множествах, называющихся *счетными*, однако объединение двух счетных множеств тоже счетно, так что мы не получаем на этом пути подлинной меры. Мы вернемся в конце книги II к этим вопросам, которые являются основными для глубокого изучения меры, поскольку мера связывается именно с бесконечными множествами.

Мы должны ввести *геометрические меры* (или естественные) наиболее простых подмножеств пространства (длины, площади, объема), а также меры, называемые в физике *количествами* (количество теплоты, количество электричества и т. п., содержащееся в данной области), и которые мы будем называть *массами*, будь это физические массы или нет. Геометрические меры приписываются самим областям, меры второго типа связаны, кроме того, с некоторой функцией, определенной для каждого элемента области, которая в простейших случаях будет называться *плотностью в рассматриваемой точке* (терминология согласована со словом масса).

II. Естественная мера на вещественной прямой

Если выбраны начало O, положительное направление и единичный вектор $\boldsymbol{u}$, то вещественная прямая является множеством точек M, определенных условиями

$$x \in R, \quad \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u}.$$

1) Каждому открытому *интервалу* $]a, b[$ мы ставим в соответствие число

$$\operatorname{mes}(a, b) = |b - a|,$$

а замкнутому интервалу, сводящемуся к одной-единственной точке, мы ставим в соответствие число нуль $\operatorname{mes}[a, a] = 0$, что делает излишним уточнение: идет ли речь об открытом интервале или об отрезке. Число, введенное таким образом, называется *длиной* интервала. Для семейства интервалов это число удовлетворяет, очевидно, следующим аксиомам: α) *мера является положительным числом или нулем*; β) *мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер членов объединения*. Это относится не только к случаю конечного числа членов, но и к *бесконечному счетному множеству членов*. Таким образом, семейство $\mathscr{F}$ подмножеств является здесь множеством объединений конечного или счетного числа интервалов.

Существенным свойством введенной таким образом меры для элементов семейства $\mathscr{F}$ интервалов является свойство *инвариантности относительно переноса* (свойство γ). Следует отметить также, что гомотетия с коэффициентом k увеличивает меру в $|k|$ раз.

Следствия. Мера интервала (a, ∞) бесконечна; *мы условимся присоединять* $+\infty$ *ко множеству мер*.

Мера счетного множества точек равна нулю. Но не следует думать, что это свойство характеризует счетное множество. Действительно, можно привести пример (триадическое множество Кантора) несчетного множества точек в интервале $(0, 1)$, которое, однако, не содержит ни одного интервала (кн. II, гл. III, § 1). Поэтому если даже ограничиваться прямой линией, то и тогда общее понятие меры представляет значительные трудности. Мы ограничимся введением для некоторых множеств меры, называемой мерой *Лебега*.

2) Так как отношение включения является отношением порядка, то мы расширим семейство измеримых областей следующим приемом. Пусть A — данное подмножество действительной прямой и пусть $\mathscr{H}$ — множество таких подмножеств H_i, уже снабженных мерой, каждое из которых покрывает подмножество A, а $\mathscr{K}$ — множество подмножеств K_j, тоже снабженных мерой, включенных в A, то есть

$$\forall_i, \quad \forall_j, \quad K_j \subseteq A \subseteq H_i,$$

мы имеем:

$$\operatorname{mes} K_j \leqslant \operatorname{mes} H_i.$$

Если A может иметь меру, то ей нужно, очевидно, дать такое определение, чтобы

$$\forall_i, \ \forall_j \operatorname{mes} K_j \leqslant \operatorname{mes} A \leqslant \operatorname{mes} H_i.$$

Но мы знаем согласно аксиоме полноты множества действительных чисел, что множество чисел $(\operatorname{mes} H_i)$, минорированное числами $(\operatorname{mes} K_j)$, имеет точную нижнюю грань $h = \operatorname{Inf}(\operatorname{mes} H_i)$; аналогично множество чисел $(\operatorname{mes} K_j)$ имеет точную верхнюю грань $k = \sup(\operatorname{mes} K_j)$, где $k \leqslant h$. *Если множество A таково, что $k = h$, то это число и ставят в соответствие множеству A*.

В самом деле, согласно свойствам пределов, это число, очевидно, удовлетворяет аксиомам α) и β). В частности, если B и C — измеримые множества и C включено в B, то множество $A = B - C = \complement_B C$ будет измеримым и будет иметь меру:

$$\operatorname{mes} A = \operatorname{mes} B - \operatorname{mes} C.$$

III. Меры в пространстве двух измерений

По отношению к базису $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ и началу O точка M определена вектором

$$OM = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}.$$

A) Естественные меры в аффинной геометрии

1) *Параллелограмму* U $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ ставится в соответствие число 1.

Отрезку $\{a \leqslant x \leqslant b,\ y = c\}$, а также отрезку $\{x = a,\ b \leqslant y \leqslant c\}$ ставим в соответствие число 0; поэтому мы не будем делать различие между открытыми и замкнутыми параллелограммами (хотя это было бы теоремой при более тонкой аксиоматике).

Мы сохраняем аксиомы α), β) и аксиому γ) *инвариантности относительно переноса*. Найдем, исходя из этого, *меру любого параллелограмма* P_1 *со сторонами, параллельными базису* $\{a < x < a + q,\ b < y < b + q'\}$, где q и q' — *рациональные числа*. Действительно, если $q = p/n$, $q' = p'/n$, то U содержит n^2, а P_1 содержит pp' маленьких параллелограммов, которые все получаются одни из других параллельным переносом, не считая граничных отрезков, имеющих меру нуль. Следовательно, $\operatorname{mes} P_1 = qq'$.

Чтобы расширить семейство измеримых областей, мы поступаем так же, как в одномерном пространстве. Пусть дано подмножество A плоскости; мы рассмотрим множество $\mathscr{H}$ всех объединений H_i параллелограммов P_1, которые образуют покрытие A и множество $\mathscr{K}$ всех объединений K_j пересекающихся параллелограммов P_1, включенных в A. Если $\operatorname{Inf} H_i = \sup K_j$, то это число и ставится в соответствие подмножеству A. Рассмотрим некоторые из областей, становящихся *с помощью этого приема* измеримыми.

a) Любые параллелограммы со сторонами, параллельными базису.

Пусть P — такой параллелограмм $\{a < x < a + r,\ b < y < b + r'\}$, где r и r' — любые действительные положительные числа. Чтобы выбрать множества H_i и K_j, мы рассмотрим приближенные рациональные значения чисел r и r':

$$s_n = \frac{p_n}{n}, \quad s_n' = \frac{p_n + 1}{n} \quad \text{и} \quad t_n = \frac{q_n}{n}, \quad t_n' = \frac{q_n + 1}{n},$$

определенные для любого значения n неравенствами $s_n \leqslant r < s_n'$, $t_n \leqslant r' < t_n'$, и возьмем за H_n

$$\{a < x < a + s_n,\quad b < y < b + t_n'\},$$

а за K_n

$$\{a < x < s_n,\quad b < y < t_n\}.$$

Тогда мы имеем:

$$\operatorname{mes} H_n - \operatorname{mes} K_n = \frac{(p_n + 1)(q_n + 1)}{n^2} - \frac{p_n q_n}{n^2} =$$

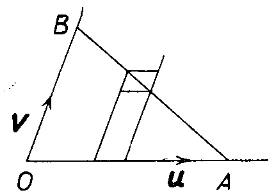
$$= \frac{p_n + q_n + 1}{n^2} < \left(r + r' + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n},$$

что стремится к 0, а когда n бесконечно растет; следовательно, P_2 измеримо и

$$\text{mes}\, P_2 = \inf(\text{mes}\, H_i) = \sup(\text{mes}\, K_j) = \lim_{n\to\infty}(\text{mes}\, K_n) = rr'.$$

b) Треугольники T_1, две стороны которых параллельны базису. Пусть дан треугольник OAB, у которого $\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{OB} = b\boldsymbol{v}$. Уравнение стороны AB имеет вид: $y = -\frac{b}{a}(x - a)$. Предположим числа a и b положительными. Каждому натуральному числу n ставим в соответствие разбиение $\boldsymbol{OA}$ на n равных частей длины a/n. Каждый из этих отрезков

$$a - \frac{p}{n} a < x < a - \frac{p-1}{n} a$$



Черт. 16

берется как основание двух параллелограммов типа P_2, у одного из которых длина второй стороны равна pb/n, а у другого $(p-1)\, b/n$. Объединение первых параллелограммов дает H_n, а объединение вторых — K_n. Но

$$\text{mes}\, H_n = \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + \ldots + p + \ldots + n) = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\text{mes}\, K_n = \frac{ab}{n^2}[1 + 2 + \ldots + (p-1) + \ldots + (n-1)] = \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

а общий предел этих двух выражений при n, стремящемся к бесконечности, равен $ab/2$. Следовательно,

$$\inf(\text{mes}\, H_i) = \sup(\text{mes}\, K_j) = ab/2.$$

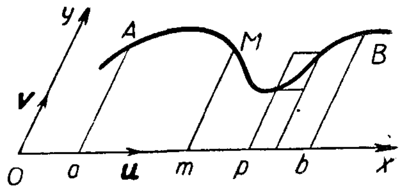
Такова мера треугольника.

c) Любой многоугольник и, в частности, любой треугольник.

Если провести через вершины многоугольника прямые, параллельные векторам базиса, то можно рассматривать многоугольник как объединение конечного числа треугольников T_1, так что многоугольник измерим.

Рассмотренные меры, инвариантны относительно переноса и умножаются на k^2, если область подвергается преобразованию гомотетии с коэффициентом подобия k. Они определены лишь относительно выбранного базиса.

d) Распространение на другие области (с точки зрения интеграла Римана). Отправляясь от выбранного базиса, рассмотрим *график AB некоторой функции, положительной и непрерывной* на интервале (a, b). Мы знаем, что такая функция аппроксимируется в (a, b) ступенчатыми функциями: каково бы ни было выбранное положительное число ε, существует натуральное число n, такое, что если разделить (a, b) на n равных частей, то y для значений x отрезка (x_p, x_{p+1}) остается заключенным между двумя значениями h_p и k_p функции y, где $h_p - k_p < \varepsilon$. Область D $(aABb)$ аппроксимируется, таким образом, объединениями H_n параллелограммов меры $\left(\frac{b-a}{n}\right) h_p$ и объединениями K_n параллелограммов меры $\left(\frac{b-a}{n}\right) k_p$. Но



Черт. 17

$$\operatorname{mes} H_n - \operatorname{mes} K_n < (b-a)\,\varepsilon,$$

так что эта разность стремится к нулю вместе с ε. Поэтому $\inf(\operatorname{mes} H_i) = \sup(\operatorname{mes} K_j)$, откуда следует, что область имеет меру.

Рассмотрим вычисление этой меры, считая исходную функцию $y = f(x)$ положительной по определению.

Чтобы использовать исходную функцию, определяющую область, мы должны рассматривать область как функцию абсциссы b; иначе говоря, мы рассмотрим область $D(x)$ с основанием am, ограниченную параллелями aA и mM к вектору $\boldsymbol{v}$. Мы только что убедились, что $D(x)$ имеет меру $\mu(x)$ и что эта мера удовлетворяет в окрестности x неравенству:

$$|\Delta x| \cdot \inf y \leqslant |\Delta\mu(x)| \leqslant |\Delta x| \sup y,$$

где точные грани $\inf y$ и $\sup y$ взяты в интервале Δx; но $\operatorname{mes} D(x)$ является возрастающей функцией от x, поэтому, учитывая знаки, имеем:

$$\inf y \leqslant \frac{\Delta\mu(x)}{\Delta x} \leqslant \sup y.$$

Когда Δx стремится к нулю, то третий и первый члены стремятся оба к $f(x)$, то есть к $y(x)$, откуда следует, что $F(x) = \operatorname{mes} D(x)$ *имеет производную, которая равняется* $f(x)$.

Таким образом, мы доказали, что функция $f(x)$, положительная и непрерывная на интервале (a, b), является производной функции $F(x)$, а, значит, также (см. кн. III, гл. V) и производной бесконечного множества функций $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

$\Phi(x)$ называется *общей первообразной функцией для функции* $f(x)$. $F(x)$ является одной из *частных первообразных*, получаемых при определенном выборе постоянной C. Что касается $\operatorname{mes} D(x)$, то она является той частной первообразной, которая обращается в 0 при $x = a$, что и определяет постоянную C. Таким образом, $\operatorname{mes} D(x)$ равна

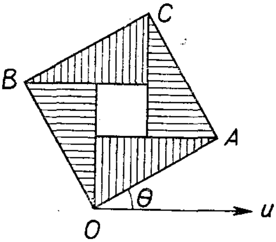
$$\Phi(x) - \Phi(a) = F(x) - F(a).$$

Эту функцию обозначают часто через $\mathcal{F}_a^x f(x)$. (Это не что иное, как определенный интеграл Римана, обозначаемый в теории интеграла символом $\int\limits_a^x f(x)\,dx$.)

Вычисление введенных мер сводится, таким образом, к исчислению, обратному исчислению производных, то есть к исчислению первообразных (или неопределенных интегралов, что соответствует понятию общих первообразных функций).

В) Приложения к метрической геометрии

1) **Площади плоских фигур.** Введенная выше мера зависит, как мы уже сказали, от базиса векторного пространства. Наоборот, возникающее в физике понятие площади является внутренним, то есть независящим от базиса. Это понятие определяют в *метрическом пространстве, обозначаемом* R^2. Мы предположим *ортонормальный базис* выбранным и докажем, что вышеопределенная мера не зависит от этого базиса, другими словами, что эта *мера остается инвариантной, если область подвергается движению.*



Черт. 18

Достаточно провести доказательство для единичного квадрата, сторона OA которого составляет угол θ с вектором $\boldsymbol{u}$. Можно было бы выполнить вычисления, но проще заметить, что параллели к $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, проведенные через вершины, разбивают квадрат на четыре треугольника меры $\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$ и квадрат меры $(\cos\theta - \sin\theta)^2$. Значит, мера квадрата (ее существование нам уже известно) такова:

$$2\cos\theta\sin\theta + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1.$$

Таким образом, мера, определенная в двухмерном метрическом векторном пространстве, обозначаемом через R^2, одна и та же относительно любого ортонормального базиса, разумеется, если единица длины выбрана: эта мера называется *площадью области*. Любая многоугольная область и любая выпуклая область, граница которой состоит из конечного числа дуг, являющихся при надлежащем выборе базиса графиками непрерывных функций, имеют площади, которые мы сумеем вычислить, если умеем найти первообразные. (Некоторые невыпуклые области, разумеется, также имеют площадь, если они могут быть определены с помощью простых пересечений.)

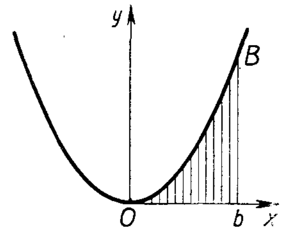
Примеры. Известно вычисление площади ObB, ограниченной параболой $y = ax^2$, ибо $\mathcal{F}_0^x\, ax^2 = \frac{1}{3}\,ax^3$. Поэтому площадь $ObB = \frac{1}{3}\, Ob \cdot bB$.

Однако, чтобы найти площадь круга, следовало бы знать общую первообразную функции $\sqrt{R^2 - x^2}$, определение которой не является элементарным. Поэтому нужно будет вернуться к множествам H_i и K_j. Поскольку известно, что площадь существует, мы возьмем, например, в качестве H_i и K_j правильные описанные и вписанные многоугольники с $2n$ сторонами. Их площади равняются соответственно:

$$2nR^2 \sin\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2n}}$$

и

$$2nR^2 \sin\frac{\pi}{2n} \cos\frac{\pi}{2n},$$



Черт. 19

общий предел которых равняется πR^2, потому что $\frac{\sin \pi/2n}{\pi/2n} \to 1$, когда n стремится к $+\infty$.

Таким образом, мы получаем все элементарные формулы для площадей плоских фигур.

2) **Масса отрезка прямой. Плотность.** (Берем массу как пример *величины.*) Физика измеряет с помощью весов массу стержней, которые мы можем уподобить отрезкам прямых. Пусть дана точка x_0 этого отрезка и окрестность V этой точки. Рассмотрим случай, когда отношение $\frac{\text{масса окрестности } V}{\text{длина окрестности } V}$ имеет предел $f(x_0)$, если длина окрестности стремится к 0, где $f(x)$ — положительная непрерывная функция *. Таким образом, массой отрезка $[a, x]$ является первообразная $\mathfrak{F}_a^x f(x)$. Значит, это площадь плоской области, ограниченной графиком функции $f(x)$. Таким образом, массы, связанные с одномерной областью, являются площадями двумерных областей. Легко понять, что масса плоской области, связанная с функцией плотности $f(x, y)$, может быть истолкована как объем. Но физики вводят также массы или меры, которые не соответствуют плотностям. Так, мера Дирака равна нулю для каждой области, не содержащей данную точку A, и равна 1 для каждой области, содержащей точку A. Это, конечно, мера в том смысле, что она удовлетворяет аксиомам α) и β). (Однако не удовлетворяет аксиоме γ) переноса!) Теория распределений (Лорана Шварца) ** была создана как математический аппарат для описания таких ситуаций.

Длина отрезка может рассматриваться как масса, если плотность равна 1 в каждой точке отрезка.

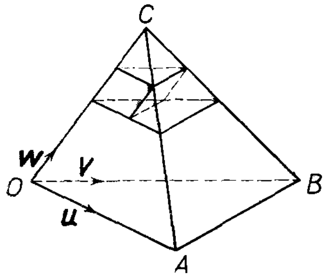
---

* Называемая линейной плотностью.— *Прим. перевод.*

** Вместо термина «распределения» (*distributions*) в нашей литературе принят термин «обобщенные функции». В современной форме они введены впервые С. Л. Соболевым (Математ. сборник, 1936, *1* (**43**), 39—72). Монография Лорана Шварца (*Shwartz L. Theorie des distributions. Paris. Hermann,*

IV. Меры в трехмерном пространстве

В случае трехмерного пространства оперируют с помощью аналогичного приема. На этот раз значение 0 приписывают каждой измеряемой области, на которой одна из координат постоянна. Мы заменим в исследовании параллелограммы параллелепипедами. Исследование 2, *b*), которое было выполнено для треугольника, выполняется теперь для тетраэдра, у которого 3 ребра OA, OB, OC параллельны базисным векторам. Чтобы выбрать H_n и K_n, удобно разделить ребро OC, например, на n равных частей и рассмотреть сечения, параллельные OAB, проведенные через точки деления. Эти сечения являются треугольниками, плоские меры которых выводятся из меры треугольника OAB с помощью гомотетии.



Черт. 20

Сумма, подлежащая вычислению, будет иметь вид:

$$\operatorname{mes} H_n = \frac{1}{2}\frac{abc}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{n^3}\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Она стремится к $abc/6$, когда n стремится к бесконечности.

Эта мера тетраэдра становится его *объемом*, если в метрическом пространстве базис, относительно которого найдена мера, ортонормален. Этот объем инвариантен по отношению к движению, как это показывает его выражение через смешанное векторное произведение: $\frac{1}{6}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}$.

Если в случае любой области использовать для определения H_i и K_j сечения, параллельные плоскости xOy, и если эти сечения имеют площади $\mathfrak{A}(z)$ (единственный случай, который мы здесь рассматриваем), то объем области оказывается равным значению первообразной $\mathcal{P}_0^h\mathfrak{A}(z)$.

Если рассмотреть призмы, имеющие основаниями окрестности точек (x, y) плоскости основания и высотой отрезок $z(x, y)$, то объем возникает как новый объект анализа. Это масса плоской области, причем функция $z(x, y)$ является поверхностной плотностью (это двойной интеграл функции двух переменных, взятый по плоской области).

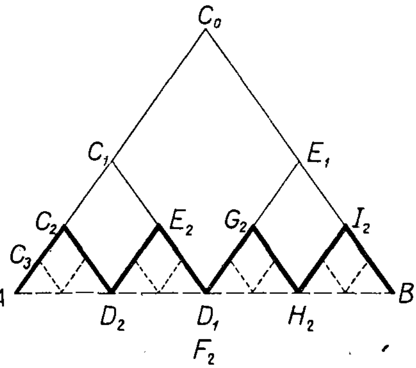
---

t. I, 1950, t. 2, 1951) привлекла к этому кругу вопросов широкое внимание. В ней было дано обоснование и систематическое построение теории, получен ряд существенных результатов, указаны многочисленные приложения. В качестве введения в теорию обобщенных функций см.: И. Гельфанд и Г. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.— *Прим. ред.*

Масса некоторой области трехмерного пространства может быть интерпретирована в том же духе, то есть ее можно рассматривать как меру некоторой области четырехмерного пространства (тройной интеграл функции трех переменных, взятый по некоторой области пространства).

V. Длины кривых. Площади кривых поверхностей

Эта новая проблема, которую ставит физика, является более тонкой, чем предыдущая, из-за того, что параллельный перенос больше использовать нельзя, если оставаться на кривой или на поверхности, а также нельзя использовать отношение порядка по включению, если рассматривать соседние кривые линии или поверхности. Тогда как ранее точечно соседние области имели и соседние площади, или объемы, здесь это уже не происходит: *ломаная линия может иметь все свои точки очень близкими к другой ломаной линии, и в то же время этим двум ломаным нельзя будет сопоставить одну и ту же длину* (пределом *ломаных* линий AB прилагаемой фигуры, когда число их звеньев стремится к бесконечности, является по положению отрезок AB, в то время как длина их остается все время равной длине ломаной AC_0B). Та же трудность возникает для точечно близких кривых поверхностей.



Черт. 21

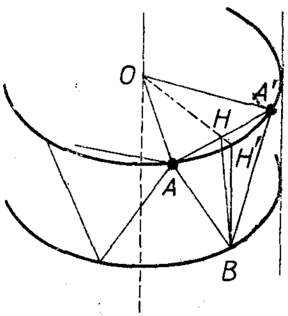
Чтобы получить приемлемое определение длины дуги AB, рассматривают все такие ломаные AB, чтобы можно было установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками обеих линий. Затем сравнивают в соответствующих точках направления звена ломаной и касательной к кривой. Удается доказать, что если при числе звеньев ломаной, стремящейся к бесконечности, *соответствующие точки, а также соответствующие направления находятся в окрестностях, стремящихся к нулю*, то длины всех ломаных имеют один и тот же предел: этот предел и принимается *за длину данной кривой*. Теорема требует не только существование касательной к кривой в каждой точке, но также, чтобы эта касательная изменяла непрерывным образом свое направление, когда точка описывает кривую.

Следовательно, чтобы вычислить длину такой кривой, как дуга окружности, можно рассмотреть ломаные, вписанные в кривую, причем такие, чтобы длина каждого звена стремилась к нулю, когда число звеньев стремится к бесконечности *. Условие, которому должно подчиняться направление касательной, будет при этом выполнено. В случае окружности используют как раз основания тех треугольников с вершиной в центре, которые позволили вычислить площадь, так что

$$\text{площадь} = \text{длина} \times R/2.$$

Но площадь круга есть πR^2, значит, длина окружности есть $2\pi R$.

Чтобы определить площадь кривой поверхности, также используют соседние поверхности, объединение плоских граней. На этот раз нужно потребовать, чтобы вместе с *близостью точек, отвечающих друг другу во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии*, были *близки друг другу также и направления плоскости каждой грани и касательной плоскости в соответствующей точке поверхности*. Теорема о пределе требует, следовательно, чтобы касательная плоскость к поверхности менялась непрерывно, когда точка касания перемещается на поверхности. Поэтому при разыскании площади недостаточно взять вписанную многогранную поверхность, все грани которой стремятся к нулю, так как этого недостаточно, чтобы обеспечить выполнение условия, налагаемого на направления граней. Это обстоятельство объясняет различные парадоксы, вроде следующего:



Черт. 22

Пусть мы желаем определить боковую поверхность цилиндра вращения с высотой h и радиусом R. Рассмотрим круги сечений плоскостями, параллельными к основаниям, которые делят h на p равных частей. В каждую окружность впишем правильный n-гранник, перемещая вершины на угол $\frac{\pi}{n}$ от одного круга к следующему. Площадь такого, как ABA', треугольника будет равна:

$$s = \frac{1}{2} AA' \cdot BH = R \sin\frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{h^2}{p^2} + 4R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}}\,.$$

Значит, площадь многогранной поверхности

$$S = 2nps = 2R\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{h^2 + 4R^2\frac{p^2}{n^4}\left(n^4\sin^4\frac{\pi}{2n}\right)}\,.$$

Когда n и p стремятся к бесконечности, то треугольные грани неограниченно приближаются к поверхности. Однако площадь

* Например, можно рассмотреть правильные вписанные ломаные.— *Прим. ред.*

S будет иметь предел, лишь если p/n^2 имеет предел λ, и предел площади S зависит от λ, ибо

$$\lim S = 2R\pi \sqrt{h^2 + \frac{R^2\pi^4}{4}\lambda^2}.$$

Угол, составляемый плоскостью треугольника ABA' с соответствующей касательной плоскостью, будет стремиться к 0 лишь тогда, когда

$$\frac{HH'}{BH'} \to 0, \text{ то есть } \frac{2R}{h} p \sin^2 \frac{\pi}{2n} \to 0,$$

а, значит, $p/n^2 \to 0$. Но в этом случае получается $\lambda = 0$, $\lim S = 2\pi Rh$, что и является ожидаемым результатом.

Рассмотрение массы линии или кривой поверхности, соответствующей линейной или поверхностной плотности, приводит к так называемым криволинейным интегралам или поверхностным интегралам (интегралам по поверхности).

Следует добавить, что математики и физики действуют подобным образом в векторных пространствах четырех или n измерений и даже в бесконечно мерных пространствах. Но *мерой всегда является числовая функция, аргументом которой служит некоторое подмножество семейства* $\mathcal{F}$, *определенного с самого начала.*

§ 3. Введение понятия вероятности

Вернемся к результатам алгебры множеств и, в частности, к понятию канонической формы. Используем общее определение меры, введенное в § 2, I, а также формулы, касающиеся меры пересечения и объединения. Все меры, которые будут введены, существенно положительны.

I. Меры на множестве событий

а) Вводный пример. Петр, Павел и Иван играют в карты. В каждой партии каждый из них тянет одну карту (красную или черную). За 50 партий Петр вытянул 35 раз красную карту, Павел — 25 раз, а Иван — 28 раз. В 15 партиях Петр и Павел вытянули оба по красной карте, а в 13 партиях Павел и Иван вытянули оба по красной карте. Что можно сказать о числе партий, в которых все три игрока вытянули карты одного и того же цвета?

Обозначим через A, B, C множества партий, в которых соответственно Петр, Павел и Иван вытянули красную карту

$$n = 50, \quad \operatorname{mes} A = 35, \quad \operatorname{mes} B = 25, \quad \operatorname{mes} C = 28,$$

$$\operatorname{mes}(A \cap B) = 15, \quad \operatorname{mes}(B \cap C) = 13.$$

Это составляет шесть независимых данных, так что их недостаточно для определения мер восьми основных членов канонической формы.

Для систематического исследования введем эти восемь неизвестных:

$$x = \operatorname{mes}(A \cap B \cap C), \qquad z = \operatorname{mes}(A \cap B \cap C'),$$
$$t = \operatorname{mes}(A \cap B' \cap C), \qquad u = \operatorname{mes}(A' \cap B \cap C),$$
$$y = \operatorname{mes}(A' \cap B' \cap C'), \quad z' = \operatorname{mes}(A' \cap B' \cap C),$$
$$t' = \operatorname{mes}(A' \cap B \cap C'), \quad u' = \operatorname{mes}(A \cap B' \cap C'),$$

откуда имеем шесть уравнений:

$$x + y + z + z' + t + t' + u + u' = 50;$$
$$x + z = 15, \quad x + u = 13,$$
$$x + z + t + u' = 35; \quad x + z + t' + u = 25, \; x + z' + t + u = 28.$$

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, разрешим систему, принимая за главные неизвестные x и y; получаем:

$$\begin{cases} z = 15 - x; \\ u = 13 - x; \\ t' = x - 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 10 + y; \\ u' = 10 - y; \\ z' = 5 - y. \end{cases}$$

Мы знаем, что все восемь неизвестных независимы и подчинены лишь условию быть положительными. Отсюда вытекает, что x и y подчиняются неравенствам:

$$3 \leqslant x \leqslant 13, \quad y \leqslant 5.$$

О т в е т. Число партий, где все три игрока вытянули по красной карте, заключено между 3 и 13, число партий, в которых они вытянули все три по черной карте, не больше 5.

Заметим, что если не искать условия, необходимые и достаточные для чисел, остающихся неопределенными, а лишь стремиться получить некоторые частные результаты, то необходимые условия можно найти с помощью менее громоздких приемов. Например,

$$x = \operatorname{mes}(A \cap B \cap C) = \operatorname{mes}[(A \cap B) \cap (B \cap C)]$$

участвует в вычислении $\operatorname{mes}[(A \cap B) \cup (B \cap C)]$, выражаемой так:

$$\operatorname{mes}[(A \cap B) \cup (B \cap C)] = 15 + 13 - x = 28 - x.$$

Но левая часть, очевидно, не превосходит $\operatorname{mes} B = 25$, откуда

$$28 - x \leqslant 25,$$

то есть $x \geqslant 3$.

Аналогично если заметить, что $y = \operatorname{mes}(A' \cap B' \cap C')$ дает

$$50 - y = \operatorname{mes}(A \cup B \cup C),$$

а это последнее число не меньше каждого из чисел $\operatorname{mes}(A \cup B)$ и $\operatorname{mes}(B \cup C)$, то, подсчитывая, имеем:

$$\operatorname{mes}(A \cup B) = \operatorname{mes} A + \operatorname{mes} B - \operatorname{mes}(A \cap B) = 35 + 25 - 15 = 45;$$
$$\operatorname{mes}(B \cup C) = \operatorname{mes} B + \operatorname{mes} C - \operatorname{mes}(B \cap C) = 25 + 28 - 13 = 40,$$

откуда выводим $50 - y \geqslant 45$ и, следовательно, $y \leqslant 5$. Ход вычислений следует направлять в соответствии с тем, какой результат ищется.

Это исследование является основой *исчисления частот в статистике.*

b) Другие меры, связанные с конечными множествами. Мы обозначаем здесь основное множество (универсальное множество) символом U, как это обычно делается в теории вероятностей. Кроме того, если каждому элементу сопоставлен положительный коэффициент, то каждому подмножеству мы сопоставим число, равное сумме коэффициентов элементов этого подмножества. Таким образом мы определяем меру этого подмножества. Коэффициент, который сопоставлен элементу, часто называют *весом элемента*, а *весом подмножества* называют сумму весов его элементов. (Слово *вес* не имеет здесь своего физического смысла.)

II. Вероятности (случай конечных множеств)

1) Вводные примеры и определения

Пример. Множество U состоит из n шаров: белых, красных, желтых и зеленых; отсюда четыре непересекающихся подмножества: B, K, J, Z, которым мы сопоставим соответственно числа их элементов b, k, j, z:

$$b + k + j + z = n.$$

Предполагается, что все эти шары отличаются лишь цветом. Поэтому если они все находятся в мешке и длительное время встряхиваются и перемешиваются, то при извлечении шара из мешка *наугад* нет никакого основания считать, что скорее появится шар одного цвета, чем другого. Но предположим, например, что $b = 60$, $k = 20$, $j = z = 10$; тогда *более вероятно* вытянуть белый шар, чем шар любого другого цвета. Условимся делать большое число извлечений, возвращая каждый раз вытянутый шар в мешок и тщательно перемешивая шары. Мы думаем, что после 20 или 30 извлечений число извлеченных белых шаров заметно превзойдет число красных шаров: это убеждение является, очевидно, результатом опыта. Если сделать на самом деле опыт, выполнив большое число извлечений, скажем, 100 или 1000, то получается таблица частот, приводящая к следующему *статистическому закону*: частоты появлений для шаров каждого цвета *приблизительно* пропорциональны числам b, k, j, z. И этот результат выявляется с тем большей ясностью, чем больше число выполненных извлечений. Этот факт выражают утверждением: *вероятность вытянуть белый шар* есть $p_b = b/n$, вероятность вытянуть красный шар есть $p_k = k/n$ и т. д.

Если бы условия опыта были таковы, что полученные результаты не совпадали бы с описанными выше, то мы сказали бы, что вероятности вытянуть тот или иной шар не были равными (например, потому, что красные шары более шероховатые, или потому, что перемешивание плохо выполнялось). Это дает понять, что, собственно говоря, мы рассуждаем не о множестве шаров, а о множестве возможных извлечений, предположенных равновероятными. Это то, что называют множеством *равновероятных событий*.

Обобщая, мы приходим к следующему определению:

Мы обозначаем через U множество рассматриваемых событий, число которых предполагается здесь конечным, и пусть определена некоторая мера $m(x)$ на множестве подмножеств x множества U. Дробь $p(x) = m(x)/m(U)$ также есть мера, потому что удовлетворяет условиям α) и β). Она характеризуется новым условием

$$(\pi) \quad p(U) = 1.$$

Такая мера называется *вероятностной мерой* или *вероятностью*. Это определение распространяется и на случай, когда U содержит бесконечное число событий. Мы рассмотрим сейчас несколько случаев, когда вероятность легко вычислить.

П р и м е р 1. М н о ж е с т в о н е р а в н о в е р о я т н ы х с о б ы т и й. Мы рассматривали события, которые теперь будем называть событиями первого типа. Они были равновероятными. Событие состояло в извлечении определенного шара. Но предположим теперь, что требуется найти вероятность извлечения шара, который бы был *либо белым, либо красным*, из мешка, описанного в примере (1), то есть в котором $b = 60$, $k = 20$, $j = z = 10$. Мы рассмотрим четыре события второго типа:

B : извлечь белый шар. Вероятность $p(B) = \frac{60}{100} = 0{,}6$,

K : извлечь красный шар — $p(K) = 0{,}2$,

J и Z : извлечь желтый или зеленый шар $p(J) = p(Z) = 0{,}1$.

Событие, рассматриваемое как *благоприятное*, есть B или K, то есть $B \cup K$. Подсчитывая события первого типа, находим отсюда $60 + 20$ благоприятных, значит, $p(B \cup K) = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$. Значит, здесь $p(B \cup K) = p(B) + p(K)$.

Очевидно, это так, потому что шар не может быть в одно и то же время белым и красным. Так что

$$B \cap K = \varnothing, \quad p(B \cap K) = 0.$$

П р и м е р 2. Чтобы ввести *непустые пересечения*, предположим, сохраняя предыдущие данные, что некоторые шары пластмассовые *, а другие из других материалов, а именно 30 шаров сделаны из пластмассы, из них 10 белых. Обозначаем через P событие второго типа : извлечь пластмассовый шар. Мы получаем, считая события первого типа :

$$p(B) = 0{,}6; \quad p(P) = 0{,}3; \quad p(B \cap P) = 0{,}1;$$
$$p(B \cup P) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8.$$

Формула такова: $p(B \cup P) = p(B) + p(P) - p(B \cap P)$.

* В оригинале шары каменные (*en pierre*), но для согласования с обозначением P мы назвали их пластмассовыми.— *Прим. ред.*

2) Основные формулы

a) Совместимость. Говорят, что события, составляющие A и B, подмножества U *несовместимы*, если $A \cap B = \varnothing$. Формула $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ выражает тогда *теорему сложения вероятностей*. Но если события, составляющие A и B, *совместимы*, то общая формула такова:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Если, в частности, $B \subset A$, то эта же формула вытекает из $A \cap B = B$ и $A \cup B = A$.

b) Условные вероятности*; вероятностная независимость.

Пусть

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

Так как A и B совместимы, то можно рассматривать вероятность того, что событие принадлежит B, когда уже известно, что оно принадлежит A.

На этот раз универсальным множеством является A, а множество благоприятных событий есть $A \cap B$. Вероятность, которая нас интересует и которую мы обозначим через $p_A(B)$, будет следовательно:

$$p_A(B) = \frac{\operatorname{mes}(A \cap B)}{\operatorname{mes}(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Чтобы уточнить обозначения, мы можем писать $p_U(A)$ вместо $p(A)$, так что формула запишется, если учесть симметричную роль A и B, в следующем виде:

$$p_U(A \cap B) = p_U(A) \cdot p_A(B) = p_U(B) \cdot p_B(A).$$

Вернемся к примеру 2: вероятность, что белый шар будет пластмассовым, равна $0{,}1/0{,}6 = 1/6$. Вероятность, что пластмассовый шар будет белым, равняется $0{,}1/0{,}3 = 1/3$.

Говорят, что события, составляющие A и B, *вероятностно независимы*, если

$$p_U(B) = p_A(B),$$

откуда следует

$$p_U(A) = p_B(A).$$

Следовательно, это соотношение симметрично по отношению к A и B. Оно выражает, что существует столько же шансов иметь элемент типа B, зная только, что B включено в U, сколько существует шансов иметь элемент типа B, зная уже, что это элемент типа A.

---

* В оригинале «связанные вероятности».— *Прим. перевод.*

В противном случае говорят, что имеется *вероятностная связь* и *коэффициент взаимного влияния равен*:

$$\frac{p_A(B)}{p_U(B)} = \frac{p_B(A)}{p_U(A)}.$$

В нашем примере этот коэффициент равен 5/9.

Аналогичные определения можно было бы дать для трех, четырех и более подмножеств.

c) Вероятность произведения множеств. Пусть даны два множества U_1 и U_2. Вспомним, что прямым произведением или просто *произведением* $U_1 \times U_2$ называют множество U упорядоченных пар (x_1, x_2), $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Отсюда вытекает, что подмножество множества U не является, вообще говоря, произведением $E_1 \times E_2$ двух подмножеств $E_1 \subset U_1$ и $E_2 \subset U_2$, потому что каждый элемент $x_1 \in E_1$ должен был бы соединяться со всеми элементами из E_2. Мы будем рассматривать лишь такие подмножества, которые являются произведениями. В противном случае нужно уметь их представить в виде объединения непересекающихся произведений подмножеств.

Пример. Мешок с шарами содержит 100 шаров: 60 белых, 20 красных, 10 желтых, 10 зеленых. Другой мешок содержит 80 шаров: 40 белых, 30 красных и 10 желтых. Извлекается шар из каждого мешка. Какова вероятность вытянуть оба шара белые?

Множество U содержит $100 \times 80 = 8000$ событий. Множество E благоприятных событий есть $E_1 = B_1 \times B_2$, мера которого равна

$$60 \times 40 = 2400.$$

Следовательно,

$$p_U(E) = \frac{60 \times 40}{100 \times 80}; \text{ но } p_{U_1}(B_1) = \frac{60}{100}$$

и

$$p_{U_2}(B_2) = \frac{40}{80}.$$

Получается формула: $p_U(B_1 \times B_2) = p_{U_1}(B_1) \times p_{U_2}(B_2)$.

Какова вероятность извлечь один белый и один красный шар? На этот раз множество благоприятных событий есть

$$E' = (B_1 \times K_2) \cup (K_1 \times B_2), \text{ причем } (B_1 \times K_2) \cap (K_1 \times B_2) = \varnothing.$$

Значит,

$$p(E') = p(B_1 \times K_2) + p(K_1 \times B_2).$$

Эти примеры дают возможность понять, как можно трактовать более сложные случаи.

III. Непрерывные вероятности (случай бесконечных множеств)

Теория меры, например меры длин, площадей, объемов, позволяет сопоставить областям неотрицательные числа, такие, что объединению двух непересекающихся областей сопоставляется сумма их мер. Отсюда можно вывести вероятности, которые, однако, не вычисляются столь просто, как в случае конечного числа элементов, а требуют интегрального исчисления, (в частности, использования первообразных функций для заданных функций). Все же вычисления можно значительно упростить с помощью соображений об однородности и симметрии. Так эти соображения нам позволят рассмотреть в виде заключения этого введения в теорию вероятностей знаменитую задачу, называющуюся:

Задача об игле Бюффона

На горизонтальной плоскости начерчены параллельные прямые *, равноотстоящие друг от друга (на расстоянии d). На плоскость бросают наугад иглу длиной a, меньшей чем d. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?

Сказать, что игла брошена наугад (случайно), означает, что никакое направление не является привилегированным при бросании иглы. Но в таком случае вероятность, что игла пересечет одну из прямых, может зависеть только от длины a. Обозначим эту вероятность p_a.

1) Вообразим, что вместо иглы бросают ломаную линию L длины b (которая может быть больше d), все k звеньев которой имеют длину $a = \frac{b}{k}$. При каждом бросании ломаной *каждое звено* ее либо пересекает, либо не пересекает параллельные прямые. Вероятность, чтобы звено пересекло, есть P_a.

Но при одном и том же бросании пересечь параллели могут и несколько звеньев этой ломаной, так что мы не можем отсюда вывести вероятность того, что L пересечет параллели: множество событий «определенное звено пересекает» и аналогичное множество для другого звена не являются раздельными, так что нельзя оперировать сложением.

Чтобы преодолеть эту трудность, сопоставим каждому из событий «бросание линии L» по коэффициенту, называемому весом события: вес одного из таких событий будет нулем, если L не пересекает параллели, и определенным числом m, если параллели пересекаются одним звеном линии L, числом $2m$, если два звена пересекут параллели, и т. д.

Веса складываются: вес P множества событий «бросания линии L» является суммой весов множества событий «бросание одного определенного звена», если рассматривать последовательно все звенья ломаной. Но все звенья играют одну и ту же роль с точки зрения вероятности, так что для достаточно большого числа бросаний мы должны считать веса множеств «бросания определенного звена» равными для всех звеньев. Пусть P_a — это вес, который может зависеть лишь от a.

Получается

$$P = kP_a = \frac{b}{a} P_a.$$

---

* Бесконечное число параллельных прямых.— *Прим. перевод.*

Но то же рассуждение показывает, что для каждого звена вес P_a пропорционален длине a: действительно, если две длины a и a' кратны одной и той же общей части c так, что $a = hc$ и $a' = h'c$, то тогда

$$P_a = hP_c, \ P_{a'} = h'P_c,$$

откуда

$$\frac{P_{a'}}{P_a} = \frac{h'}{h} = \frac{a'}{a}.$$

Если a и a' несоизмеримы между собой, то вывод получается переходом к пределу, потому что P_a, очевидно, стремится к 0, когда a стремится к 0. Таким образом, P_a/a есть постоянная λ, так что

$$P_a = \lambda \cdot a,$$

значит, $P = \lambda b$.

Вычислим λ: достаточно знать P для какого-либо известного значения b. Так как вес P ломаной L зависит только от b, а не от значения углов или числа звеньев, то вес остается тем же, если мы заменим L через кривую линию той же длины b, но любой формы. Но в одном случае результат ясен, это в случае окружности диаметра d, потому что при каждом бросании в этом случае имеются две общие точки. Каждое бросание имеет вес $2m$, так что если сделано N бросаний, то общий вес равняется $P = 2mN$ при длине $b = \pi d$. Таким образом,

$$\lambda = \frac{2mN}{\pi d} \text{ и } P_a = \frac{2mN}{\pi} \frac{a}{d}.$$

2) Остается сравнить вес P_a с вероятностью p_a. Но каждое из благоприятных событий «игла пересекает» имеет вес m (так как $a < d$ обеспечивает единственность возможного пересечения), а другие события имеют вес нуль. Число благоприятных событий, следовательно, равно $n = P_a : mN$, а вероятность

$$p_a = P_a : m,$$

откуда следует вывод: $p_a = 2a/\pi d$.

Можно выполнить экспериментальную проверку *: например, $a = d/2$ дает $p_a = 1/\pi$.

---

* Приведем результаты опыта проф. Вольфа в Цюрихе. Он принял $d = 45$ *мм*, длину иглы $a = 36$ *мм* и совершил 5000 бросаний, причем игла пересекала прямые 2532 раза.

Таким образом, частота 0,5064 оказалась весьма близкой к вероятности

$$p_a = \frac{1{,}6}{\pi} \simeq 0{,}4993.$$

(См.: Л. К. Лахтин, Курс теории вероятностей, М., 1924, стр. 82.)— *Прим. ред.*

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Первая часть

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Первая глава

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

В первой книге (Основные структуры) мы ввели понятие целого числа, положительного или отрицательного. С точки зрения сложения все эти числа сходны, но с точки зрения умножения это уже не так. Этот вопрос мы главным образом и будем изучать в настоящей главе, построенной на основе результатов I книги, гл. II, § 1.

§ 1. Евклидово деление

Мы видели, что если даны два целых положительных числа a и b,

$$0 < b \leqslant a,$$

то существует натуральное число q, притом единственное, определенное условиями

$$bq \leqslant a < b(q+1),$$

что мы выразили, назвав множество натуральных чисел архимедовым, или обладающим архимедовым свойством.

Введем натуральное число r равенством

$$r = a - bq.$$

Система

$$\begin{cases} bq \leqslant a < b(q+1); \\ r = a - bq \end{cases} \tag{1}$$

сопоставляет каждой паре (a, b), $(a \geqslant b)$ пару (q, r). Эта операция называется *евклидовым делением натуральных чисел*; a есть делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток.

Мы будем пользоваться также и другими системами, равносильными системе (1):

$$\begin{cases} a = bq + r; \\ 0 \leqslant r < b; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} a = bq + r; \\ 0 \leqslant r \leqslant b - 1. \end{cases} \tag{3}$$

Определение частного и остатка. Пусть q_1 — целое число, такое, что bq_1 меньше числа a.

Полагаем

$$a - bq_1 = r_1.$$

Если r_1 меньше, чем b, то q_1 и r_1 — искомые числа. Если, наоборот, $r \geqslant b$, то мы скажем, что мы осуществили *частичное деление*; q_1 и r_1 тогда частичные частное и остаток. Мы их используем, чтобы продолжать операцию, деля все время на b. Получим

$$r_1 = bq_2 + r_2,$$

причем эта операция была более легкой, потому что $r_1 < a$.

Таким образом, получается

$$r_2 < r_1 \text{ и } a = b(q_1 + q_2) + r_2.$$

Если r_2 не меньше, чем b, то операция продолжается и получаем

$$r_2 = bq_3 + r_3, \quad r_3 < r_2,$$

откуда

$$a = b(q_1 + q_2 + q_3) + r_3 \text{ и т. д.}$$

Последовательность частичных остатков $r_1, r_2, r_3, \ldots$ убывающая, причем эти числа остаются целыми неотрицательными. Поэтому может существовать лишь конечное число остатков, так что последовательность операций конечна. Но операция продолжается лишь в том случае, когда приводит к остатку, не меньшему, чем b. Откуда следует, что с необходимостью мы придем к остатку, меньшему числа b. (Обращаем внимание на это рассуждение, с которым мы еще встретимся. Его называют *спуском Ферма*, по имени знаменитого математика Ферма (1601—1665), который его сформулировал и пользовался им систематически.)

Поэтому, если r_n меньше чем b, получается:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n, \quad r = r_n.$$

Замечания. 1) Если a и b — целые числа любых знаков, то берут $0 \leqslant r < |b|$.

2) Использование отрицательного остатка. Однако более выразительно и часто более практично писать

$$76 = 11 \times 7 - 1, \text{ чем } 76 = 11 \times 6 + 10;$$

$$75 = 11 \times 7 - 2, \text{ чем } 75 = 11 \times 6 + 9.$$

Наименьшим по абсолютной величине остатком называют число r', определенное условиями

$$a = bq' + r', \quad |2r'| \leqslant |b|.$$

Если

$$|2r'| = |b|,$$

то имеем два решения; в этом случае берут $r' > 0$.

Теорема. *Частное от деления натурального числа a на произведение натуральных чисел $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ равно последнему частному, которое получается делением a на b_1, делением полученного частного на b_2* и т. д.

Запишем в самом деле последовательные деления в форме (3) и составим как из равенств, так и из неравенств линейные комбинации, чтобы исключить промежуточные частные. Для определенности возьмем $n = 3$. Получаем:

$$\begin{cases} a = (b_1 b_2 b_3)\, q_3 + (r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3); \\ 0 < r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3 \leqslant (b_1 - 1) + b_1 (b_2 - 1) + b_1 b_2 (b_3 - 1) < b_1 b_2 b_3. \end{cases}$$

Значит, q_3 — это частное от деления числа a на $b_1 b_2 b_3$, а остаток равен

$$r = r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3.$$

Заметим, что система (2) не позволила бы получить нужный вывод непосредственно; следовало бы подчеркнуть, что, например, из $r_1 < b_1$ следует, что разность $b_1 - r_1$ не меньше 1.

Частный случай. Если остаток от деления a на b равен нулю, то говорят, что *a кратно b*, или *a делится на b*, или что *b делит a*, или что *b есть делитель a*, и это означает

$$\exists q, \quad a = bq.$$

Это записывают так: $b \mid a$, что читается: *b делит a.*

Заметим, что это понятие можно будет обобщить для случая, когда a и b принадлежат любым множествам, если только *q натуральное.*

§ 2. Делимость. Сравнения

Делимость сводится к изучению остатков от деления, причем на соответствующие частные не обращают внимания. Пусть мы выбрали натуральный делитель d_0. Если делить на d последовательно все числа натурального ряда, то остатки периодически повторяются: мы можем расположить целые неотрицательные числа в виде таблицы так, чтобы в каждой строчке находились d чисел; тогда в первой строчке расположатся остатки 0, 1, 2, . . ., $d - 1$, а числа одного и того же столбца будут соответствовать одному и тому же остатку.

Пример. $d=4$

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$4q$	$4q+1$	$4q+2$	$4q+3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Таким образом, множество E целых неотрицательных чисел распадается на d классов с помощью *отношения эквивалентности* «давать один и тот же остаток при делении на d». (Сразу видно, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.) Каждый класс эквивалентности называется *классом вычетов*, а отношение эквивалентности называется *сравнением по модулю d*. (Говорят также modulo d.)

Это отношение записывается:

$$a \equiv b \pmod d \text{ —}$$

и читается: «a сравнимо с b по модулю d».

По определению это означает, что a и b при делении на d дают один и тот же остаток, то есть

$$\exists r,\ q,\ q' : a = dq + r,\ b = dq' + r,\ 0 \leqslant r < d.$$

Если не обращать внимания на значения общего остатка, то можно использовать следующие логически эквивалентные записи:

$$a \equiv b \pmod d \Leftrightarrow \exists q,\ a - b = dq \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod d.$$

Примечание. В дальнейшем d будет оставаться положительным, но удобно принять для делимых и остатков целые значения любого знака; свойства, с которыми мы встретимся, будут иметь место для всех случаев. Таким образом, вместо того, чтобы вводить остаток, как число, заключенное между 0 и $d - 1$, часто уместно в качестве представителя каждого класса вычетов принимать число, наименьшее по абсолютной величине. Это число, согласно сделанному ранее замечанию, будет взято при d четном, то есть когда $d = 2d'$, из последовательности

$$-d' + 1,\ -d' + 2,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ d' - 1,\ d',$$

а при d нечетном, то есть когда $d = 2d' + 1$, из последовательности

$$-d',\ -d' + 1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ +d'.$$

Свойства сравнений. Пусть d — данный модуль.

Теорема 1. $a \equiv b \pmod d \Leftrightarrow \forall m : a + m \equiv b + m \pmod d$.

Теорема 2. $a \equiv b \pmod d \Rightarrow \forall m : am \equiv bm \pmod d$.

(Доказательства получаются сразу, если ввести q равенством $a - b = dq$ и использовать соответствующие свойства равенств.)

Теорема 3. $[a \equiv b \pmod d$ и $a' \equiv b' \pmod d] \Rightarrow a + a' \equiv b + b' \pmod d$.

Теорема 4. $[a \equiv b \pmod d$ и $a' \equiv b' \pmod d] \Rightarrow aa' \equiv bb' \pmod d$.

Эти теоремы позволяют ввести сумму класса вычетов с целым числом и произведение класса вычетов на целое число (внешние операции для множества классов), а также сумму и произведение двух классов (внутренняя операция). Последние две операции являются каждая коммутативной *, а умножение дистрибутивно по отношению к сложению; это значит, что множество классов вычетов по данному модулю имеет *структуру коммутативного кольца*. Нейтральный элемент сложения есть класс, содержащий 0, а нейтральным элементом умножения является класс, содержащий

* И ассоциативной.— *Прим. перевод.*

$+1$. Но это кольцо резко отличается от кольца целых чисел: во-первых, оно содержит лишь конечное число элементов, с другой стороны, нулевой класс может иметь отличных от нуля (то есть не сравнимых с нулем) делителей. Например,

$$5 \not\equiv 0 \pmod{10} \text{ и } 8 \not\equiv 0 \pmod{10},$$

однако
$$5 \cdot 8 = 40 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Мы увидим, далее, что эта трудность исчезает, если модуль — простое число, откуда и вытекает важность таких чисел.

Теоремы, обратные теореме 2. Запишем детально доказательство теоремы 2:

$$a \equiv b \pmod d \Leftrightarrow \exists q : a - b = dq$$
$$\Leftrightarrow \exists q : ma - mb = mdq = d(mq) = (dm)q.$$

Отсюда выводим

$$ma \equiv mb \pmod d \tag{2}$$

и также

$$ma \equiv mb \pmod{md}. \tag{2'}$$

Обратно, из (2′) выводим

$$\exists q : ma - mb = mdq, \text{ следовательно, } \exists q : a - b = dq,$$

то есть

$$a - b \equiv 0 \pmod d,$$

откуда получается

Т е о р е м а 2′.

$$a \equiv b \pmod d \Leftrightarrow ma \equiv mb \pmod{md}$$

(происходит изменение модуля).

Но из сравнения (2′) еще ничего нельзя вывести относительно сравнения $a - b$ с нулем по модулю md, *так что нельзя делить обе части сравнения на их общий делитель, сохраняя модуль.* Не существует сокращения сравнений.

П р и м е р:

$$48 \equiv 18 \pmod{15},$$

но если разделить на 3, то

$$16 \not\equiv 6 \pmod{15}.$$

Т е о р е м а 2″.

$$a \equiv b \pmod{md} \Rightarrow a \equiv b \pmod d,$$

но обратная теорема не верна.

Эта теорема хотя и очень проста, однако является очень важной, и ее выражают часто в форме, обратно противоположной:

$$a \not\equiv b \pmod d \Rightarrow a \not\equiv b \pmod{md}.$$

Нулевые классы вычетов.

Положим $b \equiv 0$ в теоремах (2) и (2″). Получаем:

Теорема 2 *bis.*

$$a \equiv 0 \pmod d \Rightarrow ma \equiv 0 \pmod d,$$

то есть

$$d \mid a \Rightarrow d \mid ma \text{ или еще } [d \mid a \text{ и } a \mid a'] \Rightarrow d \mid a'.$$

Теорема 2 *ter* *.

$$a \equiv 0 \pmod{md} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod d,$$

то есть

$$md \mid a \Rightarrow d \mid a,$$

или еще

$$[d \mid d' \text{ и } d' \mid a] \Rightarrow d \mid a.$$

Эти теоремы выражают *транзитивность отношений* «быть делителем» или «быть кратным», которые являются *отношениями порядка*, обратными друг другу.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нулевой класс вычетов по модулю a, то есть множество кратных числа a:

$$a' \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow a' \equiv 0 \pmod a \Leftrightarrow a \mid a',$$

и пусть аналогично $\mathfrak{D}$ — нулевой класс вычетов по модулю d. Рассмотренную теорему можно записать так:

$$a \in \mathfrak{D} \Rightarrow \mathfrak{A} \subset \mathfrak{D},$$

или же

$$d \mid a \Rightarrow \mathfrak{A} \subset \mathfrak{D},$$

но из $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}$ вытекает, в частности, $d \mid a$. Значит, окончательно

$$d \mid a \Leftrightarrow \mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}.$$

Значит, существует изоморфизм между отношением «быть кратным» и отношением порядка по включению нулевых классов вычетов. Идет речь о частичной упорядоченности. В общем же случае два нулевых класса по различным модулям нельзя поставить в отношение порядка по включению, поскольку один класс не будет включен в другой. Аналогично отношение «быть делителем» есть отношение частичного порядка на множестве целых чисел. Оно не допускает линейных схем, как мы это сейчас увидим.

§ 3. Кратные и делители. Простые числа

I. Кратные и делители целого числа

А) Кратные целого числа

Кратные целого числа a — это числа $m = aq$, где q — целое число. Если $q = 1$, то $m = a$: каждое число кратно самому себе.

* ter — трижды, в третий раз (*лат.*).— *Прим. ред.*

Если $q = 0$, то $m = 0$: значит, 0 есть кратное всех чисел.

Говорят часто, что m — *собственное кратное* число a, если оно не равно ни нулю, ни a. Число q мы будем предполагать, вообще говоря, положительным.

1. Последовательность кратных натурального числа a.

Перечень кратных: a, $2a$, $3a$, ..., ka, ..., представляет собой упорядоченную последовательность, изоморфную последовательности натуральных чисел, которую следует дополнить по симметрии, если рассматривать также отрицательные кратные. Обозначим это множество кратных $\mathfrak{A}$. Оно имеет следующее свойство:

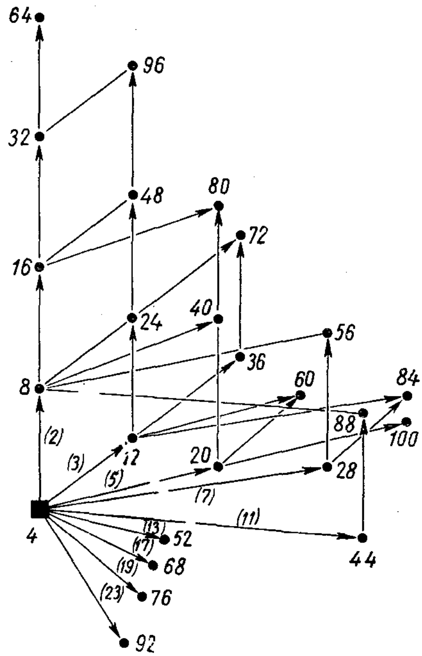
Если a_1 и a_2 — два элемента этого множества, то ему принадлежит также и любое число

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2,$$

где x_1 и x_2 — целые числа.

Это свойство характеризует *идеал* в кольце целых чисел.

Идеалом некоторого кольца A называют подмножество $\mathcal{J}$, которое, с одной стороны, само является кольцом (это значит, что сумма и произведение двух элементов подмножеств $\mathcal{J}$ принадлежат этому же подмножеству) и которое, кроме того, устойчиво по отношению к умножению на какой-либо элемент кольца A (это значит, что произведение любого числа из A на элемент из $\mathcal{J}$ принадлежит также подмножеству $\mathcal{J}$):



Черт. 23

1) $\forall i_1, i_2 \in \mathcal{J}$, $i_1 + i_2 \in \mathcal{J}$ и $i_1 \times i_2 \in \mathcal{J}$;

2) $\forall i \in \mathcal{J}$ и $\forall a \in A$, $i \times a \in \mathcal{J}$.

Так как рассматриваемый идеал состоит из кратных одного числа a, то он называется *главным идеалом*. Мы вернемся позднее к этому понятию, с которым мы встретимся снова при изучении кольца многочленов.

2). *С точки зрения отношения порядка «быть делителем»* множество $\mathfrak{A}$ имеет не столь уж простую структуру. Составим, например, таблицу кратных 4 до $4 \times 25 = 100$. Коммутативность произведения указывает на такие цепи, как, $4 \mid 8 \mid 24$ или $4 \mid 12 \mid 24$.

Договоримся изображать переносами в пространстве каждую из операций: «умножить на 2», «умножить на 3» и т. д.

Ассоциативность умножения соответствует ассоциативности переносов, так что бесполезно рассматривать, например, перенос, изображающий умножение на число 6, равное произведению 2×3. Таким образом, основными множителями являются числа, не имеющие делителей (кроме единицы и себя). Их называют *простыми числами*.

В рассматриваемом примере число 11 необходимо, чтобы составить 44 и 88, но структура схемы будет выяснена только после уточнения цепей, ведущих в общем случае к любому кратному числа a. Это уточнение последует в результате изучения простых чисел.

B) Делители целого числа

Пусть a — натуральное число; рассмотрим его положительные делители. Наименьший из них есть 1, а наибольший само число a. Другие делители, если они существуют, называются «собственными делителями»; их число конечно.

1) *Перечень делителей.* Так как мы ищем конечное подмножество вполне упорядоченного множества чисел, меньших числа a, то нам достаточно испытать последовательно числа, взятые в их натуральном порядке: 2, 3, . . . Но каждому делителю d соответствует другой делитель d', такой, что $a = dd'$, так что при возрастании делителя d соответствующий ему делитель d' убывает. Следовательно, перечень делителей закончен, когда испытуемое в качестве делителя число становится больше частного от деления.

Заметим, что число делителей, вообще говоря, четно, оно нечетно лишь, если a есть квадрат натурального числа.

Примеры:

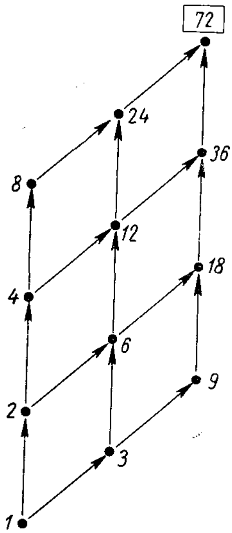
$$72 = 1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9;$$

$$84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12.$$

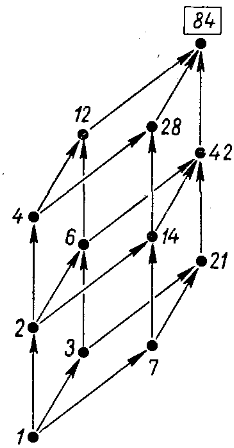
2) *Рассмотрим с точки зрения отношения порядка «быть делителем»* строение множества делителей в двух схемах, соответствующих числам 72 и 84. Мы видим, что цепи кратных начинаются от единицы и сходятся у данного числа. Любые два числа схемы имеют по крайней мере одно общее кратное и по крайней мере один общий делитель. Мы знаем, что это соответствует отношению порядка по включению во множестве кратных каждого из чисел. Говорят, что такое множество является *структурой*; и мы обозначим через $\mathscr{C}_a$ решетку делителей числа a. Значит, мы изображали $\mathscr{C}_{72}$ и $\mathscr{C}_{84}$.

В общем случае, все числа, превосходящие 1, без промежуточных являются простыми числами (согласно теореме 2 bis о сравнениях). Следовательно, *каждое число имеет по крайней мере один простой делитель* (само число, если оно простое). Но более того: *каждое число является произведением простых множителей.*

В самом деле, если a — простое число, то мы имеем: $a = 1 \cdot a$. Если a не простое число, то мы используем какое-либо разложение в виде произведения, потом разложим аналогично каждый непростой множитель, что законно в силу ассоциативности умножения. Так как число делителей, отличных от единицы, конечно и множители могут встречаться лишь в конечном числе, то операция разложения закончится, и она закончится тогда, когда все множители произведения окажутся простыми.



Черт. 24



Черт. 25

На наших схемах это означает, что рассматриваются переносы, соответствующие лишь простым множителям, но все же цепи приведут к данному числу.

Но не отличаются ли все цепи, идущие от 1 к числу a, только порядком переносов? В наших двух примерах это было так. Необходимо изучить это и в общем случае.

Таким образом, два предварительных исследования кратных и делителей некоторого числа показывают необходимость изучить простые числа.

II. Основная теорема

Единственность разложения натурального числа в произведение простых множителей.

Во множестве натуральных чисел рассмотрим подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из натуральных чисел, имеющих более одного разложения на простые множители. Мы хотим показать, что это подмножество пусто.

Подмножество $\mathfrak{M}$ минорируется числом 1 и всеми простыми натуральными числами, которые были непосредственно изучены.

Значит, в силу свойств порядка во множестве натуральных чисел подмножество $\mathfrak{M}$ (если оно не пусто) имеет наименьший элемент, $m > 1$, имеющий двойное разложение

$$m = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = s^{\beta} s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} \dots s_k^{\beta_k},$$

где p_i и s_i все отличны друг от друга (в противном случае после сокращения свойство иметь двойное разложение оказалось бы справедливым для числа, меньшего чем m).

Рассмотрим, в частности, по простому множителю в каждой части равенства, например, p и s. Равенство запишем так:

$$m = pP = sS,$$

где P и S содержат остальные множители. Так как p и s не равны, то пусть, например, $p > s$; мы можем выполнить деление p на s.

Получим:

$$p = sq + r, \quad r < s, \quad r \neq 0,$$

так как p — простое число.

Следовательно, число

$$m' = m - sqP$$

имеет двоякую запись:

$$m' = s(S - qP) = rP < m.$$

Но простое число s, которое фигурирует в первом разложении числа m', не фигурирует во втором. Оно не фигурирует в разложении числа P по предположению и не фигурирует в разложении r, которое меньше чем s. Значит, число m', меньшее чем m, имеет двойное разложение, и мы пришли к противоречию. Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ пусто.

В конечном счете мы показали, что каждому элементу множества $\mathfrak{M}$ можно сопоставить другой элемент того же множества, меньший чем первый, а это противоречит структуре любого множества натуральных чисел. Мы встретимся здесь снова с рассуждением, уже названным *спуском Ферма.* Это рассуждение в той или иной форме вместе с рекуррентным рассуждением являются особенно характерными для теории чисел.

III. Приложения. Общие кратные и общие делители

1) Структуры главного идеала $\mathfrak{A}$ и решетки $\mathscr{C}_a$ полностью выяснены: на наших схемах следует отмечать лишь переносы, соответствующие простым числам, а различные цепи, связывающие два числа, отличаются друг от друга лишь порядком следования переносов.

2) Общие кратные нескольких чисел. Пусть $a, b, \ldots, v$ — конечное число натуральных чисел. Их общие кратные образуют пересечение множеств, кратных каждого из чисел, то есть $\mathfrak{A} \cap \mathscr{B} \cap \ldots \cap \mathscr{V}$. Но разложение на простые множители этих общих кратных получается, если взять *по крайней мере* все простые множители, фигурирующие *хотя бы в одном* из разложений данных чисел, и каждый с показателем, *по меньшей мере равным* тому наибольшему, который этот простой множитель имеет в разложениях данных чисел. Отсюда следует, что рассмотренное множество есть множество кратных наименьшего общего кратного. Значит, *пересечение главных идеалов* $\mathfrak{A}$, $\mathscr{B}, \ldots, \mathscr{V}$ *— это главный идеал* $\mathfrak{M}$, *порожденный наименьшим общим кратным* m.

3) Общие делители нескольких чисел. Множество общих делителей чисел $a, b, \ldots, v$ есть пересечение решеток $\mathscr{C}_a, \mathscr{C}_b, \ldots, \mathscr{C}_v$. Но разложение этих общих делителей на простые множители получается, если взять *не больше*, чем те простые множители, которые фигурируют во всех разложениях данных чисел и каждый с показателем *не превосходящим* наименьший из тех, которые этот простой множитель имеет в различных разложениях. Отсюда следует, что рассмотренное множество есть множество делителей наибольшего из них. Значит, пересечение решеток $\mathscr{C}_a, \mathscr{C}_b \ldots, \mathscr{C}_v$ *— это решетка* $\mathscr{C}_a$, *соответствующая наибольшему общему делителю.* Как всякая операция пересечения, операции получения наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя *коммутативны и ассоциативны.*

Замечание. В случае чисел a и b правило получения наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя показывает, что их произведение равно произведению заданных двух чисел, то есть $md = ab$.

4) Идеал $\mathfrak{M}$ всегда существует и имеет в качестве подмножества главный идеал, порожденный произведением чисел. Наоборот, решетка $\mathscr{C}_d$ может свестись к единственному числу 1. Тогда говорят, что данные числа *взаимно просты в их совокупности*, они могут и не быть попарно взаимно простыми. Если же они попарно взаимно простые, то каждый простой множитель фигурирует лишь в разложении одного из чисел. Числа попарно взаимно простые имеют свойства, сравнимые со свойствами простых чисел. Например: *Чтобы число было кратным произведению попарно взаимно простых сомножителей, необходимо и достаточно, чтобы оно было кратно каждому из сомножителей.*

(Это, очевидно, необходимо и это также достаточно, ибо множество кратных есть идеал, порожденный произведением этих чисел без общих простых множителей.)

Следующее предложение непосредственно вытекает из основной теоремы и очень часто используется:

Если число делит произведение двух сомножителей и взаимно просто с одним из них, то оно делит второй сомножитель.

Теорема. *Если d — простое число, то из $a \cdot b \equiv 0 \pmod{d}$ следует $a \equiv 0 \pmod{d}$, или $b \equiv 0 \pmod{d}$.*

Действительно, сказать, что число a — взаимно просто с d, означает здесь, что a не кратно числу d, но тогда нужно, чтобы b было кратно d.

Теорема, обратная теореме 2 о сравнениях.

[m — взаимно просто с d и $ma \equiv mb \pmod{d}$] $\Rightarrow$ [$a \equiv b \pmod{d}$].

Действительно, это равносильно утверждению, что если число d делит $ma - mb = m(a - b)$ и взаимно просто с m, то оно делит $a - b$. Иначе говоря, *можно разделить оба члена сравнения на число взаимно простое с модулем.* В частности, если модуль — простое число, то достаточно убедиться, что мы не делим на кратное модуля: поэтому *можно сократить оба члена сравнения по простому модулю на число, не сравнимое с нулем по этому модулю.* Таким образом, сравнения по простому модулю имеют те же свойства, что и равенства, по отношению к сложению, умножению и сокращению делением (делитель, разумеется, должен делить оба члена сравнения).

5) **Теорема.** *Во множестве целых чисел каждый идеал $\mathfrak{J}$, порожденный n числами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, является главным идеалом.* Иначе говоря, множество чисел

$$i = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$$

совпадает с множеством кратных некоторого числа. Прежде всего каждое из чисел i кратно наибольшему общему делителю d данных чисел, откуда следует включение $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{D}$.

Остается еще доказать обратное включение. Рассмотрим для этого среди положительных элементов идеала $\mathfrak{J}$ наименьший отличный от нуля элемент j. Пусть

$$j = X_1 a_1 + X_2 a_2 + \ldots + X_n a_n -$$

это наименьший положительный элемент идеала $\mathfrak{J}$. Он меньше, чем a_1 (или в крайнем случае равен числу a_1), которое принадлежит $\mathfrak{J}$, так что можно выполнить деление, и мы будем иметь:

$$a_1 = jq + a_1', \quad 0 \leqslant a_1' < j.$$

Но

$$a_1' = a_1 - jq = (1 - X_1 q) a_1 - X_2 q a_2 - \ldots - X_n q a_n$$

принадлежит идеалу $\mathfrak{J}$ и меньше чем j; поэтому a_1' не может быть положительным, а значит, $a_1' = 0$, следовательно, j есть делитель числа a_1. То же рассуждение применимо к $a_2, \ldots, a_n$, так что j есть общий делитель, значит, делитель наибольшего общего делителя чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Но мы уже видели, что d делит все элементы i, значит, в частности, и элемент j, откуда получается $j = d$, и так как кратные числа j принадлежат идеалу $\mathfrak{J}$, то имеем:

$$D \subseteq \mathfrak{J}.$$

Из двух взаимно обратных включений вытекает

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{D}.$$

Значит, *идеал, порожденный n натуральными числами, является главным идеалом, порожденным наиболее общим делителем этих чисел.*

Заканчивая, заметим, что мы еще раз использовали свойство полной упорядоченности множества натуральных чисел и тот факт, что точная нижняя грань ограниченного снизу множества целых чисел принадлежит этому множеству.

Эти свойства мы не встретим больше в кольце многочленов. Все же некоторые из свойств, которые мы только что доказали, останутся в силе. Вот почему было бы хорошо вновь повторить рассмотрение этих вопросов, но уже в такой форме, которая была бы применима к многочленам. Это явится содержанием § 6.

§ 4. Изучение простых чисел

Простые числа, служащие для образования всех чисел, являются по самому их определению элементами, остающимися в натуральном ряде, если убрать из него числа с собственными делителями. Это определение некоторым образом отрицательно, откуда возникает подозрение об отсутствии единого метода для обнаружения свойств простых чисел, ибо мы скорее знаем, чем не являются эти числа, чем то, чем они являются. Единственный метод, принятый для их изучения,— это метод решета Эратосфена.

Рассмотрим бесконечный натуральный ряд:

$$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$$

Число 1 вообще не рассматривается, как простое. 2 — простое число, это единственное четное простое число. Мы его сохраняем и «зачеркиваем» его кратные, следующие за ним, через каждые два интервала.

3 — простое число. Мы его сохраняем и зачеркиваем его кратные, следующие за ним через каждые три интервала.

4 — уже зачеркнуто, как кратное числа 2, значит, зачеркнуты и все кратные числа 4. Это наводит на мысль: *достаточно зачеркивать кратные простых чисел.*

Число 5 еще не зачеркнуто, значит, оно простое, в противном случае оно было бы вычеркнуто при рассмотрении одного из его делителей, откуда второе замечание: *первое незачеркнутое число, следующее за последним рассмотренным простым числом, само простое.* Затем идет число 6, вычеркнутое, как кратное чисел 2 и 3, затем число 7, не вычеркнутое, значит, простое. Мы его сохраняем и вычеркиваем его кратные, следующие за ним через каждые 7 интервалов. Но первые кратные уже вычеркнуты, и нам достаточно начать отсчитывать по 7 чисел, начиная с $7^2 = 49$. Таким образом, *при рассмотрении простого числа p первым подлежащим зачеркиванию числом является квадрат рассматриваемого числа, то есть p^2.*

После числа 7 идут числа 8, 9, 10, уже зачеркнутые, затем незачеркнутое число «11», являющееся простым и приводящее к зачеркиванию чисел, начиная с $11^2 = 121$. Таким образом, если нам нужен перечень простых чисел, меньших чем 120, то работа закончена: все сохранившиеся (не зачеркнутые) числа составляют искомые простые числа. Формулируем правило: *чтобы получить таблицу простых чисел, меньших числа N, достаточно продолжать операцию просеивания до рассмотрения простого числа, квадрат которого превосходит число N.*

2) Множество простых чисел. Как бы велико ни было число N, перечень простых чисел, меньших числа N, который мы только что получили, не исчерпывает множества простых чисел. В самом деле, на каждом этапе зачеркивались числа: каждое 2, каждое 3 и т. д., значит, число, которое непосредственно предшествует числу, зачеркнутому на всех рассмотренных этапах, и число, которое непосредственно следует за таким числом, наверное, не оказались зачеркнутыми. Таким образом, числа

$$(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) \pm 1,$$

где p — наибольшее простое число, меньшее числа N, то есть последние из рассмотренных простых чисел, не зачеркнуты. Каждое из двух полученных чисел гораздо больше числа p. Либо эти числа простые, либо они не простые, причем в последнем случае они были бы вычеркнуты, если бы операция просеивания была продолжена до получения еще не использованного до сих пор простого числа, большего чем p. Как бы ни было, это доказывает существование по меньшей мере одного простого числа (и даже двух!), превосходящего число N, как бы ни было велико N. Это означает, что существует *бесконечное множество простых чисел.* Этот результат известен с древних времен (Эратосфен, около 200 г. до н. э. Доказательство дано в «Началах» Евклида). Указанный результат приводит, естественно, к вопросам, каким закономерностям подчиняется последовательность простых чисел, какие формулы могут дать, если не все простые числа, то, по крайней мере, только некоторые простые числа. Однако эти проблемы до сих пор не решены. Одним из важных результатов, полученных в этом направлении, является теорема Лежен — Дирихле: в любой арифметической прогрессии, у которой первый член и разность взаимно просты, существует бесконечное множество простых чисел. Очень далеко продолженные таблицы (несколько миллионов простых чисел!)

обнаруживают существование пар последовательных нечетных простых чисел (как, например, 881 и 883); такие числа называют «простыми числами-близнецами». Имеется ли бесконечное число таких пар? Известно лишь несколько предложений следующего типа: Существует бесконечное множество пар чисел n, $n+2$, имеющих каждое меньше чем 9 простых множителей (Виго Брун*). Он же доказал, что, каково бы ни было n, между числами n и $n+\sqrt{n}$ существуют числа, имеющие меньше чем 11 простых множителей. Совсем другие по духу методы, использующие анализ бесконечно малых, позволяют подойти по иному к задаче о близнецах, остающейся одной из самых загадочных задач, поставленных элементарной математикой исследователям.

§ 5. Нумерация

Изученные свойства натуральных чисел позволяют построить систему условий, благодаря которым можно записать и назвать любое определенное натуральное число, как бы велико оно ни было.

1. Позиционный принцип нумерации

Пусть a — некоторое натуральное число, выбранное раз навсегда и называющееся *основанием* системы счисления: $a \geqslant 2$.

Теорема. *Любое натуральное число можно записать и притом единственным образом в форме*

$$N = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_k a^k + \ldots + x_1 a + x_0,$$

где числа x_k — целые неотрицательные, удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant x_k \leqslant a-1.$$

Для доказательства полагаем, в предположении, что искомое выражение существует

$$R_k = x_k a^k + x_{k-1} a^{k-1} + \ldots + x_1 a + x_0,$$

$$N - R_k = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_{k+1} a^{k+1} = Q_k a^{k+1}.$$

Q_k и R_k — это частное и остаток от деления числа N на a^{k+1}, так как имеем:

$$R_k \leqslant (a-1)\, a^k + (a-1)\, a^{k-1} + \ldots + (a-1)\, a + (a-1) = a^{k+1} - 1.$$

Теперь последовательно определяем коэффициенты x_k, начиная с $k = n$ и уменьшая все время индексы: вначале берем в качестве x_n частное от деления числа N на a^n; далее за $x_n a + x_{n-1}$ берем частное от деления числа N на a^{n-1}, затем за $x_n a^2 + x_{n-1} a + x_{n-2}$ берем частное от деления числа N на a^{n-2} и т. д.

Мы получаем этим путем единственное возможное решение задачи, если она имеет хотя бы одно решение. Но введенные таким

* Viggo Brun, *Oslo*, 1920.

образом числа x_k будут меньше числа a, если число n было определено неравенством

$$a^n \leqslant N < a^{n+1}.$$

Действительно, если одно из делений таково $N = Q_k a^{k+1} + R_k$, то следующее деление дает

$$N = (Q_k a + x_k) a^k + R_{k-1},$$

откуда

$$R_k = x_k a^k + R_{k-1} < a^{k+1}, \text{ так что } x_k < a.$$

Наконец, последнее деление на a дает x_0 и доказывает, что полученное выражение годится для представления числа N.

Таким образом, существует *взаимно однозначное соответствие между числами N, удовлетворяющими неравенству $a^n \leqslant N < a^{n+1}$, и конечными последовательностями из $n+1$ чисел x_i, $0 \leqslant x_i < a$.*

Мы будем писать, надчеркивая, чтобы не смешать с произведением

$$N = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_k \ldots x_1 x_0}.$$

Замечание. Мы также могли бы определить сначала x_0, остаток от деления числа N на a, затем $x_1 a_1 + x_0$, остаток от деления числа N на a^2 и так далее, увеличивая все время индексы.

Условные обозначения. Выбирают символы для чисел, меньших числа a, включая 0; этих символов достаточно, чтобы написать числа x_k, значит, и число N. Они называются *цифрами*. (При их использовании уже не прибегают к надчеркиванию.) На практике пользуются цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как за основание принято десять.

II. Практические правила операций

Число, записанное в системе счисления по основанию a, есть многочлен от a. Правила операций были бы, следовательно, такими же, как для многочленов, если бы условие, наложенное на коэффициенты, быть положительными и меньшими a не обязывало к следующим переносам: выражение $(a+b)\,a^n$ нужно записывать так: $a^{n+1} + ba^n$, если $0 < b < a$.

Мы примем a равным десяти.

1) Сложение. Используют таблицу, написанную до $9+9$. Отметим, что при сложении двух чисел, как бы велики они ни были, число, удержанное в уме (подлежащее переносу), не может превосходить 1 (ибо $9 + 9 = 18$, что вместе с удержанной ранее в уме единицей дает лишь 19). Если складывать, например, 10 чисел, то число, удержанное в уме, не может превосходить 9 (ибо $9 \times 10 = 90$, что вместе с удержанным ранее в уме числом 9 дает лишь 99).

Вычисления остаются, следовательно, достаточно простыми, так что можно писать непосредственно последовательные цифры результата без записи промежуточных вычислений. Но при большом числе складываемых чисел предпочтительно вычислить сначала частичные суммы, используя ассоциативность.

2) Вычитание. Мы вычитаем каждый член суммы, образующей второе число, из подобного ему члена многочлена, образующего первое число. Но для избежания отрицательных коэффициентов мы прибавляем, если это нужно, одну и ту же степень основания a к обоим числам; если имеет место $x_k < y_k$, то заменяют $(x_k a^k - y_k a^k)$ следующим выражением:

$$(a + x_k) a^k - y_k a^k - a^{k+1}.$$

Делая так, говорят, что занимают 1, когда находят $(a + x_k) - y_k$, чтобы перенести эту 1 и получить $y_{k+1} + 1$.

Ясно, что при вычитании занимаемые числа не могут превзойти 1. Но сказать, что число N превосходит число N', равносильно утверждению, что вычитание $N - N'$ возможно. Отсюда выводится следующее правило.

Правило распознавания большего из двух чисел.

Число N больше числа N' либо, когда оно имеет больше цифр, чем N', либо, если имеет то же число цифр и первая несовпадающая цифра, считая слева, больше в числе N, чем в числе N'. Это очень важное правило можно, разумеется, доказать непосредственно, исходя из значения группы членов многочлена, обозначенной $Q_k a^{k+1}$.

3) Умножение. Мы используем правило умножения суммы на сумму, делая необходимые переносы. В обычной практике пишут частичные суммы, соответствующие умножению множимого на каждую цифру множителя, что требует использования таблицы умножения до 9×9 и приводит к удержанию в уме, не превосходящему число 8, что выполняют одновременно с собственно умножением без какой-либо дополнительной записи.

Для окончательного сложения, согласно замечанию, сделанному об удерживаемых в уме числах при окончательном сложении, мы заинтересованы в том, чтобы складывать как можно меньше чисел, поэтому в качестве множителя следует взять то из двух чисел, которое имеет меньше отличных от нуля цифр.

4) Деление. Мы уже отметили, что сущность метода сводится к выполнению частичных делений, которые мы продолжаем, принимая каждый временный остаток за делимое, чтобы найти новый член частного. На практике частное вычисляется последовательным нахождением его цифр, то есть использованием частичных частных форм $q_p 10^p$, $q_p \leqslant 9$.

Прежде всего, деления на 10^p, осуществляемые согласно основной теореме о нумерации немедленно, указывают наибольшее приемлемое значение для n, то есть число цифр частного.

Таким образом, так как частное имеет форму

$$q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \ldots + q_1 a + q_0,$$

где n известен, то мы ищем прежде всего q_n.

Пробами, испытывая в качестве множителей цифры от 1 до 9, получают наибольшее число вида $q_n a^n$, произведение которого на делитель можно еще вычесть из делимого. После этого вычисляют разность между делимым и этим произведением, и эта частичная разность берется как новое делимое для разыскания цифры q_{n-1} и т. д.

Метод требует умения вычислять произведения любого числа на однозначное. Кроме того, выполняют одновременно умножения и вычитания, что может привести к удержаниям в уме, не превосходящим число 9 ($9 \times 9 = 81$, 81 вычитаю из 90: удерживаю 9, $81 + 9 = 90$ и т. д.). Известно, что в частичных частных не пишутся бесполезные нули, что цифры делимого сносятся одна за другой по мере необходимости и что испытания сокращаются, если предвидеть удержания в уме, которые возникнут при умножениях.

Замечание. В последовательных делениях при применении алгоритма Евклида для разыскания общего наибольшего делителя (ОНД) двух чисел (см. далее § 6) каждый остаток становится в свою очередь делителем. Поэтому оставляют место для записи этих остатков, располагая вычисления общеупотребительным (по крайней мере во Франции!) способом, то есть записывая частные *над* соответствующими делителями; оставленное свободное место под делителями служит для записи последующих остатков.

Пример: 1734 и 78.

ОНД равен 6.

	22	4	3
1734	78	18	6
174	6	0	
18			

5) Извлечение квадратного корня. Практическое правило извлечения квадратного корня значительно отличается от правила деления. Если дано число N, то ищут натуральное число u, определенное неравенством

$$u^2 \leqslant N < (u+1)^2$$

и полагают

$$N - u^2 = r.$$

Это можно выразить так *:

$$N = u^2 + r \quad (0 \leqslant r \leqslant 2u).$$

---

* Действительно, из приведенного выше неравенства получаем:

$$u^2 \leqslant u^2 + r < u^2 + 2u + 1,$$

то есть

$$0 \leqslant r < 2u + 1,$$

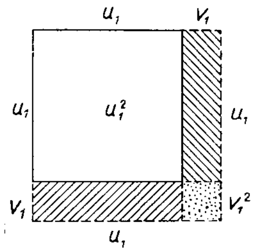
что равносильно неравенству, заключенному в скобки.— *Прим. ред.*

Как в случае деления, придется рассмотреть сначала частичную операцию; мы используем число u_1, такое, чтобы u_1^2 было меньше числа N и мы вычислим предварительный остаток:

$$N - u_1^2 = r_1.$$

Если будет $r_1 > 2u$, то операция должна быть продолжена, однако то, что нужно сделать теперь, не носит того же характера, как первая операция. Речь идет не об образовании квадрата, а об *увеличении первоначального квадрата.* Мы ищем число v_1, такое, чтобы число $s_1 = 2u_1v_1 + v_1^2$ содержалось в остатке r_1. Новым временным квадратным корнем будет число $u_2 = u_1 + v_1$, а новым временным остатком будет число

$$r_2 = r_1 - (2u_1v_1 + v_1^2) = N - (u_1 + v_1)^2.$$



Черт. 26

После этого начинают снова то же, заменив r_1 на r_2 и u_1 на u_2. Следующее замечание упрощает вычисление: поскольку число v_1 мало по сравнению с числом u_1, то небольшим квадратом v_1^2 можно временно пренебречь; тогда $r_1 \stackrel{\bullet}{\simeq} 2u_1v_1$ указывает на то, что v_1 есть частное от деления числа r_1 на $2u_1$. Рискуют лишь получить таким образом слишком большое число v_1; поэтому его нужно испытать, вычисляя выражение

$$r_1 - (2u_1v_1 + v_1^2) = r_1 - v_1(2u_1 + v_1).$$

Практическое вычисление. Если число N дано в десятичной форме, то квадратный корень ищется в виде:

$$u = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_0$$

(основание a равно десяти).

Тогда естественно искать последовательно числа

$$u_1 = x_n a^n; \ v_1 = x_{n-1} a^{n-1}; \ v_2 = x_{n-2} a^{n-2}; \ \ldots$$

причем n определено числом цифр числа N, согласно неравенству

$$a^{2n} \leqslant N < a^{2n+2}.$$

При этом выражения вида

$$2u_1v_1 = 2x_n x_{n-1} a^{2n-1} \text{ и } v_1(2u_1 + v_1) = (2x_n a + x_{n-1}) x_{n-1} a^{2n-2}$$

вычисляются немедленно, так как x_i являются цифрами, а умножения на a^j выполняются приписыванием нулей справа.

В действительности запись сокращают, опуская ненужные нули (как в случае деления), и просто «сносят грани, состоящие каждая из двух цифр» (вместо того, чтобы сносить цифры по одной, как при делении). Добавим, что для выполнения вычислений, состоящих из нескольких операций, среди которых встречаются и извлечения квадратных корней, используют числовые таблицы или математические инструменты (счетные линейки). Однако проведенное выше исследование полезно в простых случаях. Главный интерес заключался здесь в том, чтобы показать, как при вычислении в десятичной системе счисления используется специфика той операции, которую следует выполнить.

III. Признаки делимости

Так называют правила, дающие остатки от делений числа, записанного систематически по основанию a (для нас a равно десяти), на делители, также записанные в этой системе, причем частные нас не интересуют. Мы используем известные теоремы о сравнениях и делимости, которые не зависят от системы счисления.

1) Делитель есть степень основания: $d = a^n$.

Пусть N — данное число; мы знаем, что остаток R_n — это число, образованное n цифрами числа N крайними справа. Если делитель d' есть делитель числа a^n, то из

$$N \equiv R_n \pmod{a^n}$$

следует

$$N \equiv R_n \pmod{d'},$$

так что достаточно делить R_n на d'.

Примеры. $a = 10$, $10 = 2 \times 5$. Остаток от деления числа на 2 или на 5 тот же, что и остаток от деления цифры единиц числа на соответствующий делитель.

$10^2 = 4 \times 25 = 2 \times 50 = 5 \times 20$. Остаток от деления числа на 2, 4, 5, 25, 50 тот же, что и остаток от деления на соответствующий делитель числа, образованного двумя крайними справа цифрами заданного числа. Правило полезно только для деления на 4 и 25, ибо мы имеем уже лучшие правила для деления на 2, 5, 10, 20, 50.

2) $d = a - 1$ или d — делитель числа $a - 1$ (для $a = 10d$ имеет значение 9 или значение 3).

Из

$$a \equiv 1 \pmod{d}$$

получается *:

$$a^k \equiv 1 \pmod{d},$$

откуда

$$x_k a^k \equiv x_k \pmod{d}.$$

Складывая почленно эти сравнения, записанные для различных значений k, приходим к выводу: *любое число сравнимо по модулю* d *с суммой своих цифр*.

На практике в процессе вычисления суммы цифр каждое полученное число, превосходящее основание системы счисления, заменяют суммой его цифр и отбрасывают цифры, кратные делителю d.

* Нужно умножить сравнение $a - 1 = 0 \pmod{d}$ на $a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1$.— *Прим. ред.*

3) *Делимость на числа вида $d = a^n - 1$ и на делители таких чисел.*

Нужно разбить число N на грани по n цифр *.

П р и м е р. $n = 2$. $10^2 - 1 = 99$. Можно принять за d числа 99, или 11, или любой другой делитель числа 99.

Пусть $N = 38\,956$. Пишем:

$$3 \cdot 10^4 \equiv 3;$$

$$89 \cdot 10^2 \equiv 89,$$

значит,

$$N \equiv (3 + 89 + 56) \equiv 148 \equiv 1 + 48 = 49.$$

Таким образом, остаток от деления числа N на 99 есть 49, остаток от деления этого числа на 11 есть $49 - 44 = 5$.

Так как $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$, то таким образом получается правило для делимости на $a + 1$, но для делимости на $a + 1$ мы можем найти несколько более простое правило следующим образом.

4) Делимость на $d = a + 1$. Из

$$a \equiv -1 \pmod d$$

получается **:

$$a^{2k} \equiv +1, \quad a^{2k+1} \equiv -1,$$

$$x_{2k} a^{2k} \equiv x_{2k}, \quad x_{2k+1} a^{2k+1} \equiv -x_{2k+1}.$$

Значит, N сравнимо *** с числом, полученным вычитанием суммы цифр четных рангов из суммы цифр нечетных рангов, считая ранги справа.

О б щ е е з а м е ч а н и е. В действительности только случай нулевых остатков представляет практический интерес для упрощения некоторых вычислений, в частности для сокращения дробей. Вот почему мы не изучаем, например, остатки от деления на $a + 2 = 12$, что можно было бы сделать без труда, исходя из сравнения $10 \equiv -2$. Но и без этого мы можем, используя разложение $12 = 3 \times 4$, предвидеть условие, чтобы остаток равнялся *нулю*, что является единственным практически полезным случаем.

З а м е ч а н и е. Мы увидим после изучения дробей, что нумерация имеет исключительное теоретическое значение, не говоря уже о ее практическом значении, которое трудно переоценить. «Изобретение десятичной системы счисления является, возможно, важнейшим фактом истории науки» (А. Л е б е г).

---

* Считая справа налево, так что последняя грань может оказаться с меньшим числом цифр.— *Прим. перевод.*

** Достаточно учесть разложения (ср. предыдущее)

$$a^{2k} - 1 = (a^2)^k - 1^k = (a + 1)(a - 1)(a^{2(k-1)} + a^{2(k-2)} + \ldots + 1);$$

$$a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + \ldots + 1). — \textit{Прим. ред.}$$

*** По модулю $a + 1$.— *Прим. перевод.*

§ 6. Алгоритм Евклида. Дробные величины

1. Алгоритм Евклида во множестве натуральных чисел

Возвратимся к параграфам 1 и 2, касающимся деления. Мы введем сейчас алгоритм, то есть способ действий, приложимый ко всем множествам, в которых определено деление с *натуральным частным*

$$a = bq + r$$

и в которых отношение порядка придает смысл неравенству $r < b$.

Применяя этот алгоритм к множеству натуральных чисел, мы придем к новым доказательствам теорем из § 3.

Применяя его к величинам, мы сможем ввести дробные величины, а также отношение двух величин одного и того же рода. В одной из последующих глав мы применим этот алгоритм к многочленам от одного неизвестного.

Алгоритм, о котором идет речь, состоит в выполнении последовательных делений с заменой пары делимое — делитель парой делитель — остаток. Получаются равенства:

$$\begin{array}{ll}
a = bq + r, & r < b; \\
b = rq_1 + r_1, & r_1 < r; \\
r = r_1 q_2 + r_2, & r_2 < r_1; \\
\dots\dots\dots\dots & \dots \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}, & r_{n+1} < r_n.
\end{array}$$

Вопрос состоит в том, чтобы узнать, окончится ли алгоритм на каком-либо этапе. Единственное обстоятельство, при котором он может окончиться, — это возникновение нулевого остатка. Если $r_{p+1} = 0$, то последнее деление есть

$$r_{p-1} = r_p q_{p+1}.$$

В случае натуральных чисел убывающая последовательность

$$b > r > r_1 > r_2 > \dots > r_n > \dots$$

необходимо является конечной; значит, процедура окончится, так как возникнет нулевой остаток. Пусть $r_{p+1} = 0$. Мы сосредоточим свое внимание на последнем ненулевом остатке $r_p = d$.

1) Полный перечень общих делителей чисел a и b тот же, что и общих делителей b и r, или общих делителей r и r_1, значит, продолжая в том же духе, тот же, что общих делителей чисел r_{p-1} и r_p, а этот последний перечень совпадает с перечнем делителей числа $r_p = d$. Таким образом, *последний, отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида является общим наибольшим делителем чисел* a и b, *а их общие делители являются делителями этого наи-*

большего общего делителя. (Сокращенное обозначение для общего наибольшего делителя ОНД или онд.)

Если общий наибольший делитель чисел a и b есть 1, то они называются *взаимно простыми.*

2) Свойства общего наибольшего делителя.

Так как мы приходим к d через цепочку линейных соотношений, то *если умножить a и b на одно и то же натуральное число λ*, тогда все последовательные остатки также умножатся на λ, а значит, и общий наибольший делитель умножится на то же число. Если, наоборот, разделить a и b на один из их общих делителей, то все остатки, включая d, также разделятся на это число. В частности, если разделить два числа на их общий наибольший делитель, то их частные окажутся взаимно простыми. Откуда важное предложение: *общий наибольший делитель двух чисел выделяется из просто общих делителей этих чисел следующим характеристическим свойством: частные от деления на него рассматриваемых чисел взаимно просты.*

П р и л о ж е н и е. **Основная теорема.** *Если число делит произведение двух множителей и взаимно просто с одним из них, то оно является делителем второго множителя.*

Дано: 1) $d \mid ab$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ d \mid ab \\ 2)\ \text{ОНД}\ (d, a)=1 \Leftrightarrow \text{ОНД}\ (db, ab)=b \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid b,$$

потому что d, деля db и ab, делит и их ОНД, то есть делит b.

Следствие 1. И з у ч е н и е о б щ и х к р а т н ы х ч и с е л a и b.

Пусть $\mu = aa' = bb'$ — общее кратное чисел a и b, а d — общий наибольший делитель чисел a и b. Тогда

$$a = da'',\ b = db'',\ \text{ОНД}\ (a''b'') = 1.$$

Заменяя в выражениях числа μ, a и b по этим формулам, получаем

$$\mu = da'a'' = db'b'',\ \text{откуда}\ a'a'' = b'b''.$$

Но a'' взаимно просто с b''. Значит, a'' делит b', то есть

$$\exists q,\ b' = a''q,$$

откуда вытекает

$$a' = b''q$$

и, значит,

$$\mu = da''b''q.$$

Обратно, каждое число μ, удовлетворяющее такому равенству, где q — произвольное натуральное число, есть общее кратное, ибо это равенство пишется

$$\mu = ab''q = ba''q.$$

Значит, *общее наименьшее кратное есть $m = da''b'' = ab'' = ba''$, и общие кратные являются кратными этого числа m.*

Кроме того, так как частные от деления m на a и b равны a'' и b'', *то общее наименьшее кратное двух чисел выделяется из просто общих кратных следующим характеристическим свойством: частные от его деления на a и b взаимно просты.*

Следствие 2. Единственность разложения на простые множители.

Если *простое* число делит произведение *двух простых множителей* и не равно некоторому из них, то оно с ним взаимно просто и, значит, оно равно второму множителю.

a) Пусть теперь $p_1p_2 \dots p_n$ — произведение n простых множителей, которое предполагается кратным некоторого простого числа p. Если $p \neq p_1$, то $p \mid p_2p_3 \dots p_n$; если $p \neq p_2$, то он делит $p_3 \dots p_n$ и так далее, согласно ассоциативности умножения. Наконец, если p не равен ни одному из первых $n-1$ множителей, то он с необходимостью равен последнему. Значит, *если простое число делит произведение простых чисел, то оно равно одному из них.*

в) Пусть теперь существует двоякое разложение натурального числа на простые множители

$$p_1p_2 \dots p_n = q_1q_2 \dots q_k.$$

Так как p_1 делит это число, то оно фигурирует и во втором члене, что позволит сделать сокращение. Таким образом сокращают на все простые множители, и так как число 1 не может равняться произведению натуральных чисел, отличных от единицы, то в конечном счете не останется ни одного множителя. Значит, разложения были одинаковыми, так что единственность доказана.

Следствия этой единственности были изложены в предыдущей главе, и мы к ним больше не возвращаемся.

3. Изучение идеала $\mathcal{J}$ множества чисел $xa + yb$, где x и y — целые числа произвольных знаков.

a) Алгоритм Евклида дает решение уравнения $xa + yb = d$, где d — общий наибольший делитель чисел a и b. Действительно, $r, r_1, \dots, r_{p-1}, r_p$ можно исключить из равенств алгоритма. Начинают с $r_p = d$, откуда

$$d = (-q_p)\, r_{p-1} + r_{p-2}, \quad \text{но} \quad r_{p-1} = (-q_{p-1})\, r_{p-2} + r_{p-3},$$

откуда

$$d = x_{p-2}r_{p-2} + y_{p-3}r_{p-3}, \quad \text{но} \quad r_{p-2} = (-q_{p-2})\, r_{p-3} + r_{p-4},$$

следовательно,

$$d = x_{p-3}r_{p-3} + y_{p-4}r_{p-4},$$

и так далее, где x и y зависят лишь от частных q_i. Продолжая, находим окончательно

$$d = x_0a + y_0b\,^*.$$

---

* В соответствии с принятыми обозначениями следовало бы написать $d = x_{-1}b + y_{-2}a$, так что x_0 и y_0 — это новые обозначения для y_{-2} и x_{-1}.— *Прим. ред.*

В частности, если a и b — взаимно просты, то алгоритм дает пару целых чисел, положительных или отрицательных, x_0, y_0 и таких, что

$$1 = x_0 a + y_0 b.$$

Таким образом, каждое кратное числа d имеет вид $xa + yb$; но каждое число этого вида есть кратное числа d, потому что d делит a и b. Следовательно, *идеал $\mathcal{J}$ совпадает с множеством кратных числа d.* Эта теорема была доказана в § 3 для любого числа членов a, b, ... v.

в) Решение уравнения $xa + yb = c$ в целых числах (диофантово уравнение).

Мы только что видели, что задача имеет решение лишь в случае, когда c кратно общему наибольшему делителю чисел a и b. Сократим уравнение на это число d; получается $xa' + yb' = c'$, где a' и b' — взаимно просты. Алгоритм Евклида дает пару X_0, Y_0, для которых $X_0 a' + Y_0 b' = 1$, откуда

$$(X_0 c')\, a' + (Y_0 c')\, b' = c'.$$

Следовательно, мы нашли частное решение

$$x_0 = X_0 c', \quad y_0 = Y_0 c'$$

уравнения $xa' + yb' = c'$.

Разыскание общего решения. Исключим свободные члены из $xa' + yb' = c'$ и $x_0 a' + y_0 b' = c'$.

Получается: $(x - x_0)\, a' = -(y - y_0)\, b'$, где a' и b' — взаимно просты. Отсюда мы выводим, используя основную теорему,

$$\exists k : x - x_0 = kb', \quad y - y_0 = -ka'.$$

Обратно, каково бы ни было число k (целое), эти формулы дают, очевидно, решение; следовательно, они дают общее решение.

Неопределенное уравнение имеет решения только тогда, когда число c кратно общему наибольшему делителю чисел a и b; эти решения даются формулами:

$$x = x_0 + kb'; \quad y = y_0 - ka',$$

где k — произвольно целое число, x_0 и y_0 составляют частное решение (найденное, например с помощью алгоритма Евклида), a', b' являются частными от деления коэффициентов a и b на их ОНД.

Замечание. Диофантово уравнение можно записать и так: $ax \equiv c \pmod{b}$. Если модуль b — простое число, то получается единственное решение по этому модулю. В частности, если b — простое число и a — данное число, отличное от нуля, то сравнение $ax \equiv 1 \pmod{b}$ имеет единственное решение относительно x по модулю b. Это значит, что *кольцо классов вычетов по простому модулю b является полем.* Это поле имеет конечное число b элементов.

II. Алгоритм Евнлида во множестве величин

Определим евклидово деление во множестве данного рода величин. Лишь частные будут числами, притом натуральными.

Пример 1. Длина прямолинейного отрезка. Физическая операция «приставить началом к концу» определяет *сложение* длин $G = G_1 + G_2$, откуда получаем *умножение длин на натуральное число.* Знак = символически обозначает отношение эквивалентности «иметь одну и ту же длину», что определяется опытным путем, наложением. Отношение порядка «быть больше, чем» означает здесь «быть длиннее, чем»; это отношение всеобщего порядка $G > G_1$ определяется опытом, дающим в то же время разность $G - G_1$, результат операции, обратной сложению. Эта обратная операция приводит к введению нулевой величины (или нулевой длины), которую мы обозначим через O. Физика утверждает, что эти операции имеют свойство обычной коммутативности и ассоциативности.

Пример 2. Масса тела. Применение весов дает словарь: $G = G_1$ означает: оба тела производят с точки зрения равновесия один и тот же эффект на чашку весов.

$G = G_1 + G_2$ означает: G производит на чашку весов тот же эффект, что и помещенные туда одновременно тела G_1 и G_2, и т. д.

Физическая величина определяется описанием процедуры, позволяющей составить искомый словарь, если только обеспечены желаемые свойства, что делает из множества G величин этого рода *модуль* , имеющий в качестве множества операторов кольцо целых чисел. К гипотезе существования отношения всеобщего порядка мы присоединяем еще гипотезу: *Множество удовлетворяет аксиоме Архимеда.* Напоминаем, что согласно этой аксиоме, какова бы ни была данная величина G, последовательность кратных G_1, $2G_1$, . . ., nG_1, . . . превзойдет G при любой величине G_1. Отсюда следует, что, какова бы ни была пара величин G, G_1 $(G > G_1)$, для них определено евклидово деление:

$$\exists q_1 \text{ — натуральное } q_1 G_1 \leqslant G < (q_1 + 1) G_1,$$

причем остаток равен:

$$G_2 = G - qG_1,$$

так что деление определяется также условиями

$$G = q_1 G_1 + G_2, \quad G_2 < G_1. \tag{i}$$

Мы будем пользоваться также неравенством

$$G_2 \leqslant G - G_1,$$

вытекающим из $q_1 \geqslant 1$, откуда

$$2G_2 < G. \tag{i'}$$

Начиная с G и G_1, $G > G_1$, мы можем, стало быть, осуществить алгоритм Евклида и получаем:

$$G = q_1 G_1 + G_2$$
$$G_1 = q_2 G_2 + G_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad G > G_1 > G_2 > \ldots > G_n > \ldots$$
$$G_n = q_{n+1} G_{n+1} + G_{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Последовательность операций закончится лишь тогда, когда получится нулевой остаток, если такой остаток когда-либо получится. Остановим вычисления, когда появится остаток G_p. Как мы видели, в случае натуральных чисел существует пара целых чисел, положительных или отрицательных, x_p, y_p, таких, что:

$$x_p G + y_p G_1 = G_p.$$

Но нам необходимо некоторое уточнение; поэтому вернемся к вычислению. (Маленькие буквы обозначают *натуральные числа.*)

$$G_p = -q_{p-1} G_{p-1} + G_{p-2}.$$

Но

$$G_{p-1} = -q_{p-2} G_{p-2} + G_{p-3},$$

поэтому

$$G_p = +(q_{p-1} q_{p-2} + 1) G_{p-2} - q_{p-1} G_{p-3} = s_{p-2} G_{p-2} - t_{p-3} G_{p-3}.$$

Но

$$G_{p-2} = -q_{p-3} G_{p-3} + G_{p-4},$$

поэтому

$$G_p = -(s_{p-2} q_{p-3} + t_{p-3}) G_{p-3} + s_{p-4} G_{p-4} = -s_{p-3} G_{p-3} + t_{p-4} G_{p-4}$$

и так далее, так что

$$G_p = s_{p-2k} G_{p-2k} - t_{p-2k-1} G_{p-2k-1},$$
$$G_p = -s_{p-2k-1} G_{p-2k-1} + t_{p-2k-2} G_{p-2k-2}.$$

Следовательно, в зависимости от четности или нечетности числа p, мы получаем

$$G_p = a_p G - b_p G_1, \quad \text{или} \quad G_p = -a_p G + b_p G_1.$$

Кроме того, если выбрать последовательно индексы p возрастающими, то составленные из натуральных чисел сложениями числа a_p и b_p *возрастают и стремятся к бесконечности*, когда p стремится к бесконечности, если только не появится нулевой остаток.

С другой стороны, в силу неравенств типа (i'), последовательность остатков удовлетворяет неравенствам:

$$G > 2G_2 > 2^2 G_4 > \ldots > 2^k G_{2k} > \ldots,$$
$$G_1 > 2G_3 > 2^2 G_5 > \ldots > 2^k G_{2k+1} > \ldots.$$

Поэтому, если ни один остаток не равен нулю, то остаток G_p стремится к нулю, когда p стремится к бесконечности: действительно, согласно аксиоме Архимеда, если бы все G_p оставались бы большими некоторой величины Γ, то существовало бы натуральное k, такое, что

$$2^k G_{2k} > 2^k \Gamma > G,$$

что противоречит выше написанным неравенствам. Установив это, мы должны, очевидно, для теоретического исследования, при котором не пренебрегают никакими остатками, рассмотреть два случая.

Первый случай. Один из остатков равен нулю. $G_p = 0$. Алгоритм Евклида останавливается на соответствующем этапе. Следовательно, существует пара натуральных чисел a_p, b_p, которые для упрощения будем обозначать a и b, таких, что $aG = bG_1$. Уточняем, выполняя вычисления в противоположном направлении:

$$G = q_1G_1 + G_2 = (q_1q_2+1)\,G_2 + q_1G_3 = \ldots = c_nG_n + d_nG_{n+1} = \ldots = cG_{p-1},$$

так как G_p равен нулю.

Аналогично

$$G_1 = q_2G_2 + G_3 = \ldots = dG_{p-1}.$$

Таким образом, G и G_1 являются величинами, кратными величины $G_{p-1} = \Gamma$, последнего отличного от нуля остатка. Говорят, что Γ есть общая мера величин G и G_1. Две величины, имеющие общую меру, называются соизмеримыми. Имеем:

$$cd\Gamma = dG = cG_1,$$

но мы положили $aG = bG_1$, следовательно,

$$acG = bcG_1 \quad \text{и} \quad bdG = bcG_1,$$

так что

$$ac = bd.$$

Условились писать

$$\Gamma = \frac{1}{c}\,G = \frac{1}{d}\,G_1.$$

Но, как и для натуральных чисел, каково бы ни было натуральное число λ, λG и λG_1, приводят к $\lambda\Gamma$ с теми же частными, значит, и с теми же числами c и d, так что имеем:

$$G = c\Gamma = \frac{1}{d}\,(cG_1) = c\left(\frac{1}{d}\,G_1\right),$$

что записывают

$$G = \left(\frac{c}{d}\right) G_1.$$

Чтобы считать равенство $\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$ следствием равенства $ac = bd$, нужно, согласно тому, как было введено $\frac{c}{d}$, чтобы $\left(\frac{1}{b}\right) G$

было некоторой величиной Γ'. Следовательно, для величин нужно ввести аксиому непрерывности: *Каково бы ни было натуральное* n, *существует величина* Γ', *такая, что* $n\Gamma' = G$.

Тогда введенные символы $\frac{c}{d}$ и $\frac{b}{a}$ имеют те же свойства, которые определяют дроби и рациональные числа (кн. 1). *Величины образуют векторное пространство с полем рациональных чисел в качестве множества операторов.*

Рациональное число, представленное через $\frac{c}{d}$ и $\frac{b}{a}$, называется *отношением* величины G к величине G_1. Отношение величины G_1 к величине G есть $\frac{d}{c}$. (Исторически понятие отношения соизмеримых величин и привело естественным образом к понятию дроби.) Часто пишут:

$$\frac{G}{G_1}=\frac{c}{d}; \quad \frac{G_1}{G}=\frac{d}{c}.$$

Из типографских соображений мы будем писать также G/G_1.

Алгоритм Евклида приводит в рассматриваемом случае к общей мере Γ, которая является наибольшей, так как каждая общая мера величин G и G_1 является также общей мерой всех остатков G_n, за исключением нулевого; поэтому любая общая мера является аликвотной частью величины Γ, то есть имеет любое из значений

$$\Gamma,\ \frac{1}{2}\Gamma,\ \frac{1}{3}\Gamma,\ \ldots,\ \frac{1}{n}\Gamma,\ \ldots$$

Второй случай. Каково бы ни было число p, остаток G_p отличен от нуля.

Тогда G и G_1 *не имеют общей меры*, так как для достаточно большого p величина $G_p = \pm(a_pG - b_pG_1)$ становится меньше любой наперед заданной величины, в то время как она должна была бы равняться некоторому кратному общей меры, если бы таковая существовала. Возможно ли в этом случае определить с помощью некоторого процесса дополнения то, что можно было бы назвать «отношением величины G к величине G_1»?. Мы сохраняем, естественно, аксиому непрерывности, так что можем написать:

$$\frac{1}{a_p}G_p = \pm\left(G - \frac{b_p}{a_p}G_1\right).$$

Мы знаем, что a_p стремится к бесконечности, а G_p стремится к нулевой величине, когда p стремится к бесконечности. Поэтому, если $f_p = \frac{b_p}{a_p}$ имеет в этих условиях предел ϱ, то нужно будет положить

$$G = \varrho G_1;$$

отношение величины G к величине G_1 будет в этом случае действительным не рациональным числом. Уточним теперь, как изменяется f_p с изменением числа p*.

$$\frac{1}{a_p} G_p = G - f_p G_1, \quad \frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} = -G + f_{p+1} G_1$$

и

$$\frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = G - f_{p+2} G_1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{a_p} G_p + \frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} = (f_{p+1} - f_p)\, G_1;$$

$$\frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} + \frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = (f_{p+1} - f_{p+2})\, G_1;$$

$$\frac{1}{a_p} G_p - \frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = (f_{p+2} - f_p)\, G_1 \ \text{причем} \left\{ \begin{array}{l} G_{p+2} < G_p; \\ a_{p+2} > a_p, \end{array} \right.$$

откуда получается:

$$f_p < f_{p+2} < f_{p+3} < f_{p+1},$$

каково бы ни было натуральное четное p **.

Значит, рациональные числа f_p определяют последовательность вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю. Поэтому, как мы знаем, последовательность этих чисел имеет предел, действительное число ϱ, для которого дроби f_p являются приближенными значениями с недостатками и с избытками попеременно. Условились писать и в этом случае $G = \varrho G_1$ и $\frac{G}{G_1} = \varrho$. Так как ϱ *иррационально, то* G *и* G_1 *— несоизмеримые величины.* Таким образом, алгоритм Евклида дает на каждом этапе приближенные рациональные значения отношения двух величин, независимо от того, соизмеримы эти величины или нет. Заметим, что так как символ $\frac{G}{G_1}$ имеет теперь смысл во всех случаях, то можно написать:

$$\frac{G}{G_1} = q_1 + \frac{G_2}{G_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{G_1}{G_2}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{G_2/G_3}} = q + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{G_3/G_4}}} \ \text{и т. д.}$$

Символ, который вводится таким образом,

$$q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \ldots}},$$

---

* В дальнейших формулах предполагается, что p — число четное.— *Прим. ред.*

** При нечетном p получим: $f_p > f_{p+2} > f_{p+3} > f_{p+1}$, и следующее дальше заключение будет оправдано.— *Прим. ред.*

независимо от того, будет ли он конечным или нет, называется *непрерывной дробью*. Легко понять, что этот символ имел важное значение для изучения чисел, иррациональность которых подозревалась, в частности для изучения числа π [Броункер (Brouncker W., 1620—1684), Ламберт (Lambert, 1728—1777)] *.

С практической точки зрения, а не с теоретической все эксперименты делаются с известным приближением; остатки G_n, которые убывают и стремятся к нулю, становятся в конце концов порядка малости ошибок измерения. Эксперимент прекращают на последнем остатке, превосходящем ошибки эксперимента, и этот остаток служит приближенной общей мерой. Только в случае, когда величины G и G_1 теоретически определяются одна по отношению к другой, можно ставить вопрос, соизмеримы ли эти величины. Известно что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы. Алгоритм Евклида (вернее его было бы назвать алгоритмом Евдокса) позволяет заменить иррациональное отношение (которое древние математики считали несуществующим) последовательностью рациональных чисел, неограниченно приближающихся к этому отношению.

Замечание. Десятичное измерение величин. Понятие дроби много потеряло в своем практическом значении с введением десятичной нумерации. Любая величина U достаточно малая может служить приближенной аликвотной частью любой величины G, ибо в делении

$$G = qU + G'$$

величина G' меньше чем U, и, значит, практически ею можно пренебречь. Поэтому используют семейство единиц

$$U_0, \ \frac{1}{10}U_0, \ \frac{1}{10^2}U_0, \ \ldots, \ \frac{1}{10^n}U_0 = U_n.$$

Мера величины G с помощью основной единицы U_0 становится десятичным числом, так что изменение единицы измерения вызывает лишь отделение запятой дробно-десятичной части от целого отношения G/U_n.

Вторая глава

ДРОБИ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Мы ввели (книга I. Фундаментальные структуры) рациональное число как *класс эквивалентности*, а именно две дроби a/b и a'/b' рассматриваются как эквивалентные, если $ab' = ba'$.

* См., например, книгу А. Лебега, *H. Lebesgue Constructions géométriques. Gauthier — Villars.*

I. Дроби

Основная теорема теории натуральных чисел приводит к основной теореме теории дробей.

Основная теорема. *Если дробь имеет своими членами взаимно простые натуральные числа, то члены любой дроби, эквивалентной первой, являются кратными этих натуральных чисел с одним и тем же коэффициентом кратности.*

Действительно, из предложений:

$$\begin{cases} ab' = ba', \\ a \text{ и } b \text{ — взаимно простые,} \end{cases} \tag{1}$$

вытекает, согласно основной теореме теории натурального числа, что a делит a', так как оно делит ba' и взаимно просто с b.

Значит,

$$\exists k : a' = ak,$$

откуда, согласно равенству (1),

$$b' = bk.$$

Дробь, члены которой взаимно просты, называется *несократимой*. *Каждое рациональное число представимо несократимой дробью единственным образом.* Ее получают исходя из одной какой-либо дроби данного класса и сокращая оба члена дроби на их общий наибольший делитель.

В теоретическом исследовании рациональное число всегда предполагается представленным несократимой дробью. Аналогично при приведении дробей к *общему наименьшему знаменателю* предполагают сначала эти дроби сокращенными: искомым знаменателем является тогда общее наименьшее кратное знаменателей этих дробей.

Замечание. При введении иррациональных чисел мы использовали в частном случае теорему: *квадрат нецелого рационального числа не есть целое число.* Эта теорема общая.

Действительно, пусть a/b — несократимая дробь, представляющая данное число, где b не равно 1; квадрат этой дроби a^2/b^2 также несократимая дробь, ибо ее члены, также как a и b, не имеют общих простых множителей. Так как знаменатель отличен от 1, то дробь не равна целому числу. Отсюда вывод:

Всякое натуральное число, не являющееся квадратом (или *n-й степенью*) *натурального числа, не является также квадратом* (или *n-й степенью*) *рационального числа.*

Рациональное число есть квадрат (или *n-я степень*) *другого рационального числа тогда и только тогда, когда оба члена несократимой дроби, представляющей это число, является каждый в отдельности квадратом* (или *n-й степенью*) *натурального числа.*

II. Десятичные дроби

В десятичной нумерации степени числа 10 являются примечательными числами. Последовательность натуральных степеней числа 10 дополняют последовательностью целых отрицательных степеней, определенных следующим образом:

$$10^{-1}=\frac{1}{10},\qquad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100},\qquad 10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000},\ \ldots,$$

присоединяя еще

$$10^0=1.$$

Условие позиционной нумерации, согласно которому перемещение цифр на n разрядов влево означает умножение числа на 10^n, приводит к записи цифр правее цифр единиц тогда, когда хотят делить на 10^n, то есть умножить на $1/10^n$. Откуда обозначения

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1,\qquad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0{,}01,\ \ldots$$

Десятичной дробью называют дробь, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10.

Пусть дана десятичная дробь $\varrho = N/10^p$, причем выражение числа N в десятичной системе счисления есть

$$N=x_n10^n+x_{n-1}10^{n-1}+\ldots+x_110+x_0.$$

Тогда дробь принимает следующее десятичное представление:

$$f=x_n10^{n-p}+x_{n-1}10^{n-p-1}+\ldots+x_110^{-p+1}+x_010^{-p}.$$

Если f не является натуральным числом, то хотя бы один из показателей последних (правых) членов, наверное, отрицателен, тогда как показатель любого члена, находящегося левее его, может быть положительным, отрицательным или нулевым. Цифры, соответствующие отрицательным показателям, отделяют запятой и ставят 0 слева от запятой, если совсем нет членов с положительным или нулевым показателем, так что имеем:

$n\geqslant p\qquad f=\overline{x_nx_{n-1}\ldots x_k,\ x_{k-1}\ldots x_1x_0}$, например, 342,504;

$n=p-1\qquad f=\overline{0,\ x_nx_{n-1}\ldots x_1x_0}$, например, 0,342;

$n<p-1\qquad f=\overline{0,\ 00\ldots 0x_nx_{n-1}\ldots x_1x_0}$, например, 0,0034.

Цифры, справа от запятой, называются *десятичными знаками*; они образуют *десятичную часть* числа f, в то время как совокупность цифр, находящихся слева от запятой, образуют целую часть числа f. Тогда десятичная дробь f записана в десятичной форме.

Правила первых трех операций над десятичными дробями, записанными в десятичной форме, выводятся, как и правила этих операций над натуральными числами, записанными в десятичной форме, из свойств коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Мы не будем заниматься подробностями этих правил. Мы заключаем только, что *десятичные дроби составляют кольцо*, как и целые числа.

Но если рассмотреть *деление*, операцию обратную умножению, то мы увидим, что это кольцо, как и кольцо целых чисел, не является телом: действительно, частное

$$q=\frac{N}{10^p}:\frac{N'}{10^{p'}}=\frac{N}{10^p}\times\frac{10^{p'}}{N'}=\frac{N}{N'}10^{p'-p}$$

не является, вообще говоря, десятичной дробью. Деление невозможно в этом кольце, и это приводит к определению новой операции, аналогичной евклидову делению (с частным и остатком), введенному в кольце целых чисел.

Если A и B — натуральные числа, то частное Q было определено неравенством

$$BQ\leqslant A<B(Q+1).$$

Сохраним это определение

$$bQ\leqslant a<b(Q+1)$$

для десятичных дробей a и b, точное частное которых есть $a/b = q$; тогда натуральное число Q будет определено неравенствами

$$Q\leqslant q<Q+1.$$

(Отметим, что здесь точное частное определено, что не имело места в случае целых чисел.) Но q есть какое-то рациональное число; значит, ставится вопрос о том, чтобы найти такие соседние натуральные числа, между которыми располагалось бы данное рациональное число, или, как говорят, найти целую часть* рационального числа. В более общем случае, так как целые числа являются лишь частным случаем десятичных чисел, возникает задача *поместить данное рациональное число между двумя соседними десятичными числами определенного разряда.*

III. Кольцо десятичных дробей в поле рациональных чисел

1) **Десятичное число.** Рациональное число называется *десятичным числом*, если хотя бы одна из дробей, которые его представляют, является десятичной дробью; тогда в этом самом классе находится бесконечное множество десятичных дробей, ибо можно умножить оба члена дроби на любую степень десяти. Значение десятичного числа не меняется, если приписать или зачеркнуть несколько нулей, правее десятичных знаков, подобно тому, как значение целого числа не меняется, если приписать нули слева от значащих цифр. Наиболее простой из этих десятичных дробей является та

* С недостатком и с избытком.— *Прим. перевод.*

единственная дробь, числитель которой не имеет нуля в качестве цифры единиц; ее десятичная форма не оканчивается справа нулем.

Условие, чтобы рациональное число было числом десятичным. Рациональное число определено дробью, которая его представляет. Мы будем предполагать эту дробь несократимой, то есть уже сокращенной, если это нужно. Пусть, таким образом, рациональное число задано дробью

$$\frac{a}{b}, \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ взаимно просты.}$$

Так как любая дробь, равная этой, имеет своими членами кратные чисел a и b с одним и тем же коэффициентом кратности, то необходимое и достаточное условие, чтобы рациональное число было десятичным, состоит в том, чтобы существовала степень десяти, кратная b, то есть, значит, *чтобы b не имело других простых делителей, кроме чисел 2 и 5.*

2) **Десятичные приближения рационального числа.** Множество десятичных чисел всюду плотно на интервале $(0, +\infty)$, ибо $1/10^n$ стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$, так что интервалы

$$\left(0, \frac{1}{10^n}\right), \quad \left(\frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}\right), \ldots, \left(\frac{p}{10^n}, \frac{p+1}{10^n}\right), \ldots$$

покрывают интервал $(0, A)$ для любого A, имея каждый длину меньше ε, если n взять достаточно большим.

a) Если n выбран, то можно аппроксимировать каждое рациональное число r с точностью до $1/10^n$ двумя десятичными дробями, заключающими это число

$$\frac{p}{10^n} \leqslant r < \frac{p+1}{10^n}.$$

Эти десятичные дроби называются десятичными приближениями числа с недостатком и с избытком с точностью до $1/10^n$.

Число p можно вычислить с помощью следующего замечания. Если число r задано дробью $\frac{a}{b}$, то неравенство

$$\frac{p}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{p+1}{10^n}$$

дает

$$bp \leqslant a10^n < b(p+1),$$

откуда видим, что p является целым частным от деления числа $a \cdot 10^n$ на b.

b) Придадим теперь числу n значения последовательных натуральных чисел. Мы получим две последовательности десятичных приближений числа r: одна, состоящая из приближений с недостатком, назовем ее S, другая — из приближений с избытком, назовем ее S'.

Изучим последовательность S:

$$\left\{p_0 \text{ (целое)}, \quad \frac{p_1}{10}, \quad \frac{p_2}{10^2}, \ldots, \frac{p_n}{10^n}\right..$$

Мы знаем, что $\tilde{p}_n$ вычисляется делением

$$bp_n \leqslant a \cdot 10^n < b(p_n + 1),$$

или, вводя в явном виде остаток,

$$a \cdot 10^n = bp_n + r_n, \quad r_n < b.$$

Отсюда выводим

$$a10^{n+1} = b(10p_n) + 10r_n.$$

Чтобы получить $p + 1$, достаточно, следовательно, разделить $10\,r_n$ на b:

$$10r_n = bs + r_{n+1}, \quad r_{n+1} < b, \quad s < 10.$$

Тогда равенство

$$a10^{n+1} = b(10p_n + s) + r_{n+1}, \quad \text{где } r_{n+1} < b,$$

доказывает, что

$$p_{n+1} = 10p_n + s$$

является числом, которое получится приписыванием к p_n справа цифры s.

Иначе говоря, после выполнения деления натуральных чисел, которое дает p_n, справа от остатка r_n приписывают 0 и продолжают деление, чтобы получить p_{n+1}. Если запятая уже была поставлена, чтобы написать десятичное приближение $p_n/10^2$, то она сохраняет свое место и $p_{n+1}/10^{n+1}$ получается приписыванием нового десятичного знака справа. Таким образом, *последовательность S приближений с недостатком* является возрастающей, если только все цифры, которые следует приписывать, не оказываются нулями, начиная с некоторого разряда. Это нужно исследовать.

Первый случай. *Для некоторого значения числа n получается $r_n = 0$.* Процедура прекращается, полученное значение $\frac{p_n}{10^n}$ равно дроби $\frac{a}{b}$, которая, следовательно, является представителем десятичного числа.

Второй случай. *Ни для какого значения n не получается $r_n = 0$.* Это значит, что не существует десятичной дроби, равной дроби $\frac{a}{b}$. В этом случае при продолжении процедуры найдутся с необходимостью десятичные знаки, отличные от нуля в более далеких разрядах, чем разряд, соответствующий остатку r_n, как бы велико ни было n, ибо, приписывая справа достаточно нулей к отличному от нуля остатку, получаем частичные делимые, которые в конце концов обязательно превзойдут делитель b. Следовательно, процедура продолжается бесконечно. Последовательность S состоит из бесконечного множества возрастающих десятичных чисел, полученных приписыванием справа все новых цифр, которые не все равны нулю. Эта последовательность ограничена справа рациональным числом $\frac{a}{b}$, являющимся ее пределом, согласно определению предела (кн. I, гл. IV, § 3).

П р и м е р.

$$\frac{a}{b}=\frac{214}{65}\qquad \begin{array}{r|l} 214 & 65 \\ \cline{2-2} 190 & 3,2\underbrace{923076}92\ldots \\ \to 600 & \\ 150 & \\ 200 & \\ 50 & \\ 500 & \\ 450 & \\ \to 600 & \\ 150 & \\ 20 & \end{array}$$

Мы констатируем на этом примере, что, получив остаток 60, который, после того как мы снесли один нуль, дает частичное делимое 600, и продолжая операцию деления, мы снова приходим на некотором этапе к остатку 60: с этого места операция воспроизводится; последовательность цифр частного повторяется так же, как и последовательные остатки. Когда закон такого рода, определяющий цифры частного, становится известным, мы его указываем символически, ставя многоточие, что читается «и так далее». Число 923 076 называется *периодом*, число 3, 2, предшествующее периоду, образует так называемую *неправильную часть* *. Мы получаем *бесконечный периодический десятичный символ*. Так же происходит и в общем случае.

Теорема. *Если дробь $\frac{a}{b}$ не равна десятичному числу, то она порождает бесконечный периодический десятичный символ.* Действительно, так как все остатки меньше делителя, то различных остатков имеется конечное число; поэтому процедура не может продолжаться до бесконечности без того, чтобы снова не нашелся уже полученный ранее остаток.

Заметим, что, согласно определению элементов последовательности S, все равные между собой дроби порождают одну и ту же последовательность. Значит, *каждое не десятичное рациональное число определяет последовательность, пределом которой это число и является; членами этой последовательности являются числа, которые мы получаем, сохраняя* 1, 2, . . ., n, . . . *цифр слева в бесконечном периодическом десятичном символе, находить который мы умеем. Бесконечная последовательность называется* ***р а в н о й*** *п о р о ж д а ю щ е м у е е ч и с л у.*

Обратно, *каждый бесконечный периодический десятичный символ происходит от рационального числа, за исключением случая, когда период содержит лишь цифру 9.*

---

* В русской терминологии это *предпериод.— Прим. перевод.*

В самом деле, пусть мы имеем символ, образованный из неправильной части

$$\alpha = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k,\ b_1 b_2 \ldots b_n} \qquad (\alpha \text{ может равняться нулю})$$

и периода

$$\pi = \overline{c_1 c_2 \ldots c_p}, \quad c_p \neq b_n.$$

Необходимыми и достаточными условиями для a и b являются следующие.

Первый период начинается после того, как мы разделим на b целое число $10^h a$, что дает остаток R. Второй период начнется с частичного делимого, возникающего, если исходить из того же остатка R, полученного на этот раз делением на b натурального числа $10^{h+p} \cdot a$. Но частными в этих двух делениях являются соответственно $10^h \alpha$ и $10^{h+p}\ \alpha + \pi$. Это выражается так:

$$\begin{cases} 10^h a = b\,(10^h \alpha) + R; \\ 10^{h+p} a = b\,(10^{h+p}\alpha + \pi) + R, \end{cases}$$

откуда

$$(10^{h+p} - 10^h)\, a = b\,(10^{h+p}\alpha + \pi - 10^h \alpha).$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{h+p}\alpha + \pi - 10^h\alpha}{10^h\,(10^p - 1)} = \alpha + \frac{\pi}{(10^p - 1)\,10^h} =$$

$$= \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots c_1 c_2 \ldots c_p} - \overline{a_1 a_2 \ldots b_1 b_2 \ldots b_n}}{10^h \times 999 \ldots 9}.$$

(p цифр 9)

Искомое рациональное число является, следовательно, классом дробей, равных дроби $\frac{a}{b}$, за исключением случая, когда $\frac{a}{b}$ — десятичная дробь. Этот случай может представиться только, если все цифры числа π равны 9, то есть если $p = 1$; $\pi = 9$. Такая бесконечная форма называется *несобственной формой* десятичного числа, которое может также рассматриваться как бесконечное с периодом, равным нулю. Так, например,

$$1{,}99 \ldots = 2 = 2{,}00 \ldots; \qquad 5{,}399 \ldots = 5{,}4 = 5{,}4000 \ldots.$$

Выводы. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и множеством бесконечных периодических десятичных символов, если исключить период, образованный* цифрой 9 (или, в более общем случае, цифрой, равной разности между основанием и единицей).

Этот результат дополняется следующей теоремой:

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между действительными числами и бесконечными десятичными символами, периодическими или непериодическими, если, конечно, исключить указанный период.*

1) Каждому бесконечному десятичному символу мы ставим в соответствие предел последовательности десятичных чисел, получаемых, если ограничить форму одной, двумя, ..., n, ..., десятичными цифрами. Если эти цифры не равны все нулю, начиная с некоторого разряда, то последовательность — возрастающая и ограничена справа числами, полученными прибавлением единицы к какой-либо из цифр (согласно правилам, определяющим отношение порядка для чисел, записанных в позиционной системе счисления). Значит, предел существует и изменяется, если изменить хотя бы одну цифру символа.

2) Обратно, каждое действительное число есть предел последовательности, определенной бесконечным десятичным символом. В самом деле, множество действительных чисел упорядочено и является архимедовым; поэтому если действительное число r дано, то натуральное число p_n вполне определяется неравенствами

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant r < \frac{p_n+1}{10^n},$$

то есть

$$p_n \leqslant r \cdot 10^n < p_n + 1.$$

Поэтому можно изучать действительные числа с помощью свойств бесконечных десятичных символов. Разумеется, во всем вышеизложенном тот факт, что за основание системы счисления выбрано именно число 10, несуществен. Самое замечательное основание — это два (двоичная система счисления): здесь требуются лишь две цифры — 0 и 1, что позволяет использовать счетные машины на основе очень простого принципа: перфорированная клетка (или наличие тока в цепи) соответствует цифре 1, неперфорированная клетка (или отсутствие тока в цепи) означает цифру 0. Ввиду большой быстроты выполнения операций машиной можно пренебречь неудобством, вызываемым чрезмерной длиной двоично записанных чисел. Например, число *сто* пишется 1 100 100. С теоретической точки зрения предпочтительно выбирать за основание два или иногда три, что мы используем в главе VII, § 1.

Третья глава

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

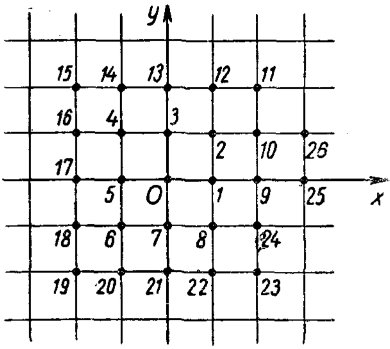
§ 1. Мощности подмножеств множества вещественных чисел

Мы знаем, что конечному множеству ставится в соответствие кардинальное (количественное) число: число его элементов. Мы переходим к изучению некоторых бесконечных подмножеств множества вещественных чисел.

I. Счетные подмножества

Мы говорили (кн. 1, § 4), что бесконечное множество называется *счетным*, если существует взаимно однозначное соответствие между его элементами и элементами множества натуральных чисел 1, 2, 3, . . ., n, . . ., иначе говоря, если элементы этого множества могут быть занумерованы. Тогда они образуют *последовательность*.

Примеры. Множество четных чисел: число $2k$ имеет номер k. Множество квадратов натуральных чисел: число k^2 имеет номер k. Множество целых чисел любого знака: если k — целое положительное число, то мы приписываем номер $2k$ числу $+k$ и номер $2k+1$ числу $-k$.



Черт. 27

Множество простых чисел: мы умеем получать простые числа одно за другим по способу решета Эратосфена, поэтому мы можем их нумеровать в порядке возрастания. Но мы не имеем формулы, которая дала бы простое число, соответствующее данному номеру n; мы говорим, что множество простых чисел счетно, но номер члена не определяется формулой, как в предыдущих множествах.

Основными результатами, которые не представляются столь же очевидными, как предыдущие, являются следующие:

Теорема 1. *Множество пар целых чисел счетно.*

Графически мы изображаем пары целых чисел точками плоскости с целыми координатами. Если мы попытаемся занумеровать эти точки по параллелям к оси Ox, например, то ясно, что мы используем все натуральные числа при рассмотрении лишь одной такой параллели; однако мы можем нумеровать иначе, например, используя квадраты с центром в начале координат, как это показывает схема. Таким образом, каждая точка имеет номер и обратно. В качестве упражнения, можно было бы еще уточнить схему, показав, в частности, что точки, лежащие на положительной полуоси x-в, имеют своими номерами квадраты последовательных нечетных чисел.

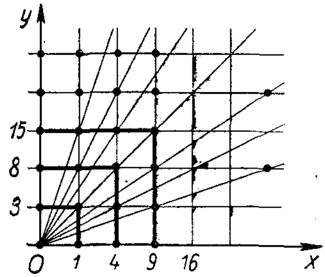
Таким образом, нельзя сказать, что в плоскости имеется «больше таких точек», чем на оси Ox; нельзя сказать, что если два бесконечных множества удовлетворяют отношению включения $E' \subset E''$, то E' имеет «меньше элементов», чем E''.

Аналогично, рассматривая пространства трех, четырех, . . ., n измерений, мы видим также, что объединение конечного числа счетных подмножеств есть счетное подмножество. Можно доказать, что это верно и для объединения счетного множества счетных множеств.

Теорема 2. *Множество рациональных чисел счетно.*

1) Рассмотрим сначала положительные дроби. Изобразим последовательные знаменатели на оси x-ов, а соответствующие числители над ними — на прямой, параллельной оси y-в, так что каждая дробь изображается узлом сетки. Мы их занумеруем, например, по квадратам, стороны которых находятся на Ox и Oy.

2) *Чтобы занумеровать положительные рациональные числа,* надо считать эквивалентными точки, находящиеся на одной прямой *с точкой начала координат.* Условимся теперь из всех точек прямой, соответствующих выше занумерованным дробям, дать номер лишь первой, считая от начала: эта точка соответствует несократимой дроби, представляющей данное рациональное число.



Черт. 28

Отметим, что это вполне согласуется с тем, что мы сказали ранее: существует счетное множество дробей, представляющих рациональное число, и объединение всех этих множеств также счетно.

Путем попарной группировки взаимно противоположных дробей выводят тот же результат и для множества рациональных чисел любых знаков (приписывая четные номера положительным числам, нечетные — отрицательным числам).

Таким же образом можно было бы сначала занумеровать лишь дроби меньше или равные 1, а потом попарно группировать каждую дробь с взаимно обратной. Существенно заметить, что указанный способ нумерования, разумеется, не сохраняет естественный порядок рациональных чисел.

Другое очевидное замечание состоит в том, что подмножество B счетного множества A либо содержит конечное число элементов, либо оно само тоже счетно (потому что достаточно, нумеруя элементы A, опустить элементы дополнения подмножества B).

II. Мощность континуума

1) **Теорема.** *Множество вещественных чисел, заключенных между 0 и 1, несчетно.*

Мы знаем, что каждое из этих вещественных чисел может быть представлено бесконечным десятичным числом, целая часть которого 0, и обратно (за исключением, отмеченным во II гл.). Можно было бы поэтому задаться целью занумеровать сначала числа с одним десятичным знаком, с двумя, с тремя и т. д. Но в действительности таким способом мы охватим лишь числа с конечным числом десятичных знаков, составляющие множество десятичных чисел, а это множество, являющееся подмножеством рациональных чисел, очевидно, счетно. А нам нужно рассмотреть и множество чисел с бесконечным числом десятичных знаков.

Для упрощения изложения будет удобно рассмотреть представление чисел в двоичной системе; следовательно, они будут теперь записываться так: $\overline{0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$, где α_i равно 0 или 1. Мы получим результат, выраженный в формулировке теоремы, если покажем, что *какую бы последовательность вещественных чисел мы не рассматривали, можно построить вещественное число, не принадлежащее этой последовательности.*

Итак, пусть дана последовательность:

$$u_1 = \overline{0,\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \ldots \alpha_{1n}};$$

$$u_2 = \overline{0,\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \ldots \alpha_{2n}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_p = \overline{0,\ \alpha_{p1}\alpha_{p2}\alpha_{p3} \ldots \alpha_{pn}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В символе α_{pn} первый индекс показывает номер члена последовательности, второй индекс показывает разряд цифры. Условимся обозначать через α' цифру, которая не равна α (то есть если $\alpha = 0$, то $\alpha' = 1$, и наоборот). Тогда число

$$v = \overline{0,\ \alpha'_{11}\alpha'_{22}\alpha'_{33} \ldots \alpha'_{nn}}$$

не принадлежит последовательности, так как, каково бы ни было n, число v отличается от u_n своей n-й цифрой.

Таким образом, ни одна счетная последовательность не может исчерпать всех вещественных чисел, заключенных между 0 и 1, то есть множество, названное нами *интервалом* (0, 1) (является этот интервал открытым, или это отрезок, здесь не имеет значения). Говорят, что это множество *имеет мощность континуума.*

Быть во взаимно однозначном соответствии является отношением эквивалентности, определенном между множествами; это отношение называется *равномощностью.* В таком случае говорят, что множества одного и того же класса имеют *одинаковую мощность* или одинаковое *кардинальное* (*количественное*) *число.*

Значит, всякое множество, которое может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с интервалом (0, 1), имеет мощность континуума: таким является, например, множество действительных чисел, больших 1, как показывает соответствие, устанавливаемое образованием обратного числа

$$y = \frac{1}{x}; \quad [0 < x < 1] \Rightarrow [y > 1],$$

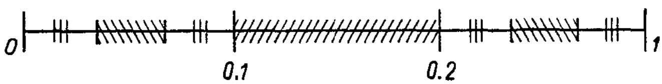
и множество всех действительных чисел, как показывает, например, соответствие

$$y = \frac{2x-1}{x(1-x)},$$

являющееся отображением $0 < x < 1$ на $-\infty < y < +\infty$.

Любой интервал (a, b) получается из интервала $(0, 1)$ с помощью гомотетии с коэффициентом подобия $b - a$. Объединения конечного числа интервалов также могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с интервалом $(0, 1)$, рассматриваемым как объединение стольких же интервалов.

2) Однако не следует думать, что во множестве действительных чисел понятие «несчетно» совпадает с понятием «объединение интервалов». Это показывает знаменитый пример, называемый *канторово триадическое множество* (Г. Кантор, один из основателей теории множеств, опубликовал свои работы с 1872 до 1897 г.).



Черт. 29

На этот раз используем троичную систему счисления, цифрами которой являются 0, 1, 2. Начнем с отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удаляем интервал $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}2$, так что остаются лишь два интервала:

$$0 \leqslant x \leqslant 0{,}1 \quad \text{и} \quad 0{,}2 \leqslant x \leqslant 1.$$

Потом аналогично исключаем

$$0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}02 \quad \text{и} \quad 0{,}21 \leqslant x \leqslant 0{,}22.$$

После этого исключаем средние интервалы из оставшихся четырех интервалов

$$0{,}001 \leqslant x < 0{,}002; \qquad 0{,}021 \leqslant x < 0{,}022;$$

$$0{,}201 \leqslant x < 0{,}202; \qquad 0{,}221 \leqslant x < 0{,}222$$

и так далее.

Все исключенные числа имеют в нашей системе счисления по меньшей мере одну цифру 1, следовательно, сохраненное множество A даже после бесконечного (счетного) числа операций содержит все числа, которые записываются только с помощью цифр 0 и 2.

Но множество этих чисел находится во взаимно однозначном соответствии со всеми числами, записанными в двоичной системе, для чего достаточно заменить символ 2 символом 1, сохраняя символ 0. Таким образом, *рассматриваемое множество A содержит* *подмножество мощности континуума. И все же, множество A не содержит ни одного интервала*: действительно, каждый интервал, сохраненный в каждой стадии, имеет длину

$$\frac{1}{3}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots,$$

а эта последовательность стремится к нулю. И даже сумма длин этих сохраненных интервалов на каждой стадии равна

$$\frac{2}{3}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots,$$

то есть стремится также к нулю.

Мы видим, насколько в этих тонких вопросах нельзя полагаться на интуицию.

III. Дополнительные сведения о кардинальных (количественных) числах

Чтобы выявить, являются ли два бесконечных множества равномощными, применяется следующий метод.

Пусть A и B — такие множества, что существует инъекция множества A во множество B, то есть каждому элементу $a \in A$ сопоставлен некоторый элемент $b = f(a) \in B$, причем соответствие между A и $f(A) = B'$ взаимно однозначно. Если некоторая теория позволяет поставить в соответствие множествам A и B кардинальные числа Card A, Card B, то мы будем иметь, по определению,

$$\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, B',$$

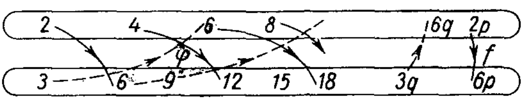
и нам хотелось бы написать

$$\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\, B,$$

но, чтобы это было оправдано, следует убедиться, что таким образом определяется отношение порядка, то есть следует проверить антисимметрию

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\, B \\ \mathrm{Card}\, B \leqslant \mathrm{Card}\, A\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, B.$$

Пример показывает, что такая ситуация возможна. Возьмем за множество A множество четных натуральных чисел, а за множе-



Черт. 30

ство B множество натуральных чисел, кратных числу 3. Функция «удвоение» дает инъекцию φ множества B во множество A. Функция «утроение» дает инъекцию f множества A во множество B.

$$A \xrightarrow{f} f(A) \subset B$$
$$B \xrightarrow{\varphi} \varphi(B) \subset A$$

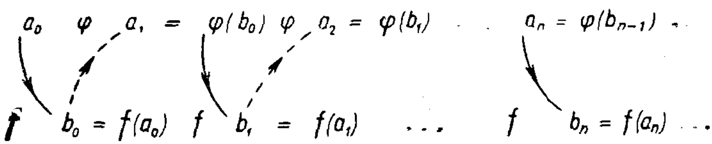
Но множества A и B равномощны каждое множеству N натуральных чисел, значит, они равномощны друг другу в силу соответствия:

$$2n \longleftrightarrow 3n.$$

Теорема Бернштейна. *Если существует инъекция f множества A во множество B и инъекция φ множества B во множество A, то существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B, то есть эти множества равномощны.*

Согласно предположению, f определяет взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и $f(A) = B' \subset B$ и аналогично φ определяет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств B и $\varphi(B) = A' \subset A$.

Пусть A'' — дополнение множества A' в A. Если множество A'' пусто, то отображение φ удовлетворяет заключению теоремы. Поэтому предполагаем, что множество A'' не пусто. Тогда будем начинать с некоторого элемента $a_0 \in A''$ и рассмотрим последовательность.



Черт. 31

Эта последовательность бесконечна, ибо в виду инъективности отображений f и φ невозможно снова получить уже раз полученный элемент. По этой же причине последовательности, возникшие из различных элементов множества A'', не пересекаются между собой.

Рассмотрим теперь все такие последовательности, то есть последовательности, порожденные всеми элементами множества A''. Функция f определяет биекцию между множеством A элементов, достигнутых этими последовательностями во множестве A, и множеством B_1 элементов, достигнутых во множестве B.

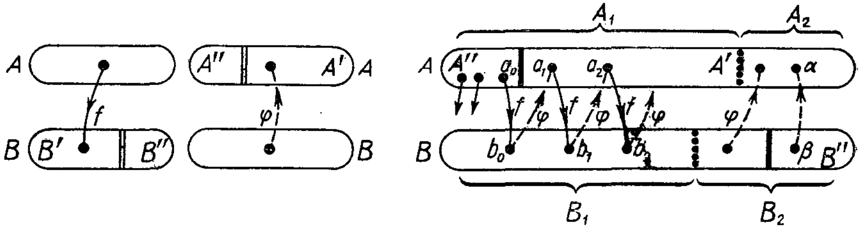
Остается только установить взаимно однозначное соответствие между элементами дополнений

$$A_2 = \complement_A A_1 \quad \text{и} \quad B_2 = \complement_B B_1.$$

Но

$$A_1 \supset A'' \Rightarrow A_2 \subset A' \,^*.$$

Значит, A_2 при отображении φ является образом такого подмножества множества B, ни один элемент которого не принадлежит B_1; это будет само множество B_2, так как каждый элемент β



Черт. 32

из B_2 имеет образ $\alpha = \varphi(\beta)$, который принадлежит множеству A', но не принадлежит множеству A_1.

Следовательно, мы установим искомое взаимно однозначное соответствие, положив

$$A_1 \xrightarrow{f} B_1 \quad \text{и} \quad A_2 \xleftarrow{\varphi} B_2.$$

Таким образом, $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} B$ есть отношение порядка в широком смысле. Но ничто не дает права считать, что это всеобщее отношение порядка. К тому же мы не определяем здесь операции во множестве кардинальных чисел. Таким образом, несмотря на то, что мы употребляем слово «число», мы не можем все же считать, что эти объекты осуществляют расширение множества действительных чисел.

§ 2. Логарифмы. Обобщение понятия показателя степени

Две операции: сложение и умножение — имеют во множестве действительных чисел аналогичные структуры, которые мы охарактеризовали в первой книге. Однако операция, обратная сложению, то есть вычитание $a - a'$, определена для всех пар действительных чисел, в то время как деление $\frac{b}{b'}$ определено лишь при условии, что b' отлично от нуля. Множество действительных чисел, снабженное операцией сложения (аддитивная группа), и множество действительных чисел, за исключением нуля, снабженное операцией умножения (мультипликативная группа), изоморфны по отношению к этим операциям. Нейтральные элементы соответственно 0 и 1, очевидно, соответствуют друг другу.

---

* Поскольку $A_1 \supset A'' \Rightarrow \complement_A A_1 \subset \complement_A A''$.— *Прим. ред.*

Обратим свое внимание на те подгруппы упомянутых двух групп, которые имеют, каждая, лишь один образующий элемент.

Аддитивная группа

$$\ldots -na, \ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$$

Мультипликативная группа

$$\ldots \frac{1}{b^n}, \ldots, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}, 1, b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$$

Естественный порядок сохраняется в первой подгруппе, если a положительно, и заменяется противоположным порядком, если a отрицательно; для второй подгруппы естественный порядок сохраняется, если b больше единицы, и заменяется противоположным порядком, если $0 < b < 1$. Мы ограничимся обычным случаем $a > 0$, $b > 1$, от которого можно без труда перейти к случаю, когда a отрицательно, или b меньше единицы, делая отношение порядка обратным, однако *существенно, чтобы число b было положительным.*

Таким образом, если даны $a > 0$ и $b > 1$, то мы при каждом натуральном n поставим в соответствие друг другу числа na и b^n. Согласно изоморфизму двух групп с точки зрения операций и отношения порядка, мы поставим также в соответствие друг другу числа

$$-na \text{ и } \frac{1}{b^n}.$$

Затем если p и q — два натуральных числа, то мы поставим друг другу в соответствие числа

$$\frac{p}{q}a \quad \text{и} \quad \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p,$$

а также числа

$$-\frac{p}{q}a \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt[q]{b^p}}.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество чисел $\frac{p}{q}a$, где p — целое любого знака, q — натурально, а $\mathscr{B}$ — множество вещественных чисел $\sqrt[q]{b^p}$, поставленных в соответствие числом множества $\mathfrak{A}$; вследствие изоморфизма имеем, что сумма двух элементов из $\mathfrak{A}$ соответствует произведению двух соответственных элементов из $\mathscr{B}$.

Остается распространить соответствие на случай, когда множество $\mathfrak{A}$ будет множеством $\mathscr{R}$ всех вещественных чисел, а множество $\mathscr{B}$ будет множеством $\mathscr{R}^+$ всех положительных вещественных чисел. [Мы используем несколько очевидных теорем о пределах, являющихся непосредственными следствиями определений (кн. 1, гл. IV); они будут детально рассмотрены в книге III. Мы определяем числа с помощью вложенных отрезков, то есть с помощью западни.]

Множество $\mathscr{R}$ получается из множества $\mathfrak{A}$ путем дополнения. Любое вещественное число r достигается с помощью последовательности вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю. Используем две числовые последовательности α_n и α'_n, определенные следующим образом:

$$\alpha_n = \frac{N}{2^n} a, \quad \alpha'_n = \frac{N+1}{2^n} a, \ \alpha_n < r < \alpha'_n,$$

где натуральное число N определяется согласно аксиоме Архимеда. Мы знаем, хотя бы из свойств двоичной системы счисления, что N возрастает вместе с n.

Последовательность α_n — возрастающая вместе с n и ограничена справа всеми α'_n; последовательность α'_n — убывающая и ограничена слева всеми α_n, а разность $\alpha'_n - \alpha_n = \frac{a}{2^n}$ стремится к нулю. Из изоморфизма множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{B}$ вытекает, что

$$\beta_n = \sqrt[2^n]{b^N} \quad \text{и} \quad \beta'_n = \sqrt[2^n]{b^{N+1}}$$

образуют также последовательность вложенных отрезков, однако возникает вопрос, стремится ли к нулю разность $\beta'_n - \beta_n$.

Из
$$\left.\begin{aligned} & 0 < \alpha_n < \alpha'_0 \\ & \alpha'_n - \alpha_n = \frac{a}{2^n} > 0 \end{aligned}\right\} \text{ вытекает } \left\{\begin{aligned} & 1 < \beta_n < \beta'_0; \\ & \frac{\beta'_n}{\beta_n} = \sqrt[2^n]{b} > 1. \end{aligned}\right.$$

Полагая

$$\frac{\beta'_n}{\beta_n} = 1 + u_n, \quad u_n > 0,$$

получаем:

$$b = (1 + u_n)^{2^n}.$$

Следовательно, начиная развертывать степенной ряд, находим:

$$b > 1 + 2^n \sqrt{u_n},$$

откуда

$$u_n < \frac{b-1}{2^n}.$$

Поэтому, если $n \to \infty$, $u_n \to 0$, значит, $\frac{\beta'_n}{\beta_n} \to 1$ и $\frac{\beta'_n - \beta_n}{\beta_n} \to 0$. Поскольку β_n удовлетворяет неравенству

$$1 < \beta_n < \beta'_0,$$

из предыдущего выводим $\beta'_n - \beta_n \to 0$.

Таким образом, числовые последовательности β_n и β'_n образуют последовательность вложенных интервалов, длина которых стремится к нулю; это «западня», определяющая действительное число ϱ, которое мы должны поставить в соответствие числу r, чтобы изоморфизм сохранился после дополнения множества $\mathfrak{A}$.

Обратно, каждое положительное вещественное число ϱ можно получить с помощью последовательности вложенных интервалов (β_n, β'_n), используя числа, взятые из $\mathscr{B}$, так как множеств $\mathscr{R}^+$ целиком упорядочено, а отсюда получается для числа ϱ и его образ, число r в $\mathscr{R}$.

Таким образом, между числами из $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^+$, наконец, установлено взаимно однозначное соответствие, которое является изоморфизмом между $\mathfrak{A}$, то есть множеством $\mathscr{R}$, снабженным структурой упорядоченной аддитивной группы, и $\mathscr{B}$ — множеством $\mathscr{R}^+$, снабженным структурой упорядоченной мультипликативной группы.

В частности, числу $1 \in \mathfrak{A}$ соответствует некоторое число $\beta \in \mathscr{B}$. Соответствие определено парой нейтральных элементов (0; 1) и парой (1; β).

Говорят, что β есть основание *логарифмов*, и пишут:

$$a = \log_\beta b.$$

С другой стороны, если n натуральное, то числу $a = n$ соответствует число $b = \beta^n$. Условились распространить это обозначение следующим образом:

если $a = -n$ (n натуральное), $b = \frac{1}{\beta^n}$, пишут: $b = \beta^{-n}$;

если $a = \frac{p}{q}$ (p и q натуральные) $b = \sqrt[q]{\beta^p}$, пишут: $b = \beta^{\frac{p}{q}}$;

если $a = -\frac{p}{q}$, $b = \frac{1}{\sqrt[q]{\beta^p}}$, пишут: $b = \beta^{-\frac{p}{q}}$.

Наконец, если r есть любое действительное число, то условились обозначать соответствующее ему число ϱ следующим образом:

$$\varrho = \beta^r$$

(что читается: β в степени r).

Таким образом, каково бы ни было действительное число x и соответствующее ему число y из $\mathscr{R}^+$, вводят два эквивалентных обозначения

$$x = \log_\beta y, \quad y = \beta^x,$$

и изоморфизм выражается тогда любым из равенств

$$\log_\beta (y_1 \cdot y_2) = \log_\beta y_1 + \log_\beta y_2, \quad \beta^{x_1 + x_2} = \beta^{x_1} \cdot \beta^{x_2}.$$

Следовательно, мы ввели две взаимно обратные функции: первая называется *логарифмической функцией по основанию* β, вторая называется *показательной функцией при основании* β.

Выбор основания. В качестве основания β можно выбрать произвольное отличное от единицы положительное число; вообще говоря, за основание берется число, большее единицы, для того чтобы логарифмическая и показательная функции при этом основании были обе возрастающими.

а) С точки зрения вычислений в нашей системе счисления единственное практически удобное основание — это число 10. Тогда прибавлению к числу x целого числа соответствует простая перестановка запятой в числе y. Поэтому лишь десятичная часть (мантисса) логарифма x фигурирует в таблицах: так, например, поскольку в таблице логарифмов мы находим в качестве приближенного значения, соответствующего числу 34, последовательность цифр 53 148, то, ввиду того что $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, нужно взять

$$\log 3{,}4 = 0{,}53148, \ \log 34 = 1{,}53148, \ \log 340 = 2{,}53148$$

и т. д. и

$$\log 0{,}34 = -1 + 0{,}53148,$$
$$\log 0{,}034 = -2 + 0{,}53148 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, удобно оставить эти отрицательные логарифмы в полученной форме, не выполняя вычитаний, так как оно привело бы к потере преимуществ десятичной нумерации. Условились лишь сокращать форму записи: два последних логарифма пишутся соответственно $\bar{1}{,}53148$ и $\bar{2}{,}53148$. При этом подразумевается, что десятичная часть всегда положительна.

Выполнение вычислений в $\mathfrak{A}$, а не в $\mathscr{B}$ дает особенно важное упрощение, когда нужно извлекать в $\mathscr{B}$ корни n-й степени, однако всегда следует начинать с того, чтобы сохранить в $\mathscr{B}$ лишь операции, обозначенные мультипликативно; тогда полученные выражения называются «имеющими логарифмический вид». Эта цель, то есть приведение к логарифмическому виду, часто достигается с помощью тригонометрических функций благодаря использованию вспомогательных углов, так как гибкость тригонометрических формул позволяет заменять суммы через произведения.

Исторически введение логарифмов Непером (1550—1618) и вычисление таблиц десятичных логарифмов другом Непера, Бриггом (они содержали числа от 1 до 100 000 и их логарифмы с одиннадцатью десятичными знаками), произошло вскоре после того, как Стевин распространил десятичное обозначение на десятичные дроби (1585) *. Использование логарифмов позволило астрономам успешно справиться с вычислениями, которые были необходимы для применений закона Ньютона (1642—1727). В настоящее время

* В Европе первая попытка введения десятичных дробей относится к XIV веку (Иммануил Бонфис из Тараскона). Детальная разработка и применение в астрономических расчетах даны независимо в трактатах самаркандского астронома Джемшида ал-Каши (1424, 1427 гг.). Еще ранее десятичные дроби употреблялись в Китае (III в. н. э.). Об истории десятичных дробей см.: А. П. Ю ш к е в и ч, История математики в средние века, Физматгиз, М., 1961, стр. 32—34, 229—231, 352—356. Об истории логарифмов см.: Г. Г. Ц е й т е н, История математики в XVI и XVII веках, М.— Л., 1933, стр. 131—145.— *Прим. ред.*

вычисления выполняются машинами. Построены также на основе логарифмического соответствия счетные линейки (логарифмические линейки) и счетные круги.

b) С теоретической точки зрения при изучении *логарифмической и показательной функций* выявляется одно привилегированное число. Согласно исследованию, которое позволило нам определить $y = \beta^x$ для каждого значения числа x, нам известно, что y стремится к β^{x_0}, когда x стремится к x_0; значит,

$$\beta^{x-x_0} \to 1, \text{ когда } x - x_0 \to 0.$$

Но отношение

$$\frac{\beta^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

имеет в этих условиях предел, который зависит от β. Не проводя этого исследования (фундаментального для изучения показательной функции), мы скажем лишь, что существует такое значение β, обозначаемое символом e, для которого это отношение стремится к единице. Тогда производная при $x = x_0$ для показательной функции при основании e, то есть предел выражения

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\,\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \text{ когда } x - x_0 \to 0,$$

равняется в точности $y_0 = e^{x_0}$.

Аналогично производная логарифмической функции по основанию e $x = \log_e y$, то есть предел выражения

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} \text{ равен } \frac{1}{y_0}.$$

Таким образом,

$$(e^x)' = e^x \quad \text{и} \quad (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Эти формулы, дающие соответственно решения «дифференциальных уравнений»

$$f'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad g'(x) = \frac{1}{x},$$

оправдывают введение числа e в математический анализ. Добавим, что число e, как и число π, является трансцендентным числом. Его приближенное значение

$$e \simeq 2{,}71\,828.$$

Вторая часть

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Первая глава

МНОГОЧЛЕНЫ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Если x представляет собой вещественное число, то применение правил действий позволит представить всякое *целое выражение* (выражение, содержащее лишь знаки суммы, разности и произведения) в *развернутой форме*, то есть в виде суммы произведений. Например,

$$(x+1)^2+2x+3(x-2)^2-(5x+1)=4x^2-13x+12.$$

Мы будем рассматривать такие выражения, не предполагая, что x является числом, но мы аксиоматически введем такие определения операций, которые сохраняют свою силу и тогда, когда x является числом. Мы вводим таким образом в абстрактной форме *структуру многочлена с одним неизвестным* *.

I. Определение многочлена

Мы исходим из наличия двух множеств: одно множество образовано элементом x, названным *неизвестным*, и элементами, которые получаются с помощью мультипликативно обозначенной операции, то есть этими элементами являются:

$$x^1=x;\ x^2,\ \ldots,\ x^p,\ \ldots,\qquad (p\text{ — натуральное}),$$

причем

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

К ним мы присоединим еще нейтральный элемент, обозначив его x^0, и построенное таким образом множество назовем $\mathscr{X}$. Вторым множеством будет некоторое множество чисел.

Некоторые разделы теории требуют, чтобы это подмножество множества чисел было полем (то есть чтобы в нем было возможно деление, исключая деление на нуль), но часто достаточно, чтобы оно было кольцом, например, кольцом Z целых чисел. Из этого множества будут взяты *коэффициенты*. Кроме отмеченного исклю-

* Автор употребляет термин «*une indéterminée*» (неопределенная величина), и именно в этом смысле следует понимать термин «неизвестное» в настоящей главе. —*Прим. ред.*

чения, мы в качестве второго множества принимаем множество $\mathcal{R}$ всех вещественных чисел и определим таким образом *многочлены* (*полиномы*) с *одним неизвестным над полем вещественных чисел*.

1) Мы вводим операцию, обозначенную мультипликативно

$$ax^p, \ a \in \mathcal{R}, \ x^p \in \mathcal{X},$$

с ассоциативностями:

$a(bx^p)$ дает $(ab)x^p$, обозначаемое abx^p, и $(ax^p)(bx^q)$ дает $(ab)(x^p x^q)$, то есть abx^{p+q}. Нейтральный элемент есть $1 \cdot x^0$. Мы увидим, что его обозначают также (допуская некоторую вольность в обозначениях) просто 1; аналогично $1x^m$ будет обозначаться просто x^m и ax^0 одним a. Мы не будем пользоваться в начале изложения такими сокращениями.

Введенные выражения называются *одночленами* (или мономами). В одночлене ax^m a называется *коэффициентом*, m — показатель степени неизвестного x, называется *степенью одночлена*. Одночлены с одинаковыми показателями степени называются *подобными*.

2) Мы вводим операцию над одночленами, обозначаемую аддитивно

$$ax^p + bx^q,$$

подчиняющуюся закону дистрибутивности в случае $p = q$:

$$ax^p + bx^p \text{ дает одночлен } (a+b)\,x^p.$$

Это приводит к необходимости принять в качестве нейтрального элемента $0x^p$, каково бы ни было p. Будем обозначать его Ω (а позже просто нулем). Если одночлены не подобны ($p \neq q$), то сложение вводит новые элементы, которые уже не являются одночленами и которые называются *многочленами*: это суммы некоторого конечного числа не подобных одночленов (мы всегда предполагаем *приведение подобных членов* выполненным), причем одночлен теперь рассматривается как многочлен с одним членом.

Сложение предполагается ассоциативным и коммутативным, что позволяет выполнить и приведение подобных членов, и сложение многочленов. Но иногда все коэффициенты могут стать нулями, тогда такой многочлен является нейтральным элементом сложения; мы говорим, что это *нулевой многочлен*, и будем его обозначать Ω. (В дальнейшем мы будем писать просто 0, допуская некоторую вольность в обозначениях.)

3) Наконец, вводим умножение многочлена на число, определяя его с помощью дистрибутивности по отношению к сложению одночленов:

$$k(ax^p + bx^q) \text{ дает } kax^p + kbx^q.$$

Множество $\mathcal{P}$ многочленов становится теперь *векторным пространством*, базисом которого служит множество x^0, x^1, ...

. . ., x^k, . . ., а множеством операторов — $\mathscr{R}$ (или же $\mathscr{P}$ является *модулем*, в случае если коэффициенты образуют только кольцо). Значит, это векторное пространство имеет бесконечное число измерений. Но если ограничиваться показателями, меньшими или равными некоторому данному натуральному числу p, то идет речь о пространстве $(p+1)$ измерения (кн. I, гл. III).

Мы условимся, записывая члены, всегда полагать, что член с наибольшим показателем имеет не нулевой коэффициент. (Аналогично тому, как в десятичной системе счисления число, называемое трехзначным, имеет цифру сотен, не равную нулю.) Этот наибольший показатель называется *степенью* многочлена. Если многочлен обозначен символом P, то его степень обозначается $d(P)$. Иногда важно рассматривать член с наименьшим показателем и не нулевым коэффициентом; этот показатель мы будем обозначать $\delta(P)$.

По самому определению имеем $d(P) \geqslant \delta(P)$, где равенство имеет место лишь для одночлена.

Случай $d(P) = \delta(P) = 0$ соответствует одночлену ax^0. *Нулевой многочлен* Ω *не имеет степени*. Умножение на число, неравное нулю, сохраняет $d(P)$ и $\delta(P)$. При сложении, согласно правилу приведения подобных членов, $d(P_1 + P_2)$ не более наибольшей из степеней $d(P_1)$, $d(P_2)$, а $\delta(P_1 + P_2)$ не менее наименьшего из чисел $\delta(P_1)$ и $\delta(P_2)$, что записывается

$$d(P_1 + P_2) \leqslant \sup[d(P_1),\ d(P_2)];$$
$$\delta(P_1 + P_2) \geqslant \inf[\delta(P_1),\ \delta(P_2)].$$

Множество одночленов ax^0 составляет одномерное векторное пространство, изоморфное множеству действительных чисел: поэтому-то обычно элемент ax^0 и записывают просто a. С помощью базиса, состоящего из x^0 и x^1, порождается двумерное пространство, пространство двучленов (биномов) первой степени

$ax^1 + bx^0$, которые обычно записывают так: $ax + b$.

Базис x^0, x^1, x^2 порождает множество трехчленов второй степени $ax^2 + bx^1 + cx^0$ или в обычной записи $ax^2 + bx + c$ и т. д.

Преобразование базиса. С точки зрения векторных пространств два многочлена являются независимыми, если не существует такой ненулевой пары вещественных чисел r_1 и r_2, для которой $r_1P_1 + r_2P_2$ становится нулевым многочленом Ω, то есть если коэффициенты многочленов P_1 и P_2 не пропорциональны. В частности, эта независимость имеет место всегда, если степени многочленов не равны. Единственным действительно простым базисом служит базис, составленный из одночленов с коэффициентами, равными единице; мы будем его называть *фундаментальным базисом* и позднее вернемся к этому понятию.

4) Кольцо многочленов. Мы вводим еще одну операцию на множестве многочленов, которую обозначим мультипли-

кативно (умножение многочленов), и определим ее, исходя из умножения одночленов и дистрибутивности этой операции по отношению к сложению одночленов. Эту операцию выражают следующей сжатой формулой (символ Σ означает сумму):

$$\left(\sum_{i=p}^{i=n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=p'}^{j=n'} b_j x^j\right) = \sum a_i b_j x^{i+j},$$

где подразумевается, что надо в итоговом выражении привести подобные члены, то есть те, в которых $i+j$ имеет одинаковое значение. Это приведение подобных членов приходится выполнять только для членов промежуточных степеней, так как член наивысшей степени равен

$$a_n b_{n'} x^{n+n'},$$

а член наименьшей степени $a_p b_{p'} x^{p+p'}$, откуда вытекают важные формулы:

$$d(P_1P_2) = d(P_1) + d(P_2);$$

$$\delta(P_1P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2),$$

более простые, чем соответствующие формулы для суммы многочленов.

Следствие. *Произведение двух многочленов является нулевым многочленом лишь в случае, если один из сомножителей является нулевым многочленом.* Действительно, это единственный случай, когда произведение не имеет степени.

Произведение нескольких многочленов определяется обычным образом и нетрудно проверить (например, рекуррентным рассуждением), что оно ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно по отношению к сложению многочленов. Множество многочленов составляет, таким образом, коммутативное кольцо.

В силу ассоциативности можно доказать, как и для чисел, *что произведение многочленов является нулевым многочленом Ω тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей есть нулевой многочлен.*

Практическое вычисление произведения. Ищут все одночлены одинаковой степени, где степень принимает все значения от $d(P_1) + d(P_2)$ до

$$\delta(P_1) + \delta(P_2),$$

и выполняют приведение подобных членов по мере их получения.

Важный частный случай. Степени двучлена $ax+b$. Как показывает рекуррентное исследование, членами многочлена, полученного развертыванием степени $(ax+b)^n$, являются все одночлены вида

$$C_n^p a^p b^{n-p} x^p, \quad 0 \leqslant p \leqslant n,$$

где числа, обозначенные через C_n^p, получаются из следующей таблицы, названной треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{lllccccccccccccc}
n=1 & \ldots & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & \ldots & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & \ldots & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & \ldots & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & \ldots & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & \ldots & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & & & & & & & & & & & \ldots
\end{array}$$

по формуле

$$C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1}.$$

Рассматривая члены степени p в выражениях $(ax+b)^k$ и $(ax+b)^{k+1}$, где $k>p$, можно с помощью индукции по n проверить формулу

$$C_n^p=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots p}.$$

Эти числа, называемые «биномиальными коэффициентами», обозначаются также символом $\binom{n}{p}$.

5) П р е о б р а з о в а н и е ф у н д а м е н т а л ь н о г о б а з и с а

Условимся называть фундаментальным базисом векторного пространства многочленов не только базис x^0, x^1, ..., x^n, ..., но также базис

$$(1\cdot x^1-\alpha x^0)^0,\ (1\cdot x^1-\alpha x^0)^1,\ (1\cdot x^1-\alpha x^0)^2,\ \ldots,\ (1x^1-\alpha x^0)^n,\ \ldots,$$

записывающийся кратко

$$(x-\alpha)^0,\ (x-\alpha)^1,\ (x-\alpha)^2,\ \ldots,\ (x-\alpha)^n,\ \ldots,$$

где α — некоторое число, выбранное в поле коэффициентов. После развертывания получаются многочлены различных степеней и, значит, многочлены независимые. Обозначим через X двучлен $x-\alpha$; другие многочлены нового базиса являются степенями выражения X. Новое выражение некоторого многочлена P получится, *если подставить в P вместо степеней неизвестного x степени выражения $X+\alpha$, потом развернуть эти степени и привести подобные члены полученного выражения, рассматриваемого как многочлен от неизвестной X.*

П р и м е р. P есть многочлен $2x^2-3x+1$.

Мы получаем

$$2(X+\alpha)^2-3(X+\alpha)+1,$$

откуда многочлен относительно X таков:

$$2X^2+(4\alpha-3)X+(2\alpha^2-3\alpha+1).$$

Таким образом, искомой формулой многочлена будет

$$2(x-\alpha)^2+(4\alpha-3)(x-\alpha)+(2\alpha^2-3\alpha+1).$$

Впрочем, обычно дают ответ, сохраняя его в виде многочлена от X. Единственность результата обеспечена свойствами векторных пространств; в дальнейшем мы сможем доказать эту единственность и непосредственно. Для нас здесь наибольшую важность представляет возможность этих вычислений, не имеющая исключений. Тут же нужно сделать два важных замечания: 1) многочлены от x и X имеют одинаковую степень, причем члены наивысшей степени имеют одинаковую степень, причем члены наивысшей степени имеют даже равные коэффициенты; 2) членом степени 0 является всегда число, получающееся, если заменить в многочлене P неизвестное x числом α и выполнить над числами действия, которые были указаны для одночленов. Полученное таким образом число называется *числовым значением многочлена* при замене буквы x числом α. Это число обозначается символически $P(\alpha)$. Числовые значения, соответствующие многочленам, столь важны для изучения многочленов, что мы будем их исследовать уже сейчас, прежде чем продолжать изучение кольца многочленов и определять в нем деления.

II. Числовые значения многочлена. Делимость на $x-\alpha$

Мы только что дали определение числового значения $P(\alpha)$, многочлена P, когда в нем заменяют неизвестное x числом $\alpha \in R$. или, как говорят короче, «значения P при $x=\alpha$». Согласно выбранным аксиомам, если S и Π являются соответственно суммой и произведением двух многочленов P_1 и P_2, то будем иметь, каково бы ни было число α:

$$S(\alpha)=P_1(\alpha)+P_2(\alpha) \quad \text{и} \quad \Pi(\alpha)=P_1(\alpha)P_2(\alpha) \qquad \text{(числовые равенства).}$$

Если выполнить преобразование базиса, обозначив X двучлен $x-\alpha$, а $T(x)$ — многочлен, образованный по вышеуказанному правилу, то из параллелизма между вычислениями над многочленами и вычислениями над числами вытекает, что

$$\forall\beta\in\mathscr{R}: P(\beta)=T(\beta-\alpha).$$

В частности, если взять

$$\beta=\alpha, \text{ то } P(\alpha)=T(0).$$

Именно это мы и заметили при вычислениях, так как $T(0)$ является коэффициентом члена нулевой степени многочлена T. Но сказать, что этот коэффициент равен нулю, равносильно утверждению, что после преобразования базиса бином $x-\alpha$ можно вынести за скобку в качестве множителя. Отсюда:

Условие $P(\alpha) = 0$ *равносильно условию существования такого многочлена* Q, *что многочлен* P *может быть представлен в виде* $(x - \alpha) Q$. Условимся использовать знак $\equiv$, что читается «эквивалентно», чтобы выразить, что выражения, содержащие неизвестное x, образуют после развертывания и приведения подобных членов один и тот же многочлен. Этот знак отличается, таким образом, от знака $=$ между двумя числами. С другой стороны, будем указывать выбранное обозначение для неизвестного, помещая его в скобках: $P(x)$ есть многочлен, где x — неизвестное; но этот же символ представляет число, если x — число. Наше предложение записывается так:

Теорема 1.

$$[P(\alpha)=0] \Leftrightarrow [\exists Q(x);\ P(x) \equiv (x-\alpha) Q(x)]. \tag{1}$$

Мы будем говорить, что условие $P(\alpha) = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы многочлен $P(x)$ был *разложим* в произведение, одним из множителей которого является $x - \alpha$. Мы будем выражать также этот факт, говоря, что многочлен $P(x)$ *делится на двучлен* $x - \alpha$.

Число r такое, что $P(r) = 0$ называется *нулем многочлена*; говорят также, что это *корень уравнения* $P(x) = 0$, и неизвестное x является в этом случае *неизвестным уравнения*.

Искать корни уравнения — значит *решать* это уравнение.

Уравнение называется *целым уравнением*, если одна его часть 0, а другая — многочлен. В конечном счете мы убеждаемся в тесной связи, существующей между тремя точками зрения: решением целых уравнений, разысканием нулей многочлена, разложением многочлена на множители.

Следует еще отметить, что если введенный выше многочлен Q сам таков, что

$$Q(\alpha) = 0,$$

то существует многочлен Q_1, такой, что

$$Q(x) \equiv (x-\alpha) Q_1(x),$$

откуда $P(x) \equiv (x - \alpha)^2 Q_1(x)$ и так далее.

Если в конце концов получается

$$P(x) \equiv (x-\alpha)^m \Pi(x), \tag{2}$$

причем

$$\Pi(\alpha) \neq 0,$$

то говорят, что α *есть нуль порядка* m многочлена P и *корень порядка* m уравнения $P(x) = 0$; нули или корни называются «простыми», если $m = 1$, и «кратными», если m превосходит число 1. Следует отметить, что наш прием преобразования базиса сразу дает равенство (2) с помощью многочлена $T(x)$ без предварительного использования равенства (1).

Пример вычисления.

Пусть

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 34x^2 - 36x + 8.$$

Для этого многочлена $P(2) = 0$. Подставим в многочлен вместо буквы x двучлен $X + 2$. Коэффициенты многочлена $P(x)$ записаны в последнем столбце таблицы.

$(X+2)^5 \equiv$	$X^5 + 10$	$X^4 + 40$	$X^3 + 80$	$X^2 + 80$	$X + 32$	$+1$
$(X+2)^4 \equiv$	$+1$	$+8$	$+24$	$+32$	$+16$	-3
$(X+2)^3 \equiv$		$+1$	$+6$	$+12$	$+8$	-7
$(X+2)^2 \equiv$			$+1$	$+4$	$+4$	$+34$
$X+2 \equiv$				$+1$	$+2$	-36
$1 \equiv$					$+1$	$+8$
$T(X)$	$X^5 + 7$	$X^4 + 9$	$X^3 + 0$	$X^2 + 0$	$X + 0$	

Отсюда

$$P(x) \equiv (x-2)^3 [(x-2)^2 + 7(x-2) + 9] \equiv (x-2)^3 (x^2 + 3x - 1).$$

Отметим, что многочлен $Q(x)$ из формулы (1) появится при изучении деления многочленов как частное от деления многочлена $P(x)$ на $x - \alpha$. Мы познакомимся тогда с приемом его непосредственного вычисления.

Теорема II. *Если многочлен P обращается в нуль для попарно различных значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то он делится на произведение*

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

Действительно,

$$[P(\alpha_1) = 0] \Longleftrightarrow [\exists Q_1 : P(x) \equiv (x-\alpha_1) Q_1(x)].$$

Отсюда вытекает

$$P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) Q_2(\alpha_2).$$

Но

$$\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0,$$

значит,

$$[P(\alpha_2)=0] \Leftrightarrow [Q_1(\alpha_2)=0] \Leftrightarrow [\exists Q_2 : Q_1(x) \equiv (x-\alpha_2)\, Q_2(x)],$$

откуда в силу ассоциативности умножения многочленов

$$P(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\, Q_2(x).$$

Отсюда выводится

$$P(\alpha_3) = (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\, Q_2(\alpha_3).$$

Но

$$\alpha_3-\alpha_1 \neq 0 \text{ и } \alpha_3-\alpha_2 \neq 0,$$

значит,

$$[P(\alpha_3)=0] \Leftrightarrow [Q_2(\alpha_3)=0] \Leftrightarrow [\exists Q_3 : Q_2(x) \equiv (x-\alpha_3)\, Q_3(x)],$$

откуда

$$P(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) Q_3(x)$$

и так далее до

$$P(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\, Q_k(x).$$

Основные следствия. 1) *Многочлен степени n не может принимать числовое значение 0 для более, чем n значений неизвестного x.*

Многочлен, который принимает значение 0 для бесконечного множества значений x, может быть лишь нулевым многочленом Ω, не имеющим степени.

2) Многочлен степени n, имеющий n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, есть многочлен, полученный развертыванием произведения

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) \equiv ax^n - a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\, x^{n-1} + \ldots + \\ + (-1)^n a\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Если расположение многочлена по убывающим степеням неизвестной будет

$$P(x) \equiv ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_px^{n-p} + \ldots + a_nx^0,$$

то, обозначая через s_p сумму произведений корней, взятых по p, будем иметь:

$$a_1 = -as_1, \ \ldots, \ a_p = (-1)^p as_p, \ \ldots, \ a_n = (-1)^n as_n.$$

Таким образом, коэффициенты являются симметрическими выражениями от корней.

Следствие. Если два многочлена P_1 степени n_1 и P_2 степени n_2 принимают те же числовые значения для конечного *числа k значений неизвестного x, превосходящего n_1 и n_2, то эти многочлены составлены из одинаковых одночленов (так что, в частности, $n_1 = n_2$).*

В самом деле, $P_1 - P_2$ есть многочлен степени, не превышающей наибольшую из степеней n_1 и n_2 и принимающий значение 0 для k значений неизвестного x.

Приложения. Существует лишь один многочлен степени $n-1$, принимающий n данных числовых значений для n заданных значений неизвестного x. Найти этот многочлен легко. Например, для $n=2$ составляют многочлен:

$$p_1 \frac{x-a_2}{a_1-a_2}+p_2 \frac{x-a_1}{a_2-a_1}.$$

Мы получаем здесь действительно p_1 для $x=a_1$ и p_2 для $x=a_2$. Для $n=3$ искомый многочлен получим, развертывая выражение:

$$p_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+p_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+p_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

и так далее.

Из доказанной теоремы вытекает, что полученные решения единственны. Они существуют, если кольцо коэффициентов есть поле.

Вывод. Два многочлена, которые хотя бы для одного значения неизвестного принимают различные значения, не могут состоять из одинаковых одночленов и обратно.

Тождеством называют в общем случае буквенное равенство, обе части которого принимают одни и те же числовые значения для *всех* числовых значений букв; обе части называются в этом случае *тождественными*. Таким образом, мы показали, что *два тождественных многочлена образованы из тех же одночленов*, что мы выражаем символом $\equiv$. Отсюда следует, что для проверки того, является ли данное равенство тождеством по отношению к букве, фигурирующей в нем в целом виде, достаточно развернуть обе части равенства и установить равенство коэффициентов при одинаковых степенях этой буквы в обоих многочленах, в которых данная буква рассматривается как неизвестная.

Замечание. Проведенное исследование предполагает кольцо коэффициентов достаточно богатым. Если, например, это кольцо есть кольцо классов вычетов по модулю 2 (в котором существуют лишь два различных числа 0 и 1), то многочлен x^2+x принимает значение нуль при любом значении неизвестного x *. Следует отметить, что степень 2 не принадлежит множеству, из которого взяты коэффициенты.

III. Деление в кольце многочленов

1. Точное частное. Пусть даны два многочлена $A(x)$ и $B(x)$. Существует ли многочлен $Q(x)$, такой, что $A \equiv BQ$? Этот многочлен будем называть частным от деления $A(x)$ на $B(x)$. С самого начала исследование глубоко отличается от аналогичной задачи, рассмотренной для кольца целых чисел, так как в кольце многочленов отсутствует отношение порядка. Можно, конечно, класси-

* Этот вопрос, связанный с сопоставлением функциональной тождественности и алгебраической тождественности многочленов, следовало бы осветить более детально.— *Прим. перевод.*

фицировать многочлены по их степеням в порядке возрастания, однако многочлены данной степени образуют несчетное бесконечное множество, если коэффициенты взяты из поля вещественных чисел, что мы предполагаем.

Мы не будем доказывать *a priori* существование или не существование многочлена Q, а просто начнем разыскивать его последовательные одночлены на основании необходимых условий.

Прежде всего, если многочлен Q *существует*, то должно быть

$$d(Q)=d(A)-d(B)=n \quad \text{(обозначено для краткости);}$$

$$\delta(Q)=\delta(A)-\delta(B)=p \quad \text{(обозначено для краткости).}$$

Необходимым условием является, следовательно,

$$0\leqslant\delta(A)-\delta(B)\leqslant d(A)-d(B), \text{ то есть } 0\leqslant p\leqslant n,$$

и число членов многочлена Q известно: оно равно $n-p+1$ (некоторые промежуточные члены могут иметь нулевые коэффициенты).

Поэтому полагаем

$$Q\equiv q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\ldots+q_{p+1}x^{p+1}+q_px^p.$$

Мы будем вычислять коэффициенты один за другим.

а) *Будем оперировать по убывающим степеням*, предполагая все время, что многочлен Q существует.

Положим

$$Q\equiv q_nx^n+Q_1,\quad d(Q_1)\leqslant n-1.$$

По определению многочлена Q имеем:

$$A\equiv q_nx^nB+Q_1B,\quad d(Q_1B)<n+d(B)=d(A),$$

значит, q_n известен — это частное от деления старшего коэффициента многочлена A на старший коэффициент многочлена B.

Тогда многочлен Q_1 удовлетворяет равенству

$$A_1\equiv A-q_nx^nB\equiv Q_1B,\quad d(A_1)<d(A).$$

Таким образом, чтобы вычислить старший член многочлена Q_1, то есть второй член многочлена Q, мы вновь приходим к той же операции, как и исходная, и так далее.

Так как степени частичных делимых A, A_1, A_2, ..., убывают, то операция, наверное, окончится; но она может остановиться лишь тогда, когда полученное частичное делимое

$$A_i\equiv A_{i-1}-q_jx^jB$$

имеет степень, меньшую чем $d(B)$.

Следовательно, возможны лишь два случая: либо этот многочлен A_i не есть нулевой многочлен Ω, тогда задача не имеет решения, так как мы опирались на необходимые условия, или же A_i есть нулевой многочлен; тогда, складывая почленно использованные тождества

$$\begin{aligned} A &\equiv q_n x^n B + A_1, \\ A_1 &\equiv q_{n-1} x^{n-1} B + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i-1} &\equiv q_j x^j B + \Omega, \end{aligned}$$

получаем:

$$A \equiv (q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_j x^j)\, B;$$

значит, многочлен, вычисленный на основании необходимых условий путем постепенного определения всех его членов, удовлетворяет поставленным требованиям, то есть условия оказались и достаточными. Таким образом, когда задача имеет решение, мы умеем находить тот единственный многочлен Q, который удовлетворяет требованиям задачи.

b) *Если оперировать по возрастающим степеням,* то исследование проводится совершенно аналогично.

Если операция возможна, то, полагая

$$Q \equiv q_p x^p + Q_1', \quad \delta(Q_1') \geqslant p + 1,$$

отсюда получаем:

$$A_1' \equiv A - q_p x^p B \equiv Q_1' B, \quad \delta(Q_1' B) > \delta(A),$$

где q_p есть частное от деления члена наименьшей степени многочлена A на член наименьшей степени многочлена B. Вычисления продолжают аналогично. Но на этот раз числа $\delta(A_i)$ идут возрастая. Закончится ли эта операция? Если многочлен Q существует, то наши условия, являющиеся необходимыми, дадут последовательно все искомые коэффициенты, и последнее частичное делимое окажется нулевым многочленом. Если же задача не имеет решения, то операция не останавливается, так как $\delta(A_i)$, все увеличиваясь, превосходит, разумеется, $\delta(B)$.

Пример операции в случае, когда Q существует.

$A \equiv$	x^5	$+3$	x^4+0	x^3+5	x^2-7	$x+2$	$x^2+3x-2 \equiv B$
	-1	-3	$+2$				$x^3+2x-1 \equiv Q$
$A_1 \equiv$			$+2$	x^3+5	x^2-7	$x+2$	
			-2	-6	$+4$		
$A_2 \equiv$				-1	x^2-3	$x+2$	
				$+1$	$+3$	-2	
$A_3 \equiv$					Ω		

То же по возрастающим степеням

$A \equiv$		x^5+3	x^4+0	x^3+5	x^2-7	$x+2$	$x^2+3x-2 \equiv B$
				$+1$	$+3$	-2	$-1+2x+x^3 \equiv Q$
$A_1' \equiv$		x^5+3	x^4+0	x^3+6	x^2-4	x	
			-2	-6	$+4$		
$A_2' \equiv$	-1	x^5+3	x^4-2	x^3			
		-3	$+2$				
$A_3' \equiv$			Ω				

Пример невозможной операции, хотя условие $0 \leqslant \delta(A)-\delta(B) \leqslant d(A)-d(B)$ удовлетворяется.

По убывающим степеням

$A \equiv$		x^3+5	x^2-	$x+1$	$3x^2+x-2 \equiv B$
	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}x+\frac{14}{9}$
$A_1 \equiv$		$\frac{14}{3}$	$x^2-\frac{1}{3}$	$x+1$	
		$-\frac{14}{3}$	$-\frac{14}{9}$	$+\frac{28}{9}$	
$A_2 \equiv$			$-\frac{17}{9}x+\frac{37}{9}$		

Вычисления остановились, ибо $d(A_2) < d(B)$.

По возрастающим степеням

$A \equiv$		x^3+5	x^2-	$x+1$	$3x^2+x-2 \equiv B$
		$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{25}{8}x^2$
$A_1' \equiv$		$x^3+\frac{13}{2}$	$x^2-\frac{1}{2}$	x	
	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$		
$A_2' \equiv$	$+\frac{1}{4}$	$x^3+\frac{25}{4}$	x^2		
	$+\frac{75}{8}x^4+\frac{25}{8}$	$-\frac{25}{4}$			

$$A_3' \equiv +\frac{75}{8}x^4+\frac{27}{8}x^3.$$

Вычисление продолжается сколь угодно далеко, член с x^{k+1} в A'_k не может исчезнуть.

Замечания. 1) Вычисление по убывающим степеням предполагает лишь, что $d(A) \geqslant d(B)$, вычисление по возрастающим степеням предполагает лишь, что $\delta(A) \geqslant \delta(B)$.

2) Частные коэффициентов, которые определяются в ходе вычислений, должны существовать; поэтому-то мы и предполагаем коэффициенты принадлежащими некоторому полю. Все же при делении по убывающим степеням делят лишь на коэффициент старшего члена многочлена B: если этот коэффициент равен единице, то коэффициенты могут принадлежать некоторому кольцу (пример: деление на $x - \alpha$). Аналогичное положение имеет место при делении по возрастающим степеням, если рассматривать коэффициент члена самой низкой степени многочлена B. Оба способа деления многочленов приводят к двум весьма отличающимся друг от друга исследованиям, которые мы рассмотрим последовательно каждое в отдельности.

2. Евклидово деление многочленов

Вычисление по убывающим степеням при единственном условии $d(A) \geqslant d(B)$ дает пару многочленов Q и R, удовлетворяющих условиям

$$A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B),$$

где R является последним полученным частичным делимым; если A кратно B, то есть если деление, действие обратное умножению, возможно, то R есть Ω.

Единственность пары Q, R вытекает из предшествующего в силу замечания, что в многочлене $A - R$ все члены степени выше чем $d(B)$ принадлежат многочлену A. Мы можем, впрочем, эту единственность доказать непосредственно, а предыдущие же вычисления послужат лишь основанием для допущения существования пары решений

$$\left.\begin{array}{ll} A \equiv BQ + R, & d(R) < d(B) \\ A \equiv BQ' + R', & d(R') < d(B) \end{array}\right\} \Rightarrow B(Q - Q') + (R - R') \equiv \Omega.$$

Но если $Q - Q'$ не равняется Ω, то степень первого члена не меньше чем $d(B)$, в то время как $d(R - R')$ меньше чем $d(B)$; их сумма не может равняться Ω. Следовательно, $Q \equiv Q'$, откуда $R \equiv R'$. Так же как и при делении целых чисел, Q и R называются соответственно *частным* и *остатком* операции, называющейся *евклидовым делением*. В самом деле, с помощью этого деления возможен алгоритм Евклида. Мы рассмотрим последовательность делений

$$\begin{array}{ll} A \equiv BQ + R; & d(R) < d(B); \\ B \equiv RQ_1 + R_1; & d(R_1) < d(R); \\ R \equiv R_1Q_2 + R_2; & d(R_2) < d(R_1) \text{ и т. д.} \end{array}$$

Так как степени последовательных остатков убывают, то алгоритм заканчивается, а неравенство степеней является достаточным условием, чтобы операция была возможна! Единственный случай, когда деление становится невозможным — это, когда получается остаток Ω. Этот случай может появиться после конечного числа операций, и алгоритм тогда заканчивается равенствами

$$R_{n-1} \equiv R_n Q_{n+1} + R_{n+1};$$
$$R_n \equiv R_{n+1} Q_{n+2}.$$

Обозначим через D последний неравный нулю остаток R_{n+1}. Точно так же, как и для целых чисел, можно показать, что тогда существует пара (по меньшей мере) многочленов X и Y, удовлетворяющих условию

$$XA + YB \equiv D.$$

Эти аналогии приводят нас к рассмотрению следующего вопроса:

Делимость многочленов. Говорят, что многочлен A делится на многочлен B, если евклидово деление дает $R \equiv \Omega$, то есть если существует такое Q, что

$$A \equiv BQ.$$

Однако полезно сделать следующее замечание:

$$A \equiv BQ \Leftrightarrow A \equiv (\lambda B)\left(\frac{1}{\lambda}Q\right),$$

где λ — некоторое число, неравное нулю.

Пример.

$$x^2 - 4 \equiv (x-2)(x+2) \equiv \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)(3x+6).$$

Нам нужно, следовательно, для получения приемлемой теории делимости считать эквивалентными многочлены, коэффициенты которых пропорциональны (то есть многочлены, не являющиеся независимыми с точки зрения векторного пространства). Нейтральным элементом умножения тогда будет не только $1 \cdot x^0$ (который обозначают 1), но также λx^0 (который обозначают λ), где λ — произвольное отличное от нуля вещественное число.

Как и для целых чисел, отношение «многочлен A кратен многочлену B» или «многочлен B делит многочлен A» является отношением порядка, так как транзитивность имеет место

$$\left.\begin{array}{l} \exists Q : A \equiv BQ \\ \exists S : B \equiv CS \end{array}\right\} \Rightarrow [\exists T : A \equiv CT].$$

Кроме того, если многочлен делит два других многочлена, он делит также и их сумму. Все следствия алгоритма Евклида сохраняют, следовательно, свою силу, включая вывод: Если D — последний, отличный от нуля остаток, то множество многочленов, являющихся общими делителями многочленов A и B, совпадает с множеством делителей многочлена D. Этот многочлен является общим делителем наивысшей степени (так как его делители, если они существуют, имеют меньшую, чем он, степень). Его называют по аналогии со случаем целых чисел *общим наибольшим делителем* многочленов A и B.

Многочлены A и B называются *взаимно простыми*, если их общий наибольший делитель является нейтральным элементом умножения, то есть λx^0. Следующий за ним остаток в алгоритме с необходимостью есть Ω.

Как и для целых чисел, можно доказать основную теорему: *если многочлен делит произведение двух многочленов и взаимно прост с одним из них, то он делит другой многочлен.* Нам остается, следовательно, составить полный перечень делителей некоторого многочлена. Но здесь аналогия с целыми числами исчезает. Мы не можем подвергнуть испытанию все многочлены низших степеней, потому что даже многочлены данной степени образуют несчетное множество.

Как выяснить, разложим ли данный многочлен, и если да, то найти все его разложения?

Прежде всего следует отдать себе отчет в том, что *возможность разложения зависит от поля, в котором выбраны коэффициенты.*

Например, если a — *положительное* число, то мы имеем:

$$x^2 - a \equiv (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a});$$

разложение всегда возможно, если поле коэффициентов есть множество вещественных чисел, но не всегда возможно, если это множество рациональных чисел.

Если считать a, как и выше, положительным, то можно убедиться, что многочлен $x^2 + a$ не разложим: действительно,

$$x^2 + a \equiv (ux + v)(u'x + v') \equiv uu'x^2 + (uv' + u'v)x + vv'$$

требует в силу условия отождествления, чтобы было

$$uu' = 1 > 0, \quad vv' = a > 0, \quad uv' + u'v = 0,$$

условия, несовместные в поле вещественных чисел. *Абсолютно неразложимыми многочленами являются единственно многочлены первой степени*; поэтому их можно сравнить с простыми числами; но многочлены над полем вещественных чисел не все разложимы в произведение множителей первой степени. Добавим, что методом расширения создано более богатое поле, чем поле вещественных чисел, названное полем *комплексных* (*или мнимых*) *чисел*; все многочлены над этим полем разложимы в произведение множителей первой степени. Аналогия с целыми числами с той точки зрения, которая нас занимает, здесь является совершенной (см. кн. III, гл. VI).

Вышесказанного недостаточно, чтобы распознать в общем случае, разложим данный многочлен или нет. Мы умеем только распознавать, делится ли данный многочлен на некоторый *выбранный* многочлен, либо непосредственно выполняя деление в общем случае, либо получая результат с помощью более простого правила, если данный многочлен первой степени (делимость на $x - a$).

3. Деление многочленов, расположенных по возрастающим степеням

Исследование здесь очень отличается от предыдущего, где мы рассмотрели только один привилегированный остаток: последний остаток деления, в то время как промежуточные остатки являлись частичными делимыми. Но теперь, так как операция продолжается неограниченно, нам нужно ее рассмотреть на каждом этапе. (Не смешивать с алгоритмом Евклида! Мы говорим об одном делении, так как делитель не меняется.)

Напомним, что вычисление выполняется следующим образом. Многочлены A и B предполагаются такими, что $\delta(A) - \delta(B) = p$ — положительное число.

Находят q'_p, такой, что $A'_1 \equiv A - q'_p x^p B$ удовлетворяет условию $\delta(A'_1) > p$, q'_{p+1}, такой, что $A'_2 \equiv A'_1 - q'_{p+1} x^{p+1} B$ удовлетворяет условию $\delta(A'_2) > \delta(A'_1)$, и так далее.

Если вынести в качестве общего множителя член наименьшей степени многочлена B, деление можно привести к случаю, когда $\delta(B) = 0$, или можно даже предположить, что член наименьшей степени многочлена B есть $1 \cdot x^0 = 1$. Тогда написанные условия выражают, что q'_p выбран так, чтобы уничтожить в A'_1 член степени p; q_{p+1} выбран, чтобы уничтожить в A'_2 член степени $p+1$, и т. д.

Поэтому, если Q'_i — множество членов, полученных на этапе, дающем

$$Q'_i = q'_p x^p + q'_{p+1} x^{p+1} + \ldots + q'_{p+i} x^{p+i};$$
$$A'_{i+1} = A'_i - q'_{p+i} x^{p+i} B, \quad \delta(A'_{i+1}) > p + i,$$

то получается

$$A \equiv BQ'_i + A'_{i+1}, \quad \delta(A'_{i+1}) > d(Q').$$

Теперь определим следующую операцию: по данным многочленам A и B, причем $\delta(B) = 0$, при выбранном натуральном m найти многочлены Q' и A' по условиям

$$A \equiv BQ' + A', \quad d(Q') = n, \quad \delta(A') > n.$$

Единственность решения вытекает из уже выявленных необходимых условий. Мы можем, однако, указать и прямое доказательство; пусть (Q'', A'') — тоже пара многочленов, удовлетворяющая тем же условиям по отношению к тому же натуральному n; вычитанием получаем:

$$B(Q' - Q'') + (A' - A'') \equiv \Omega, \quad d(Q' - Q'') \leqslant n.$$

Тогда

$$\delta(B)=0$$

влечет за собой

$$\delta[B(Q'-Q'')]\leqslant n,$$

следовательно,

$$\delta(A'-A'')\leqslant n.$$

А это совместно с неравенствами

$$\delta(A')>n, \quad \delta(A'')>n$$

только в случае, когда

$$A'=A''$$

и, следовательно,

$$Q'=Q''.$$

Эта операция дает очень важные тождества, с которыми мы снова встретимся при изучении рациональных дробей. Самые замечательные тождества получаются, когда делитель имеет форму $\lambda x+1$.

Пример. $A\equiv 1$, $B\equiv -x+1$. Операцию располагают следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}
A\equiv 1 & B\equiv 1-x \\
\quad -1+x & \overline{1+x+x^2} \\
\hline
A_1'\equiv \quad +x & \\
\qquad\quad -x+x^2 & \\
\hline
A_2'\equiv \qquad\quad x^2 & \\
\qquad\qquad -x^2+x^3 & \\
\hline
A_3'\equiv \qquad\qquad\quad x^3 &
\end{array}$$

$1\equiv(1-x)(1)+x,\ \ n=0,$

$1\equiv(1-x)(1+x)+x^2,\ \ n=1,$

$1\equiv(1-x)(1+x+x^2)+x^3,\ \ n=2,$

. . . .

$1\equiv(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)+x^{n+1},\ \forall n$ натуральных.

Закон образования коэффициентов для любого делителя не выявляется столь просто.

IV. Рациональные дроби от одного неизвестного

Подобно тому как рациональное число определяется парой целых чисел с помощью отношения эквивалентности

$$\frac{a}{b}\equiv\frac{a'}{b'}\Leftrightarrow ab'\equiv ba',$$

так же вводят и *рациональную алгебраическую дробь*, исходя из пары многочленов и полагая

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{A'}{B'} \Leftrightarrow AB' \equiv BA'.$$

Из типографских соображений мы будем писать иногда A/B.

В частности, если многочлен A кратен многочлену B, то есть если существует многочлен Q такой, что $A = BQ$, то имеем: $A/B \equiv Q$.

Если многочлен A не кратен многочлену B, то евклидово деление дает

$$A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B),$$

откуда

$$\frac{A}{B} \equiv Q + \frac{R}{B}, \quad d(R) < d(B).$$

Такое тождество (то есть равенство, справедливое для любого значения неизвестного x) очень важно при изучении функций и их графиков. Неравенство, относящееся к степеням, доказывает, что для бо́льших по абсолютной величине значений неизвестного x, значение, принимаемое рациональной функцией $\frac{R}{B}$, стоящей в правой части равенства, мало, так что многочлен $Q(x)$ дает удовлетворительные приближенные значения.

Деление по возрастающим степеням, приостановленное на этапе, когда частное имеет степень n, дает

$$A \equiv BQ_n + R_n, \quad \delta(R_n) > \delta(Q_n),$$

если предположить

$$\delta(B) = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{B} \equiv Q_n + \frac{R}{B}, \quad \delta(R_n) > d(Q_n).$$

Следовательно, это тождество имеет вид:

$$\frac{A}{B} \equiv (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n) + \frac{x^{n+1}(\gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_k x^k)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p}, \tag{1}$$

где $b_0 \neq 0$.

Если неизвестному x придать значение α, мало отличающееся от нуля, то рациональная дробь, стоящая в правой части, принимает, при n достаточно большом, малые значения (из-за наличия множителя x^{n+1}), так что многочлен Q_n дает также хорошее приближение к значению дроби $A(\alpha)/B(\alpha)$.

В анализе это будет уточнено после изучения пределов. Скажем лишь, что записывать рациональную дробь в виде (1)— это значит *развернуть рациональную дробь по степеням неизвестного x до порядка n.*

Теория делимости многочленов приводит к важным свойствам рациональных дробей: она отвечает на вопрос о сокращении рациональных дробей путем деления обоих членов на общий делитель. Она позволяет осуществлять очень полезные в анализе преобразования; например, мы видели, что если многочлены A и B — взаимно просты, то алгоритм Евклида приводит к двум многочленам X и Y, таким, что $AX + BY \equiv 1$; это означает, что можно получить следующее разложение на сумму:

$$\frac{1}{A \cdot B} = \frac{Y}{A} + \frac{X}{B}, \quad \text{откуда} \quad \frac{N}{AB} = \frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{B}.$$

V. Многочлены и рациональные дроби от нескольких неизвестных

Многочлен от нескольких неизвестных — это выражение, являющееся многочленом по отношению к каждому неизвестному с коэффициентами, взятыми из кольца многочленов, порожденного остальными неизвестными. Следовательно, это сумма одночленов, то есть сумма произведений вида

$$a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа. Числа a являются коэффициентами многочлена. *Степенью* многочлена называется наибольшее из чисел $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, соответствующих отличным от нуля коэффициентам.

Теорема. *Если многочлен P принимает значение* 0, *каковы бы ни были значения неизвестных, то все его коэффициенты равны нулю.*

Действительно, теорема верна для многочлена от одной неизвестной и доказывается рекуррентно, так как коэффициенты данного многочлена, рассмотренного как многочлен от неизвестной x_1, являются многочленами от $n - 1$ неизвестных, которые обращаются в нуль для всех значений этих неизвестных.

Отсюда следует, что основная теорема о тождественности многочленов остается в силе. Что касается делимости, то мы докажем лишь следующую теорему, сформулировав ее сначала для двух неизвестных x и y.

Теорема. *Если многочлен P от двух неизвестных x и y принимает значение* 0 *при $x = \alpha$, $\forall y$ и при $y = \beta$, $\forall x$, то он делится на* $(x - \alpha)(y - \beta)$.

В самом деле, мы уже отмечали, что деление многочлена на $(x - \alpha)$ не требует никакого деления коэффициентов. Поэтому если рассматривать P как многочлен относительно неизвестного x с коэффициентами, принадлежащими кольцу многочленов от y, то деление можно выполнить. Так как многочлен обращается в нуль при $x = \alpha$, это деление дает

$$P(x, y) \equiv (x - \alpha) Q_1(x, y).$$

Но $P(x, \beta)$ обращается в нуль, каково бы ни было значение неизвестного x, в частности, при $x \neq \alpha$, значит, $Q(x, \beta)$ обращается в нуль, каково бы ни было значение неизвестного x, а это доказывает, что $Q_1(x, y)$ делится на $y - \beta$, так что

$$\exists Q_2(x, y) : Q_1(x, y) \equiv (y-\beta) Q_2(x, y).$$

Отсюда выводим

$$P(x, y) \equiv (x-\alpha)(y-\beta) Q_2(x, y).$$

Эта теорема обобщается на многочлены от любого числа неизвестных. Следует лишь отметить, что в предыдущем доказательстве многочлены от x и y могут иметь своими коэффициентами многочлены из кольца многочленов, порожденного другими неизвестными $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Однако теория, основанная на евклидовом делении и алгоритме Евклида, здесь уже не проходит, как это показывает следующий пример: два многочлена от двух неизвестных $P \equiv x$ и $Q \equiv y$ следовало бы, очевидно, рассматривать как взаимно простые, но не существует пары многочленов $X(x, y)$, $Y(x, y)$, которые обеспечивали бы тождество

$$xX(x, y) + yY(x, y) \equiv 1,$$

так как левая часть не может иметь члена степени нуль.

Рациональные дроби от нескольких переменных определяются, если исходить из многочленов, так же как и для случая одного переменного.

Метод неопределенных коэффициентов. Теорема о тождественности многочленов применяется при решении задач следующего типа.

При каком условии многочлен $P \equiv x^4 + ax^2y^2 + by^4 + cx^2 + dy^2 + e$ делится на многочлен $x^2 + 3y^2 - 1$?

Рассмотрение степеней показывает, что частное, если оно существует, имеет форму $ux^2 + vy^2 + w$; его коэффициенты являются неизвестными. Мы их определим, *отождествляя* P с произведением

$$(x^2 + 3y^2 - 1)(ux^2 + vy^2 + w),$$

для чего мы *приравниваем* друг другу коэффициенты подобных членов.

$$\begin{cases} u = 1; \\ 3u + v = a; \\ 3v = b; \\ w - u = c; \\ 3w - v = d; \\ -w = e; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 1; \\ v = \dfrac{b}{3}; \\ w = -e; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 + \dfrac{b}{3}; \\ c = -e - 1; \\ d = -\left(3e + \dfrac{b}{3}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, два коэффициента произвольны, например b и e. Через них получаем искомые значения коэффициентов a, c, d и частным будет многочлен

$$x^2+\frac{b}{3}y^2-e.$$

VI. Замечание о применении тригонометрии к алгебраическим задачам

Жесткость формул, относящихся к многочленам и рациональным дробям, ценна тем, что каждый многочлен является незаменимым, тождества проверяются почленным сравнением, *если только фигурирующие буквы независимы друг от друга*, то есть не связаны какими-либо соотношениями, определяющими значения некоторых букв, когда даны значения других букв. (Чтобы проверить тождество, нужно всегда оставлять в наличии лишь независимые буквы.) Наоборот, гибкость тригонометрических формул позволяет управлять вычислениями, преследуя определенные цели: освободиться от радикалов, представить выражение в виде произведения, понизить степень выражения и т. п. Это обстоятельство заставляет очень часто вводить в алгебраические вычисления *вспомогательные углы*, независимо даже от геометрических интерпретаций, которые иногда достаточны, чтобы оправдать это введение.

1. **Случай одного числа.** Любому числу a всегда можно поставить в соответствие угол α равенством $a=\operatorname{tg}\alpha$; соответствие становится взаимно однозначным, если присоединить условие

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Если a заключено между -1 и $+1$ ($-1\leqslant a\leqslant+1$), то можно положить

$$a=\cos\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ \text{или}\ a=\sin\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

В частности, эта замена применяется, чтобы избежать введения квадратных радикалов благодаря формулам

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,\ \frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha,$$

позволяющим избежать радикалов из многочленов

$$1+x^2,\ 1-x^2,\ x^2-1,$$

а стало быть, и из любого многочлена второй степени в соответствии с тождеством, которое представляет трехчлен ax^2+bx+c в виде суммы или разности двух квадратов, из которых лишь один содержит букву x.

2. **Случай двух чисел.** *Между парами* (a, b) *вещественных чисел и парами* (r, α), *состоящими из числа и угла, определено взаимно однозначное соответствие формулами*

$$a = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha,\ \textit{причем либо}\ 0 \leqslant \alpha < \pi,$$

либо

$$r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$$

Всегда будем иметь $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, откуда найдется r с помощью одного из заданных равенств, но в первом случае α определен, откуда выводится знак числа r, а во втором случае нужно взять α из такого расчета, чтобы $\cos\alpha$ имел знак числа a (что обеспечит, чтобы $\sin\alpha$ имел знак числа b).

Разумеется, всегда будет $r^2 = a^2 + b^2$.

Примеры приложений.

Пусть

$$P(x, y) \equiv ax + by.$$

Если ввести r, α, ϱ, φ равенствами

$$\begin{cases} a = r\cos\alpha; \\ b = r\sin\alpha; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varrho\cos\varphi; \\ y = \varrho\sin\varphi, \end{cases}$$

то $P(x, y)$ получает следующий вид:

$$r\varrho\cos(\varphi - \alpha).$$

Аналогично

$$a(x^2 - y^2) + 2bxy$$

становится

$$r\varrho^2\cos(2\varphi - \alpha).$$

Однородные многочлены от x и y (то есть такие многочлены, у которых все члены имеют одинаковую степень) и рациональные дроби, имеющие такие члены, преобразуются введением кратных дуг, что понижает степень.

Пример.

$$E \equiv ax^2 + bxy + cy^2.$$

Если положить

$$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,$$

многочлен получает следующий вид:

$$E = \frac{\varrho^2}{2}\left[(a - c)\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + (a + c)\right].$$

Полагая, далее,

$$a - c = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha,$$

получаем:

$$E = \frac{r\varrho^2}{2}\left[\cos(2\varphi - \alpha) + \frac{a + c}{r}\right].$$

В случае, когда $\frac{a+c}{r} < 1$, можно положить $\frac{a+c}{r} = \cos\beta$ и получить:

$$E = r\varrho^2 \cos\left(\varphi - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\varphi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

В зависимости от поставленной цели выбирают и лучшую форму.

3. **Введение тангенса.** Для преобразования рациональных дробей от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, числитель и знаменатель которых являются однородными многочленами одной и той же степени, вводят только $\operatorname{tg}\alpha$, разделив предварительно оба члена дроби на надлежащим образом выбранную степень $\cos\alpha$. Однако это возможно и в более общих случаях, если удается добиться однородности одной и той же степени в числителе и знаменателе с помощью тождества

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

позволяющего изменить степень с сохранением ее четности.

Пример.

$$\frac{\cos^3\alpha - \sin\alpha}{2\cos^5\alpha + \sin^3\alpha} = \frac{[\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)](\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{2\cos^5\alpha + \sin^3\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{[1 - \operatorname{tg}\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)]\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{2 + \operatorname{tg}^3\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Теперь можно вернуться к алгебре, полагая $\operatorname{tg}\alpha = t$.

4. **Случаи симметрии и псевдосимметрии.** Подобно тому как в алгебре, если роли x и y симметричны, вводят их сумму и произведение $x + y = s$, $xy = p$ и рассматривают x и y, как пару корней уравнения $u^2 - su + p = 0$, так и в тригонометрии, если речь идет о двух углах φ и ψ, которые фигурируют симметрично, вводят их сумму и разность (или чаще их полусумму и полуразность), причем разность находится под знаком косинуса для сохранения симметрии. Мы будем говорить, что имеет место псевдосимметрия, если симметрия нарушается лишь несколькими переменами знаков такого рода, что можно все же ввести сумму и разность углов, однако эта последняя фигурирует не только под знаком косинуса, но и под знаком синуса.

Частный случай. *Выражение, симметричное относительно* $\sin\varphi$ *и* $\cos\varphi$.

Оно симметрично относительно φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$, так что можно ввести угол $\varphi - \frac{\pi}{4}$, используя:

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

и

$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

(Это сводится к изменению начала отсчета углов, состоящему в том, что за начальный радиус берется первая биссектриса старых осей.)

Затем возвращаются к алгебре, полагая

$$u = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\, u, \quad \cos\varphi\sin\varphi = u^2 - \frac{1}{2}.$$

Сохраняя $\varphi - \frac{\pi}{4} = \psi$, получаем:

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\psi, \quad \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\psi$$

и также

$$\cos\varphi - \sin\varphi = -\sqrt{2}\sin\psi.$$

Только достаточный опыт в тригонометрических вычислениях позволяет применять указанные приемы с известной виртуозностью.

Вторая глава

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

I. Определения

В последующем буквы P, Q, . . . будут обозначать при отсутствии противоположных указаний многочлены, или рациональные дроби, или вообще алгебраические, либо даже тригонометрические выражения, для которых применяемые операции определены. Предполагается, что эти выражения принимают вполне определенные числовые значения для любой системы значений x_0, y_0, z_0, . . ., фигурирующих в них неизвестных x, y, z, ... Чтобы упростить запись, мы будем предполагать, что имеются три неизвестных. $P(x_0, y_0, z_0)$ будет обозначаться через P_0.

Коэффициенты выражения берутся из подмножества $\mathscr{T}$ вещественных чисел. Значения, придаваемые неизвестным, берутся из множества $\mathscr{E}$ вещественных чисел, которое может быть множеством $\mathscr{T}$ или каким-либо его расширением: например, если коэффициенты предполагаются целыми, то для неизвестных допускаются значения рациональные или вида $a + b\sqrt{c}$, где a, b, c — рациональны, или даже допускаются любые вещественные числа.

Мы предполагаем, следовательно, $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{E} \subseteq \mathscr{R}$.

Тождество. Если для любой системы $\{x_0, y_0, z_0\}$ значений из $\mathscr{E}$, придаваемых неизвестным, $P(x_0, y_0, z_0) = Q(x_0, y_0, z_0)$, то говорят, что на множестве $\mathscr{E}$ выражения $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ *тождествен-*

но равны. Это записывают $P(x, y, z) \equiv Q(x, y, z)$, когда множество $\mathscr{E}$ определено.

Пример. $x \equiv \sqrt{x^2}$, если множество $\mathscr{E}$ является множеством положительных вещественных чисел, но это не верно на множестве вещественных чисел любого знака.

Уравнение. Два выражения, вообще говоря, не являются тождественно равными; поэтому ставится задача узнать, для каких систем значений неизвестных выражения P и Q принимают одно и то же числовое значение. Отыскать все множества $\{x_0, y_0, z_0\}$, для которых $P_0 = Q_0$ — *это значит решить уравнение*

$$P(x, y, z) \equiv Q(x, y, z).$$

Каждое множество $\{x_0, y_0, z_0\}$ называется *решением уравнения*.

Аналогично *решить систему уравнений*

$$\begin{cases} P = Q; \\ R = S; \\ \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ L = M \end{cases}$$

— это значит найти все множества значений $\{x_0, y_0, z_0\}$, являющиеся решениями всех этих уравнений. Каждое из этих множеств называется *решением системы*.

В последующем мы будем предполагать, что множество $\mathscr{T}$, из которого взяты коэффициенты, является *полем* (деление возможно, за исключением деления на нуль). Но значения, придаваемые неизвестными, будут взяты из множества $\mathscr{E}$, которое следует каждый раз точно указывать.

Так, например, для уравнений

$$2x + 3 = 0, \;\; x^2 - 4 = 0, \;\; x^2 - 3 = 0, \;\; x^2 + 3 = 0$$

будут исследоваться существования решений и их число в одном из следующих множеств N, Z, Q^+, Q или R. Последнее из этих уравнений имеет два решения, если $\mathscr{E}$ есть множество комплексных чисел (кн. III, гл. VI).

II. Равносильность (эквивалентность) уравнений

Два уравнения называются равносильными (эквивалентными) относительно некоторого множества $\mathscr{E}$, если они имеют в этом множестве одни и те же решения; аналогично определяется равносильность систем.

Замечание. С этой теоретико-множественной точки зрения уравнения

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{и} \quad x - 2 = 0 \;\; \text{равносильны в } R^+,$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad (x - 2)^2 = 0 \;\; \text{равносильны в } R.$$

Но в геометрии алгебраических кривых, изучаемых по их уравнениям, системы

$$\begin{cases} y=0, \\ y=x-2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0, \\ y=(x-2)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0, \\ y^3=(x-2)^2 \end{cases}$$

соответствуют различным ситуациям с точки зрения *порядка кратности* (кн. II, ч. 2, гл. I) и касания (кн. III, гл. III). Таким образом, там единственно уместной будет теорема IV, которая следует ниже.

В последующем мы принимаем теоретико-множественную точку зрения.

Мы полагаем множество $\mathcal{E}$ уточненным таким образом, чтобы P, Q, ... были определены и принимали определенные значения P_0, Q_0, ... для всех значений неизвестных из множества $\mathcal{E}$. Таким образом, когда фигурирует радикал, то выражение, находящееся под знаком радикала, не должно быть отрицательным ни для каких элементов из множества $\mathcal{E}$. Никакой знаменатель не должен обращаться в нуль. Эти запрещенные значения заранее считаются исключенными.

Теорема I. *Каково бы ни было выражение R, уравнения $P = Q$ и $P + R = Q + R$ равносильны.*

Действительно, операции под выражениями были выбраны той же структуры, что и операции над числами, так что

$$[P_0=Q_0] \Longleftrightarrow [P_0+R_0=Q_0+R_0].$$

Теорема II. Нам известно следствие

$$[P_0=Q_0] \Longrightarrow [P_0R_0=Q_0R_0],$$

но обратная импликация *распадается*

$$[P_0R_0=Q_0R_0] \Longrightarrow [R_0=0 \text{ или (неисключающее) } P_0=Q_0].$$

(Словами «неисключающее или» мы хотим сказать, что обе возможности не исключают друг друга, они могут быть справедливыми одновременно.)

Отсюда предложения:

1) *Уравнение $PR = QR$ распадается* на уравнения $R = 0$ и $P = Q$. Иначе говоря, множество решений уравнения $PR = QR$ есть объединение множества решений уравнения $R = 0$ и множества решений уравнения $P = Q$.

2) Если R не принимает значение 0 на множестве $\mathcal{E}$, то уравнения $PR = QR$ и $P = Q$ равносильны.

Теорема III. Известно, что

$$P_0^2=Q_0^2 \Longleftrightarrow [P_0=Q_0 \text{ или } P_0=-Q_0],$$

откуда предложения:

На множестве, где P_0 и Q_0 имеет один и тот же знак, уравнения $P^2 = Q^2$ и $P = Q$ равносильны.

Приложения этих теорем. 1) Всегда возможно получить уравнение, равносильное данному, но имеющее в правой части 0. («Перенести все члены в одну и ту же часть».)

2) Всегда возможно заменить уравнение, имеющее знаменатели, уравнением без знаменателей. Если члены уравнения были рациональными дробями, то члены преобразованного уравнения будут многочленами. Уравнение называется тогда целым и записывается в виде $P=0$, где P — многочлен.

3) Иногда возможно разложить уравнение.

4) От уравнения, содержащего один или два квадратных радикала, всегда можно перейти к уравнению без радикалов, для этого изолируют один радикал и возводят потом в квадрат оба члена: если радикал был единственным, он исчезает. Если имелся еще один радикал, то в итоге остается лишь один радикал, и процедуру повторяют. Но если их было 3, то, вообще говоря, остается снова 3. Необходимость исследования знаков, что иногда связано со значительными сложностями, оправдывает *практическое правило*: в задачах по элементарной математике *не следует вводить радикалы из выражений, содержащих неизвестные* *.

Например, если написать, что требуется найти x, удовлетворяющее условиям $x>3$, $\sqrt{x-3}=x+a$, то это значит, что был выбран плохой метод для решения системы

$$\begin{cases} y^2=x-3; \\ y=x+a; \\ y>0. \end{cases} \quad \text{Полученную систему следует преобразовать в систему:} \quad \begin{cases} x=y-a; \\ y^2=y-a-3; \\ y>0. \end{cases}$$

Следует заметить, что $x>3$, $\sqrt{x-3}=x+a$ равносильно записи

$$x+a>0, \qquad x-3=(x+a)^2,$$

причем бесполезно сохранять требование $x>3$, так как оно обеспечено самим уравнением.

Теорема IV. Теорема о линейном комбинировании.

$$\begin{cases} P=0; \\ Q=0 \end{cases} \textit{равносильно системе} \begin{cases} P=0; \\ aP+bQ=0 \end{cases} \quad \textit{при условии } b\neq 0.$$

Последнее условие выражает, что Q на самом деле входит в комбинацию. Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема V. О подстановке.

Система

$$\text{(I)} \begin{cases} x=F(y,\ z); \\ P(x,\ y,\ z)=0; \\ Q(x,\ y,\ z)=0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ S(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \quad \textit{равносильна системе} \quad \text{(II)} \begin{cases} x=F(y,\ z); \\ P[F(y,\ z),\ y,\ z]=0; \\ Q[F(y,\ z),\ y,\ z]=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S[F(y,\ z),\ y,\ z]=0. \end{cases}$$

---

* Это не всегда оправдывается.— *Прим. перевод.*

Переход от системы (I) к системе (II) называется *исключением x из уравнений*; иными словами, здесь образуется равносильная система, в которой лишь одно уравнение содержит неизвестное x: эта буква x исчезла из других уравнений. Теорема IV также может служить для выполнения исключений.

Переход от системы (II) к системе (I) называется введением вспомогательного неизвестного x. Чтобы ввести вспомогательное неизвестное $x = F(y, z)$, нужно сделать так, чтобы выражение F появилось в уравнениях относительно неизвестных y и z.

Пример. Требуется решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Левая часть запишется следующим образом:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Можно, следовательно, ввести вспомогательное неизвестное u, где $u = x + \frac{b}{2a}$, и использовать систему:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c; \\ u = x + \dfrac{b}{2a}, \end{cases} \quad \text{равносильную системе} \quad \begin{cases} x = u - \dfrac{b}{2a}; \\ u^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{cases}$$

Замечание. Введение вспомогательного неизвестного u, определенного соотношением $u = x + h$, можно осуществить, подставляя вместо x двучлен $u - h$. Можно также ввести вспомогательное неизвестное u с помощью равенства $x = f(u)$, но различные значения неизвестного u могут дать одно и то же значение для неизвестного x. В таких случаях уточняют множество, в котором взято неизвестное u, чтобы обязательно иметь *взаимно однозначное соответствие между неизвестными* u и x. Например, если для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ вводят угол u равенством $x = \cos u$, то требуют, чтобы было $0 \leqslant u \leqslant \pi$.

III. Классические уравнения и системы

A) Основные уравнения

($\mathscr{E}$ здесь множество вещественных чисел).

1) Аффинное уравнение с одним неизвестным.

$ax + b = 0$.

$a \neq 0$ [$x = -b/a$, решение единственное;

$$a = 0 \begin{cases} b \neq 0, \text{ решения нет (невозможность);} \\ b = 0, \text{ всякое } x_0 \text{ есть решение (неопределенность).} \end{cases}$$

2) Двучленное уравнение. $x^n = k$, n натуральное.

$$k > 0 \left[\begin{array}{l} n \text{ нечетно } x = \sqrt[n]{k}\,, \text{ одно решение;} \\ n \text{ четно } \begin{cases} x' = \sqrt[n]{k}\,, \text{ два решения.} \\ x'' = -\sqrt[n]{k} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$k < 0 \left[\begin{array}{lll} n \text{ нечетно,} & x = -\sqrt[n]{-k}\,, & \text{одно решение;} \\ n \text{ четно,} & & \text{решения нет;} \end{array} \right.$$

$$k = 0 \qquad\qquad x = 0, \qquad\qquad \text{одно решение.}$$

3) Система двух аффинных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0; \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Если один из коэффициентов неизвестных отличен от нуля, например $a \neq 0$, то использование теоремы IV или теоремы V позволяет исключить неизвестное x, и задача приводится к решению линейного уравнения относительно неизвестного y, которое либо допускает единственное решение, либо невозможно, либо неопределенно. Если четыре коэффициента при неизвестных все равны нулю, то система, очевидно, невозможна, за исключением случая $c = c' = 0$, когда имеется полная неопределенность.

Нахождение решения системы интерпретируется как разыскание общих точек двух прямых на плоскости, заданных своими уравнениями. Эти прямые, если они существуют, либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

Существование единственного решения выражается условием $\delta = ab' - ba' \neq 0$. Аналогично для трех уравнений с тремя неизвестными условие единственности решения выражается условием

$$\Delta = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a'' \neq 0.$$

δ и Δ называются *определителями* из коэффициентов уравнений. Аналогично система p аффинных уравнений с q неизвестными приводится последовательными исключениями или к одному уравнению * или к системе линейных уравнений с одним неизвестным. Специальное исследование для каждого примера проводится без труда. Мы не касаемся здесь общего случая и его исследования, так как для этого требуется теория определителей.

4) Симметричная система

$$\begin{cases} x + y = s; \\ xy = p. \end{cases}$$

---

* Может быть с несколькими неизвестными.— *Прим. ред.*

Решение, если оно существует, состоит из пары решений уравнения $u^2 - su + p = 0$. Если это уравнение имеет два корня u' и u'', то система имеет два решения:

$$\begin{cases} x = u'; \\ y = u'' \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = u''; \\ y = u'. \end{cases}$$

Если дискриминант уравнения с неизвестным u равен нулю, так что это уравнение имеет лишь один корень u_0, то система имеет единственное решение $x = y = u_0$. Наконец, решение не существует (случай невозможности), если квадратное уравнение не имеет корней. Заметим, что имеется взаимно однозначное соответствие между парой

$$(x,\ y), \qquad x \leqslant y$$

и парой

$$(s,\ p), \qquad s^2 \geqslant 4p.$$

В) Уравнения, приводящиеся к предыдущим преобразованиям неизвестных

1) В а ж н е й ш и е в с п о м о г а т е л ь н ы е н е и з в е с т н ы е, к о т о р ы е р е к о м е н д у е т с я в в о д и т ь: $u = x - \alpha$, чтобы избавиться от некоторых членов, например от члена первой степени в квадратном уравнении.

$u = x^2$ — в уравнении, где неизвестное x фигурирует только с четными показателями степеней (например, *биквадратное уравнение*).

$u = x + \frac{1}{x}$ можно вводить в многочлены, у которых члены, равноотстоящие от концов, имеют равные коэффициенты (*случай возвратных уравнений*), так как выражение $x^n + \frac{1}{x^n}$ вычисляется для последовательных значений показателя n в функции степеней неизвестного u.

Наконец, мы уже упоминали о введении вспомогательных углов для преобразования выражений с помощью тригонометрии.

Иррациональная форма уравнений, как тригонометрических так и алгебраических, позволяет, вообще говоря, проводить лишь приближенные вычисления: если целью исследования является определение таких приближенных значений, то поиски общих формул могут оказаться бесполезными (см. кн. III. Анализ). Задача, которую мы рассматриваем здесь, состоит в следующем:

Пусть дана система уравнений (*или одно уравнение*), *коэффициенты которых являются независимыми буквами*; *требуется найти все решения в виде выражений, содержащих эти коэффициенты, а также известные числа.*

Уравнения в этом случае называются *общими* уравнениями рассматриваемого типа. Фигурирующие в них буквы, отличные от неизвестных, называются *параметрами*. Решение называется алгебраическим, если оно дается алгебраическими выражениями.

Выше мы решили уравнения первой и второй степени с одним неизвестным.

2) Изучение уравнения третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

а) *Алгебраическое решение*. Введение вспомогательного неизвестного $X = x + \frac{b}{3a}$ приводит к исчезновению члена второй степени, так что получается уравнение

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Введем затем два вспомогательных неизвестных u и v с помощью замены $X = u + v$, сохраняя за собой выбор второго условия, связывающего u и v. Получается

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

что внушает мысль положить

$$3uv + p = 0.$$

В итоге мы должны решать систему

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} X = u + v; \\ uv = -\frac{p}{3}; \\ u^3 + v^3 = -q, \end{cases} \qquad \text{равносильную системе} \qquad (\mathrm{II}) \quad \begin{cases} X = u + v; \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}; \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Последние два уравнения выражают, что $(u^3,\ v^3)$ являются парой корней уравнения

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Следовательно, получаем два случая:

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \geqslant 0, \quad X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

(*формула Кардана и Тартальи*)*.

Если Δ отрицательно, то указанный метод не дает никакого решения.

Но есть ли уверенность, что решение кубического уравнения единственно, если оно найдено, и что решений нет, если их не удалось получить указанным способом? Конечно нет, так как описанный метод может дать только решения, удовлетворяющие условию $X^2 \geqslant -\frac{4p}{3}$, необходимому для существования чисел u и v**. Но, конечно, он дает все решения, удовлетворяющие этому условию.

---

*Об истории решения кубического уравнения см.: К. А. Рыбников, История математики, I, изд. Моск. ун-та. 1960, стр. 116—120.— *Прим. ред.*

** Действительно, для любых вещественных u и v имеем $(u-v)^2 \geqslant 0$, то есть $(u+v)^2 - 4uv \geqslant 0$, откуда, учитывая систему 1, находим: $x^2 \geqslant -\frac{4p}{3}$.— *Прим. ред.*

b) Тригонометрическое решение. Вводим вспомогательное неизвестное φ, полагая $X = \lambda \cos \varphi$, $\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, сохраняя за собой выбор числа λ в дальнейшем.

Уравнению можно придать тогда следующий вид (если заметить, что $\lambda = 0$ годится лишь для случая $q = 0$, не представляющего интереса):

$$\lambda^3 \left(\cos^3 \varphi + \frac{p}{\lambda^2} \cos \varphi \right) + q = 0.$$

Сравнение этого уравнения с тождеством $4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi = \cos 3\varphi$ наводит на мысль положить $\lambda^2 = -\frac{4p}{3}$, и тогда получаем систему:

$$\begin{cases} X = \lambda \cos \varphi; \\ \lambda^2 = -\dfrac{4p}{3}; \\ \lambda^3 \cos 3\varphi = -4q, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} X = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}} \cos \varphi; \\ \cos 3\varphi = -\dfrac{3\sqrt{3}\, q}{2(-p)\sqrt{-p}}; \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

В случае $p < 0$, $\frac{27 q^2}{-4p^3} < 1$ находят по $\cos 3\varphi$ три значения для φ и для $\cos \varphi$ и, значит, три значения для неизвестной X *.

Условие разрешимости выражается единственным неравенством:

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0,$$

---

* Учитывая введенное условие, нам следует отыскивать угол 3φ по значению $\cos 3\varphi$, которое по абсолютной величине меньше 1. В пределах 0, π мы найдем только одно значение такого угла, которое назовем α_0. В пределах 0, 3π мы найдем три таких угла

$$\alpha_0, \quad \alpha_0 + 2\pi, \quad -\alpha_0 + 2\pi;$$

откуда получим три значения φ, лежащие в пределах 0, π,

$$\frac{\alpha_0}{3}, \quad \frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\pi}{3},$$

с помощью которых и получим три значения неизвестного X, равные

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha_0}{3}, \quad 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(-\frac{\alpha_0}{3} + \frac{2\pi}{3} \right).$$ — *Прим. ред*

то есть это как раз случай, когда первый метод ничего не дает. Отметим, что этим методом мы не получили формулу, дающую каждый корень или хотя бы один из них через алгебраическое выражение от p и q. Поэтому задача не может в этом случае рассматриваться с алгебраической точки зрения, как решенная.

3) Уравнение четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Можно проверить, что: 1) заменой неизвестного $X = x + \frac{b}{4a}$ уничтожается член третьей степени; 2) если затем ввести новое неизвестное y, положив $X = ky + h$, и потребовать, чтобы уравнение от y было возвратным (следовательно, разрешимым с помощью квадратных уравнений), после исключения k из полученных условий уравнение относительно h окажется лишь третьей степени.

Таким образом, решение уравнения четвертой степени сведено к последовательному решению уравнений третьей и второй степеней *.

В заключение подчеркнем тот факт, что мы не полностью решили задачу для уравнений третьей и четвертой степеней, а к общей задаче мы даже не подступали. В дальнейшем мы попытаемся это сделать, но уже сейчас можем признаться, что лишь внесем некоторую ясность в эту задачу, но не решим ее. Оно и понятно! Норвежец Абель (1802—1829) в возрасте 19 лет доказал невозможность решения в радикалах общего уравнения пятой степени, а Галуа (1811—1832), с помощью своей гениальной теории групп, доказал, что и для общего уравнения любой степени n, большей четырех, эта задача неразрешима.

---

* Выполнив введение y в уравнение $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$ и потребовав равенство коэффициентов при членах, равноудаленных от начала и конца уравнения (члены предполагаются расположенными по убывающей степени y), находим:

$$k^4 = h^4 + ph^2 + qh + r, \quad 4k^3h = 4kh^3 + 2pkh + qk,$$

откуда, исключая k, получаем кубическое уравнение относительно h:

$$2qh^3 + (4r - p^2)h^2 - pqh - \frac{q^2}{4} = 0.$$

Для составления возвратного уравнения относительно y достаточно взять какое-нибудь одно решение этого кубического уравнения. Возвратное уравнение четвертой степени сводится к последовательному решению сначала одного, а затем двух квадратных уравнений.— *Прим. ред.*

АНАЛИЗ

Основы локального и глобального исследования числовых функций были изложены в книге 1, глава IV. Мы напомним лишь самые существенные предложения, прежде чем вывести из них следствия и применить введенные понятия к некоторым частным функциям.

Первая глава

ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основными понятиями являются понятие предела, понятие непрерывности функции одной переменной в точке и понятие производной этой функции в точке.

Напоминаем определения:

1) Предел. Если функция $y = f(x)$ определена в интервале (a, b), за исключением, быть может, точки x_0, то говорят, что она стремится к пределу L, когда x стремится к x_0, если любому положительному числу ε можно поставить в соответствие число α, такое, что:

$$x \neq x_0,\ |x - x_0| < \alpha \text{ обеспечивает } |f(x) - L| < \varepsilon,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha : [|x - x_0| < \alpha] \Rightarrow [|f(x) - L| < \varepsilon].$$

(Как это видно, мы ограничиваемся здесь окрестностями с центром в точке x_0.)

Пишут:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L,$$

что читается: «$f(x)$ стремится к L, когда x стремится к x_0».

2) Непрерывность. Функция f, определенная в интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если $f(x)$ стремится к $f(x_0)$, когда x стремится к x_0.

3) П р о и з в о д н а я. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в интервале (a, b), имеет производную k в точке x_0, если

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

стремится к числу k, когда x стремится к числу x_0.

I. Вычисление пределов

Определение предела указывает способ для проверки, а не для нахождения или вычисления предела. Однако алгебраические функции построены с помощью только алгебраических операций, которые сначала применяют к двум элементарным функциям:

$x \searrow \underline{\; C \;} \nearrow a$, то есть $C(x) = a$ (постоянная функция);

$x \searrow \underline{\; I \;} \nearrow x$, то есть $I(x) = x$ (тождественная функция).

Немедленно устанавливается, что, если x стремится к x_0, то $C(x)$ стремится к a, $I(x)$ стремится к x_0, согласно определению. Достаточно поэтому посмотреть, как влияют на предел алгебраические операции.

Теорема. *Операция «перейти к пределу» перестановочна* * *со сложением и умножением.* Это означает, что предел суммы или произведения есть сумма или произведение пределов функции. Разумеется, здесь рассматривается лишь *конечное число* слагаемых или сомножителей.

Мы должны выполнить проверку этого утверждения, хотя оно интуитивно и очевидно. Пусть поэтому $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — две функции, определенные в (a, b) и стремящиеся соответственно к L_1 и L_2, когда x стремится к x_0.
Отсюда

$$\forall \varepsilon_0, \quad \exists \alpha_1 : |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |u_1(x) - L_1| < \varepsilon_0; \tag{1}$$

$$\exists \alpha_2 : |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |u_2(x) - L_2| < \varepsilon_0. \tag{2}$$

1) С у м м а. Функция $s(x) = u_1(x) + u_2(x)$ определена в (a, b). Можем ли мы обеспечить для любого $\varepsilon > 0$:

$$|s(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon? \tag{3}$$

Достаточно получить $|u_1(x) - L_1| + |u_2(x) - L_2| < \varepsilon$, что обеспечивается, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ и α, равным наименьшему из положительных чисел α_1 и α_2, существование которых утверждает запись (1) и (2).

Доказательство распространяется тотчас на любое конечное число слагаемых.

---

* В тексте «*compatible*»— совместна.— *Прим. перевод.*

2) Произведение. $p(x) = u_1(x) \cdot u_2(x)$.

Можем ли мы обеспечить для любого $\varepsilon > 0$

$$|p(x) - L_1 L_2| < \varepsilon? \tag{4}$$

Записывая левую часть (4) в виде суммы произведений, имеем:

$$|u_1(x)\,u_2(x) - L_1 L_2| = |[u_1(x) - L_1]\,u_2(x) + [u_2(x) - L_2]\,L_1| \leqslant$$
$$\leqslant |u_1(x) - L_1| \cdot |u_2(x)| + |u_2(x) - L_2| \cdot |L_1|.$$

Достаточно поэтому обеспечить неравенства

$$|u_1(x) - L_1| \cdot |u_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1') \quad \text{и} \quad |u_2(x) - L_2| \cdot |L_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2')$$

Но в окрестности точки x_0, $u_2(x)$ близок к L_2. Уточним, что это значит: можно обеспечить, например, неравенство

$$|u_2 - L_2| < \frac{1}{2}|L_2|, \text{ взяв } |x - x_0| < \alpha'.$$

Тогда (1′) и (2′) обеспечиваются следующими требованиями:

$$|u_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2\left|\frac{3L_2}{2}\right|} = \frac{\varepsilon}{3|L_2|} \quad \text{и} \quad |u_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2|L_1|}.$$

Достаточно поэтому взять за ε_0 наименьшее из чисел, стоящих в правых частях двух последних неравенств, а за α — наименьшее из чисел α' и α_1, α_2, существование которых утверждается в формулах (1) и (2). Тогда выполнение неравенства $|x - x_0| < \alpha$ обеспечивает выполнение неравенства (4).

Теорема распространяется рекуррентно, в силу ассоциативности умножения, на любое конечное число сомножителей.

3) Функция, обратная по значениям данной функции. Пусть $w(x) = 1/v(x)$.

a) Если функция $v(x)$ предполагается определенной в интервале (a, b), за исключением, быть может, точки x_0 и стремящейся к числу L, когда x стремится к x_0, то нам *достаточно предположить L отличным от нуля*, чтобы обеспечить определение функции w в окрестности точки x_0. Действительно, мы видели выше, как определить положительное число α', такое, что

$$|x - x_0| < \alpha' \Rightarrow |v(x) - L| < \frac{L}{2}.$$

Это значит, что в интервале $(x_0 - \alpha', x_0 + \alpha')$ функция $v(x)$ не обращается в нуль. Уточним еще (это потребуется для дальнейшего), что $v(x)$ сохраняет один и тот же знак. Таким образом, функция $w(x)$ определена в окрестности точки x_0.

b) Мы можем теперь без труда проверить, что

$$\left|w(x) - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon \tag{5}$$

обеспечивается неравенством

$$\frac{|v(x)-L|}{|v(x)|\cdot|L|}<\varepsilon.$$

Достаточно поэтому иметь

$$|v(x)-L|<\varepsilon_0, \qquad (1')$$

где

$$\varepsilon_0=\varepsilon\cdot|L|\cdot\frac{1}{2}|L|=\frac{\varepsilon L^2}{2};$$

отсюда получается число α_0, такое, что неравенство $|x-x_0|<\alpha_0$ обеспечивает (1'). Если взять затем в качестве α наименьшее из положительных чисел α_0 и α', то неравенство $|x-x_0|<\alpha$ обеспечивает неравенство (5).

4) Квадратный корень из функции. Пусть $r(x)=\sqrt{v(x)}$.

Нам достаточно, как мы сказали, предположить предел L функции $v(x)$ положительным, чтобы обеспечить, что $v(x)$ положительно в окрестности порядка α' точки x_0; функция $r(x)$ определена, следовательно, в этой окрестности. Желаемое условие состоит в следующем:

$$\forall x, \quad |r(x)-\sqrt{L}|<\varepsilon, \qquad (6)$$

что эквивалентно условию

$$|\sqrt{v(x)}-\sqrt{L}|<\varepsilon,$$

или же

$$\left|\frac{v(x)-L}{\sqrt{v(x)}+\sqrt{L}}\right|<\varepsilon.$$

Достаточно взять $\varepsilon_0=\varepsilon\sqrt{L}$, получить соответствующее α_0 и взять затем в качестве α наименьшее из чисел α_0 и α'. Таким образом, $r(x)$ имеет предел, равный $\sqrt{L}$.

Если L *равно нулю*, то нужно убедиться, что функция $r(x)$ определена в окрестности точки x_0, что часто приводит к необходимости принять понятия правого предела (когда нужно брать $x>x_0$) и левого предела (когда нужно ограничиться предположением $x<x_0$).

Рассуждение распространяется на корень степени q $\varrho(x)=\sqrt[q]{v(x)}$ с помощью тождества, которое выявляет иррациональное выражение, сопряженное разности $\sqrt[q]{v(x)}-\sqrt[q]{L}$. Речь идет о тождестве

$$a^q-b^q=(a-b)(a^{q-1}+a^{q-2}b+\ldots+a^{q-1-h}b^h+\ldots+b^{q-1}).$$

В случае когда q нечетно, L мы будем предполагать положительным, чтобы действовать только с $\sqrt[q]{|v|}$.

В ы в о д. Во всех случаях, когда действия над пределами имеют смысл, операция «перейти к пределу» перестановочна с алгебраическими операциями, выполняемыми над функциями.

С л е д с т в и е. *Алгебраические функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены.*

З а м е ч а н и е. В ы ч и с л е н и е о ш и б о к. Вычисления, которые мы выполнили, дают больше чем нужный вывод; они показывают, какую ошибку можно совершить в значении x_0, чтобы обеспечить, что ошибка в значении функции будет меньше данного числа ε. Например, пусть функцию $y = 3x^2 + 4x - \frac{1}{x}$ нужно исследовать при $x = x_0$. Полагают $u_1 = 3x^2$, $u_2 = 4x$, $u_3 = -\frac{1}{x}$.

Дозволенная ошибка ε будет, как обычно, равно распределена между тремя членами.

Согласно приведенным расчетам, достаточно будет выбрать *

$$\alpha_1 < \frac{\varepsilon}{27|x_0|}, \quad \alpha_2 < \frac{\varepsilon}{12}, \quad \alpha_3 < \frac{x_0^2\varepsilon}{2\cdot 3} \text{ и } \alpha' < \left|\frac{x_0}{2}\right|.$$

Например, для $x_0 = 100$ возьмем $\alpha < \varepsilon/2700$, требуемый формулой для α_1;

для $x_0 = 1/100$ возьмем $\alpha < \varepsilon/60\,000$,

требуемый формулой для α_3.

Чтобы эти результаты не были бесполезно требовательными, не нужно неосмотрительно преуменьшать правые части неравенств; об этом мы до сих пор не заботились, потому что имели в виду лишь существование чисел α_i, не интересуясь их значениями. В случае практических вычислений, называемых «расчетом ошибок», следует заново проводить расчеты, учитывая сделанное замечание.

II. Вычисление производных

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная и непрерывная в интервале (a, b). Пусть дано значение x_0, взятое в этом интервале. Мы желаем исследовать существование и значение предела выражения $m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

О б о з н а ч е н и я. Разности $x - x_0$ и $f(x) - f(x_0)$ называются соответственно *приращением* x и *приращением* y (каковы бы ни были их знаки!). Эти приращения обозначаются соответственно Δx и Δy **. Таким образом, если функция f и число x_0 даны, то Δy является функцией приращения Δx ***. Производная в точке x_0,

* Формулу для первого члена можно получить, рассматривая x^2 как произведение $x \cdot x$.— *Прим. ред.*

** Уместнее было бы писать Δx_0 и Δy_0.— *Прим. перевод.*

*** $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.— *Прим. ред.*

если она существует,— это предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$. Мы обозначим этот предел через $f'(x_0)$, потому что в тех случаях, которые мы встретим, это будет как раз значение производной функции, обозначаемой через $f'(x)$, в точке x_0. Наконец, чтобы облегчить запись, условливаются обозначать через f_0 число $f(x_0)$, а также через f'_0 число $f'(x_0)$.

1) Производная суммы. *Операция нахождения производной перестановочна со сложением.*

Пусть, в самом деле, $u(x)$ и $v(x)$ — две функции, определенные и непрерывные в интервале (a, b) и имеющие в точке производные u'_0 и v'_0. Мы рассматриваем функцию

$$s(x) = u(x) + v(x).$$

Откуда получается

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Значит, согласно теореме о пределе суммы и определению производной, s'_0 существует и притом $s'_0 = u'_0 + v'_0$.

Аналогично сумма конечного числа функций, имеющих каждая производную в точке x_0, имеет производную, которая равна сумме производных данных функций.

2) Производная произведения.

Пусть $p(x) = u(x) \cdot v(x)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u_0 v_0}{\Delta x} = \frac{(u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v) - u_0 v_0}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta u}{\Delta x} v_0 + u_0 \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

В силу теорем о пределе суммы и пределе произведения это отношение имеет предел, когда $\Delta x \to 0$, так как: $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'_0$ (по определению), $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'_0$ (по определению) и $\Delta u \to 0$ (вследствие непрерывности).

Следовательно, $p(x)$ имеет производную в точке x_0, равную

$$p'_0 = u'_0 v_0 + u_0 v'_0.$$

Замечание. Если u_0 и v_0 отличны от нуля, то формула может быть записана и следующим образом:

$$\frac{p'_0}{p_0} = \frac{u'_0}{u_0} + \frac{v'_0}{v_0}.$$

Число f'_0/f_0 *называется логарифмической производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

(Можно показать в самом деле, что это производная логарифма функции $f(x)$, если функция положительна.) Получается, следовательно, очень простое предложение: *логарифмическая производная произведения равна сумме логарифмических производных сомножителей.* Предложения, доказанные для двух сомножителей, распространяются немедленно на любое конечное число сомножителей в силу ассоциативности умножения и сложения.

Отсюда выводится правило: *Произведение нескольких функций, имеющих производную, также имеет производную, равную сумме произведений, полученных последовательной заменой в данном произведении каждого сомножителя его производной.*

В частности, если n натурально, то производная функции $[f(x)]^n$ такова:

$$n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x) —$$

для каждого значения аргумента x, для которого функция $f(x)$ имеет производную.

Следовательно, вычисление производной многочлена становится известным *.

3) Производная функции, обратной по значениям данной функции. Пусть $w(x)=\frac{1}{v(x)}$, где функция $v(x)$ такова, что v_0 отличен от нуля и $v(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда в такой окрестности этой точки, в которой $v \neq 0$, имеем:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=\left(\frac{1}{v_0+\Delta v}-\frac{1}{v_0}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v_0(v_0+\Delta v)}\;.$$

Значит, производная w_0' существует и равна $-\frac{v_0'}{v_0^2}$.

Таким образом, для каждого значения аргумента x, для которого функция $v(x)$ отлична от нуля и имеет производную, имеем:

$$w'=-\frac{v'}{v^2}\,,$$

то есть если перейти к логарифмическим производным

$$\frac{w'}{w}=-\frac{v'}{v}\;.$$

Приложение. Пусть

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\;.$$

Получаем

$$\frac{f'}{f}=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\,,\quad\text{откуда}\quad f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\;.$$

Итак, стал известным способ вычисления производной рациональной дроби.

4) Производная квадратного корня из данной функции.

Пусть

$$r(x)=\sqrt{v(x)}\,,\quad v_0>0,$$

* Для этого следует еще учесть, что $x'=1$.— *Прим. перевод.*

причем v_0' существует. Имеем:

$$\frac{\Delta r}{\Delta x}=\frac{\sqrt{v_0+\Delta v}-\sqrt{v_0}}{\Delta x}=\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sqrt{v_0+\Delta v}+\sqrt{v_0}}\,.$$

Значит, предел существует и равен

$$r_0'=\frac{v_0'}{2\sqrt{v_0}}\,.$$

Таким образом, функция

$$r=\sqrt{v\,(x)}$$

имеет производную

$$r'=\frac{v}{2\sqrt{v}} \quad \text{и} \quad \frac{r'}{r}=\frac{1}{2}\,\frac{v'}{v}\,.$$

Можно изучить таким же путем производную функции

$$f\,(x)=\sqrt[q]{v\,(x)}$$

для любого натурального значения q. Но мы найдем соответствующий результат, применяя общие теоремы, которые следуют далее.

Теорема I. *Производная функции от функции.*

Пусть дана функция $y=f\,(x)$, определенная, как произведение отображений в себя множества действительных чисел

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & u \arrow[r, "g"] & y \end{tikzcd}$$

Это записывают:

$$\begin{cases} y=f\,(x)=g\,(h\,(x)); \\ y=g\,(u), \quad u=h\,(x). \end{cases}$$

Отсюда соответствия

$$x_0 \longrightarrow u_0 \longrightarrow y_0 \quad \text{и} \quad \Delta x \longrightarrow \Delta u \longrightarrow \Delta y$$

Предположения о непрерывности и о существовании производных выявляются в следующей схеме:

$$\begin{array}{l} [x \longrightarrow x_0] \Rightarrow [u \longrightarrow u_0] \Rightarrow [y \longrightarrow y_0] \\ \quad \Rightarrow \left[\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to h_0'\right] \quad \Rightarrow \left[\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\to g_0'\right]. \end{array}$$

Значит,

$$[x \to x_0] \Rightarrow \left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta u}\to h_0'g_0'\right],$$

то есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to h_0'g_0'.$$

Таким образом, функция f имеет производную, которая равна $f'=h'g'$ для всех значений аргументов, для которых функции h

и g имеют производные. Этот вывод записывается часто следующим образом:

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

где нижняя буква указывает переменную, относительно которой взята производная.

Приложение. Формулы, полученные для производных функций $\frac{1}{v(x)}$ и $\sqrt{v(x)}$, могли быть выведены из рассмотрений, относящихся к функциям $\frac{1}{x}$ и $\sqrt{x}$. После того как получена производная $-\frac{1}{x^2}$ функции $\frac{1}{x}$ и производная $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ функции $\sqrt{x}$, теорема 1 дает для

$$f(x) = \frac{1}{v(x)}, \quad f'_x = \left(-\frac{1}{v^2}\right) v'_x$$

и для

$$r = \sqrt{v(x)}, \quad r'_x = \left(\frac{1}{2\sqrt{v}}\right) \cdot v'_x.$$

Это как раз уже известные нам результаты. Теорема 1 особенно полезна, если вводятся несколько вспомогательных функций.

Пусть, например,

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Мы рассматриваем последовательные отображения

$$u = x^2 + 1, \quad v = \sqrt{u}, \quad y = \frac{1}{v}.$$

Следовательно,

$$y'_x = y'_v \cdot v'_u u'_x = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = -\frac{x}{u\sqrt{u}} = \frac{-x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Теорема II. Производная функции, обратной данной функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'_0 \neq 0$ в точке x_0. Мы принимаем еще в качестве дополнительного предположение, что функция f имеет обратную функцию g, согласно схеме

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Это требует, чтобы между переменными x и y существовало взаимно однозначное соответствие, так что функция f монотонна: то же свойство будет иметь и функция g. В этом случае непрерывность выражается не только условиями

$$\forall\beta, \ \exists\alpha : |\Delta x| < \alpha \Rightarrow |\Delta y| < \beta,$$

но и

$$|\Delta x| < \alpha \Leftrightarrow |\Delta y| < \beta.$$

Мы имеем взаимно однозначное соответствие между α и β с помощью функций f и g, которые сохраняют отношение порядка (или меняют его на противоположное). Тогда из предположения

$$\forall \varepsilon,\ \exists \alpha : |\Delta x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{f_0'} \right| < \varepsilon$$

следует

$$\forall \varepsilon,\ \exists \beta : |\Delta y| < \beta \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{f_0'} \right| < \varepsilon.$$

Это значит, что функция g имеет производную g_0', такую, что $g_0' = \frac{1}{f_0'}$. Таким образом, *две взаимно обратные функции имеют в соответствующих точках производные, которые являются взаимно обратными числами.* Это запишется:

$$y_x' = \frac{1}{x_y'}.$$

Но следует заметить, что, поскольку y_x' выражается через независимую переменную x, последняя формула дает производную x_y', выраженную через переменную, ставшую теперь функцией. Поэтому, если хотят ввести аргумент, выражение следует преобразовать. Часто удобно менять названия элементов двух множеств: множества исходного и множества образа в зависимости от того, какая из двух взаимно обратных функций f и g рассматривается.

Примеры функций: *квадрат* $u = v^2$. Производная $u' = 2v$.

Квадратный корень $y = \sqrt{x}$. Производная $y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Более общий вид функций: *степень* с показателем $q : u = v^q$. Производная $u' = qv^{q-1}$.

Корень степени $q : y = \sqrt[q]{x}$. Производная $y' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\sqrt[q]{x^{q-1}}}$.

Или, используя логарифмические производные

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x}.$$

Теорема о производной функции от функции дает тогда для

$$y = \sqrt[q]{x^p},\quad y' = y \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^p} \cdot px^{p-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p}{q} \sqrt[q]{x^{p-q}};$$

значит,

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{q} \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1}.$$

Таким образом, для всякого показателя n целого или дробного, но положительного, производная функции

$$y = x^n \text{ такова: } y_x' = nx^{n-1}.$$

Но $z=\frac{1}{y}$ имеет производную $z'_x=-\frac{1}{y^2}$, так что функция

$$z=x^{-m},\quad m>0$$

имеет производную

$$z'_x=-\frac{1}{x^{2m}}\times mx^{m-1}=-mx^{-m-1}.$$

В конечном счете *для любого числа n, положительного или отрицательного, целого или дробного, производная функции*

$$f(x)=x^n \text{ равна: } f'=nx^{n-1},$$

а если ввести еще функцию от функции, то производная функции:

$$y=v^n(x) \text{ равна: } v'_x=nv^{n-1}v'_x.$$

5) *Производные тригонометрических функций и обратных тригонометрических функций.*

В книге I, в конце главы V мы изучили аналитические свойства функций синус и косинус и как приложение нашли основной результат (в непосредственной связи с понятием длины дуги окружности и с определением радиана).

Если x выражен в радианах, то, когда $x\to 0$,

$$\sin x\longrightarrow 0 \text{ и } \frac{x}{\sin x}\longrightarrow 1.$$

Заметим, что если использовать понятие площади, то указанный предел вытекает тотчас из неравенств $|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|$, которые получаются сравнением площадей, ограниченных в круге соответственно двумя радиусами и хордой, или дугой, или отрезком касательной *.

Отсюда выводится, что функции sin *и* cos *непрерывны в любой точке и дифференцируемы, то есть имеют в ней производные.* Формулы сложения вместе с теоремами о вычислении пределов дают

$$(\sin x)'=\cos x \text{ и } (\cos x)'=-\sin x.$$

Отсюда выводятся производные функций:

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

и

$$z=\operatorname{ctg} x,$$

равные

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$$

и

$$z'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x).$$

---

* Третья из этих фигур с одной стороны ограничена радиусом, а с другой — его продолжением до пересечения с касательной, проведенной в конце первого радиуса.— *Прим. перевод.*

В более общем случае производные функций $\sin \varphi(x)$ и $\cos \varphi(x)$ равны соответственно, если φ выражено в радианах

$$\cos \varphi(x) \cdot \varphi'_x \text{ и } -\sin \varphi(x) \cdot \varphi'_x.$$

При изучении периодических явлений особенно часто встречаются следующие функции, в которых аргумент t означает время, ωt и α выражены в радианах, причем ω и α — постоянные:

$$\begin{cases} u = \sin(\omega t + \alpha); \\ v = \cos(\omega t + \alpha), \end{cases} \text{ с производными } \begin{cases} u'_t = \omega \cos(\omega t + \alpha); \\ v'_t = -\omega \sin(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

Функции, обратные функциям синус, косинус и тангенс. Для того чтобы обратные функции были определены, нужно сузить интервал изменения так, чтобы рассматриваемая функция была монотонной.

Пусть

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \quad y'_x = \cos x.$$

Обратная функция пишется:

$$\varphi = \arcsin \lambda\,^*$$

(φ есть дуга, синус которой равен числу λ).

Находим производную

$$\varphi'_\lambda = \frac{1}{\cos \varphi} = +\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = +\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Если обратная функция определена другим условием, например

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

то ее записывают с заглавной буквы

$$\psi = \operatorname{Arcsin} \lambda.$$

В соответствии с рассматриваемым условием определяется, какой знак следует взять перед радикалом; в рассматриваемом случае будем иметь:

$$\psi'_\lambda = \frac{1}{\cos \psi} = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Для функции Arccos главное значение, которое обозначается через arccos, соответствует дуге, заключенной между числами 0 и π. Поэтому имеем:

$$\Phi = \arccos \lambda, \quad \Phi' = -\frac{1}{\sin \Phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

---

* Обозначение оригинала $\operatorname{Arcsin} \lambda$ не совпадало с принятым в нашей литературе, где $\operatorname{Arcsin} \lambda$ означает многозначную функцию, и мы его изменили.— *Прим. перевод.*

Результат $\varphi' = -\Phi'$ легко понять, так как сумма $\Phi + \varphi$ постоянна и имеет значение $\frac{\pi}{2}$. Наконец, при любом определении главного значения, найдем

$$(\operatorname{arcctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

Заметим, что операция нахождения производной, примененная к обратным тригонометрическим функциям, приводит к алгебраическим функциям. Таким образом, если каждая алгебраическая функция имеет алгебраическую производную, то обратное уже не имеет места. Переход от функции к ее первообразной, то есть к функции, имеющей первую функцию своей производной, не имеет той же природы, что задача нахождения производной; это задача по природе своей глобальная, а не локальная. Говорят также, что это задача интегрального исчисления, а не дифференциального. Мы были вынуждены заняться этой задачей при изучении мер (кн. I, гл. VI) и вернемся к ней в следующей главе.

III. Бесконечные пределы. Неопределенные выражения

В некоторых случаях (кн. I, гл. IV) мы были вынуждены ко множеству значений, принимаемых некоторой функцией, присоединить некоторое число для того, чтобы сделать эту функцию непрерывной.

Например, если $f(x)$ определена в интервале (a, b), за исключением точки x_0, и если эта функция имеет предел L, когда аргумент стремится к значению x_0, то мы дополняем определение функции, полагая $f(x_0) = L$.

Пусть, например,

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x},$$

так что

$$f(x) = x+1$$

для $x \neq 0$. Тогда полагаем $f(0) = 1$.

Такое расширение определения с целью устранить исключение — вещь весьма обычная в математике; мы находим много примеров этому в геометрии. Значение, введенное таким образом для $f(x_0)$, называется часто «истинным значением» функции f в точке x_0.

Но рассмотрим теперь функцию $f(x) = \frac{1}{x-x_0}$ в окрестности точки x_0. Никакое значение не может быть приписано символу $f(x_0)$, чтобы обеспечить непрерывность. Этот факт, заменяющий в данном случае существование предела, выражается следующим образом:

$$\forall A > 0, \ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| > A.$$

(Каково бы ни было положительное число A, существует число α, такое, что $|f(x)|$ превосходит A, если значение аргумента x достаточно близко к числу x_0.)

Этот факт выражают также, говоря: «$f(x)$ *стремится к бесконечности, когда* x *стремится к* x_0», что записывается так:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty.$$

По существу ко множеству действительных чисел присоединяют число, большее любого действительного числа, так что окрестность отвечающей ему точки есть множество чисел y, для которых $0 < A < |y|$ $(\forall\ A)$.

Графическое изображение приводит к отдельному рассмотрению двух полуокрестностей: $0 < A < y$ и $y < -A < 0$. Таким образом, бесконечно удаленная точка оси y-в раздваивается на две точки, которые обозначают через $-\infty$ и $+\infty$. Поэтому в нашем примере мы будем различать случаи:

$$x < x_0,\ f(x) \longrightarrow -\infty, \text{ когда } x \text{ стремится к } x_0 \text{ слева};$$

$$x > x_0,\ f(x) \longrightarrow +\infty, \text{ когда } x \text{ стремится к } x_0 \text{ справа}.$$

Мы дополним также ось x-в двумя точками $+\infty$ и $-\infty$, имеющими каждая полуокрестность. Например, высказывание: «$f(x)$ стремится к L, когда x стремится $+\infty$», будет означать:

$$\forall \varepsilon,\ \exists B > 0 : B < x \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Это записывают:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L.$$

Высказывание: «$f(x)$ стремится к $+\infty$, когда x стремится к $-\infty$», означает:

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 : x < -B \Rightarrow A < f(x).$$

Это записывают:

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(Знаки абсолютной величины отсутствуют, так как рассматриваются полуокрестности.)

Чтобы использовать это расширение понятия предела, нужно вернуться к доказательству теорем, относящихся к пределам. Без труда можно найти предложения, полностью аналогичные уже доказанным предложениям, если только договориться уточнить значение символа ∞ следующими условиями:

$$\forall L : +\infty + L = L + \infty = +\infty; \quad -\infty + L = L - \infty = -\infty;$$

$$L > 0 : (+\infty) \cdot L = L \cdot (+\infty) = +\infty; \quad (-\infty) \cdot L = L \cdot (-\infty) = -\infty;$$

$$L < 0 : (+\infty) \cdot L = L \cdot (+\infty) = -\infty; \quad (-\infty) \cdot L = L \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Например, последнее равенство равносильно утверждению: «Если две функции имеют пределами, когда x стремится к x_0, соответственно отрицательное число L и $-\infty$, то произведение этих функций стремится к $+\infty$». Аналогично $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$.

Мы можем принять и такую символическую запись, как $\frac{1}{\infty} = 0$, которая означает: «Если функция стремится к бесконечности, когда x стремится к x_0, то обратная ей по значениям функция стремится к нулю в этих же условиях». Аналогично

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

Однако опасность такой записи очевидна, потому что нельзя из нее вывести, что $0\cdot\infty = 1$. Действительно, утверждение, что произведение двух функций, стремящихся соответственно к нулю и к бесконечности, стремится всегда к единице, неверно. Чтобы отдать себе отчет в этом, достаточно, например, рассмотреть, в окрестности точки $x = 0$, функции x, x^2, x^3, $5x^3$, которые стремятся к нулю, и функции

$$\frac{4}{x}, \quad -\frac{1}{x^2}, \quad +\frac{4}{3x^3}, \quad \frac{2}{x^4},$$

стремящиеся к бесконечности, и найти произведения функций первого типа на функции второго типа; в указанных примерах в качестве предела произведения мы найдем 0, или бесконечность, или конечное число. Но можно также не получить вообще никакого предела.

Так, например, рассмотрим

$$u = x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ и } v = \frac{1}{x}.$$

Когда $x \to 0$, очевидно, $u \to 0$ и $v \to \infty$. Однако произведение

$$u\cdot v = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

колеблется между числами -1 и $+1$, не стремясь ни к какому пределу.

Подобным образом невозможно придать значение символам

$$0\cdot\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad +\infty-\infty.$$

Если применение общих правил при отыскании предела приводит к одному из этих символов, то необходимо проводить исследование в каждом таком случае. Мы рассмотрим несколько таких случаев при изучении конкретных функций. Заметим, наконец, что бесконечный предел, полученный при исследовании углового коэффициента прямой, легко интерпретируется: полученная прямая параллельна оси Oy.

Вторая глава

ГЛОБАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача состоит в разыскании интервалов, в которых определенная функция возрастает или убывает, а также в изучении ее графика.

I. Прямое исследование

Некоторые очень простые теоремы дают иногда возможность прямого исследования функции. Напомним, что функция, определенная в интервале (a, b), называется *возрастающей в этом интервале*, если

$$\forall x_1,\ x_2 \in (a, b),\ f(x_2) - f(x_1)$$

имеет тот же знак, что и

$$x_2 - x_1.$$

Аналогично определяется убывание.

Это определение приемлемо, даже если функция не определена во всем интервале; достаточно, чтобы она была определена на некотором множестве, целиком упорядоченном. Например, функция $f(x) = x!$ $(x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x)$, определенная для всех натуральных значений аргумента x, возрастает на множестве натуральных чисел.

Из самого определения непосредственно вытекают:

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ — возрастающая, то возрастающей также является функция $f(x) + k$*, каково бы ни было постоянное число k.

Теорема 2. *Сумма конечного числа возрастающих функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_p(x)$ есть функция возрастающая.*

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ — возрастающая, то это же свойство имеет и функция $a \cdot f(x)$, при a положительном. Наоборот, если a — отрицательное число, то функция $a \cdot f(x)$ убывает.*

Теорема 4. *Если две положительные функции являются возрастающими, то их произведение тоже возрастает.* Если $f(x)$ есть положительная возрастающая функция, то, каков бы ни был положительный показатель p, возрастает также $[f(x)]^p$.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$, отличная от нуля, возрастающая, то обратная по значениям функция $1/f(x)$ убывающая.* Если функция $f(x)$ положительна и показатель p положителен, то $[f(x)]^{-p}$ убывает.

Эти теоремы дают окончательные выводы, когда мы строим функцию, исходя из x путем образования алгебраического рационального выражения, *в котором буква x фигурирует лишь один раз.*

Действительно, теорема 5 дает закон изменения функции $u = x_u$ для целого n, причем различаются случаи

$$x \in (0, +\infty) \quad \text{и} \quad x \in (-\infty, 0),$$

потом рассматривают последовательно такие функции, как

$$w = au + b, \; z = 1/w \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что важно уметь распознавать, может ли функция быть написанной в указанной форме, которую мы назовем *канонической формой*. Например, это имеет место для квадратного трехчлена: $ax^2 + bx + c$, который может быть записан в форме $a(x + \alpha)^2 + \beta$, и для гармонической функции *

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}, \quad (a' \neq 0),$$

которая может быть записана в следующей форме:

$$\frac{a}{a'} + \frac{h}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Теорема 6. *Функция, обратная монотонно возрастающей* функции, является возрастающей (аналогично для убывания). Мы переходим, таким образом, от степенной функции к функции корня степени n.

Наконец, мы знаем условия возрастания и убывания функций синус, косинус и тангенс, вытекающие из их геометрического определения.

Но этих теорем совершенно недостаточно; они не позволяют вывести заключение об изменении даже, например, функции $x^3 - x$, когда x положителен. Необходимо провести более тонкое исследование.

II. Следствия из лональных гипотез во всех точнах интервала

Более тонкое исследование, чем выше изложенное, вытекает из бесконечного числа гипотез, выражающих непрерывность или существование производной в *каждой точке* x_0 некоторого интервала (a, b).

Мы уже получили (кн. I, гл. IV) с помощью тонких доказательств, относящихся не к алгебре, а к анализу, ряд предложений, которые здесь напоминаем:

а) Непрерывность на отрезке $[a, b]$ (то есть в любой точке этого отрезка).

Теорема о равномерной непрерывности.

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \alpha : |x_2 - x_1| < \alpha \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \; {}^{**}.$$

* В нашей терминологии «дробно линейная функция».— *Прим. перевод.*

** $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.— *Прим. перевод.*

Следовательно, можно разбить конечный отрезок $[a, b]$ на $n+1$ отрезок, где

$$n\alpha \leqslant b-a < (n+1)\alpha,$$

на которых некоторая ступенчатая функция аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε.

Теорема о точных границах. Множество значений, принимаемых функцией на $[a, b]$, имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Эти грани достигаются функцией для некоторых значений аргумента $x \in [a, b]$.

Теорема о промежуточных значениях. Каждое значение, заключенное между точными гранями, действительно достигается функцией при некотором значении аргумента $x \in [a, b]$.

в) Существование производной на $[a, b]$. Мы предполагаем функцию непрерывной на отрезке $[a, b]$, но существование производной требуется лишь в открытом интервале $]a, b[$.

Теорема о конечных приращениях. Существует значение ξ аргумента $x \in]a, b[$, такое, что $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(\xi)$. Эта последняя теорема дает предложения, которые позволяют изучить изменения непрерывных функций, имеющих производную. Действительно, если глобальные сведения [например, о возрастании в интервале (a, b)] позволяют делать локальные выводы [о возрастании в точке интервала (a, b)], то обратное совсем не очевидно: ведь окрестности точек x_0 и x_1, где можно было, например, сравнить $f(x)$ как с $f(x_0)$, так и с $f(x_1)$, могут не иметь ни одной общей точки, и тогда нельзя будет отсюда вывести способ сравнения между $f(x_1)$ и $f(x_0)$.

Хотя теорема о конечных приращениях не дает никаких сведений о числе ξ, но самый факт существования этого числа между a и b позволяет делать выводы с помощью рассуждений от противного, согласно таблице

локальное утверждение *в каждой точке* интервала (a, b)		глобальное утверждение *в интервале* (a, b)
$f'(x)=0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ постоянная
$f'(x)>0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ возрастающая
$f'(x)<0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ убывающая

Таким образом, изучение изменения функции сведено к изучению знака ее производной. Для алгебраических функций это означает свести задачу анализа к задаче алгебры, что теоретически более просто. Это во всяком случае более просто также и практически, потому что достаточно найти приближенные значения для примечательных точек, чтобы получить, вообще говоря, достаточные сведения.

Выводы из изучения изменения функции представляют в таблице, называемой *таблицей изменения*; при этом интервал, в котором функция определена, разбивается на интервалы, в которых функция монотонна. Значение функции или ее предел указывается для каждого примечательного значения; отсутствие предела, если это имеет место, отмечается. Указываются также значения или пределы для производной, что будет полезно для уточнения графика.

Пример.

$$y = x^2 \sqrt{1-x^3}; \quad y' = \frac{-7x\,(x^3-4/7)}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{4/7}$		1	$+\infty$
y'	$-\infty$		-0	$+$	0	$-$	$-\infty$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	

$$M = 2^{4/3} \cdot 3^{1/2} \cdot 7^{-7/6} \simeq 0{,}45;$$

$$\sqrt[3]{4/7} \simeq 0{,}82.$$

К точным значениям, указанным в таблице, присоединяют необходимые приближенные значения, чтобы отметить точки на графике, а также для практических приложений, если в этих значениях возникает необходимость.

Третья глава

ГРАФИКИ

I. Глобальное исследование

Исследование изменения функции дополняется построением и изучением ее графика. Таблица дает сведения об общем ходе кривой, так как она указывает направление наклона хорд, соединяющих точки одного и того же интервала. В общем случае, когда заранее неизвестна природа кривой, нужно для ориентировочного выполнения чертежа вычислить координаты более или менее многочисленных точек, которые указываются в *таблице значений*. В примере, приведенном выше, в конце главы II для уточнения хода графика можно найти следующие точки:

x	-2	-1	$0{,}5$
y	12	$\sqrt{2}$	$0{,}23$

Исследование упрощается в некоторых случаях, если использовать следующие замечания. Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ — единичные координатные векторы, тогда:

a) Кривая получается из графика $y = g(x)$:

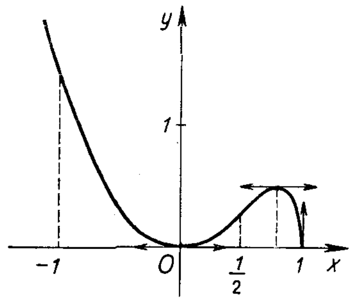
путем параллельного переноса на $a\boldsymbol{j}$, если $f(x) = g(x) + a$;

путем параллельного переноса на $b\boldsymbol{i}$, если $f(x) = g(x - b)$;

путем аффинного расширения от оси $x'x$ с коэффициентом k, если $f(x) = kg(x)$;

путем аффинного расширения от оси $y'y$ с коэффициентом h, если $f(x) = g\left(\frac{x}{h}\right)$.

Отметим также осевую инверсию относительно оси $x'x$, если $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, и относительно оси $y'y$, если $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.



Черт. 33

Функции

$$f(x) = [g(x)]^2$$

также соответствует некоторое простое точечное преобразование. Другое аналогичное преобразование получим с помощью функции

$$f(x) = g(x^2).$$

Следует отметить еще соответствие $f(x) = |g(x)|$, которое преобразует с помощью симметрии относительно $x'x$ лишь те дуги графика $y = g(x)$, которые расположены под осью $x'x$.

b) Изучение может быть упрощено, если имеются следующие симметрии:

Симметрия по отношению к прямой $x = x_0$, если

$$\forall x, \ f(x_0 + x) = f(x_0 - x).$$

Симметрия по отношению к точке $x = x_0$, $y = a$, если

$$\forall x, \ f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2a.$$

c) В случае тригонометрической функции следует разыскать *период*, то есть наименьшее положительное число p, такое, что

$$\forall x, \ f(x + p) = f(x).$$

Исследование выполняется затем в интервале $(x_0, x_0 + p)$; из полученной таким образом дуги находят полный график путем параллельных переносов этой дуги на все значения, кратные вектора $p\boldsymbol{i}$.

II. Локальное исследование

Построение по точкам дополняется построением по касательным и исследованием направления вогнутости.

1. Касательная

Теорема. *Если функция имеет производную в точке* x_0, то *в точке* (x_0, y_0) *графика функции кривая имеет касательную, угловой коэффициент которой равен* $f'(x_0)$.

Это предложение лишь переводит друг в друга определение касательной к кривой в точке и определение производной функции в точке. В этом переводе представляет интерес тот факт, что в окрестности точки касания кривая очень близка к своей касательной и практически сливается с ней. Мы встречаемся здесь с вопросом о касании, который нужно уточнить.

2. Введение к понятию касания

Говорят, что две кривые, имеющие общую точку (x_0, y_0) и в окрестности этой точки являющиеся графиками двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, имеют в этой точке *касание по меньшей мере первого порядка*, если отношение $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}$ стремится к нулю, когда x стремится к x_0. Это значит, что в окрестности достаточно малого порядка α можно обеспечить неравенство

$$|f(x)-g(x)| < \varepsilon |x-x_0|.$$

Таким образом, кривые очень близки друг другу в окрестности общей точки. В частности, в точке (x_0, y_0) уравнение касательной (в предположении, что она не параллельна оси Oy) имеет вид:

$$y = g(x) \equiv f'_0 \cdot (x-x_0) + f(x_0).$$

Образуем отношение

$$\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'_0.$$

Предел этого отношения, когда x стремится к x_0, есть $f'_0 - f'_0 = 0$.

Таким образом, *кривая и ее касательная имеют в точке касания касание по меньшей мере первого порядка.* Касание называется порядка, по меньшей мере равного двум, если $\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2}$ стремится также к нулю; касание называется порядка, равного по меньшей мере трем, если $\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^3}$ стремится к нулю, и т. д.

Пример. Рассматривается график функции $y = x^3 + x$ в точке $x = 0$. Имеем:

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \quad f'_0 = 1, \quad g(x) = x,$$

$$\frac{f(x)-g(x)}{x^2} = x \to 0, \quad \text{но} \quad \frac{f(x)-g(x)}{x^3} = 1.$$

Значит, в данном случае кривая и ее касательная имеют в нача ле координат касание второго порядка. Касательная пересекает кривую, то есть переходит с одной ее стороны на другую. Такая точка называется *точкой перегиба* *.

Таким же образом видно, что график функции $y = x^4 + x$ и его касательная в начале координат имеют касание третьего порядка: касательная не пересекает кривую, но кривая имеет очень малую кривизну в окрестности рассматриваемой точки; это точка *сверхперегиба*. Отметим, что мы только что употребили термин «кривизна» в интуитивном смысле. Теория касания позволяет придать этому понятию математический смысл.

3. Направление вогнутости

Не продолжая изучения касания, мы введем сейчас понятие о *направлении вогнутости* графика, исследуя, с какой стороны своих касательных расположен график в окрестности точки (x_0, y_0).

Мы только что видели, что уравнение касательной имеет вид:

$$y = g(x), \text{ где } g(x) = f'_0(x - x_0) + f(x_0).$$

График расположен над касательной (то есть со стороны возрастающих ординат), если выполняется условие $f(x) - g(x) > 0$, то есть

$$f(x) - f(x_0) - f'_0(x - x_0) > 0. \tag{1}$$

Согласно теореме о конечных приращениях, между числами x и x_0 существует значение ξ аргумента x, такое, что:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Значит, условие запишется:

$$[f'(\xi) - f'(x_0)] \cdot (x - x_0) > 0. \tag{2}$$

Предположим теперь, что производная функция $f'(x)$ сама непрерывна и имеет производную, и обозначим через $f''(x)$ эту производную. Существует новое число, скажем x_1, между числами ξ и x_0, такое, что

$$f'(\xi) - f'(x_0) = f''(x_1)(\xi - x_0),$$

и рассматриваемое условие получит следующий вид:

$$f''(x_1)(\xi - x_0)(x - x_0) > 0. \tag{3}$$

Но $\xi - x_0$ имеет тот же знак, что и $x - x_0$, значит, условие наверное удовлетворяется, если $f''(x)$ положительна в каждой точке рассматриваемой окрестности точки x_0.

Обратно, если некоторая функция $y = f(x)$ такова, что ее производная сама имеет производную, то есть если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$, то в любом интервале, в котором вторая производная $f''(x)$ положительна, кривая расположена над своей касательной. Действительно, функция $f'(x)$ возрастает,

---

* Здесь нужны были бы некоторые уточнения. Точка перегиба будет получаться, если порядок касания касательной прямой четный.— *Прим. перевод.*

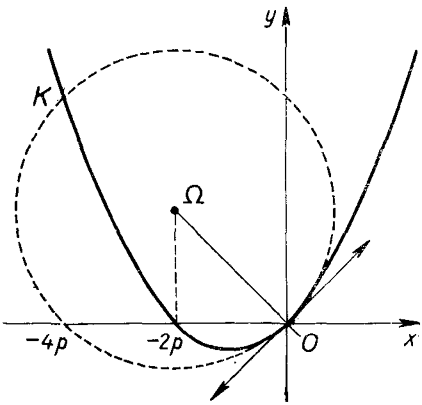
что обеспечивает неравенство (2), значит, и неравенство (1). В этом случае говорят, что график *обращен вогнутостью в сторону возрастания ординат*.

Для интервала, в котором вторая производная $f''(x)$ отрицательна, исследование проводится аналогично.

В интервале, в котором $f''(x)$ существует и непрерывна, вогнутость может изменить свое направление только в точке, где $f''(x) = 0$.

Итак, *направление вогнутости графика изучается с помощью знака второй производной* $f''(x)$.

4. Кривизна. Бóльшая или меньшая кривизна зависит от более или менее быстрого возрастания производной, которая дает направление касательной: тут уже нас интересует само значение второй производной $f''(x)$, а не только ее знак. *Радиусом кривизны* R в некоторой точке называется радиус окружности, имеющей в этой точке с кривой касание наивысшего порядка; число $\frac{1}{R}$ называется *кривизной* в рассматриваемой точке.



Черт. 34

Пример. Ищется в начале координат радиус кривизны параболы, являющейся графиком функции

$$f(x) = \frac{1}{2p} x^2 + x.$$

Так как $f'(x) = \frac{x}{p} + 1$, то $f'(0) = 1$, и касательная является биссектрисой первого координатного угла. Касательная окружность, расположенная с той стороны касательной, с которой расположена кривая, имеет уравнение

$$(y-a)^2 + (x+a)^2 = 2a^2, \quad a > 0,$$

причем радиус равен: $r = a\sqrt{2}$.

В окрестности начала координат касательная окружность — это график функции $y = g(x)$, где $g(x) = a - \sqrt{a^2 - 2ax - x^2}$.

Чтобы изучить $f(x) - g(x)$ в окрестности точки $x = 0$, мы используем величину, сопряженную иррациональному выражению. Будем тогда иметь:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2p} x^2 + (x-a) + \sqrt{a^2 - 2ax - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2p} x^2 + \frac{2x^2}{(x-a) - \sqrt{a^2 - 2ax - x^2}},$$

значит, когда x стремится к нулю, то

$$\frac{f(x)-g(x)}{x^2}$$

стремится к

$$\frac{1}{2p}-\frac{1}{a}.$$

Следовательно, касательная окружность имеет с параболой, вообще говоря, касание первого порядка, но это касание будет второго порядка для такой окружности, у которой $a = 2p$. Поэтому радиус кривизны параболы в точке 0 равен $R = 2p\sqrt{2}$.

Окружность, радиус которой является радиусом кривизны и которая, естественно, имеет свой центр с той стороны кривой, куда кривая вогнута, называется *соприкасающейся окружностью* к кривой в рассматриваемой точке.

При выполнении чертежа уместно искать все общие точки параболы и ее соприкасающейся окружности в точке 0. Для определения абсцисс точек пересечения получается уравнение

$$x^3(x+4p)=0,$$

так что $x = 0$ является тройным корнем, а $x = -4p$ — простым корнем. Отсюда следует, что соприкасающаяся окружность еще встречает параболу в точке $x = -4p$, $y = +4p$, так что она, *касаясь параболы в точке* 0, *переходит в ней с одной стороны параболы на другую*. Это общий факт для соприкасающейся окружности, подобно тому, как в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Это введение, сделанное с точки зрения касания, будет дополнено в параграфе IV.

Можно проверить, что нужный результат получается также приравниванием обеих вторых производных, то есть с помощью уравнения $f''(0) = g''(0)$. Чтобы оправдать данные выше определения касания и кривизны, было бы существенно доказать, что указанные свойства являются внутренними, то есть что результаты инвариантны по отношению к преобразованию координат. Мы вернемся к этому вопросу в конце этой главы.

III. Исследование бесконечных ветвей

1. Кривая имеет бесконечную ветвь, если по меньшей мере одна из координат точки M, порождающей график, стремится к бесконечности. В таблице изменения функции могут появиться следующие случаи:

1) *$f(x)$ стремится к бесконечности, когда x стремится к x_0.* Мы говорим тогда, что прямая, уравнение которой $x = x_0$, есть *асимптота* этой ветви. В общем случае y стремится к бесконечности того или иного знака, в зависимости от того, стремится ли x к x_0 справа или слева (пример: $y = 1/x$).

2) *$f(x)$ стремится к пределу L, когда x стремится к бесконечности.* Прямая, выраженная уравнением $y = L$, есть асимптота кривой, соответствующая рассматриваемой бесконечной ветви. В общем случае, кривая расположена сверху или снизу по отношению к этой прямой в зависимости от того, стремится ли x к бесконечности того или другого знака.

3) Может случиться, что, когда x стремится к бесконечности, $f(x)$ не имеет предела или стремится также к бесконечности (пример: $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^2$). Тогда нужно различать следующие два понятия:

a) **Асимптотическое направление бесконечной ветви**

Пусть дана кривая C, ветвь которой подлежит изучению. Соединим с точкой M, порождающей кривую, некоторую выбранную точку O. Если прямая OM допускает некоторое предельное направление δ, когда M бесконечно удаляется, то говорят, что δ — *асимптотическое направление*, соответствующее бесконечной ветви. Это определение оправдано следующей теоремой.

Направление δ, если оно существует, не зависит от выбранной точки O. В самом деле, пусть O' — другая точка. Направление δ характеризуется тем, что угол (OO', OM) стремится к углу $(OO', \delta) (\bmod \pi)$. Но когда OM и $O'M$ стремятся к бесконечности, а отрезок OO' фиксирован, то отношение

$$\frac{O'M}{\sin O'\widehat{O}M} = \frac{OO'}{\sin O\widehat{M}O'}$$

показывает, что $O\widehat{M}O'$ стремится к нулю; но

$$(OO', O'M) = (OO', OM) + (OM, O'M).$$

и, следовательно,

$\lim (OO', OM) = (OO', \delta) (\bmod \pi)$, что и требовалось доказать.

Если кривая является графиком функции $y = f(x)$, то угловой коэффициент направления δ является пределом отношения $\frac{y}{x}$, или также пределом, когда $x \to \infty$, отношения $(y - b)/(x - a)$, где произвольные a и b выбирают наилучшим образом.

(Пример. $y = 3x + 2 + \frac{1}{x}$, направление δ имеет угловой коэффициент 3.

$y = \sin x$, асимптотическое направление параллельно оси Ox.

$y = x^2$, асимптотическое направление параллельно оси Oy.)

b) **Асимптоты**

Если бесконечная ветвь имеет асимптотическое направление δ, то мы изучим положения этой ветви по отношению к прямым, параллельным направлению δ. Пусть Δ — какая-нибудь из этих прямых и H — ортогональная проекция на эту прямую переменной точки M кривой. Если длина MH имеет предел d, когда M

неограниченно удаляется, то существует прямая D, параллельная направлению δ (это одна из прямых, отстоящих на расстояние d от Δ), *такая, что расстояние точки M от этой прямой D стремится к нулю, когда M неограниченно удаляется* по изучаемой ветви. Эта прямая D называется *асимптотой* кривой, соответствующей этой ветви кривой.

В этой форме понятие асимптоты является внутренним (независящим от осей координат), однако это определение предполагает метрическую геометрию, а представляет интерес получить определение асимптоты в аффинной форме.

Высказанное определение асимптоты равносильно следующему: *Если точка M проектируется на прямую D параллельно любому направлению, отличному от направления D, то расстояние от точки M до этой проекции стремится к нулю, когда M неограниченно удаляется на рассмотренной ветви.* Для изучения графика мы используем направление оси Oy для любого асимптотического направления, непараллельного этой оси. Что касается асимптотических направлений, параллельных оси Oy, то, если имеется асимптота $x = x_0$, она выявится в таблице изменения.

Пример. $y = 3x + 2 + \frac{1}{x}$. Асимптота имеет уравнение $z = 3x + 2$, так как $y - z \to 0$, когда $x \to \infty$.

Функция $y = (1/x) \sin x$ дает пример кривой, имеющей асимптоту (ось Ox) и пересекающей эту асимптоту в бесконечном множестве точек. Асимптота, следовательно, не является обязательно прямой, к которой кривая «неограниченно приближается без того, чтобы ее достичь»!

Говорят, что *две кривые* асимптотичны одна относительно другой своими двумя соответствующими бесконечными ветвями, если сечение прямыми фиксированного направления d (например, на направление оси Oy) устанавливает между этими ветвями точечное соответствие $M \to P$, такое, что расстояние MP стремится к 0, когда эти точки неограниченно удаляются. Очевидно, если одна из кривых имеет асимптоту, то и другая имеет ту же асимптоту. Выбор направления d, отличного от асимптотического направления, произволен.

При построении довольно сложного графика ищут для каждой бесконечной ветви, при отсутствии прямолинейных асимптот, некоторую простую асимптотическую кривую. В примере $y = x^2 + 2 + \frac{1}{x}$ берут для изучения ветви, на которой $x \to \infty$, асимптотическую кривую $z = x^2 + 2$.

2. Бесконечные ветви с проективной точки зрения

В проективной геометрии (см. кн. IV, ч. 1, гл. II) возникает необходимость дополнить прямую *одной* бесконечно удаленной точкой. Пусть теперь мы имеем плоскость Π, образом которой при перспективном отображении с центром в S является плоскость P, содержащая график. Пусть U — та прямая плоскости П, образом которой служит бесконечно удаленная прямая плоскости P. Некоторая точка α прямой U имеет своим образом некоторую бесконечно удаленную точку плоскости P. Проходящей через α — отрезок прямой, являющийся окрестностью точки α, имеет своим образом объединение тех двух полупрямых, которые при обобщении понятия предела рассматривались нами как окрестность бесконечно удаленной точки прямой.

Рассмотрим в плоскости P кривую C, имеющую бесконечную ветвь. Ее прообраз в плоскости П есть кривая Γ, которая пересекает U в точке α, где кривая имеет, вообще говоря, касательную τ, отличную от U.

Пусть ω — какая-либо точка плоскости П, O — ее образ в плоскости P. Мы рассматриваем первый пучок; прямые $\omega\mu$, заключающие среди других и прямую $\omega\alpha$, и второй пучок: прямые $\alpha\mu$, предельное положение которых, когда $\mu \to \alpha$, есть касательная τ. С помощью перспективного отображения получаем пучок Om, который выявляет асимптотическое направление кривой C, параллельное прямой $S\alpha$, а затем пучок прямых, параллельных этому направлению, которые, когда m неограниченно удаляется, стремится к образу t касательной τ; эта прямая t и есть асимптота кривой C.

Таким образом, *асимптота предстает как касательная в бесконечно удаленной точке*. Исследуя разбиение на области, определенное прямыми U и τ плоскости П, и соответствующий образ в плоскости P, мы видим, что если α — обыкновенная точка кривой Γ, то есть если кривая расположена в окрестности точки α с одной стороны касательной τ, то асимптота будет близкой к кривой в направлениях двух своих полупрямых, так что кривая расположена в этих окрестностях с одной и с другой стороны асимптоты; это общий случай, как мы отметили на примерах.

Можно рассмотреть случай, когда α является точкой перегиба или точкой возврата, то есть точкой, в которой две полукасательные совпадают. Если касательной к кривой Γ служит сама прямая U, то бесконечно удаленная прямая должна рассматриваться как асимптота кривой C. В таком случае говорят, что кривая C «касательна к бесконечно удаленной прямой» или «имеет параболическую ветвь», потому что это имеет место для параболы.

IV. Понятие о дифференциальной геометрии плоских кривых. Кинематика

Чтобы придать локальному изучению некоторой кривой внутренний характер, мы не можем довольствоваться определением кривой как графика функции $f(x)$. Мы определим кривую как множество точек M, являющихся концами вектора OM, зависящего непрерывным образом от некоторого параметра t. Если t — число, измеряющее время, то кривая называется *траекторией* точки M. Исследование мы будем выполнять в метрической геометрии.

По отношению к фиксированному ортонормальному базису с началом в точке O будем иметь:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

где x и y — функции аргумента t.

Полезно также ввести единичный вектор $\boldsymbol{u}$ отрезка OM. Полагаем

$$\begin{cases} (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}) = \theta \pmod{2\pi}; \\ \boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{u}; \end{cases}$$

θ и r — это полярные координаты точки M, являющиеся функциями аргумента t, как и декартовы координаты x и y.

а) **Касательная. Скорость**

Значению t_0 аргумента t соответствует точка M_0, в окрестности которой мы будем изучать кривую. Для облегчения письма мы отбросим значок O, так что вычисление будет применимо ко всем точкам, в которых введенные пределы существуют.

Производной относительно аргумента t вектора $\boldsymbol{OM}$ называется предел вектора:

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta(\boldsymbol{OM}) = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M_0M} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\boldsymbol{u} + r\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{u}.$$

Исследуем, что представляет собой предел отношения $\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t}$.

По определению

$$\boldsymbol{u} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}.$$

Значит, отношение $\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t}$ имеет предел

$$\boldsymbol{u}' = \theta_t'[-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}] = \theta_t'\boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{w}$ — единичный вектор, определенный условием $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Наконец, производная вектора $\boldsymbol{OM}$ по отношению к аргументу t является вектором, который мы обозначим V, так как если t есть время, то этот вектор по определению — *вектор скорости* движения *; этот вектор определяется так:

$$(\boldsymbol{OM})' = \boldsymbol{V} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} = r'\boldsymbol{u} + r\theta'\boldsymbol{w}. \tag{1}$$

В силу определения этого вектора и определения касательной в точке M_0 носителем вектора V является касательная к кривой в точке M_0. Предположим теперь, что на кривой выбрано положительное направление; оно определяет на касательной единичный вектор $\boldsymbol{T}$. Положим

$$\begin{cases} (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{T}) = \varphi \pmod{2\pi}; \\ x' = v\cos\varphi, \ y' = v\sin\varphi, \end{cases}$$

* V — первая буква французского слова «*vitesse*» и латинского «*velocitas*», означающего скорость.— *Прим. перевод.*

так что v является алгебраической мерой вектора $\boldsymbol{V}$ на ориентированной касательной. Будем иметь:

$$\boldsymbol{T} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j} \tag{2}$$

и

$$\boldsymbol{V} = v\boldsymbol{T}. \tag{3}$$

Приложение

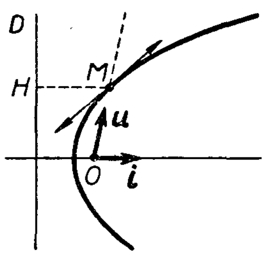
Окружность. Число r постоянно; положим $r = R$. Тогда

$$\boldsymbol{OM} = R\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{V} = R\varphi'\boldsymbol{T},$$

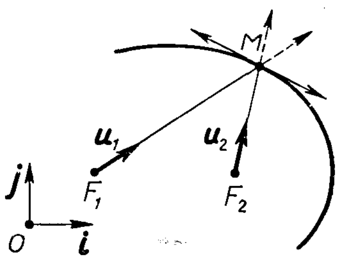
так что здесь $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$.

Парабола. Это геометрическое место точек, равноотстоящих от некоторой точки O и некоторой прямой D. Задаем эту прямую уравнением $x = d < 0$; определение выражается соотношением $\mathrm{r} = x - d$, так что $r' = x'$.

Из равенства (1) тогда следует, что ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{V}$ на вектор $\boldsymbol{i}$ и на вектор $\boldsymbol{u}$ равны между собой. Это значит, что *касательная параллельна биссектрисе угла* ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{u}$).



Черт. 35



Черт. 36

Эллипс. Кривую определяют, отправляясь от двух фиксированных точек (ее фокусов F_1 и F_2), как геометрическое место точек M, сумма расстояний которых до фокусов постоянна и равна $2a > F_1F_2$. Напишем:

$$\boldsymbol{F_1M} = r_1\boldsymbol{u}_1,\quad \boldsymbol{F_2M} = r_2\boldsymbol{u}_2,\quad r_1 + r_2 = 2a.$$

Исходим из равенств

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OF}_1 + \boldsymbol{F_1M} = \boldsymbol{OF}_2 + \boldsymbol{F_2M}$$

и берем производные. Получаем:

$$\boldsymbol{V} = r_1'\boldsymbol{u}_1 + r_1\theta_1'\boldsymbol{w}_1 = r_2'\boldsymbol{u}_2 + r_2'\theta_2'\boldsymbol{w}_2,\quad \text{причем } r_1' = -r_2'.$$

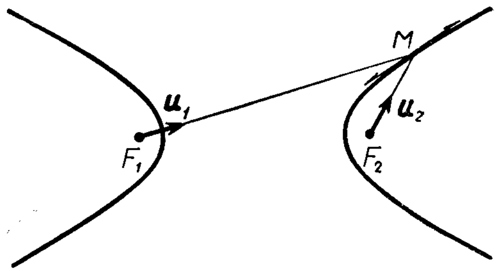
Значит, ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{V}$ на векторы $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ равны по абсолютной величине, но обратны по знаку. Это значит, что *касательная — это внешняя биссектриса угла* ($\boldsymbol{F_1M}$, $\boldsymbol{F_2M}$).

Гипербола. Исследование аналогично, но определяющее эту кривую равенство имеет такой вид:

$$|r_1 - r_2| = 2a > F_1F_2.$$

Поэтому получается $r_1' = r_2'$, и *касательная — это внутренняя биссектриса угла.*

Замечание. Если совершить преобразование параметра $t = h(\lambda)$, то все производные, как числовых функций, так и векторов, умножаются на число $h'(\lambda)$, но единичные векторы, как и углы, разумеется, сохраняются. В кинематике время является обязательным параметром, относительно которого берут производные, то есть независимой переменной; однако в геометрии параметр можно выбирать: часто выгодно брать в качестве параметра угол θ или же угол φ. Но еще интереснее выбрать параметр, обеспечивающий выполнение равенства: $|V| = 1$, то есть равенства $x'^2 + y'^2 = 1$, или также равенства:



Черт. 37

$$\text{предел}\left(\frac{1}{\Delta\lambda} M_0M\right) = 1.$$

Этот параметр имеет размерность длины, и его называют *криволинейной абсциссой* точки M на ориентированной кривой и обозначают через s. Определяющее соотношение:

$$\lim \frac{M_0M}{\Delta S} = 1,$$

то есть

$$\lim \frac{\text{хорда } M_0M}{\text{дуга } M_0M} = 1,$$

вполне соответствует тому, что требуется от длины дуги.

в) Кривизна

Кривизна соответствует скорости изменения угла $\varphi = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{T})$, задающего направление вектора $\boldsymbol{T}$. Возьмем поэтому производную вектора $\boldsymbol{T}$; равенство (2) дает:

$$\boldsymbol{T}' = \varphi'(-\sin\varphi \boldsymbol{i} + \cos\varphi \boldsymbol{j}) = \varphi' \boldsymbol{N}, \tag{4}$$

где N — вектор, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{T}$, значит, *нормальный к кривой.* Это единичный вектор, определенный условием $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}) = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Если параметр t есть время, то производная вектора $\boldsymbol{V}$ называется *ускорением* движения точки и обычно обозначается через $\boldsymbol{\Gamma}$. Из равенства (3) получается, согласно равенству (4):

$$\boldsymbol{\Gamma} = v'\boldsymbol{T} + v\varphi'\boldsymbol{N}. \tag{5}$$

Значит, *тангенциальная составляющая ускорения имеет в качестве алгебраической меры на ориентированной касательной производную по времени от алгебраической меры скорости.*

Но как интерпретировать нормальную составляющую ускорения $v\varphi'$? В случае окружности мы нашли:

$$\boldsymbol{V} = R\varphi'\boldsymbol{T}, \text{ значит, } v = R\varphi', \text{ откуда:}$$

$$v\varphi' = \frac{v^2}{R}.$$

Положим по аналогии для любой кривой:

$$R = \frac{v}{\varphi'},$$

R имеет размерность длины и является числом со знаком. Так как

$$R^2 = \frac{v^2}{\varphi'^2} = \frac{x'^2 + y'^2}{\varphi'^2},$$

то число R инвариантно по отношению к преобразованию параметра $t = h(\lambda)$. К тому же R инвариантно по отношению к преобразованию ортонормального базиса, так как из равенств:

$$\begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha; \\ y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases} \text{ вытекает } x'^2 + y'^2 = X'^2 + Y'^2,$$

а угол φ, увеличенный на постоянный угол α, имеет инвариантную производную.

Таким образом, R — это длина со знаком, соответствующая внутренним образом каждой точке кривой. Эту величину называют *радиусом кривизны кривой* в рассматриваемой точке, и мы имеем:

$$\boldsymbol{\Gamma} = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j} = v'\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}. \tag{5'}$$

Можно изменить условие о направлении единичного нормального вектора так, чтобы число R было всегда положительным. Для этого нужно, чтобы это направление зависело от самой кривой, а не от положительного направления, определенного с помощью базиса. Напоминаем теперь, что если независимое переменное есть s, то $v = 1$; это значит, что $R = \frac{1}{\varphi'_s}$.

Обратная величина $\frac{1}{R} = \varphi'_s$ называется *кривизной*; она показывает скорость, с которой вращается касательная, если угол поворота рассматривать как функцию дуги.

Связь с теорией касания. Снова, как в § II, 4, принимаем абсциссу x за параметр. Тогда формулы приобретают такой вид:

$$\begin{cases} x'_t = 1 = v\cos\varphi; \\ y'_t = y' = v\sin\varphi; \end{cases} \quad R = \frac{v}{\varphi'}, \quad y'' = \varphi'_x(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = \varphi'_x(1+y'^2),$$

откуда

$$|R| = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

где производные взяты относительно аргумента x. Таким образом, графики двух функций: $y = f(x)$ и $y = g(x)$, которые проходят через одну и ту же точку $x = x_0$ и имеют в ней одну и ту же касательную $[f(x_0) = g(x_0)$ и $f'(x_0) = g'(x_0)]$ и к тому же такие, что справедливо равенство $f''(x_0) = g''(x_0)$, имеют в точке x_0 один и тот же радиус кривизны. Иначе говоря, две кривые, имеющие в некоторой точке касание по меньшей мере второго порядка, имеют в этой точке тот же радиус кривизны, определенный в указанном смысле. В частности, соприкасающаяся окружность — это окружность радиуса R, касательная к кривой с надлежащей стороны, обеспечивающей необходимый порядок касания.

Замечание. В случае пространственной кривой кинематическое исследование было бы аналогичным, но, чтобы определить направление единичного касательного вектора T, одного угла недостаточно. Приходится ввести три косинуса углов, образованных вектором T с осями координат. Производные до второго порядка (включительно) вводят *кривизну*, а производные до третьего порядка (включительно) вводят *кручение*, величину, обратную некоторой длине и характеризующую тот факт, что кривая не является плоской. В классической механике существенны лишь производные до второго порядка, включительно.

Четвертая глава

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ ТЕОРЕМ

1. Специальные виды функций

Чтобы обеспечить понимание всего предыдущего, читатель должен был построить таблицы изменения, а также графики для многочисленных простых примеров. Нам остается лишь остановиться на некоторых общих соображениях, касающихся функций классических типов.

1. Многочлены

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Функция определена, непрерывна и имеет производную, каким бы ни было значение аргумента x. График может быть нарисован одним росчерком; это *уникурсальная* кривая. Кривая, геометрическое место точек M_1, называется уникурсальной, если вектор $\mathbf{OM}$ зависит *рационально* от некоторого параметра t так, чтобы точка M описывала кривую полностью и непрерывно, когда параметр t пробегает ограниченный или неограниченный интервал множества вещественных чисел. Здесь параметром является просто абсцисса x.

Последовательные производные имеют убывающие степени, так что лишь первые n не равны тождественно нулю. Свободные члены этих производных образованы просто с помощью последовательных коэффициентов многочлена $P(x)$, расположенного по возрастающим степеням. Но свободный член многочлена есть его значение при $x = 0$; таким образом, получается интересная форма записи многочлена

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1} P'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} P''(0) + \ldots + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \ldots k} P^{(k)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} P^{(n)}(0),$$

или, делая замену переменной $X = x + x_0$ и применяя формулу к многочлену относительно X

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1} P'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{1 \cdot 2 \ldots k} P^{(k)}(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} P^{(n)}(x_0).$$

Эта формула называется *формулой Тэйлора для многочлена*. Ее обобщение для других функций существенно для теории касания, так как в ней фигурируют значения последовательных производных в точке x_0. Мы не будем заниматься этой теорией, для которой в настоящей работе проведена лишь подготовка.

Изучение многочлена при значении аргумента x, стремящемся к бесконечности, проводится благодаря следующей теореме.

Теорема. *Отношение многочлена к своему старшему члену стремится к единице, когда x стремится к бесконечности.*

В самом деле, имеем:

$$\frac{P(x)}{a_0 x^n} = 1 + \frac{1}{x} \left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{x^{n-1}} \right].$$

Выражение в квадратной скобке остается ограниченным, оно умножается на число $\frac{1}{x}$, стремящееся к нулю, значит, правая часть стремится к единице.

А поведение одночлена $z = ax^p$, когда x стремится к бесконечности, указано в следующей таблице:

		$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
p — четное число	$a > 0$	$z \to +\infty$	$z \to +\infty$
	$a < 0$	$z \to -\infty$	$z \to -\infty$
p — нечетное число	$a > 0$	$z \to +\infty$	$z \to -\infty$
	$a < 0$	$z \to -\infty$	$z \to +\infty$

Согласно сформулированной теореме, многочлен $P(x)$ ведет себя, как его член наивысшей степени, который поэтому называется его *главным членом*. Таким образом, многочлен $P(x)$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, в зависимости от того, стремится ли к $+\infty$ или к $-\infty$ его главный член.

Замечание. *Отношение «частное стремится к единице, когда x стремится к бесконечности»* есть отношение эквивалентности между функциями, благодаря теоремам о пределах.

Действительно, здесь имеет место:

рефлексивность

$$\frac{f(x)}{f(x)} \to 1;$$

симметрия

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \to 1\right] \Rightarrow \left[\frac{g(x)}{f(x)} \to 1\right];$$

транзитивность

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \to 1\right] \text{ и } \left[\frac{g(x)}{h(x)} \to 1\right] \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{h(x)} \to 1\right].$$

Можно обозначить это отношение через $f(x) \backsim g(x)$. С другой стороны, изучая асимптотические кривые, мы встретили другое отношение эквивалентности: «*разность стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности*».

Действительно, имеет место:

рефлексивность

$$f(x) - f(x) \to 0;$$

симметрия

$$[f(x) - g(x)] \to 0 \Rightarrow [g(x) - f(x)] \to 0;$$

транзитивность

$$[f(x)-g(x)] \to 0 \text{ и } [g(x)-h(x)] \to 0 \Rightarrow [f(x)-h(x)] \to 0.$$

Однако эти два отношения эквивалентности отличны друг от друга и их не следует смешивать. Необходимо отметить, поскольку

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - 1,$$

то второе отношение влечет за собой первое, если только $g(x)$ не стремится к нулю (и, в частности, если $g(x)$ стремится к бесконечности); но первое отношение влечет за собой второе, только если функция $g(x)$ остается ограниченной. Поэтому было бы грубой ошибкой, разыскивая предел, заменять при любых обстоятельствах одну функцию другой, ей «эквивалентной» в смысле первого отношения эквивалентности. Вышесказанное применяется без изменения при исследовании предела, когда x стремится к некоторому значению x_0, вместо того чтобы стремиться к бесконечности.

2. Рациональные дроби

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_0x^p + \ldots + b_p}.$$

a) Нули знаменателя, если они существуют (то есть значения аргумента x, обращающие знаменатель в нуль), являются единственными значениями, для которых функция не непрерывна. Во всех прочих точках функция определена, непрерывна и имеет производную.

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти нули многочлена $D(x)$ не являются нулями многочлена $N(x)$; в противном случае мы бы сократили дробь, разделив оба ее члена на проходящую степень двучлена $(x - \alpha)$, если число α есть общий нуль. Мы уже говорили о том, что в таком случае следовало бы дополнить определение функции, принимая за ее значение при $x = \alpha$ то значение (возможно нулевое или бесконечное), которое принимает сокращенная дробь и которое называют «истинным значением» заданной функции в точке α. После того, как сокращение дроби сделано, каждый корень знаменателя, который называется *полюсом* функции, является для графика абсциссой асимптоты, параллельной к оси Oy. Перемена знака, которому подвергается знаменатель, если корень нечетной кратности, и сохранение знака, если корень имеет четную кратность, определяют положение кривой по отношению к асимптоте.

b) Для изучения функции при значениях аргумента, стремящихся к бесконечности, применяется теорема.

Теорема. *Когда аргумент x стремится к бесконечности, рациональная функция имеет тот же предел, что и отношение главных членов числителя и знаменателя.*

Это непосредственное следствие теоремы о многочленах, потому что можно написать

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{a_0x^n}{b_0x^p}\cdot\frac{N(x)}{a_0x^n}:\frac{D(x)}{b_0x^p},$$

откуда выводится: когда x стремится к бесконечности, то

$n>p$	$f(x)\to\infty$
$n<p$	$f(x)\to 0$
$n=p$	$f(x)\to\frac{a_0}{b_0}$

c) Асимптотическое направление графика имеет своим угловым коэффициентом предел отношения $\frac{f(x)}{x}$, когда аргумент стремится к бесконечности. Этот предел равен пределу отношения $\frac{a_0x^n}{b_0x^{p+1}}$, откуда выводы:

$n>p+1$. Асимптотическое направление параллельно Oy. Ветвь является параболической.

$n<p+1$. Асимптотическое направление параллельно оси Ox.

$$\left[\begin{array}{ll} n=p,\ f(x)\to\frac{a_0}{b_0}. & \text{Имеется асимптота } y=\frac{a_0}{b_0}. \\ n<p,\ f(x)\to 0. & \text{Ось } Ox \text{ является асимптотой.}\end{array}\right.$$

$n=p+1$. Асимптотическое направление имеет угловой коэффициент $\frac{a_0}{b_0}$.

Асимптота существует и отыскивается путем деления многочлена $N(x)$ на многочлен $D(x)$.

Получаемое частное имеет первую степень, так что

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{a_0}{b_0}x+k+\frac{R(x)}{D(x)},\quad d(R)<d(D).$$

Асимптотой является прямая с уравнением

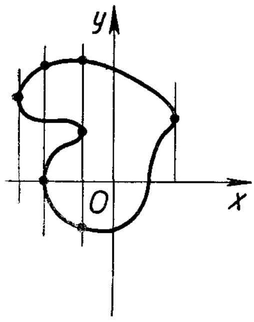
$$y=\frac{a_0}{b_0}x+k.$$

В более общем случае, когда $n>p+1$, деление дает асимптотическую кривую, график некоторого многочлена $y=Q(x)$, определенного равенством:

$$\frac{N(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)},\quad d(R)<d(D).$$

3. Неявные функции

a) Алгебраической кривой называется в аналитической геометрии кривая с целым уравнением $F(x, y)=0$. Такая кривая не является, вообще говоря, графиком функции $y = f(x)$, а представляет объединение дуг, являющихся такими графиками; эти графики можно разграничить, исследуя число корней уравнения $F(x_0, y) = 0$ в зависимости от значения числа x_0 и отделяя друг от друга корни, которые нужно прослеживать по непрерывности. Таким образом, возникает вопрос о *неявных функциях*: вообще говоря, мы не умеем выразить в явном виде функции, на которые указывает график, формулами типа $y = f(x)$.



Черт. 38

Обратно, пусть дана явная функция $y = f(x)$ и притом алгебраическая, то есть такая, в которой встречаются лишь сложение, умножение, деление и извлечение корней. Можно доказать, что график этой функции можно рассматривать как часть алгебраической кривой с уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Например,

$$y = x + \sqrt{x-1} \text{ приводит к } \begin{cases} (y-x)^2 - (x-1) = 0; \\ y - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Чтобы получить $F(x, y)$, умножают между собой разность $y - f(x)$ и сопряженные иррациональные выражения, чтобы освободиться от радикалов; избавляются также от знаменателей и приравнивают выражение к нулю.

С другой стороны, это позволяет в простых случаях распознать природу кривой, например распознать окружность, параболу и т. п., откуда получается верный чертеж для требуемого графика. Заметим, далее, степень многочлена $F(x, y)$ показывает максимальное число точек пересечения кривой с какой-либо прямой $y = ux + v$. Эта степень называется *порядком алгебраической кривой*. Порядок ограничивает возможность многочисленных изгибов кривой; кривая невысокого порядка может иметь лишь простую форму, что является ценным указанием при построении графика.

Доказывается (кн. IV, ч. 3), что кривые второго порядка могут быть лишь трех видов: эллипсом (или окружностью), параболой или гиперболой, формы которых известны. Отсюда выводятся формы графиков функций

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Аналогично, кривые $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ являются кривыми третьего порядка. Если знаменатель имеет два действительных корня, то построение двух асимптот, параллельных оси Oy, и асимптоты, параллельной оси Ox, и знание положения кривой по отношению к асимптотам достаточны, чтобы выявить форму кривой. Следует отметить, что поскольку асимптота, параллельная оси Ox, касательна к кривой на бесконечности, то она пересекает кривую еще в одной и только в одной точке.

b) Понятие степени, очевидно, не применяется к тригонометрическим функциям и к трансцендентным функциям, таким, например, как

$$y = x \sin x.$$

Такие функции дают примеры, указывающие на необходимость тонких доказательств, относящихся к пределам. Вот несколько классических примеров, относящихся к окрестности точки, принятой за начало координат.

Упражнения. Построить графики следующих функций.

$y = \sin \frac{1}{x}$. Нет предела, когда x стремится к нулю.

$y = x \sin \frac{1}{x}$. Функции приписывают в точке $x = 0$ «истинное значение», равное нулю. Тогда она непрерывна, но не имеет производной при $x = 0$.

$y = x^2 \sin \frac{1}{x}$. После того, как функция сделана непрерывной в точке $x = 0$, ее производная в этой точке равна, по определению, пределу отношения $\frac{y}{x}$, то есть нулю; однако производная функция $y' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не непрерывна в точке $x = 0$.

$y = x^3 \sin \frac{1}{x}$. Трудность для y' исчезает; она сохраняется лишь для y'' и производных более высоких порядков.

4. Линейная функция нескольких независимых переменных

Мы рассматривали ранее только числовые функции одной независимой переменной. Функция двух независимых переменных будет обозначена

$$\{x_1, x_2\} \xrightarrow{f} y, \text{ или } y = f(x_1, x_2).$$

Если изображать пару $\{x_1, x_2\}$ в точечном двумерном пространстве с базисом $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2)$, а y откладывать параллельно третьему вектору базиса $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$ трехмерного пространства, то графиком функции является поверхность. Мы можем ее изучать с помощью пересечений с цилиндрами, основания которых выбираются произвольно,

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t); \\ x_2 = \varphi_2(t), \end{cases}$$

так как y становится тогда функцией переменной t:

$$y = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t)].$$

Аналогично функция n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет график в $(n+1)$-мерном пространстве.

Основными являются *линейные функции*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Будем рассматривать числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты вектора $\boldsymbol{V}$ пространства R^n n измерений, y является тогда линейной функцией этого вектора, так что полагаем $y = f(\boldsymbol{v})$. Когда вектор подвергается двум операциям, характеризующим структуру векторного пространства, то функция преобразуется по следующим законам:

$$f(k \cdot \boldsymbol{V}) = k \cdot f(\boldsymbol{V}) \text{ и } f(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2) = f(\boldsymbol{V}_1) + f(\boldsymbol{V}_2).$$

Исследование в выпуклой области. Проследим изменение значения функции y, когда $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}$, то есть когда конец вектора $\boldsymbol{V}$ описывает прямую из R^n. Область значений называется выпуклой, если она соответствует множеству векторов $\boldsymbol{V}$, для которых $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то есть t принадлежит интервалу, определенному для каждой пары $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Внутренняя часть области тогда определена неравенством $t_0 < t < t_1$, а ее граница является множеством, заданным значениями $t = t_0$ и $t = t_1$. На отрезке прямой y является аффинной функцией аргумента t, так как $y = at + b$, следовательно, она монотонна от значения t, равного t_0, до значения t_1. Отсюда вытекает, *что функция не может иметь экстремум* (максимум или минимум) *внутри выпуклой области. В случае выпуклой многогранной области* (многоугольной, если $n = 2$) *с конечным числом вершин экстремумы достигаются каждый в некоторой вершине.*

Замечание. Эта теорема сохраняет свою силу для аффинной функции

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + k,$$

которая изменением начала приводится к линейной функции.

Если составляющие $y_1, y_2, \ldots, y_p$ вектора $\boldsymbol{U}$ p-мерного пространства являются линейными функциями вектора $\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{U}$ *называется векторной линейной функцией вектора* $\boldsymbol{V}$. Для противопоставления этому $y_1, y_2, \ldots, y_p$ называются *скалярными линейными функциями* вектора $\boldsymbol{V}$.

Полилинейные функции. Пусть мы имеем в n-мерном пространстве два переменных вектора: $\boldsymbol{V}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\boldsymbol{W}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Скалярная функция

$$f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \ldots + a_nx_ny_n$$

называется билинейной *. Она линейна в отдельности относительно $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$.

---

* Общий случай билинейной функции таков: $f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + \ldots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$. —*Прим. ред.*

Аналогично определяются и полинейные, скалярные или векторные функции от векторов.

При изучении векторных пространств вводятся полилинейные функции, называемые *определителями*, которые мы в свое время обозначали через δ и Δ.

В геометрии основными примерами линейных функций в трехмерном метрическом пространстве являются скалярные произведения и векторные произведения двух векторов (кн. I, гл. V).

В физике вводятся векторные поля, то есть области, каждой точке которых ставится в соответствие вектор, и рассматривают скалярные и векторные функции нескольких переменных, являющихся в свою очередь скалярными или векторными.

II. Применение исследования функций к решению уравнений

Чтобы изучить уравнение $f(x) = 0$, то есть найти число корней, отделить корни и получить метод приближенного их вычисления, уместно использовать особенности графика функции $y = f(x)$. Мы отметим лишь несколько существенных моментов.

В интервале (a, b), где функция непрерывна и имеет производную, два корня уравнения, то есть два нуля функции, разделены по крайней мере одним нулем производной (теорема Ролля).

В силу теоремы о промежуточных значениях, если функция при x_1 и x_2 принимает два значения противоположных знаков, то между этими числами имеется по крайней мере одно значение, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль; если к тому же функция монотонна в интервале (x_1, x_2), то в этом интервале в таком случае содержится единственный нуль.

Наконец, если $f(x)$ — многочлен n-й степени или рациональная дробь, числитель которой имеет степень n, то уравнение не может иметь больше чем n корней.

Следует заметить, что, когда мы подсчитываем число корней, руководствуясь только сведениями о выпуклости графика, мы не можем учесть порядка кратных корней. К этим сведениям следует еще присоединить результаты, которые дает понятие касания. Если для рассмотренного корня a не только $f(a) = 0$, но и $f'(a) = 0$, то график касается оси Ox, так что касание по меньшей мере первого порядка и корень по меньшей мере двукратный. Если, кроме того, $f''(a) = 0$, то касание по меньшей мере второго порядка и корень по меньшей мере трехкратный и т. д. Наконец, как мы уже упоминали, асимптотическое направление Ox соответствует для алгебраического уравнения одному бесконечному корню, а асимптота, параллельная Ox, указывает на два бесконечных корня (по меньшей мере).

Пример. Доказать, что производная n-го порядка функции $y = \frac{1}{x^2+1}$ имеет n корней.

Рекуррентным рассуждением проверяется, что эта производная имеет вид:

$$y^{(n)} = \frac{P_n}{(x^2+1)^{n+1}},$$

где P_n — многочлен степени «n», откуда выводится последовательно существование n корней с помощью таблицы

x	$-\infty$			$+\infty$
y	0			0
y'	0		0	0
y''	0	0	0	0

. . . .

Хотя при счете нулей каждой функции предложение относительно степени не учитывает бесконечных корней (в этом состоит точка зрения алгебры многочленов), мы все же будем учитывать и бесконечные корни для получения нулевых пределов при x, стремящемся к бесконечности.

Пример исследования существования корней. Дано уравнение: $x^3 + px + q = 0$.

Рассмотрим функцию:

$$y = x^3 + px + q, \text{ откуда } y' = 3x^2 + p.$$

Таблица значений позволяет сделать эскиз графика.

1) $p \geqslant 0$	x	$-\infty$				$+\infty$	Имеется один корень
	y	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$	
2) $p \leqslant 0$	x	$-\infty$	$-x_0$		$+x_0$	$+\infty$	
	y	$-\infty$ $\nearrow$	M	$\searrow$	m $\nearrow$	$+\infty$	

$$x_0 = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad M = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q, \quad m = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

$$Mm = \frac{4p^3}{27} + q^2.$$

Таким образом, получаем выводы (содержащие оба случая).

$4p^3 + 27q^2 > 0.$ Один корень.

$4p^3 + 27q^2 < 0.$ Три корня.

$4p^3 + 27q^2 = 0.$ Два корня, из которых один двукратный.

Остается, следовательно, определить все корни методами книги II, главы II, § III.

Используем эти выводы во введении к комплексным числам (гл. VI).

Метод вспомогательных кривых. Пусть требуется исследовать трансцендентное уравнение

$$2x + 1 - 3x \sin x = 0.$$

Строим на тех же осях графики функций:

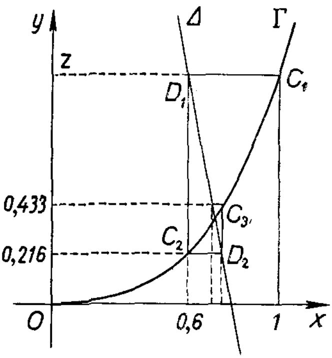
$$u = \sin x; \; z = \frac{2x+1}{3x}.$$

Общие точки этих кривых имеют своими абсциссами отыскиваемые корни (иногда приходится очень тщательно уточнять дуги кривых, расположение которых не очевидно). Рассмотренные в этом примере кривые можно было бы использовать, чтобы изучить изменение функции

$$y = x^2 + x + 3(x \cos x - \sin x),$$

первая производная которой есть левая часть предложенного уравнения.

Приближенное вычисление корней. Предположим, что один из корней определен и заключается в интервале (x_1, x_2), и пусть $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют противоположные знаки. Можно получить довольно хорошее приближенное значение корня, если заменить дугу M_1M_2 ее хордой; вычисление абсциссы точки, в которой хорда пересекает ось $x'x$, выполняется немедленно (методом линейной интерполяции). Пусть x_3 — найденное значение этой абсциссы. Вычисление значения $f(x_3)$ указывает, нужно ли заменить числом x_3 число x_1 или x_2, после чего начинают сначала, но уже с новым полученным интервалом.



Черт. 39

Этот метод комбинируют, вообще говоря, с методом Ньютона, состоящим в замене дуги кривой касательной в одном из ее концов; знание направления вогнутости кривой позволяет предвидеть, какая из касательных является благоприятной.

Упомянем, наконец, принцип одного из *методов итераций* ввиду интереса, который такие методы представляет для машинных вычислений.

Пусть требуется решить приближенно уравнение:

$$x^3 + 5x - 4 = 0.$$

Проследим метод на чертеже, образованном кривой Γ и прямой Δ, графиком соответственно функций $y = x^3$ и $z = -5x + 4$. Отправляемся, например от значения $x = 1$. Оно дает на кривой точку C_1, ордината которой определяет на прямой точку D_1, абсцисса которой определяет на кривой точку C_2 и т. д. Эта последовательность точек приближается к точке пересечения, абсциссу которой a мы разыскиваем.

Интерес этого метода при использовании машины состоит в том, что достаточно настроить машину раз навсегда (здесь на вычисление куба z числа x_i и на вычисление выражения $x_{i+1} = 0{,}8 - 0{,}2z_i$).

Машина сама показывает, сходится ли последовательность вычисленных чисел x_i. При условии, что эта сходимость к искомому корню обеспечена, метод представляет также большой теоретический интерес.

Наконец, отметим еще, кроме использования машин, также использование для решения числовых задач различных числовых таблиц и начерченных семейств кривых (абаков).

x	1		0,6		0,757		0,713		0,727		0,723
z		1		0,216		0,433		0,362		0,384	

$$a \cong 0{,}725.$$

Пятая глава

ПЕРВООБРАЗНЫЕ

Теория меры нас привела в книге I, главе VI, к первообразным функциям, которые позволяют ввести некоторые площади. Мы вернемся к этому исследованию, уделяя основное внимание не областям и их мерам, а первообразным, как числовым функциям.

I. Общая первообразная некоторой функции

1) Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ в некотором интервале, если $f(x)$ — производная функция функции $F(x)$.

Теорема. *Если две функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными одной и той же функции $f(x)$ в некотором интервале, то разность $G(x) - F(x)$ постоянна.* В самом деле, эта разность имеет производную, равную нулю в любой точке интервала, а мы доказали, как следствие теоремы о конечных приращениях, что тогда эта разность постоянна (кн. I, гл. IV).

Так как функции $F(x)$ и $F(x)+C$ имеют одну и ту же производную функцию, какова бы ни была постоянная C, то мы заключаем, что если некоторая функция $f(x)$ имеет *частную первообразную* $F(x)$, то семейство ее первообразных состоит из функций $G(x)=F(x)+C$. Это семейство называют *общей первообразной* функции $f(x)$ и пишут:

$$\mathscr{P}f(x)=F(x)+C.$$

C является произвольной постоянной; каждое из ее значений определяет некоторую частную первообразную.

2) Вычисление общей первообразной, если она существует

a) Таблица, указывающая производные функции для общеупотребительных функций, дает первообразные простых функций. Таким образом,

$f(x)=x^n$, n натуральное,	$\mathscr{P}f(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C;$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, n натуральное, отличное от единицы,	$\mathscr{P}f(x)=\frac{1}{-n+1}\frac{1}{x^{n-1}}+C;$
$f(x)=x^{\frac{p}{q}}$, $(x>0)$, $\frac{p}{q}\neq-1$.	$\mathscr{P}f(x)=\frac{1}{\frac{p}{q}+1}x^{\frac{p}{q}+1}+C.$

Первая строка этой таблицы, таким образом, применима для любого рационального числа $n\neq-1$. Из функций этого типа лишь $f(x)=\frac{1}{x}$ не имеет первообразной, определяемой по указанным формулам. Из этого мы не будем делать вывода, что эта первообразная не существует. Действительно, рассмотрим следующие результаты:

$f(x)=\sin x$	$\mathscr{P}f(x)=-\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$\mathscr{P}f(x)=\sin x+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathscr{P}f(x)=\arcsin x+C$ и $\mathscr{P}f(x)=-\arccos x+C$
$f(x)=1+\operatorname{tg}^2 x$	$\mathscr{P}f(x)=\operatorname{tg} x+C$
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathscr{P}f(x)=\operatorname{arctg} x+C$

Мы видим, что если бы мы не знали обратных тригонометрических функций, то мы бы не знали про существование первообразных для алгебраических функций:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } \frac{1}{1+x^2}.$$

Далее мы покажем, что функция $\frac{1}{x}$ имеет общую первообразную.

b) Если некоторая функция не находится в известной нам таблице, то пытаются применить одну из следующих теорем, вытекающих из свойств производной.

1. **Теорема.** *Если* $F(x)$ *есть первообразная функции* $f(x)$, *то* $kF(x)+C$ *есть общая первообразная функции* $kf(x)$.

2. **Теорема.** *Общая первообразная суммы некоторого (конечного) числа функций есть сумма общих первообразных данных функций.*

Поэтому стараются представить функцию, первообразную которой мы разыскиваем, в виде суммы простых функций. В частности, если речь идет о рациональной дроби, то важная глава алгебры посвящена такому разложению; эта глава дополняет то, что мы сказали по поводу деления многочленов.

3. **Теорема о замене переменной.** Это с некоторой точки зрения теорема, обратная теореме о нахождении производной функции от функции.

Ищется функция $F(x)$, такая, чтобы было $F'(x)=f(x)$. Если рассматривать переменную x, как функцию некоторой вспомогательной переменной u, то можно будет использовать систему:

$$\begin{cases} x=g(u);\ g(u)\text{ — данная функция, имеющая производную } x'_u=g'(u). \\ F'_u=F'_x\cdot x'_u. \end{cases}$$

Пример. Найдем снова общую первообразную функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Введем переменную u, $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, подстановкой $x=\sin u$. Тогда

$$F'(u)=\frac{1}{\cos u}\cdot\cos u=1.$$

Значит,

$$F=u+C=\arcsin x+C.$$

В качестве упражнения поступим аналогично с функцией

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Та же замена переменной дает:

$$F'(u)=\cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u),$$

функцию, первообразную которой мы знаем, так что

$$F=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

Нужно уметь целесообразно выбирать замены переменных. Отсюда возникает исследование большого практического интереса, но которым мы не будем заниматься.

4. Использование формулы для производной произведения Имеем

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

Отсюда выводим:

$$uv=\mathcal{P}(u'v)+\mathcal{P}(uv')+C.$$

Если одна из первообразных, содержащихся в этой формуле, известна, то вторая выводится из нее.

Пример. Пусть

$$f(x)=x\operatorname{arctg} x.$$

Будем иметь:

$$f(x)=u'v,$$

если взять

$$u=\frac{x^2}{2},\quad v=\operatorname{arctg} x.$$

Посмотрим поэтому, можем ли мы найти первообразную от

$$uv'=\frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right].$$

Мы находим, что

$$\mathcal{P}(uv')=\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C.$$

Искомая первообразная будет, следовательно,

$$uv-\mathcal{P}(uv')=\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C.$$

Сделанные выше замечания кажутся бедными и отрывочными; однако при умелом их использовании они представляют достаточное орудие для элементарного разыскания первообразных.

II. Геометрическая интерпретация первообразных

Мы сейчас свяжем первообразную функцию, если она существует, с графиком данной функции $f(x)$ и уточним исследование, проведенное в книге I, с другой точки зрения.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная и непрерывная в интервале (a, b), AB — дуга соответствующего графика, M — точка графика, которая проектируется в точку m оси $x'x$ с абсциссой x. Мы предполагаем, что криволинейная трапеция $aAMm$ имеет площадь: тогда эта площадь есть функция $\mathfrak{A}(x)$ абсциссы x точки M.

Основная теорема. *Функция $\mathfrak{A}(x)$ является частной первообразной функции $f(x)$.*

Из наглядных соображений ясно, что приращению $x - x_0 = \Delta x$ соответствует приращение $\Delta\mathfrak{A}$ — площадь криволинейной трапеции, почти равная числу $f(x_0)\,\Delta x$, так что $\frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta x}$ почти равняется числу $f(x_0)$.

Но более строго это нужно выразить так: в интервале $(x_0, x_0+\Delta x)$ непрерывная функция заключена между точными гранями M и m, стремящимися к $f(x_0)$, когда Δx стремится к 0.

a) Предположим сначала, что $f(x)$ *положительна* в интервале (a, b). Согласно определению площади имеем:

$$m\,|\Delta x| < |\Delta\mathfrak{A}| < M\,|\Delta x|,$$

значит,

$$m < \left|\frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta x}\right| < M.$$

Но $\Delta\mathfrak{A}$ имеет знак приращения Δx, следовательно, $m < \frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta x} < M$.

Когда Δx стремится к 0, то m и M стремятся к $f(x_0)$ в силу непрерывности функции, следовательно, $\Delta\mathfrak{A}/\Delta x$ имеет предел, равный $f(x_0)$. Таким образом, $\mathfrak{A}(x)$ является одной из первообразных функции $f(x)$. Чтобы уточнить, какой из них, достаточно заметить, что площадь равняется нулю при $x = a$. Поэтому если известна одна из первообразных $F(x)$ функции $f(x)$, то площадь криволинейной трапеции $aAMm$ равна

$$\mathfrak{A}(x) = F(x) - F(a).$$

$\mathfrak{A}(x)$, естественно, не зависит от того, какую из первообразных обозначили через $F(x)$; эта разность обозначается

$$\mathfrak{A}(x) = \mathcal{F}_a^x f(x).$$

Так, в частности, площадью криволинейной трапеции $aABb$ будет

$$\mathfrak{A}(b) = \mathcal{F}_a^b f(x) = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Если a и b даны, то это уже не функция, а число.

П р и м е р (формула Архимеда). Ищется площадь фигуры, заключенной между параболой и ее хордой AB, перпендикулярной к ее оси. Вычисляем сначала площадь фигуры, заключенной между параболой с уравнением $y = x^2/2p$, осью x-в и прямыми $x = a$, $x = b$.

Имеем здесь:

$$b = -a > 0; \quad f(a) = f(b) = b^2/2p = h;$$

$$F(x) = \frac{1}{6p}x^3;$$

$$F(b) - F(a) = 2F(b) = \frac{1}{3p}b^3 = \frac{1}{3}(2b)\left(\frac{1}{2p}b^2\right) = \frac{1}{3}(2b)\,h.$$

Значит, искомая площадь равняется $^2/_3$ площади прямоугольника $aABb$.

b) Если функция $f(x)$ отрицательна в рассматриваемом интервале, то для вычисления площади надо рассматривать абсолютные значения функции $f(x)$ и чисел M и m. Но мы знаем, что изменение знака функции $f(x)$ влечет за собой изменение знака первообразной $F(x)$. Значит, для обобщения записанной выше формулы мы приведены к необходимости рассматривать площадь, имеющую знак $+$ для интервалов, где график расположен над осью xx', и $-$, если график расположен под осью xx'.

Формула (1) применяется тогда без учета знака функции $f(x)$, но она дает сумму, где входят площади положительные или отрицательные в зависимости от знака функции $f(x)$. Чтобы получить сумму положительных площадей, надо в отдельности вычислять площади, соответствующие интервалам, где функция $f(x)$ сохраняет один и тот же знак, что требует отыскания корней уравнения $f(x) = 0$.

c) Площадь неограниченной области. Если x стремится к бесконечности, а $f(x)$ стремится к 0, то может случиться, что $\mathfrak{A}(x)$ стремится к конечному пределу; по определению, этот предел будет называться площадью неограниченной области, заключенной между ординатой aA, кривой и осью x-в.

Пример.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad F(x) = -\frac{1}{x}.$$

В интервале, где x положительно, имеем $\mathcal{F}_a^x = 1/a - 1/x$, который стремится к $1/a$, когда x стремится к $+\infty$. Аналогичное исследование можно провести в случае, когда $f(x) \to \infty$ при $x \to b$.

III. Существование первообразных. Первообразная функции $1/x$

Мы доказали в книге I, главе IV, что если функция $f(x)$ непрерывна в (a, b), то область $aABb$, определенная ее графиком, имеет площадь. Это значит, что для $x \in (a, b)$ функция $\mathfrak{A}(x)$ существует. Мы только что видели, что это частная первообразная функции $f(x)$ и что существует также общая первообразная

$$\mathcal{F}_a^x f(x) = \mathfrak{A}(x), \qquad \mathcal{F} f(x) = \mathfrak{A}(x) + C.$$

Функция $F(x)$, определенная как частная первообразная данной функции $f(x)$, изучается, исходя от этой функции, которая является ее производной и знак которой показывает непосредственно направление изменения функций $F(x)$. Приближенные значения первообразной $F(x)$ получаются вычислениями площадей (прямоугольников или трапеций), объединение которых образует покрытие рассматриваемой области, или, напротив, это объединение включено в данную область. Лишь пределы бесконечных областей требуют иногда для своего определения исследований довольно трудных.

В качестве примера исследования функции, определенной как первообразная, изучим первообразную функции $1/x$.

Функция $1/x$, будучи непрерывной в интервале (a, b), где a и b положительны, имеет в таком интервале общую первообразную.

Рассмотрим частную первообразную, которая обращается в нуль при $x = 1$. Мы обозначим

$$L(x) = \mathcal{P}_1^x \frac{1}{x}.$$

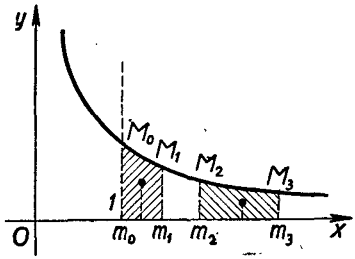
По определению функции $f(x)$, если положительная абсцисса точки x_1 умножена на некоторое положительное число x_2, то ордината разделена на x_2. Обозначим через M_0 точку с абсциссой $x_0 = 1$. Между областью $m_0M_0M_1m_1$ (x_1 — абсцисса точки m_1) и областью $m_2M_2M_3m_3$ (x_2 — абсцисса точки m_2, x_1x_2 — абсцисса точки m_3) существует точечное соответствие, являющееся произведением аффинного расширения от оси $y'y$ с коэффициентом, равным x_2, и аффинного расширения от оси $x'x$ с коэффициентом, равным $1/x_2$: значит, имеется сохранение площади, следовательно,

$$L(x_1) = L(x_1x_2) - L(x_2).$$

Иначе говоря,

$$\forall x_1, x_2 > 0; \qquad L(x_1x_2) = L(x_1) + L(x_2).$$

В силу ассоциативности умножения и сложения это обобщается для любого числа положительных значений аргумента x, так что отображение $x \longrightarrow L(x)$ ставит в соответствие произведению чисел x сумму их образов. Мы узнаем отображение, которое мы назвали логарифмической функцией (кн. II, гл. III).



Черт. 40

Основание β — это такое значение аргумента, при котором $L(\beta) = 1$. Если построить кривую на миллиметровой бумаге, то мы найдем приближенное значение этого числа, которое, как показывает теоретическое исследование, близко к 2,71828. Как и число π, это трансцендентное число (кн. I, гл. II, §4). Его обозначают буквой e. Таким образом,

$$L(e) = 1; \qquad L(e^n) = n; \qquad L(e^{p/q}) = \frac{p}{q};$$

$$L(1) = 0; \qquad L\left(\frac{1}{e^n}\right) = -n; \qquad L\left(\frac{1}{e^{p/q}}\right) = -\frac{p}{q}.$$

Наконец, каково бы ни было число x, будем иметь, так как площадь — непрерывная функция,

$$L(e^x) = x.$$

Это означает, что логарифмическая функция $L(x)$ является обратной показательной функции e^x. Производная показательной функции, следовательно, обратная по значениям производной логарифмической функции.

Из

$$v = L(u), \qquad v'_u = \frac{1}{u}$$

получается $u = e^x$, $u'_x = u$, то есть *показательная функция равна своей производной.*

Эти две взаимно обратные функции исключительно важны; вместе с алгебраическими, тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями они дополняют арсенал, необходимый для изучения основ анализа *.

Переход от глобальных данных к локальному исследованию составляет предмет *дифференциального исчисления*. Обратный переход, как, например, переход от изучения функции $f(x)$ в каждой точке к рассмотрению площади, определенной в интервале (a, b), составляет предмет *интегрального исчисления*. Изучение первообразных есть одна из глав этого исчисления. Нами дано лишь введение в эту обширную область математики, которая зародилась еще в эпоху Архимеда в виде теории меры и затем развилась в XVII веке, благодаря созданию механики.

Определенное дифференциальное соотношение выражает, например, причину движения в данном месте и в данный момент (таков, например, закон всемирного тяготения, закон действия электрического поля на частицу). Определенное интегральное соотношение выражает *закон* движения в пространстве с течением времени (как, например, закон Кеплера о движении планет). Этот двоякий аспект причин и законов является со времен Ньютона основным в теоретической физике.

Шестая глава

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

●

Когда мы путем последовательных расширений ввели множество вещественных чисел, исходя из множества натуральных чисел, то это не нуждалось в оправдании: общеизвестно, насколько необходимы эти распространенные понятия. Мы построили полное множество, которое позволило нам доказать теоремы о непрерывных функциях и, в частности, теоремы о промежуточных значениях. В вопросе существования корней уравнения имеется полное согласие между тем, что показывает график, и тем, что дает числовое множество.

* Перечисленные функции обычно называют элементарными функциями.— *Прим. ред.*

Зачем же тогда вводить новые числа и какой ценой можно достичь этого. На второй вопрос мы ответим немедленно, нами будет потеряно отношение порядка; так что мы окажемся довольно далеки от числа — меры. Что касается первого вопроса, то историческое введение показывает, как это новое понятие утвердилось. Некоторые геометрические приложения дадут лишь слабое представление о важности комплексных чисел в математике. Основными же являются их приложения в анализе. Так, мы можем указать на основную теорему алгебры, которая, даже взятая в отдельности, дает достаточное оправдание введению комплексных чисел.

I. Исторические сведения

Сравним результаты, полученные анализом и алгеброй для уравнений второй и третьей степени.

Пусть дано уравнение:

$$x^2+px+q=0.$$

Мы исследуем вопрос о существовании корней построением графика функции

$$f(x)=x^2+px+q.$$

Имеем: $f'(x)=2x+p$; $f\left(-\frac{p}{2}\right)=-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=-\Delta.$

Значит,

$\Delta>0$ — два корня;

$\Delta<0$ — нет корней;

$\Delta=0$ — один корень (двойной).

С другой стороны, мы умеем решать уравнения и получаем корни, когда они существуют, но метод ничего не дает, когда они не существуют. Значит, исследование проведено удовлетворительно.

Пусть теперь мы имеем уравнение третьей степени:

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

(к нему сводится изучение уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ с помощью преобразования начала $X=x+\frac{b}{3a}$).

Исследование существования корней было выполнено с помощью функции

$$f(x)=x^3+px+q.$$

Мы напоминаем выводы:

$\Delta=\frac{4p^3}{27}+q^2<0$ — три корня;

$\Delta>0$ — один корень;

$\Delta=0$ — два корня, из которых один двойной.

С другой стороны, пересмотрим решение в том виде, как мы его сейчас представляем (кн. II, ч. II, гл. II, § 3). Это решение было осуществлено Тартальей и Карданом еще до введения в начале XVI столетия обозначений буквенной алгебры.

Вводим два неизвестных, полагая $x = u + v$ и сохраняя за собой возможность подчинить эти неизвестные условию, которое будет выбрано позднее с целью упрощения системы. Так как уравнение относительно u и v имеет следующий вид:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

то выбирают такое условие

$$3uv + p = 0.$$

Система становится следующей:

$$\begin{cases} x = u + v; & (2) \\ uv = -\frac{p}{3}; & (3) \\ u^3 + v^3 = -q, & (4) \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x = u + v; & (2) \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}; & (3') \\ u^3 + v^3 = -q; & (4) \end{cases}$$

или еще:

$$\left[(5)\ \begin{matrix} U = u^3; \\ V = v^3; \end{matrix}\right. \quad \begin{cases} x = u + v; & (2) \\ UV = -\frac{p^3}{27}; & (3'') \\ U + V = -q. & (4'') \end{cases}$$

Значит, U и V являются корнями резольвенты

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \qquad (6)$$

Мы встречаем снова выражение:

$$\Delta = \frac{4p^3}{27} + q^2,$$

и исследование уравнения (6) дает:

$$\Delta > 0, \left.\begin{cases} U = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}; \\ V = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}; \end{cases}\right\} \begin{matrix} u = \sqrt[3]{U}; \\ v = \sqrt[3]{V}. \end{matrix} \quad x = u + v.$$

Одно решение.

$\Delta < 0$. Нет решений.

Откуда эта неудача? Ведь нам известно по результатам, полученным с помощью анализа, что при $\Delta < 0$ имеются три решения. Согласно равенствам (2) и (3) этим методом можно получить лишь корни, удовлетворяющие условию $x^2 > -\frac{4p}{3}$; но вычисление значений $f\left(-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ и $f\left(+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ показывает, что как раз тогда, когда имеются три корня, они заключены между $-2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $+2\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Вместо того чтобы оставить этот метод, давший все, на что можно было надеяться, Бомбелли в 1572 году преодолевает трудность. Он замечает, что вычисление может давать результат также в случае отрицательного Δ.

Так как нас интересует лишь $x = u + v$, то полагаем:

$$\begin{cases} u = \alpha + \beta; \\ v = \alpha - \beta, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} U = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2) + (3\alpha^2\beta + \beta^3); \\ V = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2) - (3\alpha^2\beta + \beta^3). \end{cases}$$

Мы знаем, что

$$U + V = -q = 2(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2);$$

$$U - V = \sqrt{\Delta} = 2(3\alpha^2 + \beta^2)\cdot\beta.$$

Если Δ — отрицательное число, то полагаем:

$$\Delta = -\delta^2, \quad \sqrt{\Delta} = \delta\sqrt{-1},$$

и также

$$\beta = \gamma\sqrt{-1}.$$

Конечно, $\sqrt{-1}$ не существует, написанные числа лишь «мнимые». Но все устраивается, так как $\sqrt{-1}$ исчезает.

Получается:

$$x = 2\alpha, \quad \begin{cases} -q = 2(\alpha^3 - 3\alpha\gamma^2); \\ \delta = 2(3\alpha - \gamma^2)\gamma, \end{cases} \quad \text{значит,} \quad \frac{\alpha^3 - 3\alpha\gamma^2}{3\alpha^2\gamma - \gamma^3} = -\frac{q}{\delta}.$$

Мы узнаем уравнение, дающее $\operatorname{tg}\varphi$ в функции значения $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{3}\right)$, так что, полагая $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{q}{\delta}$, получаем:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3},$$

откуда

$$-q = 2\alpha^3\left(1 - 3\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{3}\right),$$

что дает значение α, а затем и x. Таким образом, получаем три значения для неизвестного x, так как $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}$ имеет три значения для одного значения $\operatorname{tg}\varphi$. Этот метод позволяет выполнить приближенные вычисления так же хорошо, как и формула, содержащая радикалы, но мы покинули алгебру ради тригонометрии. Этим путем можно получить, как мы это видели, более практический метод, разыскивая корни в форме $x = \varrho \cos \varphi$ и используя формулу, дающую $\cos 3\theta$ в функции от $\cos \theta$. Однако не в этом состоит для нас суть вопроса: для нас важен успех метода, вводящего мнимый символ в ходе вычислений таким образом, чтобы он исчез в конце.

Если мы допустим, таким образом, «мнимые» корни для уравнения второй степени, то мы должны приписать 3 корня уравнению $z^3 - 1 = 0$, поскольку $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$; эти корни

$$1 \quad \text{и} \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\sqrt{-1}}{2}.$$

Обозначим через j' и j'' эти мнимые корни. Значит, уравнение $z^3 = a$ будет иметь 3 корня: z_0, $j'z_0$, $j''z_0$. Но тогда наши уравнения (5) дают три значения для u и три значения для v. Не дает ли это 9 значений для неизвестного x? Нет, так как (3) и (3′) уже не равносильны, и нужно будет выбрать такие значения u и v, чтобы обеспечить равенство:

$$uv = -p/3, \text{ а не } uv = -pj'/3, \text{ и не } uv = -pj''/3.$$

Короче говоря, все кажется вполне согласованным, и это нас приводит к тому, чтобы систематизировать и узаконить употребление символа $\sqrt{-1}$, который обозначают через i. Так как уже Кардан и его ученик Феррари умели сводить решения уравнения четвертой степени к решению уравнения третьей степени, то стало ясным, что присоединение этого единственного символа i, который кажется специально связанным с уравнением второй степени, обеспечивает существование трех корней для уравнения третьей степени и четырех для уравнения четвертой степени. Тогда же показалось возможным и вероятным, что введение этого единственного нового символа обеспечивает существование n корней, действительных или мнимых, простых или кратных, для каждого уравнения степени n. Этот результат, доказанный впоследствии Коши с помощью анализа, рассматривался как достоверный Даламбером (1717—1783), математиком, написавшим знаменательную фразу: «Двигайтесь дальше, а вера придет потом». Эту теорему, основную теорему алгебры, называют часто во Франции теоремой Даламбера.

К 1800 году было удовлетворено и определенное желание получить конкретное представление, что, казалось, внушило доверие к мнимым числам. Вессель *, а затем Арган ** истолковали мнимые числа, как представляющие геометрические преобразования на плоскости.

---

* В 1799 г.— *Прим. ред.*
** В 1806 г.— *Прим. ред.*

В настоящее время математик в большей степени осознал свою творческую свободу. Не пренебрегая геометрическими моделями, мы сейчас построим множество комплексных чисел абстрактным образом путем расширения множества действительных чисел.

II. Поле комплексных чисел

1. Мы присоединяем к множеству R действительных чисел (обозначенных такими буквами, как a, a'', b, x, y) элемент, обозначенный буквой i, причем расширенное множество будет наделено структурой, которую ему придают следующие операции:

Умножение числа i на действительное число, обозначенное через bi, или ib.

Сложение $a + bi$ (или $a + ib$).

Отношение эквивалентности

$$a+bi=a'+b'i, \text{ что означает: } \begin{cases} a=a'; \\ b=b'. \end{cases}$$

Элемент $a + bi$ называется *комплексным числом*. Если $b = 1$, то $a + 1i$ пишется $a + i$.

2. Во множестве комплексных чисел определяют

a) Сложение.

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i.$$

Значит, имеет место коммутативность. Существует нейтральный элемент $0 + 0i$.

b) Умножение на действительное число.

$$m(a+bi)=ma+mbi.$$

Эти две операции придают множеству комплексных чисел структуру векторного пространства. Мы можем поэтому поставить в соответствие множеству комплексных чисел различные геометрические модели.

1) Векторная модель. Базис двумерного векторного пространства мы обозначим $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i})$ и мы поставим в соответствие комплексному числу $a + bi$ вектор $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{i}$. Между двумя этими множествами имеется, разумеется, изоморфизм.

2) Точечная модель. Если выбрана система координат, то есть точка $\boldsymbol{O}$ и базис $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i})$, то комплексному числу $a + bi$ ставят в соответствие точку A, называемую аффиксом комплексного числа, которая определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{OA}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{i}.$$

3. Умножение вводится равенством: $i \cdot i = -1$.

Мы требуем коммутативность и дистрибутивность по отношению к сложению, применяя определяющую формулу:

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i.$$

Нейтральным элементом является число $1 + 0i$.

Таким образом, в векторной модели операция умножения определена с помощью следующей таблицы умножения базисных векторов

	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	$-\boldsymbol{u}$

откуда, используя умножение на действительное число, дистрибутивность и коммутативность, получаем:

$$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{i})(a'\boldsymbol{u} + b'\boldsymbol{i}) = (aa' - bb')\,\boldsymbol{u} + (ab' + ba')\,\boldsymbol{i}.$$

Замечательная геометрическая интерпретация этой операции получается, если *базис ортонормален*, что всегда предполагается при геометрическом изображении комплексных чисел. Действительно, написанные выражения наводят на мысль поставить в соответствие паре a, b пару, состоящую из числа $r \geqslant 0$ и угла θ, определенного с точностью до кратного 2π равенствами:

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta;$$

так что

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

причем r равен нулю лишь для числа $0 + 0i$. В точечной модели

$$OM = r \text{ и } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{OM}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Пишут: $r = |z|$. Это *модуль* комплексного числа z. Угол $\theta \pmod{2\pi}$ — это *аргумент* комплексного числа, который обозначается через $\arg z$.

Формула умножения дает тогда:

$$\begin{cases} z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta); \\ z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta'); \end{cases} \quad zz' = rr'\,[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

Значит,

Модуль произведения равен произведению модулей.

Аргумент произведения равен сумме аргументов.

В частности, $0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Значит, *умножение на $0 + i$ преобразует вектор путем вращения на угол $\frac{\pi}{2}$*.

Умножение на $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ преобразует вектор путем вращения на угол θ с последующей гомотетией с коэффициентом r. Таким образом, аффикс данного комплексного числа подвергается преобразованию подобия с центром O, углом вращения θ и с коэффициентом подобия r.

Чтобы интерпретировать коммутативность умножения, рассмотрим сразу аффикс A данного числа $a + bi$ и аффикс M множителя $x + yi$. Пусть u — аффикс числа $1 + 0i$ и P — аффикс произведения. Тогда треугольники UOA и MOP прямо подобны друг другу, как и треугольники UOM и AOP.

Выражение $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Эта форма выгодна, когда речь идет о произведении. В частности, тригонометрическая форма показывает, что всякое комплексное число, отличное от нейтрального элемента сложения $0 + i0$, имеет обратное число $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

Действительно, равенство

$$zz' = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$$

равносильно уравнениям:

$$rr' = 1,\ \theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi},$$

которые имеют, за исключением случая, когда $r = 0$, единственное решение:

$$r' = \frac{1}{r},\ \theta' = -\theta \pmod{2\pi}.$$

Это означает, что *множество комплексных чисел является полем.*

Вычисление частного в декартовой форме. Найдем a', b' из условия $(a + ib)(a' + ib') = 1 + 0i$, что дает:

$$aa' - bb' = 1;$$

$$ba' + ab' = 0.$$

Получается

$$\frac{a'}{a} = \frac{-b'}{b} = \frac{1}{a^2+b^2}.$$

Значит,

$$a' + b'i = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Поэтому пишут:

$$\frac{1+0i}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Стоит сравнить эту формулу с формулой, связывающей иррациональности, которые вводят квадратные корни

$$\frac{1}{a+b\sqrt{c}} = \frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-b^2c},$$

и мы обнаружим снова, что i играет роль радикала $\sqrt{-1}$. Однако *формально мы себе запрещаем применять знак радикала к какому бы то ни было числу, не являющемуся вещественным и положительным.* Радикал с каким-либо показателем (2,3 или n) никогда не будет применяться к отрицательному и тем более к комплексному числу, и сам радикал всегда представляет число положительное или нуль.

Наконец, мы констатируем, что имеется изоморфизм по отношению ко всем введенным операциям между множеством вещественных чисел и подмножеством, образованным комплексными числами $a+0i$, то есть теми, которые имеют аргумент 0 (mod 2π) или π (mod 2π), причем первые соответствуют положительным, а вторые отрицательным вещественным числам. Условливаются поэтому отождествлять также и запись: впредь число $x+0i$ будет писаться просто x. Аналогично условимся писать yi вместо $0+yi$. Это комплексные числа с аргументом $\frac{\pi}{2}$ (mod 2π) или $-\frac{\pi}{2}$ (mod 2π), в зависимости от того, положительно число y, или отрицательно; эти числа называют *чисто мнимыми*.

Для некоторого комплексного числа $a+ib$ a называется *вещественной частью*, а bi — *мнимой частью*. Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными комплексными числами* (подобно тому, как $a+b\sqrt{c}$ и $a-b\sqrt{c}$ называются сопряженными иррациональностями). Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются вещественными числами (при той несколько вольной терминологии, которую мы только что ввели). Действительно,

$$(a+ib)+(a-ib)=2a+0i=2a;$$

$$(a+ib)(a-ib)=(a^2+b^2)+0i=a^2+b^2.$$

Если $z=a+ib$, то число, сопряженное z, обозначается $\bar{z}=a-ib$.

Аффиксы двух комплексных сопряженных чисел симметричны друг другу по отношению к оси Ou, называющейся *вещественной осью* и которую принимают за ось абсцисс $x'x$; аффиксы их суммы и их произведения также находятся на этой оси. *Чисто мнимая ось* — это ось ординат $y'y$ в точечной модели. Плоскость, в которой точкам отвечают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

4. Возведение в n-ю степень и извлечение корня n-й степени в поле комплексных чисел

а) Степени. Пусть n — натуральное число; n-я степень комплексного числа легко вычисляется в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(*формула Муавра*).

В случае $r=1$ аффиксы M_n последовательных степеней расположены на окружности радиуса 1 с центром в O. Они являются в этом случае вершинами правильной ломаной линии с центральным углом θ. Эта последовательность точек содержит конечное число элементов только в случае, когда существует натуральное p и натуральное n, такие, чтобы было

$$n\theta = 2p\pi, \text{ то есть } \theta = \frac{2p}{n}\pi,$$

иными словами, когда отношение углов, измеряемых числами θ и π, есть рациональное число. Тогда говорят, что θ и π *между собой соизмеримы.* В этом случае последовательность точек периодична и состоит из вершин правильного многоугольника, а *число различных степеней числа z конечно* и равно n (если, разумеется, дробь $\frac{p}{n}$ несократима).

Если модуль r не равен единице, то последовательность степеней всегда бесконечна, так как последовательность степеней модуля есть бесконечная последовательность, возрастающая или убывающая, в зависимости от того, больше ли модуль r чем единица или меньше.

b) Корни степени n. Корни n-й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

даются выражением:

$$u = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Все значения u получаются, если придавать целому числу k такие значения, чтобы новые аргументы все были различными (по модулю 2π). Следовательно, нужно выбрать n значений для k. Обычно берут для k значения:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

или же, в зависимости от четности числа n, берут для

$$n = 2m: -(m-1),\ -(m-2),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ (m-1),\ m,$$

а для

$$n = 2m+1:\ -m,\ -(m-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ (m-1),\ m.$$

Следовательно, всегда имеется n различных корней n-й степени.

c) Двучленное уравнение. Выше сказанное дает решение уравнения, называемого *двучленным уравнением*:

$$z^n = c.$$

1) Один из корней всегда веществен, *если c — вещественное положительное число.* Этот корень обозначается $\sqrt[n]{c}$; так как аргумент числа c равен нулю (по модулю 2π), то другие корни имеют вид:

$$\sqrt[n]{c}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right); \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Если n четно, то существует еще второй вещественный корень, который соответствует значению $k = \frac{n}{2}$, и он равен $-\sqrt[n]{c}$.

2) *Если c — вещественное отрицательное число*, то его аргумент равен $\pi \pmod{2\pi}$. Среди корней

$$\sqrt[n]{-c}\left(\cos\frac{(1+2k)\pi}{n}+i\sin\frac{(1+2k)\pi}{n}\right)$$

один веществен, если n — нечетное число, то есть $n = 2m + 1$. Это тот корень, который соответствует значению $k \equiv m \pmod{n}$. Он равен $-\sqrt[n]{-c}$.

Если n четно, ни один корень не является вещественным числом.

3) *Если c комплексно*, то не может существовать ни одного вещественного корня n-й степени, что очевидно, так как всякая натуральная степень вещественного числа есть также вещественное число.

Основные частные случаи.

$$z^2 = 1 \Rightarrow z' = +1 \text{ и } z'' = -1;$$

$$z^2 = -1 \Rightarrow z' = +i \text{ и } z'' = -i;$$

$$z^2 = i \Rightarrow z' = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ и } z'' = -z';$$

$$z^3 = 1 \Rightarrow z' = 1,\ z'' = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \text{ и}$$

$$z''' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Так как $z''z''' = 1$, то если обозначить через j один из этих мнимых кубичных корней из единицы, то другой равен j^2:

$$z^3 = -1 \Rightarrow z' = -1,\ z'' = -j,\ z''' = -j^2.$$

III. Числовые функции комплексного переменного

Речь идет об отображении $z \longrightarrow Z$ множества комплексных чисел в себя.

Если мы введем в рассмотрение аффиксы чисел z и их образов Z в той же плоскости, то *числовая функция комплексного переменного имеет моделью точечное соответствие в плоскости.*

Примеры.

$Z = z + a$ — параллельный перенос.

$Z = az$ — подобие с центром в 0; оно сводится к гомотетии, если a — действительное число, и к вращению, если модуль числа a равен единице.

$Z = \frac{1}{z}$ — произведение инверсии (с полюсом 0 и степенью 1) и симметрии по отношению к оси.

$Z = \frac{az+b}{a'z+b'}$ Как и для действительных чисел, пишут:

$Z = \frac{a}{a'} + \frac{h}{z+\frac{b'}{a'}}$ — произведение предшествующих преобразований.

Следует отметить, что все эти преобразования сохраняют углы (по значению и знаку). Мы сейчас поймем, почему это так.

А) Топология в комплексной плоскости

Комплексное число z находится в окрестности порядка α (α — действительное положительное число) числа z_0, если

$$|z-z_0|<\alpha,$$

то есть если

$$M_0M<\alpha,$$

где M и M_0 являются аффиксами чисел z и z_0.

Так как модуль $|z-z_0|$ представлен в метрической геометрии расстоянием, то для него имеет место неравенство треугольника:

$$|z_1-z_0|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2-z_0|.$$

В соответствии с этим мы будем говорить, что некоторая функция $Z=f(z)$ стремится к пределу L, когда z стремится к z_0, если $|Z-L|$ стремится к нулю, когда $|z-z_0|$ стремится к нулю. Производная функции $Z=f(z)$ в точке z_0 есть предел, если он существует, выражения $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, когда $|z-z_0|$ стремится к нулю. Однако, спрашивается, какую интерпретацию следует дать этим определениям, которые напрашиваются естественным образом?

Для упрощения и определенности рассмотрим пример.

Пусть дана функция

$$Z=z^2$$

в окрестности точки

$$z_0=2+i,\quad Z_0=(2+i)^2=3+4i.$$

Обозначим m_0, M_0, m, M аффиксы чисел z_0, Z_0,

$$z=x+iy \text{ и } Z=X+iY=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Теперь составляем разность

$$Z-Z_0=z^2-z_0^2=(z-z_0)(z+z_0),$$

откуда

$$\frac{Z-Z_0}{z-z_0}=z+z_0.$$

Заметим, что из $|z-z_0|\to 0$, то есть $m_0m\to 0$, следует:

$$|z|\to|z_0| \text{ и } \arg z\to\arg z_0\,(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

В более общей форме имеем:

$$\lim|z|=|\lim z| \text{ и } \lim(\arg z)=\arg(\lim z),\quad (\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Отсюда следует немедленно, что, когда z стремится к z_0, $Z-Z_0$ стремится к нулю (непрерывность функции) и $\frac{Z-Z_0}{z-z_0}$ имеет предел, равный $2z_0$. Значит, данная функция имеет в точке z_0 производную

$$Z_0' = 2z_0.$$

И н т е р п р е т а ц и я. Пусть геометрическое место точек m — кривая γ, которая проходит через m_0. Ее образ при отображении $z \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow Z$, то есть $m \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow M$,— это кривая Γ, которая проходит через M_0. Предположим, что кривая γ имеет в m_0 касательную t.

Если обозначить, как всегда, через u единичный вектор, направленный по действительной оси $x'x$, то мы имеем:

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{m_0 m}) = \arg(z - z_0) \ \text{ и } \ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{M_0 M}) = \arg(Z - Z_0),$$

откуда

$$(\boldsymbol{m_0 m}, \boldsymbol{M_0 M}) = \arg(Z - Z_0) - \arg(z - z_0) = \arg\frac{Z - Z_0}{z - z_0}.$$

Из предположения существования касательной t следует, что носитель M_0M имеет предельное положение T, касательное к кривой Γ в точке M_0, и такое, что $(t,\ T) = \arg Z_0' \pmod{\pi}$ (или по модулю 2π, если ориентировать касательные по соответствующим направлениям).

В нашем примере $(t,\ T) = \arg(2z_0) = \arg(z_0)$, который в выбранной точке равен:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_0.$$

Значит, какова бы ни была выбранная кривая γ, кривые γ и Γ имеют соответственно в точках m_0 и M_0 касательные, образующие между собой тот же угол $(t,\ T) = \varphi_0$. Отсюда немедленно следует, что если рассмотреть две кривые γ_1 и γ_2, пересекающиеся в точке M_0 под данным углом, то их образы, кривые Γ_1 и Γ_2, пересекаются под тем же ориентированным углом по $\bmod\ \pi$ или даже по $\bmod\ 2\pi$, если рассматривать сходственные направления движения по кривой. Это значит, что *преобразование* $m \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow M$, *модель преобразования* $z \searrow\!\underline{\qquad}\!\nearrow Z$, *сохраняет углы.*

Например, преобразуем с помощью выбранной функции $Z = z^2 = (x + iy)^2$ две перпендикулярные прямые

$$\begin{cases} x = 2; \\ y \text{ произволен} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \text{ произволен}; \\ y = 1. \end{cases}$$

Получается:

$$\Gamma_1 \begin{cases} X = 4 - y^2 \\ Y = 4y \end{cases} \quad \text{— парабола} \quad X = 4 - \frac{Y^2}{16}.$$

$$\Gamma_2 \begin{cases} X = x^2 - 1 \\ Y = 2x \end{cases} \quad \text{— парабола} \quad X = \frac{Y^2}{4} - 1.$$

Угловые коэффициенты, взятые по отношению к оси Y, даются производными X'_y. В рассматриваемой точке находим:

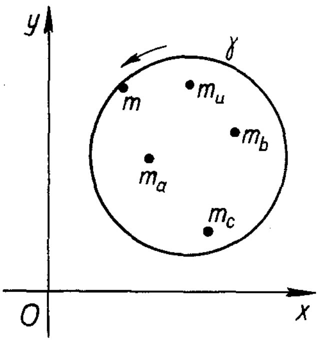
$$-Y/8 = -1/2 \text{ и } +Y/2 = +2.$$

Касательные действительно перпендикулярны; параболы пересекаются под прямым углом, как и данные прямые.

Итак, *сохранение углов связано с существованием производной функции.*

В) Изменение аргумента вдоль замкнутого контура. Основная теорема алгебры (теорема Даламбера)

1. В последующем мы рассматриваем замкнутые кривые γ без двойных точек, получающиеся непрерывной деформацией окружности или овала и которые пробегаются аффиксом m числа z один раз в положительном направлении. Образ M описывает в этих условиях также *замкнутую* кривую, так как в отображении $z \to Z$, которое определяет функция f, число z имеет определенный образ Z. Так как одно и то же число Z может быть образом нескольких чисел z, то замкнутая кривая Γ может иметь кратные точки и даже все ее точки могут быть кратными!



Черт. 41

Например, рассмотрим снова функцию $Z = z^2$. Если γ есть окружность с центром в O и радиусом 2, пробегаемая, как мы сказали, один раз в положительном направлении, то Γ будет окружностью с центром в O и радиусом 4, которая обходится два раза в положительном направлении, так как

$$\arg Z = 2 \arg z;$$

если, например, $\arg z$ возрастает от числа 0 до 2π, то $\arg Z$ возрастает от числа 0 до 4π.

2. Пусть более общим образом мы имеем многочлен

$$Z = a_0 (z-a)^p (z-b)^q \ldots (z-u)^t$$

степени $p + q + \ldots + t = n$, все корни которого явно выделены.

Возьмем в качестве кривой γ *замкнутую кривую* (например, окружность), *которая окружает аффиксы всех корней* a, b, ..., u. В силу равенства:

$$\arg Z = \arg a_0 + p \arg (z-a) + q \arg (z-b) + \ldots + t \arg (z-u)$$

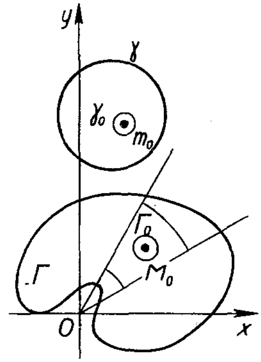
и так как каждый вектор $m_a m$, $m_b m$, ..., $m_n m$ вращается на угол 2π в положительном направлении, то, когда точка M возвратится к своему отправному положению, аргумент числа Z, меняясь непрерывно, увеличится на $(p+q+\ldots+t)\,2\pi = n\cdot 2\pi$.

3. Пусть $Z = f(z)$ — некоторый многочлен и пусть z_0 — *число, не являющееся нулем многочлена*, а γ_0 — кривая, очень близкая к m_0 — аффиксу числа z_0. Точка M_0 не совпадает с точкой O и точка M описывает кривую Γ_0, очень близкую точке M_0. Непрерывность функции f позволяет утверждать, что можно найти такую достаточно малую окрестность $v(m_0)$ точки m_0, чтобы из $\gamma \subset v(m_0)$ следовало, например

$$\frac{1}{2}|Z_0| < |Z| < 2|Z_0|$$

и

$$|\arg Z - \arg Z_0| < \alpha < \pi.$$



Черт. 42

Тогда если точка m описывает кривую γ, то точка M описывает кривую Γ таким образом, что после возвращения к исходной точке исходный аргумент, меняясь по непрерывности, принимает снова исходное значение: значит, изменение аргумента равно нулю.

Теперь, начиная с кривой γ_0, деформируем кривую γ; кривая Γ также деформируется. Изменение аргумента числа Z, равное сначала нулю для Γ_0, сможет стать отличным от нуля, равным, например, числу π или 2π, или -2π, только если Γ пройдет через начало, то есть если γ встретит точку, являющуюся нулем функции f.

Итак, *изменение аргумента числа Z может стать отличным от нуля после возвращения к исходному положению только в случае, если функция $f(z)$ имеет по крайней мере один нуль.* (Мы признаем, что рассуждение нуждалось бы в уточнении: действительно, мы опираемся на непрерывность семейства кривых γ и семейства их образов, то есть кривых Γ, что для нас лишь интуитивно очевидно.)

4. Принимая этот результат, теперь очень просто доказать основную теорему: *любой многочлен имеет по меньшей мере один нуль.* Достаточно проверить, что можно взять такую кривую γ, чтобы число Z претерпело в итоге изменение аргумента. Действительно, многочлен

$$Z = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

может быть записан так:

$$Z = z^n\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right] = z^n Q(z).$$

Следовательно,

$$\arg Z = n \arg z + \arg Q(z).$$

Если γ — окружность, например, с центром в O и достаточно большого радиуса, то $Q(z)$ остается по модулю и аргументу сколь угодно близким к a_0; следовательно, уточняя, как в 3), мы видим, что аргумент числа $Q(z)$ не подвергается изменению. Поэтому аргумент числа Z увеличивается на $n \cdot 2\pi$, что и доказывает *существование по крайней мере одного нуля*.

5. Бесполезно уточнять непосредственно этот результат, показывая, что имеется в точности n корней, что было бы результатом, соответствующим доказанному в 2).

В самом деле, *вся алгебраическая теория многочленов, изложенная в предположении, что коэффициенты—действительные числа, сохраняет силу, если коэффициенты принадлежат полю комплексных чисел.*

В частности, если многочлен имеет нуль a_1, то он делится на $z - a_1$. Пусть поэтому a_1 — нуль многочлена, существование которого утверждается в 4); тогда существует частное степени $n - 1$, скажем, многочлен P_1, такой, что

$$f(z) = (z - a_1) P_1(z).$$

Но $P_1(z)$, являясь многочленом, имеет нуль a_2 (который может, разумеется, оказаться равным числу a_1), откуда следует существование многочлена P_2 степени $n - 2$, такого, что

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) P_2(z) \text{ и т. д.}$$

Наконец, в качестве частного получается постоянная; значит, $f(z)$ имеет n корней, и многочлен представим в форме:

$$f(z) = a_0 (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n).$$

Это **основная теорема алгебры**. *Каждый многочлен степени n имеет n корней, различных или совпадающих, но сосчитанных согласно порядку их кратности вещественных или мнимых.*

Следует отметить, что рассуждения из 3) сохраняют свою силу для многих функций, отличных от многочленов: достаточно, чтобы удовлетворялись необходимые условия непрерывности.

Теорема существования, очевидно, не дает никакой формулы, чтобы выразить на самом деле корни с помощью коэффициентов многочлена.

IV. Обзор приложений комплексных чисел

Кроме теоретического интереса и использования в анализе, комплексные числа являются незаменимым орудием в алгебре, даже тогда, когда нужны результаты в вещественной области, а также в геометрии для объединения теорий, внешне отличных друг от друга; введение этих чисел, кроме того, удобно как средство для решения некоторых геометрических задач.

1) **В алгебре многочленов с вещественными коэффициентами** существенной теоремой является следующая: *если многочлен с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень, то он имеет в качестве корня также число, сопряженное первому.*

В самом деле, если

$$P(z) = P(x+iy) = X(x, y) + iY(x, y)$$

имеет вещественные коэффициенты, то

$$P(x-iy) = X(x, y) - iY(x, y),$$

следовательно,

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(x_0, y_0) = 0, \\ Y(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow P(\bar{z}_0) = 0,$$

где z_0 обозначает комплексное число, сопряженное числу z_0. Многочлен делится тогда на

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - x_0)^2 + y_0^2.$$

Следовательно, *каждый многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение постоянного числа на множители $(x-a)^{\alpha}$, соответствующие действительным корням, и на множители $(x^2+px+q)^{\mu}$, соответствующие комплексно сопряженным корням.*

Пример. $x^4 + 1 = 0$ имеет корни $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$, откуда

$$x^4 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).$$

Комплексные числа послужили лишь промежуточным средством, чтобы получить эти результаты в вещественной области.

2) **В тригонометрии** формула Муавра

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

дает, если развернуть и отделить действительные и мнимые части:

$$n=2. \quad \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta; \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

$$n=3. \quad \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta; \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \end{cases}$$

$$n=4. \quad \begin{cases} \cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta; \\ \sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta \end{cases}$$

и так далее.

Коэффициентами служат числа, которые мы обозначили через $\binom{n}{p}$ (кн. II, ч. 2, гл. I).

3) **В метрической плоской геометрии** вектор может быть представлен комплексным числом. Может случиться, что операции, которые нужно выполнить над этим вектором, хорошо интерпретируются вычислениями с комплексными числами. Так же и в теории электричества, если представить синусоидальную функцию вектором (представление Френеля), то метод, использующий введение комплексных чисел, позволяет подходить к задачам на переменный

ток с помощью формул, аналогичных формулам для постоянного тока.

Мы уже видели, что функция $Z = \frac{az+b}{a'z+b'}$ задает простые преобразования, сохраняющие углы. Следует отметить, что симметрия по отношению к оси, принятой за действительную ось, соответствует отображению:

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy.$$

Этот переход к сопряженному числу меняет направление углов; это отображение не принадлежит, следовательно, к функциям, к которым применимы результаты из гл. VI, § III, 3.

Пример приложения в геометрии. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четыре точки A, B, C, D находились на одной окружности, пишется так:

$$(AC,\ AD) = (BC,\ BD) \pmod{\pi}. \tag{1}$$

Теорема Шаля не может ввести две другие стороны четырехугольника: AB и CD; мы не можем непосредственно вывести из условия (1)

$$(AB,\ AC) = (DB,\ DC) \pmod{\pi}, \tag{2}$$

несмотря на равносильность этих условий.

Интерпретация с помощью комплексных чисел дает легко этот результат.

Обозначим через a, b, c, d числа, для которых данные точки служат аффиксами. Возможность описать окружность вокруг четырехугольника записывается так:

$$\arg\frac{d-a}{c-a} = \arg\frac{d-b}{c-b} \pmod{\pi}, \tag{1}$$

или же, вводя двойное отношение (кн. IV, ч. I, гл. II):

$$\arg\left(\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b}\right) = 0 \pmod{\pi}, \tag{1'}$$

что равносильно утверждению:

$$\lambda = \frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b}, \text{ есть вещественное число.}$$

Мы изменим порядок, в котором взяты четыре числа, образующие двойное отношение, с помощью тождества:

$$(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b) = (c-a)(d-b). \tag{$\mathcal{J}$}$$

Отсюда выводится, что

$$\frac{b-a}{c-a} : \frac{d-b}{d-c} = 1 - \lambda \text{ есть вещественное число,}$$

что и доказывает равенство (2).

Отметим интересный случай, когда одно из этих двойных отношений равно -1; тогда другие равны числам 2, или $^1/_2$; соответствующий четырехугольник называется *гармоничным*; его стоит изучить в качестве упражнения.

Чтобы вывести из предшествующих равенств соотношение между модулями, уточним, что этот четырехугольник, обозначенный $ABCD$, выпуклый. Тогда написанные равенства верны также по модулю 2π. Но написать

$$\arg(d-a)(c-b)=\arg(c-a)(d-b)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

означает, что векторы, изображающие комплексные числа

$$(d-a)(c-b)\ \text{ и }\ (c-a)(d-b),$$

параллельны и одинаково направлены. То же верно для любого из этих векторов и вектора, изображающего числа $(b-a)(d-c)$. Тождество $(\mathcal{J})$ дает тогда, если учесть модули этих параллельных векторов,

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot DB\ \text{(формула Птолемея)}.$$

Согласно неравенству треугольника, если вокруг выпуклого четырехугольника нельзя описать окружность, то будем иметь:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC>AC\cdot DB.$$

4) *В аналитической геометрии* двух или трех измерений приходят к необходимости допускать для координат комплексные значения. Соответствующие точки называются тогда *мнимыми точками*. Например, на плоскости окружность и прямая с уравнениями:

$$x^2+y^2=R^2,\ \ y=mx+p,$$

если они не касаются, то пересекаются в двух точках, которые будут вещественными или мнимыми, в зависимости от того, будет ли иметь вещественные или мнимые корни уравнение для абсцисс точек пересечения

$$(1+m^2)x^2+2mpx+p^2-R^2=0.$$

Рассматривают также *мнимые кривые*, в частности, окружности с действительным центром, но с чисто мнимым радиусом. Тогда, например, любой пучок окружностей имеет две основные базисные точки и две предельные точки *.

Определение расстояния между двумя точками сохраняют на плоскости $OM^2=x^2+y^2$, но две различные точки могут иметь и нулевое расстояние, например, точка с координатами $x=a$, $y=ia$ находится на нулевом расстоянии от начала, так как $x^2+y^2=0$.

Такие результаты парадоксального вида показывают, что нужны некоторые предосторожности при использовании этого метода, введенного в основном геометром Понселе. Однако теория алгебраических кривых без этого метода обходиться не может.

* Речь идет о двух собственных точках, общих всем окружностям пучка, и о двух нулевых окружностях пучка.— *Прим. ред.*

ГЕОМЕТРИИ

Геометрия изучает некоторое множество элементов, называемых точками, и некоторые подмножества этого множества: прямые, плоскости или, вообще фигуры. Вводятся некоторые операции, применяемые к элементам; они позволяют определить отображения одного подмножества на другое (например, точечные преобразования.) Это означает, что *геометрия* может рассматриваться как *модель некоторой алгебры*, к которой нужно присоединить *некоторую топологию*, вводящую понятия непрерывности. Таким образом, мы рассматриваем науку о пространстве алгебраизованной не только потому, что геометрию можно свести к числовым расчетам (как в аналитической геометрии).

Однако, после того как собраны воедино свойства некоторых основных фигур и некоторых отображений пространства на себя, оказывается возможным проводить синтетические рассуждения, опирающиеся на наглядные представления физического пространства, и вновь получить, таким образом, свойственную традиционной геометрии Евклида манеру мышления.

Если использовать эти же самые соображения, но исходить из других *аксиоматических основ*, то *можно прийти к построению* различных геометрий; мы введем те из них, которые очень близки к евклидовой геометрии.

Рассуждения так называемого «геометрического» типа могут быть охарактеризованы следующим образом: объектом геометрического исследования является слишком богатая ситуация, чтобы можно было выявить все предполагаемые здесь свойства. В каждый момент нужно выбирать те свойства, которые приводят к комбинациям, уже испытанным в качестве дающих известные и полезные выводы.

Вместо символики некоторой системы уравнений, подлежащей преобразованию, используют более или менее сложные схемы, где каждое умозаключение равнозначно многочисленным алгебраическим операциям, выполненным в теории раз и навсегда. Каждое из этих умозаключений называется *теоремой*, это в некотором роде камень, отесанный заранее и готовый служить для постройки здания. Но особенный интерес имеют соединения таких камней: геометрия использует эти теоремы для исследования *геометрических проблем*. Из них-то и извлекаются теоремы более сложные, чем первые, и которые приводят к новым проблемам. Так геометрия обогащается до бесконечности и развертывается в самостоятельную науку, красота которой известна.

Замечание. Нарисованные на самом деле фигуры необходимы лишь в частных случаях, в которых их действительно нужно рассматривать. Мы будем чаще всего изучать только очень общие подмножества, обладающие простыми структурами, так что рисунки будут отсутствовать. Однако читателю будет очень часто полезно начертить некоторые наброски, чтобы следить за обозначениями.

Первая часть

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Первая глава

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Мы ввели в главе III, книги I, с одной стороны, векторное пространство какого-либо числа измерений, а с другой стороны, его точечный образ, который мы сейчас будем называть «пространством». Этот образ определяется, когда дана начальная точка O и базис $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ векторного пространства. Например, в плоской геометрии *репер* (*система координат*) будет обозначаться так: O; $\{u, v\}$.

В геометрии пространства (подразумевается трех измерений) репер будет такой:

$$O;\ \{u,\ v,\ w\}.$$

В аффинной геометрии мы вводим в векторном пространстве только две операции, характеризующие структуру пространства: сложение и умножение на число, которое мы будем всегда предполагать вещественным (речь, следовательно, идет о вещественной аффинной геометрии).

§ 1. Основные фигуры*

I. Геометрия плоскости (геометрия двух измерений)

Репер O; $\{u, v\}$ предполагается заданным. Мы видели, что некоторый вектор U векторного пространства задается однозначно своими координатами x, y:

$$U = xu + yv,$$

а некоторая точка M, имеющая координаты x, y, задается так:

$$OM = U.$$

А) **Векторное пространство** ориентировано: пара $\{U, V\}$, определенная равенствами

$$U = xu + yv, \quad V = x'u + y'v,$$

* В отечественной литературе (особенно по проективной геометрии) чаще употребляется термин «конфигурация», которым мы также будем пользоваться. — *Прим. ред.*

составляет базис, если число $\delta = xy' - yx'$ отлично от нуля, причем знак числа δ показывает, имеет ли пара $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ положительную ориентацию (то есть ту же ориентацию, что и пара $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$) или же отрицательную. Так, например,

$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ и $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}\}$ имеют противоположные ориентации;

$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ и $\{-\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}\}$ имеют ту же ориентацию;

$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ и $\{-\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$, как и $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ и $\{\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}\}$, имеют противоположные ориентации.

B) **Прямая.** Напоминаем, что если дана некоторая точка A и некоторый вектор $\boldsymbol{U}$ (не нулевой), то прямая определяется, как множество точек $\boldsymbol{M}$, удовлетворяющих равенству

$$\boldsymbol{AM} = m\boldsymbol{U},$$

где m пробегает множество $\mathscr{R}$ вещественных чисел.

$\boldsymbol{U}$ называется *направляющим вектором* прямой. Из определения следует, что каждая прямая инвариантна в целом: относительно любого параллельного переноса, заданного вектором $a\boldsymbol{U}$, каково бы ни было число a:

$$\forall m, \quad m \longrightarrow m + a;$$

относительно любой гомотетии, центром которой является одна из точек прямой:

$$\forall m, \quad m \longrightarrow k\,(m - a);$$

относительно любой инверсии, полюсом которой является одна из точек прямой:

$$\forall m, \quad m \longrightarrow \frac{k}{m-a},$$

и вообще по отношению к любому дробно-линейному преобразованию над полем $\mathscr{R}$:

$$\forall m, \quad m \longrightarrow \frac{km+h}{k'm+h'}.$$

Имеет место:

Теорема. *Каждая прямая делит плоскость на две области.*

Присоединим к направляющему вектору $\boldsymbol{U}$ данной прямой другой вектор $\boldsymbol{V}$, не параллельный первому. Плоскость — это множество точек M, определенных равенством $\boldsymbol{AM} = x\boldsymbol{U} + y\boldsymbol{V}$.

Две точки M_1 и M_2, не расположенные на данной прямой, называются принадлежащими *одной и той же области*, если числа y_1 и y_2 *имеют один и тот же знак*. Это является отношением эквивалентности. Можно проверить, что определенное таким образом разбиение на области не зависит ни от точки A, выбранной на прямой, ни от направляющего вектора на той же прямой. Таким образом получено *разбиение* плоскости *на части*: две области без общих точек и сама прямая (разбиение на три подмножества).

Выпуклость каждой из областей. *Нужно показать, что если две точки находятся в одной из этих областей, то отрезок, их соединяющий, принадлежит этой же области.* Действительно, пусть

$$\boldsymbol{AM}_1 = x_1\boldsymbol{U} + y_1\boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{AM}_2 = x_2\boldsymbol{U} + y_2\boldsymbol{V},$$

где числа y_1 и y_2 одного и того же знака. Отрезок M_1M_2 — это геометрическое место точек M, таких, что

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1,$$

откуда

$$\boldsymbol{AM} = [(1-m)\,x_1 + mx_2]\,\boldsymbol{U} + [(1-m)\,y_1 + my_2]\,\boldsymbol{V},$$

и коэффициент вектора $\boldsymbol{V}$ имеет, действительно, тот же знак, что и каждое из чисел y_1 и y_2. Наоборот, если M_1 и M_2 находятся в различных областях, то есть если y_1 и y_2 имеют различные знаки, то точка M_0, соответствующая равенству

$$(1-m)\,y_1 + my_2 = 0,$$

то есть числу $m_0 = \frac{y_1}{y_1 - y_2}$, является общей точкой отрезка M_1M_2 и заданной прямой. Пусть, например, $y_2 < 0 < y_1$; тогда две полупрямые, которые соответствуют значениям $m < m_0$, с одной стороны, и значениям $m > m_0$ — с другой, расположены в различных областях.

Таким образом, мы видим, что любая прямая, не параллельная заданной, содержит в каждой области по полупрямой.

Прямая в аналитической геометрии. Пусть дан некоторый базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ в плоскости и точка O — начало координат. Прямая — это геометрическое место точек $M\ (x, y)$, таких, что если x_0, y_0 — координаты точки A и если

$$\boldsymbol{U} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v},$$

то

$$(x - x_0)\,\boldsymbol{u} + (y - y_0)\,\boldsymbol{v} = m\,(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}).$$

Уравнение прямой получается, следовательно, исключением числа m из уравнений:

$$\begin{cases} x - x_0 = ma; \\ y - y_0 = mb, \end{cases}$$

так что получается

$$b\,(x - x_0) - a\,(y - y_0) = 0.$$

Обратно, всякое уравнение $ux + vy + w = 0$ представляет прямую, если числа u и v не равны оба нулю: в самом деле, можно будет взять $a = -v$, $b = u$, а в качестве x_0, y_0 любую пару чисел, удовлетворяющих равенству $ux_0 + vy_0 + w = 0$.

C) **Основные фигуры**

1) П а р а л л е л о г р а м м. Перестановка средних точек в равенстве векторов, определенных своими концами:

$$[\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CD}]\Leftrightarrow[\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BD}].$$

Центр параллелограмма:

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CD};\\ \boldsymbol{AO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{AD};\end{array}\right.\Leftrightarrow\boldsymbol{BO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC}.$$

2) **Конфигурация Фалеса.** Если

$$\boldsymbol{OA}'=k\boldsymbol{OA}$$

и если B и B' — две другие точки, то

$$[\boldsymbol{OB}'=k\boldsymbol{OB}]\Leftrightarrow[\boldsymbol{A'B'}=k\boldsymbol{AB}].$$

D) **Приложения**

1) **Аффинная конфигурация Дезарга** (или гомотетичные треугольники). Пусть три прямые a, b, c проходят соответственно через пары точек A, A'; B, B'; C, C', таких, что AB, $A'B'$, так же, как и BC, $B'C'$, соответственно параллельны, то есть

$$\exists k:\boldsymbol{A'B'}=k\boldsymbol{AB}\text{ и }\exists h:\boldsymbol{B'C'}=h\boldsymbol{BC}.$$

Докажем теорему:
[a, b, c пересекаются в одной точке] $\Leftrightarrow$ [$A'C'$ и AC параллельны]. Действительно, если a и b пересекаются в точке O, то теорема Фалеса дает

$$\boldsymbol{OA}'=k\boldsymbol{OA},\quad\boldsymbol{OB}'=k\boldsymbol{OB},$$

значит,

$$\boldsymbol{OC}'=h\boldsymbol{OC}+(k-h)\,\boldsymbol{OB}\,^*$$

и

$$\boldsymbol{A'C'}=h\boldsymbol{OC}+(k-h)\,\boldsymbol{OB}-k\boldsymbol{OA}=k\boldsymbol{AC}-(k-h)\,\boldsymbol{BC}\,^{**}.$$

Значит, одно и то же условие $k=h$ выражает как коллинеарность точек O, C, C', так и параллелизм прямых $A'C'$ и AC.

Если прямые a и b параллельны, то фигура Фалеса заменяется параллелограммом. Доказательство требует, чтобы прямые a, b, c были различными, так же как и прямые AB и BC. В особых случаях, когда это не имеет места, теорема теряет силу.

2) **Аффинная конфигурация Паскаля.** Две прямые δ и δ' содержат соответственно по три точки A, B, C и A', B', C'.

Докажем теорему:

$$[AB'\parallel A'B\text{ и }BC'\parallel B'C]\Rightarrow A'C\parallel AC'$$

(символ $\parallel$ означает параллельность).

---

* Из $\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OB}'+\boldsymbol{B'C'}=k\boldsymbol{OB}+h\boldsymbol{BC}=k\boldsymbol{OB}+h(\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OB})$.— *Прим. ред.*
** Из $\boldsymbol{A'C'}=\boldsymbol{OC}'-\boldsymbol{OA}'$ и $\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{BC}$.— *Прим. ред.*

Пусть, в самом деле, O — общая точка прямых δ и δ', а $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{U}'$ — направляющие векторы этих прямых. Вследствие коллинеарности имеем:

$$\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{OB} = b\boldsymbol{U}, \quad \boldsymbol{OC} = c\boldsymbol{U};$$

$$\boldsymbol{OA}' = a'\boldsymbol{U}', \ \boldsymbol{OB}' = b'\boldsymbol{U}', \ \boldsymbol{OC}' = c'\boldsymbol{U}'.$$

Оба предположения о параллелизме выражаются равенствами:

$$aa' = bb' \text{ и } bb' = cc'.$$

Отсюда вытекает

$$aa' = cc',$$

что и выражает заключение теоремы *.

(В главе II мы познакомимся с проективными фигурами Дезарга и Паскаля.)

II. Геометрия трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$

Репером служит O; $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. Мы видели, что существует возможность ориентировать базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ с помощью знака некоторого выражения Δ, образованного из компонент базисных векторов. В наших геометрических исследованиях мы будем использовать следствия ориентации, которые проверяются вычислением, в частности:

1) $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$ меняет ориентацию, если переставить между собой какие-либо два вектора; так, например,

$$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}; \ \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}\}; \ \{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$$

имеют одну и ту же ориентацию, противоположную ориентации троек:

$$\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}\}; \ \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}\}; \ \{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}\}.$$

2) $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}; \{-\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}; \{-\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, -\boldsymbol{W}\}$ и $\{\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}, -\boldsymbol{W}\}$

имеют одну и ту же ориентацию, противоположную ориентации троек:

$\{-\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$; $\{\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$; $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, -\boldsymbol{W}\}$ и $\{-\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{V}, -\boldsymbol{W}\}$.

3) Если $\boldsymbol{Z}$ — вектор, заданный по отношению к базису $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$ своими координатами a, b, c:

$$\boldsymbol{Z} = a\boldsymbol{U} + b\boldsymbol{V} + c\boldsymbol{W},$$

то $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{Z}\}$ имеет ту же ориентацию, что и $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$, если c — положительное число.

---

* Данное доказательство теряет силу, если прямые δ и δ' параллельны, однако теорема остается справедливой. В этом случае ее доказательство вытекает из последовательного рассмотрения трех параллелограммов $ABA'B'$, $BCB'C'$, $ACA'C'$, причем третий четырехугольник является параллелограммом, поскольку две его стороны AC и $C'A'$ равны и параллельны.— *Прим. ред.*

Три вектора $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ называются *компланарными*, если существуют числа m и p, такие, что $\boldsymbol{W} = m\boldsymbol{U} + p\boldsymbol{V}$ *.

Плоскость задается точкой A и парой $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$; это множество точек M, таких, что вектор $\boldsymbol{AM}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$.

Любая плоскость — геометрическое место точек M, для которых $\boldsymbol{AM} = m\boldsymbol{U} + p\boldsymbol{V}$, где m и p пробегают множество вещественных чисел, делит пространство на две выпуклые области, которые различают с помощью вектора $\boldsymbol{W}$, дополняющего базис $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ плоскости. Если некоторая пара $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ из базиса $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\}$ компланарна с парой $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$, то эта пара имеет ту же ориентацию, что и $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$, если компонента вектора $\boldsymbol{Z}$ по вектору $\boldsymbol{W}$ положительна; в этом случае говорят, что $\boldsymbol{Z}$ находится с той же стороны плоскости, что и $\boldsymbol{W}$. Исходя из этих замечаний, можно сравнить ориентацию двух каких-либо базисов $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\}$ и $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$ следующим образом. Вводят, например, некоторый вектор $\boldsymbol{K}$, компланарный парам $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$ и $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$, и другой вектор $\boldsymbol{L}$, компланарный парам $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$ и $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$. Таким образом сравнивают последовательно ориентации троек $\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$; $\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$; $\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{W}\}$; $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{W}\}$ и $\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\}$. Основными фигурами являются *параллелепипед и фигура Фалеса*, откуда получается аффинная фигура Дезарга, в которой плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны.

Теорема Фалеса в пространстве R^3.

Если шесть точек A, B, C и A', B', C' расположены по три соответственно на двух не компланарных прямых, то

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \Leftrightarrow [\boldsymbol{AA'},\ \boldsymbol{BB'},\ \boldsymbol{CC'}\ \text{компланарны}].$$

Действительно, по предположению

$$\exists k,\ k':\ \boldsymbol{AC} = k\boldsymbol{AB} \text{ и } \boldsymbol{A'C'} = k'\boldsymbol{A'B'},$$

откуда

$$\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{A'C'} = k\boldsymbol{AB} - k'\boldsymbol{A'B'} = k(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{A'B'}) + (k - k')\boldsymbol{A'B'},$$

то есть

$$\boldsymbol{AA'} - \boldsymbol{CC'} = k(\boldsymbol{AA'} - \boldsymbol{BB'}) + (k - k')\boldsymbol{A'B'}\ ^{**},$$

откуда

$$\boldsymbol{CC'} = (1 - k)\boldsymbol{AA'} + k\boldsymbol{BB'} - (k - k')\boldsymbol{A'B'}.$$

Но $\boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{BB'}$, $\boldsymbol{A'B'}$ образуют базис, следовательно,

$$[k = k'] \Leftrightarrow [\exists\lambda,\ \mu : \boldsymbol{CC'} = \lambda\boldsymbol{AA'} + \mu\boldsymbol{BB'}],$$

что и доказывает теорему.

---

* Здесь и ниже автор предполагает, что векторы U, V образуют базис, то есть линейно независимы. В самом общем случае три вектора называются компланарными, если они линейно зависимы, то есть $m\ U + p\ V + q\ \boldsymbol{W} = 0$, где хотя бы одно из чисел m, p, q отлично от нуля. Компланарные в этом смысле векторы могут оказаться коллинеарными или даже нуль-векторами.— *Прим. ред.*

** Из замыкания ломаной $\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CC'} + \boldsymbol{C'A} + \boldsymbol{A'A} = 0$ и аналогично $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BB'} + \boldsymbol{B'A'} + \boldsymbol{A'A} = 0$.— *Прим. ред.*

III. Теория центра тяжести (барицентра)*

Мы сейчас обобщим (в пространстве любого числа измерений) некоторые хорошо известные формулы.

1) Пусть A, B — пара точек. Середина G отрезка, их соединяющего, удовлетворяет равенству:

$$\mathbf{GA}+\mathbf{GB}=0,$$

так что, какова бы ни была точка O,

$$\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=2\mathbf{OG}.$$

Если даны три точки A, B, C, то можно определить точку G, такую, что

$$\mathbf{GA}+\mathbf{GB}+\mathbf{GC}=0.$$

Действительно, это условие можно записать так:

$$\mathbf{AG}=\mathbf{GB}+\mathbf{GC}=2\mathbf{GA}',$$

где A' — середина отрезка BC, так что

$$\mathbf{AG}=\frac{2}{3}\mathbf{AA}'.$$

Но, так как исходное равенство симметрично относительно A, B, C, мы будем иметь также:

$$\mathbf{BG}=\frac{2}{3}\mathbf{BB}' \text{ и } \mathbf{CG}=\frac{2}{3}\mathbf{CC}'.$$

Отсюда предложение: *в любом треугольнике медианы пересекаются в точке, расположенной, считая от вершины, на расстоянии, равном $^2/_3$ медианы.*

Кроме того, если O — некоторая точка пространства, то

$$\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC}=3\mathbf{OG},\ \forall \mathbf{O}.$$

Мы сейчас это обобщим.

2) *Рассмотрим n точек A_1, A_2, ..., A_n.* Существует *точка G, такая, что*

$$\mathbf{GA}_1+\mathbf{GA}_2+\ldots+\mathbf{GA}_n=\mathbf{O},$$

и, какова бы ни была точка O,

$$\mathbf{OA}_1+\mathbf{OA}_2+\ldots+\mathbf{OA}_n=n\mathbf{OG}.$$

Доказательство проводится рекуррентно. Пусть g — такая точка, что

$$\mathbf{gA}_1+\mathbf{gA}_2+\ldots+\mathbf{gA}_{n-1}=\mathbf{O}.$$

---

* Более подробно о центре тяжести и приложениях этого понятия см. в книге М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, М., 1959, стр. 230.— *Прим. ред.*

Эта точка предполагается уже определенной. Тогда точка G определяется по формуле Шаля следующим образом:

$$A_nG=(n-1)\,\mathbf{Gg}\,^*,\ \text{откуда}$$
$$[\mathbf{OA}_1+\ldots+\mathbf{OA}_{n-1}=(n-1)\,\mathbf{Og}]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\mathbf{OA}_1+\ldots+\mathbf{OA}_{n-1}+\mathbf{OA}_n=n\mathbf{OG}]$$

(прямое доказательство дается дальше для более общего предложения).

Точка G, которую мы только что определили, называется *центром тяжести* или *барицентром n точек, которым приписаны равные коэффициенты* (или же *центром средних расстояний*, согласно терминологии, которая теперь не является распространенной).

3) *Общая теорема о центре тяжести*

Обозначим буквой i целое число, которое может принимать значения $1, 2, 3, \ldots, n$, а буквой u_i — число или же вектор, зависящий от i. Мы будем обозначать символически Σu_i сумму алгебраическую или геометрическую: $u_1+u_2+\ldots+u_n$.

Пусть теперь $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n точек, которым приписаны соответственно коэффициенты $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Мы желаем доказать, что существует точка G, такая, что

$$\Sigma\,(m_i\mathbf{GA}_i)=\mathbf{O}, \tag{1}$$

если только $\Sigma m_i\neq \mathbf{O}$, и что, какова бы ни была точка O, эта точка G удовлетворяет равенству:

$$(\Sigma m_i)\,\mathbf{OG}=\Sigma\,(m_i\mathbf{OA}_i). \tag{2}$$

Для этого мы докажем сначала, что точка G, определенная равенством (2), не зависит от точки O. Этого будет достаточно, так как, определив точку G с помощью специального выбора точки O, можно будет затем поместить точку O в G, чем и докажется равенство (1), ибо левая часть равенства (2) обратится тогда в нуль.

Пусть поэтому O и O' — две какие-либо точки. В правой части соотношения (2), которое определяет точку G, когда точка O выбрана, заменим $\mathbf{OA}_i$ через $\mathbf{OO'}+\mathbf{O'A}_i$. Тогда это выражение получит следующий вид:

$$(\Sigma m_i)\,\mathbf{OO'}+\Sigma\,(m_i\mathbf{O'A}_i),$$

---

* Из требования $\mathbf{GA}_1+\ldots+\mathbf{GA}_{n-1}+\mathbf{GA}_n=0$ находим:

$$A_n\mathbf{G}=\mathbf{GA}_1+\ldots+\mathbf{GA}_{n-1}.$$

Но в соответствии со свойствами точки g получаем:

$$\mathbf{GA}_1+\ldots+\mathbf{GA}_{n-1}=(n-1)\,\mathbf{Gg},$$

что и дает приведенное в тексте соотношение, позволяющее определить положение G:

$$\mathbf{A_nG}=\frac{n-1}{n}\,\mathbf{A_ng}.\text{— \textit{Прим. ред.}}$$

так что та же самая точка G удовлетворяет также равенству:

$$(\Sigma m_i)\, \boldsymbol{O'G} = \Sigma\, (m_i \boldsymbol{O'A_i}).$$

В случае когда $\Sigma m_i = 0$, точка G больше не существует, и доказательство показывает, что $\boldsymbol{S} = \Sigma(m_i \cdot \boldsymbol{OA_i})$ — вектор, не зависящий от точки O. Точка G, когда она существует, называется *центром тяжести* (*или барицентром*) *точек* A_i, *которым приписаны коэффициенты* m_i.

Коммутативность. Точка G, очевидно, не зависит от порядка точек, если только каждая точка сохраняет свой коэффициент.

Ассоциативность. Разобьем все точки на два класса, оставляя для каждой ее коэффициент. Пусть точка g — центр тяжести p первых точек, а точка g' — центр тяжести остальных $n-p$ точек. Немедленно видим, что точка G есть центр тяжести точки g, которой приписывается коэффициент $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$, и точки g', которой приписывается коэффициент $m_{p+1} + \ldots + m_n$.

Приложения. В статике все коэффициенты m_i положительны и пропорциональны массам соответствующих точек. При этом истолковании случай невозможности существования центра тяжести не может представиться.

Примеры геометрических приложений. **Теорема Чевы.** Выведем условие для того, чтобы три точки A', B', C', расположенные соответственно на сторонах BC, CA, AB некоторого треугольника, были такими, чтобы прямые AA', BB', CC' пересекались в одной точке.

Заметим, что *если прямые AA', BB', CC' пересекаются в некоторой точке G, то можно приписать точкам A, B, C такие коэффициенты* α, β, γ, *чтобы точка G являлась центром тяжести системы.*

Действительно, согласно теореме об ассоциативности, если такие коэффициенты существуют, то точка A' должна быть центром тяжести точек B и C и аналогично точка B' должна быть центром тяжести точек A и C. То, что точка пересечения прямых AA' и BB' является центром тяжести системы, обеспечивается равенствами:

$$\beta\overline{A'B} + \gamma\overline{A'C} = 0, \quad \gamma\overline{B'C} + \alpha\overline{B'A} = 0,$$

что определяет числа α, β, γ с точностью до общего произвольного множителя:

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}.$$

То, что барицентр находится также на прямой CC', выражается условием:

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}.$$

Условие совместности этих равенств таково:

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}=-1.$$

Это соотношение, которое необходимо и достаточно для того, чтобы прямые AA', BB', CC' пересекались в одной точке, называется *соотношением Чевы*. Можно провести аналогичное исследование в R^3, относящееся к граням и ребрам тетраэдра.

§ 2. Аффинные точечные преобразования

Мы изучили ранее (кн. I, гл. IV) общие соображения и основные определения, относящиеся к точечным преобразованиям. Здесь мы рассмотрим такие отображения точечного пространства на себя, которые определяются с помощью двух операций, характеризующих векторное пространство: сложение векторов и их умножение на число.

I. Общее аффинное преобразование

1. Определение. Если даны две системы координат в точечном пространстве, то каждой точке M, определенной по отношению к первой системе, мы поставим в соответствие точку M', имеющую относительно второй системы те же координаты, которые точка M имеет в первой.

Например, в трехмерном пространстве $\forall\, M$

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}+z\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{O'M'}=x\boldsymbol{u}'+y\boldsymbol{v}'+z\boldsymbol{w}'.$$

Отсюда вытекает, что *начала O и O' соответствуют друг другу, равно как и соответствующие векторы обоих базисов. Аффинное точечное соответствие определено парой соответствующих друг другу точек O, O' и преобразованием векторного пространства в себя*:

$$\boldsymbol{u}\searrow\!\!\longrightarrow\!\!\nearrow\boldsymbol{u}',\quad \boldsymbol{v}\searrow\!\!\longrightarrow\!\!\nearrow\boldsymbol{v}',\quad \boldsymbol{w}\searrow\!\!\longrightarrow\!\!\nearrow\boldsymbol{w}',$$

которое называется *линейным преобразованием*. Точечно аффинное преобразование в n-мерном пространстве определяется заданием $n+1$ точек O, A_1, A_2, . . ., A_n и их образов, если только система векторов $\boldsymbol{OA}_1$, $\boldsymbol{OA}_2$, . . ., $\boldsymbol{OA}_n$ и система их образов образуют, каждая, базис. Обратное преобразование (ибо соответствие взаимно однозначно) определено согласно формулам преобразования системы координат. Таким образом, на плоскости соответствие определено тремя парами точек, не лежащих на одной прямой, а в пространстве четырьмя парами точек, не лежащих в одной плоскости *.

* То есть ни первая, ни вторая тройка точек не лежит на одной прямой; ни первая, ни вторая четверка точек не лежит в одной плоскости.— *Прим. ред.*

2. Произведение аффинных преобразований. Согласно самому определению, произведение некоторого числа аффинных преобразований снова есть аффинное преобразование, если допускать тождественное преобразование, определенное двумя совпадающими системами координат. Это преобразование является нейтральным элементом произведения преобразований. Так как имеет место ассоциативность и существует обратное преобразование для любого преобразования, то мы приходим к заключению, что *множество аффинных преобразований некоторого точечного пространства в себя образует группу*.

Следовательно, трансформирование одного аффинного преобразования другим дает преобразование, также принадлежащее группе.

3. Инварианты. Какие свойства некоторого подмножества F точек пространства сохраняются при любом аффинном преобразовании? Очевидно, те, которые выражаются только лишь через координаты точек: таковыми являются, как это замечается немедленно, *условие параллелизма* двух векторов, *эквивалентность* двух векторов и более общий случай *отношение двух коллинеарных векторов*. Следовательно, условие расположения на одной прямой сохраняется, *образ прямой есть прямая* и *образ отрезка* (ориентированного или нет) *есть отрезок* (со сходственной ориентацией). То же самое имеет место для *плоскости*, *параллелограмма* или *параллелепипеда*, или же для фигур Фалеса, Дезарга или Паскаля. *Точка, соответствующая центру тяжести точек с данными приписанными им коэффициентами, является центром тяжести образов этих точек, которым приписаны те же коэффициенты.*

Обратное предложение. *Любое взаимно однозначное точечное преобразование точечного пространства в себя, которое сохраняет параллелизм и отношение параллельных векторов, есть аффинное преобразование.*

Проведем, например, рассуждение в трехмерном пространстве. Пусть мы имеем четыре некомпланарные точки O', A', B', C' во множестве образов; их прообразы O, A, B, C также не компланарны, ибо если бы прямая OA пересекала прямую BC в точке D, то образ D' этой точки должен был бы быть общей точкой прямых $O'A$ и $B'C'$, что исключено. Прямая OA также не может быть параллельной прямой BC. Значит, этими парами точек определено некоторое аффинное преобразование. Но тогда это преобразование совпадает с заданным, ибо оба эти преобразования сохраняют операцию нахождения центра тяжести, а каждую точку M можно определить как центр тяжести точек O, A, B, C, которым приписаны подходящие коэффициенты.

Замечание. Основное предложение, которое мы только что сформулировали, заключает избыточные предположения. Доказательство использовало лишь сохранение расположения на прямых, проходящих через точки O, A, B, C, и сохранение отношения отрезков, расположенных на таких прямых.

4. Точка зрения аналитической геометрии будет рассмотрена в § 3. Она приводит к матрицам.

II. Частные случаи аффинных преобразований

А) **Параллельный перенос**

Начала O и O' различны, но базис векторного пространства сохраняется.

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} \text{ дает } \boldsymbol{O'M'} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}.$$

Значит,

$$\forall M, \ \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{O'M'}, \tag{1}$$

что, после перестановки средних, эквивалентно утверждению:

$$\forall M, \ \boldsymbol{MM'} = \boldsymbol{OO'}. \tag{2}$$

Заданный вектор $\boldsymbol{OO'} = \boldsymbol{V}$ называется *вектором переноса*. Этого вектора достаточно, чтобы определить параллельный перенос, согласно теореме:

Если дан вектор $\boldsymbol{V}$, то соотношение

$$\forall M, \ \boldsymbol{MM'} = \boldsymbol{V} \tag{3}$$

определяет параллельный перенос, то есть точечное преобразование, оставляющее инвариантным базис векторного пространства. В самом деле, достаточно применить преобразование в какой-либо выбранной системе координат, заметив, что равенство (3) дает равенство (1).

Теорема. *При параллельном переносе образ любого вектора — это вектор, эквиполентный* (равнопараллельный) *первому.*

В самом деле, применяя (3) к точкам M и P, находим, переставляя средние:

$$\forall M, \ \forall P, \ \boldsymbol{MP} = \boldsymbol{M'P'}.$$

Обратное предложение. *Если даны две пары соответствующих точек AA' и BB', для которых $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A'B'}$, то соответствие, определенное следующим образом:*

$$\forall M, \ \boldsymbol{A'M'} \parallel \boldsymbol{AM} \text{ и } \boldsymbol{B'M'} \parallel \boldsymbol{BM},$$

является параллельным переносом.

Действительно, это преобразование ставит в соответствие *каждой точке M_0, не расположенной на прямой AB*, образ, который совпадает с образом этой точки в параллельном переносе с вектором $\boldsymbol{AA'} = \boldsymbol{BB'}$. Чтобы иметь возможность сделать заключение, относящееся и к точкам, расположенным на прямой $\boldsymbol{AB}$, нужно дополнительное предположение: либо условие непрерывности в окрестности этой прямой, либо условие сохранения отношений расстояний для точек, расположенных на прямых $AB = A'B'$.

Предположения были бы достаточными без всяких исключений, если бы они относились не к двум, а к трем точкам A, B, C, не лежащим на одной прямой.

Произведение параллельных переносов. Мы рассматриваем тождественное преобразование как параллельный перенос на нулевой вектор. Тогда *параллельные переносы некоторого точечного пространства в себя образуют группу* относительно умножения преобразований.

Произведение нескольких параллельных переносов — это параллельный перенос, вектор которого равен сумме векторов составляющих переносов; следовательно, имеет место *коммутативность*. Заметим, что из группы параллельных переносов трехмерного пространства можно выделить подгруппу переносов на векторы, параллельные данной плоскости; тогда любая плоскость, параллельная этой плоскости, инвариантна в целом и подвергается переносу, который называется *ограничением данного переноса на этой плоскости*. Аналогично можно рассматривать подгруппу параллельных переносов, характеризуемых векторами, параллельными заданному направлению, и ее ограничение на прямой этого направления.

Точка зрения аналитической геометрии. Если система координат выбрана, то параллельный перенос определен следующими равенствами:

$$M(x,\ y,\ z) \longrightarrow M'(x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c).$$

В) **Гомотетия**

Гомотетией называется аффинное преобразование, получаемое путем умножения векторов данного базиса $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ *на одно и то же действительное число.*

Так, в трехмерном пространстве

$$O;\ \{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\} \longrightarrow O';\ \{\boldsymbol{u}'=k\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}'=k\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}'=k\boldsymbol{w}\}.$$

Иначе говоря,

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}+z\boldsymbol{w} \text{ дает } \boldsymbol{O'M'}=k(x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}+z\boldsymbol{w});$$

итак,

$$\forall M,\ \boldsymbol{O'M'}=k\boldsymbol{OM} \qquad (1)$$

является соотношением, определяющим гомотетию.

Число k, называющееся *коэффициентом гомотетии*, должно предполагаться отличным от нуля. Если это число равно единице, то преобразование является параллельным переносом. Таким образом, *параллельный перенос — это гомотетия с коэффициентом единица.*

Основная теорема. *Всякая гомотетия с коэффициентом, отличным от единицы, имеет одну инвариантную точку.*

В самом деле, если O и O' различные точки, то на прямой OO' существует точка C, определенная уравнением:

$$\boldsymbol{CO'}=k\boldsymbol{CO}, \qquad (2)$$

то есть

$$(1-k)\,\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OO'}.$$

Из равенств (1) и (2) следует:

$$\forall M,\ \boldsymbol{CM'}=k\boldsymbol{CM}, \tag{3}$$

что и доказывает инвариантность точки C.

Эта точка C называется центром *гомотетии*. Это единственная инвариантная точка, согласно равенству (3), так как $k \neq 1$.

О б р а т н о, *если даны инвариантная точка C и число $k \neq 0$, то преобразование, определенное равенством* (3), *является гомотетией.*

Для доказательства достаточно рассмотреть систему координат с началом в C, взяв произвольный базис.

Гомотетия определена, следовательно, своим центром и своим коэффициентом. В равенстве (1) O и M произвольны, откуда предложение:

При гомотетии каждый вектор умножается на коэффициент гомотетии. Поэтому имеет место инвариантность направлений векторов, и, следовательно, прямой соответствует прямая, отрезку соответствует отрезок; аналогично параллелограмм и параллелепипед сохраняют свою природу.

Замечание об ориентации соответственных векторов: умножение на k сохраняет ориентацию, если k положительно и меняет ее на противоположную, если k отрицательно. (В пункте 3 мы вернемся к этому вопросу.)

Д р у г о е о б р а т н о е п р е д л о ж е н и е. *Если даны две пары соответственных точек A, A' и B, B', для которых*

$$\boldsymbol{A'B'}=k\boldsymbol{AB},$$

то соответствие, определенное условиями:

$$\forall M,\ \boldsymbol{A'M'}\parallel\boldsymbol{AM} \text{ и } \boldsymbol{B'M'}\parallel\boldsymbol{BM},$$

есть гомотетия.

В самом деле, предположим, что $k \neq 1$, и рассмотрим, как и выше, точку C, определенную уравнением

$$\boldsymbol{CA'}=k\boldsymbol{CA}.$$

Гомотетия, с центром в C, с коэффициентом k, дает для каждой точки M тот же образ, что и заданное преобразование, за исключением, быть может, случая, когда точка M находится на прямой $\boldsymbol{AB}$. Нам нужно тогда дополнить предположения, как и при параллельном переносе.

1) **Произведение гомотетий.** Согласно самому определению, произведение гомотетий также гомотетия (которая может оказаться параллельным переносом или тождественным преобразованием). Кроме того, любая гомотетия имеет обратное преобразование:

гомотетию того же центра и с обратным коэффициентом, согласно равенству (3). Поэтому *множество гомотетий* (включая параллельные переносы) *образует группу* относительно умножения. Группа параллельных переносов является ее подгруппой.

Если использовать форму записи (1), то получается немедленно, что коэффициент гомотетии-произведения является произведением коэффициентов перемножаемых гомотетий. Однако остается определить центр гомотетии-произведения или же если в результате умножения получится параллельный перенос, то вектор этого переноса. Даже не выполняя исследования, мы можем немедленно убедиться *в отсутствии в общем случае коммутативности произведения гомотетий.*

Обозначаем через $\mathscr{H}_1$ гомотетию с центром в C_1 и коэффициентом k_1 и аналогично для $\mathscr{H}_2$. Сравним образы C' и C'' точки C_1 в двух произведениях:

$$\text{в } \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 : \mathbf{C_2C'} = k_2\mathbf{C_2C_1};$$
$$\text{в } \mathscr{H}_2 \times \mathscr{H}_1 : \mathbf{C_1C''} = k_1\mathbf{C_1C'}.$$

Значит, C' и C'' различны, так как $k_1 \neq 1$ ($\mathscr{H}_1$ не есть тождественное преобразование).

Непосредственное исследование гомотетии-произведения двух гомотетий.

Пусть даны гомотетии $\mathscr{H}_1$ (центр C_1 и коэффициент k_1) и $\mathscr{H}_2$ (центр C_2 и коэффициент k_2).

Схема произведения гомотетии будет такова:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathscr{H}_1"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2"'] & M_1 \arrow[r, "\mathscr{H}_2"] & M_2. \end{tikzcd}$$

По определению

$$\forall M,\ \mathbf{C_1M_1} = k_1\mathbf{C_1M} \text{ и } \mathbf{C_2M_2} = k_2\mathbf{C_2M_1}.$$

Исключим промежуточную точку M_1 с помощью соотношения Шаля:

$$\mathbf{C_2M_1} = \mathbf{C_1M_1} - \mathbf{C_1C_2}.$$

Получается:

$$\forall M,\ \mathbf{C_2M_2} = k_2\,[k_1\mathbf{C_1M} - \mathbf{C_1C_2}]. \tag{1}$$

Искомая точка C, если она существует, определена, следовательно, уравнением

$$\mathbf{C_2C} = k_2\,[k_1\mathbf{C_1C} - \mathbf{C_1C_2}], \tag{2}$$

или

$$(1 - k_1k_2)\,\mathbf{C_1C} = (1 - k_2)\,\mathbf{C_1C_2}. \tag{2'}$$

Общий случай: $k_1k_2 \neq 1$. Равенство (2′) определяет некоторую точку C. Вычитая почленно равенства (1) и (2), получаем:

$$\forall M,\ \boldsymbol{CM_2} = k_1k_2\boldsymbol{CM}, \tag{3}$$

что определяет гомотетию с центром в C и коэффициентом k_1k_2.

Частный случай: $k_1k_2 = 1$. Нет инвариантных точек, но равенство (1) становится при $k_1 = \frac{1}{k_2}$:

$$\forall M,\ \boldsymbol{C_2M_2} = \boldsymbol{C_1M} - k_2\boldsymbol{C_1C_2},$$

что мы записываем:

$$\forall M,\ \boldsymbol{MM_2} = (1 - k_2)\,\boldsymbol{C_1C_2}, \tag{4}$$

что определяет параллельный перенос на вектор

$$\boldsymbol{V} = (1 - k_2)\,\boldsymbol{C_1C_2}.$$

Выводы.

$$\boxed{k_1k_2 \neq 1} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mathscr{H}_1"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{H}"'] & F_1 \arrow[r, "\mathscr{H}_2"] & F_2 \end{tikzcd}$$

$k = k_1k_2$;

$(1 - k_1k_2)\,\boldsymbol{C_1C} = (1 - k_2)\,\boldsymbol{C_1C_2}$.

$$\boxed{k_1k_2 = 1} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mathscr{H}_1"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{C}"'] & F_1 \arrow[r, "\mathscr{H}_2"] & F \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{V} = (1 - k_2)\,\boldsymbol{C_1C_2}$.

В силу существования обратного преобразования для гомотетии и для параллельного переноса эта же схема в случае $k_1k_2 = 1$ дает нам произведение гомотетии и параллельного переноса, или параллельного переноса и гомотетии, в форме: $\mathscr{H}_1^{-1} \times \mathscr{C} = \mathscr{H}_2$ и $\mathscr{C} \times \mathscr{H}_2^{-1} = \mathscr{H}_1$.

Можно также сформулировать результат: *две фигуры, гомотетичные одной и той же фигуре* (F_1) *в двух гомотетиях с равными коэффициентами, получаются одна из другой путем параллельного переноса.*

Замечание 1. Произведение двух гомотетий коммутативно только в случае, когда они имеют тот же центр.

Замечание 2. Единственные прямые, инвариантные в целом при гомотетии,— это прямые, проходящие через центр; при параллельном переносе — это прямые, параллельные вектору переноса. Этим объясняется, что центр C был найден на $\boldsymbol{C_1C_2}$, а вектор $\boldsymbol{V}$ оказался параллельным вектору $\boldsymbol{C_1C_2}$.

2) **Точка зрения аналитической геометрии.** Если координатная система выбрана, то гомотетичное соответствие определяется следующими формулами:

$$M(x,\ y,\ z) \longrightarrow M'(x' = kx + a,\ y' = ky + b,\ z' = kz + c).$$

Определение инвариантной точки осуществляется изменением начала координат с целью сделать соотношения однородными (то есть преобразовать аффинные соотношения в линейные однородные).

Между $X = x - \alpha$ и $X' = x' - \alpha$ соотношение запишется:

$$X' + \alpha = k(X + \alpha) + a,$$

что сводится к $X' = kX$ в случае, когда:

$$\alpha = \frac{a}{1-k}.$$

Аналогично определяются β и γ. Задача имеет решение при $k \neq 1$.

Приложение. **Теорема Менелая.** На трех сторонах треугольника ABC находятся соответственно точки A', B', C', определенные отношениями:

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \alpha, \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \beta, \quad \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \gamma;$$

ищется *условие, чтобы точки A', B', C' лежали на одной прямой.*

Мы рассматриваем три гомотетии: $\mathscr{H}_1$ с центром A' и коэффициентом α, $\mathscr{H}_2$ с центром B' и коэффициентом β и $\mathscr{H}_3$ с центром C' и коэффициентом γ.

Точка B, рассмотренная, как точка некоторой фигуры F, преобразуется гомотетией $\mathscr{H}_1$ в точку C, которая гомотетией $\mathscr{H}_2$ преобразуется в точку A, которая, в свою очередь, преобразуется гомотетией $\mathscr{H}_3$ в точку B. Это значит, что произведение указанных трех гомотетий есть преобразование группы, которое имеет точку B в качестве двойной точки. Значит, это гомотетия с центром в B и коэффициентом $k = \alpha\beta\gamma$, если это произведение отлично от единицы, либо это тождественное преобразование, если это произведение равно единице.

a) Предполагаем, что точки A', B', C' лежат на одной прямой; если произведение упомянутых гомотетий есть гомотетия, то ее центр B находится на этой прямой $A'B'C'$, что требует, чтобы A' и C' совпали с B, а такой случай не представляет интереса и к тому же исключается в силу существования числа α. Значит, произведение этих гомотетий — тождественное преобразование, и $\alpha\beta\gamma = 1$.

Отсюда предположение:

Если A', B', C' — точки, отличные от вершин треугольника, лежат на одной прямой, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \tag{1}$$

b) Обратно, предположим, что это равенство выполнено, то есть $\alpha\beta\gamma = 1$. Тогда произведение трех гомотетий — тождественное преобразование, значит, произведение первых двух является преобразованием, обратным третьему. Это значит, в частности, что все три центра лежат на одной прямой. Следовательно, из равенства (1) *вытекает, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.*

Значит, соотношение (1) характеризует расположение точек A', B', C' на одной прямой; это есть *соотношение Менелая*.

Отметим, что это соотношение получается более непосредственно, если охарактеризовать расположение трех точек на одной прямой возможностью спроектировать их на некоторую прямую в одну и ту же точку, а эта операция сохраняет отношения α, β, γ. Аналогично можно поступить, чтобы выразить, что четыре точки, расположенные на ребрах тетраэдра, лежат в одной и той же плоскости.

Упражнение. Из теоремы Менелая вывести теорему Чевы.

3) **Ориентация пространства и знак коэффициента гомотетии.** Заметим, что любая гомотетия с отрицательным коэффициентом может рассматриваться как произведение гомотетии с тем же центром и с положительным коэффициентом той же абсолютной величины на гомотетию с тем же центром и с коэффициентом -1. Эта последняя гомотетия называется *симметрией относительно точки* — центра гомотетии. Гомотетия с положительным коэффициентом (или, более коротко, положительная гомотетия) сохраняет ориентацию базисов, так как векторы сохраняют свои направления и ориентации. Нам достаточно поэтому исследовать, сохраняет или не сохраняет ориентацию симметрия по отношению к точке.

a) *Одномерное пространство.* Соответствующие друг другу векторы $\boldsymbol{v}$ и $-\boldsymbol{v}$ противоположны, так что на прямой при симметрии имеет место изменение ориентации.

b) *Двумерное пространство.* Базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ становится $\{-\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}\}$. Мы знаем, что эти два базиса имеют ту же ориентацию.

c) *В трехмерном пространстве* ориентация, наоборот, меняется, так как $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ становится

$$\{-\boldsymbol{u}, \ -\boldsymbol{v}, \ -\boldsymbol{w}\}.$$

Таким образом, *симметрия по отношению к точке, а также любая отрицательная гомотетия меняет ориентацию в пространстве одного измерения или трех измерений и сохраняет ориентацию в пространстве двух измерений.*

Если рассматривать гомотетию в плоскости, как ограничение гомотетии, распространенной на все пространство, то вектор $\boldsymbol{w}$, дополняющий базис $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, и его образ $\boldsymbol{w}'$ находятся по разные стороны от плоскости, что и объясняет несколько неожиданное предыдущее предложение.

4) **Несколько фигур, гомотетичных друг другу**

a) Фигура, расположенная в плоскости, не проходящей через центр гомотетии. Преобразование рассматриваемой плоскости называется перспективным отображением плоскости на параллельную плоскость. Фигура, являющаяся образом фигуры (F), есть плоское сечение множества прямых, соединяющих центр (или точку, где помещается глаз) с точками фигуры. Если (F) — кривая линия или многоугольник, то образ (F') является сечением конуса или многогранного угла, таким образом определенного.

b) Условие гомотетичности двух треугольников. Пусть ABC и PQR — две трехточечные совокупности. Согласно изученным обратным теоремам, достаточно посмотреть, удовлетворяет ли хотя бы одно из шести точечных соответствий, которые можно установить между этими тройками, желаемым условиям, то есть имеет ли место соответственная параллельность и пропорциональность для двух пар сторон [формула (1)], или же, параллельны ли три стороны своим образам (2-я обратная теорема). Если гомотетия существует, то она единственная.

c) Условие гомотетичности двух параллелограммов $ABCD$ и $PQRS$. Предположим, что одно из соответствий между этими фигурами является гомотетией, это значит, что, например,

$$\boldsymbol{PQ} = -\boldsymbol{RS} = k\boldsymbol{AB}, \ \boldsymbol{PS} = k\boldsymbol{AD}.$$

В силу этой гомотетии точкам A и B соответствуют точки P и Q. Тогда легко убедиться, что

$$\begin{aligned} A &\to Q \\ B &\to P \end{aligned}$$

не подходит, так как должно быть

$$\boldsymbol{QP} = -k\boldsymbol{AB} \text{ и } \boldsymbol{QR} = +k\boldsymbol{AD}.$$

Но соответствие

$$\begin{aligned} A &\to R \\ B &\to Q \end{aligned}$$

определяет гомотетию с коэффициентом $-k$, которая подходит, в то время как

$$\begin{aligned} A &\to Q \\ B &\to R \end{aligned}$$

не подходит.

Таким образом, *если два параллелограмма гомотетичны, то они гомотетичны двумя и только двумя способами.*

Две четверки $PQRS$ и $RQPM$, гомотетичные четверке $ABCD$ с противоположными коэффициентами, симметричны друг другу относительно некоторой точки. Четное число гомотетий получилось потому, что всякий параллелограмм инвариантен в целом относительно симметрии с центром в точке пересечения диагоналей.

Более общим образом, если некоторая фигура инвариантна в целом относительно некоторой гомотетии или некоторого параллельного переноса, то всякая фигура, гомотетичная первой, гомотетична ей двумя способами. Следует заметить (в чем можно себе отдать отчет, построив фигуру), что если речь идет не о симметрии относительно центра, являющейся *единственным взаимным* (*инволюционным*) *преобразованием в группе гомотетий — переносов*, то фигура, инвариантная в целом относительно бесчисленного множества гомотетий или параллельных переносов, не может быть ограниченной.

C) **Аффинитеты**

1. Аффинное сжатие к плоскости. Рассмотрим аффинное преобразование, определенное соответствующими друг другу реперами O; $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ и O'; $\{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'\}$, причем O и O' совпадают и $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}' = k\boldsymbol{w}$, где $k \neq 0$ — число.

Если $k = 1$, то преобразование тождественное. Мы предполагаем поэтому $k \neq 1$, и соответствие определено так:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} \longrightarrow \boldsymbol{OM}' = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + kz\boldsymbol{w}. \qquad (1)$$

Инвариантными являются точки плоскости p, имеющей уравнение $z = 0$. Каждой точке M соответствует инвариантная точка m

$$\boldsymbol{Om} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v},$$

которую называют *проекцией точки M на плоскость p, параллельно вектору* $\boldsymbol{w}$.

Имеем, таким образом,

$$\boldsymbol{mM} = z\boldsymbol{w}; \quad \boldsymbol{mM}' = kz\boldsymbol{w};$$

следовательно,

$$\forall M, \ \boldsymbol{mM}' = k\boldsymbol{mM}.$$

Обратно. Если дана плоскость p, вектор $\boldsymbol{w}$, не параллельный этой плоскости, и действительное число k, отличное от нуля, то можем рассмотреть точечное преобразование, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', согласно условию:

$$\boldsymbol{mM}' = k\boldsymbol{mM}, \qquad (\text{II})$$

где m — проекция точки M на плоскость p в направлении, параллельном вектору $\boldsymbol{w}$.

Все точки плоскости p инвариантны. Возьмем три такие точки O, A, B, не расположенные на одной прямой. Пусть C — точка, не принадлежащая плоскости p; ее образом является точка C', определенная равенством $\boldsymbol{cC}' = k\boldsymbol{cC}$. Преобразование, о котором идет речь, является аффинным преобразованием, определенным реперами $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}$ и $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}'$.

Это преобразование называют аффинным сжатием к плоскости p по направлению $\boldsymbol{w}$ с коэффициентом k. Обратное преобразование есть аффинитет с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Если $k = -1$, то это *симметрия относительно плоскости p по направлению, параллельному вектору w*. Это единственный взаимный (инволюционный) аффинитет относительно плоскости.

Свойства. Кроме общих свойств аффинных преобразований, мы получаем здесь несколько простых специальных свойств:

1) Если некоторая прямая пересекает плоскость p, то ее образ проходит через эту точку, общую прямой и плоскости p. Это позволяет строить сходственные элементы проведением прямых, исходя из двух точек и их образов или, если использовать параллели к вектору w, исходя из одной точки и ее образа (это находит себе применение в начертательной геометрии).

2) Инвариантные направления. В силу вышесказанного это направления, параллельные вектору w или плоскости p.

Прямая, параллельная w, сохраняется в целом. Прямая, параллельная плоскости p, имеет параллельный ей образ.

Замечание. Последовательность точек, следующих за точкой или предшествующих точке, не лежащей в плоскости p, та же самая, как и в гомотетии с коэффициентом k и имеющей центром проекцию точки на плоскость p в направлении, параллельном w.

Иначе говоря, *ограничение аффинного сжатия к плоскости p на прямой, параллельной вектору w, есть гомотетия.*

Ограничение аффинного сжатия к плоскости p на плоскости, параллельной вектору w и пересекающей плоскость p по прямой d, *называется* (*плоским*) *аффинным сжатием к оси d, по направлению w с коэффициентом k*. Прямая d не обязательно ориентирована, но ее называют «осью» аффинитета *.

Произведение аффинных сжатий к плоскостям.

Единственный простой случай получается, когда инвариантные направления совпадают в обоих преобразованиях. Мы предполагаем поэтому сначала, что *плоскости p_1 и p_2 параллельны, а направление w общее*. Мы обозначаем через k_1 и k_2 коэффициенты аффинитетов.

1) Если предположить сначала плоскости p_1 и p_2 совпадающими, то получаем немедленно, что произведение тоже является аффинным сжатием к той же плоскости с коэффициентом k_1k_2 (это будет тождественным преобразованием, если $k_1k_2 = 1$).

2) Общий случай. *Плоскости p_1 и p_2 различны и параллельны, а вектор w общий*. Если произведение является аффинным сжатием к плоскости, то его основная плоскость p параллельна данным плоскостям (что вытекает из рассмотрения инвариантных направлений), и эта плоскость может быть определена по одной инвариантной точке. Рассмотрим поэтому какую-либо точку M, ее образ M_1 в аффинитете (p_1), затем образ M_2 точки M_1 в аффини-

* Само преобразование кратко называют также «осевым аффинитетом (на плоскости)».— *Прим. ред.*

тете (p_2). Эти три точки лежат на одной прямой, параллельной вектору w и пересекающей плоскости p_1 и p_2 в точках $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$. Отсюда имеем:

$$\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{M}_1 = k_1\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{m}_2 = k_2\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{M}_1.$$

Мы умеем находить произведение двух гомотетий, являющихся ограничениями рассмотренных преобразований на прямой m_1m_2. Используем поэтому полученные результаты, не повторяя вычислений.

Общий случай. $k_1k_2 \neq 1$. На прямой $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ существует инвариантная точка m, определенная уравнением:

$$(1 - k_1k_2)\,\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m} = (1 - k_2)\,\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2,$$

и преобразование на m_1m_2 определено следующим образом:

$$\forall M \in M_1M_2, \quad \boldsymbol{m}\boldsymbol{M}_2 = k_1k_2\boldsymbol{m}\boldsymbol{M}.$$

Если теперь M изменяется в пространстве, то вектор $\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2$ остается эквиполлентным фиксированному вектору:

$$\boldsymbol{W} = \alpha w.$$

Значит, также

$$\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\,\alpha w.$$

Геометрическое место точек m есть, следовательно, плоскость p, параллельная плоскостям p_1 и p_2. *Преобразование-произведение является аффинным сжатием к плоскости p, по направлению, параллельному вектору w с коэффициентом k_1k_2.*

Частный случай $k_1k_2 = 1$. Произведение уже не является аффинным сжатием к плоскости, так как точка m не существует, но в этом случае преобразование определяется следующим образом:

$$\forall M, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_2 = (1 - k_2)\,\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2 = (1 - k_2)\,\alpha w,$$

и поэтому является параллельным переносом.

Обратно, произведение аффинного сжатия к плоскости по направлению w на параллельный перенос в направлении вектора w является снова аффинным сжатием к плоскости.

Таким образом, *аффинные сжатия к плоскостям заданного направления по одному и тому же направлению w образуют группу, если согласиться рассматривать параллельные переносы в направлении w, как аффинные сжатия* (плоскости которых находятся на бесконечности). Мы не будем изучать в общем случае произведение двух аффинных сжатий к плоскостям, так как полученное аффинное преобразование ни чем не замечательно, за исключением случая, когда основная плоскость p та же, а направляющие векторы w_1 и w_2 различны. Этот случай можно будет изучить в качестве упражнения. (В общем случае, когда $k_1k_2 \neq 1$, можно будет использовать теорему Менелая, чтобы доказать, что произведение есть аффинитет того же типа.)

2. Осевой аффинитет (в пространстве)

Системы координат, определяющие такое аффинное преобразование, характеризуются тем, что O' совпадает с O и

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}'=k\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}'=k\boldsymbol{w},$$

откуда точечное соответствие:

$$\forall M,\ \boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}+z\boldsymbol{w} \longrightarrow \boldsymbol{OM}'=x\boldsymbol{u}+k(y\boldsymbol{v}+z\boldsymbol{w}).$$

Геометрическое место инвариантных точек — это прямая d, проведенная через O по направлению $\boldsymbol{u}$. Каждой точке M соответствует точка m прямой d, определенная равенством $\boldsymbol{Om}=x\boldsymbol{u}$. Это *проекция точки M на прямую d* параллельно *плоскости* Π, направление которой задано парой векторов $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. Тогда преобразование определяется так:

$$\forall M,\ \boldsymbol{mM}'=k\boldsymbol{mM}.$$

Оно характеризуется прямой d, направлением плоскости Π и коэффициентом k.

Это значит, что *ограничение рассматриваемого преобразования на любой плоскости P, параллельной плоскости* Π, *является гомотетией с коэффициентом k*, центром которой является след прямой d на плоскости P.

Ограничение преобразования на любой плоскости Q, проходящей через прямую d, оказывается плоским осевым аффинитетом. Таким образом, плоское аффинное сжатие к оси может рассматриваться либо как ограничение аффинного сжатия в трехмерном пространстве к плоскости, либо как ограничение осевого аффинитета (аффинного сжатия к оси) тоже в трехмерном пространстве.

Если $k=-1$, то осевой аффинитет называется *симметрией по отношению к прямой d по направлениям, параллельным плоскости* Π.

3. Аффинитеты и ориентация пространства

Аффинитеты с положительными коэффициентами, очевидно, сохраняют ориентацию пространства. Предположим поэтому, что k — отрицательное число.

Трехмерное пространство.

Аффинное сжатие к плоскости: ориентация меняется.

Осевой аффинитет: ориентация сохраняется. Впрочем, осевой аффинитет может рассматриваться, как произведение двух аффинных сжатий к плоскостям с тем же коэффициентом.

Двумерное пространство. Аффинитет* с отрицательным коэффициентом k меняет ориентацию плоскости.

D) Проекция одной плоскости на другую, параллельно направлению некоторой прямой

Пусть даны две плоскости p и p', определенные реперами O; $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ и O'; $\{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'\}$. Аффинным соответствием между этими

* Имеется в виду сжатие к оси.— *Прим. перевод.*

двумя плоскостями называется соответствие, сохраняющее координаты:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} \searrow\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\nearrow \boldsymbol{O'M'} = x\boldsymbol{u'} + y\boldsymbol{v'}.$$

Это сечение преобразования трехмерного пространства, в которое погружены обе плоскости, ибо если дополнить базисы двумя произвольными векторами $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{w'}$, то указанное соответствие можно определить так:

$$\begin{cases} \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}; \\ z = 0; \end{cases} \searrow\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\nearrow \begin{cases} \boldsymbol{O'M'} = x\boldsymbol{u'} + y\boldsymbol{v'} + z\boldsymbol{w'}; \\ z = 0. \end{cases}$$

Проекцией некоторой плоскости p на другую плоскость p' параллельно направлению $\boldsymbol{w}$ называется соответствие между следами M и M', образованными на плоскостях p и p' прямыми, параллельными вектору $\boldsymbol{w}$. Докажем, что это аффинное преобразование.

Если p и p' параллельны, то мы видим, что получается параллельный перенос. Предположим поэтому, что плоскости p и p' имеют общую прямую d; в качестве системы координат мы возьмем некоторое общее начало O, принадлежащее прямой d, и некоторый вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OA}$, расположенный на прямой d, так что точки O и A инвариантны. После того как мы дополним в p систему координат некоторым вектором $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OB}$, не принадлежащим прямой d, мы примем за вектор $\boldsymbol{v'}$ вектор $\boldsymbol{OB'}$, где B' — образ точки B.

Положим $\boldsymbol{BB'} = \boldsymbol{w}$; тогда $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ и $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v'}, \boldsymbol{w}\}$ являются двумя базисами трехмерного векторного пространства, и соответствие устанавливается таким образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}; \\ \boldsymbol{OM'} &= x'\boldsymbol{u} + y'\boldsymbol{v'}; \end{aligned} \qquad \boldsymbol{v'} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{MM'} = \lambda\boldsymbol{w}.$$

Но из первых трех равенств получаем:

$$\boldsymbol{MM'} = (x' - x)\,\boldsymbol{u} + (y' - y)\,\boldsymbol{v} + y'\boldsymbol{w}.$$

Следовательно, поскольку $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ является базисом, $\begin{cases} x = x'; \\ y = y' = \lambda, \end{cases}$ *значит, соответствие аффинное*, определенное равенствами:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{OM'} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v'}.$$

Обратно, пусть даны две плоскости, пересекающиеся по прямой d. Аффинное соответствие между плоскостями p и p', оставляющее инвариантными две точки (O и A) прямой d, является проекцией параллельно направлению BB' прямой, соединяющей две соответственные точки, не расположенные на прямой d.

Следствие. Если три плоскости p, p_1, p_2 имеют общую прямую d, то произведение проекции плоскости p на плоскость p_1 и проекции плоскости p_1 на плоскость p_2 является проекцией плоскости p на плоскость p_2.

Замечание по поводу терминологии. Изученное преобразование (параллельное проектирование) называлось когда-то цилиндрической проекцией; перспективное преобразование называли конической проекцией (см. гл. II).

§ 3. Линейные преобразования. Понятие о матрицах

В точечном пространстве мы определили *аффинное преобразование*, исходя из преобразования реперов, которые мы теперь будем обозначать

$$O\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\} \text{ и } O'\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}.$$

Следовательно, это произведение параллельного переноса $\boldsymbol{OO'}$ и преобразования, выполняемого только над векторным пространством. Это последнее называется *линейным однородным преобразованием*, и его мы собираемся изучить, например, в трехмерном пространстве.

Формулы, определяющие векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ с помощью базиса $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, образуют *линейную систему*, связывающую векторы:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{j}' &= a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{k}' &= a_3\boldsymbol{i} + b_3\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Если $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ образуют базис, то мы определим отображение векторного пространства на себя, ставя в соответствие каждому вектору

$$\boldsymbol{V} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

его образ $\boldsymbol{V}' = \mathscr{C}(\boldsymbol{V}) = x\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}' + z\boldsymbol{k}'$.

Если положить $\boldsymbol{V}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$, то старые и новые координаты вектора $\boldsymbol{V}'$ связаны системой *однородных* уравнений *первой степени*, называющейся *линейной системой*, связывающей числа:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z; \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z; \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Преобразование $\mathscr{C}$, определенное таким образом, называется *линейным отображением (преобразованием) векторного пространства на себя.*

В частности, ясно, что это преобразование определено отображениями (1):

$$\boldsymbol{i}' = \mathscr{C}(\boldsymbol{i}), \quad \boldsymbol{j}' = \mathscr{C}(\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{k}' = \mathscr{C}(\boldsymbol{k}).$$

Это преобразование характеризуется квадратной таблицей коэффициентов, фигурирующих в равенствах (1), а также в равенствах (2), однако с той разницей, что строки и столбцы меняются местами и что в равенствах (2) преобразуются уже не векторы, как в равенствах (1), а координаты. Мы будем говорить, что между этими двумя видами преобразования $\mathscr{C}$ имеет место *контравариантность*. Мы условимся обозначать через T таблицу коэффициентов равенств (1). Эта таблица называется *матрицей*, и мы пишем:

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Иногда заменяют большие скобки двойными вертикальными линиями:

$$T = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}.$$

Знак $=$ соответствует условию называть *равными матрицами* такие, которые состоят из тех же элементов, так же расположенных.

Матрица (2) коэффициентов называется *транспонированной* по отношению к предыдущей. Если мы ее назовем M, то будем писать:

$$M = \operatorname{tr} T$$

(иногда употребляют обозначение A^T, или ${}^TA$, вместо trA) *.

Обратно, квадратная таблица из девяти чисел не всегда определяет линейное преобразование $\mathscr{C}$ такого рода, как мы здесь требовали, а именно тройка $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ должна образовывать базис. Это выражается тем фактом, что система (1), так же как и система (2), может быть разрешена относительно трех элементов, фигурирующих в правых частях, то есть что можно получить:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = A_1\boldsymbol{i}' + B_1\boldsymbol{j}' + C_1\boldsymbol{k}'; \\ \boldsymbol{j} = A_2\boldsymbol{i}' + B_2\boldsymbol{j}' + C_2\boldsymbol{k}'; \\ \boldsymbol{k} = A_3\boldsymbol{i}' + B_3\boldsymbol{j}' + C_3\boldsymbol{k}'; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = A_1x' + A_2y' + A_3z'; \\ y = B_1x' + B_2y' + B_3z'; \\ z = C_1x' + C_2y' + C_3z'. \end{cases} \tag{2}$$

Мы уже видели, что условие этого таково:

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3 \neq 0.$$

Новые матрицы тоже являются транспонированными одна по отношению к другой, они образованы из девяти новых коэффи-

---

* В нашей литературе транспонирование обозначается знаком «′», а tr A означает след матрицы A, то есть сумму ее диагональных элементов. — *Прим. перевод.*

циентов и соответствуют преобразованию, обратному преобразованию $\mathscr{C}$. Их называют *обратными матрицами* по отношению к матрицам, рассмотренным выше, и обозначают T^{-1} и M^{-1}.

Более общим образом условились называть *матрицей* любую прямоугольную таблицу чисел. Те матрицы, которые мы сейчас рассматриваем, называются *регулярными матрицами* *, а соответствующие им преобразования $\mathscr{C}$ называются *регулярными операторами*; для них существуют обратные матрицы и обратные операторы.

Заметим, что если матрица T регулярна, то регулярна также и ее транспонированная матрица, причем матрицы, обратные этим двум, также регулярны. Это квадратные матрицы одного и того же *порядка* (порядком называется число элементов каждой строки или каждого столбца).

Таким образом, каждому регулярному оператору $\mathscr{C}$ мы поставили в соответствие матрицу, однако она зависит от базиса $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, выбранного в качестве координатной системы линейного пространства, в котором действует оператор $\mathscr{C}$, в то время как это преобразование имеет внутренний смысл. Отсюда вытекает необходимость определить во множестве регулярных матриц отношение эквивалентности: две регулярные матрицы называются *подобными*, если они представляют один и тот же регулярный оператор в пространстве, отнесенном двум различным базисам.

П р и м е р. Пусть мы имеем преобразование $\mathscr{C}$, заданное следующим образом: (аффинное сжатие по направлению, параллельному вектору $\boldsymbol{k}$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{k}' = m\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

Значит,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Примем за новый базис, например,

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}; \\ \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}; \\ \boldsymbol{w}' = (1-m)\,\boldsymbol{u} + m\boldsymbol{w}. \end{cases}$$

Новая матрица запишется так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-m & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Она представляет тот же аффинитет, но его направление не параллельно ни одному из новых базисных векторов.

---

* По нашей терминологии: невырожденные, или неособенные, матрицы.— *Прим. перевод.*

Произведение матриц.

Мы определили произведение двух преобразований схемой:

$$V \xrightarrow{\mathscr{C}} [(V') = \mathscr{C}(V)] \xrightarrow{\mathscr{C}'} [V'' = \mathscr{C}'[\mathscr{C}(V)]].$$

Произведение до сих пор мы обозначали так: $\mathscr{C} \times \mathscr{C}'$, но с новой точки зрения, чтобы лучше напомнить, что в действительности речь идет о функции от функции, выбирают обратный порядок: произведение пишется в таком виде: $\mathscr{C}' \bigcirc \mathscr{C}$, то есть последовательные операции записываются *справа налево*.

Произведение двух регулярных операторов есть также регулярный оператор. Если матрица оператора $\mathscr{C}$ по отношению к исходному базису есть T, а матрица оператора $\mathscr{C}'$ по отношению к полученному образу этого базиса есть T', то матрицу T'' произведения операторов, рассмотренную относительно исходного базиса, называют *произведением двух матриц* и пишут: $T'' = T' \bigcirc T$.

Запишем это в явном виде. Имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{j}' &= a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{k}' &= a_3\boldsymbol{i} + b_3\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

затем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}'' &= a_1'\boldsymbol{i}' + b_1'\boldsymbol{j}' + c_1'\boldsymbol{k}'; \\ \boldsymbol{j}'' &= a_2'\boldsymbol{i}' + b_2'\boldsymbol{j}' + c_2'\boldsymbol{k}'; \\ \boldsymbol{k}'' &= a_3'\boldsymbol{i}' + b_3'\boldsymbol{j}' + c_3'\boldsymbol{k}', \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}'' &= (a_1'a_1 + b_1'a_2 + c_1'a_3)\,\boldsymbol{i} + (a_1'b_1 + b_1'b_2 + c_1'b_3)\,\boldsymbol{j} + (a_1'c_1 + b_1'c_2 + c_1'c_3)\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{j}'' &= (a_2'a_1 + b_2'a_2 + c_2'a_3)\,\boldsymbol{i} + (a_2'b_1 + b_2'b_2 + c_2'b_3)\,\boldsymbol{j} + (a_2'c_1 + b_2'c_2 + c_2'c_3)\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{k}'' &= (a_3'a_1 + b_3'a_2 + c_3'a_3)\,\boldsymbol{i} + (a_3'b_1 + b_3'b_1 + c_3'b_3)\,\boldsymbol{j} + (a_3'c_1 + b_3'c_2 + c_3'c_3)\,\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Возникшая таким образом матрица и есть произведение матриц:

$$T'' = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{pmatrix} \bigcirc \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждая строка матрицы $T' \bigcirc T$ происходит от последовательного комбинирования строки того же номера матрицы T' со всеми столбцами матрицы T; каждый столбец матрицы $T' \bigcirc T$ происходит от последовательного комбинирования столбца того же номера матрицы T со всеми строками матрицы T'. Следует научиться применять это правило на примерах. Громоздкость вычислений оправдывает символическое обозначение, на котором учатся рассуждать, избегая, насколько это возможно, развернутых записей.

Свойства произведений. Они выводятся из свойств линейных преобразований.

a) Произведение некоторого числа регулярных матриц одного и того же порядка является регулярной матрицей того же порядка. Умножение матриц ассоциативно, однако, вообще говоря, не коммутативно.

b) Матрица, представляющая тождественное преобразование, является для данного порядка единственной и независящей от базиса, так как нужно писать: $x' = x$, $y' = y$ и т. п. Она состоит из нулевых элементов, за исключением элементов главной диагонали, каждый из которых равен единице. Эта матрица является нейтральным элементом для произведения матриц: $T \bigcirc I = I \bigcirc T = T$.

Пример. Для третьего порядка:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Регулярная матрица T имеет обратную матрицу T^{-1}, и $T \bigcirc T^{-1} = T^{-1} \bigcirc T = I$, что оправдывает термин «обратная» и введенные обозначения. Таким образом, регулярные матрицы данного порядка образуют группу по отношению к умножению матриц, причем группу некоммутативную.

Трансформирование регулярного линейного преобразования $\mathscr{C}$ регулярным преобразованием $\mathscr{S}$ того же порядка:

Схема трансформирования следующая:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \arrow[r, "\mathscr{C}"] \arrow[d, "\mathscr{S}"] & \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}' \arrow[d, "\mathscr{S}"] \\
\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \arrow[r, "\mathscr{X}"] & \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'
\end{tikzcd}$$

$$\mathscr{X} = \mathscr{S} \bigcirc \mathscr{C} \bigcirc \mathscr{S}^{-1}$$

(читается справа налево).

Но преобразование $\mathscr{X}$ есть не что иное, как преобразование $\mathscr{C}$. Действительно, преобразуем некоторый вектор $\boldsymbol{V}$ с помощью $\mathscr{X}$. Будем иметь:

$$\boldsymbol{V} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} \xrightarrow{\mathscr{X}} \boldsymbol{V}' = x\boldsymbol{u}' + y\boldsymbol{v}' + z\boldsymbol{w}'.$$

Коэффициенты формул преобразования базиса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{i} + \beta_1 \boldsymbol{j} + \gamma_1 \boldsymbol{k}; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}' = \alpha_1 \boldsymbol{i}' + \beta_1 \boldsymbol{j}' + \gamma_1 \boldsymbol{k}'; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

являются элементами той же матрицы преобразования $\mathscr{S}$. Поэтому вычисление дает:

$$\boldsymbol{V}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{V}'=X\boldsymbol{i}'+Y\boldsymbol{j}'+Z\boldsymbol{k}'$$

с теми же числами X, Y, Z, так что преобразование вектора $\boldsymbol{V}$ в вектор $\boldsymbol{V}'$ на этот раз предстает как совпадающее с преобразованием $\mathscr{C}$.

Таким образом, преобразование $\mathscr{X}$, действующее на базис $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, является тем же преобразованием, что и преобразование $\mathscr{C}$, действующее на базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Иначе говоря, *матрицы*

$$T \quad \text{и} \quad X=S\bigcirc T\bigcirc S^{-1}$$

являются подобными, какова бы ни была (регулярная) матрица S.

Мы получили, таким образом, средство отыскивать матрицы, подобные данной матрице. Здесь мы не касаемся важной задачи о нахождении самой простой матрицы, подобной данной матрице.

Пример.

$$\mathscr{S}=\begin{cases} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Значит,

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=S^{-1}.$$

Непосредственное вычисление, либо переход от

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}'=a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{к} \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}'=\alpha_1\boldsymbol{i}'+\beta_1\boldsymbol{j}'+\gamma_1\boldsymbol{k}' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

или же применение правила умножения, покажет, что матрица X выводится из матрицы T перестановкой двух последних строк и двух последних столбцов. Аналогично можно будет изучить действие трансформирования преобразованием:

$$\mathscr{S}\begin{cases} \boldsymbol{u}=m\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{k}, \end{cases}$$

или преобразованием

$$\mathscr{S}\begin{cases} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

Понятие о нерегулярных матрицах

В системе (1), определяющей линейное преобразование, мы больше не предполагаем, что $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ образуют базис. Это значит, что эти векторы связаны соотношением вида:

$$\boldsymbol{k}' = \alpha\boldsymbol{i}' + \beta\boldsymbol{j}'.$$

Поэтому векторы $\boldsymbol{V}'$, образы векторов $\boldsymbol{V}$, порождают самое большее лишь двумерное пространство, и преобразование уже не имеет вполне определенного обратного преобразования. Например, преобразование $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}' = 0$, которое определяет проекцию на плоскость ij параллельно вектору $\boldsymbol{k}$, не является регулярным, равно как и преобразование, полученное из него трансформированием с помощью некоторого регулярного преобразования.

Возьмем, например,

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{u}; \\ \boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}; \\ \boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}. \end{cases}$$

Тогда нерегулярная матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

становится

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc T \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получается новая квадратная нерегулярная матрица, в которой на этот раз третья строка уже не состоит из нулей; в самом деле, вычисление дает:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

затем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако здесь не следует ограничиваться обязательно квадратными матрицами; действительно, здесь писать $k' = 0$ бесполезно, и пространство отображения можно рассматривать, как двумерное пространство, а не как двумерное подпространство трехмерного пространства. Правило умножения сохраняет силу, и мы будем писать:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

затем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правило вычисления произведения требует только, *чтобы число строк первого сомножителя* (*правого*) *было равно числу столбцов второго сомножителя* (*левого*).

Так, например,

$$(p, q, r) \bigcirc \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (px + qy + rz).$$

Умножение неквадратных матриц сохраняет свойство ассоциативности.

Так как нерегулярная матрица не имеет обратной, то множество нерегулярных матриц не образует группы по отношению к операции умножения.

Использование матриц для представления линейных форм

a) Рассмотрим теперь уже не систему (1) для векторов базисов, а систему (2), связывающую координаты векторов. Таблица коэффициентов — это матрица M, полученная транспонированием матрицы T. Если мы условимся представлять вектор матрицей v, состоящей из одного столбца, имеющего элементами координаты вектора, то система (2) запишется:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \bigcirc \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то есть $v' = M \bigcirc v$.

Это сохраняет силу, даже если матрица M не регулярная и даже если она не квадратная, если только число столбцов в M равно числу координат вектора $\boldsymbol{V}$, то есть размерности преобразуемого пространства.

b) С чисто алгебраической точки зрения x', y', z' являются *линейными формами* относительно x, y, z (то есть однородными многочленами первой степени относительно этих трех букв). Эти формы называются *линейно независимыми* или *свободными*, если матрица M регулярна. В этом случае x, y, z также являются формами относительно x', y', z'.

Разумеется, произведение матриц нельзя отождествлять с произведением линейных форм. Две операции, названные здесь произведением, введены с совершенно различных точек зрения. Произведение матриц есть матрица, а произведение двух линейных форм есть однородный многочлен второй степени относительно букв x, y, z, называемый *квадратичной формой*. Однако не следует думать, что матрицы бесполезны при изучении квадратичных форм, наоборот. Это станет понятным, если учесть следующее замечание. Пусть, например,

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

квадратичная форма двух переменных. Это многочлен, получаемый из *билинейной* формы $(ax + by)\,X + (bx + cy)\,Y$, если положить $X = x$, $Y = y$. Билинейная форма представима произведением матриц:

$$(ax + by,\ bx + cy) \bigcirc \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

То же замечание относится к любому числу переменных (формы, составляющие матрицу, стоящую слева, являются половинами производных квадратичной формы, взятых последовательно по каждой букве). Можно к тому же заметить, что билинейная форма (называющаяся *полярной формой* квадратичной формы) симметрична по отношению к совокупностям малых букв x, y, ... и больших букв X, Y, ...

Мы сделали несколько указаний, чтобы дать почувствовать пользу матриц при изучении кривых и поверхностей второго порядка (конических сечений и квадрик).

c) Линейные формы можно складывать и умножать на число. Так как эти формы представимы матрицами, то естественно ввести *сложение матриц и умножение матрицы на число.*

Прежде всего дадим определения для матриц, состоящих из одного столбца (то есть определяющих вектор или линейную форму). Полагают, например, для трех букв:

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Затем, обобщая, определяют *сумму двух матриц, имеющих то же число строк и то же число столбцов*, как матрицу, каждый элемент которой есть сумма элементов, занимающих то же место в каждой из слагаемых матриц, и *произведение матрицы на число*, как матрицу, полученную умножением на это число каждого элемента данной матрицы. Тогда получают векторное пространство.

Нулевая матрица (нейтральный элемент сложения) — это, очевидно, матрица, все элементы которой равны нулю.

Интерпретация с помощью векторов доказывает, что множество квадратных матриц данного порядка образует *кольцо*, так как произведение матриц, очевидно, дистрибутивно по отношению к сложению, ибо линейные преобразования сохраняют сложение векторов.

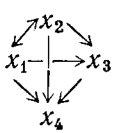
Матрица и проективная геометрия. Проективная геометрия (см. гл. II) приводит к замене аффинных координат однородными. Это позволяет представить проективную геометрию, как линейную геометрию пространства с числом измерений, увеличенным на единицу, что дает возможность использовать матрицы в задачах первой и второй степени в этой геометрии (как мы это скоро увидим).

Матрица в метрической геометрии. Если мы пожелаем, чтобы базисы состояли из равных и взаимно перпендикулярных векторов, то нужно будет использовать специальные матрицы. Форма соотношения Пифагора, а также формулы для скалярных и векторных произведений показывают с очевидностью, что и здесь матрицы окажутся полезными.

Другие случаи, когда вводятся матрицы. Многочисленные вопросы приводят к рассмотрению прямоугольных таблиц элементов. Если теория приводит к операциям над этими элементами, подобным описанным, то такие таблицы будут рассматриваться, как матрицы.

Пример. Матрица связи. Обмен сигналами между несколькими пунктами происходит согласно схеме, аналогичной той, которая изображена ниже. Если в пункт x_j доходит сигнал, переданный из пункта x_i, то мы в матрице пишем единицу на пересечении i-й строки и j-го столбца; в противном случае пишем нуль. Таким образом получаем матрицу m_1. В матрице m_2 мы показываем число способов сигнализации из x_i в x_j двумя последовательными сигналами.

Можно проверить, что $m_2 = m_1 \bigcirc m_1 = (m_1)^2$:



$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая глава

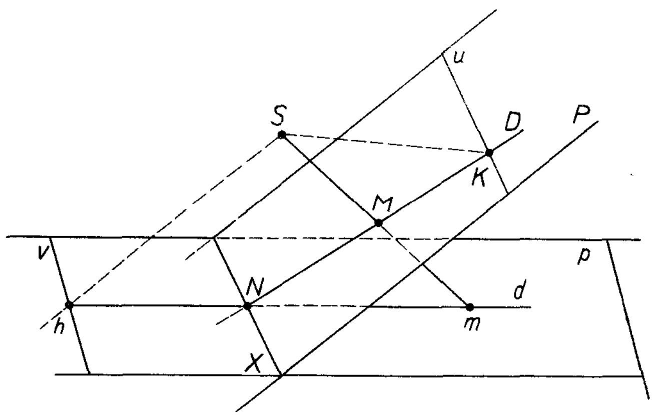
ПОНЯТИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Мы сейчас введем геометрию, менее богатую, чем аффинная, не содержащую ни понятия параллелизма, ни понятия о свободном векторе, сумме векторов и т. п. Мы сначала построим *двумерную* проективную геометрию, исходя из *трехмерной* аффинной геометрии. Из свойств, которые затем выявятся, возникнет возможность непосредственного аксиоматического построения этой геометрии и ее распространения на трехмерное пространство.

Мы сейчас введем понятия, сохраняющиеся при тех преобразованиях плоскости в плоскость, которые называются *перспективными* преобразованиями.

I. Перспективное отображение плоскости на плоскость

1. Определение. Пусть в пространстве аффинной геометрии даны две плоскости P и p и точка S вне этих плоскостей. Каждой точке M плоскости P ставим в соответствие точку m, в которой прямая SM пересекает плоскость p. Мы будем говорить, что точка m — это образ точки M *в перспективе с центром* S, *отображающей плоскость* P *на плоскость* p (терминология возникла в искусстве рисования, которое исторически привело к этой геометрии).



Черт. 43

В частном случае, когда плоскости P и p параллельны, преобразование является гомотетией. Сначала мы рассмотрим лишь общий случай, тогда обе плоскости имеют общую прямую X, геометрическое место точек, совпадающих со своими образами. Каждая точка M плоскости P имеет образ m, за исключением таких точек M, для которых прямая SM параллельна плоскости p, то есть за исключением точек прямой U плоскости P, являющейся прямой пересечения этой плоскости с плоскостью Π, проведенной через точку S параллельно плоскости p. Аналогично каждая точка m плоскости p является образом некоторой точки M плоскости P, за исключением точек одной прямой v, пересечения плоскости p с плоскостью, проведенной через точку S параллельно плоскости P. Прямые X, U, v между собой параллельны.

2. Образ прямой. Пусть D — прямая плоскости P. Вообще говоря, она пересекает прямую X в некоторой точке N, а прямую U в точке K. Каждая точка M прямой D, кроме точки K, имеет образ m; множество этих точек m составляет прямую d пересечения плоскости p с плоскостью SD, за исключением точки h, в которой прямая d пересекает прямую v, так как эта точка не является образом никакой точки плоскости P. Несмотря на эти исключения, мы будем говорить, что образом прямой D является прямая d. Обе эти прямые пересекаются в точке N, которая принадлежит прямой X и инвариантна. Если прямая D параллельна прямой U, то d ей параллельна, но если D есть сама прямая U, то прямая d не существует. Прямые, пересекающиеся в некоторой точке M_0, имеют своими образами прямые, пересекающиеся в точке m_0, за исключением случая, когда точка M_0 лежит на U, так как тогда прямые-образы параллельны прямой SM_0. Аналогично прямые, параллельные некоторому направлению Δ на плоскости P, имеют образами прямые, пересекающиеся на прямой v в такой точке h, что прямая Sh имеет направление Δ. Наконец, прямые, параллельные прямой U, имеют своими образами, как мы уже сказали, прямые, параллельные этому же направлению.

Обобщение. Все эти исключительные случаи исчезают, если мы дополним множество точек и прямых, а также терминологию следующим образом.

Некоторая точка K, прямой U имеет образом k *некоторую бесконечно удаленную точку* плоскости p.

Прямая U, геометрическое место точек K, имеет образом u геометрическое место бесконечно удаленных точек плоскости p, которое называется *бесконечно удаленной прямой* плоскости p.

Некоторая точка h прямой v есть образ некоторой бесконечно удаленной точки плоскости P, и множество этих точек составляет бесконечно удаленную прямую V плоскости P.

Тогда мы можем сформулировать основное свойство:

$[P_1]$ *В перспективе некоторой плоскости на другую плоскость образ каждой точки есть точка, образ каждой прямой есть прямая, так что коллинеарным точкам соответствуют коллинеарные точки и пересекающимся прямым соответствуют пересекающиеся прямые.* Иначе говоря, перспектива сохраняет коллинеарности и инцидентности.

3. Топологическое замечание. Пусть M — некоторая точка, не расположенная на прямой U, и пусть $V(M)$ — окрестность точки M, не имеющая общей точки с прямой U. Образ $v(m)$ этой окрестности — также окрестность точки m. Отсюда следует, что если точка M описывает кривую, проходящую через точку M_0, не расположенную на прямой U и имеющую в точке M_0 касательную T_0, то преобразование дает кривую, проходящую через точку m_0 и имеющую в этой точке касательную t_0, являющуюся образом прямой T_0.

Но пусть мы имеем окрестность некоторой точки K прямой U, например область внутри параллелограмма с центром K и сторонами, параллельными прямой U и другой прямой D. Эта область будет иметь в качестве образа два усеченных угла (с вершиной h). Мы должны будем рассматривать это множество точек, как *окрестность бесконечно удаленной точки* K. Некоторая кривая C плоскости P, проходящая через точку K и имеющая в ней касательную T_0, отличную от прямой U, будет иметь своим образом кривую c, «проходящую через бесконечно удаленную точку k», и прямая t_0, образ прямой T_0, будет «касательной к кривой c в бесконечно удаленной точке k». Эти выражения служат переводом аффинных выражений: асимптотическое направление и асимптота.

Исследование областей, определенных в плоскости P прямыми U и T_0, показывает расположение кривой c относительно прямой t_0. На рисунке можно будет увидеть, что в общем случае, когда C находится в окрестности точки K с одной стороны касательной T_0, кривая c расположена с обеих сторон своей асимптоты. Можно будет также исследовать случаи, когда точка K является для кривой C точкой перегиба, или точкой возврата первого или второго рода (то есть когда имеются две дуги с одной и той же стороны или с разных сторон общей полукасательной).

Наконец, если C имеет прямую U своей касательной в точке K, то мы должны сказать, что кривая c имеет бесконечно удаленную прямую касательной в бесконечно удаленной точке k (с аффинной точки зрения кривая c имеет параболическую ветвь). Мы получаем, таким образом, общее предложение: Если кривая C имеет касательную в некоторой своей точке, то кривая-образ имеет в соответствующей точке касательную, являющуюся образом касательной к кривой C. Иначе говоря, *перспектива сохраняет касание кривых*.

4. Приложения. *a*) Рассмотрим в плоскости P аффинную фигуру Дезарга (гл. I, § 1), состоящую из двух гомотетичных треугольников ABC, $A'B'C'$. Мы предполагаем $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. В этом случае сказать, что AA', BB', CC' пересекаются в некоторой точке O, равносильно утверждению, что AC и $A'C'$ параллельны.

Подвергнем эту фигуру какой-либо перспективе. Тогда коллинеарности OAA', OBB', OCC' перейдут в коллинеарности oaa', obb', occ'. Параллельные прямые AB и $A'B'$ имеют образами прямые ab и $a'b'$, которые пересекаются в точке γ на прямой v; точно так же прямые bc и $b'c'$ пересекаются в точке α на прямой v, а прямые ac и $a'c'$ в точке β той же прямой.

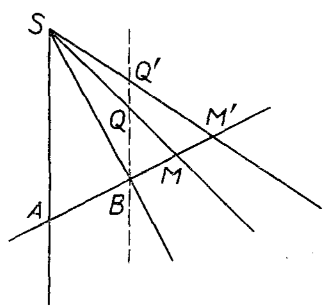
Обратно, пусть мы имеем в плоскости p фигуру, образованную какими-либо треугольниками, соответственные стороны которых пересекаются соответственно в точках α, β и γ. Мы всегда можем выбрать перспективу так, чтобы плоскость P пересекала плоскость p по прямой, параллельной прямой $\alpha\beta$, и чтобы центр S находился в плоскости, параллельной плоскости P и проходящей через прямую $\alpha\beta$. Тогда α и β имеют свои образы на бесконечности. Сказать, что точка γ коллинеарна с точками α и β, равносильно утверждению, что прямые AB и $A'B'$ параллельны. Сказать, что прямые aa', bb', cc' пересекаются в одной точке, равносильно утверждению, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Мы получаем *проективную фигуру Дезарга*, и предложение получает следующий вид: *Сказать, что два треугольника имеют соответственные вершины на трех пересекающихся в одной точке прямых, равносильно утверждению, что соответственные стороны треугольников пересекаются в трех коллинеарных точках.* Два треугольника, удовлетворяющие этому условию, называются *гомологичными*.

b) Подобным же приемом мы выводим из аффинной фигуры Паскаля *проективную фигуру Паскаля*:

Если последовательные вершины шестиугольника расположены попеременно на одной и на другой из двух прямых, то его противоположные стороны пересекаются в трех точках, расположенных на одной прямой.

II. Инвариант коллинеарных точек

a) Преобразуя коллинеарные точки, мы получаем ограничение перспективы на плоскости, проходящей через центр перспективы. Поэтому мы займемся теперь одномерной проективной геометрией с помощью двумерной аффинной геометрии.



Черт. 44

Пусть даны *три* коллинеарных точки; тогда мы не можем им дать никакой проективной характеристики. Действительно, если A, B, C — произвольные точки на прямой D, а a, b, c — произвольные точки на прямой d, то между этими фигурами всегда можно установить соответствие с помощью произведения некоторого параллельного переноса (переводящего, например, точку A в a) и перспективы (центр S является тогда пересечением прямых bB и cC). Значит, нам нужно рассмотреть *четыре* точки.

Пусть мы имеем прямую, определенную двумя точками A и B, и две другие точки M и M' на этой прямой. Соединим эти точки с центром перспективы S. Теорема Фалеса позволяет нам определить отношения $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ и $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$ с помощью векторов, нанесенных на параллель к SA, проведенную через точку B. Если эта прямая пересекает прямую SM в Q, а SM' в Q', то

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{QB}}, \quad \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{Q'B}},$$

откуда

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}:\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=\frac{\overline{Q'B}}{\overline{QB}},$$

а это последнее отношение инвариантно относительно перспективы с центром в S, которая отображает секущую $ABMM'$ на любую другую секущую. Число

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}:\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$

называется *двойным отношением* четырех точек A, B, M, M' (или еще согласно названию, данному Шалем, *ангармоническим отношением* этих четырех точек). Таким образом, *двойное отношение четырех точек инвариантно в любой перспективе.* Это основной элемент проективной геометрии; его обозначают символом $(A,\ B;\ M,\ M')$.

Таким образом,

$$(A,\ B;\ M,\ M')=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}:\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=\frac{\overline{MA}\cdot\overline{M'B}}{\overline{MB}\cdot\overline{M'A}}.$$

Из последней формы видно, что каждая точка появляется один раз в числителе, один раз в знаменателе и два раза, как конец, или два раза, как начало, векторов. Это характеризует любое из двойных отношений, определенных четырьмя коллинеарными точками, так как двойное отношение, очевидно, является *числом, зависящим от порядка, в котором рассматриваются эти точки.*

В проективной геометрии прямая определена двумя точками, но точку M прямой определяют, исходя из трех точек A, B, C, числом:

$$\lambda_M=(A,\ B;\ C,\ M)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

Число λ_M является элементом проективной геометрии, тогда как каждое отношение в правой — это элемент аффинной геометрии.

Теорема. Определение двойного отношения четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 в функции четырех чисел λ, определяющих каждую из точек, исходя из данных точек A, B, C.

Вернемся к абсциссам точек на аффинной прямой. Пусть выбраны начало и некоторая единица, обозначим через a, b, c, x абсциссы точек A, B, C, M. Тогда получаем:

$$\lambda_M=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-x}{b-x}.$$

Это число мы назовем *двойным отношением четырех чисел* a, b, c, x и будем обозначать через (a, b, c, x). Это дробно-линейная (гомографическая) функция числа x, которую можно записать в виде:

$$\lambda = k + \frac{h}{x-a}.$$

Но последовательные преобразования числа x в $X = x - a$, затем в $Y = \frac{1}{X}$, затем в $Z = hY$, затем в $\lambda = Z + k$ сохраняют, очевидно, двойные отношения четырех чисел.

Двойное отношение четырех точек M прямой, координированной относительно трех точек A, B, C, равное двойному отношению значений четырех абсцисс, равно также двойному отношению четырех соответствующих чисел λ (значений дробно-линейной функции абсцисс).

Частные случаи двойного отношения. Если точки A, B, C различны, а точка M характеризуется числом λ, то $\lambda = 1$ выражает, что точка M совпадает с точкой C, $\lambda = 0$ выражает, что точка M совпадает с точкой B; для того чтобы выразить, что точка M совпадает с точкой B, нужно взять $\lambda = \infty$, не отличая $+\infty$ от $-\infty$. Таким образом, подобно тому, как мы присоединили к действительной прямой ее бесконечно удаленную точку, мы дополняем множество чисел λ бесконечно большим числом.

Но какому числу соответствует бесконечно удаленная точка прямой? Заставим абсциссу точки M стремиться к бесконечности; согласно проведенному вычислению λ стремится к

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

Иначе говоря, нужно считать, что точка M на бесконечности соответствует равенству

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = +1,$$

то есть что

$$\frac{a-\infty}{b-\infty} = +1$$

и что

$$(a,\ b;\ c,\ \infty) = \frac{a-c}{b-c}.$$

Замечание. Это вытекает также, без перехода к пределу, из перспективы четырех коллинеарных точек $A'B'C'M'$, сделанной из центра S на прямую, параллельную прямой SM'. Проведя параллель к SM' через точку C', мы подсчитаем, как и выше,

$$\lambda = \frac{\overline{C'A}}{\overline{MA}} : \frac{\overline{C'B'}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

В конечном счете существует взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел, дополненным ∞ (множеством чисел λ), и проективной прямой (пробегаемой точкой M).

Соотношения между двойными отношениями четырех коллинеарных точек $ABCD$. Охарактеризуем каждую точку M прямой соответствующим значением $\lambda_M = (A, B; C, M)$ и рассмотрим точку D, определенную значением $\lambda_D = \delta$. Мы знаем, что $\lambda_A = \infty$, $\lambda_B = 0$, $\lambda_C = 1$. Поэтому если порядок точек A, B, C, D меняется, то мы находим только шесть значений двойного отношения в зависимости от роли чисел 0, 1, δ, ибо ∞ дает отношение, равное 1. Таким образом, получается:

$$\lambda_1 = \frac{\delta - 0}{1 - 0} = \delta; \quad \lambda_2 = \frac{1-0}{\delta - 0} = \frac{1}{\delta}; \quad \lambda_3 = \frac{\delta - 1}{0 - 1} = 1 - \delta;$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1-\delta}; \quad \lambda_5 = \frac{1-\delta}{0-\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta}; \quad \lambda_6 = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Эти числа сводятся к трем, если они имеют значения -1, 2, $1/_2$. Мы изучим дальше этот частный случай, называющийся *случаем гармонизма*.

b) Двойное отношение пучка четырех прямых. *Пучком прямых* называют совокупность прямых плоскости, пересекающихся в одной точке, которая называется *вершиной* (или центром) пучка. Множество параллельных прямых на проективной плоскости является с проективной точки зрения тоже пучком, вершина которого — бесконечно удаленная точка.

Инвариантность двойного отношения четырех коллинеарных точек относительно любой перспективы выражает, что на каждой секущей четырех прямых пучка, взятых в определенном порядке, двойное отношение точек пересечения не зависит от секущей, значит, это число, связанное с самими прямыми пучка. Это число называется *двойным отношением четверки прямых пучка*. Если, в частности, оно равняется -1, то четверка прямых называется *гармонической*.

Обратно, *если две прямые, пересекающиеся в точке A, являются носителями двух четверок точек с тем же двойным отношением*: $(A, B; C, M) = (A, b; c, m)$, *то прямые Bb, Cc, Mm, соединяющие пары соответственных точек, пересекаются в одной точке.*

Действительно, в перспективе, которую образуют Bb и Cc, точка M соответствует точке m, так как двойное отношение определяет однозначно четвертую точку ряда. Поэтому если мы рассматриваем точку M, как образующую точку первой прямой, то точка m описывает вторую прямую, и прямая Mm *проходит через фиксированную точку*.

c) Двойное отношение четырех плоскостей пучка. В трехмерной геометрии пучком плоскостей называют множество плоскостей, имеющих общую прямую. *Если дан пучок из четырех плоскостей, взятых в определенном порядке, то двойное отношение четырех точек пересечения этих плоскостей с любой секущей не зависит от этой секущей.*

Действительно, сравнивают ряды, полученные на двух секущих, не расположенных в той же плоскости, с помощью вспомогательной секущей, соединяющей какую-либо точку одной из них с какой-либо точкой другой, и используют затем транзитивность отношения равенства. Это двойное отношение является, следовательно, числом, связанным с четверкой плоскостей пучка. Его называют *двойным отношением четверки плоскостей пучка.*

Замечание. *В аффинной плоскости двойное отношение четырех прямых пучка равно двойному отношению четырех угловых коэффициентов этих прямых* (пересечь прямой $x = 1$).

III. Введение координат в проективной геометрии

Мы сейчас введем такую систему координат для точки M, расположенной в некоторой плоскости, чтобы введенные координаты были инвариантны относительно перспективы. Для этого достаточно пользоваться лишь двойными отношениями.

Пусть в плоскости выбраны четыре точки A, B, C, D, среди которых никакие три не лежат на одной прямой; точку D мы заставим играть специальную роль. Обозначим через D_a, D_b, D_c точки, в которых прямые AD, BD, CD пересекают стороны треугольника ABC, и аналогично через M_a, M_b, M_c — точки пересечения прямых AM, BM, CM с этими же сторонами. Вводим теперь числа:

$$\alpha = (B,\ C;\ D_a,\ M_a);\ \beta = (C,\ A;\ D_b,\ M_b)\ \text{и}\ \gamma = (A,\ B;\ D_c,\ M_c).$$

Ясно, что какие-либо два из этих чисел определяют точку M, значит, существует соотношение между этими тремя числами. Чтобы его получить, используем какую-либо секущую, например секущую CM, которая пересекает AD в точке A' и BD в точке B'. Получим:

$$\alpha = (B,\ C;\ D_a,\ M_a) = (M_c, C;\ A',\ M);$$

аналогично

$$\beta = (C,\ M_c;\ B',\ M).$$

Но по перспективе с центром в D имеем:

$$\gamma = (A,\ B;\ D_c,\ M_c) = (A',\ B';\ C,\ M_c).$$

Записывая эти двойные отношения в явном виде, получаем: $\alpha\beta\gamma = 1$.

Мы видим, что точка D имеет координаты $\alpha = \beta = \gamma = 1$ и может рассматриваться, как *единичная точка*, а α, β, γ образуют *систему проективных координат*.

В пространстве вводят таким же образом четыре числа, произведение которых равно единице, с помощью четырех точек, образующих невырожденный тетраэдр, и некоторой пятой точки, служащей единичной точкой.

Связь с аффинной геометрией. Если в некоторой плоскости введены координаты x, y аффинной геометрии и если желают выполнить в этой плоскости какое-то исследование по проективной геометрии, то берут в качестве системы координат четверку $\{ABCD\}$ следующим образом: точку A берут в начале координат O, точку B — в бесконечности на прямой Ox, точку C — в бесконечности на Oy, а единичную точку D — в точке с координатами $x = 1$, $y = 1$. Тогда любая точка M с координатами x, y ставится в соответствие совокупности трех чисел α, β, γ, определенных вышеуказанным образом. Получаем:

$$\alpha = \frac{x}{y}; \ \beta = y; \ \gamma = \frac{1}{x}.$$

Поэтому если ввести три числа X, Y, T, определенные с точностью до множителя равенствами:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{T}{1},$$

то получается:

$$\alpha = \frac{X}{Y}; \quad \beta = \frac{Y}{T}; \quad \gamma = \frac{T}{X}.$$

Числа X, Y, T пропорциональны числам x, y, 1 и определяют своими взаимными отношениями проективные координаты α, β, γ. Они называются *однородными координатами* точки M и позволяют заниматься проективной геометрией в аффинной плоскости.

Точка тогда определена равенствами: $\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{T}{c}$.

Уравнение $ux + vy + w = 0$ некоторой прямой получает следующий вид: $uX + vY + wT = 0$, а бесконечно удаленная прямая имеет уравнение $T = 0$. Бесконечно удаленная точка в направлении $\frac{y}{x} = m$ будет определена, например, координатами:

$$X = 1; \ Y = m; \ T = 0,$$

или еще

$$X = k; \ Y = km; \ T = 0,$$

где k — произвольное число.

Например, две параллельные прямые $ax + by = c$, $ax + by = c'$ пересекаются в точке, определенной уравнениями

$$\begin{cases} aX + bY = cT; \\ aX + bY = c'T, \end{cases}$$

что является однородной системой, равносильной системе:

$$X = bk; \ Y = -ak; \ T = 0.$$

В пространстве полагают аналогично

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{T}{1}.$$

Интерпретация. Плоская проективная геометрия (g) может рассматриваться, как образ некоторой геометрии пространства (G), элементами которого являются прямые $D\left(\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{T}{c}\right)$, выходящие из некоторой начальной точки, и плоскости $P\ (uX+vY+wT=0)$, выходящие из той же точки. Каждая прямая D ставится в соответствие некоторой точке из (g), а каждая плоскость P ставится в соответствие некоторой прямой из (g). В (G) две различные прямые определяют некоторую плоскость P без каких-либо исключений, а две плоскости P пересекаются по некоторой прямой D. Аналогично n-мерная проективная геометрия (g) соответствует некоторой геометрии (G) пространства $n+1$-го измерения.

IV. Проективные преобразования плоскости (коллинеации)

Самое общее проективное преобразование плоскости на себя (*плоское гомографическое преобразование*)* можно определить равенством проективных координат соответственных точек M и M', заданных каждая по отношению к произвольным реперам $\{A, B, C, D\}$ и $\{A', B', C', D'\}$. Это преобразование является произведением перспектив плоскостей на плоскости, выполненных в трехмерном пространстве, содержащем заданную плоскость (например, полагая $K=AB\cap CD$ и $K'=A'B'\cap C'D'$, переводим сначала A в A', затем D и K в D' и K' и, наконец, B и C в B' и C').

Поэтому это преобразование сохраняет коллинеарность и двойные отношения коллинеарных точек. Обратно, любое преобразование плоскости на себя, сохраняющее коллинеарность и двойные отношения коллинеарных точек, есть проективное преобразование, вполне определенное четырьмя парами соответственных точек, причем в каждой четверке никакие три точки не должны лежать на одной прямой.

Пример. **Гомология.** *Это преобразование, полученное трансформированием некоторой гомотетии, определенной в аффинной плоскости P', с помощью перспективы на некоторую плоскость.*

В плоскости P', отправляясь от двух пар A', a' и B', b', где $A'B'$ и $a'b'$ параллельны, определяем гомотетию

$$\forall m',\ A'M' \parallel a'm' \text{ и } B'M' \parallel b'm'.$$

Это значит, что каждая точка бесконечно удаленной прямой остается инвариантной.

После перспективы A, a и B, b являются произвольными парами, и *любая точка некоторой прямой Δ (образ бесконечно удаленной прямой) остается инвариантной.*

Возьмем две точки C и D на прямой Δ. По отношению к базису (реперу) A, B, C, D образующая точка M плоскости определена своими проективными координатами α, β, γ, и ее образ m определен

* Употребителен также термин *коллинеация.—Прим. ред.*

по отношению к базису a, b, C, D теми же числами (ибо для определения чисел α и β можно использовать секущую Δ). Поэтому преобразование действительно является проективным (коллинеацией). Так как в гомотетии прямая, соединяющая точку со своим образом, проходит через инвариантную точку S', то это самое имеет место и в гомологии. Эта точка называется *центром гомологии*, а прямая Δ называется *осью гомологии*.

Отсюда следует, что *гомология вполне определена своим центром S, своей осью Δ и парой соответственных точек A, a, причем прямая Aa должна проходить через S*. В самом деле, образ m точки M характеризуется условиями: m находится на SM, и прямые AM и am пересекаются на прямой Δ.

Отсюда обратная теорема: *Точечное преобразование, оставляющее инвариантными точки некоторой прямой Δ и некоторую точку S вне прямой Δ, является гомологией.*

Сингулярная (особенная) гомология. Если трансформировать перспективой не подлинную гомотетию, а параллельный перенос, то получается преобразование, аналогичное предыдущему; каждая прямая Mm, соединяющая некоторую точку со своим образом, проходит через фиксированную точку S, *расположенную на прямой* Δ. Преобразование и в этом случае определено заданием прямой Δ, точки S и парой A, a соответственных точек.

Взаимная (инволюционная) гомология. Каждая гомология может быть определена, как результат трансформирования аффинитета перспективой, причем центр гомологии является образом бесконечно удаленной точки на $A'a'$. Но существуют взаимные (инволюционные) аффинитеты симметрии. В этом случае ось Δ' проходит через середину α' отрезка $A'a'$; иначе говоря, имеет место равенство

$$(S, \alpha; A, a) = -1.$$

Кроме того, какова бы ни была точка M, не только AM и am пересекаются на прямой Δ, но то же самое имеет место и для прямых Am и aM. Мы получаем здесь очень важную фигуру, которую сейчас изучим специально.

V. Гармоническое деление. Гармонические пучки

а) *Говорят, что четыре коллинеарные точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку, если двойное отношение $(A, B; C, D)$ равно числу* -1. Мы видели, что в этом случае все двойные отношения сводятся к трем числам -1, 2 и $^1/_2$.

По определению $(A, B; C, D) = -1$, что можно записать и так:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}, \tag{1}$$

или

$$\overline{CA}\cdot\overline{DB} + \overline{CB}\cdot\overline{DA} = 0. \tag{2}$$

В силу симметрии этого соотношения обе пары A, B и C, D играют одну и ту же роль, равно как и обе точки каждой пары. Точки одной пары называются *гармонически сопряженными* по отношению к точкам другой пары. Эти симметрии хорошо выявляются, если вернуться к абсциссам a, b, c, d четырех точек; равенство (2) тогда дает

$$(a+b)(c+d)=2(ab+cd). \tag{3}$$

Замечание. Если начало отсчета абсцисс — точка A, то формула дает

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}. \tag{4}$$

Если начало отсчета абсцисс — середина M отрезка AB, то формула дает

$$\overline{MA}^2=\overline{MB}^2=\overline{MC}\cdot\overline{MD}. \tag{5}$$

Эти формулы часто полезны в приложениях. Гармонизм характеризуется тем фактом, что двойное отношение само себе обратно, например,

$$(A,\ B;\ C,\ D)=(A,\ B;\ D,\ C)\ *,$$

ибо если все точки различны, то двойное отношение не может равняться числу $+1$, а лишь числу -1.

Пучок четырех прямых (именуемых *лучами*) *называется гармоническим, если его двойное отношение равно числу* -1, то есть если он определяет на любой секущей гармоническую четверку. *Сопряженные лучи* проходят через соответственные им точки одной и той же пары, то есть через сопряженные точки. Используем секущую, параллельную одному из лучей; получаем предложение: *в аффинной плоскости гармонический пучок характеризуется тем фактом, что два сопряженных луча находятся в косой симметрии по отношению к третьему лучу*, причем направление симметрии параллельно четвертому лучу **.

Это позволяет построить гармонический пучок, зная одну сопряженную пару лучей и один из лучей второй пары: проводят параллель к одному из известных лучей второй пары. Точкой, сопряженной бесконечно удаленной точке, является середина отрезка, определенного двумя другими точками. Этому аффинному построению мы предпочитаем следующее проективное построение. Двойное

* Действительно, отсюда имеем: $(ABCD)=\dfrac{1}{(ABCD)}$ и, далее, $(ABCD)^2=1$. — *Прим. ред.*

** Имеется в виду, что на любой прямой, параллельной четвертому лучу, первые два луча определяют отрезок, серединой которого является точка пересечения прямой с третьим лучом. Однако в нашей литературе не употребителен приведенный способ выражения этого факта.— *Прим. перевод.*

отношение должно быть обратно самому себе. Поэтому если две секущие пересекаются в точке A на одном из лучей пучка, что дает равенство

$$(A,\ M;\ B,\ C)=(A,\ M';\ B',\ C'),$$

то необходимым и достаточным условием гармонизма (поскольку при различных точках исключается возможность, чтобы двойное отношение равнялось $+1$) является существование равенства

$$(A,\ M;\ B,\ C)=(A,\ M';\ C',\ B').$$

Это значит (согласно § II, b, обратная теорема), что MM', BC' и CB' пересекаются в одной точке T. Поэтому прямая MM' соединяет вершину пучка с этой точкой T. Отсюда построение: *если дана пара лучей Sb, Sc и луч Sa, то луч Sm, сопряженный лучу Sa, получается с помощью двух секущих ABC и $AB'C'$, выходящих из какой-либо точки A луча Sa; искомый луч проходит через точку пересечения прямых BC'* и *CB'*.

b) **Определение.** Если дана пара прямых d_1, d_2 и точка A, то *полярой точки A по отношению к паре прямых* называется геометрическое место точек M, сопряженных точке A по отношению к концам отрезка N_1N_2, который определяется прямыми пары на любой секущей, выходящей из точки A. На каждой секущей точка M единственная. Эта точка расположена на луче δ, сопряженном гармонически лучу SA * по отношению к прямым d_1, d_2; этот луч δ является поэтому искомым геометрическим местом.

Обсуждение. Если вершина пучка — точка S (не бесконечно удаленная), то точка S луча δ может рассматриваться принадлежащей геометрическому месту, только если *согласиться считать гармонической четверку точек, в которой три являются совпадающими*. Это терминологическое соглашение часто полезно из соображений непрерывности. (Двойное отношение в этом случае не определено, имеется неопределенность. Мы можем поэтому приписать двойному отношению значение —1.)

Особенные положения точки A. Это, очевидно, точки прямых d_1 и d_2, точка S, если она существует, и бесконечно удаленные точки плоскости.

1. Сразу видно, что этот последний случай не имеет ничего исключительного: если точка A находится на бесконечности в направлении σ, то и секущие параллельны направлению σ, равно как и прямая SA, и вывод сохраняет силу.

2. Если точка A находится на прямой d_1, но не в точке S, то всякая секущая s, отличная от d_1, содержит точку N_1, совпадающую с A, и отличную от нее точку N_2; поэтому нужно считать, что и точка M совпадает с A, согласно предыдущему соглашению.

* S — точка пересечения прямых d_1 и b_2, о чем в тексте не упоминается.— *Прим. перевод.*

Но если секущая s совпадает с прямой d_1, то точка N_2 находится в S, а точка N_1 имеет неопределенное положение на d_1. Мы имеем поэтому особый случай.

Для общности мы будем говорить в этом случае, что поляра точки A есть d_1, ибо *пучок, в котором три луча совпадают, может рассматриваться, как гармонический пучок*, и общая формулировка будет применима.

3. Если, наконец, точка A находится в S, то на каждой секущей s точки N_1 и N_2 совпадают с A, значит, точка M абсолютно не определена: поляра совсем не существует в этом случае, если мы не желаем считать, что вся плоскость является полярой.

Вывод. *В плоскости полярой некоторой точки A по отношению к паре прямых (если A не вершина пучка, определенного этими прямыми) является луч, гармонически сопряженный относительно той же пары лучу, проходящему через A.*

Обратно, точка A называется *полюсом* прямой δ. Ясно, что любая точка прямой SA, за исключением точки S, есть полюс прямой δ. Поэтому соответствие между полюсом и полярой по отношению к паре прямых далеко не взаимно однозначно.

Две точки называются *сопряженными по отношению к паре прямых*, если одна из них находится на поляре другой. *Это отношение взаимно.* Эти названия, не слишком полезные в настоящем случае, соответствуют существенным понятиям, если заменить пару прямых коническим сечением, пересекаемым каждой прямой s в двух точках. Мы изучим этот вопрос в метрической геометрии для круга и оттуда выведем с помощью перспективы теорию, относящуюся к коническим сечениям.

Пример приложения. Предложение о полном четырехстороннике.

Полный четырехсторонник — это фигура, образованная четырьмя прямыми, из которых никакие три не пересекаются в одной точке. Фигура имеет шесть вершин, из которых на бесконечности могут лежать одна, две или даже три вершины, если одна из прямых — бесконечно удаленная прямая. Имеются три диагонали, то есть прямые, соединяющие две вершины, не расположенные на одной и той же стороне; эти диагонали образуют треугольник, называющийся диагональным треугольником, каждая сторона которого содержит две вершины четырехсторонника.

В силу проективного построения поляры по отношению к двум диагоналям две вершины, расположенные на третьей диагонали, гармонически сопряжены. Это значит, что на каждой диагонали две находящиеся на ней вершины и точки ее пересечения с двумя другими диагоналями образуют гармоническую четверку. Если употреблять слово «диагональ» в смысле «отрезок, ограниченный вершинами», то можно сформулировать результат следующим образом: *в полном четырехстороннике каждая диагональ делится гармонически двумя другими.*

Можно вывести это предложение из теоремы аффинной геометрии: «диагонали параллелограмма делятся пополам точкой их пересечения», ибо каждый полный четырехсторонник может быть получен перспективой из параллелограмма. Можно видеть, что общее предложение содержит также теорему о прямых, соединяющих середины двух сторон треугольника.

с) **Два предложения из метрической геометрии** мы поместим здесь, хотя это и противоречит общему плану. Эти два предложения дополняют в метрической геометрии предшествующее изложение.

1) Гармонический пучок частного вида. Мы охарактеризовали гармонизм пучка условием, чтобы два сопряженных луча находились в косой симметрии по отношению к одному лучу второй пары, причем симметрия осуществляется по направлению, параллельному второму лучу второй пары. Сказать, что эта симметрия ортогональна, означает, что лучи второй пары взаимно перпендикулярны. Значит, *любая пара прямых и биссектрисы углов, образованных этими прямыми, образуют гармоническую четверку прямых, и, обратно, если в некотором гармоническом пучке два сопряженных луча взаимно перпендикулярны, то эти лучи являются биссектрисами углов второй пары.*

2) Выражение двойного отношения четверки прямых пучка через углы. В метрической геометрии две четверки прямых (в двух пучках) равны, если их лучи образуют в ориентированной плоскости соответственно равные (с точностью до $k\pi$) углы. Двойное отношение

$$\lambda = (d_1,\ d_2;\ \delta_1,\ \delta_2)$$

можно выразить через функции синусов углов. Формула, дающая в любом треугольнике отношения сторон через функции отношений синусов противолежащих углов, дает, если пересечь пучок некоторой прямой, следующее соотношение, верное по абсолютной величине,

$$\lambda = \frac{\sin(d_1,\ \delta_1)}{\sin(d_2,\ \delta_1)} : \frac{\sin(d_1,\ \delta_2)}{\sin(d_2,\ \delta_2)}.$$

Остается проверить это соотношение по знакам; так как ориентации, выбираемые на плоскости и на каждой прямой, не фигурируют, то проверка выполняется, если ориентировать, например, каждую прямую от вершины к секущей. Очевидно, что формула не применима к пучку параллельных прямых.

VI. Очерк прямого аксиоматического введения проективной геометрии

В предшествующем изложении мы вывели проективную геометрию из аффинной геометрии. Противоположный путь может показаться более удовлетворительным, такой путь представляет все аффинное, как спецификацию проективного, подобно тому, как все метрическое будет представлено как спецификация аффинного, осуществляемая обогащением теории.

Согласно вышесказанному, нам понятно, что за аксиомы принимают следующие предложения, не допуская никаких исключений.

Аксиомы инцидентности

Через две различные точки проходит прямая и лишь одна. Через три неколлинеарные точки проходит плоскость и только одна. Две несовпадающие плоскости имеют одну общую прямую.

Две различные прямые одной плоскости имеют одну общую точку.

Приняв эти предложения, исходим из фигуры трехмерного пространства, состоящей из трехгранника с вершиной в точке S, пересеченного двумя плоскостями P и P' в точках A, B, C; A', B', C'. Точки $\alpha = BC \cap B'C'$, $\beta = CA \cap C'A'$, $\gamma = AB \cap A'B'$ коллинеарны, так как расположены на прямой Δ пересечения плоскости P и P'.

Перспективой из некоторого центра Σ на некоторую плоскость p эта пространственная фигура преобразуется в плоскую фигуру, которую мы назовем *фигурой гомологических треугольников* и которая состоит из двух треугольников abc и $a'b'c'$, соответствующих друг другу так, что прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке s, а сходственные стороны пересекаются попарно в трех точках, лежащих на одной прямой (δ).

Докажем теперь основную теорему.

1. Теорема о гомологических треугольниках (проективная фигура Дезарга)

Пусть в плоскости p даны три пары точек a, a'; b, b'; c, c' и

$$s = aa' \cap bb',$$

$$\alpha = bc \cap b'c', \ \beta = ca \cap c'a', \ \gamma = ab \cap a'b',$$

тогда имеет место равносильность следующих утверждений:

$$s \in cc' \iff \gamma \in \alpha\beta.$$

Чтобы это доказать, покажем, что нашу фигуру можно рассматривать, как перспективу выше описанной пространственной фигуры. Мы возьмем плоскость P' совпадающей с плоскостью p фигуры, так что точками A', B', C' являются точки a', b', c'. Мы берем произвольно точку Σ вне плоскости p и берем некоторую точку на прямой $s\Sigma$. Это определяет точки $A = \Sigma a \cap Sa'$ и $B = \Sigma b \cap Sb'$. Следовательно,

$AB =$ (плоскость Σab) $\cap$ (плоскость $Sa'b'$), значит,

$$\gamma \in AB.$$

1) П р е д п о л о ж е н и е. $s \in cc'$.

Мы определяем C так: $C = \Sigma c \cap Sc'$. Тогда α, β, γ коллинеарны, так как лежат на следе плоскости ABC в плоскости p.

2) П р е д п о л о ж е н и е. α, β, γ коллинеарны.

Определяем C, как след прямой Sc' на плоскости $AB\alpha\beta\gamma$. Тогда

$$\alpha \in BC \text{ и } \beta \in AC,$$

значит, по перспективе с центром Σ

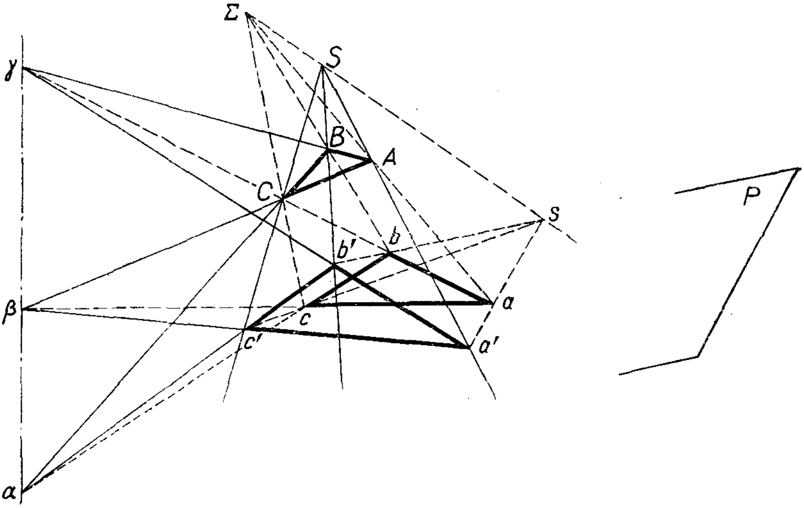
$$C = \alpha B \cap \beta A$$

дает:

$$\alpha b \cap \beta a = c,$$

и коллинеарные точки S, c', C дают коллинеарные точки s, c', c.

Гомология в плоскости. Пусть дана фигура, состоящая из гомологических треугольников в плоскости p; предположим, что с помощью точек s и Σ построена пространственная фигура.



Черт. 45

Каждой точке m плоскости p соответствует по перспективе с центром в Σ точка M плоскости P, а затем по перспективе с центром в S точка m' плоскости p. Соответствие между точками m и m' может быть определено в плоскости p коллинеарностью smm' и тем фактом, что прямая ma пересекает прямую $m'a'$ на прямой δ.

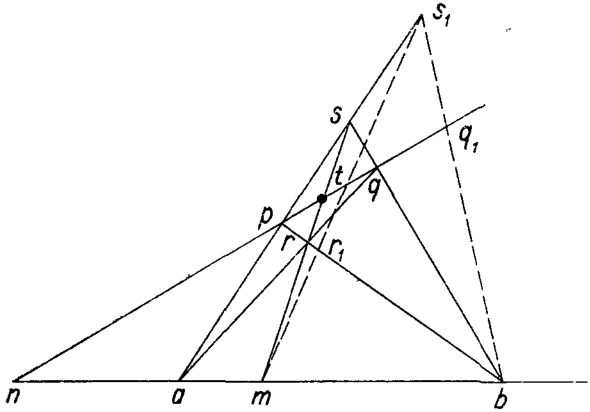
Это преобразование мы называем *гомологией*. Оно определено центром s прямой δ, состоящей из инвариантных точек, и парой соответственных точек a, a', причем прямая aa' должна проходить через точку s.

Отметим, что точка s может находиться на прямой δ, но точки a и a' не должны находиться на δ и должны быть отличными от точки s.

2. **Гармонизм.** Пусть дана фигура, образованная четырьмя прямыми aps, arq, bqs, brp (полный четырехсторонник). Диагональ

ab пересекается в точке m диагональю sr и в точке n диагональю pq. Мы сейчас докажем, что *если точки* a, b, m *даны, то точка* n *определена независимо от прямых, образующих четырехсторонник.*

Итак, пусть даны точки a, b, m. На некоторой прямой, выходящей из a, возьмем точки p и s. Наложенные коллинеарности определяют точки r и q, значит, и точку n. Достаточно показать, что точка n



Черт. 46

остается фиксированной, если менять точку s на прямой ap. В самом деле, тогда можно будет также менять точку s на sb, точку p на as и получить таким образом произвольные положения точек s и p.

Мы берем поэтому s_1 на as, сохраняем точку p и рассматриваем

$$r_1 = bp \cap ms_1, \quad q_1 = bs_1 \cap pq.$$

Нужно доказать, что a, r_1, q_1 коллинеарны. Но это вытекает немедленно из расположения треугольников qrp и bms_1. Действительно, bq, rm и ps_1 пересекаются в точке s; значит, точки

$$a = qr \cap bm, \quad r_1 = rp \cap ms_1 \text{ и } q_1 = qp \cap bs_1$$

лежат на одной прямой.

Таким образом, *любой тройке* a, b, m *коллинеарных точек соответствует четвертая точка* n, *называемая гармонически сопряженной третьей точке по отношению к первым двум.* Говорят, что пара a, b и пара m, n находятся в *гармоническом отношении.* Если мы обозначим через t точку пересечения прямых rs и pq (это третья диагональная точка полного четырехсторонника), то в фигуре имеются и другие гармонические четверки: p, q; n, t и r, s; t, m. Мы видим, что четверка a, b; m, n находится в перспективе, как с четверкой p, q; t, m (центр перспективы s), так и с четверкой q, p; t, n (центр перспективы r).

Следствие. *Если в любом точечном преобразовании плоскости, сохраняющем коллинеарность, некоторая прямая δ содержит три инвариантные точки, то она содержит бесчисленное множество таких точек.*

В самом деле, три такие точки дают с помощью фигуры полного четырехсторонника точку, сопряженную гармонически с одной из точек по отношению к двум другим, а преобразование сохраняет гармонизм, согласно предшествующей теореме.

Пусть тогда a, a' и b, b' — две пары соответственных точек, таких, что ab проходит через одну из инвариантных точек прямой δ, и пусть s — точка пересечения прямых aa' и bb'. Гомология, определенная точкой s, прямой δ и парой соответственных точек a, a', имеет общей парой с рассмотренным преобразованием любую пару соответственных точек m, m', таких, что ma и mb пересекают δ в инвариантных точках. Преобразование имеет, следовательно, с гомологией бесконечное множество общих пар, образующих, очевидно, счетное множество. Однако мы не можем утверждать, что оба преобразования имеют *все* пары соответственных точек общими, если не введем *дополнительную аксиому*, налагающую ограничение на рассмотренное преобразование.

Преобразование называется *непрерывным*, если любая предельная точка точек m имеет своим образом предельную точку образов m' точек m. Нам нужно принять за аксиому, что *рассматриваемое преобразование непрерывно.*

Тогда мы получаем следующее предложение:

Любое непрерывное точечное преобразование плоскости, сохраняющее коллинеарность и имеющее три инвариантные коллинеарные точки, есть гомология.

В частности, *фигура двух гомологических треугольников определяет единственное непрерывное преобразование, сохраняющее коллинеарность, и это есть гомология.*

3. **Перспектива в плоскости.** В гомологии точечное соответствие между точками некоторой прямой x и точками ее образа x' есть перспектива с центром в s. Обратно, всякая перспектива прямой x на прямую x' с центром в s может рассматриваться, как ограничение на прямой x некоторой гомологии, ось которой δ есть какая-либо прямая, проходящая через точку пересечения прямых x и x'.

Теорема. *Пусть a', b', c', m' — четыре коллинеарные точки и a, b, c — три коллинеарные точки. Тогда образ m точки m' в произведении перспектив, преобразующем точки a', b', c' в точки a, b, c, определен и не зависит от рассмотренных перспектив.*

Действительно, рассмотрим перспективы, о которых идет речь, как ограничения некоторых гомологий, и пусть (T_1), и (T_2) — те произведения гомологий, которые переводят точки a', b', c', m' соответственно в их образы a, b, c, m_1 и a, b, c, m_2. Произведение преобразования, обратного одному из этих преобразований, на другое переводит точки a, b, c, m_1 в их образы a, b, c, m_2. Но это произведение сохраняет коллинеарность и оставляет инвариантными точки a, b, c, значит, и все другие точки прямой abc; поэтому точки m_1 и m_2 совпадают.

Таким образом, для каждой четверки коллинеарных точек появляется *инвариант относительно перспектив*, который обозначается через $(a, b; c, m)$. Порядок точек, разумеется, существен, однако для гармонических четверок будет:

$$(a, b; c, d) = (a, b; d, c).$$

Если на двух прямых x и x' даны три пары соответственных точек a, a'; b, b'; c, c', то соответствие, сохраняющее инвариант $(a, b; c, m)$, называется *проективным (гомографическим) соответствием*.

Отсюда, в частности, предложение.

Если две прямые x и x' являются носителями точек, находящихся в проективном соответствии, и если общая точка прямых сама себе соответствует, то соответствие является плоской перспективой.

4. **Введение аффинной геометрии плоскости.** Теперь заставим играть специальную роль некоторую прямую, которую будем называть *бесконечно удаленной прямой*; ее точки будут называться *бесконечно удаленными точками*, и две прямые, проходящие через такую точку, будут называться *параллельными*. Две пары параллельных прямых различных направлений образуют *параллелограмм*.

Фигура, состоящая из гомологических треугольников, когда центр s находится на оси δ, являющейся бесконечно удаленной прямой, приводит к предложению:

Если $abb'a'$ и $bcc'b'$ — параллелограммы, то $acc'a'$ — также параллелограмм.

Мы выводим отсюда отношение эквивалентности, а именно отношение эквиполентности (равенства) между векторами, затем понятие *свободного вектора* (класса эквивалентности), понятие *суммы свободных векторов* и понятие *параллельного переноса*.

Если теперь мы рассмотрим гомологию, ось которой δ является бесконечно удаленной прямой, а центр s не лежит на этой прямой, то мы получаем *гомотетию*, а также *умножение вектора на число*, если мы сделали на некоторой прямой отметки с помощью параллельного переноса.

Таким образом создана аффинная геометрия плоскости, а мы видели, что она позволяет приписать инварианту относительно перспектив некоторое число: двойное отношение четырех коллинеарных точек.

Упражнение по проективной геометрии. Теорема Паскаля. *Пусть даны на двух прямых x и x', с общей точкой O, точки* 1, 3, 5 *на прямой x и точки* 2, 4, 6 *на прямой x'. Доказать коллинеарность точек*

$$u = 12 \cap 45, \ v = 23 \cap 56, \ w = 34 \cap 61.$$

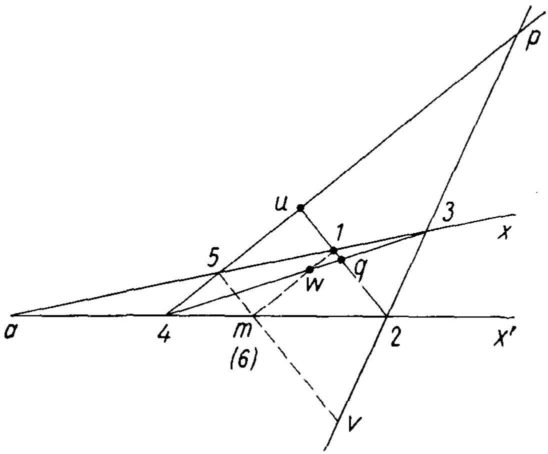
Рассмотрим точки 1, 2, 3, 4, 5, как фиксированные, а шестую точку m прямой x', как подвижную.

На прямой 23 точка v находится в перспективе с точкой m (из центра 5), а на 34 точка w находится в перспективе с точкой m (из центра 1). Но рассмотрим три частных положения точки m:

m в 0 дает v и w в 3;

m в 4 дает v в p и w в 4, где $p \in 45$;

m в 2 дает v в 2 и w в q, где $q \in 12$.



Черт. 47

Значит, точки 3, p, 2, v и 3, 4, q, w находятся в перспективе с точками 0, 4, 2, m, то есть перспективны друг другу.

Центром перспективы является точка $p4 \cap 2q$, то есть точка u. Значит, какова бы ни была точка m на прямой x', точки u, v, w коллинеарны.

Замечание. Можно найти другое доказательство, если преобразовать рассматриваемую фигуру с помощью перспективы в аффинную фигуру Паскаля (кн. IV, гл. I, § 1), подобно тому, как перспектива может преобразовать проективную фигуру Дезарга (то есть фигуру, состоящую из гомологических треугольников) в аффинную фигуру Дезарга (то есть в фигуру гомотетичных треугольников).

Вторая часть

МЕТРИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

Первая глава

ЕВКЛИДОВА МЕТРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Отправляясь от аффинной геометрии, мы ввели в книге I, главе V, евклидову метрическую геометрию. Мы сейчас будем изучать эту геометрию в ее аналитическом аспекте, но сначала в аспекте синтетическом.

§ 1. Метрические соотношения

I. Соотношения между длинами

Теорема Шаля позволяет сравнивать отрезки, отложенные на той же прямой; *теорема Фалеса* позволяет сравнивать параллельные отрезки. Введение метрики позволяет, если выбрана единица длины, вычислить с помощью *теоремы Пифагора* расстояние между двумя точками, определенными своими координатами. Базис будет всегда предполагаться ортонормальным, то есть состоящим из единичных взаимно перпендикулярных векторов. Мы видели, что расстояние не зависит от базиса.

Таким образом, если единица длины выбрана, то основные формулы для всяких вычислений имеют форму:

$$a=b+c; \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad a^2=b^2+c^2.$$

Эти формулы сохраняются при изменении единицы длины, потому что в результате такого изменения каждая из фигурирующих в формулах букв умножается на одно и то же число. Исчезновение этого множителя выражается утверждением, что написанные равенства *однородны*, или же, что *обе части каждого из равенств являются однородными выражениями одной и той же степени.*

Мы договоримся сохранять в дальнейшем этот характер для всех равенств, которые будут выведены из предыдущих. Следовательно, нельзя выбирать особую единицу длины, например расстояние между двумя определенными точками фигуры, и, кроме того, не вводить таких соотношений, как

$$a+b^2=c+d+e^2+f^2,$$

хотя их можно было бы вывести из приемлемых соотношений

$$a=c+d \text{ и } b^2=e^2+f^2.$$

1) Построение. Переносом расстояний, проведением параллелей и откладыванием прямых углов мы можем построить:

сумму двух длин

$$x=a+b;$$

четвертую пропорциональную для трех длин

$$x=ac/b;$$

квадратный корень из суммы квадратов двух длин

$$x=\sqrt{a^2+b^2},$$

или *из их разности*

$$x=\sqrt{a^2-b^2}.$$

2) Пусть дан отрезок AB. Мы можем взять на прямой AB единичный вектор $\boldsymbol{u}$ и положить $\boldsymbol{AB}=a\boldsymbol{u}$, затем определить любую точку M с помощью одного из единичных векторов $\boldsymbol{v}$, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{u}$ в плоскости ABM.

Полагая

$$\boldsymbol{AM}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v},$$

выводим отсюда

$$\boldsymbol{BM}=(x-a)\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v},$$

значит,

$$\left\{\begin{array}{l} AM^2=x^2+y^2 \\ BM^2=(x-a)^2+y^2 \end{array}\right. \Rightarrow BM^2=AM^2+a^2-2ax.$$

Изменим обозначения: пусть дан треугольник ABC и пусть H есть основание высоты, выходящей из вершины A. Прежнее соотношение напишется теперь так:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\overline{BC}\cdot\overline{BH}\,* \tag{I}$$

(*основное соотношение для любого треугольника*).

Частный случай: треугольник прямоугольный при вершине A.

Теорема Пифагора дает

$$BC^2=AB^2+AC^2, \tag{I'}$$

откуда

$$AB^2=\overline{BC}\cdot\overline{BH}. \tag{II}$$

Это соотношение (II) характеризует прямоугольный треугольник, так как (I′) следует из (I) и (II).

* Обозначения изменены следующим образом: точки A, M, B заменяются соответственно точками B, A, C.— *Прим. перевод.*

Так как изучение окружности нам позволит построить прямоугольный треугольник, зная гипотезу и один из отрезков, определяемых высотой на гипотенузе, то фигура (II) показывает, что мы *сможем построить среднюю геометрическую x между двумя длинами a и b.*

Замечание. Формула (I) показывает, что если известны $AB = a$ и $AH = x$, то геометрическое место таких точек M, что

$$BM^2 - AM^2 = a^2 - 2ax$$

является плоскостью, перпендикулярной к AB в точке H. Обратно, разность квадратов расстояний точки M от двух данных точек A, B определяет x, значит, точку H, то есть ортогональную проекцию точки M на прямую AB.

3) Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, а M — какая-либо точка, которая проектируется на ABC в точку H. Обе формулы (I), примененные к AB и AC, дают:

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AH};$$

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}.$$

Исключая AH и используя теорему Шаля таким образом, чтобы ввести точки A, B, C симметрически, находим формулу Стюарта:

$$AM^2\cdot\overline{BC} + BM^2\cdot\overline{CA} + CM^2\cdot\overline{AB} - \overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB} = 0. \qquad (S)$$

Можно убедиться, как и для (I), что эта формула единственная, связывающая введенные длины, так что всякая другая ей обязательно эквивалентна.

Преобразуем это соотношение. Часто определяют точку C на AB, с точки зрения аффинной геометрии, отношением:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = q,$$

так что

$$\frac{\overline{CB}}{q} = \frac{\overline{CA}}{1} = \frac{\overline{AB}}{q-1}, \quad q \neq 1,$$

или еще, чтобы заставить A и B играть аналогичные роли:

$$\frac{\overline{CB}}{\alpha} = \frac{\overline{CA}}{-\beta} = \frac{\overline{AB}}{\alpha+\beta}, \quad \alpha+\beta \neq 0. \qquad (1)$$

Формула Стюарта приобретает тогда следующий вид:

$$\alpha AM^2 + \beta BM^2 - (\alpha+\beta)\, CM^2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} AB^2 = 0. \qquad (S')$$

Поскольку для данной пары точек A и B и чисел α, β, где $\alpha + \beta \neq 0$, можно получить точку C, удовлетворяющую соотношению (I), то формула (S') показывает, что геометрическое место точек M таких, что

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = p,$$

где p — данное число, является сферой, или не существует, в зависимости от того, определяется или не определяется из формулы (S') значение CM.

Нужно рассмотреть особо два следующих частных случая:

1) $p=0$, $\frac{\alpha}{\beta}=-k^2$;

2) $\alpha=\beta$.

Обобщение. Если даны n точек с приписанными им коэффициентами, то выражение

$$\Sigma=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\ldots+\alpha_n MA_n^2$$

может быть представлено в виде

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) MK^2+\varepsilon d^2.$$

где K — определенная точка, если только сумма коэффициентов отлична от нуля. Здесь d — это длина, которую определяют рекуррентно, а ε означает $+1$, или -1. Геометрическое место таких точек M, что Σ равняется данному числу, является, следовательно, если только оно существует, сферой или, в виде исключения, плоскостью.

Добавим, что полученные формулы плохо приспособлены к вычислениям, и их лучше заменить формулами тригонометрии или аналитической геометрии.

II. Метрическая аналитическая геометрия на плоскости

Рассмотрим в плоскости начало O и ортонормальный базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. По определению $\boldsymbol{j}$ — единичный вектор, прямо перпендикулярный вектору $\boldsymbol{i}$.

Прямая определена точкой A, заданной вектором

$$\boldsymbol{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$$

и единичным вектором $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha,$$

как геометрическое место точек M, таких, что

$$\boldsymbol{AM}=m\boldsymbol{u},$$

где m пробегает множество действительных чисел. Следовательно,

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x_0+m\cos\alpha)\boldsymbol{i}+(y_0+m\sin\alpha)\boldsymbol{j}.$$

Уравнение прямой получается исключением числа m из двух равенств

$$\begin{cases} x=x_0+m\cos\alpha; \\ y=y_0+m\sin\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha.$$

Обратно, если даны угол $\varphi \pmod{2\pi}$ и длина p, то уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p \tag{1}$$

представляет прямую, определенную с помощью угла

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

и, например, точки

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{p}{\sin\varphi}.$$

Уравнение (1) называется *нормальным уравнением прямой*. Оно единственно, с точностью до замены угла φ на $\varphi + (2k+1)\pi$ с изменением знака числа p.

Геометрический смысл числа p. Одним из единичных векторов, перпендикулярных к прямой, заданной направлением

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi,$$

будет вектор

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi.$$

Отсюда получается:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{u}\sin\varphi + \boldsymbol{w}\cos\varphi; \\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}\cos\varphi + \boldsymbol{w}\sin\varphi, \end{cases}$$

значит,

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,\boldsymbol{u} + (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\,\boldsymbol{w}.$$

Таким образом,

$$p = x\cos\varphi + y\sin\varphi -$$

это мера расстояния $\overline{OH}$ от точки O до прямой (расстояния ориентированного по вектору $\boldsymbol{w}$).

Кроме того,

$$\overline{HM} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi -$$

это расстояние от основания перпендикуляра до точки M, ориентированное по вектору $\boldsymbol{u}$.

В выражении для $\overline{OH}$ мы узнаем скалярное произведение

$$\overline{OH} = x\cos\varphi + y\sin\varphi = \boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{w},$$

в выражении для $\overline{HM}$ меру векторного произведения

$$\overline{HM} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{OM}.$$

Таким образом, в нормальном уравнении прямой правая часть p дает меру расстояния OH, ориентированного по вектору $\boldsymbol{w}$.

Переносом осей проверяется, что *расстояние от некоторой точки* (x_1, y_1) *до прямой с нормальным уравнением*

$$D(x, y) \equiv x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

равно

$$D(x_1, y_1) = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p,$$

причем это расстояние является мерой вектора $\mathbf{M_1H_1}$, ориентированного по вектору $\mathbf{w}$.

Эта формула служит дополнением к формуле, дающей расстояние между двумя точками:

$$M_1M_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

(формула Пифагора).

III. Метрические соотношения, содержащие тригонометрические функции

Основные системы характеризуют шесть элементов треугольника: его стороны и углы. Любые фигуры изучаются с помощью триангуляции.

Прямоугольный треугольник. Если угол A предполагается прямым, a, b и c — меры сторон, а B и C — меры острых углов, то *системой, необходимой и достаточной для существования* прямоугольного треугольника, имеющего эти элементы, является:

$$\begin{cases} B+C=\frac{\pi}{2}, \ b=a\sin B, \quad c=a\cos B; \\ a>0, \ 0<B<\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

В самом деле, неравенства обеспечивают существование прямоугольного треугольника, построенного с помощью гипотенузы a и острого угла B. Другие элементы этого треугольника имеют тогда действительно значения C, b, c, согласно написанным соотношениям, верным для любого прямоугольного треугольника.

Любой треугольник. Условие, необходимое и достаточное, чтобы a, b, c, A, B, C были элементами треугольника, выражается системой:

$$(T)\begin{cases} A+B+C=\pi, \ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}; \\ a>0, \ B>0, \ C>0, \ B+C<\pi. \end{cases}$$

В самом деле, неравенства выражают возможность построить треугольник со стороной a и углами B, C. Другими элементами этого треугольника являются A, b, c, так как написанные равенства верны в каждом треугольнике. Первое следует из теории параллелей, два других из теоремы о вписанном угле в ее элементарной форме (если точка A' — середина стороны BC и O — центр описанной вокруг треугольника окружности, то $\widehat{BOA}=\widehat{COA}$ составляет угол A, или $\pi-A$, в зависимости от того, является ли угол A острым, или тупым, так что $a=2R\sin A$, где R — радиус описанной окружности; аналогично для других сторон).

З а м е ч а н и е. Если учесть первое уравнение и симметрию системы, то неравенства выражают условия:

Одна сторона (по выбору) и все три угла должны быть положительными.

Другая система, обеспечивающая существование треугольника. Из основного соотношения в любом треугольнике

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}$$

следует немедленно соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

К трем уравнениям этого типа следует присоединить для образования системы (T'), обеспечивающей существование треугольника, построенного по элементам b, c, A, еще неравенства:

$$b > 0,\ c > 0,\ 0 < A < \pi,$$

и еще, чтобы обеспечить, что построенные элементы действительно равны b, c, A, неравенства:

$$a > 0,\ 0 < B < \pi,\ 0 < C < \pi.$$

В конечном счете система (T') содержит неравенства, выражающие, что три меры сторон положительны, а три меры углов заключены каждая между числами 0 и π. (Заметим, что если даже написано лишь одно равенство рассмотренной системы, то оно обеспечивает условие, чтобы одна сторона была заключена между суммой и абсолютной величиной разности двух других.)

Система, которую мы только что составили, мало практична, как и соотношения лишь между длинами; она служит лишь для вычисления углов, если известны стороны. Более полезна, вообще говоря, система (T).

Пример приложения. Задача Стюарта. Вычислить в треугольнике ABC длину m отрезка, соединяющего точку A с некоторой данной точкой M стороны BC.

Если точка M задана одним из углов $B\widehat{A}M$ или $B\widehat{M}A$, то решение получается с помощью формулы:

$$\frac{m}{\sin B} = \frac{c}{\sin B\widehat{M}A}. \tag{1}$$

Если точка M задана длиной $BM = u$, то мы вычислим вспомогательный угол $B\widehat{M}A = \theta$, который позволяет получить m с помощью предыдущей формулы. Если векторы $\mathbf{BM}$ и $\mathbf{BC}$ имеют то же направление, то треугольник BMA дает

$$\frac{c}{\sin\theta} = \frac{u}{\sin(\theta + B)}.$$

Это уравнение, однородное относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$, могло бы дать значение $\operatorname{tg}\theta$, но мы получим лучший способ вычисления, если напишем уравнение в следующей форме:

$$\frac{c+u}{2\sin\left(\frac{B}{2}+\theta\right)\cos\frac{B}{2}} = \frac{u-c}{2\cos\left(\frac{B}{2}+\theta\right)\sin\frac{B}{2}},$$

откуда θ определяется:

$$\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{B}{2}\right)=\frac{u+c}{u-c}\operatorname{tg}\frac{B}{2}. \tag{2}$$

Если $\boldsymbol{BM}$ и $\boldsymbol{BC}$ имеют противоположные направления, то

$$\frac{c}{\sin\theta}=\frac{u}{\sin(B-\theta)}. \tag{2'}$$

Достаточно поэтому приписать в этом случае знак — числу u и изменить знак угла θ. Это значит, что мы сохраняем формулу (2). Если u положителен, то угол θ берут заключенным между числами O и π; если u отрицателен, то θ вычисляют заключенным между числами $-\pi$ и 0 и берут значение $-\theta$ для вычисления по формуле (1). Обе формулы (1) и (2) позволяют облегчить вычисление с помощью логарифмов; мы использовали, таким образом, большую гибкость тригонометрических формул. В вычислениях для не слишком простой фигуры не следует почти никогда пользоваться лишь соотношениями между длинами; нужно, в зависимости от обстоятельств, либо проводить вычисления методом аналитической геометрии, либо прибегать к тригонометрическим расчетам, вводя выбранный надлежащим образом вспомогательный угол.

§ 2. Окружности. Сферы

I. Окружность и углы

1. **Вписанный угол.** Мы напоминаем полученное предложение (кн. I, гл. VIII). *Все параллельные между собой хорды имеют ту же медиатрису, диаметр окружности.* В симметрии по отношению к этому диаметру каждая из параллельных хорд инвариантна в целом.

a) Лемма. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R. *Если две хорды M_1M_2 и P_1P_2 параллельны, то*

$$(\boldsymbol{OM}_1,\ \boldsymbol{OP}_1)=-(\boldsymbol{OM}_2,\ \boldsymbol{OP}_2)\ (\operatorname{mod} 2\pi).$$

В самом деле, $(\boldsymbol{OM}_1,\ \boldsymbol{OP}_1)$ и $(\boldsymbol{OM}_2,\ \boldsymbol{OP}_2)$ соответствуют друг другу в симметрии по отношению к диаметру, являющемуся медиатрисой обеих хорд. Заметим, что ничто не отличает одну от другой: ни обе точки M, ни обе точки P, к тому же и формула Шаля позволяет перейти от написанного равенства к

$$(\boldsymbol{OM}_1,\ \boldsymbol{OP}_2)=-(\boldsymbol{OM}_2,\ \boldsymbol{OP}_1)\ (\operatorname{mod} 2\pi).$$

b) Пусть даны две прямые X, Y, пересекающие окружность в точках M', M'' и P', P''. Мы намерены сравнить ориентированный угол $(X,\ Y)$, определенный с точностью до π, с углами, образованными радиусами $\boldsymbol{OM'}$, $\boldsymbol{OM''}$, $\boldsymbol{OP'}$, $\boldsymbol{OP''}$ между собой. Проведем через центр O прямые x и y, соответственно параллельные прямым X и Y;

они пересекают окружность в точках m_1, m_2; p_1, p_2, где индексы приписаны каким-либо образом двум одноименным точкам. Мы имеем

$$(X, Y) = (\boldsymbol{Om_1}, \boldsymbol{Op_1}) = (\boldsymbol{Om_2}, \boldsymbol{Op_2}) \pmod{\pi}.$$

Мы используем следствие:

$$(X, Y) = \frac{1}{2}\,[(\boldsymbol{Om_1}, \boldsymbol{Op_1}) + (\boldsymbol{Om_2}, \boldsymbol{Op_2})] \pmod{\pi}.$$

Согласно лемме,

$$(\boldsymbol{Om_1}, \boldsymbol{OM'}) = -(\boldsymbol{Om_2}, \boldsymbol{OM''}) \pmod{2\pi};$$
$$(\boldsymbol{Op_1}, \boldsymbol{OP'}) = -(\boldsymbol{Op_2}, \boldsymbol{OP''}) \pmod{2\pi}.$$

Значит, вычитая почленно, получаем:

$$(\boldsymbol{Om_1}, \boldsymbol{OM'}) - (\boldsymbol{Op_1}, \boldsymbol{OP'}) = -[(\boldsymbol{Om_2}, \boldsymbol{OM''}) - (\boldsymbol{Op_2}, \boldsymbol{OP''})] \pmod{2\pi};$$
$$(\boldsymbol{Om_1}, \boldsymbol{Op_1}) - (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{OP'}) = -[(\boldsymbol{Om_2}, \boldsymbol{Op_2}) - (\boldsymbol{OM''}, \boldsymbol{OP''})] \pmod{2\pi}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} 2(X, Y) &= (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{OP'}) + (\boldsymbol{OM''}, \boldsymbol{OP''}) \pmod{2\pi} \\ &= (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{OP''}) + (\boldsymbol{OM''}, \boldsymbol{OP'}) \pmod{2\pi}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Эта формула действительна для любого положения по отношению к окружности точки S, общей для прямых X и Y. В частности, если точка S *расположена на окружности*, то, например, точки $\boldsymbol{M''}$ и $\boldsymbol{P''}$ совпадают с точкой S, и формула принимает вид:

$$2(X, Y) = (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{OP'}) \pmod{2\pi} \text{ (формула вписанного угла).} \qquad (2)$$

Мы знаем, что в каждой точке S окружности существует касательная T; когда Y стремится к T, то P' и P'' стремятся к точке S. Формула действительна и в этом случае и дает

$$2(X, T) = (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{OS}) \pmod{2\pi}.$$

З а м е ч а н и е. Если на прямой X выбираем направление, то это равенство дает

$$2(X, T) = (\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{X}) + (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{OS}) \pmod{2\pi}.$$

Но в равнобедренном треугольнике OSM' имеет место

$$(\boldsymbol{OM'}, \boldsymbol{X}) = -(\boldsymbol{OS}, \boldsymbol{SX}) + \pi \pmod{2\pi}$$

в силу симметрии относительно медиатрисы отрезка SM'. Следовательно, окончательно имеем:

$$(X, T) = \pi + (X, OS) \pmod{\pi},$$

значит,

$$(OS, T) = \pi/2 \pmod{\pi}.$$

Мы находим снова, что касательная в любой точке окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

2. **Следствие.** *Характеристическое свойство окружностей, в котором не идет речь о центре.*

1) *Пусть имеются две точки A и B. Геометрическое место точек M, таких, что (MA, MB) имеет данное значение* $\theta \pmod{\pi}$, *есть окружность.*

Предположим сначала, что $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. Найдем точку O, определенную через

$$OA = OB, \ (\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}) = 2\theta.$$

Эта точка находится на медиатрисе z отрезка AB; OA и OB симметричны относительно прямой z. Это значит, что угол $(z, OA) = -\theta \pmod{\pi}$, что определяет прямую OA, следовательно, и точку O на этой прямой и на прямой z.

Окружность с центром O, проходящая через точки A и B, является множеством точек, удовлетворяющих данному условию, но согласно общей формуле (1), в которой точки A и B играют роль точек M' и P', любая точка S, не лежащая на окружности, не удовлетворяет этому условию. Следовательно, ясно, что окружность является искомым местом точек.

Если $\theta = 0 \pmod{\pi}$, искомое место точек — прямая AB.

С этой точки зрения прямая появляется как окружность.

2) *Геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию* $(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$. Только часть окружности, определенная равенством $\theta = \alpha + k\pi$, подходит. Мы сейчас ее определим, опираясь на непрерывность: угол $(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB})$, когда M находится на окружности, равняется α или $\alpha + \pi$. Так как это непрерывная функция центрального угла, определяющая точку M, то этот угол может изменить значение лишь в случае, когда он неопределен, то есть когда M находится в точке A или в точке B. Касательная в точке B является носителем противоположных векторов $\boldsymbol{b}$ и $-\boldsymbol{b}$. Обозначим через $\boldsymbol{b}$ тот вектор, который удовлетворяет равенству

$$(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{b}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Симметрией относительно z определяется на касательной в точке A вектор a, удовлетворяющий равенству

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{BA}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Искомое место точек — это дуга AB, такая, что луч MB стремится к лучу, на котором находится вектор $\boldsymbol{b}$, когда M стремится к точке B; это также то геометрическое место точек, для которых $\boldsymbol{MA}$ стремится к лучу, являющемуся носителем вектора $\boldsymbol{a}$, когда M стремится к A.

Частные случаи.

$(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB}) = \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow M$ принадлежит отрезку AB;

$(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB}) = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow M$ принадлежит любому из лучей, являющихся продолжением отрезка AB.

3) Геометрическое место точек M, таких, что при значении θ, между 0 и π,

$$|(MA,\ MB)|=\theta,$$

есть объединение двух окружностей, симметричных относительно AB.

4) Геометрическое место точек, таких, что

$$|(\boldsymbol{MA},\ \boldsymbol{MB})|=\alpha,$$

есть объединение двух дуг, симметричных относительно AB.

3. **Вписываемые четырехугольники (четырехвершинники)***. Четырехугольником называется неупорядоченное множество четырех точек. Пусть такими точками являются A, B, C, D. Шесть прямых, попарно их соединяющих, называются *сторонами* четырехугольника.

1) *Условие вписываемости четырехугольника может быть записано шестью различными способами, такими, как* $(CA,\ CB) = (DA,\ DB)$ (основная хорда: AB).

Если написать *два* из этих равенств, то с необходимостью войдут шесть сторон, и другие четыре равенства выводятся из системы двух выбранных равенств применением теоремы Шаля для углов.

Другое предложение. Если даны две пары прямых D_1, D_2 и D', D'', то условие, чтобы четыре точки, в которых каждая прямая первой пары пересекает каждую прямую второй пары, то есть четыре точки

$$D_1\cap D',\ D_1\cap D'',\ D_2\cap D',\ D_2\cap D'',$$

находились на одной и той же окружности (или, как иногда говорят, были *концикличными*), таково:

$$(D_1,\ D')=-(D_2,\ D'')\ (\mathrm{mod}\ \pi),$$

или также, согласно формуле Шаля,

$$(D_1,\ D'')=-(D_2,\ D')\ (\mathrm{mod}\ \pi),$$

так как порядок индексов, а также штрихов не существен. Каждое из этих соотношений выражает, что *пары* D_1, D_2 и D', D'' *имеют те же биссектрисы***, так как они позволяют перейти от равенства

$$(u,\ D_1)=-(u,\ D_2)$$

к

$$(u,\ D')=-(u,\ D'')\ (\mathrm{mod}\ \pi)$$

или (если хотят лучше выявить определение двух биссектрис углов, определенных по $\mathrm{mod}\ \pi$) от равенства

$$(D_1u)=\frac{1}{2}(D_1D_2)\left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right)\ \text{ к равенству }\ (D',u)=\frac{1}{2}(D',D'')\left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right).$$

* Четырехугольники, вокруг которых можно описать окружность. — *Прим. перевод.*

** Точнее, биссектрисы параллельны. —*Прим. ред.*

В этом случае говорят, что обе пары D_1, D_2 и D', D'' имеют *изогональные направления.*

Отношение

$$(D_1, D') = -(D_2, D'') \pmod \pi$$

между парами D_1, D_2 и D', D'' является *отношением эквивалентности*, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Это отношение называется *антипараллельностью пар* и обозначается иногда так:

$$(D_1, D_2) \,|{-}|\, (D', D'').$$

Оно выражает вписываемость в окружность четырехугольника $ABB'A'$ с вершинами

$$D_1 \cap D', \; D_2 \cap D', \; D_1 \cap D'', \; D_2 \cap D''.$$

Транзитивность этого отношения выражает тот факт, что если имеется еще один вписываемый четырехугольник с вершинами

$$D' \cap d', \; D'' \cap d', \; D' \cap d'', \; D'' \cap d'',$$

то из этого следует, что четырехугольник с вершинами

$$D_1 \cap d', \; D_2 \cap d', \; D_1 \cap d'', \; D_2 \cap d''$$

тоже является вписываемым в окружность.

Частный случай. Равенство $(D_1, D') = -(D_2, D'') \pmod \pi$ не предполагает, что четыре точки пересечения различны.

Предположить, например, что точки A и B совпадают,— это значит принять, что прямая D' — касательная в точке A к окружности, описанной вокруг треугольника $AA'B'$.

Если две прямые одной и той же пары совпадают, например D' и D'', то A и B' тоже совпадают, как и B и A'; тогда полученное отношение выражает, что прямые D_1 и D_2 — касательные к одной и той же окружности, причем D' является хордой, соединяющей точки касания.

Мы не можем рассматривать совпадающими две прямые различных пар, например D_1 и D', потому что точка A была бы тогда на этой прямой неопределенной; однако в этом случае наше равенство выражает, что D_2 и D'' параллельны: это случай вырождения, когда точка A' удалена в бесконечность и окружность становится прямой D_1. (Прямая появляется здесь, как вырожденная окружность).

4. **Упражнение.** Изучить конфигурацию, образованную шестью прямыми a, b, c, a', b', c', такими, что

$$(a, a') = (b, b') = (c, c') = \alpha \pmod \pi.$$

Рассмотрим девять точек такого рода, как

$$A = b \cap c, \; A' = a \cap a', \; A_1 = b' \cap c'.$$

Следовательно, имеются три вписываемых четырехугольника, таких, как, например,

$$A' = a \cap a',\ B' = b \cap b',\ C = a \cap b,\ C_1 = a' \cap b'.$$

Первый простой случай. Допустим, что точки A_1, B_1, C_1 совпадают в некоторой точке M, и изучим треугольник $A'B'C'$.

Вписываемость четырехугольника $A'B'CM$ дает

$$(A'B',\ b) = (MA',\ MC) \pmod{\pi}.$$

Аналогично

$$(A'C',\ c) = (MA',\ MB) \pmod{\pi},$$

откуда

$$(A'B',\ A'C') = (MB,\ MC) + (b,\ c) \pmod{\pi}.$$

Отсюда следует, что необходимое и достаточное условие, чтобы A', B', C' были коллинеарными, таково:

$$(MB,\ MC) = (c,\ b) \pmod{\pi},$$

а это выражает, что точка M находится на окружности (γ), описанной вокруг треугольника ABC.

В случае, когда $\alpha = \pi/2$, прямая, на которой расположены точки A', B', C', называется *прямой Симсона, соответствующей точке* M окружности (γ), описанной вокруг треугольника ABC. Если $\alpha = \pi/2$, а точка M не находится на окружности (γ), то треугольник $A'B'C'$ называется *полярным треугольником* точки M по отношению к треугольнику ABC.

Второй простой случай. Прямые a', b', c' проходят соответственно через A, B, C.

Мы изучим на этот раз точки A_1, B_1, C_1, равенство

$$(a,\ a') = (b,\ b') \pmod{\pi}$$

равносильно равенству

$$(a,\ b) = (a',\ b') \pmod{\pi},$$

то есть $(CB, CA) = -(C_1 B, C_1 A) \pmod{\pi}$, а это выражает, что C_1 находится на окружности (γ_c), симметричной окружности (γ) по отношению к прямой AB.

Если угол α меняется от 0 до π, то геометрические места точек A_1, B_1, C_1 являются, следовательно, соответственно равными окружностям (γ_a), (γ_b), (γ_c), пробегаемыми в одном и том же направлении, как на это указывают хорды a', b', c'. Эти три окружности пересекаются в одной точке H, потому что

$$\left.\begin{aligned}(HA,\ HB) &= (a,\ b)\\ (HA,\ HC) &= (a,\ c)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (HB,\ HC) = (b,\ c).$$

Точки H_a, H_b, H_c, диаметрально противоположные точке H на каждой окружности, являются точками A_1, B_1, C_1, соответствующими значению $\alpha = 0 \pmod \pi$), потому что $H_a H_b$ проходит через C и $\overrightarrow{H_aH_b} = \overrightarrow{2\gamma_a\gamma_b} = +2\overrightarrow{BA}$*; то же самое и для H_aH_c и H_bH_c. Отсюда следует, что точки A_1, B_1, C_1, соответствующие значению $\alpha = \pi/2$, совпадают в точке H. Поэтому H является точкой пересечения высот треугольника ABC. Таким образом мы получили теорему: *Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Но четыре точки A, B, C, H, как и четыре окружности (γ), (γ_a), (γ_b), (γ_c), играют одну и ту же роль. Четырехугольник $ABCH$ называется *ортоцентрическим* и каждая из этих четырех точек называется *ортоцентром* треугольника, образованного тремя остальными точками.

II. Степень точки относительно окружности

1) Пусть имеется окружность (γ) и пара прямых d_1 и d_2, пересекающих ее в точках A_1, B_1; A_2, B_2. В общем случае прямые d_1 и d_2 пересекаются в некоторой точке S.

Четыре точки, расположенные на (γ), определяют две пары прямых, изогональных к прямым d_1 и d_2. Используем, например, прямые A_1A_2, B_1B_2 и прямую u, одну из общих биссектрис этих пар. При обороте вокруг u прямые d_1 и d_2 меняются местами, и точка A_1 имеет своим образом такую точку A_1' прямой d_2, что $SA_1' = SA_2$, а A_2 имеет своим образом такую точку прямой d_1, что $SA_2' = SA_2$. Кроме того, прямая $A_1'A_2'$ параллельна прямой B_1B_2. Отсюда получается, согласно теореме Фалеса, следующая пропорция:

$$\frac{\overline{SA_1'}}{\overline{SB_2}} = \frac{\overline{SA_2'}}{\overline{SB_1}},$$

каковы бы ни были положительные направления, выбранные на прямых d_1 и d_2. Чтобы вернуться к точкам A_1 и A_2, условимся, например, ориентировать прямые d_1 и d_2 в направлениях, симметричных по отношению к выбранной биссектрисе u, так что

$$\overline{SA_1'} = \overline{SA_1}, \quad \overline{SA_2'} = \overline{SA_2}.$$

Получается:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_2}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_1}},$$

следовательно, группируя те члены, которые относятся к одной секущей, получаем: $\overline{SA_1} \cdot \overline{SB_1} = \overline{SA_2} \cdot \overline{SB_2}$; эта формула не зависит от выбора положительных направлений на прямых d_1 и d_2.

Предложение. Пусть даны окружность и некоторая точка S. Рассматривается множество прямых, проходящих через S и пересекающих окружность в точках A и B. Произведение $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$,

* Здесь $\gamma_a\gamma_b$ обозначает вектор, соединяющий центры окружностей γ_a и γ_b. — *Прим. ред.*

как мы установили, независимо от секущей. Это произведение называется *степенью точки S относительно окружности* (γ). Обозначим его через $\mathcal{P}_\gamma(S)$. Для данной окружности — это функция точки S, или, более точно, функция от расстояния d точки S до центра. Если радиус окружности есть R, то секущая, проходящая через центр, немедленно дает:

$$\mathcal{P}_\gamma(S) = d^2 - R^2.$$

Степень будет положительной, нулевой или отрицательной в зависимости от того, находится ли точка S вне окружности, на окружности или внутри ее. Степень является однородной функцией второй степени от длин.

Если S находится вне окружности, то для обеих касательных ST и ST' получаем, что $ST^2 = ST'^2 = d^2 - R^2 = \mathcal{P}_\gamma(S)$. Окружность с центром в S, которая проходит через T и T', ортогональна по отношению к окружности (γ), это значит, что касательные, проведенные к этим окружностям в их общих точках, взаимно перпендикулярны в каждой из них. Мы изучим позже это весьма важное расположение двух окружностей.

Если S находится внутри окружности (γ), то рассматривается длина секущей, перпендикулярной к диаметру, проходящему через S, которую обозначим, например, через A_0B_0. Тогда имеем:

$$(SA_0)^2 = (SB_0)^2 = -\mathcal{P}_\gamma(S).$$

Теорема. *Необходимым и достаточным условием возможности описать окружность вокруг четырехугольника A, B, C, D является равенство $\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SC}\cdot\overline{SD}$, где S — точка пересечения прямых* AB и CD.

Если AB и CD параллельны, то условие состоит в том, чтобы эти отрезки имели общую медиатрису.

В самом деле, указанное соотношение характеризует единственным образом точку D, если известны точки A, B, C; но через эти точки A, B, C проходит единственная окружность, причем она проходит согласно предыдущей теореме и через точку D. (Предполагается, что AB и CD не расположены на одной прямой, так как в этом случае эта прямая заменила бы окружность.)

Теорема может применяться к одному и тому же четырехугольнику тремя различными способами в зависимости от того, как сочетать точки в пары.

Следует отметить, что признак возможности описать окружность вокруг четырехугольника, выраженный через степень точки, также не вводит центра окружности, как и признак, выраженный через равенства вписанных углов.

2) Точка зрения аналитической геометрии.

Примем за начало координат точку S, за ось абсцисс диаметр, проходящий через S, направленный положительно от точки S к центру круга, а за ось ординат перпендикуляр к ней, причем единицы длины на осях считаем равными друг другу (ибо мы занимаемся метрической геометрией). Уравнение окружности таково:

$$(x-d)^2+y^2=R^2. \tag{1}$$

Выразим декартовы координаты точки плоскости через полярные координаты

$$\begin{cases} x=r\cos\theta; \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

Для существования взаимно однозначного соответствия между $(x,\ y)$ и $(r,\ \theta)$ мы берем

$$-\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad -\infty<r<+\infty.$$

Тогда прямая, выходящая из S, определена значением угла θ и ориентирована вектором $\boldsymbol{u}$, таким, что

$$(\boldsymbol{Ox},\ \boldsymbol{u})=\theta\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Точки окружности характеризуются соотношением:

$$r^2-2dr\cos\theta+(d^2-R^2)=0. \tag{2}$$

Для данного значения угла θ значения корней r уравнения (2), если они существуют, удовлетворяют равенствам:

$$rr''=d^2-R^2;\quad r'+r''=2d\cos\theta.$$

Первое из этих соотношений выражает, что произведение $r'r''$ не зависит от угла θ; это и есть теорема о степени точки S относительно окружности.

Второе соотношение, если его представить в такой форме:

$$\frac{r'+r''}{2}=d\cos\theta,$$

выражает, что середина хорды (предполагаем, что она существует) есть проекция центра окружности на секущую (хорошо известный результат, вытекающий немедленно из равенства радиусов). Но из этих равенств получается также

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}=\frac{2d\cos\theta}{d^2-R^2}.$$

Поэтому, если ввести точку Q, гармонически сопряженную точке S по отношению к концам хорды, то, полагая $q=\overline{SQ}$, получаем: $\frac{2}{q}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}$, и соотношение напишется так:

$$q\cos\theta=d-\frac{R^2}{d}.$$

Оно выражает, что точка Q проектируется на диаметр Sx в фиксированную точку H с абсциссой $d-\frac{R^2}{d}$.

Поэтому, когда угол θ меняется, точка Q описывает прямую HY, перпендикулярную в точке H к оси Ox, или только отрезок, соответствующий тем значениям угла θ, для которых корни r' и r'' существуют. $\left(\text{Когда } d > R, \text{ должно быть } |\sin\theta| < \frac{R}{d}.\right)$

Полярой точки S относительно окружности называют не геометрическое место точек Q, а всегда всю прямую, которая является носителем этого геометрического места. Пусть точка S находится вне круга. Если взять на ее поляре точку Q', внешнюю по отношению к хорде касания TT', то прямая SQ' не пересечет окружность; мы больше не можем говорить в этом случае о гармоническом делении. Геометрическая характеристика для этого случая будет получена в § III.

Более общие формулы.

a) Если окружность расположена произвольным образом относительно осей координат, то ее уравнение таково:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

то есть оно имеет следующий вид:

$$P(x, y) \equiv x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Прямая, выходящая из произвольной точки S с координатами (x_0, y_0), будет определена заданием угла

$$(\boldsymbol{Ox}, \boldsymbol{u})=\theta,$$

так что ее точки удовлетворяют равенствам:

$$x=x_0+r\cos\theta, \quad y=y_0+r\sin\theta,$$

и те из этих точек, которые находятся на окружности, характеризуются равенством

$$(x_0+r\cos\theta)^2+(y_0+r\sin\theta)^2-2a(x_0+r\cos\theta)-2b(y_0+r\sin\theta)+c=0,$$

то есть

$$r^2+2[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\sin\theta]r+P(x_0, y_0)=0.$$

Таким образом, *степень точки $S(x_0, y_0)$ относительно окружности $P(x, y)=0$ равна $P(x_0, y_0)$*. (Отметим, что здесь в уравнении окружности x^2 и y^2 должны входить с коэффициентом $+1$ *.)

b) Точка Q, гармонически сопряженная точке S относительно концов секущей, определена на ней условием:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\frac{r'+r''}{r'r''}=-\frac{(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\sin\theta}{P(x_0, y_0)}.$$

Так как координаты этой точки равны:

$$X=x_0+r\cos\theta, \quad Y=y_0+r\sin\theta,$$

* То есть нельзя умножить обе части этого уравнения на какой-либо множитель, отличный от $+1$.— *Прим. ред.*

то точка Q остается на прямой, уравнение которой получается исключением чисел r и θ

$$(X-x_0)(x_0-a)+(Y-y_0)(y_0-b)+P(x_0,\ y_0)=0.$$

Таково уравнение поляры точки S относительно окружности. Оно упрощается, поскольку $P(x_0,\ y_0)=-R^2$, и пишется в виде:

$$(x_0-a)(X-a)+(y_0-b)(Y-b)-R^2=0.$$

III. Семейства окружностей

Изучим семейства окружностей, которые часто вводятся в метрическую геометрию и служат для важных доказательств.

a) **Ортогональные окружности.** Если две окружности (C) и (C') имеют в одной из их общих точек T взаимно перпендикулярные касательные, то есть касательная к одной является радиусом другой, то же самое имеет место и в другой точке пересечения T' (в силу симметрии относительно прямой центров). Окружности называются тогда *ортогональными*. Эта связь между двумя окружностями может быть выражена следующими эквивалентными условиями: *Степень центра одной из окружностей относительно другой равна квадрату радиуса первой окружности. Концы любого диаметра одной из окружностей, который пересекает другую, делят гармонически хорду, высекаемую на второй окружности**.

Пусть мы имеем окружность (C) и точку S. Любая окружность (C'), ортогональная к (C) и проходящая через точку S, проходит и через точку H, гармонически сопряженную точке S относительно концов того диаметра окружности (C), который проходит через S, и обратно. Это значит, что геометрическим местом точек Q, диаметрально противоположных точке S на окружностях (C'), является перпендикуляр HY в точке H к диаметру, проходящему через S. Те из этих точек Q, для которых SQ пересекает окружность (C), сопряжены гармонически точке S по отношению к концам хорды, высекаемой окружностью (C). Таким образом, мы снова находим *поляру* такой, какой она была введена выше.

Замечание. Окружности (C'), позволяющие достичь все точки полярной прямой, оказываются очень полезными для доказательств, однако определение с помощью гармонического деления является наиболее глубоким: оно ясно показывает, что дело идет о вопросе проективной геометрии, поскольку мы можем рассматривать окружность, как представителя семейства кривых, находящихся с окружностью в перспективе, то есть просто как некоторое коническое сечение. Вся прямая могла бы быть получена, если бы мы стали рассматривать ее, когда она не пересекает окружность, как пересекающую ее в «мнимых» точках, определенных значениями «мнимых корней» r', r'' выше написанного уравнения!

Взаимная полярность. Две точки S и Q, диаметрально противо-

* Вследствие формулы 5 (на стр. 345).—*Прим. ред.*

положные на окружности (C'), ортогональной окружности (C), таковы, *что каждая из них находится на поляре другой.* Их называют *сопряженными относительно окружности* (C). Отсюда выводится немедленно теорема о взаимной полярности. *Если точка Q описывает прямую s, являющуюся полярой точки S, то поляра q точки Q постоянно проходит через S*, то есть описывает пучок прямых с центром S.

Ясно, что каждая прямая, не проходящая через центр, является полярой некоторой точки, которая называется *полюсом* прямой. Имеется, таким образом, взаимно однозначное отображение множества точек плоскости (за исключением центра) на множество прямых плоскости (за исключением прямых, проходящих через центр). Подобно тому, как мы это делали, изучая гармонические деления в проективной геометрии, мы будем говорить, что прямая, проходящая через центр окружности, соответствует бесконечно удаленной точке перпендикулярного к прямой направления, и обратно.

b) **Пучки окружностей.** Множество Γ' окружностей (C'), проходящих через точки S и H, называется *пучком окружностей с основными точками S и H*. Все эти окружности ортогональны не только окружности (C), но также любой окружности, имеющей, подобно окружности (C), диаметром отрезок, концы которого делят гармонически отрезок SH. Говорят, что это множество окружностей Γ составляет *пучок с предельными точками S и H*. В частности, точки S и H должны рассматриваться как *окружности нулевого радиуса пучка Γ**; они соответствуют двум возможным случаям, когда три точки гармонической четверки совпадают.

Пучки Γ и Γ' называются *взаимно ортогональными*. Точки S и H называются их *точками Понселе*.

Согласно предшествующему определению, пучки с основными точками и пучки с предельными точками кажутся весьма различными. Аналогия между этими двумя видами пучков выявляется яснее в аналитической геометрии. Возьмем на этот раз в качестве начала координат середину O отрезка SH, в качестве оси x-в прямую SH, а перпендикуляр к ней в точке O, как ось y-в. Окружности (C'), определенные, как окружности, проходящие через S и H, имеют уравнение, если положить $\overline{OH}=a$,

$$x^2+y^2-2my-a^2=0$$

(параметр m меняется от $-\infty$ до $+\infty$). Окружности (C) имеют диаметром отрезок оси x'-в, концы которого имеют абсциссы x' и x'', связанные равенством $x'\cdot x''=a^2$.

Поэтому уравнение любой окружности (C) таково:

$$x^2+y^2-2px+a^2=0$$

(p есть параметр, удовлетворяющий неравенству $|p|\geqslant a$).

---

* Поэтому эти точки называют также нулевыми точками пучка Γ.— *Прим. ред.*

Снова находим, что центр окружности (C) обязательно расположен вне отрезка SH, как это следует из ортогональности окружностей (C) и (C').

Общее определение для двух видов пучков окружностей. Каждая точка прямой Oy, геометрического места центров окружностей (C'), составляющих пучок Γ', имеет одну и ту же степень относительно всех окружностей (C), равную квадрату радиуса той окружности (C'), центр которой лежит в этой точке. Аналогично каждая точка прямой SH имеет, очевидно, ту же степень относительно всех окружностей (C'), даже если она расположена между точками S и H. Если точка находится вне отрезка SH, то эта степень равна квадрату радиуса той окружности (C), центром которой является эта точка. Обратно:

Теорема 1. *Геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень относительно двух неконцентрических окружностей, является прямой линией, называемой радикальной осью двух окружностей.*

2. *Множество окружностей, имеющих попарно одну и ту же радикальную ось, образует пучок окружностей.*

Выразим условие того, что некоторая точка M имеет одну и ту же степень относительно двух окружностей (C_1) и (C_2) с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2.

Будем иметь:

$$MO_1^2-R_1^2=MO_2^2-R_2^2,$$

то есть

$$MO_1^2-MO_2^2=R_1^2-R_2^2.$$

Это выражает, что геометрическое место точек M — прямая, перпендикулярная к линии центров O_1O_2. Во всех случаях каждая точка геометрического места, расположенная вне одного из кругов, расположена также вне второго и является центром окружности, ортогональной двум заданным окружностям. (Если окружности концентричны, то эти ортогональные им окружности становятся прямыми, выходящими из центра.)

Если заданные окружности пересекаются, то их радикальная ось — это прямая, проходящая через их точки пересечения, и множество окружностей, имеющих попарно эту радикальную ось, есть пучок, для которого эти две точки пересечения являются основными точками.

Если две заданные окружности не пересекаются, то их радикальная ось расположена вне каждой из окружностей; в частности, основание радикальной оси на линии центров является центром окружности, ортогональной двум заданным; она имеет концами диаметра на линии центров две точки S и H, и множество окружностей, имеющих попарно вместе с парой заданных окружностей ту же радикальную ось, является пучком с предельными точками S и H.

Если заданные окружности касаются одна другой в некоторой точке S, то их радикальной осью является общая касательная прямая в S, и соответствующий пучок образован множеством окружностей, касающихся данных окружностей в точке S.

В аналитической геометрии мы используем оси любого положения, но, разумеется, прямоугольные и с одной и той же единицей на обеих осях. Уравнение какой-либо окружности таково:

$$P(x, y) \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0.$$

Следовательно, степень точки $M(x_0, y_0)$ равна:

$$P(x_0, y_0) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2.$$

Геометрическое место точек M с равными степенями относительно обеих окружностей, предполагаемых не концентрическими и имеющих уравнения

$$P_1(x, y) \equiv (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - R_1^2 = 0;$$

$$P_2(x, y) \equiv (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - R_2^2 = 0$$

— это прямая с уравнением

$$D(x, y) \equiv P_1(x, y) - P_2(x, y) = 0,$$

то есть

$$D(x, y) \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + P_1(0, 0) - P_2(0, 0) = 0.$$

Общее уравнение окружности, имеющей эту радикальную ось общей с каждой из заданных окружностей, таково:

$$P_3(x, y) \equiv P_1(x, y) + \lambda D(x, y) = 0,$$

или, более симметрично,

$$P_3(x, y) \equiv \alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y) = 0^*,$$

причем параметры λ или α и β принимают все такие значения, чтобы окружность существовала, то есть такие, чтобы вытекающее из уравнения значение квадрата радиуса было положительным.

Геометрические места, связанные с парой окружностей

Условие $\alpha\mathscr{P}_{(C_1)}(M) + \beta\mathscr{P}_{(C_2)}(M) = k$ сводится немедленно к аналогичному условию относительно центров:

$$\alpha MC_1^2 + \beta MC_2^2 = h.$$

$\alpha + \beta \neq 0$. Геометрическое место — окружность с центром на линии центров.

$\alpha + \beta = 0$. Геометрическое место — прямая, параллельная радикальной оси. Уточним расположение этих двух прямых.

* В этом уравнении коэффициенты при x^2 и y^2 равны не $+1$, а $(\alpha+\beta)$. — *Прим. ред.*

Пусть K есть основание на линии центров прямой геометрического места, а H — основание радикальной оси. Эти точки определены на линии центров (если положить $\alpha = -\beta = 1$), уравнениями:

$$KC_1^2 - KC_2^2 = R_1^2 - R_2^2 + k;$$
$$HC_1^2 - HC_2^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

откуда, вычитая почленно,

$$k = \mathcal{P}(C_1) - \mathcal{P}(C_2) = 2\overline{HK} \cdot \overline{C_1C_2}.$$

С этой точки зрения задание двух окружностей определяет на плоскости разбиение на классы эквивалентности, являющиеся прямыми, перпендикулярными к линии центров.

Радикальный центр трех окружностей с неколлинеарными центрами

Три радикальные оси окружностей, взятых попарно, пересекаются в точке, имеющей равную степень относительно каждой окружности. Если эта точка расположена вне одной из окружностей, то она так же расположена по отношению к двум другим и является центром окружности, ортогональной по отношению ко всем трем окружностям. Множество окружностей, имеющих один и тот же радикальный центр, называется *связкой* окружностей.

Приложение. Точки радикальной оси двух непересекающихся окружностей получаются с помощью вспомогательных окружностей, пересекающих каждую из заданных.

Сферы. Фигура, образованная сферой и точкой или двумя сферами, получается вращением аналогичной фигуры с окружностями, откуда выводы (о радикальной плоскости, полярной плоскости и т. п.). Мы не стремимся рассмотреть это детально. Нужно лишь иметь в виду, что пара сфер имеет радикальную плоскость, три сферы имеют, вообще говоря, *радикальную ось*, а четыре сферы имеют, вообще говоря, *радикальный центр*. Точка имеет полярную плоскость относительно сферы, а плоскости ставится в соответствие точка — *полюс* этой плоскости.

IV. Понятие о преобразовании методом взаимных поляр

В плоскости точка определена двумя параметрами, и то же имеет место для прямой (например, точка определена своими координатами x_0, y_0, а прямая своим уравнением $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$, или же своим нормальным уравнением $x \cos\varphi + y \sin\varphi = p$). Если выбрана основная окружность, то зависимость между полюсом и полярой устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек и множеством прямых. В силу полярной взаимности, если некоторая прямая рассматривается как геометрическое место точек, то ее полюс является вершиной пучка поляр, соответствующих точкам прямой. Более общим образом кривая может рассматриваться как геометрическое место точек (точечная точка зрения), или как огибающая своих касательных (тангенциальная точка зрения). Можно доказать, что каждой кривой в качестве ее образа соответствует * та же кривая, независимо от того, с какой точки зрения рассматривается кривая как прообраз; если одна кривая рассматривается с точечной точки зрения, то другая рассматривается с тангенциальной точки зрения. Это доказывается, если исходить из полярной взаимности, и является интуитивно достаточно очевидным, однако строгое доказательство нуждается в дифференциальной геометрии (теории огибающих), чего мы касаться не будем. Мы должны поэтому ограничиться фигурами, образованными из точек и прямых. Таким образом четырехугольник становится четырехсторонником, конфигурация Менелая становится конфигурацией Чевы и т. п.

Теорема. *Двойное отношение четырех коллинеарных точек равно двойному отношению их поляр.* (Действительно, пучок поляр метрически равен пучку прямых, выходящих из центра окружности и проходящих через данные точки) **. Отсюда следует, что *для всякого проективного свойства* перевод позволяет описать фигуру, исходя из соответственной фигуры (точка $\leftrightarrow$ прямая, коллинеарные точки $\leftrightarrow$ пересекающиеся в одной точке прямые), то есть имеет место *двойственность* (понятие, введенное Шалем).

В трехмерном пространстве точка и плоскость зависят каждая от трех параметров; полярное соответствие (полюс $\leftrightarrow$ полярная плоскость) относительно некоторой основной сферы выявляет двойственность, в силу которой прямая, геометрическое место точек, ставится в соответствие прямой, оси пучка плоскостей. Теория преобразования взаимными полярами приобретает полный интерес лишь с проективной точки зрения, когда окружность заменяется коническим сечением, сфера поверхностью второго порядка и когда вводятся мнимые элементы (помимо элементов бесконечно удаленных). Как мы уже упоминали, необходимо также исследование огибающих. Поэтому мы здесь лишь указываем на эту теорию, подчеркивая понятие двойственности.

§ 3. Точечные преобразования метрической геометрии

Точечное преобразование принадлежит метрической геометрии, если оно может быть определено с помощью элементов аффинной геометрии (параллелизм, отношение параллельных векторов) и эле-

---

* В полярном соответствии.— *Прим. ред.*

** Действительно, каждая поляра перпендикулярна к соответственной прямой, соединяющей данную точку с центром окружности.— *Прим. ред.*

ментов метрической геометрии (расстояния и углы или скалярные и векторные произведения).

Свойство фигуры в евклидовой геометрии — это отношение между элементами фигуры, остающееся инвариантным относительно группы метрических преобразований, называемых *подобиями*. Мы их сейчас введем. Однако следует отметить, что можно рассмотреть бесконечное множество отображений плоскости или пространства на себя путем взаимно однозначного или не взаимно однозначного соответствия. Некоторые из них изучим в качестве упражнений.

Одно из таких преобразований, *инверсию*, мы оставляем для следующей главы. Это преобразование особо важно тем, что оно вводит новую геометрию, включенную в метрическую геометрию, но которую можно рассматривать и как самостоятельную геометрию.

I. Аффинные преобразования в метрической геометрии

К изученным свойствам аффинных преобразований мы должны присоединить предложения, относящиеся к метрическим элементам: расстояниям и углам.

1) **Параллельный перенос.** Имеет место инвариантность любой длины, любого угла (определенного в абсолютном значении или ориентированного и заданного с точностью до 2π или π).

Окружность имеет своим образом окружность с тем же радиусом, расположенную в параллельной плоскости, причем центры являются соответственными точками. Обратно, если даны две окружности с равными радиусами и расположенные в параллельных плоскостях, то существует параллельный перенос, относительно которого одна окружность является образом другой. Аналогичные предложения (более простые) имеют место для сфер.

2) **Гомотетия.** При этом преобразовании всякая длина умножается на абсолютное значение коэффициента гомотетии. Углы инвариантны.

Окружность имеет своим образом окружность, расположенную в параллельной плоскости, а радиусом этой окружности служит радиус данной окружности, умноженной на абсолютное значение коэффициента гомотетии. Обратно, если даны две окружности, расположенные в параллельных плоскостях, то существуют две гомотетии с взаимно противоположными коэффициентами, переводящие одну из окружностей в другую.

Если окружности равны, то отрицательная гомотетия — это симметрия относительно точки, а положительная гомотетия вырождается в параллельный перенос. В общем случае оба центра гомотетии коллинеарны с центрами окружностей и делят отрезок, соединяющий центры, гармонически в отношении радиусов.

Эта фигура может быть описана и в другой форме: каждое сечение конуса с круговым основанием и плоскостью, параллельной этому основанию, является окружностью; обратно, две окружности, расположенные в двух параллельных плоскостях, находятся на двух конусах, а если их радиусы равны, то один из конусов сводится к цилиндру.

Если окружности находятся в одной плоскости и концентричны, то существует один-единственный центр гомотетии, однако гомотетии, очевидно, различны, потому что их коэффициенты противоположны. Отметим еще, что всякая общая касательная к двум окружностям, лежащим в одной и той же плоскости, проходит через один из центров гомотетии, а если окружности касаются друг друга, то их точка касания является одним из центров гомотетии.

Аналогичное исследование (но более простое) имеет место для сфер.

3) **Аффинитеты.** Лишь ортогональные осевые аффинитеты заслуживают дополнений с метрической точки зрения. Мы рассмотрим аффинитеты только в двумерном пространстве. В случае ортогонального аффинного сжатия к оси каждый отрезок мы разложим на его составляющую, параллельную оси, длина которой сохраняется, и на перпендикулярную к первой составляющую, длина которой умножается на абсолютную величину коэффициента аффинитета. Теорема Пифагора позволяет тогда изучить длину отрезка-образа. Аналогично всякое направление будет отнесено к направлению оси аффинитета, и исследование выполняется с помощью тригонометрических формул, содержащих тангенсы углов.

Образ окружности. Мы знаем, что можно с точностью до параллельного переноса взять в качестве оси аффинитета (принятой за ось абсцисс) прямую, проходящую через центр. Уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{1}$$

в результате аффинитета с коэффициентом k преобразуется в следующее:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где $b = |k| \cdot a$. Это уравнение кривой, называемой *эллипсом*.

Таким образом, эллипс определяется, как образ окружности в ортогональном осевом аффинитете, так что он имеет аффинные свойства окружности, такие, как наличие центра симметрии, одной пары взаимно перпендикулярных осей симметрии и бесконечное множество осей косой симметрии, проходящих через этот центр, свойства полюсов и поляр (за исключением перпендикулярности поляры к прямой, соединяющей точку с центром, и, разумеется, вспомогательных ортогональных окружностей).

II. Перемещения и антиперемещения

1. Введение

Вспомним общее определение *аффинного* точечного преобразования некоторого пространства E на себя. Если дано начало O, координатный базис $\mathscr{B}$ и их образы O' и $\mathscr{B}'$, то каждой точке M, отнесенной к системе $\{O, \mathscr{B}\}$, ставится в соответствие точка M' с теми же координатами по отношению к системе $\{O', \mathscr{B}'\}$. Преобразование является, таким образом, произведением параллельного переноса на вектор OO' и точечного преобразования, в котором точка O инвариантна, то есть линейного преобразования базиса $\mathscr{B}$ в базис $\mathscr{B}'$.

В метрической геометрии преобразование называется *изометрией*, если и базис $\mathscr{B}$ и базис $\mathscr{B}'$ ортонормальны. В самом деле, формулы, позволяющие вычислить расстояние между двумя точками с помощью их координат, показывают в этом случае, что *все расстояния будут инвариантными*:

$$(\forall M \text{ и } P,\ M'P' = MP).$$

Если базисы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ имеют, кроме того, ту же ориентацию, то *соответственные углы равны*, то есть для любых векторов V_1 и V_2

$$(\boldsymbol{V}_1', \ \boldsymbol{V}_2') = (\boldsymbol{V}_1, \ \boldsymbol{V}_2) \pmod{2\pi}.$$

В этом случае преобразование называется *перемещением*; соответственные фигуры называются *равными*.

Если же, наоборот, образ $\mathscr{B}'$ базиса $\mathscr{B}$ имеет противоположную базису $\mathscr{B}$ ориентацию, то *каждый угол противоположен своему образу*

$$(\boldsymbol{V}_1', \ \boldsymbol{V}_2') = -(\boldsymbol{V}_1, \ \boldsymbol{V}_2) \pmod{2\pi}.$$

Преобразование в этом случае называется *антиперемещением*; соответственные фигуры называются *антиравными*.

Основная теорема. Отношение равенства (или антиравенства) есть *внутреннее отношение*, то есть независящее от системы координат $\{O, \mathscr{B}\}$, служащей для его определения; при этом базис должен, разумеется, остаться ортонормальным, но изменение единицы может иметь место.

1) **Одномерное пространство.** Перемещение

$\{O, \boldsymbol{i}\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \{O', \boldsymbol{i}'\}$ определено условиями $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}$,

$$\boldsymbol{OO}' = a\boldsymbol{i} \text{ и } \forall M,\ \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} \longrightarrow \boldsymbol{O}'\boldsymbol{M}_1 = x\boldsymbol{i}.$$

Новый базис $\{\omega, \boldsymbol{u}\}$, определенный равенствами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{O\omega} = d\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{u} = k\boldsymbol{i}, \end{cases}$$

имеет образ $\{\omega', \boldsymbol{u}'\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{O'\omega'} = \boldsymbol{O\omega} = d\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} = k\boldsymbol{i}. \end{cases}$$

Преобразование может быть поэтому определено с помощью нового базиса следующим образом:

$$\forall M,\ \boldsymbol{\omega M} = X\boldsymbol{u} \longrightarrow \boldsymbol{\omega' M'} = X\boldsymbol{u},$$

где

$$X=\frac{x-d}{k}.$$

С внутренней точки зрения — это параллельный перенос

$$\boldsymbol{MM'}=\boldsymbol{OO'}=\omega\omega'.$$

2) **Двумерное пространство.** Перемещение

$$\{O,\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}\xrightarrow{\mathfrak{D}}\{O',\ \boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}'\},$$

$$\boldsymbol{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\xrightarrow{\mathfrak{D}}\boldsymbol{O'M'}=x\boldsymbol{i}'+y\boldsymbol{j}'$$

определено, как произведение параллельного переноса $\boldsymbol{OO'}$, который, как мы знаем, является внутренним преобразованием, на перемещение, оставляющее точку O инвариантной; векторное пространство подвергается линейному преобразованию, причем векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ тоже должны быть единичными и ортогональными, причем $(\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}')$ имеет ту же ориентацию, что и $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$.

Мы знаем (кн. I, гл. V, § I и IV), что если положить

$$\boldsymbol{i}'=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{j}'=c\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{j},$$

то указанные условия выразятся так:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1; \quad c^2+d^2=1; \\ ac+bd=0; \quad ad-bc=1. \end{cases}$$

Это значит, что существует угол α, определенный с точностью до $2k\pi$, удовлетворяющий равенствам:

$$a=\cos\alpha;\ b=\sin\alpha;\ c=-\sin\alpha;\ d=\cos\alpha,$$

откуда

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}'=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{j}'=-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\alpha\cdot\boldsymbol{j}, \end{cases}$$

или, что то же,

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}'-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{j}'; \\ \boldsymbol{j}=\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i}'+\cos\alpha\cdot\boldsymbol{j}'. \end{cases}$$

Значит, любое перемещение $\mathcal{R}$, оставляющее точку O инвариантной, характеризуется некоторым углом α. Пусть теперь $\boldsymbol{u}$ — какой-либо вектор, а $\boldsymbol{u}'$ — его образ, так что

$$\boldsymbol{u}=\varrho(\cos\theta\cdot\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}),\ \ \boldsymbol{u}'=\varrho(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}).$$

Равенство углов

$$(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{u})=(\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{u}')\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

равносильно утверждению

$$\forall\boldsymbol{u},\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}')=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}')=\alpha\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Следовательно, образ M' точки M при таком преобразовании $\mathscr{R}$ определен следующим образом:

$$(\mathscr{R})\quad OM = OM',\ (\boldsymbol{OM},\ \boldsymbol{OM'}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Такое движение называется *вращением* с центром O на угол α. Вращение определено, следовательно, внутренним образом, так что если используется другой ортонормальный базис

$$\boldsymbol{u} = \varrho(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}),\ \boldsymbol{v} = \varrho(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}),$$

то определение

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \searrow\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\nearrow \boldsymbol{OM'} = x\boldsymbol{i'} + y\boldsymbol{j'}$$

приобретает вид:

$$\boldsymbol{OM} = X\boldsymbol{u} + Y\boldsymbol{v} \searrow\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\nearrow \boldsymbol{OM'} = X\boldsymbol{u'} + Y\boldsymbol{v'}$$

(это проверяется легко векторным или матричным счетом).

Таким образом, всякое движение D на плоскости является произведением некоторого параллельного переноса и некоторого вращения. Угол вращения α называется *углом соответствующего перемещения*; он не зависит от пары O, O', выбранной для определения параллельного переноса.

3) **Трехмерное пространство.** Исследование проводится аналогично, однако введение одного угла уже недостаточно. Так как, исходя из выбранных точек, можно определить любую точку M с помощью расстояний и углов, являющихся инвариантными элементами, то и образ M' точки M можно определить, задавая пары соответственных точек. Эта возможность внутреннего определения преобразования доказывает, что выбор базиса O, $\mathscr{B}$ не существен.

Аналогичное положение имеет место и для антиперемещений.

2. Внутреннее исследование перемещений и антиперемещений

A) Одномерное пространство

Любое перемещение является *переносом* $\boldsymbol{O'M'} = \boldsymbol{OM}$, или также

$$\forall M,\ \boldsymbol{MM'} = \boldsymbol{OO'}.$$

Любое антиперемещение определяется так:

$$\forall M,\ \boldsymbol{O'M'} = -\boldsymbol{OM},$$

откуда получается инвариантная точка S, середина отрезка OO', так что

$$\boldsymbol{O'S} = -\boldsymbol{OS},$$

что позволяет определить это преобразование следующим образом:

$$\forall M,\ \boldsymbol{SM'} = -\boldsymbol{SM},$$

так что преобразование является *симметрией* с центром в S.

B) Двумерное пространство

α) **Перемещения.** Мы видели, что движение на плоскости является произведением (некоммутативным) некоторого вращения с произвольным центром O и известным углом α и параллельного переноса $\boldsymbol{OO'}$.

a) **Теорема.** *На плоскости перемещение определено заданием двух пар соответственных точек*

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \searrow\!\!\!-\!\!\!\nearrow \begin{cases} A' \\ B', \end{cases} \quad A'B' = AB.$$

В самом деле, так как можно произвольно выбирать систему отсчета, то мы поместим начало в точке A и один единичный вектор $\boldsymbol{i}$ выберем на AB, тогда другой единичный вектор $\boldsymbol{j}$ будет прямо перпендикулярным вектору $\boldsymbol{i}$, откуда получим их образы: A', $\boldsymbol{i'}$ на $A'B'$ и $\boldsymbol{j'}$, прямо перпендикулярный к $\boldsymbol{i'}$. Соответствие тогда определяется так:

$$\forall M,\ \boldsymbol{AM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \searrow\!\underset{\mathfrak{D}}{-}\!\nearrow \boldsymbol{A'M'} = x\boldsymbol{i'} + y\boldsymbol{j'}.$$

Если охарактеризовать этим способом равные треугольники, то это приводит нас к следующему *случаю равенства треугольников*, являющемуся основным, хотя его формулировка мало употребительна: *Равенство двух треугольников характеризуется тем фактом, что они имеют по равной стороне и по равной соответствующей высоте, причем основание этой высоты делит сторону в одном и том же отношении в каждом треугольнике, кроме того, соответственные прямые углы (между стороной и высотой) имеют одну и ту же ориентацию в каждом треугольнике.*

b) Отдалимся еще больше от аналитической геометрии, используя взаимно однозначное соответствие между парой x, y и парой r, $\theta \pmod{2\pi}$ *, определенной условиями

$$r > 0;\ x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta,$$

то есть

$$\begin{cases} r = AM; \\ \theta = (\boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{AM}) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Мы получаем предложение внутреннего характера.

Предложение I. *Перемещение, определенное условиями*

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \searrow\!\!\!-\!\!\!\nearrow \begin{cases} A' \\ B', \end{cases} \quad A'B' = AB,$$

определяется следующим образом:

$$\forall M \begin{cases} A'M' = AM; \\ (\boldsymbol{A'B'},\ \boldsymbol{A'M'}) = (\boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{AM}) \pmod{2\pi}, \end{cases} \tag{I}$$

что приводит к формулировке следующего случая равенства треугольников (называемого, вообще, вторым случаем)**.

* Парой декартовых и парой полярных координат точки на плоскости.— *Прим. ред.*

** В нашей литературе этот случай называется первым.—*Прим. ред.*

Равенство двух треугольников характеризуется тем фактом, что они имеют по две соответственно равные стороны, содержащие по углу, равному своему соответственному, причем эти углы ориентированы и определены с точностью до 2π.

Угол движения равен:

$$\alpha = (\boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{A'B'}) = (\boldsymbol{AM},\ \boldsymbol{A'M'}) \quad \forall M.$$

Значит, в силу инвариантности отношения параллелизма,

$$\alpha = (\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V'}),$$

каков бы ни был вектор $\boldsymbol{V}$. Этот угол называется также *углом поворота равных фигур.*

c) Так как перемещение определено заданием A, B; A', B', то всякое построение точки M', которое мы осуществляем, исходя из точки M и этих данных, дает внутреннее определение перемещения. В частности, система

$$(A'B',\ A'M') = (AB,\ AM) \pmod \pi;$$
$$(A'B',\ B'M') = (AB,\ BM) \pmod \pi$$

вполне определяет точку M'. Таким образом, получаем:

Предложение II. *Перемещение, определенное условиями*

$$\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right. \searrow\!\!\!-\!\!\!\nearrow \left\{\begin{matrix} A' \\ B' \end{matrix}\right., \quad AB = A'B',$$

определяется следующим образом:

$$\forall M, \quad \begin{cases} (A'B',\ A'M') = (AB,\ AM) \pmod \pi; \\ (A'B',\ B'M') = (AB,\ BM) \pmod \pi, \end{cases} \tag{II}$$

откуда вытекает следующая формулировка случая равенства треугольников (называющегося первым случаем)*.

Два треугольника равны, если они имеют по равной стороне, заключенной между двумя соответственно равными углами, которые ориентированы, но могут рассматриваться лишь с точностью до π.

d) Другой случай равенства треугольников возникает, если мы определяем M' двумя расстояниями $A'M' = AM$ и $B'M' = BM$, но чтобы снять неопределенность нужно, кроме того, обеспечить, чтобы два соответственных угла были той же ориентации. Этот «третий» случай равенства треугольников служит для изучения некоторых специальных фигур, но он неудобен для использования в общем исследовании, которым мы занимаемся.

Мы продолжаем исследование, применяя систему (1).

Теорема. *В плоскости две равные фигуры получаются одна из другой или некоторым вращением, или же, в виде исключения, некоторым параллельным переносом.*

---

* В нашей учебной литературе этот случай называется вторым.— *Прим. ред.*

Если угол α, соответствующий перемещению фигур, равен числу 0 (mod 2π), то перемещение — параллельный перенос AA'.

Пусть поэтому $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. Мы знаем, что перемещение, которое имеет инвариантную точку, является вращением с центром в этой точке. Нам достаточно поэтому доказать существование инвариантной точки. Но такая точка O определяется системой (1), если заменить в ней M и M' через O.

Тогда найдем:

$$\begin{cases} A'O = AO \\ (\boldsymbol{A'B'}, \boldsymbol{A'O}) = (\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AO}) \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA'; \\ (\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OA'}) = (\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A'B'}) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

а это означает, что точка O является пересечением медиатрисы отрезка AA' и дуги AA', определенной, как геометрическое место точек P, удовлетворяющих равенству:

$$(\boldsymbol{PA}, \boldsymbol{PA'}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Это пересечение существует и единственное. Таким образом, получаем центр O искомого вращения, а его угол равен α.

Отметим, что для $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ дуга становится отрезком прямой AA', точка O становится серединой отрезка AA', и вращение является симметрией с центром O.

Произведение перемещений. Так как отношение равенства двух фигур транзитивно, то произведение перемещений — также перемещение. Если рассматривать тождественное преобразование, как движение, то становится ясным, что множество параллельных переносов и вращений плоскости образует группу, *группу перемещений*.

β) **Антиперемещения.** Как и выше, доказывается на основании того факта, что отношение антиравенства является внутренним отношением, что любое антиперемещение определено парой точек и их образами

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \searrow\!\!\longrightarrow\!\!\nearrow \begin{cases} A' \\ B', \end{cases} \quad A'B' = AB$$

с помощью каждой из систем:

$$\forall M, \quad \begin{cases} A'M' = AM; \\ (\boldsymbol{A'B'}, \boldsymbol{A'M'}) = -(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AM}) \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\forall M, \quad \begin{cases} (A'B', A'M') = -(AB, AM); \\ (A'B', B'M') = -(AB, BM) \pmod{\pi}. \end{cases} \tag{2}$$

Мы можем, в частности, сформулировать оба случая антиравенства треугольников, аналогичных случаям равенства.

a) **Теоремы (плоской геометрии).** *Каждое антиперемещение, имеющее инвариантную точку, является осевой ортогональной симметрией.*

Действительно, пусть O — инвариантная точка, а A и A' — некоторая вторая пара соответственных точек; тогда если A и A' совпадают, то преобразование есть ортогональная симметрия относительно прямой OA; если же A и A' — различные точки, то это ортогональная симметрия относительно внутренней биссектрисы угла $(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OA}')$.

b) *Произведение двух ортогональных симметрий, оси которых пересекаются, является вращением.*

Действительно, это перемещение, имеющее одну инвариантную точку.

Пусть O — точка пересечения обеих осей симметрии D_1 и D_2; преобразуя какую-либо точку A оси D_1, видим, что угол вращения равен:

$$\alpha = 2\,(D_1, D_2) \pmod{2\pi}.$$

Доказанное предложение дополняется теоремой, уже известной из аффинной геометрии, о произведении двух симметрий (здесь это ортогональные симметрии) с *параллельными осями*; мы знаем, что это произведение является *параллельным переносом* на вектор:

$$\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2, \quad h_1 \in D_1, \quad h_2 \in D_2, \quad h_1h_2 \perp D_1.$$

Обратно, любое перемещение является произведением двух ортогональных симметрий; действительно, имеем следующие случаи:

1) Параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{V}$. Тогда оси D_1 и D_2 следует взять перпендикулярными к вектору $\boldsymbol{V}$ и отстоящими друг от друга на $h_1h_2 = \frac{|\boldsymbol{V}|}{2}$.

2) Вращение с центром O на угол α; тогда обе оси должны проходить через O и составлять угол $(D_1D_2) = \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$.

Ясно, что в каждом случае одна из двух осей, по выбору, подчинена лишь условию иметь заданное направление, либо проходить через данную точку. Вторая ось отсюда выводится.

c) Произведение трех ортогональных симметрий есть антиперемещение и обратно: любое антиперемещение может рассматриваться бесконечным множеством способов, как произведение трех ортогональных симметрий. В самом деле, некоторая ортогональная симметрия может преобразовать произвольно выбранную точку A в заданный образ A'; тогда остается выполнить вращение вокруг точки A', то есть произведение двух ортогональных симметрий. Можно также начать с ортогональной симметрии, преобразующей выбранный вектор $\boldsymbol{AB}$ в вектор $\boldsymbol{AB}''$, эквиполлентный (равный) вектору $\boldsymbol{A'B'}$; тогда остается выполнить параллельный перенос $\boldsymbol{AA}'$, то есть произведение двух ортогональных симметрий с параллельными осями.

Из этого второго разложения в произведение следует, что в *двух антиравных фигурах все углы* (V, V') *между двумя соответственными векторами имеют*, как и в ортогональной симметрии, биссектрисы *одного и того же направления*, которое мы обозначим δ.

Используем этот результат для разложения антидвижения в произведение частного вида: возьмем в качестве оси D_1 первой ортогональной симметрии параллель к δ, проходящую через середину отрезка AA'; остается выполнить перенос $A''A'$ параллельный направлению δ. Отсюда следует, что прямая D_1 проходит также через середину любого отрезка MM', соединяющего две соответственные точки (так как прямая $M''M'$ параллельна к D_1, какова бы ни была точка M), и это условие достаточно, откуда вытекает предложение: *любое антиперемещение можно разложить и притом единственным образом в произведение некоторой ортогональной симметрии и некоторого переноса, параллельного оси симметрии*. Это произведение к тому же *коммутативно*.

Таким образом, в плоскости ортогональная симметрия относительно прямой является основной изометрией, дающей путем умножений все перемещения, антиперемещения. Тот факт, что это преобразование взаимно, делает его особенно удобным инструментом для исследований, как это показывает следующее его применение.

Произведение двух перемещений

Пусть даны два перемещения $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ с углами α_1 и α_2. Их произведение является перемещением с углом $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

В случае, когда $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, произведение является параллельным переносом, вектор которого мы ищем. В случае, когда $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, произведение является вращением, центр которого мы ищем. Как бы там ни было, разложим каждое перемещение в произведение двух ортогональных симметрий. Имеем:

$$\mathfrak{D}_1 = S_1 \times S_1'; \quad \mathfrak{D}_2 = S_2 \times S_2'.$$

Можно всегда выбрать ось симметрии S_1', совпадающей с осью симметрии S_2.

Тогда

$$\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 = (S_1 \times S_1') \times (S_2 \times S_2) = S_1 \times (S_1 \times S_2) \times S_2 = S_1 \times S_2'.$$

Поэтому если оси симметрий S_1 и S_2 параллельны, то мы отсюда получим вектор переноса, получающегося при перемножении симметрий; если же эти оси пересекаются в некоторой точке O, то эта точка служит центром вращения, получающегося в этом случае при перемножении симметрий.

Упражнение. Различные построения центра вращения O. Имеем:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \searrow \end{Bmatrix} \xrightarrow{\qquad} \nearrow \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix}$$

Пусть J — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, что исключает случай симметрии относительно точки. Можно доказать, что центр вращения O находится:

1) На медиатрисах отрезков AA' и BB'.

2) На окружностях AJA' и BJB'.

3) На прямой, проведенной через J и являющейся *внешней биссектрисой* осей, носителей соответствующих отрезков AB и $A'B'$.

4) В центре окружности, описанной вокруг треугольника $J^{-1}JJ'$, где J^{-1} является предшествующей J, а J' — следующей за J в данном преобразовании точками *.

C) Трехмерное пространство

Как и в плоскости, всякое перемещение является произведением некоторого параллельного переноса и некоторого перемещения, имеющего инвариантную точку, которое определяет линейное преобразование векторного пространства. Аналогичное положение имеет место и для антиперемещения. Мы можем, предполагая базис выбранным, для выявления инвариантных элементов линейного преобразования немедленно указать простейшие преобразования, которые могут послужить своими произведениями для составления других преобразований. Имеем:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}. \end{cases}$ *Тождественное преобразование.*

b) $\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}. \end{cases}$ *Антиперемещение. Ортогональная симметрия относительно плоскости* Oij, которую назовем P.

Для любого вектора $\boldsymbol{V}$, параллельного плоскости P, $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$.

Для любого вектора $\boldsymbol{V}$, перпендикулярного плоскости P, $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$.

c) $\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}. \end{cases}$ *Антиперемещение. Ортогональная симметрия относительно прямой* $O\boldsymbol{i}$, которую назовем D.

Это перемещение называют *обращением* (*отражением*) или полуоборотом. Мы увидим, что это есть вращение на угол π.

Если некоторый вектор параллелен прямой D, то $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$.

Если вектор перпендикулярен к прямой D, то $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$.

d) $\begin{cases} \boldsymbol{i}' = -\boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{j}; \\ \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}. \end{cases}$ *Антиперемещение. Симметрия относительно точки* O.

---

* То есть прообразом и образом точки J.— *Прим. ред.*

Для любого вектора $\boldsymbol{V}$ имеем: $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$.

α) **Внутреннее исследование общего случая.** *Перемещение определено тремя неколлинеарными точками и их образами*:

$$\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A' \\ B' \\ C' \end{cases} \text{удовлетворяющие равенствам:} \begin{cases} A'B' = AB; \\ A'C' = AC; \\ B'C' = BC. \end{cases}$$

Берем следующую систему координат: точка O в A, вектор $\boldsymbol{i}$ на $\boldsymbol{AB}$, вектор $\boldsymbol{j}$ перпендикулярен к $\boldsymbol{i}$ в плоскости ABC с той же стороны по отношению к AB, что и C, а вектор $\boldsymbol{k}$ дополняет ортогональный базис. Отсюда выводятся образы O', $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$.

Перемещение определено тогда следующими необходимыми и достаточными условиями, равенствами отрезков и двугранных углов:

$$\forall M, \quad \begin{cases} A'M' = AM; \\ B'M' = BM; \\ (C', \boldsymbol{A'B'}, M') = (C, \boldsymbol{AB}, M) \pmod{2\pi}, \end{cases} \tag{1}$$

или же через равенства двугранных углов:

$$\forall M, \quad \begin{cases} (C', \boldsymbol{A'B'}, M') = (C, \boldsymbol{AB}, M) \pmod{\pi}; \\ (A', \boldsymbol{B'C'}, M') = (A, \boldsymbol{BC}, M) \pmod{\pi}; \\ (B', \boldsymbol{C'A'}, M') = (B, \boldsymbol{CA}, M) \pmod{\pi}. \end{cases} \tag{2}$$

Аналогично напишем условия для антиравенства, меняя лишь ориентацию вектора $\boldsymbol{k}'$ в базисе-образе и меняя знак у всех двугранных углов в левых частях равенств этих систем.

Следует заметить, что треугольники ABC и $A'B'C'$, имеющие соответственно равные стороны, могут рассматриваться в пространстве как равными, так и антиравными.

β) **Классификация перемещений в пространстве.** a) *Перемещение, имеющее две инвариантные точки.* Возьмем A и B в этих точках, C вне прямой AB. Система (1) приобретает вид:

$$\forall M, \quad \begin{cases} AM' = AM; \\ BM' = BM; \\ (C', \boldsymbol{AB}, M') = (C, \boldsymbol{AB}, M) \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

или же, согласно теореме Шаля о двугранных углах с тем же ребром:

$$\forall M, \quad \begin{cases} AM' = AM; \\ BM' = BM; \\ (M, \boldsymbol{AB}, M') = (C, \boldsymbol{AB}, C') = \alpha \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Ограничение этого преобразования в плоскости p, перпендикулярной к AB и инвариантной в целом, является плоским вращением, центр которого находится на AB. Обозначим через $\boldsymbol{d}$ прямую AB, ориентированную в направлении $\boldsymbol{AB}$, что позволяет так же ориентировать и плоскость p; тогда угол указанного выше вращения есть $\alpha \pmod{2\pi}$.

Перемещение в пространстве называется в этом случае вращением: вектор $\boldsymbol{d}$ — его ось, а угол

$$\alpha \pmod{2\pi}$$

— его угол.

Каждый вектор $\boldsymbol{V}$, параллельный оси d, дает $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$.

Каждый вектор $\boldsymbol{V}$, перпендикулярный к оси d, дает вектор $\boldsymbol{V}'$, лежащий в той же плоскости, перпендикулярной оси d, причем

$$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}') = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Любой другой вектор можно разложить на два вектора соответственно: параллельный и перпендикулярный оси d, так что он составляет со своим образом угол, отличный от угла O и угла α.

Для $\alpha = \pi$ мы снова находим ортогональную симметрию относительно оси d, называющуюся также обращением.

b) Теорема. *Любое перемещение, имеющее инвариантную точку, является некоторым вращением.* Пусть A — известная инвариантная точка; речь идет о том, чтобы доказать, что существует по крайней мере еще одна инвариантная точка O. Такая точка будет характеризоваться, согласно системе (1), следующими условиями:

$$\begin{cases} B'O = BO; \\ (C', \boldsymbol{AB}', 0) = (C, \boldsymbol{AB}, 0) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Однако мы не можем преобразовать равенство между двугранными углами так, как мы это делали на плоскости, так как теорема Шаля не применима к двугранным углам с разными ребрами. (Иначе можно сказать, что речь идет о том, чтобы найти инвариантную точку на сфере с центром A, причем сфера, очевидно, в целом инвариантна при рассматриваемом перемещении.)

Мы сейчас сведем вопрос к исследованию в плоской геометрии, рассматривая вместе с заданной парой B, B' пару D, D', такую, чтобы точка D' совпала с точкой B; это значит, что точка D — это точка, предшествующая точке B в данном преобразовании, так что точка D вполне определена системой (1).

Три точки D, B, B' равноудалены от точки A; поэтому эта точка A проектируется ортогонально на плоскость DBB' в центр ω окружности, описанной вокруг этого треугольника. Эта плоскость содержит линейные углы двугранных углов с ребром $A\omega$, так что имеем:

$$(D, \boldsymbol{A\omega}, B) = (B, \boldsymbol{A\omega}, B') = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Это значит, что треугольник ADB имеет образом треугольник ABB' при вращении вокруг оси $\boldsymbol{A\omega}$ на угол α. Так как эти три пары точек определяют единственное перемещение, то мы заключаем, *что данное перемещение является вращением.*

Мы видели, что вращение оставляет инвариантными векторы, параллельные оси вращения; с другой стороны, каждое перемещение является произведением некоторого параллельного переноса и перемещения, оставляющего инвариантной одну точку; получаем, таким образом, предложение:

Каждое перемещение оставляет инвариантными векторы некоторого направления δ *и притом единственного* (если только перемещение не является параллельным переносом, в каковом случае все векторы сохраняются). *Перемещение является произведением некоторого параллельного переноса и некоторого вращения вокруг оси, параллельной инвариантному направлению.*

Угол этого вращения определен: если $\boldsymbol{V}$ — вектор, перпендикулярный к направлению δ, то этот угол равен $\alpha = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}')$. Он называется *углом перемещения.*

c) Винтовое перемещение. В предшествующем разложении параллельный перенос подчинен лишь условию, чтобы произвольно выбранной точке преобразование ставило в соответствие ее заданный образ. Мы найдем особенно интересное и единственно определенное разложение, если наложим на это разложение условие, *чтобы перенос был параллелен инвариантному направлению* δ.

Рассмотрим для определения перемещения некоторый вектор $\boldsymbol{AB}$, параллельный направлению δ, так что $\boldsymbol{A'B'} = \boldsymbol{AB}$, и некоторый вектор $\boldsymbol{AC}$, перпендикулярный к δ; его образ $\boldsymbol{A'C'}$ дает, следовательно, угол перемещения $(\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{A'C'}) = \alpha$, или, можно сказать так: если спроектировать ортогонально точки A' и C' на плоскость P, перпендикулярную к δ и проведенную через AC, в точки A'', C'':

$$(\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{A''C''}) = \alpha.$$

Но в плоскости P векторы одинаковой длины $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{A'C'}$, рассмотренные, как равные фигуры, переходят первый во второй вращением на угол α вокруг определенной точки O, которую мы умеем строить. Пусть теперь z — параллель к направлению δ, проведенная через точку O. Рассмотренное вращение плоскости P вокруг точки O является ограничением вращения пространства вокруг оси z на плоскости P, преобразующим A в $\boldsymbol{A}''$ и C в C'', точка B имеет при этом образ B'', такой, что $\boldsymbol{A''B''} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A'B'}$. Произведение этого вращения на параллельный перенос $\boldsymbol{A''A'} = \boldsymbol{B''B'} = \boldsymbol{C''C'}$ дает перемещение, преобразующее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$: следовательно, это и есть рассматриваемое перемещение.

Нам остается отметить, что произведение этого вращения на этот параллельный перенос *коммутативно.* Полученное перемещение, произведение вращения и переноса, вектор которого параллелен оси вращения, называется *винтовым перемещением*. Вектор переноса, ось и угол вращения называются соответственно *вектором, осью, углом винтового перемещения.*

Вывод. *Любое перемещение в трехмерном пространстве является винтовым перемещением*, быть может, сводящимся только к параллельному переносу ($\alpha = 0$), или только к вращению ($\boldsymbol{V} = 0$), или к тождественному преобразованию ($\alpha = 0,\ \boldsymbol{V} = 0$).

d) **Разложение перемещения в произведение обращений** (ортогональных симметрий относительно прямой, то есть вращений на угол π).

1) *Произведение двух обращений вокруг параллельных осей z_1, z_2 дает параллельный перенос*, ибо векторы, параллельные оси z_1, инвариантны, как и векторы, перпендикулярные к z_1. Вектор переноса-произведения определяется, если взять некоторую точку H_1 на z_1; если H_2 есть проекция этой точки на z_2, то вектор переноса есть $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{H_1H_1'} = 2\boldsymbol{H_1H_2}$.

Обратно, *любой параллельный перенос можно разложить в произведение двух обращений с параллельными осями*, из которых одна подчинена лишь условию ортогональности вектору $\boldsymbol{V}$ параллельного переноса, и тогда другая ось определена.

2) *Произведение двух обращений с пересекающимися осями z_1, z_2* — это *некоторое вращение*, так как точка O пересечения осей инвариантна. Ориентированное инвариантное направление δ перпендикулярно плоскости z_1z_2, так что ось z вращения является перпендикуляром в точке O к плоскости z_1z_2. Наконец, угол вращения получается преобразованием некоторой точки, взятой на z_1. Таким образом находим ориентированный угол вращения вокруг оси z:

$$\alpha = 2\,(z_1,\ z_2)\,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Обратно, *любое вращение можно разложить в произведение двух обращений*: одна из осей подчинена лишь условию пересекать ось вращения и быть ей перпендикулярной; вторая ось отсюда выводится.

3) *Произведение двух обращений вокруг осей, не расположенных в одной и той же плоскости, является винтовым перемещением, ось которого служит общим перпендикуляром z к данным осям z_1, z_2.* Если H_1H_2, $H_1 \in z_1$, $H_2 \in z_2$ находятся на этом общем перпендикуляре, то *вектор* винтового движения таков:

$$\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{H_1H_2},$$

а *угол* его вращения вокруг $\boldsymbol{H_1H_2}$ равен $\alpha = 2\,(z_1,\ z_2)(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

Это немедленно следует из предыдущего, если ввести вспомогательную ось обращения z', параллельную оси z_2 и проходящую через точку H_1. В самом деле, обозначая через R и T соответственно обращение и параллельный перенос, имеем:

$$R(z_1)\times R(z_2) = R(z_1)\times R(z')\times R(z')\times R(z_2) =$$
$$= Rot^{*}(z,\ \alpha)\times T(\boldsymbol{V}).$$

* $Rot\,(z,\ \alpha)$ означает вращение вокруг оси z на угол α.— *Прим. перевод.*

Обратно, *любое винтовое перемещение можно разложить в произведение двух обращений*, одна из осей подчинена лишь условию пересекать ось данного перемещения и быть к ней перпендикулярной; другая ось отсюда выводится.

4) *Приложение к определению элементов перемещения, являющегося произведением двух данных перемещений.* Достаточно разложить каждое данное перемещение в произведение двух обращений, таких, чтобы ось второго обращения, происходящего от первого перемещения, совпала с осью первого обращения, происходящего от второго перемещения: это всегда возможно, так как две прямые всегда имеют общий перпендикуляр.

В случае какого-либо конечного числа перемещений действуют рекуррентно.

γ) **Изучение антиперемещений.** *a*) Приведение антиперемещений. Антиперемещение, определенное условиями

$$(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \searrow\underline{\qquad\quad}\nearrow (O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'),$$

где оба ортонормальных базиса имеют различные ориентации, является, очевидно, произведением перемещения

$$(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \searrow\underline{\qquad\quad}\nearrow (O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', -\boldsymbol{k}')$$

и ортогональной симметрии относительно плоскости

$$(O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', -\boldsymbol{k}') \searrow\underline{\qquad\quad}\nearrow (O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'),$$

или же перемещения

$$(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \searrow\underline{\qquad\quad}\nearrow (O', -\boldsymbol{i}', -\boldsymbol{j}', -\boldsymbol{k}')$$

и центральной симметрии

$$(O', -\boldsymbol{i}', -\boldsymbol{j}', -\boldsymbol{k}') \searrow\underline{\qquad\quad}\nearrow (O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}').$$

Рассмотрим это последнее разложение. У перемещения существует инвариантное направление δ, такое, что если $\boldsymbol{V}$ — вектор, параллельный направлению δ, то его образ $\boldsymbol{V}_1$ ему равен, то есть $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}$. Но в симметрии относительно точки образ вектора $\boldsymbol{V}_1$ ему противоположен, то есть $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}_1$, следовательно, $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$. Таким образом, *в каждом антиперемещении существует* направление δ, такое, что если вектор $\boldsymbol{V}$ параллелен направлению δ, то $\boldsymbol{V}' = -\boldsymbol{V}$.

Пусть тогда p — плоскость, перпендикулярная этому направлению δ; после симметрии относительно плоскости p фигура F становится фигурой F'', антиравной фигуре F, следовательно, равной фигуре F' *, что дает фигуру F' путем винтового перемещения с осью z, параллельной направлению δ. Таким образом, *любое антиперемещение является произведением симметрии относительно плоскости и винтового перемещения с осью, перпендикулярной этой*

* Под фигурой F' понимается фигура, полученная антиперемещением из фигуры F. — *Прим. перевод.*

плоскости. Однако вектор последнего перемещения может быть обращен в нуль надлежащим выбором плоскости p: достаточно для этого выбрать эту плоскость на равных расстояниях от двух соответственных точек A и A'. Отсюда вывод: *любое антиперемещение — это произведение некоторой ортогональной симметрии относительно плоскости и некоторого вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости*. Это произведение *коммутативно*. Разложение единственно.

b) Произведение ортогональных симметрий относительно плоскостей. *Если обе плоскости параллельны*, то произведение сохраняет векторы, параллельные этим плоскостям, равно как и векторы, им перпендикулярные. Перемещение-произведение является, следовательно, *параллельным переносом*. Если взять в первой плоскости точку H_1, которая проектируется ортогонально в точку H_2 второй плоскости, то вектор параллельного переноса равен $2\boldsymbol{H_1H_2}$.

Если обе плоскости пересекаются по некоторой прямой z, то эта прямая есть геометрическое место инвариантных точек, следовательно, перемещение-произведение является *вращением*, его угол вращения вокруг оси z равен $\alpha = 2\ (P_1,\ P_2) (\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

Обратно, любой параллельный перенос и любое вращение можно разложить в произведение двух ортогональных симметрий относительно двух плоскостей; одна из них подчинена лишь условию иметь данное направление или проходить через данную прямую, другая же плоскость выводится из первой.

Общее винтовое перемещение является, следовательно, произведением четырех ортогональных симметрий относительно плоскостей.

Любое антиперемещение является произведением трех ортогональных симметрий относительно плоскостей, причем две последние плоскости перпендикулярны к первой, или же, если угодно, две первые перпендикулярны к третьей.

c) Произведение центральных симметрий. В произведении двух центральных симметрий с центрами O_1, O_2 каждый вектор равен своему соответственному, то есть $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$. Перемещение-произведение является, следовательно, *параллельным переносом*. Вектор этого переноса равен $2\boldsymbol{O_1O_2}$.

Так как центральная симметрия — взаимное (инволюционное) преобразование, то

$$[S_{O_1} \times S_{O_2} = T] \Rightarrow S_{O_1} = T \times S_{O_2} \ \text{ и } \ S_{O_2} = S_{O_1} \times T.$$

d) Произведение симметрии относительно плоскости и центральной симметрии. Пусть p — плоскость, относительно которой делается ортогональная симметрия, а точка O — центр центральной симметрии. Каждый вектор, перпендикулярный плоскости p, сохраняется в перемещении-произведении, которое является, следовательно, винтовым перемещением с осью z, перпендикулярной плоскости p. Если рассмотреть точку, соответствующую точке O, то становится ясным, что ось этого перемещения является перпендикуляром, опущенным на плоскость p из точки O, и можно также определить вектор винтового перемещения. Пусть точка O_1 — проекция точки O на плоскость p; в произведении $S(p) = S(O)$ вектор переноса равен $2\boldsymbol{O_1O}$, а в произведении $S(O) \times S(p)$ вектор переноса равен $2\boldsymbol{OO_1}$. Наконец, угол винтового перемещения получается преобразованием вектора, параллельного плоскости p: этот угол равен π, так что вращение винтового перемещения является обращением. Произведение сводится к этому обращению, если центр O дан в плоскости p.

Вывод. Множество симметрий относительно плоскости порождает группу изометрий. Множество центральных симметрий порождает лишь подгруппу, характеризуемую инвариантностью не ориентированных направлений.

D) Движение недеформируемой фигуры

Рассмотрим множество точек, зависящее непрерывно от одного параметра и такое, что множества F_0 и F_1, соответствующие двум *каким-либо* значениям параметра, соответствуют друг другу в некотором перемещении. Интерпретируя параметр t, как число, измеряющее время, говорят, что множество точек F *находится в движении*. Геометрическое место каждой точки M фигуры F называется *траекторией* точки M; если O — фиксированная точка по отношению к системе координат в пространстве, например, начало координат, то вектор-производная вектора $\boldsymbol{OM}$ в некоторый данный момент называется *скоростью* точки M в этот момент.

Таким образом, изучение движений недеформируемой фигуры составляет часть кинематики твердого тела. Укажем лишь несколько результатов, полезных в элементарной геометрии.

a) **Поступательное движение.** Это случай, когда два положения F_0, F_1 получаются одно из другого переносом, каковы бы ни были значения t_0 и t_1. Траектории двух точек M, P в этом случае равны друг другу и получаются одна из другой параллельным переносом, так как $\boldsymbol{MP} = \boldsymbol{M_0P_0}$, каков бы ни был t. Кроме того,

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MP},$$

где $\boldsymbol{MP}$ — постоянный вектор. Значит, в каждый момент скорость любой точки P равна скорости точки M. Эта скорость называется *скоростью движения* в рассматриваемый момент.

b) **Вращательное движение.** Это такое движение, при котором точки некоторой оси остаются неизменными, так что два положения F_0 и F_1 получаются одно из другого вращением с фиксированной осью z.

Следовательно, траектория каждой точки находится на окружности с осью z. Скорости, касательные к соответствующим траекториям, пропорциональны в каждый момент расстоянию d точки до оси. Полагают $V = \omega d$ и условливаются откладывать на оси z вектор $\mathbf{\Omega}$ меры ω в таком направлении, чтобы трехгранник $\mathbf{OM}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{\Omega}$ имел положительную ориентацию. Этот вектор называется *вектором угловой скорости вращения*, и его мера ω называется *угловой скоростью движения* в рассматриваемый момент. Если ось z ориентирована, то числу ω приписывается знак согласно направлению движения. Движение определено заданием оси z и числа ω, как функции времени t. Согласно определению векторного произведения, $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$ для каждой точки M.

c) **Винтовое движение.** Это такое движение, когда два каких-либо положения F_0, F_1 получаются одно из другого винтовым перемещением, таким, что

1) его ось z фиксирована;

2) его вектор переноса пропорционален углу вращения.

Поэтому любая точка оси z имеет свою траекторию на этой же прямой. Каждая точка, не расположенная на оси z, описывает такую траекторию, расположенную на цилиндре вращения с осью z, что высота движущейся точки M, отсчитываемая по оси z, пропорциональна углу θ, на который поворачивается полуплоскость z, M; это значит, что эта кривая определена уравнением

$$z = h(\theta - \theta_0).$$

Эту кривую называют *круговой винтовой линией*.

Шагом винтовой линии называется длина $2\pi h$.

Все точки M описывают, таким образом, дуги круговых винтовых линий одного и того же шага. Скорости в один и тот же момент имеют равные проекции $\mathbf{V}_z$ на ось z и компоненту, перпендикулярную z, пропорциональную расстоянию d от движущейся точки до оси z; это соответственно те скорости, которые точка имела бы только в переносе и только во вращении. Для различных точек одной и той же винтовой линии эти составляющие имеют в один и тот же момент одну и ту же меру, откуда следует, что касательные в различных точках винтовой линии составляют один и тот же угол с осью z. Скорость, таким образом, определена

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM},$$

где O — некоторая точка оси z.

d) Касательное движение в данный момент. Рассмотрим в общем случае положение F_0 в некоторый данный момент t_0. Пусть, далее, F_1 — положение в момент $t_1 = t_0 + \Delta t$. Две равные фигуры F_0, F_1 получаются одна из другой винтовым движением, зависящим при фиксированном значении t_0 от значения t_1. Среди винтовых движений, переводящих между моментами t_0 и t_1 фигуру F_0 в фигуру F_1, существует равномерное винтовое движение, называемое средним движением между моментами t_0 и t_1; это значит, что скорость параллельного переноса, как и угловая скорость вращения, будет постоянна. Всякая хорда M_0M_1 —

это хорда действительной траектории и в то же время хорда винтовой линии рассматриваемого среднего винтового движения. Если теперь мы заставим Δt стремиться к нулю, то ось среднего движения, его скорость переноса и его угловая скорость вращения будут стремиться, вообще говоря, к пределам; этими пределами являются ось, скорость переноса и скорость вращения некоторого винтового движения, которое называют *винтовым движением, касательным* к изучаемому движению. (Его называют также *мгновенным движением.*) В рассматриваемый момент касательные к траекториям всех точек M, P, ... составляют равные углы с осью касательного движения.

В случае движения плоской фигуры в ее плоскости касательное движение является *вращением* (вообще говоря); если точка C_0 есть центр этого вращения в момент t_0, *то нормали в точках* M_0 *ко всем траекториям точек* M *фигуры пересекаются в точке* C_0.

Эти теоремы позволяют изучить касательные к некоторым кривым, определенным кинематическим образом, как траектории точек некоторой фигуры, совершающей определенное движение.

Пример. Отрезок PQ постоянной длины движется таким образом, что его концы остаются соответственно на двух прямых $x'Ox$, $y'Oy$. Некоторая точка M образует с отрезком PQ фигуру, остающуюся равной самой себе. Построить в каждом положении касательную к геометрическому месту точки M.

Направления скоростей точек P и Q определяют центр касательного вращения, значит, и нормаль C_0M_0.

Частный случай. $x'Ox$ и $y'Oy$ взаимно перпендикулярны, и точка M находится на прямой PQ.

Геометрическое место точки M есть эллипс (определенный выше, как образ окружности в ортогональном аффинитете), ибо если положить

$$\boldsymbol{MP} = a\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{MQ} = b\boldsymbol{u}, \quad (Ox, u) = \theta,$$

то координаты точки M будут:

$$x = -b\cos\theta; \quad y = -a\sin\theta,$$

и уравнение геометрического места точки M получит вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Прямая PQ может быть материализована, и эллипс тогда может изучаться с помощью *бумажной полосы.*

Замечание. Необходимость рассматривать в физике движения и различные положения твердых тел, естественно, оправдывает введение понятий равенства и движения. С этой точки зрения антидвижения значительно менее важны. Однако понятие о подобных между собой фигурах, образах одного и того же твердого тела, осуществленных в различных масштабах, также может рассматриваться как основное для нашего физического представления о пространстве; при этом равные фигуры могут выделяться, как фигуры, образующие подмножество множества подобных фигур. Мы выведем сейчас подобие из равенства.

III. Подобие

a) Подобные деления

В одномерной геометрии соответствие между точками M с абсциссой X и m с абсциссой x называется подобием, если оно определено так:

$$M_0M = am_0m, \text{ откуда } X = ax + b, \quad a \neq 0.$$

Пусть $a = 1$; мы знаем, что это *перенос*. Если $a \neq 1$, то существует инвариантная точка $X_0 = x_0 = \frac{b}{1-a}$, и соответствие определено равенством:

$$X - X_0 = a(x - x_0),$$

то есть $m_0M = am_0m$. Следовательно, это *гомотетия*. Говорят, точки M и m определяют на прямой два *подобных деления*.

В геометрии, размерность которой больше единицы, когда две прямые содержат соответственно точки M (с абсциссой X) и точки m (с абсциссой x), связанные между собой соответствием $X = ax + b$, мы также будем говорить, что *эти прямые являются носителями подобных делений*; в частности, если $a = 1$ или $a = -1$, то это *равные деления*. Выбрав надлежащим образом положительное направление на каждой прямой, можно считать число положительным и, когда a отлично от единицы, считать, что одна пара соответственных точек m_0 и M_0 имеет одинаковые абсциссы $X_0 = x_0$. Отсюда следует, что соответствие между этими двумя прямыми может быть определено, как произведение винтового перемещения и гомотетии с положительным коэффициентом a.

b) Преобразование подобия

Подобием называется *произведение перемещения и гомотетии с положительным коэффициентом.* Предположение о знаке коэффициента гомотетии — лишь вопрос удобства, не имеющий существенного значения в двумерном пространстве, ибо любая гомотетия с отрицательным коэффициентом является в этом пространстве произведением симметрии относительно точки (то есть вращения) на гомотетию с положительным коэффициентом. Наоборот, в трехмерном пространстве сделанное уточнение существенно, так как симметрия относительно точки является в трехмерном пространстве антиперемещением, так что произведение движения на гомотетию с отрицательным коэффициентом есть произведение антиперемещения на гомотетию с положительным коэффициентом.

Аналогично называют *антиподобием произведение антиравенства на гомотетию с положительным коэффициентом.*

Характеристика подобных фигур, то есть множеств точек M и M', соответствующих друг другу в подобии.

1) **В плоскости.** Пусть даны две пары соответственных точек A, A'; B, B'; положим $A'B' = kAB$. Системы (I) и (II), характеризующие равенство, дают с учетом гомотетии необходимые условия:

$$(S_1):\quad \forall M,\quad \begin{cases} (\boldsymbol{A'B'}, \boldsymbol{A'M'}) = (\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AM}) \pmod{2\pi}; \\ (A'M' = kAM); \end{cases}$$

$$(S_2):\quad \forall M,\quad \begin{cases} (A'B', A'M') = (AB, AM) \pmod{\pi}; \\ (A'B', B'M') = (AB, BM) \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Каждая из этих систем достаточна, так как фигура (F_1) множества точек M_1, определенных условием $\boldsymbol{A'M_1} = k^{-1}\boldsymbol{A'M'}$, получается действительно из фигуры (F) множества точек M движением и из фигуры (F') множества точек (M') гомотетией.

Множество подобий образует группу, так как отношения, выражаемые написанными системами, очевидно, транзитивны: произведение двух подобий снова является подобием, тождественное преобразование входит в это множество, и любое подобие определяет обратное ему подобие. Соответствие определено двумя парами A, A'; B, B', но ясно, что оно может быть определено бесчисленным множеством способов, как произведение движения на гомотетию с положительным коэффициентом. Каноническое разложение, то есть разложение, подчиненное дополнительным условиям, его определяющим, вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *В плоскости всякое подобие оставляет одну точку инвариантной.*

Как и для аналогичной теоремы о движениях, рассмотрим, например, систему (S_1). Инвариантная точка O охарактеризуется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} A'O = k\cdot AO \\ (\boldsymbol{A'B'}, \boldsymbol{A'O}) = (\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AO}) \pmod{2\pi} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'O = k\cdot AO \\ (\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OA'}) = (\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A'B'}) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Следовательно, O является точкой, определенной как пересечение дуги, ограниченной точками A, A' известной окружности, и такой окружности*, что A и A' расположены по отношению к ней в различных областях.

Система (S_1), написанная с помощью точки O, приобретает вид:

$$\begin{cases} OM' = k\cdot OM; \\ (\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{OM'}) = \alpha \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Преобразование, следовательно, предстает в виде коммутативного произведения вращения с центром в O и углом α и гомотетии с тем же центром O и коэффициентом k. Таким образом, *всякое* *подобие можно разложить единственным образом в произведение гомотетии и вращения, центром которого является центр гомотетии.* Отсюда получаются определения центра O, коэффициента k и угла $\alpha \pmod{2\pi}$ подобия в плоскости.

2) **В трехмерном пространстве.** Чтобы охарактеризовать соответствие, мы должны рассмотреть три пары соответственных точек A, A'; B, B'; C, C', причем точки A, B, C не коллинеарны. Обозначаем буквой k общее значение отношений:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Система, заменяющая систему (1), характеризующую равенство, такова:

$$(S_1):\quad \forall M,\quad \begin{cases} A'M' = k \cdot AM, \;\; B'M' = k \cdot BM; \\ (C', \boldsymbol{A'B'}, M') = (C, \boldsymbol{AB}, M) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Каноническое разложение подобия в произведение движения и гомотетии дается следующей теоремой:

В трехмерном пространстве любое подобие является произведением некоторого вращения и некоторой гомотетии, центр которой находится на оси вращения, причем разложение *единственно* и произведение *коммутативно.*

В самом деле, произведение винтового перемещения и гомотетии оставляет инвариантным некоторое направление z, притом одно-единственное (если только перемещение не есть параллельный перенос, так как в этом случае произведение является гомотетией). Пусть тогда p — плоскость, перпендикулярная к z. Сечение (f) фигуры (F) плоскостью p имеет образом сечение (f') фигуры (F') плоскостью p', параллельной плоскости p, так как подобие сохраняет углы. Спроектируем ортогонально фигуру (f') в фигуру (f_1) на плоскость p. Фигуры (f) и (f_1) являются в плоскости p подобными фигурами; пусть α — угол, а o — центр этого подобия. Пусть, далее, Z — параллель к направлению z, проведенная через точку o. В данном подобии прямая Z инвариантна в целом и соответственные точки MM', расположенные на этой прямой, образуют подобные деления, то есть деления, гомотетичные относительно некоторой точки O. Коэффициент k этой гомотетии положителен и равен коэффициенту k подобия, преобразующего фигуру (f) в фигуру (f_1), то есть отношению двух соответственных векторов данных фигур. Следовательно, изучаемое преобразование предстает, как произведение вращения вокруг оси Z на угол α и гомотетии с центром O, расположенным на Z и коэффициентом k.

Подобие, которое не сводится к вращению или к параллельному переносу, имеет, стало быть, *единственную инвариантную точку*, центр подобия, ось, угол и коэффициент подобия.

c) **Антиподобия.** Мы можем охарактеризовать антиподобия системами, аналогичными предыдущим, меняя знак в одном члене каждого из равенств между углами. Немедленно доказываются следующие результаты.

В плоскости всякое антиподобие является произведением обращения вокруг некоторой прямой Z и некоторой гомотетии, центр которой находится на Z.

В самом деле, мы видели, что любое плоское антиперемещение является произведением обращения вокруг некоторой прямой z и переноса, параллельного направлению z. В данном подобии образ прямой z есть некоторая прямая z', параллельная z; эти прямые являются носителями подобных делений, то есть здесь гомотетичных делений с положительным коэффициентом k. Прямая Z, параллельная направлению z и проведенная через центр O этой гомотетии, является носителем подобных делений, гомотетичных с центром в O, следовательно, это прямая, которая фигурирует в формулировке теоремы.

Впрочем, это лишь частный случай теоремы относительно подобия в пространстве, ибо антиподобие в плоскости P может рассматриваться, как ограничение подобия в пространстве, причем вращение, о котором говорится в общей теореме, имеет здесь угол $\alpha = \pi$.

В пространстве мы можем ввести антиперемещение, рассматривая гомотетию с отрицательным коэффициентом, и сформулировать теорему:

Всякое антиподобие есть произведение некоторого вращения и некоторой гомотетии с отрицательным коэффициентом, центр которой находится на оси вращения.

В самом деле, антиперемещение можно определить, как произведение симметрии относительно некоторой плоскости p и вращения на угол α вокруг некоторой прямой z, перпендикулярной к плоскости p; значит, прямая z и ее образ z' являются в данном подобии носителями подобных делений, которые здесь гомотетичны с отрицательным коэффициентом. Прямая Z, параллельная прямой z и проведенная через центр O этой гомотетии,— это прямая, о которой говорится в формулировке, причем угол вращения равен α, а центром гомотетии служит точка O.

Следовательно, в каждом антиподобии имеется инвариантная точка, притом единственная, ось, угол и коэффициент подобия.

Группа подобий и антиподобий оставляет инвариантным то, что физический эксперимент нас заставляет рассматривать, как «свойства фигур». Любое другое отображение пространства на себя «деформирует фигуры». Рассматривать, как эквивалентные, фигуры, соответствующие друг другу в преобразованиях какой-либо другой группы,— это значит заниматься геометрией, не являющейся евклидовой. Мы дадим один пример такой геометрии, отличной от аффинной и проективной геометрий. Это предмет изложения следующей главы.

Вторая глава

ИНВЕРСИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ КРУГОВОЙ ГЕОМЕТРИИ *

I. Инверсия как преобразование в метрической геометрии

1. **Определение.** Пусть в метрическом пространстве ** даны точка O, называющаяся *полюсом*, и число, представляющее по абсолютной величине квадрат длины, называющееся *степенью* инверсии, которое мы обозначим через $p = \varrho^2$, или $p = -\varrho^2$ в зависимости от его знака. Инверсия $\mathfrak{J}_{o,\,p}$ — это точечное преобразование, которое всякой точке M сопоставляет ее образ, точку M', расположенную на прямой OM и удовлетворяющую равенству

$$OM' \cdot OM = p.$$

Векторно это выражается так:

$$\mathbf{OM'} = \frac{p}{OM^2}\mathbf{OM},$$

или, что то же,

$$\mathbf{OM} = \frac{p}{OM'^2}\mathbf{OM'}.$$

Это преобразование *взаимно*. Точка O, и только она, не имеет образа: это особая точка преобразования; поэтому ее положение очень важно.

Инвариантные точки определены условием:

$$OM^2 = p;$$

они существуют, если степень p положительна. Тогда это точки сферы с центром в O и радиусом $\varrho = \sqrt{p}$, называющейся *сферой инверсии* (окружностью инверсии в двумерной геометрии, *парой точек* в одномерной геометрии). Следовательно, с этой точки зрения знак степени важен.

Наконец, заметим, что случай $p = 0$ нужно исключить (в этом случае образ любой точки находился бы в точке O). Преобразование не сводится никогда, ни при каком значении числа p к тождественному преобразованию. Множество инверсий, следовательно, не составляет группу.

С точки зрения свойств какой-либо фигуры в евклидовой геометрии значение степени инверсии несущественно, ибо изменить степень

* Употребителен также термин «аналлагматическая геометрия», которым автор и пользуется в оригинале.— *Прим. ред.*

** Очевидно, имеется в виду евклидово пространство одного, двух и трех измерений.— *Прим. перевод.*

инверсии означает преобразовать уже полученную преобразованием фигуру еще гомотетией, так как

$$\forall M, \quad \left.\begin{aligned} OM' &= \frac{p}{OM^2}\, OM^2, \\ OM'_1 &= \frac{p_1}{p}\, OM', \end{aligned}\right\} \Rightarrow OM'_1 = \frac{p_1}{OM^2}\, OM.$$

Таким образом, при изучении природы фигуры, обратной * в инверсии некоторой данной частной фигуре, можно выбирать степень инверсии произвольно, добиваясь проще получить результат.

Пример. Фигура, обратная сфере, когда полюс инверсии не находится на ней. Видно немедленно, что сфера в целом инвариантна, если выбрать в качестве степени инверсии степень полюса по отношению к самой сфере; поэтому при инверсии любой степени образом сферы будет сфера, гомотетичная данной сфере, причем центром гомотетии служит полюс инверсии.

Метод подходит также и для окружности, если полюс инверсии находится в плоскости окружности и не расположен на ней.

Случай положительной инверсии, то есть инверсии с положительной степенью.

Интерес этого случая заключается в том, что преобразование можно тогда определить заданием сферы инверсии ($\mathfrak{I}$) (или же окружности инверсии в двумерной геометрии). Взаимно обратные точки являются тогда каждая основанием перпендикуляра, опущенного из центра на полярную плоскость (или поляру) другой. Мы будем говорить в этом случае об инверсии относительно сферы ($\mathfrak{I}$) и о взаимно обратных точках относительно сферы ($\mathfrak{I}$).

В приложениях часто рассматривают инверсию отрицательной степени p, как произведение (коммутативное) положительной инверсии степени $|p|$ и симметрии относительно полюса. Роль этой симметрии выявляется, если подчеркнуть, что симметрия относительно точки является движением в двумерном пространстве, но антидвижением в одномерном или трехмерном пространстве.

Случай геометрии одного измерения. Определим каждую точку M ее абсциссой x, приняв за начало полюс O. Инверсия определена равенством

$$xx' = p.$$

Немедленно можно проверить сохранение двойного отношения четырех точек, то есть

$$(x_1 x_2;\, x_3,\, x_4) = (x'_1,\, x'_2;\, x'_3,\, x'_4);$$

поэтому *одномерная инверсия является гомографическим преобразованием.*

---

* Так называются образ и прообраз в преобразовании инверсии.— *Прим. перевод.*

Пусть в случае положительной инверсии A и B — инвариантные точки, определенные условием $|x| = \sqrt{p} = \varrho$; тогда любая пара M, M' соответственных точек делит гармонически отрезок AB.

Во всех случаях, если точка M стремится к полюсу O, то $x \to 0$, $x' = \infty$, что нас приводит к необходимости присоединить к точкам прямой, составляющим пространство нашей геометрии, еще одну *бесконечно удаленную точку*, рассматриваемую, как образ полюса O. Это согласуется с проективной геометрией, которой принадлежит гомографическое преобразование.

Теорема. *На прямой две любые пары различных точек всегда определяют инверсию или симметрию.*

Пусть в самом деле даны точки A, A', B, B'. Мы ищем полюс O, определяемый равенством $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'}$. Если при любом начале отсчета абсцисс мы обозначим через a, a', b, b', x абсциссы рассматриваемых точек, то условие напишется так:

$$(a-x)(a'-x) = (b-x)(b'-x),$$

то есть

$$[(a+a')-(b+b')]\,x = aa' - bb'.$$

Уравнение имеет единственное решение, за исключением случая, когда $a + a' = b + b'$. В этом случае, поскольку точки различны, из написанного равенства следует $AA' \neq BB'$ и отрезки AA' и BB' имеют ту же середину C. *Симметрия здесь появляется как особый случай инверсии*, при котором полюс, равно как и одна из инвариантных точек, находится на бесконечности. Лишь одна инвариантная точка сохраняется, и это есть центр симметрии. Степень стала бесконечной.

Для многомерной геометрии сделанное только что исследование относится к ограничению преобразования инверсии на любой прямой, проходящей через полюс инверсии.

2. Сохранение касания и углов

а) Непрерывность. Векторное соотношение $\mathbf{OM}' = \frac{p}{OM^2}\,\mathbf{OM}$ показывает, что вектор $\mathbf{OM}'$ — непрерывная функция вектора $\mathbf{OM}$ в каждой точке, отличной от полюса. Уточним: пусть A — данная точка, отличная от точки O, $OA = a \neq 0$, и пусть M — точка некоторой окрестности точки A, не содержащей O. Мы рассмотрим круг с центром в A, с радиусом $\alpha < a$; таким образом, $AM < \alpha < a$. После инверсии получается:

$$\mathbf{A'M'} = \mathbf{OM'} - \mathbf{OA'} = p\left[\frac{1}{OM^2}\,\mathbf{OM} - \frac{1}{OA^2}\,\mathbf{OA}\right] =$$

$$= p\left[\left(\frac{1}{OM^2} - \frac{1}{OA^2}\right)\mathbf{OA} + \frac{1}{OM^2}\,\mathbf{AM}\right].$$

Стало быть, по длине

$$A'M' < p\left[\left(\frac{1}{(a-\alpha)^2}-\frac{1}{a^2}\right)a+\frac{\alpha}{(a-\alpha)^2}\right]=p\frac{(3a-\alpha)\alpha}{a(a-\alpha)^2}<\frac{12p}{a^2}\ \alpha^*,$$

и $A'M'$ стремится к нулю, когда α стремится к нулю.

Если точка M стремится к полюсу O, то $OM\to 0$, значит, $OM'\to\infty$; окрестности $OM<\alpha$ точки O соответствует $OM'>\frac{|p|}{\alpha}$, то есть область, находящаяся *вне* сферы с центром в O, радиус которой стремится к бесконечности, когда α стремится к нулю. Поэтому если мы желаем присоединить к пространству некоторый элемент, чтобы сделать соответствие взаимно однозначным и взаимно непрерывным, то мы должны считать, что *пространство имеет точку на бесконечности*, одну и ту же для всех прямых, выходящих из полюса, и что окрестностью этой точки является область, *внешняя по отношению к любой сфере.* Отсюда следует, что с точки зрения евклидовой геометрии преобразование, несмотря на непрерывность, сильно деформирует фигуры, приближающиеся к полюсу. В этом можно отдать себе отчет, сделав несколько чертежей.

b) Сохранение касаний и углов. Пусть M — образующая точка некоторой кривой (C), определенной параметрически уравнением $\boldsymbol{OM}=f(t)\cdot\boldsymbol{u}$, где вектор $\boldsymbol{u}$ предполагается единичным вектором, функцией параметра t. Мы предполагаем, что функции, с которыми мы имеем дело, имеют производные в точке M_0, для которой $\boldsymbol{OM}_0=f(t_0)\,\boldsymbol{u}_0$. Сам вектор $\boldsymbol{OM}$ имеет в этой точке производную

$$(\boldsymbol{OM})_0'=f'(t_0)\,\boldsymbol{u}_0+f(t_0)\,\boldsymbol{u}_0'=f_0'\boldsymbol{u}_0+f_0\boldsymbol{u}_0',$$

причем известно, что вектор $\boldsymbol{u}_0'$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{u}_0$, ибо этот последний имеет постоянную длину. Вектор $(\boldsymbol{OM})_0'$ дает направление касательной к кривой (C) в точке M_0.

После инверсии мы имеем, обозначая M_0' образ точки M_0:

$$\boldsymbol{OM}_0'=\frac{p}{f_0}\,\boldsymbol{u}_0,$$

и, взяв производные, находим:

$$(\boldsymbol{OM}')_0'=p\left[-\frac{f_0'}{f_0^2}\,\boldsymbol{u}_0+\frac{1}{f_0}\,\boldsymbol{u}_0'\right]=\frac{p}{f_0^2}\left[-f_0'\boldsymbol{u}_0+f_0\boldsymbol{u}_0'\right],$$

---

* Предполагая, что α стремится к нулю, можно считать, что $\alpha<\frac{a}{2}$. Тогда выражение $\frac{3a-\alpha}{(a-\alpha)^2}$ будет увеличиваться, если в знаменателе мы вместо α поставим $\frac{a}{2}$, в числителе же заменим α нулем.

Таким образом, $\frac{3a-\alpha}{(a-\alpha)^2}<\frac{12}{a}$.

Таким образом, получаем $A'M'<\frac{12\,p\alpha}{a^2}$. — *Прим. ред.*

так что получился вектор того же направления, что и вектор $-f_0'u_0+f_0u_0'$.

Отсюда выводим заключение, что кривая (C'), образ кривой (C) в инверсии имеет в точке M_0', являющейся образом точки M_0, касательную прямую, причем *обе касательные находятся в одной и той же плоскости и симметричны относительно медиатрисной плоскости отрезка* M_0M_0'.

Следствие. *Угол между двумя кривыми, имеющими общую точку, сохраняется.* В частности, если две кривые касаются, то *касание сохраняется.*

Если точка M описывает некоторую поверхность, имеющую в точке M_0 касательную плоскость, которая, как известно, порождается множеством касательных прямых в этой точке к кривым на поверхности, то обратная поверхность в точке M_0' тоже имеет касательную плоскость, симметричную предыдущей относительно медиатрисной плоскости отрезка M_0M_0'.

В плоскости, проходящей через полюс, ориентированный угол между двумя кривыми, то есть угол между их касательными, *меняет ориентацию* в силу симметрии, которая становится в двумерном пространстве симметрией относительно медиатрисы отрезка M_0M_0'.

Какое заключение можно сделать об ориентации трехгранников, образованных касательными *в пространстве*? Так как два трехгранника взаимно обратных направлений при той же вершине имеют противоположные ориентации, то мы должны рассматривать соответственные полукасательные, значит, нас интересует направление производного вектора $(OM')_0'$ на его носителе, то есть знак числа p. Отсюда выводим заключение: *если степень инверсии положительна, то полукасательные, соответственные в инверсии, остаются соответственными также в симметрии; следовательно, ориентации соответственных трехгранников различны; если же степень инверсии отрицательна*, то трехгранники, соответственные по инверсии и по симметрии относительно плоскости трехграннику полукасательных в точке M_0, имеют противоположные ориентации, так что *инверсия сохраняет в этом случае ориентацию трехгранника.*

Выявленное свойство сохранения углов, несмотря на искажение, которому подвергается фигура, является источником многочисленных применений инверсии. Говорят, что инверсия — *конформное отображение*; множество конформных отображений (то есть отображений, сохраняющих углы), очевидно, является группой. Произведения подобий, антиподобий, инверсий входят в эту группу.

3. Основное свойство

Рассмотрим в некоторой инверсии две пары обратных точек A, A'; M, M' *. Пусть a, m, p, q — прямые OAA', OMM', AM

---

* Предполагается, вообще говоря, что пары AA' и MM' лежат на разных радиусах.— *Прим. ред.*

и $A'M'$. По определению имеем на прямых a и m

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OM}\cdot\overline{OM'}.$$

Это равенство выражает, что четыре точки A, A', M, M' находятся на одной и той же окружности (γ). Таким образом, *любые две точки и обратные им точки концикличны.* Следовательно, прямые p и q являются изогоналями прямых a и m; эти две пары прямых имеют общие направления биссектрис d_1, d_2. Подобие двух треугольников OAM и $OM'A'$, вытекающее отсюда, позволяет написать полезное иногда метрическое соотношение:

$$A'M'=AM\cdot\frac{OA'}{OM}=AM\,\frac{|p|}{OA\cdot OM}$$

(рекомендуется вывести в качестве упражнения эту формулу из данного выше векторного выражения для $A'M'$).

Другое доказательство сохранения углов.

Сохраняем предшествующие обозначения. Пусть (C) — некоторая кривая, A — одна из ее точек, M — ее образующая точка. По предположению, когда точка M стремится к точке A, то прямая p, носитель отрезка AM, стремится к некоторой прямой t, являющейся касательной в точке A к кривой (C). Прямая m стремится в этих условиях к прямой a, а плоскость (a, m) стремится к плоскости (a, t), определенной, если касательная t не совпадает с прямой a. Направления биссектрис d_1, d_2 стремятся, одно к направлению прямой a, другое к перпендикулярному первому направлению в плоскости (a, t).

Отсюда следует, что прямая q, являющаяся носителем отрезка $A'M'$, имеет предельное положение, симметричное прямой t относительно той из медиатрис отрезка AA', которая находится в плоскости (a, t). Таким образом, прямая t' симметрична прямой t относительно медиатрисной плоскости отрезка AA'. Вывод сохраняет силу, если прямая t совпадает с прямой a, так как угол (a, q) стремится к нулю ($\mathrm{mod}\,\pi$).

Исследование заканчивается, как и приведенное выше.

a) Приложения основного свойства.

Инверсию можно определить, отправляясь от полюса O и пары точек A, A', коллинеарных с точкой O на прямой a. Пары соответственных точек M, M' являются парами точек пересечения прямых m, выходящих из O, и окружностей (γ), проходящих через точки A и A'. Отметим, что три пары точек A, A'; M, M'; P, P' находятся на одной и той же сфере (σ). Окружности (γ) и сферы (σ) инвариантны, очевидно, в целом в инверсии.

Если степень инверсии положительна, то эти окружности и эти сферы ортогональны к сфере инверсии ($\mathcal{J}$). Отметим еще, что инверсия вполне определена полюсом O и *одной* окружностью (γ), или одной сферой (σ). Любая сфера, ортогональная сфере ($\mathcal{J}$), — это некоторая сфера (σ); любая окружность, ортогональная сфере ($\mathcal{J}$) и плоскость которой проходит через O,— это некоторая окружность (γ). Симметрия относительно плоскости появляется здесь, как частный случай: прямые m параллельны, а сфера ($\mathcal{J}$) становится плоскостью, перпендикулярной направлению.

b) Образы окружностей и сфер, прямых и плоскостей.

1) Окружности, плоскости которых проходят через полюс. Определим окружность (C) двумя ее точками A, B и углом $\varphi \pmod{\pi}$, таким, чтобы образующая точка M характеризовалась уравнением:

$$(AM, BM) = \varphi \pmod{\pi}.$$

Обозначим через a, b, m прямые AA', BB', MM', затем через α, α', β, β' прямые MA, $M'A'$, MB, $M'B'$. Выразим, что можно описать окружность вокруг четырехугольника $AA'MM'$ и вокруг четырехугольника $BB'MM'$. Будем иметь:

$$(a, \alpha) = (\alpha', m), \quad (b, \beta) = (\beta', m).$$

Отсюда выводится

$$(\alpha', \beta') = (a, \alpha) - (b, \beta)$$

или еще

$$(\alpha', \beta') = (a, b) - \varphi \pmod{\pi}.$$

Первый случай.

$$(a, b) \neq \varphi \pmod{\pi},$$

то есть *точка O не лежит* на окружности (C). Образ окружности (C) в этом случае — это окружность плоскости, также не проходящая через полюс O. Мы видели в 1, что O служит центром гомотетии окружностей (C) и (C').

Второй случай.

$$(a, b) = \varphi \pmod{\pi},$$

то есть *полюс находится на окружности* (C). Тогда образ окружности (C) — это *прямая* $A'B'$. Полагая $\varphi = 0 \pmod{\pi}$, мы видим, как этого требует взаимность инверсии, что фигура, обратная прямой (C), не проходящей через O, является окружностью, проходящей через O.

Наконец, случай $\varphi = 0 \pmod{\pi}$ вместе с $(a, b) = 0 \pmod{\pi}$. В этом случае (C) является прямой, проходящей через O. Мы снова находим, что она инвариантна в целом.

Так как образом множества окружностей, проходящих через O, является множество прямых, то мы приходим к необходимости присоединить к плоскости *единственную бесконечно удаленную точку*, образ полюса, и считать, что все прямые плоскости проходят через эту бесконечно удаленную точку. Что мы скажем тогда о двух параллельных прямых? Окружность, обратная некоторой прямой, имеет в точке O касательную, параллельную прямой (это вытекает из общей теоремы о касательных или, проще, из рассмотрения оси симметрии фигуры). Поэтому две параллельные прямые соответствуют двум окружностям, касательным друг к другу в точке O, и мы должны сказать, чтобы распространить и на эту точку сохранение касания, что *две параллельные прямые — это две окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку и касающиеся друг друга в этой точке.* Чтобы распространить на эту точку также и сохранение углов, мы будем говорить, поскольку две окружности пересекаются под тем же углом в каждой из их двух точек пересечения, что две прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке под углом, равным обычному углу между этими самыми прямыми.

2) Сферы и плоскости. Предыдущий метод (метод метрической геометрии) больше не подходит, так как он опирается на теорему Шаля для углов. Мы получим искомые выводы из предшествующих, образуя фигуру, состоящую из полюса и некоторой сферы (или плоскости), вращением плоской фигуры, состоящей из полюса и некоторой окружности (или прямой). Тогда мы приходим к заключению, что фигура обратная сфере, не проходящей через полюс, есть сфера, также не проходящая через полюс, и что фигура, обратная сфере, проходящей через полюс, есть плоскость, не проходящая через полюс и параллельная плоскости, касательной к сфере в полюсе. Обратно, образ плоскости есть некоторая сфера, проходящая через полюс, за исключением случая, когда плоскость сама проходит через полюс, и тогда она инвариантна в целом.

Поэтому нужно будет рассматривать пространство, как дополненное *одной бесконечно удаленной точкой*, общей всем плоскостям и являющейся образом полюса.

3) Фигура, обратная окружности в пространстве. Любая окружность (C) может рассматриваться, как пересечение сфер (S); поэтому фигура, обратная окружности,— это окружность пересечения обратных сфер (s'). Среди сфер (s) существует одна, проходящая через полюс; ее образ — это плоскость окружности (C'). Среди этих сфер существует также одна инвариантная в целом в инверсии; эта сфера (σ) может быть получена с помощью одной точки $A \in (C)$ и ее образа A': это есть сфера, проходящая через окружность (C) и точку (A'); следовательно, *две обратные окружности находятся на одной и той же сфере.*

Фигура, образованная некоторой окружностью (C) и некоторой точкой O, расположенной вне плоскости окружности, имеет плоскость симметрии π. Эта симметрия сохраняется инверсией с полюсом в O, так что плоскость π проходит через центр окружности (C') и перпендикулярна к плоскости этой окружности. В этой плоскости π находятся две точки A и B, диаметрально противоположные на окружности (C), и их образы (A', B'), диаметрально противоположные на окружности (C'), а также центры этих окружностей;

однако эти центры не соответствуют друг другу в инверсии. Они даже, вообще говоря, не коллинеарны с точкой O; они расположены на двух прямых, выходящих из O и симметричных относительно биссектрис прямых OAA' и OBB'.

Две обратные окружности находятся на одном и том же конусе, вершиной которого служит полюс инверсии O и который инвариантен в целом в инверсии; отсюда следует, что любой конус, имеющий круговое сечение, имеет бесконечное множество таких сечений, кроме сечений, параллельных первому и получаемых из него гомотетией: это те параллельные друг другу сечения, которые получаются из первого инверсией. Эти два направления круговых сечений совпадают лишь для конусов вращения.

4) Обратные предложения. Используя прямые теоремы, можно немедленно проверить следующие обратные предложения.

а) *На плоскости две окружности соответствуют друг другу, вообще говоря, в двух инверсиях*, полюсами которых служат центры двух гомотетий. Если окружности касаются, то точка касания, хотя она и является центром гомотетии, не служит полюсом инверсии: тогда остается, следовательно, лишь одна инверсия. Если окружности концентричны, то имеется лишь один центр для обеих гомотетий и, следовательно, лишь один полюс для обеих инверсий.

Некоторая окружность и некоторая прямая соответствуют друг другу, вообще говоря, в двух инверсиях, полюсами которых служат те точки окружности, в которых касательные параллельны данной прямой. Если окружность и прямая касаются, то точка касания не подходит, и остается единственная инверсия.

Две прямые не соответствуют друг другу в инверсиях, но соответствуют друг другу в двух симметриях относительно прямых; если прямые параллельны, то остается единственная симметрия.

b) *Две сферы соответствуют друг другу, вообще говоря, в двух инверсиях*, полюсами которых служат центры гомотетий. Исследование делается так же, как и для окружностей на плоскости. Так же изучается сфера и плоскость и две плоскости.

с) *Две окружности одной и той же сферы* (σ) *инверсны друг другу, вообще говоря, двумя способами.* В самом деле, существует единственная общая плоскость симметрии π, если только плоскости обеих окружностей не параллельны. В этой плоскости π находятся две пары точек, диаметрально противоположных: A, B на окружности (C) и P, Q на окружности (C'). Получаются две инверсии, в зависимости от того, находится ли A' в P и B' в Q или же A' в Q и B' в P. После того как выбор сделан, прямые AA' и BB' пересекаются в некоторой точке O. Инверсия с полюсом O, степень которой равна степени точки O относительно сферы (σ), подходит, так как она преобразует окружность (C) в окружность диаметра $A'B'$, лежащую в плоскости, перпендикулярной плоскости π, то есть в окружность (C').

Если обе окружности сферы (σ) расположены в параллельных плоскостях, то имеется бесчисленное множество плоскостей симметрии, так как имеется ось вращения; оба полюса инверсий являются тогда центрами двух гомотетий, и оба конуса, проходящие через окружности, являются конусами вращения *.

d) *Две окружности одного и того же конуса, расположенные в непараллельных плоскостях, взаимно обратны* (если плоскости окружностей параллельны, то окружности гомотетичны). Чтобы доказать это обратное предложение, нам достаточно доказать, что окружности находятся на одной и той же сфере. Но если прямая пересечения плоскостей окружностей (C) и (C') пересекает окружность (C) в точках A и B, то эти точки находятся на конусе, значит, также на окружности (C'), являющейся полным пересечением конуса с плоскостью этой окружности. В этом случае обе окружности находятся на одной и той же сфере (σ), ибо они имеют две общих точки. Следовательно, эти две окружности взаимно обратны, причем полюсом служит вершина конуса, а степень инверсии такова, что инверсия оставляет сферу (σ) инвариантной в целом.

Если прямая пересечения плоскостей окружностей (C) и (C') не пересекает окружность (C), то можно подвергнуть, например, окружность (C') предварительной гомотетии и привести одну из точек A' этой окружности в точку A окружности (C), расположенную на той же образующей. Окружность (C''), гомотетичная окружности (C'), находится в плоскости, проходящей через точку A, и, следовательно, пересекает окружность (C) еще в другой точке B, общей окружностям (C) и (C''). Мы пришли к предыдущему случаю, так что окружности (C) и (C'') соответствуют друг другу в инверсии с полюсом в O, то есть вершине конуса; значит, окружности (C) и (C') обратны друг другу в инверсии, являющейся произведением только что найденной инверсии и гомотетии, преобразующей окружность (C'') в (C'). Доказательство проходит, даже если точки B и A совпадают, так как две касательные окружности, лежащие в различных плоскостях, принадлежат одной и той же сфере.

Таким образом, *конус, имеющий одно круговое сечение, имеет два направления круговых сечений*, называемые *круговыми направлениями*; одно — параллельное плоскости данного сечения, другое — параллельное плоскости сечения, обратного данной окружности. Эти направления совпадают для конуса вращения.

З а м е ч а н и е. Все встреченные в предыдущих предложениях исключения исчезают, если рассматривать ортогональные симметрии относительно плоскостей (или в плоскости ортогональные осевые симметрии) как инверсии, полюс которых является бесконечно удаленной точкой.

---

* Если эти окружности конгруэнтны, то центр гомотетии только один — центр симметрии. Одна инверсия вырождается в симметрию относительно плоскости, медиатрисной к отрезку, соединяющему центры окружностей, другая — в трансляцию.— *Прим. ред.*

II. Понятие о круговой геометрии

Подобно тому как перспектива, приводящая к рассмотрению бесконечно удаленных точек и к особому инварианту, двойному отношению четырех коллинеарных точек, является введением в проективную геометрию, которую можно изучить, используя аффинную геометрию, но которая автономна, имеет собственные аксиомы и собственные методы, точно так и инверсия вводит некоторую новую геометрию, которая также может изучаться непосредственно, а не обязательно с помощью метрической геометрии. Это *круговая геометрия.*

В этой геометрии существенными элементами вместе с *точкой* являются *окружность* (через три точки * всегда проходит окружность ** и только одна) и *сфера* (через четыре точки, не расположенные на одной окружности, проходит всегда сфера *** и только одна). Круговые свойства некоторой фигуры — это соотношения, инвариантные относительно инверсии.

Мы не дадим самостоятельного аксиоматического построения круговой геометрии, но мы укажем на ее существенные свойства, среди которых и следует выделить аксиомы, подлежащие присоединению к *аксиомам инцидентности*, или *принадлежности* (относящимся к пересечениям окружностей и сфер). Поэтому для доказательств мы будем по-прежнему пользоваться метрической геометрией.

1. **Круговое определение инверсии.** Мы сейчас охарактеризуем инверсию только с помощью кругов.

Если даны две пары точек A, A'; B, B' на одной и той же окружности (γ) или на одной и той же прямой, то существует некоторая инверсия или некоторая симметрия относительно плоскости, такая, что точки A' и B' являются соответственно образами точек A и B.

Доказательство было проведено для случая коллинеарных точек; знание ограничения инверсии на прямую, содержащую коллинеарные точки, определяет эту инверсию. Если прямые AA' и BB' не совпадают, то они либо пересекаются, либо параллельны (в плоскости окружности γ). В первом случае искомая инверсия имеет полюсом точку пересечения, а степенью степень этой точки относительно окружности (Γ), во втором случае инверсия является симметрией относительно общей медиатрисной плоскости параллельных хорд AA' и BB'.

В инверсии, так определенной, образом некоторой точки M является точка M', общая окружностям $AA'M$ и $BB'M$ сферы, определенной окружностью (γ) и точкой M. В случае коллинеарности используют вспомогательную точку P, не коллинеарную с другими точками.

---

* Среди которых по крайней мере две различны.— *Прим. ред.*

** Прямая рассматривается как частный вид окружности.— *Прим. ред.*

*** Плоскость рассматривается как частный вид сферы.— *Прим. ред.*

С точки зрения круговой геометрии (не отличая, следовательно, прямых от окружностей и симметрию относительно плоскости от инверсии) мы формулируем поэтому такое положение:

Инверсия является точечным преобразованием, определяемым двумя парами концикличных точек A, A'; B, B'. Образ каждой точки M — это вторая точка пересечения окружностей $AA'M$, $BB'M$. Метрическое представление инверсии можно получить, рассматривая некоторую точку I как бесконечно удаленную; окружности, проходящие через I, называются *прямыми*; сферы, проходящие через I, называются *плоскостями*. Образ точки I называется *полюсом* инверсии.

Приложение. Трансформирование инверсии инверсией

Пусть дана инверсия $(\mathcal{J})$, определенная парами точек $A, B \in (F)$ и их образами $A', B' \in (F')$, причем все четыре точки расположены на некоторой окружности (γ). Инверсия $(\mathcal{J}_1)$ дает $A_1, B_1 \in (F_1)$ и $A_1', B_1' \in (F_1')$ — точки, расположенные на некоторой окружности (γ_1), образе окружности (γ). Инверсия $(\mathcal{J}')$, определенная парами A_1, A_1'; B_1, B_1', и является искомым результатом трансформирования, так как окружности, позволяющие переходить от точек фигуры (F) к их образам в фигуре (F_1), преобразуются инверсией $(\mathcal{J}_1)$ в окружности, определяющие инверсию $(\mathcal{J}')$. Таким образом, *преобразование, полученное трансформированием инверсии некоторой другой инверсией, также является инверсией.*

Мы можем записать это в следующих эквивалентных, в виду взаимности инверсии, формах:

$$(\mathcal{J}_1)\times(\mathcal{J})\times(\mathcal{J}_1)=(\mathcal{J}'), \quad \text{или} \quad (\mathcal{J}_1)\times(\mathcal{J})=(\mathcal{J}')\times(\mathcal{J}_1).$$

Или же:

$$(\mathcal{J})=(\mathcal{J}_1)\times(\mathcal{J}')\times(\mathcal{J}_1).$$

Для данной инверсии $(\mathcal{J}_1)$ соотношение между инверсиями $(\mathcal{J})$ и $(\mathcal{J}')$ взаимно.

2. Круговые инварианты

а) Двойное отношение четырех точек на одной окружности. Пусть на некоторой окружности (γ) даны четыре точки A, B, C, D в определенном порядке. Какова бы ни была точка M окружности (γ), двойное отношение пучка $M(A, B, C, D)$ является одним и тем же определенным числом, называемым двойным отношением этих четырех точек окружности.

При инверсии с полюсом O, расположенным на этой окружности, двойное отношение сохраняется, так как окружность (γ) становится прямой (γ'), пересекающей пучок $O(A, B, C, D)$ в точках A', B', C', D'. Изучим случай, когда полюс O инверсии $(\mathcal{J})$ не находится на окружности (γ).

Так как значение степени инверсии не существенно, то мы можем предположить, что окружность (γ'), обратная окружности (γ), пересекает эту последнюю в двух точках K и L, и трансформировать инверсию $(\mathcal{J})$ некоторой инверсией $(\mathcal{J}_1)$ с полюсом L. Относительно инверсии $(\mathcal{J}_1)$ окружности (γ) и (γ') имеют своими образами прямые (γ_1) и (γ_1'), пересекающиеся в точке K_1. Значит, при преобразовании

$$(\mathcal{J}')=(\mathcal{J}_1)\times(\mathcal{J})\times(\mathcal{J}_1)$$

обе прямые (γ_1) и (γ_1') соответствуют друг другу, и их общая точка K_1 инвариантна. Но преобразование $(\mathcal{J}')$ является инверсией; следовательно, это может быть только симметрия относительно плоскости. Поэтому преобразование $(\mathcal{J}')$, равно как и преобразование $(\mathcal{J}_1)$, сохраняет двойное отношение рассмотренных точек; значит, это же имеет место для преобразования

$$(\mathcal{J})=(\mathcal{J}_1)\times(\mathcal{J}')\times(\mathcal{J}_1).$$

Таким образом, *двойное отношение четырех точек одной и той же окружности инвариантно в любой инверсии.*

b) Круговой инвариант пары окружностей одной и той же плоскости. Заметим прежде всего, что фигура, обратная пучку окружностей с основными точками, является, очевидно, пучком такого же типа. То же самое верно и для пучка с предельными точками (так как его можно определить, как пучок, ортогональный некоторому пучку с основными точками), а также для пучка касающихся друг друга окружностей. Инверсией $(\mathcal{J}_0)$, полюсом которой служит одна из точек Понселе (основная точка, или предельная, точка), пучок окружностей преобразуется в пучок прямых, пересекающихся или параллельных, или же в пучок концентрических окружностей.

Учтем сказанное выше и рассмотрим некоторую пару окружностей (C_1) и (C_2) в одной и той же плоскости; пересечем их какой-либо окружностью (Γ) из ортогонального пучка. Инверсия $(\mathcal{J}_0)$ сохраняет двойное отношение λ четырех конциклических точек пересечения, и полученный простой образ* показывает, что это двойное отношение не зависит от окружности (Γ), выбранной в ортогональном пучке. Но значение λ сохраняется при всякой инверсии $(\mathcal{J})$. Отсюда следует, что λ является круговым инвариантом пары окружностей (C_1), (C_2).

Выразим λ в евклидовой метрической геометрии, используя в качестве окружности Γ общий диаметр. Пусть A_1, B_1 и A_2, B_2 — точки пересечения этого диаметра соответственно с окружностями (C_1) и (C_2) и пусть C_1, C_2 — центры этих окружностей. Тогда мы получаем, используя обычные обозначения:

$$\overline{C_1C_2}=d;\quad \overline{C_1A_1}=-\overline{C_1B_1}=R_1;\quad \overline{C_2A_2}=-\overline{C_2B_2}=R_2;$$

* Центр окружности, ортогональной двум пересекающимся прямым, совпадает с их точкой пересечения. Окружность, ортогональная двум концентрическим окружностям, является прямой, проходящей через их центр.— *Прим. ред.*

$$\lambda=\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2B_1}}:\frac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2B_1}}=\frac{d^2-(R_2-R_1)^2}{d^2-(R_2+R_1)^2}.$$

Но пара окружностей не может иметь при инверсии более одного инварианта, ибо очевидно, что если полюс и степень произвольны, то выбор R_1' не может определить d' и R_2'. Но в случае, когда (C_1) и (C_2) пересекаются, мы уже знаем один такой инвариант: это угол V между двумя окружностями. Поэтому мы должны убедиться, что между числами λ и V имеется соотношение, не зависящее от пары окружностей. В самом деле, для пересекающихся окружностей имеем:

$$|R_2-R_1|<d<R_2+R_1; \quad \cos V=\frac{R_1^2+R_2^2-d^2}{2R_1R_2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\frac{V}{2}=\frac{1-\cos V}{1+\cos V}=-\lambda.$$

Мы видим, а это становится ясным также, если учесть порядок точек на ортогональной окружности, что неравенство $\lambda<0$ является условием пересечения окружностей. Ортогональные окружности соответствуют значению $\lambda=-1$.

c) В трехмерном пространстве мы называем *ортогональной окружностью к некоторой сфере* окружность, ортогональную сфере в двух общих с нею точках; значит, плоскость окружности ортогональна к сфере (она проходит через центр сферы) и каждая сфера, проходящая через эту окружность, ортогональна к данной сфере.

Мы называем *ортогональным кольцом* пару двух окружностей, таких, что любая сфера, проходящая через одну из окружностей, ортогональна к другой. Тогда плоскости этих окружностей взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой центров. Эта прямая пересекается окружностями в точках, образующих гармоническую четверку.

Все эти конфигурации сохраняются инверсией. С другой стороны, круговые свойства плоской фигуры верны и для *сферических фигур*, так как любая *сферическая фигура* дает плоский образ при инверсиях с полюсом на сфере. Такая инверсия определяет *отображение сферы на плоскость* (снабженную бесконечно удаленной точкой), которое может быть получено также некоторой перспективой. Это отображение называется *стереографической проекцией* сферы на плоскость (она используется для получения географических и астрономических карт). В частности, *две окружности одной и той же* сферы имеют круговой инвариант λ, равный двойному отношению четырех точек, высекаемых этими окружностями на каждой ортогональной им обеим окружности сферы. Если окружности пересекаются, то λ является функцией их угла.

Аналогично *две сферы имеют круговой инвариант*; его получают с помощью некоторой общей ортогональной окружности, и вычисление, сделанное для плоского случая, сохраняет силу.

d) Общее круговое преобразование.

Определение. Взаимно однозначное точечное преобразование называется *круговым преобразованием* *, если каждая окружность имеет своим образом окружность, причем углы пересекающихся окружностей сохраняются **, а таким образом возникающие трехгранники имеют все ту же ориентацию, что и их образы, или все ориентацию, противоположную ориентации образа ***. Обозначим такое преобразование через (T).

1) Докажем сначала, *что такое преобразование, если оно существует, определено тремя парами соответственных точек* A, A'; B, B'; C, C'.

В самом деле, пусть M — некоторая точка фигуры (F); инверсией с полюсом в A сфера $ABCM$ преобразуется в некоторую плоскость, и окружности (ABM), (ACM), (ABC) становятся прямыми в этой плоскости. Аналогично подвергнем фигуру (F') некоторой инверсии с полюсом A'. Окружности $(A'B'M')$, $(A'C'M')$ и $(A'B'C')$ становятся прямыми в плоскости, определенной образами точек $(A'B'C'M')$, и образ точки M' будет определен в этой плоскости по углам при точках образа B' и C' между прямыми, являющимися образами окружностей, (ABC), (ABM), (ACM), какова бы ни была точка M.

2) *Любое произведение инверсий является преобразованием* (T); ориентация углов сохраняется, если число инверсий четное, и изменяется, если это число нечетное. Докажем обратное предложение.

3) *a*) Отметим сначала, что поскольку симметрия относительно плоскости является инверсией (с принятой нами точки зрения), то любой параллельный перенос или любое вращение должны рассматриваться, как произведение двух инверсий, а любое винтовое перемещение — как произведение четырех инверсий. С другой стороны, мы знаем, что гомотетия является произведением двух инверсий с общим полюсом.

b) Нам остается показать, что некоторое *произведение инверсий* (являющееся преобразованием (T)) *позволяет преобразовать три произвольные различные точки* A, B, C *в три тоже произвольные различные точки* A', B', C'.

Выберем произвольно ориентации на плоскостях ABC и $A'B'C'$. Если преобразование (T) существует, то прямые $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ являются образами окружностей (ABK), (BCK), (CAK), пересе-

* Употребительны также термины «аналлагматическое преобразование» (термин, применяемый автором в оригинале) и «преобразование Мёбиуса» — по фамилии немецкого математика, изучавшего эти преобразования, A. F. Möbius (1790—1868).— *Прим. ред.*

** Можно показать, что сохранение углов и сохранение или изменение ориентации получаются как следствие основного свойства: окружность преобразуется в окружность.— *Прим. ред.*

*** Слово «образ» здесь, очевидно, не употребляется в точном смысле, ибо касательные образов, разумеется, не являются образами касательных.— *Прим. перевод.*

кающихся в точке K, образ которой — бесконечно удаленная точка. Эти окружности пересекаются попарно под углами, равными углам треугольника $A'B'C'$ (определенным по модулю π), так что точка K находится в плоскости ABC*. Но если треугольник ABC не подобен треугольнику $A'B'C'$, то в плоскости ABC точка K, отвечающая этим условиям, существует. Действительно, инверсия с полюсом A показывает, что окружности (ABK) и (ACK) пересекаются под желаемым углом, если точка K принадлежит известной окружности, проходящей через B и C**; аналогично удовлетворяется второе условие, а третье удовлетворится само собой.

Инверсия с полюсом K преобразует тогда точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1, образующие треугольник, подобный треугольнику $A'B'C'$. Но мы знаем, что любое подобие или антиподобие является произведением вращения и гомотетии (см. предыдущую главу). В конечном счете мы видим, что преобразование (T) *существует и является произведением не более чем пяти инверсий*.

В итоге получаем предложение: *всякое круговое преобразование можно представить, как произведение не более чем пяти инверсий*.

В частности, произведение n инверсий может быть приведено к произведению не более чем пяти инверсий. Естественно, это число может уменьшиться в некоторых частных случаях; тогда можно считать, что две следующие друг за другом инверсии совпадают и взаимно уничтожаются. Отметим также, что в этом разложении нет единственности, как ее нет, например, и в разложении параллельного переноса или вращения в произведение двух симметрий относительно плоскостей.

Таким образом, *группа круговых преобразований* порождается множеством инверсий, которое не образует группы.

Третья глава

ПОНЯТИЕ О МЕТРИЧЕСКИХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Мы построили точечное пространство, как некоторую модель векторного пространства: после того как были выбраны базис и начало O, каждый вектор оказался во взаимно однозначном соот-

* Так как иначе сумма углов треугольника, образованного дугами окружностей, была бы больше π, как сумма углов сферического треугольника.— *Прим. ред.*

** Действительно, при рассматриваемой инверсии точки B и C преобразуются в определенные точки B_0 и C_0, а окружность KBC порождает некоторую окружность $K_0B_0C_0$. Угол при точке A, образованный окружностями ABK и ACK, имеющий данное значение, равен углу при точке K, образованному теми же окружностями. Но упомянутые две окружности преобразуются в прямые, пересекающиеся под тем же углом в точке K_0, лежащей на окружности $K_0B_0C_0$. Таким образом, последняя окружность будет определена по ее хорде B_0C_0 и величине вписанного угла, опирающегося на эту хорду. Следовательно, после инверсии определится и окружность, проходящая через B и C и содержащая точку K.— *Прим. ред.*

ветствии с некоторой точкой M пространства, и понятие о равных векторах было первичным. Однако такое изложение привело нас к изучению пространств, лишенных понятия параллелизма (в проективной геометрии и круговой геометрии) и понятия расстояния.

Метрическое евклидово пространство может быть построено аксиоматически таким образом, чтобы понятие параллелизма было введено не с самого начала. Тогда можно обнаружить не искусственный, а упрощающий характер постулата Евклида.

Мы ограничимся двумерными пространствами.

I. Предварительные сведения

A) **Основные свойства** [A]

Надлежащая совокупность аксиом вводит структуру множества точек и прямых, а также отношение эквивалентности между парами точек, характеризующее *равенство расстояний*, откуда получается понятие о равенстве фигур. Аксиоматика хороша, если перечисляются все независимые друг от друга аксиомы, в возможно наименьшем числе, достаточном однако для имеющегося в виду построения. Так была построена, в частности, аксиоматика Гильберта *.

Если исходить из такой системы, то тщательное и кропотливое построение тем более длинное, чем более сокращена аксиоматическая база, позволяет получить *основные результаты, из которых самыми существенными являются для нас следующие*:

a) 1. Через две различные точки проходит прямая и притом единственная.

2. Каждая прямая является множеством точек, описанным нами под названием вещественной прямой: если выбрано начало O, а также положительное направление, то $\overline{OM} = x$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками M и действительными числами x.

b) 1. Каждая прямая делит плоскость на две не пустые области; две прямые, имеющие общую точку, делят плоскость на четыре области.

Аксиома Паша. Каждая прямая, пересекающая сторону некоторого треугольника (то есть *отрезок*, соединяющий две его вершины), *пересекает еще одну его сторону и не пересекает третью, если только прямая не проходит через одну из вершин*.

2. Существует отношение эквивалентности: «равенство расстояний», $AB = CD$, между парами точек плоскости. Тогда на прямых AB и CD равенства $AM = x \cdot AB$ и $CP = x \cdot CD$ влекут за собой равенство $AM = CP$.

Неравенство треугольника $AB + BC \geqslant AC$ справедливо, каковы бы ни были точки A, B, C.

---

* См.: Д. Гильберт, Основания геометрии, ГТТИ, 1948 или Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М., 1961. Автор указывает еще на аксиоматики I. Favard и G. Choquet.— *Прим. ред.*

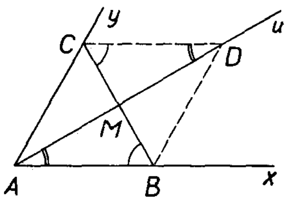
3. «Равенство углов» является некоторым отношением эквивалентности, обеспечивающим три случая равенства треугольников.

Симметрия относительно любой прямой преобразует каждый треугольник в равный ему треугольник. Любой угол и любой равнобедренный треугольник имеют по оси симметрии. (Это существование биссектрисы для каждого угла позволяет найти меру угла, например, в двоичной системе счисления, поскольку все развернутые углы между собой равны).

c) Как следствие из *a*) и *b*), получается: через любую точку A и ей симметричную, относительно некоторой прямой d, точку A' проходит прямая и притом единственная, если только точка A не находится на прямой d. Это перпендикуляр (единственный), опущенный из точки A на прямую d. С л е д с т в и е: любая наклонная длиннее перпендикуляра *.

В) **Метрические геометрии Евклида и Лобачевского**

Исходя из предшествующих предложений, изучим вопрос о сумме углов треугольника, что приведет нас к вопросу о параллелизме. Мы обозначаем через A, B, C углы треугольника ABC.



Черт. 48

1. **Дефект треугольника**

Рассмотрим основную фигуру (черт. 48), полученную продолжением медианы AM некоторого треугольника ABC на $MD = AM$.

Назовем Bx, Cy, Du полупрямые, продолжающие стороны AB, AC, AD. Так как точка M находится между точками B и C, то Mu находится в области $yCBx$, значит, в этой же области находится также точка D и отрезок CD, откуда $\widehat{BCD} < \widehat{BCy}$. Но в силу симметрии относительно точки M $\widehat{BCD} = B$.

Следовательно, *в любом треугольнике каждый внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного.*

Другая формулировка того же. *Сумма двух углов треугольника меньше развернутого угла.*

С л е д с т в и я.

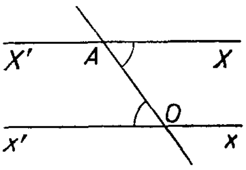
a) Пусть A — точка, не расположенная на некоторой прямой $x'x$, а O — точка этой прямой; проведем прямую $X'X$, откладывая равные внутренние накрест лежащие углы ** (черт. 49), причем AX находится по отношению к прямой AO с той же стороны, что и Ox.

* Имеется в виду, что перпендикуляр и наклонная исходят из одной и той же точки.— *Прим. перевод.*

** Имеются в виду углы, образованные прямыми $x'x$ и $X'X$ с прямой OA.— *Прим. перевод.*

AX не может иметь общей точки с Ox, равно как и AX' с Ox' *.

Таким образом, *каждой точке O прямой $x'x$ ставится в соответствие проходящая через A прямая $X'X$, не имеющая общих точек с $x'x$.*



Черт. 49

b) Чертеж 48 показывает, что любому треугольнику ABC можно поставить в соответствие треугольник CAD, углы которого имеют значения $B + C$, D, $A - D$; сумма трех углов та же, но два угла образованного треугольника дают в сумме угол A, так что каждый из них меньше угла A, а наименьший из них не превосходит даже половину угла A.

Будем повторять эту операцию. Образуются треугольники с углами

$$A_1, \ B_1, \ C_1,$$

где

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2} A; \quad B_1 < A; \quad A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C;$$

$$A_2, \ B_2, \ C_2,$$

где

$$A_2 \leqslant \frac{1}{2^2} A; \quad B_2 < \frac{1}{2} A; \quad A_2 + B_2 + C_2 = A + B + C$$

и т. д., наконец,

$$A_n, \ B_n, \ C_n,$$

где

$$A_n \leqslant \frac{1}{2^n} A; \quad B_n < \frac{1}{2^{n-1}} A; \quad A_n + B_n + C_n = A + B + C.$$

Но, каков бы ни был угол ε, можно определить натуральное число N, такое, чтобы для $n > N$ было

$$\frac{1}{2^{n-2}} A < \varepsilon,$$

откуда

$$A_n < \frac{\varepsilon}{2}; \quad B_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит,

$$A + B + C < \varepsilon + C_n < \varepsilon + (\text{развернутый угол}), \ \forall \varepsilon.$$

Следовательно, $A + B + C$ не может иметь значение, превышающее один развернутый угол. Отсюда предложение:

Сумма углов любого треугольника меньше развернутого угла или равна ему.

---

* В случае пересечения образуется треугольник с внутренним углом, равным не смежному с ним внешнему, что противоречит предыдущей теореме.— *Прим. ред.*

Мы обозначим через $S\,(ABC)$ сумму углов треугольника ABC. Разность $d\,(ABC)=$ (развернутый угол) — $S\,(ABC)$, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leqslant d\,(ABC) < \text{(развернутый угол)},$$

называется *дефектом* треугольника.

Замечание. Каждый треугольник имеет по крайней мере два острых угла; назовем их B и C. Точка A находится, следовательно, в полосе, ограниченной перпендикулярами к BC, восстановленными из точек B и C. Это все равно, что сказать, что высота AH есть отрезок, расположенный внутри треугольника. Дальше мы используем вытекающий отсюда вывод: *Любой треугольник можно разложить* (по крайней мере одним способом) *на объединение двух смежных прямоугольных треугольников*, то есть прямоугольных треугольников, имеющих по стороне, продолжающей одна другую и одну общую сторону.

c) Исследование дефекта. Пусть даны два смежных треугольника * KMP, KMQ; из равенства

$$S\,(KMP)+S\,(KMQ)=S\,(KPQ)+\text{развернутый угол}$$

следует:

$$d\,(KMP)+d\,(KMQ)=d\,(KPQ).$$

Отсюда выводится, что *дефект треугольника, являющегося объединением попарно смежных треугольников, равен сумме дефектов этих* треугольников. Это означает, что эти числа, если они отличны от нуля, образуют меру, так что они *пропорциональны площадям треугольников.*

В частности, если некоторый треугольник PQR перекрывает треугольник ABC, то $d\,(PQR)>d\,(ABC)$, и *если объединение попарно смежных треугольников является перекрытием некоторого треугольника ABC, то сумма дефектов этих треугольников превосходит* $d\,(ABC)$, а равенство возможно лишь в случае, когда дефекты равны нулю. Мы предчувствуем противоречие, если возможно вымостить плоскость равными треугольниками, ибо тогда дефект очень большого треугольника должен оказаться очень большим, в то время, как он не может превзойти развернутого угла.

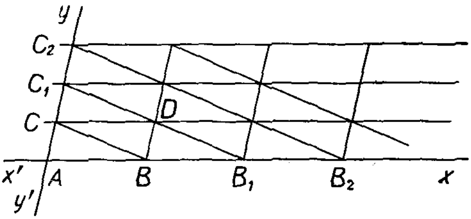
2. Мощение равными треугольниками **

Чертеж 48 содержит равные треугольники ABC и DCB. Дополним его с помощью симметрии относительно середины отрезка BD. Отрезок BB_1, симметричный отрезку CD, является продолжением отрезка AB, лишь если $d(ABC)=0$. Это единственный общий случай, когда мы таким приемом обеспечиваем покрытие равными треугольниками всей плоскости в окрестности, например, точки B. Отсюда ясен интерес к рассмотрению прежде всего этого случая.

* Не обязательно прямоугольных.— *Прим. ред.*

** То есть заполнение плоскости равными треугольниками.— *Прим. ред.*

Случай 1. *Существует некоторый треугольник* ABC *с дефектом нуль.* В этом случае возможно начать мощение плоскости (черт. 50). Но как доказать без теории параллельных, что оно достигнет любой точки плоскости. Мы можем преодолеть это затруднение благодаря известному результату о единственности перпендикуляра к прямой, исходящего из некоторой точки.



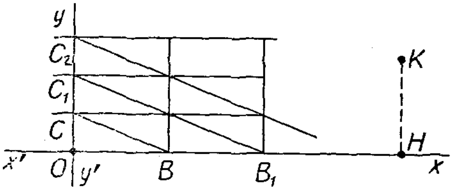
Черт. 50

Каждый из двух прямоугольных треугольников, которые мы умеем выделить из треугольника ABC с помощью одной из высот, также будет иметь дефект нуль *, так что мы можем использовать любой из этих треугольников для мощения плоскости (черт. 51).

Через каждую точку K плоскости проходят перпендикуляры KH, KH' к прямым $x'x$, $y'y$. Но, согласно архимедову свойству действительной прямой, существуют два натуральных числа n и p, таких, что

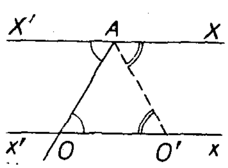
$$nOB \leqslant OH < (n+1)\,OB;$$
$$pOC \leqslant OH' < (p+1)\,OC,$$

так что H и H' будут превзойдены, равно как и перпендикуляры HK и $H'K$ к прямым $x'x$ и $y'y$.



Черт. 51

Так как все треугольники мостовой, поскольку они равны треугольнику OBC, имеют дефект нуль и так как конечного числа этих треугольников достаточно, чтобы перекрыть любой треугольник плоскости, то мы заключаем, что каждый треугольник имеет дефект, равный нулю.



Черт. 52

Отсюда основное предложение:

Если один треугольник имеет дефект нуль, то все треугольники имеют дефект нуль.

Следствие. На чертеже 49 прямая $X'X$ не зависит от точки O, выбранной на $x'x$ (черт. 52).

Случай 2. *Ни один треугольник не имеет дефекта, равного нулю.* Заполнение всей плоскости равными треугольниками невозможно, так как дефект некоторого треугольника,

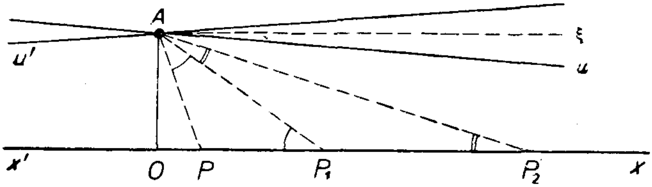
* Так как сумма дефектов этих треугольников равна дефекту треугольника ABC, то есть нулю, а дефект не может быть отрицательным. — *Прим. ред.*

перекрытого большим числом треугольников мостовой, должен был бы превзойти развернутый угол *.

3. Понятие параллелизма

Чертеж 52 внушает нам другой метод: исследуем в обоих случаях, что получается, если точка O' прямой $x'x$ неопределенно удаляется, например, в направлении Ox.

Выберем последовательность $P, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ точек, таких, чтобы каждый треугольник $AP_{n-1}P_n$ был равнобедренным, то есть чтобы было $P_{n-1}P_n = P_{n-1}A$.



Черт. 53

Наклонные становятся все длиннее и $OP_n > nOP$ стремится к бесконечности. Любая точка Q на Ox окажется, таким образом, превзойденной, и если Q находится между точками P_{n-1} и P_n, то $\widehat{OP_{n-1}A} > \widehat{OQA} > \widehat{OP_nA}$ (теорема о внешнем угле). Но эта же теорема дает **

$$\widehat{OPA} \geqslant 2\widehat{OP_1A} \geqslant 2^2 OP_2A \geqslant \ldots \geqslant 2^n OP_nA.$$

Значит, каким бы ни был угол ε, существует натуральное N, такое, что

$$n > N \Rightarrow \widehat{OP_nA} < \varepsilon.$$

С другой стороны, мера острого угла OAP_n растет вместе с n, оставаясь меньше меры прямого угла, поэтому существует предел этой меры $\varphi \leqslant 1$ (прямой угол) и полупрямая Au, для которой $OAu = \varphi$, называется «проходящей через бесконечно удаленную точку» или еще *параллельной* к Ox.

Пусть $A\xi$ — полупрямая, перпендикулярная в точке A к OA с рассмотренной стороны; полупрямая Au либо сливается с $A\xi$, либо находится в угле $\widehat{P_iA\xi}$, каково бы ни было натуральное число i.

---

* А это противоречит определению дефекта.— *Прим. ред.*

** Следует опираться на предложение, что внешний угол больше или равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с ним. Это предложение вытекает из доказанной теоремы, что сумма всех углов треугольника не больше развернутого угла.— *Прим. ред.*

Случай 1. Дефекты треугольников равны нулю. Мы знаем, что в этом случае $A\xi$ сливается с AX и что $P_iAX = OP_iA \to 0$, следовательно, Au совпадает с AX (черт. 49). Аналогичное имеет место и для AX'. Значит, полупрямые, параллельные прямой xx', продолжают одна другую и составляют одну прямую, *единственную прямую, проходящую через точку A и не имеющую с $x'x$ ни одной общей точки на конечном расстоянии.*

Этот результат составляет содержание *постулата Евклида.* Из него выводится теорема Фалеса, теория подобных треугольников, откуда для прямоугольного треугольника, проведя высоту, получают теорему Пифагора. Геометрия Евклида построена на этих основаниях.

Случай 2. Дефекты не равны нулю. Прямые AX_i (черт. 49), соответствующие последовательным точкам P_i, не достигаются прямыми AP_i*, значит, полупрямая Au расположена вне угла ξAX_i. Это означает, что полупрямые Au и Au', соответственно параллельные полупрямым Ox и Ox', не служат продолжением одна другой. Прямые, являющиеся носителями этих полупрямых, образуют два вертикальных угла с биссектрисой $\xi' A\xi$. Все проходящие через точку A прямые, расположенные внутри этих углов, не имеют общих точек с $x'x$, а прямые, расположенные внутри углов, смежных предыдущим, пересекают $x'x$.

II. Геометрия Лобачевского

Это геометрия, построенная на основе предположения, принятого в случае 2. Мы сейчас докажем первые теоремы этой геометрии.

а) **4-й случай равенства треугольников**

Заметим сначала, что теорема о дефектах влечет за собой новый *четвертый случай равенства треугольников: если два треугольника имеют соответственно равные углы, то треугольники равны.* Мы сейчас докажем этот признак в иной противоположной формулировке: в двух треугольниках ABC, $A'B'C'$,

$$[A = A',\ B = B',\ AB \neq A'B'] \Rightarrow [C \neq C'].$$

В самом деле, пусть отложены отрезки

$AB_1 = A'B'$ на AB, причем B и B' находятся с одной стороны от точки A;

$AC_1 = A'C'$ на AC, причем C и C' находятся с одной стороны от точки A.

---

* Нетрудно убедиться, что AX_{i+1} лежит внутри угла, образованного AP_{i+1} и AX_i. Действительно, $P_i\widehat{A}P_{i+1} < \frac{1}{2} P_{i-1}\widehat{A}P_i$, поскольку угол при основании равнобедренного треугольника меньше половины внешнего угла при вершине. А отсюда следует, что $P_i\widehat{A}X_{i+1} < P_i\widehat{A}X_i$, и предложение доказано, так как AP_{i+1} проходит внутри угла, образованного AP_i и AX_{i+1}.— *Прим. ред.*

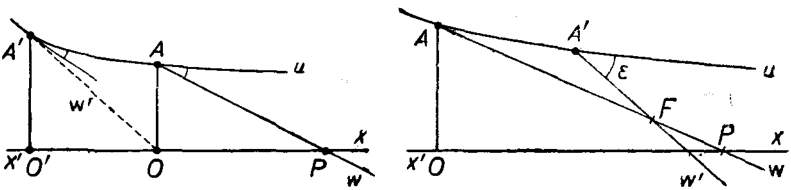
Треугольник AB_1C_1 равен треугольнику $AB'C'$, значит, $B = B_1$, и прямые BC и B_1C_1 не пересекаются (по теореме о внешнем угле треугольника). Значит, четырехугольник BCC_1B_1 — выпуклый, так что сумма его углов меньше двух развернутых углов, откуда следует $C \neq C_1 = C'$. Можно даже вывести, что

$$[A = A',\ B = B',\ AB > A'B'] \Rightarrow C < C'.$$

b) **Параллельные прямые**

Пусть дана прямая $x'x$ и, согласно чертежу 53, полупрямая Au, выходящая из какой-либо точки A и параллельная полупрямой Ox. Согласно свойствам изотропности плоскости *, угол $\widehat{OAu}$ может зависеть лишь от расстояния $OA = d$. Мы положим $\widehat{OAu} = \varphi(d)$, и в дальнейшем изучим эту функцию.

Пусть A' — произвольная точка *прямой*, являющейся носителем Au. Мы сейчас покажем, что полупрямая $A'u$ также параллельна полупрямой $O'x$ (мы обозначаем через O' проекцию точки A' на $x'x$).



Черт. 54

1) Пусть точка A' находится на продолжении луча Au. Как бы ни был мал угол ε, мы можем провести лучи Aw и $A'w'$, такие, чтобы было $\widehat{uAw} = \widehat{uA'w'} = \varepsilon$ с той стороны, где находится $x'x$. Мы знаем, что Aw пересекает $x'x$, но не пересекает $A'w'$. Если угол ε достаточно мал, а именно меньше, чем $AA'O$, то $A'w'$ проникает в треугольник AOP, не пересекая AP, а, значит, $A'w'$ пересекает OP. Следовательно, $A'u$ является предельной полупрямой для точки A'.

2) Если точка A' находится на Au, то, как бы ни был мал угол ε, можно взять на $A'w$ точку F между Au и $x'x$; AF пересекает $x'x$ в некоторой точке P, и $A'F$ проникает в точке F в треугольник OAP, следовательно, пересекает OP. Следовательно, и в этом случае $A'u$ — предельная полупрямая для точки A'.

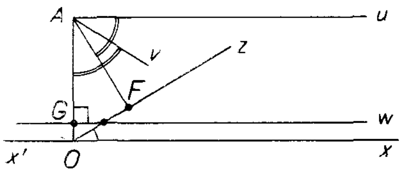
---

* Речь идет о свободной подвижности фигур на плоскости. Две фигуры, состоящие каждая из точки и прямой, могут быть совмещены путем движения, если расстояния от точки до прямой в обеих фигурах равны. А отсюда вытекает, что в этом случае все построения, связанные с определением углов параллельности OAu и $O'A'u'$, в обеих фигурах совпадут.— *Прим. ред.*

Мы будем говорить, что прямая, *являющаяся носителем* Au, *параллельна прямой* $x'x$ *в направлении* $x'x$.

Замечание. Следует отметить важность топологических гипотез и свойств, то есть свойств, касающихся разложения областей на подобласти. Мы только что использовали два раза аксиому Паша и еще будем ею пользоваться.

Необходимо отметить, что она существенна также для аксиоматического построения основных свойств, указанных в A, общих евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.



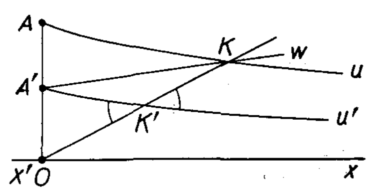
Черт. 55

Теорема 1. *Отношение параллелизма является отношением эквивалентности,* если только считать полупрямую, параллельной самой себе.

1) *Отношение симметрично.* Пусть полупрямая Au параллельна Ox, где O — проекция точки A на $x'x$. Нужно доказать, что Ox параллельна Au, то есть что любая полупрямая Oz, заключенная внутри угла AOx, пересекает Au, как бы ни был мал угол $xOz = \varepsilon$.

Пусть AF — перпендикуляр на Oz; это отрезок, заключенный в $uAOz$ и меньший, чем наклонная AO; поэтому если отложить $AG = AF$, то точка G окажется между точками O и A. Восстановим перпендикуляр $G\omega$ к OA и проведем Av так, чтобы фигура ωGAv была равной фигуре $zFAu$. Av пересекает Ox, значит, и $G\omega$; следовательно, Fz пересекает Au, и т. д.

2) *Отношение транзитивно.* Пусть $AA'O$ — перпендикуляр к $x'x$ и пусть Au и $A'u'$ параллельны к Ox. Мы предлагаем сначала, что A' находится между A и O. Ясно, что прямые Au и $A'u'$ не имеют общих точек в силу единственности полупрямой, параллельной полупрямой Ox и выходящей из некоторой точки.

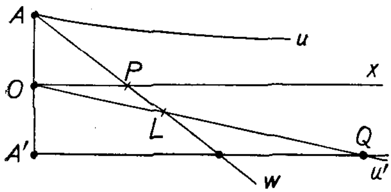


Черт. 56

Поэтому достаточно показать, что любая прямая $A'\omega$ угла $u'A'A$ пересекает Au, как бы ни был мал угол $u'A'\omega = \varepsilon$. Но пусть K' — некоторая точка прямой $A'u'$; мы знаем, что, когда K' неопределенно удаляется, угол $OK'A'$ стремится к нулю, а также знаем, что полупрямая, продолжающая OK', пересекает Au в некоторой точке K, следовательно, $\widehat{K'A'K}$, меньший, чем $\widehat{OK'A'}$, стремится к нулю и становится поэтому меньше, чем ε. Значит, теорема доказана для случая, когда точка O не находится на отрезке AA'.

Если мы предположим теперь, что точка O лежит между точками A и A', то будем доказывать, что любая полупрямая $A\omega$ угла $A'Au$ пересекает $A'u'$.

Мы знаем, что она пересекает Ox в некоторой точке P. Значит, можно рассмотреть некоторую точку L полупрямой $P\omega$, расположенную между Ox и $A'u'$. Следовательно, полупрямая, которая продолжает OL, пересекает $A'u'$ в некоторой точке Q, поэтому, поскольку $A\omega$ проникает в треугольник $OA'Q$ в точке L, $A\omega$ пересечет также отрезок $A'Q$. Значит, $A\omega$ пересекает $A'u'$ (ч. т. д.).



Черт. 57

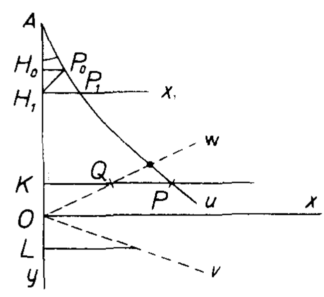
Теорема 2. *Каков бы ни был данный острый угол, существует полупрямая, перпендикулярная к одной стороне угла и параллельная к другой.*

Пусть $yAu = \alpha$ — данный острый угол. Из некоторой точки P_0 стороны Au опускаем перпендикуляр P_0H_0 на Ay, затем строим треугольник $H_0P_0H_1$, симметричный треугольнику H_0P_0A относительно H_0P_0, затем восставляем перпендикуляр H_1x_1 к Ay. Если эта прямая пересекает Au в некоторой точке P_1, то мы снова строим треугольник, симметричный прямоугольному треугольнику H_1AP_1 относительно этого перпендикуляра, и так далее. Мы имеем теперь:

$$d(AH_0P_0) < \frac{1}{2} d(AH_1P_1) <$$
$$< \frac{1}{2^2} d(AH_2P_2) < \ldots < \frac{1}{2^n} d(AH_nP_n).$$

Значит,

$$d(AH_nP_n) > 2^n d(AH_0P_0).$$



Черт. 58

Отсюда мы заключаем, что рассматриваемая операция не может продолжаться бесконечно, что она останавливается, и, следовательно, существует такой перпендикуляр H_nx_n, который не пересекает Au.

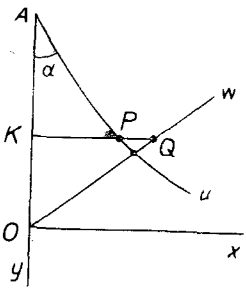
Но если перпендикуляр в некоторой точке K луча Ay пересекает Au, то это же имеет место для перпендикуляра в любой точке отрезка AK, а если перпендикуляр в некоторой точке L полупрямой Ay не встречает Au, то это же имеет место для перпендикуляра в любой точке полупрямой Ly.

Поэтому на Ay существует такая точка O, которая служит общей границей множества точек K и множества точек L.

Пусть Ox — перпендикуляр к Ay в этой точке O. Изучим эту полупрямую.

Пусть Ov — некоторая полупрямая из угла $\widehat{yOx}$. Она не пересекает Au, так как общая их точка проектировалась бы на Oy в некоторую точку L и получилось бы противоречие.

Пусть Ow — некоторая полупрямая угла $\widehat{AOx}$; докажем, что она пересечет Au. В самом деле, пусть Q — некоторая точка на Qw, K — ее проекция на Ay; мы знаем, что полупрямая KQ пересекает Au в некоторой точке P. Либо P находится на отрезке KQ: тогда Pu пересекает OQ; либо же Q находится на отрезке KP: тогда Ow пересекает AP. Во всех случаях Ow пересекает Au.



Черт. 59

Таким образом, Ox — это параллель к Au, выходящая из O, что доказывает теорему.

В соответствии с уже введенными обозначениями мы имеем, полагая $OA = d$, соотношение $\alpha = \varphi(d)$, и мы только что доказали, что между d и α имеется взаимно однозначное соответствие, а это значит, что функция $\varphi(d)$ монотонна (то есть что она всегда изменяется в одном и том же направлении). Но рассмотренная фигура доказывает, что если d уменьшается, α должен увеличиваться.

Получается таблица.

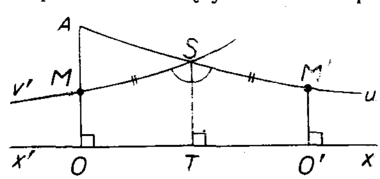
d	$0 \nearrow +\infty$
α	$\frac{\pi}{2} \searrow 0$

Теорема 3. *Если на полупрямой Au, параллельной к Ox, некоторая точка P удаляется в направлении параллелизма, то ее расстояние до точки Ox убывает*.*

---

* Нетрудно показать, что при неограниченном удалении точки P по полупрямой Au в направлении параллелизма расстояние PQ убывает неограниченно, то есть имеет пределом нуль.

Чтобы доказать, что это расстояние становится меньше произвольно малого отрезка ε, отложим этот отрезок от точки O по перпендикуляру OA и получим точку M (см. чертеж). Проведя через M параллель полупрямой Ox', легко докажем, что эта параллель Mv' при продолжении за точку M в обратном направлении пересечет Au (параллель Ox) в некоторой точке S. Чтобы убедиться в этом, достаточно через M провести параллель Ox. Опустив из S перпендикуляр на $x'x$, получим точку T — основание перпендикуляра. Рассмотрев четырехугольник $STO'M'$, симметричный четырехугольнику

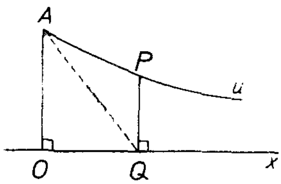


Черт. 60

В самом деле, сумма углов четырехугольника $OAPQ$ меньше двух развернутых углов. Отсюда получается: $\widehat{QPu} > \widehat{OAP}$, значит, $QP < OA$.

c) **Предельная кривая, или орицикл**

Как и в евклидовой геометрии, окружность обладает здесь обычными свойствами симметрии, откуда получается мера для дуг, соответствующая мере центральных углов, но, естественно, теорема о вписанном угле больше не существует. Медиатриса любой хорды проходит через центр, то есть все медиатрисы хорд пересекаются в центре. Мы сейчас построим такую кривую, что медиатрисы всех ее хорд параллельны между собой, это будет предельная кривая для окружности, когда центр окружности уходит в бесконечность по некоторой полупрямой; эту кривую называют *орициклом* (или *предельной кривой*, подразумевая предельную для окружностей).



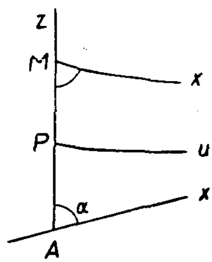
Черт. 61

Пусть Ax и Az — две полупрямые, образующие какой-либо *острый* угол α. Отложим на Az длину $AM = 2d$, такую, чтобы было $\varphi(d) = \alpha$. Медиатриса Pu отрезка AM параллельна к Ax и ее параллели Mx.

Пусть угол α принимает все значения острого угла; мы убедимся, что геометрическое место точек M дает искомую кривую, если только докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если в треугольнике две медиатрисы параллельны, то и третья им параллельна.*

Заметим, прежде всего, что если две медиатрисы имеют общую точку, то третья проходит через нее (доказательство, как и в евклидовой геометрии). Следовательно, если две медиатрисы $B'v$, $C'u$ некоторого треугольника ABC параллельны, то третья $A'X$ их не пересекает. Но будет ли она им параллельна? Имеем:



Черт. 62

$$\beta = \widehat{BAx} = \widehat{ABX_1} = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right), \quad \gamma = \widehat{CAx} = \widehat{ACX_2} = \varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$

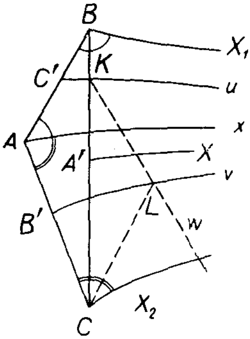
Случай первого расположения фигуры. Ax находится между BX_1 и CX_2.

$STOM$ относительно ST, убеждаемся, поскольку через S проходят параллели Sv' и Su прямой $x'x$ в обоих направлениях, что расстояние от точки M' до $x'x$ равно ε, а, значит, для всех точек, лежащих на полупрямой $M'u$, оно будет меньше ε.— *Прим. ред.*

Условие равносильно равенствам:

$$A=\beta+\gamma=\varphi\left(\frac{AB}{2}\right)+\varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$

Пусть C — та из двух точек B, C, которая находится по ту же сторону от Ax, что и A'.



Черт. 63

$C'u$ пересекает BC в точке K, лежащей между B и A'; каждая полупрямая $K\omega$, выходящая из K внутри угла CKu, пересекает $B'v$ в некоторой точке L. Так как прямая $A'X$ не может пересечь $B'v$, то она не может пересечь отрезок CL треугольника KCL, следовательно, она пересекает KL. Таким образом, всякая рассмотренная прямая $K\omega$ пересекает $A'X$. Это означает, что $A'X$ действительно параллельна $C'u$.

Поэтому в этом случае имеем:

$$\alpha=X_2\widehat{C}B=X_1\widehat{B}C=\varphi\left(\frac{BC}{2}\right)$$

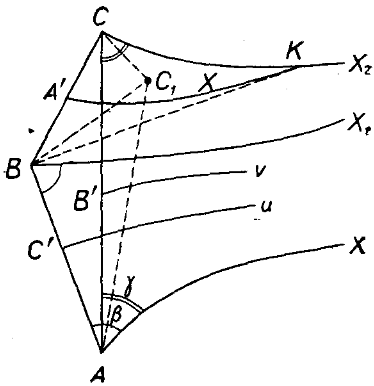
и

$$B=\beta-\alpha=\varphi\left(\frac{BA}{2}\right)-\varphi\left(\frac{BC}{2}\right),\quad C=\gamma-\alpha=\varphi\left(\frac{CA}{2}\right)-\varphi\left(\frac{BC}{2}\right).$$

Случай второго расположения фигуры. Предполагаем, что BX_1 находится между Ax и CX_2.

Предполагаем $\beta>\gamma$; будем иметь:

$$A=\beta-\gamma=\varphi\left(\frac{AB}{2}\right)-\varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$



Черт. 64

Если бы $A'X$ не была параллельна полупрямым BX_1 и CX_2, то она находилась бы по такую сторону от параллельной прямой, выходящей из A', что не пересекалась бы ни с $B'v$, ни с $C'u$. Поэтому она пересекала бы CX_2 в некоторой точке K, и мы бы имели:

$$BCX_2<\varphi\left(\frac{BC}{2}\right)<X_1BC.$$

Значит,

$$B>\beta+\varphi\left(\frac{BC}{2}\right),$$

то есть

$$B > \varphi\left(\frac{BA}{2}\right) + \varphi\left(\frac{BC}{2}\right).$$

Поэтому, если отложить

$$BC_1 = BC$$

так, чтобы было

$$\widehat{ABC_1} = \varphi\left(\frac{BA}{2}\right) + \varphi\left(\frac{BC}{2}\right),$$

то треугольник ABC_1 оказался бы того же типа, что и в случае первой фигуры, и мы бы имели:

$$\widehat{BAC_1} = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right) - \varphi\left(\frac{AC_1}{2}\right) > \beta - \gamma.$$

Но

$$\varphi = \left(\frac{AB}{2}\right) = \beta,$$

следовательно,

$$\varphi\left(\frac{AC_1}{2}\right) < \gamma = \varphi\left(\frac{AC}{2}\right),$$

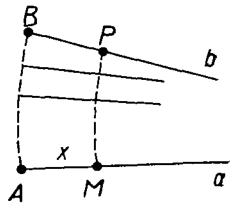
откуда

$$AC_1 > AC.$$

Однако $\widehat{BCC_1} = \widehat{BC_1C}$, значит, $\widehat{AC_1C} > \widehat{ACC_1}$, откуда $AC_1 < AC$. Мы пришли к противоречию. Это означает, что $A'X$ действительно параллельна двум другим полупрямым, и теорема доказана.

Следствие. *Кривая имеет в каждой точке касательную, перпендикулярную к MX.*

Мера дуг орициклов. Так же, как и в геометрии Евклида, окружность может накладываться сама на себя и скользить по себе; на ней можно отложить равные дуги, и их меры пропорциональны их центральным углам. В евклидовой геометрии с помощью подобия доказывается, что длина дуги окружности пропорциональна радиусу, это уже не имеет места в геометрии Лобачевского. Более простым в этой геометрии является изучение дуг орициклов, потому что все орициклы накладываются друг на друга, и можно отложить на одном орицикле дугу, равную дуге другого орицикла.



Черт. 65

Рассмотрим на двух орициклах две дуги AB и MP, заключенные между теми же нормалями. Если система параллельных прямых отсекает равные дуги на дуге AB, то эта система отсекает также равные дуги на дуге MP, так что отношение дуг MP и AB может зависеть лишь от длины отрезков $AM = BP = x$ (длины равны в силу симметрии).

Пусть полупрямая Aa дана, обозначим длину дуги $MP = s(x)$, следовательно, $AB = s(0)$. Если мы возьмем на прямой Aa в направлении параллелизма равные длины

$$AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n = a,$$

то будем иметь:

$$\frac{s(a)}{s(0)} = \frac{s(2a)}{s(a)} = \ldots = \frac{s(na)}{s[(n-1)a]},$$

откуда умножением получается:

$$\frac{s(na)}{s(0)} = \left[\frac{s(a)}{s(0)}\right]^n,$$

следовательно, для натурального n имеем:

$$s(na) = s(0)\left[\frac{s(a)}{s(0)}\right]^n.$$

Обозначим $pa = b$, где p — любое натуральное число; тогда имеем:

$$s(b) = s(0)\left[\frac{s\left(\frac{b}{p}\right)}{s(0)}\right]^p,$$

то есть

$$s\left(\frac{b}{p}\right) = s(0)\left[\frac{s(b)}{s(0)}\right]^{1/p}.$$

Отсюда заключаем, что для любого b и любых натуральных чисел n и p, то есть для всякого рационального значения $x = \frac{n}{p}$, имеет место соотношение:

$$s(bx) = s(0)\left[\frac{s(b)}{s(0)}\right]^x.$$

На основе непрерывности эта формула остается верной и для любого положительного действительного числа x. Наконец, выберем в качестве единицы длины произвольный отрезок, длина которого, измеренная какой-то единицей, равна b, и обозначим

$$\frac{s(b)}{s(0)} = \frac{1}{k},$$

где k — число, зависящее от выбора новой единицы длины, которое, как известно, положительно и больше 1. Тогда формула принимает следующий вид:

$$k > 1, \quad s(x) = s(0)\,k^{-x}.$$

Мы довели изложение до этой формулы, чтобы показать, как входят показательные функции в геометрию Лобачевского, то есть до формулы, где мера длины отрезка является показателем степени, основанием которой служит число, зависящее от выбора единицы длины. Следовательно, если меняют единицу длины, то соотношение меняется, в противоположность тому, как обстоит дело в евклидовой геометрии. (Как мы уже показывали, однородность формул евклидовой геометрии вытекает из существования подобных фигур.)

Отметим, что рассмотренная нами фигура $ABPM$ имеет все четыре угла прямыми; она заменяет прямоугольник.

Опираясь на пространственные геометрические соотношения, можно ввести тригонометрические функции * и доказать, что фундаментальная функция $\alpha = \varphi(d)$, которая вводится в теории параллельных прямых, удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{ctg} \varphi(x) = \frac{1}{2}(k^x - k^{-x}),$$

где k зависит от выбора единицы длины.

Если x стремится к 0, то $\varphi(x)$ стремится к $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, геометрия Лобачевского *локально эквивалентна* евклидовой геометрии.

III. Модель Пуанкаре для геометрии Лобачевского (на плоскости)

Доказательства, проведенные в § II, трудны и кажутся искусственными. Все же они весьма сравнимы по трудности с доказательствами евклидовой геометрии, которые проводятся на основе аксиом Гильберта, если не считать очевидными конкретные факты, относящиеся к расположению фигур. Но здесь трудности еще возрастают и к тому же отсутствует подобие. Мы следовали за изложением Лобачевского (умершего в 1856 г.), который еще не мог иметь понятия о группах преобразований. А именно использование свойств групп и делает простой и удобной модель, данную Анри Пуанкаре для геометрии Лобачевского.

М о д е л ь — это система образов элементов рассматриваемой теории, причем каждое соотношение этой теории должно иметь свой образ. Модель может заключать, кроме того, и другие структуры, которые при внутреннем изучении теории рассматривать не нужно. Мы сейчас введем модель, вмещенную в евклидову метрическую геометрию, и будем использовать эту геометрию при доказательствах (которые не будут внутренними), подобно тому как мы использовали аффинные соотношения для доказательства теорем проективной геометрии. Различия в шрифте будут указывать, рассматривается ли названная нами фигура, как принадлежащая евклидовой геометрии, или к неевклидовой геометрии (в последнем случае будем употреблять курсив).

---

* Автор ссылается на «Пангеометрию» Лобачевского (см. Полное собр. соч. Н. И. Лобачевского, т. 3, ГТТИ, 1951). Более доступное изложение можно найти в книге: П. А. Ш и р о к о в, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., 1955.— *Прим. ред.*

a) Некоторая прямая (X) на плоскости определяет на ней две области (e) и (e'). Одну из них, пусть это будет (e), мы рассматриваем как *пространство* (E) нашей геометрии.

Фундаментальной группой будет группа произведений инверсий, полюса которых находятся на прямой X и степень которых положительна.

Дуга окружности инверсии, содержащаяся в (e), будет называться *прямой*, а инверсия будет называться *симметрией* по отношению к этой *прямой*.

Чтобы можно было высказать утверждение «Через две точки проходит одна-единственная *прямая*», мы должны рассматривать также в качестве особых *прямых* прямые (D_0), перпендикулярные к прямой X и являющиеся осями *симметрии*, которая и в евклидовой геометрии является симметрией.

Согласно этой круговой точке зрения, мы сохраняем понятие угла евклидовой геометрии.

Немедленно видим, что две *прямые* либо пересекаются в одной точке, либо не имеют общей точки, либо имеют общую точку J на прямой X, где они образуют нулевой угол: две такие *прямые* называются *параллельными* в направлении к точке J. Это, очевидно, отношение эквивалентности.

Теорема 1 геометрии Лобачевского здесь, таким образом, выполняется.

Через некоторую точку A проходят две *параллельные* к данной *прямой* (D); они образуют между собой некоторый угол и отделяют среди всех *прямых*, проходящих через A, множество *прямых*, пересекающих (D), от множества *прямых*, не пересекающих (D).

Точки, в которых (D) пересекает (X), называются *бесконечно удаленными точками прямой* (D). Чтобы говорить, что каждая *прямая* имеет две бесконечно удаленные точки, нужно ввиду существования особых *прямых* (D_0) присоединить к (X) еще единственную бесконечно удаленную точку круговой плоскости, которая также является и *бесконечно удаленной*. Немедленно получается, что сумма углов *треугольника* меньше развернутого угла.

Медиатриса отрезка прямой является осью симметрии, которая меняет между собой концы отрезка. Исследуем теорему 4. *Некоторый треугольник* ABC, *медиатрисы* которого D_{AB} и D_{AC} *параллельны* к точке J, является в евклидовой плоскости криволинейным треугольником, вписанным в окружность, касательную к (X) в точке J, значит, третья *медиатриса* параллельна двум другим к J. Мы видим, что *орициклами* являются окружности, касательные к (X); они имеют одну точку на *бесконечности*.

b) Для того чтобы модель была полностью пригодной, нам остается ввести понятие *расстояния* между двумя *точками*.

Очевидно, если две пары точек AB и $A'B'$ соответствуют друг другу в *симметрии*, мы должны считать *расстояние* между *точками* первой пары равным *расстоянию* между *точками* второй пары.

Мы будем тогда писать: $AB \overset{*}{=} A'B'$. Однако, так как *симметрии* не образуют группы, нам нужно доказать, что наше отношение действительно является отношением эквивалентности, ибо это не очевидно.

Введем сначала *окружности*. Геометрическое место точек таких, что $AM \overset{*}{=} AB$ является проходящей через B окружностью пучка, нулевыми точками которого являются точка A и симметричная ей относительно X точка α, расположенная в (e'), поскольку *прямыми*, проходящими через A, служат окружности, проходящие через A и α. Мы будем говорить, что это *окружность с центром в* A, проходящая через B.

Заметим теперь, что *окружности*, соответствующие друг другу в *симметрии* относительно некоторой *прямой* (D), гомотетичны в евклидовой плоскости относительно центра окружности (D) и что точки, являющиеся *центрами окружности*, соответствуют друг другу в этой гомотетии. Обратно, гомотетия двух *окружностей* с их *центрами* обеспечивает *симметрию*, значит, *равенство радиусов*. Но гомотетии, центры которых находятся на (X) и коэффициенты которых положительны, образуют группу. Это обеспечивает транзитивность отношения: $\overset{*}{=}$.

Так как *взаимность*

$$[AB \overset{*}{=} A'B'] \Rightarrow [A'B' \overset{*}{=} AB]$$

очевидна, то остается проверить *симметрию*

$$AB \overset{*}{=} BA.$$

Рассмотрим поэтому две *окружности*: (a) с центром A, проходящую через B, и (b) с центром в B, проходящую через A. В евклидовой плоскости прямая AB пересекает X в S, а окружности соответственно в точках B' и A'. Соотношения

$$SA^2 = SB \cdot SB' \text{ и } SB^2 = SA \cdot SA'$$

дают:

$$\frac{SA}{SB'} = \frac{SB}{SA} = \frac{SA'}{SB};$$

это доказывает, что гомотетия с центром в S и коэффициентом $\frac{SB}{SA}$, преобразующая пучок окружностей с нулевыми точками A и α в пучок с нулевыми точками B и β, преобразует также *окружность* (a) *в окружность* (b). Значит, эти две *окружности* имеют *равные* радиусы.

c) Мы можем теперь откладывать в одном и том же направлении на *полупрямой* AY *равные отрезки*, начиная с некоторого *отрезка* AB:

$$AB \overset{*}{=} BM_1 \overset{*}{=} M_1M_2 \overset{*}{=} \ldots$$

Получается бесчисленное множество точек M между A и Y. Точка M стремится к Y в том смысле, что эта точка в конце концов оказывается с той же стороны, что и Y, относительно любой точки *прямой*. Следовательно, любая *прямая* — архимедова. Между ее точками существует отношение порядка, и если точка B находится между точками A и C, то $AC \overset{*}{=} AB \overset{*}{+} BC$, где смысл сложения, обозначенного знаком $\overset{*}{+}$, определяется очевидным образом. Нам остается проверить *неравенство треугольника*. (Следует отметить, что аксиома Паша выполняется.)

Пусть дана *окружность* (a) с *центром* A и некоторая *точка* B. *Окружность* с *центром* B, так же как и окружность (a), инвариантны каждая в целом в *симметрии* относительно *прямой*, проходящей через точки A и B. Эта *прямая* (D) пересекает *окружность* (a) в *точках* P и Q, являющихся *точками касания с* (a) *окружностей с центром* B, касательных к *окружности* (a). Предположим, что точка B находится вне *окружности* (a), то есть $AB \succ AP \overset{*}{=} AQ$.

Окружности с центром B, пересекающие (a) в некоторой *точке* M, имеют *радиус*, промежуточный между BQ и BP. Если P находится между A и B, то

$$BP \prec BM \prec BQ;$$

но имеем:

$$BP \overset{*}{=} AB \overset{*}{-} AP \text{ и } BQ \overset{*}{=} BA \overset{*}{+} AQ,$$

значит,

$$BA \overset{*}{-} AM \prec BM \prec BA \overset{*}{+} AM,$$

что и является *неравенством треугольника*, выполнение которого требовалось проверить.

d) *Перемещение* или *антиперемещение* является произведением *симметрий*. Без труда можно доказать случаи *равенства треугольников*. Следовательно, мы имеем все необходимые элементы, чтобы выполнить перевод на язык модели всей геометрии Лобачевского, в частности, чтобы проследить за тем, что было сказано о мере дуги орицикла.

Пример проверки теоремы 4 показывает с ясностью, насколько новая модель геометрии более удобна для доказательств, чем старая. Однако для нашего представления о пространстве, рассмотренном, как модель физического мира, первая модель, модель Лобачевского, является, разумеется, единственно интересной.

Напомним, для сравнения с геометрией, которой мы сейчас собираемся заниматься, что в геометрии Лобачевского появляется фундаментальная длина, а именно отрезок, принятый нами за единицу.

IV. Сферическая геометрия, модель геометрии Римана

Мы сейчас будем изучать некоторую двумерную геометрию, моделью которой является геометрия на сфере трехмерного евклидова пространства, если большие окружности рассматривать, как играющие роль прямых.

Могут быть даны и плоские модели этой геометрии, например, с помощью стереографической проекции (то есть инверсии, полюс которой находится на сфере). Мы сейчас укажем ее главные свойства, из которых следовало бы выделить систему характеристических аксиом, если бы мы хотели построить эту геометрию самостоятельно.

Обозначим через (E) наше двумерное пространство *, а через (S) — сферическую его модель в трехмерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}^3$. (S) есть множество точек M, которые определяем в $\mathscr{R}^3$, выбрав некоторый центр как удаленные от центра на постоянное расстояние R : O, $OM = R$, где R — длина, появляющаяся впоследствии, как абсолютная длина в пространстве (E). Чаще мы будем использовать длину $L = \pi R$. Как и (S), пространство (E) ориентируемо.

А) **Прямые**

Мы называем *прямыми* пространства (E) множества точек, имеющих образами большие окружности из множества (S), то есть следы на (S) плоскостей, проходящих через центр O, сохраняя на этих прямых известную метрику сферы (S), равно как и понятие равенства фигур на сфере.

Все прямые равны между собой и, накладываясь на себя, могут свободно скользить, каждая из них делит пространство E на две выпуклые области, но свойства, указанные в начале этой главы [§ A, a], больше не выполняются.

1) *Две прямые пересекаются всегда в двух точках*, которые мы назовем «ассоциированными» и образы которых на (S) диаметрально противоположны. Пусть A, A'— такая пара. Через такую пару проходит бесчисленное множество прямых, ибо любая прямая, проходящая через A, проходит и через A'. Поэтому предложение нужно уточнить: Через две не ассоциированные точки проходит прямая и лишь одна.

2) Прямая не является больше «вещественной прямой», определенной условием $AM = xAB$, где x пробегает все множество действительных чисел; в самом деле, при принятой метрике прямая является замкнутой кривой длины $2L$; поэтому на ориентированной прямой с выбранным началом A точка будет находиться во взаимно однозначном соответствии с некоторым классом вычетов по модулю $2L$. Если мы пожелаем сохранить бесконечную прямую, то следовало бы представить себе прямую, которая бесконечно

* Имеется в виду пространство геометрии Римана.—*Прим. перевод.*

наматывается на себя в обоих направлениях, и пространство E имело бы моделью сферу, покрытую бесконечным множеством листов, связи между которыми следовало бы уточнить. Такие пространства тоже были введены Риманом, но мы о них здесь говорить не будем.

Так как прямые не бесконечны и всегда пересекаются, то вопрос о параллельных прямых не ставится; однако нет препятствий к тому, чтобы развивать *некоторую локальную геометрию*, в которой изучаются фигуры, не содержащие одновременно самой точки и ассоциированной с ней. Эти пары точек появляются, лишь когда мы будем соединять несколько фигур из (E), проводя рассуждения в пространстве $\mathscr{R}^3$. Благодаря этому ограничению свойства [A, (b и c)] сохраняют силу; в частности, сохраняется существование и единственность перпендикуляра, опущенного из точки на прямую; эта основная теорема показывает важность сопоставления каждой прямой пары ее полюсов: если A, A' есть пара полюсов некоторой прямой a, то любая прямая, проходящая через A и A', перпендикулярна к a и имеет свои полюсы на a.

Прямая, таким образом, может рассматриваться, как предельный случай окружности, когда ее радиус, который всегда предлагается меньшим чем $\frac{L}{2}$, стремится к $\frac{L}{2}$.

В) **Треугольники**

а) Определения. Две прямые делят (E) на четыре области, называемые двуугольниками *, каждый из которых имеет две стороны, равные L, и два равных угла. Три прямые делят (E) на восемь областей (а не на 7, как в евклидовой плоскости). Каждая область называется *треугольником* пространства (E). На (S) это, стало быть, след некоторого трехгранника из $\mathscr{R}^3$. Стороны треугольника — это отрезки прямых длины, меньшей чем L (это дуги, вырезаемые гранями трехгранника), а углы заключены между числами 0 и π (это меры двугранных углов трехгранника). Три обычных случая равенства треугольников сохраняются.

Если элементы некоторого треугольника обозначить a, b, c, A, B, C, то элементы всех восьми треугольников, образованных теми же плоскостями и, как оказывается, попарно соответствующих друг другу в отношениях равенства или антиравенства, таковы:

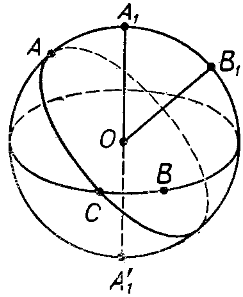
$$\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ A, & B, & C \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} a, & L-b, & L-c \\ A, & \pi-B, & \pi-C \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} L-a, & b, & L-c \\ \pi-A, & \pi-B, & C \end{matrix}\right.$$

$$\left[\begin{matrix} L-a, & L-b, & c \\ \pi-A, & \pi-B, & C. \end{matrix}\right.$$

Симметрия, возникающая между длинами сторон и мерами углов, становится объяснимой, если мы сопоставим этим восьми

* Автор пользуется термином «fuseau», что значит «веретено».— *Прим. перевод.*

треугольникам восемь новых треугольников, определенных парами полюсов прямых, образующих данные треугольники. Пусть A_1, A_1' — пара полюсов для BC; отметим тот из них: A_1, который находится в том же полупространстве, что и A; имеем: $AA_1 < \frac{L}{2}$. Мы таким же образом определяем B_1 (отличный от B_1' и C_1). Неравенства $BB_1 < \frac{L}{2}$ и $CC_1 < \frac{L}{2}$ влекут за собой, что A находится с той же стороны по отношению к B_1C_1, что и A_1, и то же имеет место для B и для C. Так как известно, что A, B, C являются как раз полюсами сторон треугольника $A_1B_1C_1$, то отсюда следует, что связь между треугольниками ABC и $A_1B_1C_1$ взаимная: эти треугольники образуют *пару дополнительных треугольников*. Геометрия в R^3 дает элементы треугольника $A_1B_1C_1$ дополнительного треугольнику ABC:



Черт. 66

$$a_1 = L\left(1 - \frac{A}{\pi}\right); \ b_1 = L\left(1 - \frac{B}{\pi}\right); \ c_1 = L\left(1 - \frac{C}{\pi}\right).$$

Значит, в силу взаимности

$$A_1 = \pi\left(1 - \frac{a}{L}\right); \ B_1 = \pi\left(1 - \frac{b}{L}\right); \ C_1 = \pi\left(1 - \frac{c}{L}\right).$$

Так как равенство двух треугольников равносильно равенству их дополнительных треугольников, то из третьего случая равенства (по равенству сторон), примененного к дополнительным треугольникам, вытекает еще *четвертый случай равенства треугольников в* (E): два треугольника равны, или антиравны, если они имеют попарно равные углы.

b) Неравенства, относящиеся к элементам треугольника. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три длины a, b, c, меньшие каждая чем L, были сторонами треугольника, получаются исследованием пересечения двух окружностей. Пусть $BC = a$ — наибольшая сторона; окружности с центрами B и C, радиусами c и b пересекаются при следующих условиях, определяемых разбиением на области в (E) и выпуклостью окружностей,

$$a < b + c < 2L - a$$

(равенства выражали бы коллинеарность точек). Это влечет за собой неравенства такого же вида, если a и не является наибольшей стороной.

Первое из этих неравенств — *неравенство треугольника*; оно оправдывает выбранное понятие *расстояния между двумя точками*.

Применяя эти неравенства к дополнительному треугольнику, выводим из них неравенства для углов: $\pi - A < B + C < \pi + A$; в частности $A + B + C > \pi$.

c) П л о щ а д ь т р е у г о л ь н и к а. Мы только что видели, что сумма углов треугольника больше двух прямых, в противоположность тому, что имеет место в геометрии Лобачевского. Если мы пересмотрим доказательства, проведенные в этой последней геометрии, то мы сможем установить, что доказательство теоремы о внешнем угле с помощью медианы сохраняется, но с условием, чтобы точка D находилась в надлежащей области, откуда вытекает требование, чтобы медиана AM была меньше, чем $\frac{L}{2}$. Это ограничение мешает вывести из теоремы следствие о существовании прямых, не имеющих общих точек (существование таких прямых, как мы знаем, невозможно). Что касается пункта *b*) исследования, то он требует, чтобы прямая была бесконечной.

Избытком треугольника называют разность $\delta = A + B + C - \pi$. Точно так же, как и для дефекта в геометрии Лобачевского, избыток треугольника, являющегося объединением двух смежных треугольников, равен сумме избытков этих треугольников, так что *площадь пропорциональна избытку.*

Но геометрия сферы в $\mathscr{R}^3$ нам показывает, что *полная площадь пространства* (E) конечна и равна $4\pi R^2 = \frac{4L^2}{\pi}$. Но (E) покрывается восемью треугольниками, вершинами которых являются точки A, B, C и точки им ассоциированные. Мы знаем, что общая сумма углов этих треугольников равна 12π, а значит, сумма избытков равна

$$12\pi - 8\pi = 4\pi.$$

Следовательно, коэффициент пропорциональности известен, и площадь треугольника ABC равна:

$$\frac{L^2}{\pi^2}(A + B + C - \pi)$$ [формула Альберта Жирара (*Girard*), около 1620 года].

[С л е д с т в и е. *Теорема Лекселля* (около 1770 г.). Даны две вершины B, C треугольника; требуется найти геометрическое место третьей такой вершины A, чтобы площадь треугольника была постоянной.

Докажем сначала следующую лемму. Дуга BAC окружности, описанной вокруг некоторого треугольника ABC, является вместе с симметричной ей дугой относительно BC геометрическим местом таких точек M, что

$$B_1 + C_1 - M = B + C - A = 2\alpha \quad (\alpha > 0, \text{ или } \alpha < 0)^*.$$

Это доказывают, как и в евклидовой геометрии, с помощью углов при основании равнобедренного треугольника. Угол α опре-

* B_1 и C_1 — углы при точках B и C треугольника MBC. — *Прим. ред.*

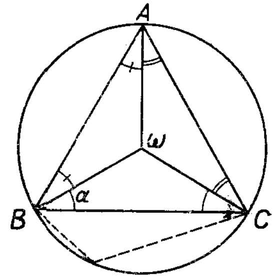
деляет центр ω описанной окружности. $\left(\right.$Например, той окружности, которая имеет в (E) радиус, меньший $\left.\frac{L}{2}.\right)$

Пусть теперь даны точки A, B, C и дан избыток

$$\delta = A + B + C - \pi.$$

Отсюда для треугольника $AB'C'$ (B' и C' — точки, ассоциированные B и C) выводится, что

$$B' + C' - A = \pi - \delta.$$



Черт. 67

Геометрическое место точек A состоит поэтому из *двух дуг окружностей, проходящих через точки* B' и C'. (Отметим, что площадь не определена, если точка A находится в B' или в C'.)

d) *Тригонометрические формулы*. Основная формула была получена, как приложение понятия скалярного произведения двух векторов (кн. 1, гл. V). Она запишется теперь так:

$$\cos\frac{\pi a}{L} = \cos\frac{\pi b}{L}\cdot\cos\frac{\pi c}{L} + \sin\frac{\pi b}{L}\sin\frac{\pi c}{L}\cos A, \tag{1}$$

и путем перехода к дополнительному трехграннику получаем:

$$\cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C\cos\frac{\pi a}{L}. \tag{2}$$

Вычисление позволяет вывести из этих формул

$$\frac{\sin\frac{\pi a}{L}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{\pi b}{L}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{\pi c}{L}}{\sin C}. \tag{3}$$

Для треугольников, стороны которых малы, имеем:

$$\cos\frac{\pi a}{L} \simeq 1 - \frac{\pi^2 a^2}{L^2},\ \sin\frac{\pi a}{L} \simeq \frac{\pi a}{L},\ \frac{\pi^2 b^2}{L^2}\cdot\frac{\pi^2 c^2}{L^2} \simeq 0.$$

Формулы (1) и (3) вследствие этого дают:

$$a^2 \simeq b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$\frac{a}{\sin A} \simeq \frac{b}{\sin B} \simeq \frac{c}{\sin C}.$$

Из (2) получаем:

$$\cos A = \cos(B + C) + \sin B\sin C\left[1 - \cos\frac{\pi a}{L}\right] \simeq \cos(B + C),$$

откуда для углов, заключенных между 0 и π,

$$A + B + C \simeq \pi.$$

Изученная геометрия локально эквивалентна евклидовой геометрии.

Мы только что описали несколько геометрий, имеющих между собой много сходных черт. Мы всегда исходили из фигур, определенных в целом, какими, например, являются прямые. Те из этих геометрий, которые были метрическими, локально эквивалентны евклидовой геометрии. В частности, для двух очень близких точек A и B AB^2 выражается с помощью теоремы Пифагора (в надлежаще выбранной системе координат).

Риман, наоборот, исходит из этого вывода.

Он строит геометрии, исходя из локально определенной метрики, которая может быть продолжена на очень разнообразные пространства методами интегрального исчисления. Некоторые из этих геометрий используются в математическом аппарате общей теории относительности и в других теориях современной физики. Их рассмотрение представляет здесь для нас интерес лишь потому, что оно дает возможность понять частный характер евклидовой геометрии *.

---

* Читателю, интересующемуся неевклидовой геометрией, можно рекомендовать следующие книги, служащие введением в нее:

П. А. Широков, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., 1955.

А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953.

В. Ф. Каган, Очерки по геометрии, М., 1963.

Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, М., 1961.— *Прим. ред.*

Третья часть

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

После прямых и окружностей самыми замечательными кривыми в плоской геометрии являются конические сечения. Их изучение открывает различные точки зрения на эти кривые и использует все предшествующие теории. Для нас это область приложений.

I. Определение конических сечений на конусе вращения

Мы называем *коническим сечением* (в соответствии с исторической точкой зрения и со смыслом названия) *любое плоское сечение некоторого конуса вращения*. Если плоскость проходит через вершину, то коническое сечение вырождается в точку, или в совокупность двух прямых, или в одну двойную прямую (в случае касательной плоскости).

Конус вращения (S) будет определяться своей вершиной S, своей осью z и острым углом α, образованным осью z с образующими G. Мы часто будем также рассматривать конус, как описанный вокруг некоторой сферы.

Плоскость сечения Π будет определяться некоторой прямой, которую мы выберем, и острым углом β, образованным плоскостью сечения с плоскостью, перпендикулярной к оси Sz конуса (этот угол будет рассматриваться лишь по абсолютной величине, но его ориентация предположена фиксированной раз навсегда).

Кривая (C) пересечения определена, как геометрическое место точек M, в которых образующие G пересекают плоскость Π. Наша цель состоит прежде всего в том, чтобы определить эту кривую метрическими соотношениями.

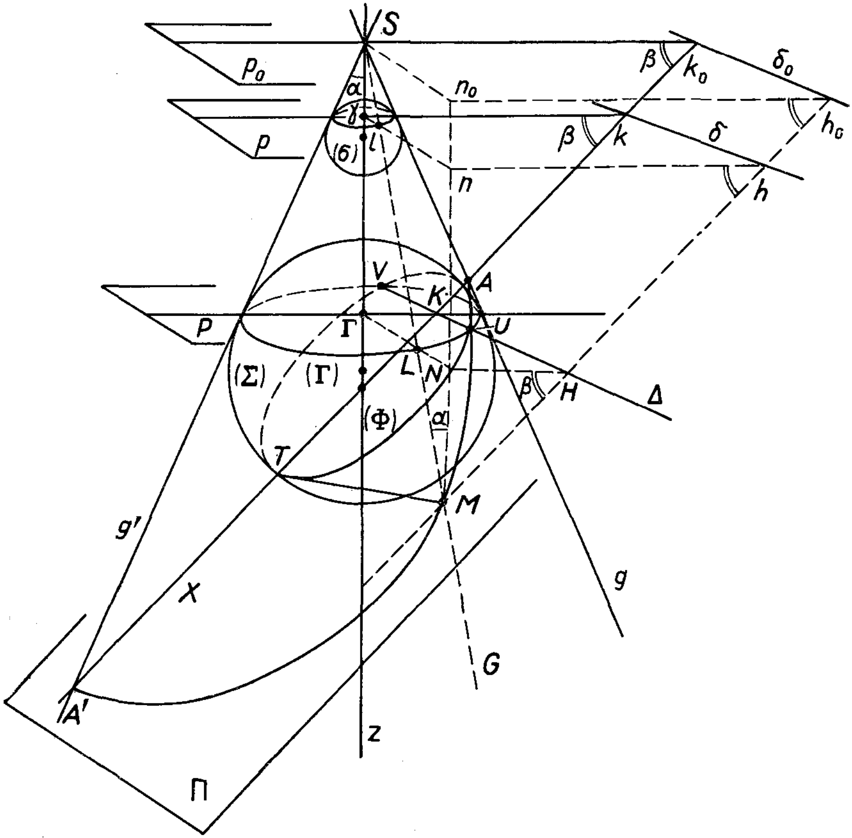
1) Плоскость Π определена прямой δ_0 ее пересечения с плоскостью p_0, проведенной через вершину S перпендикулярно к оси z.

Проектируем точку M на p_0 в точку n_0 и на δ_0 в точку h_0. Это выявляет две плоскости: Sz, Mn_0 и Mh_0n_0. Выразим следствия из определений:

$$\left.\begin{aligned} M\in(S) &\Longleftrightarrow \frac{Mn_0}{MS}=\cos\alpha \\ M\in \Pi &\Longleftrightarrow \frac{Mn_0}{Mh_0}=\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad M\in(C)\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned} &M\in\Pi; \\ &\frac{MS}{Mh_0}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Предложение 1. *Коническое сечение* (C) *является геометрическим местом точек плоскости* Π, *отношение расстояний которых до вер-*

шины конуса и до прямой δ_0 постоянно $\Bigl($это отношение e называют *эксцентриситетом* данного конического сечения; $e=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\Bigr)$.



Черт. 68

2) Если выбрана сфера (σ), вписанная в конус, то пусть p — плоскость ее окружности касания (γ). Определим плоскость П ее пересечением δ с этой плоскостью p. Образующая G касательна к сфере в точке l, расположенной на (γ).

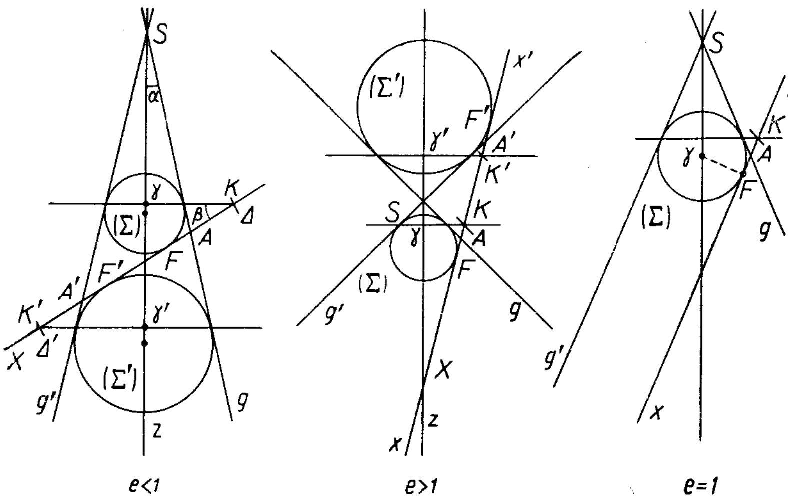
$$\left.\begin{array}{l} M\in(S)\Leftrightarrow\dfrac{Mn}{Ml}=\cos\alpha \\ M\in\Pi\Leftrightarrow\dfrac{Mn}{Mh}=\sin\beta \end{array}\right\} : M\in(C)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} M\in\Pi; \\ \dfrac{Ml}{Mh}=\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}=e. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Предложение 2. *Коническое сечение* (*C*) *является геометрическим местом точек плоскости* П, *для которых отношение расстояний* *по касательным к сфере* (σ) *к расстояниям до прямой* δ *постоянно и равно е.*

3) Среди сфер, вписанных в конус, существуют такие, которые пересекают плоскость П. Пусть (Σ) — одна из таких сфер, пересекающая плоскость П по окружности (Ф). Тогда существуют две касательные к сфере, проведенные из точки M и находящиеся в плоскости П.

Пусть P — плоскость круга $(Г)$ соприкосновения этой сферы с конусом, а Δ — прямая пересечения плоскостей P и П.

Предложение 3. *В плоскости* П *коническое сечение является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до окружности* (Ф) (*по касательным*) *к расстояниям до прямой* Δ *постоянно и равно е.*



Черт. 69

Отметим, что если окружности $(Г)$ и (Ф) сферы пересекаются в двух точках U и V, то прямая Δ есть прямая UV, коническое сечение проходит через эти точки и касается в этих точках окружности (Ф). Во всех случаях окружность (Ф) называется *фокальной окружностью* конического сечения, а прямая Δ называется *соответствующей директрисой.*

4) Множество вписанных сфер можно получить из одной из них с помощью гомотетии с центром в S и переменным коэффициентом. Чтобы исследовать существование окружности пересечения (Ф), рассмотрим сечение фигуры ее плоскостью симметрии, которая определена прямой Sz и ее проекцией X на плоскость П. Конус пересекается этой плоскостью по двум образующим g, g', а плоскость П по прямой X. Эта прямая пересекает g и g' в двух точ-

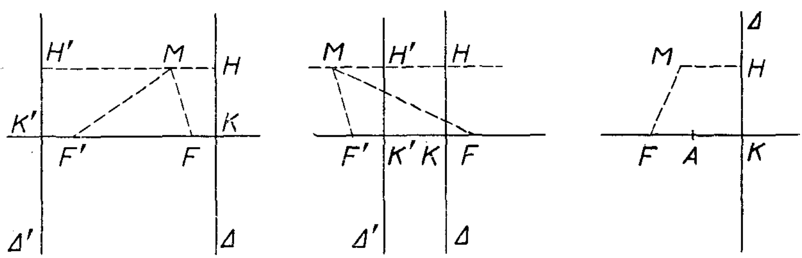
ках A, A' конического сечения. Эти точки пересечения кривой с ее осью симметрии называются *вершинами*.

Вписанная в конус сфера либо пересекает, либо не пересекает плоскость П, в зависимости от того, пересекает или нет прямую X большая окружность сферы, являющаяся сечением сферы плоскостью чертежа *. Появляются две (вообще говоря) замечательные сферы, касательные к плоскости П. Упомянутая большая окружность каждой из этих сфер касательна к сторонам треугольника SAA':

1) $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, то есть $e < 1$	Одна вписанная окружность. Одна вневписанная окружность в $\hat{S}$.
2) $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, то есть $e > 1$	Две вписанных окружности в $\hat{A}$ и $\hat{A}'$.
3) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то есть $e = 1$	Прямая X параллельна образующей (например, g'): единственная окружность.

Таким образом, существует по крайней мере одна вписанная в конус сфера, касательная к плоскости $П$. Ее точка касания F называется *фокусом* конического сечения; он соответствует директрисе Δ. Но отрезок MF касается сферы; его длина есть расстояние по касательной, упомянутое в общем предложении 3, откуда следует частное предложение.

Предложение 4. *В плоскости $П$ коническое сечение является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до точки F и до прямой Δ постоянно и равно e.*



Черт. 70

5) В случае $e = 1$ получаем лишь одну пару (F, Δ) для определения конического сечения. Оно называется тогда параболой. Его проекция на плоскость симметрии есть полупрямая Ax, содержащая точку F, следовательно, кривая состоит из одной ветви, простирающейся в бесконечность.

* То есть плоскостью симметрии, определенной прямой Sz и ее проекцией X на плоскость П. — *Прим. ред.*

В случае $e < 1$ кривая проектируется в отрезок AA'; кривая является в этом случае некоторым овалом, целиком заключенным между параллельными директрисами Δ и Δ'. Ее называют *эллипсом*.

В случае $e > 1$ кривая проектируется в две полупрямые Ax, $A'x'$; она образована двумя простирающимися в бесконечность ветвями; ее называют *гиперболой*.

В случае $e \neq 1$ рассмотрим одновременно два характеристических соотношения:

$$\frac{MF}{MH} = e; \tag{4}$$

$$\frac{MF'}{MH'} = e. \tag{4'}$$

Расстояние HH' между параллельными прямыми Δ и Δ' является некоторой постоянной, характерной для конического сечения. Но

$$\left[\begin{array}{ll} HH' = MH + MH' \text{ для эллипса, следовательно,} & \\ \qquad MF + MF' = eHH'. & (5) \\ HH' = |MH - MH'| \text{ для гиперболы, следовательно,} & \\ \qquad |MF - MF'| = eHH'. & (5') \end{array}\right.$$

Появляющуюся таким образом постоянную обозначают $2a$: $2a = eHH'$. Отсюда:

Предложение 5. *В своей плоскости эллипс является множеством точек, сумма расстояний которых до точек F и F' равна $2a$.*

В своей плоскости гипербола является множеством точек, разность расстояний которых до точек F и *F' равна по абсолютной величине $2a$.* Каждая из ветвей соответствует одному из знаков разности $MF - MF'$.

Обратная теорема здесь необходима, чтобы вывести заключение, что кривая есть геометрическое место, определенное равенством (5) или же равенством (5'), ибо возникает вопрос, является ли равенство (4) /или (4')/ следствием равенства (5) или (5'). Утвердительный ответ выводится из рассмотрения формы кривых, определенных предложением 4 и предложением 5, а именно немедленно получаем, что первая кривая не может быть лишь частью второй кривой. Но полное доказательство равносильности условий 4 и 5 мы получаем, если составим уравнения этих кривых.

Отметим также, что более общее предложение получается, если рассмотреть две фокальные окружности (φ) и (φ'). Так как расположение кривой относительно двух директрис теперь не очевидно, мы удовольствуемся менее точным предложением: *коническое сечение является множеством точек, сумма или разность расстояний которых по касательным до двух окружностей* (φ) и (φ') постоянна.

Особый интерес предложения 5 состоит в том, что оно выявляет *вторую ось симметрии* у эллипса и у гиперболы: это медиатриса отрезка FF', а значит, существует и *центр симметрии*: середина O отрезка FF'. Этот неожиданный факт объяснится при проективном изучении кривой.

Замечание. Все предыдущее, начиная с 2), сохраняет силу, если конус заменить некоторым *цилиндром вращения*: достаточно положить $\alpha=0$, значит, $e=\sin\beta$: сечение является, вообще говоря, эллиптическим. Сечения плоскостями, параллельными образующим, являются вырожденными *параболами*: *парами параллельных прямых.*

6) Обратные предложения. *a*) Существенное обратное предложение связано с предложениями 3) или 4), определяющими кривые в их плоскостях (черт. 68).

Пусть в некоторой плоскости Π *даны окружность* (Φ) (*или некоторая точка* F) *и некоторая прямая* Δ, *а также задано положительное число* e. *Показать, что существует конус вращения, проходящий через кривую, определенную следующим условием*:

$$\frac{\text{расстояние по касательной } M, (\Phi)}{\text{расстояние } M, \Delta}=e \ \left(\text{или же } \frac{MF}{\text{расст. } M, \Delta}=e\right).$$

Существует бесчисленное множество пар острых углов α и β, для которых $e=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ (выбрать сначала β, если $e>1$; выбрать сначала α, если дано $e<1$).

Значение β определяет плоскость P. Среди сфер пучка, основной окружностью которого является (Φ) (или среди сфер касательных в точке F к плоскости Π), существует всегда по крайней мере одна, которая пересекает плоскость P под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$; искомый конус описан вокруг этой сферы, касаясь ее вдоль окружности Γ, по которой сфера пересекает плоскость P.

[Можно будет построить эту сферу, используя сечение плоскостью симметрии и инверсию, полюс которой находится на (Φ).]

Таким образом, *любая кривая, определенная условиями 3) или 4), является коническим сечением.* Это коническое сечение распадается, если дана точка F и прямая Δ, проходящая через F.

b) *Определение конуса вращения, проходящего через коническое сечение, определенное условием*:

$$MF+MF'=2a, \text{ или } |MF-MF'|=2a.$$

Сечение плоскостью симметрии (черт. 69) позволяет получить две точки A и A' кривой, вершины фокальной оси, и треугольник SAA', который можно построить, исходя из данных точек касания F и F', касательных к его сторонам окружностей. В случае эллипса, точка S является произвольной точкой гиперболы, определенной условием $|SA-SA'|=FF'$, фокусами которой являются точки A и A', а вершинами точки F и F'. В случае гиперболы точка S является произвольной точкой эллипса, определенного условием $SA+SA'=FF'$, фокусами которого являются A, A', а вершинами F и F'. Следовательно, задача всегда имеет решение.

Появилась интересная пространственная конфигурация двух конических сечений: эллипса и гиперболы. Отношение между этими двумя коническими сечениями взаимно. Их называют *фокальными коническими сечениями.*

Для параболы необходимо исследование, несколько отличное от предыдущего. В этом случае фигура показывает, что точка S равноудалена от точки A и от прямой, перпендикулярной к $x'x$ и проведенной через точку, симметричную точке A относительно точки F. Таким образом, геометрическое место точки S находится в плоскости симметрии данной параболы и является в этой плоскости параболой, равной данной и фокус которой служит вершиной данной параболы, а вершина является старым фокусом. Эти две параболы также называются *фокальными параболами.*

II. Конические сечения в аналитической геометрии. Степень уравнения

1) Использование определений 3 и 4

Если система отсчета ортонормальна и точка F имеет какие-либо координаты x_0, y_0, а уравнение прямой Δ задано в нормальной форме

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0,$$

то кривая — геометрическое место точек, для которых

$$\frac{MF}{\text{расстояние } M,\,\Delta}=e,$$

имеет уравнение:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+e^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta)^2.$$

Аналогично если дана окружность (Ф) с уравнением $P(x, y) = 0$ (коэффициенты при x^2 и y^2 в P приняты равными единице), то уравнение конического сечения таково:

$$[P(x, y)]^2=e^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta)^2.$$

Выберем систему отсчета, чтобы упростить эти уравнения. При определении конического сечения по фокусу F и его директрисе Δ примем точку F за начало координат, а перпендикуляр на прямую Δ за ось x-в; уравнение прямой Δ получит вид $x = d$. Тогда уравнение конического сечения будет иметь следующий вид:

$$x^2+y^2=e^2(x-d)^2. \qquad (1)$$

Отметим, что в случае параболы $e = 1$ и уравнение приводится к такому виду:

$$y^2=-2d\left(x-\frac{d}{2}\right).$$

Если же принять за начало вершину и воспользоваться обычным обозначением $|d| = p$, то уравнение при подходящем выборе положительного направления оси x-в получает следующий вид:

$$y^2=2px. \qquad (1)$$

Это приведенное уравнение параболы; p называется *параметром*; это расстояние от фокуса до директрисы. Параболы зависят лишь от этой единственной длины, и все подобны между собой.

2) Использование определений 5 или 5′

При введении обоих фокусов выявляется симметрия эллипса или гиперболы. В соответствии с этим мы примем за начало координат центр, а за ось x-в фокальную ось. Таким образом, фокусы получат координаты:

$$F:[x=c>0,\ y=0] \text{ и } F':[x=-c,\ y=0].$$

Мы полагаем

$$FM=r,\ F'M=r',$$

откуда

$$r^2=(x-c)^2+y^2,\ r'^2=(x+c)^2+y^2.$$

Значит,

$$r^2-r'^2=-4cx.$$

В биполярных координатах * определяющие уравнения таковы:

$$r+r'=2a \text{ (эллипс) или } |r-r'|=2a \text{ (гипербола).}$$

Поэтому мы изучим системы

$$r>0;\quad r'>0;\quad r^2=(x-c)^2+y^2 \qquad \text{(I)}$$

вместе с уравнениями

$$\begin{cases} r+r'=2a; \\ r-r'=-\dfrac{2cx}{a}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r-r'=2a; \\ r+r'=-\dfrac{2cx}{a}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r'-r=2a; \\ r'+r=+\dfrac{2cx}{a}, \end{cases}$$

то есть вместе с соотношениями

$$\begin{cases} r=a-\dfrac{cx}{a}; \\ r'=a+\dfrac{cx}{a}; \\ -\dfrac{a}{c}<\dfrac{x}{a}<\dfrac{a}{c}, \ (i) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r=a-\dfrac{cx}{a}; \\ r'=-\left(a+\dfrac{cx}{a}\right); \\ \dfrac{x}{a}<-\dfrac{a}{c}, \ (i') \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} r=-\left(a-\dfrac{cx}{a}\right); \\ r'=a+\dfrac{cx}{a}; \\ \dfrac{x}{a}>\dfrac{a}{c}. \ (i'') \end{cases}$$

---

* То есть когда система координат состоит из двух точек (полюсов), а положение любой точки плоскости характеризуется ее расстоянием от этих точек (полярными радиусами-векторами). При этом положение точки на каждой из полуплоскостей, образованных прямой полюсов, определяется однозначно. Координаты и расстояние между полюсами должны удовлетворять нестрогим неравенствам треугольника.— *Прим. ред.*

Равенство (I) дает тогда во всех случаях

$$y^2 = a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right). \tag{II}$$

Таким образом, уравнение (II) одно и то же для эллипса и для гиперболы, но нужно обеспечить существование точек, удовлетворяющих написанным условиям.

Первый случай — эллипс:

$$\frac{c}{a} < 1 \text{ требует } \left|\frac{x}{a}\right| < 1,$$

что совместно с (i), но не с (i') и не с (i'').

Второй случай — гипербола:

$$\frac{c}{a} > 1 \text{ требует } \left|\frac{x}{a}\right| > 1,$$

что совместно с (i') и (i''), но не с (i).

Частный случай $c = a$: геометрическое место сводится к отрезку FF' системой (i) и к полупрямым Fx и $F'x'$ системами (i') и (i''). Таким образом, уравнение (II) выражает $MF + MF' = 2a$ в случае $a > c$; оно выражает $|MF - MF'| = 2a$ в случае $a < c$.

Эти условия, очевидно, необходимы, ибо они выражают неравенство треугольника в треугольнике MFF'.

3) Равносильность двух уравнений (I) и (II)

Будем исходить, например, из уравнения (II) и поместим начало параллельным переносом системы координат в фокусе F:

$$x = X + c;\ y^2 = [a^2 - (X + c)^2]\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right),$$

то есть

$$y^2 + X^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(X - \frac{a^2 - c^2}{c}\right)^2.$$

Мы снова находим уравнение (1), полагая

$$\frac{c}{a} = e \quad \text{и} \quad \frac{a^2 - c^2}{c} = d.$$

Равносильность обоих определений доказана.

4) Следствия

а) При вычислениях мы получили выражение для *расстояния от точки M, порождающей коническое сечение, до фокуса F (или F') в виде рациональной функции первой степени от абсциссы.* Этот факт весьма замечателен, так как формула Пифагора дает, вообще говоря, иррациональное выражение. В конечном счете именно это свойство и выражено в определении конического сечения через фокус и директрису в форме

$$r = e(x - d),$$

или же

$$r = e(d - x),$$

так что

$$r = e|x - d|.$$

b) Биполярное определение менее благоприятно для аналитической геометрии, но оно позволяет делать немедленно заключения для таких, например, задач: *найти геометрическое место центров окружностей* (γ), *касательных к двум данным окружностям плоскости* или же *касательных к одной окружности и проходящих через некоторую точку*. Эта вторая задача значительно проще, чем первая, так как расположение фигуры может представить лишь два случая: данная точка находится вне окружности или внутри окружности. Это позволяет выполнять простые построения, относящиеся к эллипсу и гиперболе. Это приводит к параболе, если окружность заменена прямой. Полученное коническое сечение имеет один фокус F в данной точке, а второй фокус F' в центре данной окружности; его фокальная ось $2a$ равна радиусу данной окружности *. Данная окружность называется *направляющей окружностью*, соответствующей фокусу F'. Окружности (γ) определяют взаимно однозначное соответствие между точками конического сечения и точками рассмотренной направляющей окружности.

c) Чтобы выявить в уравнении (II) природу конического сечения, вводят длину b, определенную через a и c:

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ — для эллипса}, \quad b^2 = c^2 - a^2 \text{ — для гиперболы}.$$

Уравнение эллипса принимает тогда *приведенную* (*каноническую*) *форму*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II'}$$

Мы видим, что b равно расстоянию до центра от точек эллипса, расположенных на не фокальной оси (это вершины B и B'). Величина $2a$ называется *большой осью*, $2b$ — *малой осью*, $2c$ называется *фокальным расстоянием*.

Приведенное уравнение гиперболы таково:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II''}$$

---

* Действительно, например, в первом случае расстояния от точки F до расположенных на прямой FF' центров окружностей, касающихся данной, будут иметь величину

$$\frac{2c - R}{2} \text{ и } \frac{2c + R}{2},$$

где R — радиус данной окружности, а $FF' = 2c$. Разность этих расстояний — фокальная ось, как видим, равна R.— *Прим. ред.*

В этом случае длина b не образуется на не фокальной оси симметрии, так как эта ось не пересекает кривую, а возникает в фигуре, образованной прямыми

$$Y = \frac{b}{a}x, \ Y = -\frac{b}{a}x.$$

Мы установим важность этих прямых, если сравним первую из них с той частью гиперболы, которая имеет уравнение.

$$x > 0; \ y = +b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Разность ординат имеет следующее выражение:

$$Y - y = b\left[\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right] = b\frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}},$$

она стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности. Такое же исследование можем сделать, меняя последовательно знаки x и y. Значит, *две прямые, определяемые в совокупности уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

являются асимптотами гиперболы. Они взаимно перпендикулярны, если $a = b$ (гипербола тогда называется равносторонней). В этом случае $c = a\sqrt{2}$.

Асимптоты являются диагоналями прямоугольника с теми же симметриями, что и кривая, вершины которой A и A' являются серединами сторон, параллельных оси yy', длиной каждая $2b$. Длина каждой из этих диагоналей равна поэтому фокальному расстоянию $FF' = 2c$. Для равносторонней гиперболы этот прямоугольник является квадратом.

5) Основная теорема.

Любая плоская кривая, имеющая уравнение второй степени, является коническим сечением.

Общее уравнение второй степени в ортонормальных координатах

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

может быть упрощено заменой координат: прежде всего вращением осей можно заставить исчезнуть член, содержащий xy. Действительно, такое вращение выражается формулами:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta; \ y = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

Приравниваем нулю коэффициент члена при XY:

$$(C - A)\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta = 0.$$

Удовлетворяющее этому уравнению значение θ всегда можно найти $\left(\text{с точностью до } \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение тогда становится таким:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + 2D_1X + 2E_1Y + F = 0,$$

A_1 и C_1 не равны оба нулю, если уравнение действительно имело вторую степень. Предполагаем $C_1 \neq 0$. Тогда параллельный перенос, меняющий начало ординат Y, может обратить в нуль коэффициент члена содержащего Y, и уравнение приводится к следующему виду:

$$Y^2 = nX^2 + pX + q,$$

$n \neq 0$. Замена начала абсцисс X приводит к $y^2 = nx^2 + s$,
$s \neq 0$ — эллипс или гипербола, в зависимости от знака числа n.
Ни одной точки при $n < 0$, $s < 0$.
$s = 0$. Две пересекающиеся прямые при $n > 0$.
Одна точка при $n < 0$.

$n = 0$.
- $p \neq 0$. Замена начала абсцисс x приводит к $y^2 = 2px$. Парабола.
- $p = 0$. $y^2 = q$. Две прямые: параллельные или слившиеся, или же нет точек.

Следовательно, мы находим всегда некоторое коническое сечение, собственное или вырожденное, если существуют точки, удовлетворяющие уравнению, но может случиться, что таких точек вообще не существует. Только введение мнимых точек плоскости позволяет дать совершенно общие интерпретации уравнений, так что тогда каждое уравнение второй степени ставится в соответствие некоторому коническому сечению и обратно. При не ортонормальной системе координат любое уравнение второй степени также представляет коническое сечение, так как любое преобразование базиса сохраняет порядок.

Примеры приложений.

а) Коническое сечение, как уникурсальная кривая.

Если дана некоторая точка A (x_0, y_0) любого конического сечения, то любая прямая δ, которая вращается, проходя через A, пересекает кривую еще в *одной* точке, описывающей эту кривую. Возьмем в качестве *параметра* угловой коэффициент прямой δ. Если исключить, например, y, то получим уравнение второй степени относительно абсциссы точки пересечения прямой и кривой; оно будет *распадаться* на уравнение

$$x - x_0 = 0$$

и на некоторое уравнение первой степени, дающее абсциссу образующей точки M, а через нее можно получить и ординату, так что обе получатся как *рациональные функции параметра m*. Это характеризует *уникурсальную кривую.* Это взаимно однозначное соответствие между действительными числами m и точками M, очевидно, часто более удобно на практике, чем соответствие между точкой M и парой координат. Оно заменяет пространственное соответствие между точкой M и образующей G конуса.

b) Пусть мы имеем две точки плоскости A и B; *точка пересечения переменных прямых Au и Bv с угловыми коэффициентами, связанными между собой дробно линейным соотношением, описывает коническое сечение.*

Действительно, исключение чисел m и m' из равенств:

$$(y-y_0)=m(x-x_0);\quad y-y_1=m'(x-x_1)\quad \text{и}\quad m'=\frac{am+b}{a'm+b'}$$

дает уравнение второй степени:

$$(y-y_1)[a'(y-y_0)+b'(x-x_0)]=(x-x_1)[a(y-y_0)+b(x-x_0)].$$

Это коническое сечение проходит через точки A и B. (Следует изучить возможность вырождения кривой в прямые.)

Известно, что условие, наложенное на m и m', равносильно равенству двойных отношений четырех прямых Au и соответствующих им прямых Bv. Таким образом, несмотря на выбранную систему координат, доказанная теорема принадлежит проективной геометрии (См. далее IV).

III. Аффинные свойства центральных конических сечений

По приведенным уравнениям конических сечений с центром видно, что ортогональный аффинитет с осью, параллельной фокальной оси, и коэффициентом $\frac{a}{b}$ преобразует эллипс в *окружность*, а гиперболу в *равностороннюю гиперболу.* То же самое имеет место при ортогональном аффинитете с осью, параллельной не фокальной оси и с коэффициентом $\frac{b}{a}$.

Таким образом, эллипс получается из окружности диаметра AA', соединяющего вершины фокальной оси. Эта окружность называется *главной окружностью.* Она дает эллипс при ортогональном проектировании на плоскость, образующую с плоскостью окружности угол θ, определенный условием $\cos\theta=\frac{b}{a}$. Сам эллипс дает при такой проекции * окружность, равную окружности (BB'), диаметром которой служит малая ось эллипса (эта окружность называется часто вторичной *окружностью*).

Равносторонняя гипербола с уравнением $x^2-y^2=a^2$ заслуживает изучения, так как подобно тому, как всякое аффинное иссле-

* Конечно, если прямая пересечения плоскостей параллельна малой оси эллипса.— *Прим. ред.*

дование эллипса может выполняться на окружности, всякое аффинное исследование гиперболы может выполняться на равносторонней гиперболе (мы будем использовать какую-то равностороннюю гиперболу, так как все *равносторонние гиперболы подобны между собой*, как и все окружности, ибо они зависят только от одной длины).

Равносторонняя гипербола. Уравнение $x^2-y^2=$ $=a^2$ после вращения осей на угол $\frac{\pi}{4}$ принимает следующий вид:

$$XY=k^2, \text{ или } Y=\frac{k^2}{X}.$$

Мы узнаем график дробно линейной функции. Немедленно получаются предложения:

α) *Кривая расположена в двух вертикальных углах и является геометрическим местом точек, произведение расстояний которых до двух взаимно перпендикулярных прямых постоянно.* Эти прямые являются асимптотами кривой. Мы видим, что если рассмотреть все четыре угла, то им соответствуют две гиперболы *. В аффинной формулировке, которая распространяется на все гиперболы, имеем: *Совокупность двух сопряженных гипербол является геометрическим местом точек M, для которых параллелограмм с диагональю OM и с двумя сторонами, отложенными на асимптотах, имеет постоянную площадь.*

β) Если некоторая секущая M_1M_2 пересекает асимптоты в точках U и V, то из равенства

$$x_1y_1=x_2y_2$$

выводится

$$\left[\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{\overline{UM_1}}{\overline{UM_2}}=\frac{\overline{VM_2}}{\overline{VM_1}}\right],$$

отсюда следует, что отрезки MM_2 и UV имеют общую середину. Таким образом находим предложение аффинной геометрии: *Любая секущая гиперболы пересекает ее и ее асимптоты, образуя хорды с общей серединой.* Это предложение очень полезно для построения на практике гиперболы по точкам, если известны асимптоты и одна точка кривой.

γ) Как следствие симметрий, которым удовлетворяет совокупность двух прямых, эта теорема играет для равносторонней гиперболы ту же роль, что и теорема об ортогональных симметриях для окружности; таким образом, *любая проходящая через центр прямая является осью симметрии*, конечно, вообще говоря, косой. Эта теорема справедлива как для гиперболы, так и для эллипса.

δ) Ставя друг другу в соответствие две сопряженные гиперболы, как мы об этом уже говорили, мы получаем в случае равно-

---

* Их называют обычно сопряженными.— *Прим. перевод.*

сторонних гипербол описанные ромбы, аналогичные квадратам для окружности, откуда получаются *описанные параллелограммы постоянной площади* для любых эллипсов и для пар сопряженных гипербол (это *параллелограммы Аполлония*). Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*.

Замечание. Греческие геометры изучали конические сечения аналогичным образом с помощью уравнения (II), которое они доказывали непосредственно, исходя из конуса. Если это уравнение записать в следующей форме:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-a)(x+a),$$

то оно дает:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\overline{mA}\cdot\overline{mA'},$$

где точка m является проекцией точки M на фокальную ось. Это соотношение в случае окружности дает:

$$y^2 = -\overline{mA}\cdot\overline{mA'},$$

а в случае равносторонней гиперболы:

$$y^2 = +\overline{mA}\cdot\overline{mA'}.$$

IV. Конические сечения в проективной геометрии

В силу определения с помощью конуса вращения и доказанной обратной теоремы мы знаем, что каждое коническое сечение является перспективой некоторой окружности. *Следовательно, все проективные свойства окружности принадлежат коническим сечениям.* Основные проективные свойства выражены *теорией полюсов и поляр.* Каждой точке поставлена в соответствие определенная прямая, называющаяся полярой этой точки и содержащая точки, гармонически сопряженные данной точке относительно концов хорд, определенных кривой на прямых, проходящих через данную точку. Полярная взаимность распространяется на точки поляры, не соответствующие действительным хордам; это было доказано для окружности с помощью вспомогательных ортогональных окружностей, что, конечно, не является проективным методом, так что мы сохраняем здесь лишь выводы. Только теория мнимых точек дает этому удовлетворительное объяснение.

В частности, некоторая прямая q плоскости проектируемой окружности имеет своим образом бесконечно удаленную прямую q' плоскости конического сечения; следовательно, полюс Q' этой последней прямой есть *центр симметрии для конического сечения.* Это образ полюса Q относительно окружности прямой q. Однако если прямая q касательна к окружности, то точка Q находится на этой прямой q, так что центр отброшен на бесконечность; это случай *параболы*, которая должна рассматриваться как касающаяся к бесконечно удаленной прямой, причем центр параболы и является точкой касания. С метрической точки зрения существование одной оси ортогональной симметрии и центра симметрии влечет за собой существование второй оси симметрии, выходящей из центра и перпендикулярной к первой. Так получает объяснение существование этой второй оси *.

Поляра какой-либо точки бесконечно удаленной прямой проходит через центр симметрии и является осью косой симметрии; существование этих *диаметров* (осей косой или ортогональной симметрии для кривой) было открыто путем аффинного исследования.

Как выразить в проективной форме свойство угла, вписанного в окружность? Если мы возьмем четыре точки на любой окружности, то пучок четырех прямых, выходящих из произвольной точки окружности и проходящих через эти данные точки, остается равным самому себе; в частности, двойное отношение этого пучка постоянно. Отсюда следует, что можно сформулировать предложение:

Теорема Шаля. *Двойное отношение четырех прямых, соединяющих произвольную точку конического сечения с четырьмя фиксированными его точками, постоянно.*

Отметим, что это двойное отношение никогда не равно ни нулю, ни единице, ни бесконечности.

Обратная теорема. *Если в плоскости даны четыре точки A, B, C, D, то геометрическое место точек M плоскости, таких, что пучок M (A, B, C, D) имеет данное двойное отношение λ* ($\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$), *является коническим сечением, проходящим через данные четыре точки.*

Так как речь идет о проективной геометрии, то, применяя аналитическую геометрию, бесполезно брать ортонормальную систему координат. С другой стороны, мы можем предположить, что две из данных точек, например C и D, находятся на бесконечности (что осуществимо с помощью некоторой перспективы). Итак, предположим точку C на бесконечности в направлении x, точку D на бесконечности в направлении y и пусть O — такая точка, чтобы прямая OA имела направление x, а OB направление y. Мы берем точку O, как начало координат, а как базис $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{j}$. Пусть x, y — координаты точки M.

Прямые MA, MB, MC, MD пересекают Ox в точках с абсциссами 1, m, x, ∞, где абсцисса m задана условием коллинеарности

$$\frac{m-0}{x-0} = \frac{0-1}{y-1},$$

то есть

$$m = \frac{-x}{y-1}.$$

* Конечно, когда центр — бесконечно удаленная точка, второй оси симметрии может не быть (парабола).— *Прим. ред.*

Одно из двойных отношений пучка равно, следовательно:

$$\lambda = \frac{x-1}{x-m} = \frac{(x-1)(y-1)}{xy}.$$

Если число λ дано, то уравнение геометрического места второй степени:

$$(\lambda - 1)xy + x + y - 1 = 0.$$

Следовательно, геометрическое место является коническим сечением. Оно проходит через точки A $(x = 1, y = 0)$, B $(x = 0, y = 1)$, а также через точки C и D. Коническое сечение определено, следовательно, четырьмя точками и двойным отношением λ.

Основное следствие

Любая плоская кривая, являющаяся перспективой конического сечения, сама является коническим сечением.

В самом деле, достаточно определить коническое сечение четырьмя точками A, B, C, D и соответствующим двойным отношением λ, чтобы получить проективное определение конического сечения.

Таким образом, глубокое изучение конических сечений неотделимо от теорий проективной геометрии.

V. Тангенциальная точна зрения

С тангенциальной точки зрения кривая определяется, как *огибающая своих касательных*. Любое определение конических сечений позволяет доказать существование единственной касательной в каждой точке кривой * и изучить положение этой касательной. Так здесь проявляются различные ее свойства:

1. В конусе вращения касательная появляется, как пересечение плоскости кривой с касательной плоскостью к конусу вдоль образующей, проходящей через рассматриваемую точку конического сечения. В частности, в случае гиперболического сечения касательные в бесконечно удаленных точках, то есть *асимптоты*, являются пересечениями плоскости П кривой и плоскостей касательных к конусу вдоль образующих, параллельных плоскости П. Асимптоты, следовательно, параллельны этим образующим. В частности, отсюда видно, что угол, образованный асимптотами, который содержит кривую, не больше угла 2α осевого сечения конуса (где α — угол между образующей и осью вращения).

2. Согласно определению касательной, при изучении конического сечения в его плоскости заставляют вращаться некоторую прямую вокруг точки M_0 кривой. Следовательно, здесь проявляется точка зрения на коническое сечение, как на уникурсальную кривую. Если кривая определена через один из фокусов F, соответствующую директрису Δ и эксцентриситет е, то определение показывает немедленно, что некоторая секущая M_0M пересекает директрису Δ на одной из биссектрис угла M_0FM; это будет внешняя

* Если кривая не распавшаяся.— *Прим. ред.*

биссектриса, если точка M находится по соседству с точкой M_0. Заставляя точку M стремиться к точке M_0, мы выводим отсюда, что касательная в точке M_0 существует и *что отрезок касательной, заключенный между точкой касания и директрисой, виден из фокуса под прямым углом*. Если кривую определили двумя фокусами и длиной $2a$, то исследование можно провести, образуя производные векторов (кн. III, гл. III, § IV). Мы видели, что *касательная в точке M_0 есть одна из биссектрис угла $F\widehat{M_0}F'$*.

С более геометрической точки зрения коническое сечение удобно определить одним фокусом F и направляющей окружностью с центром в другом фокусе F' (это окружность радиуса $2a$, которую мы ввели в II, 4, b). Окружности (γ_0) и (γ) с центрами соответственно в M_0 и M, и касающиеся направляющей окружности в U_0 и U, имеют свою радикальную ось, которая стремится к FU_0, когда M стремится к M_0. Касательная здесь появляется, как медиатриса отрезка FU_0. Получается предложение: *касательные конического сечения — это медиатрисы отрезков, соединяющих один из фокусов с точками направляющей окружности с центром в другом фокусе*. Для гиперболы касательная является асимптотой, если FU_0— касательная к направляющей окружности. Для параболы направляющая окружность заменяется директрисой.

Так как имеется взаимно однозначное соответствие между точками U_0 направляющей окружности и точками M_0 конического сечения, а, значит, также и между касательными в M_0, то *коническое сечение является огибающей прямых, определенных как медиатрисы отрезков FM_0*.

3. Аффинитет позволяет также вывести существование касательной к центральному коническому сечению и свойства касательной из свойств касательных к окружности (для эллипса) или к равносторонней гиперболе (для гипербол). Для этих последних из свойства секущих (доказанного в III, β), относящегося к хордам, отсекаемым кривой и парой асимптот, вытекает, что *точка касания любой касательной является серединой отрезка ее пересечения с асимптотами*.

4. Согласно определению кривой, как сечения некоторого конуса, на этой плоскости через любую точку, не расположенную на коническом сечении, проходят две касательные, или нуль касательных. Это свойство соответствует дуально свойству: любая прямая, не касательная к кривой, пересекает ее в двух точках или в нуль точках. С этой точечной точки зрения мы и говорили, что коническое сечение — линия второго порядка.

С тангенциальной точки зрения мы говорим, что коническое сечение — линия второго класса *. Подобно тому как коническое

---

* Автор употребляет термин «ordre»— порядок, который в литературе применяется обычно для характеристики степени уравнения в точечных координатах.— *Прим. перевод.*

сечение, рассмотренное с точечной точки зрения, может выродиться в две прямые, пересекающиеся или параллельные, или даже в одну двойную прямую, мы должны рассматривать и тангенциальные вырождения в две точки или в двойную точку. Тогда доказывается, что всякая кривая второго класса является коническим сечением. Мы только отмечаем эту точку зрения, для развития которой требуется теория огибающих (из дифференциальной геометрии).

Выводы. Мы занимались выше изучением конических сечений различными способами. Эти кривые встречаются еще во многих других исследованиях, в частности, в вопросах *кинематики* (мы отметили в конце исследования движений описание эллипса с помощью бумажной ленты). Эллипс находят и как гипоциклоидальную кривую, если заставить катиться при определенных условиях одну окружность по другой. Конические сечения особенно важны в *динамике* (это траектории планет, двигающихся по законам Кеплера, получающимся как следствие взаимного притяжения планеты и Солнца по закону Ньютона).

Конические сечения встречаются в *оптике* (фокусы являются в известных условиях точками схода световых лучей и т. п.). Все эти приложения оправдывают введение в курс математики изучение этих кривых (равно как и поверхностей второго порядка). Эти кривые представляют возможность применять разнообразные методы и порождают многочисленные интересные упражнения. Однако интересны также и другие кривые, изучаемые синтетической (вообще метрической) или аналитической геометрией из-за их технических приложений или просто из-за любопытных упражнений. После того как будет выяснено, к какой геометрии принадлежит предложенное исследование, следует употреблять введенные нами средства: соотношения и преобразования этой геометрии.

ДОПОЛНЕНИЯ

Мы собрали здесь несколько дополнительных замечаний и упражнений. Первые иллюстрируют так называемые «современные» аспекты нашего исследования: они подготовляют изучение тех структур, которые являются объектом исследования на более высоком уровне. Другие даны в качестве упражнений. Они указывают методы исследования и изложения важнейших типов классических задач, используемых уже в течение многих лет в выпускном классе наших французских лицеев.

Синтаксис: о порядке кванторов.

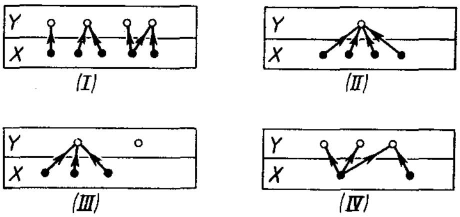
Упражнение. Отношение порядка $\prec$ изображается восходящей стрелой. Исследовать 4 ситуации, указанные следующими графическими моделями:

Являются ли следующие утверждения верными для некоторых из этих ситуаций:

$a)\ \forall x,\ (\exists y : x \prec y);$ $\qquad b)\ \exists y : (\forall x,\ x \prec y);$

$c)\ \exists x : (\forall y,\ x \prec y);$ $\qquad d)\ \forall y,\ (\exists x : x \prec y).$

З а м е ч а н и е. Можно условиться опускать скобки, но для большей ясности лучше их сохранить.



Черт. 71

Д о п о л н е н и е. Приведите примеры изученных выше ситуаций, например, на множестве целых чисел с отношением порядка «делит».

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ

●

I. Замечание о символе, обозначающем множество

Часто используют фигурные скобки:
Перечисление элементов: $\{a,\ b,\ c,\ d\}$.
Последовательность p элементов: $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p\}$.
Бесконечная последовательность элементов:

$$\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}.$$

Определение образующего элемента:

$$\{x : x \leqslant 3\}.$$

Упражнение 1. Изобразить на плоскости точки:

$$\{u = (x,\ y) : 0 < x < 1,\ x < y\}.$$

Упражнение 2. Распознать следующие множества, включенные в Z:

$a)\ \{3\};\quad b)\ \{x : x \neq 3\};\quad c)\ \{x : x \geqslant 3,\ x \leqslant 3\};$

$d)\ \{x : x > 0\};\quad e)\ \{x : x = 2q,\ q \in N\}$ и т. п.

II. Таблицы принадлежности

Каждая строка таблицы показывает совместность принадлежности или непринадлежности некоторого элемента к некоторому подмножеству:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \cap \complement B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
$\in$	$\notin$	$\notin$		
$\notin$	$\in$	$\notin$		
$\notin$	$\notin$	$\notin$		

Дополнить эту таблицу. Ввести другие подмножества. Проверить с помощью этих таблиц следующие утверждения:

$$[A = B] \Leftrightarrow [(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = \varnothing];$$

$$[B = \varnothing] \Leftrightarrow [(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = A];$$

$$\left.\begin{aligned} X &= (A \cap \complement B \cap D) \cup (\complement A \cap B \cap D) \\ Y &= (A \cup B) \cap D \cap \complement (A \cap B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow [X = Y].$$

Проверить также эти результаты с помощью диаграмм Эйлера. Наконец, доказать эти результаты, отправляясь от аксиом, используя булеву алгебру (кн. 1, гл. VI).

III. Отношения эквивалентности и отношения порядка

Упражнение 1. Среди следующих отношений между элементами множества целых чисел выделить отношение эквивалентности:

1) $a - b$ четно; 2) $a - b$ нечетно;

3) ab четно; 4) $|a - b| < 1$ и др.

Упражнение 2 (теоретическое). Доказать, что рефлексивное и транзитивное отношение является отношением эквивалентности.

Упражнение 3. Рассмотреть множество областей, определенных в треугольнике ABC отрезками BB' и CC', где B' принадлежит отрезку AC, а C' отрезку AB. Упорядочить это множество через включение. Сделать диаграмму.

Упражнение 4. Во множестве E из n чисел символом Sup E обозначают наибольший элемент, а Inf E — наименьший элемент.

1) Рассмотрим две операции:

$$a\mathcal{S}b = \operatorname{Sup}(a, b) \text{ и } a\mathcal{J}b = \operatorname{Inf}(a, b).$$

Проверить двойную дистрибутивность.

2) Имеется прямоугольная числовая таблица, содержащая p строк $L_1, L_2, \ldots, L_p$ и q столбцов $C_1, C_2, \ldots, C_q$. Сравнить

$$x = \operatorname{Sup}(\operatorname{Inf} L_1, \operatorname{Inf} L_2, \ldots, \operatorname{Inf} L_p)$$

и

$$y = \operatorname{Inf}(\operatorname{Sup} C_1, \operatorname{Sup} C_2, \ldots, \operatorname{Sup} C_q).$$

Упражнение 5. Множество E снабжено двумя отношениями эквивалентности $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. Классами эквивалентности являются соответственно $C_1, C_2, \ldots,$ и $C'_1, C'_2, \ldots$. Говорят, что $\mathcal{R}'$ *более тонкое* отношение, нежели $\mathcal{R}$, если

$$\forall i, \ \exists j : C'_i \subseteq C_j.$$

a) Нарисовать на диаграмме два разбиения, сравнимые с помощью этого отношения. Идет ли речь об упорядоченности или частичной упорядоченности во множестве отношений эквивалентности, которые могут быть определены на множестве E?

b) Привести примеры из классов вычетов, определенных во множестве целых чисел (кн. I, гл. I, § 2).

Упражнение 6. Являются ли следующие отношения отношениями порядка? Если являются, то будет ли это упорядоченность или частичная упорядоченность?

a) На множестве точек $M(x, y)$ плоскости введено отношение

$$M_1 \prec M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2; \\ y_1 < y_2. \end{cases}$$

b) На множестве непрерывных функций, определенных на (a, b), введено отношение:

$$f(x) \prec g(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in (a, b), \ f(x_0) < g(x_0).$$

c) То же множество с отношением:

$$f(x) \prec g(x) \Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) < g(x_0).$$

d) То же множество с отношением:

$$f(x) \prec g(x) \Leftrightarrow \exists x_0 : [\forall x, \ f(x_0) < g(x)].$$

e) То же множество с отношением:

$$f(x) \prec g(x),$$

если площадь области, заключенной между осью Ox, графиком и прямыми $x = a$ и $x = b$, меньше для f, чем для g.

Упражнение 7. Речь идет о подмножестве A множества E, снабженного отношением порядка. Сравнить следующие близкие понятия:

1) m — *мажоранта* подмножества A, если $m \in E$, $\forall a \in A$, $a \leqslant m$. Обозначить $\mathfrak{M}$ множество мажорант множества A.

2) α — *наибольший элемент* подмножества A,

$$\alpha \in A,\ \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha.$$

3) μ — *максимальный элемент* подмножества A,

$$\mu \in A,\ \nexists a \in A\ : a > \mu,$$

иначе говоря,

$$\mu \in A,\ a \in A\,[a \geqslant \mu \Rightarrow a = \mu],$$

или еще «всякий элемент из A, сравнимый с μ, меньше или равняется μ».

4) Точная *верхняя грань* b *множества* A. Это наименьшая мажоранта:

$$\mathfrak{M} = \varnothing,\ b \in \mathfrak{M},\ \forall m \in \mathfrak{M},\ m \geqslant b.$$

Преобразовать эти определения, рассматривая отношения обратного порядка.

a) Произвести сравнение, если множество E упорядочено, например, во множестве R действительных чисел, рассматривая: или же

$$A = \{a : 0 < a < 1\},$$
$$A = \{a : 0 \leqslant a \leqslant 1\}.$$

b) Произвести сравнение на примере *a*) упражнения 6, если A — множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x + y > 1; \\ x + y < 2. \end{cases}$$

Воспользоваться графиком.

О МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

●

I. Замечания относительно определения множества натуральных чисел

Мы выбрали систему аксиом достаточно богатую, чтобы дать с самого начала все полезные свойства, налагая на множество последовательные ограничения. Но интересно познакомиться с системой аксиом, которая определяет множество натуральных чисел N с наибольшей краткостью.

Система аксиом Пеано

Множество N определено следующими аксиомами:

1) для каждого элемента $x \in N$ существует единственный ему соответствующий элемент x', называемый его *последующим*;

2) один элемент, обозначенный через 1, не имеет предшествующего (то есть такого элемента, для которого он был бы последующим);

3) всякое подмножество $A \subseteq N$, удовлетворяющее условию

$$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x' \in A,$$

является самим множеством N.

Эта последняя аксиома обосновывает рекуррентные рассуждения, главнейший инструмент при изучении множества N.

Другая система аксиом

1) В N существует отношение порядка, удовлетворяющее аксиоме полной упорядоченности.

2) Всякий элемент, кроме одного, обозначенного символом 1, имеет предшествующий элемент.

Эти аксиомы позволяют выполнить рассуждения с помощью метода спуска, использованного Ферма. Исходя из этих аксиом, определяют прибавление 1. Остается доказать свойства, которые в настоящей работе приняты в качестве аксиом.

II. Введение множества Z

Мы ввели множество Z путем симметризаций, исходя из множества N. Доказать, что множество Z изоморфно множеству Σ, фактормножеству множества N^2 пар (a, b) элементов множества N по отношению эквивалентности

$$\mathscr{R} : [(a,\ b) \equiv (a',\ b')] \Rightarrow [a + b' = b + a'],$$

если Σ снабжено структурой, определенной следующим образом:

$$(a,\ b) + (a',\ b') \equiv (a + a',\ b + b');$$
$$(a,\ b) \cdot (a'b') \equiv (aa' + bb',\ ab' + ba').$$

Доказать аксиомы и свойства, которыми мы наделили множество Z.

Если к множеству N присоединяется число 0, то показать важность пары $(a, 0)$ и $(0, b)$. Сравнить с введением дробей, которые получаем, исходя из множества N. Сравнить с введением множества комплексных чисел, которые получаем, исходя из множества R (кн. III, гл. VI, § 4).

III. Гауссовы целые числа

Упражнение 1. Мы определяем некоторое множество E элементов $\mu = (a, b)$, где a и $b \in Z$, наделяя множество двумя операциями. Имеют место следующие аксиомы:

$$\text{I} \quad (a,\ b) \equiv (a',\ b') \Leftrightarrow [a = a',\ b = b'];$$
$$\text{II} \quad (a,\ b) + (a',\ b') \equiv (a + a',\ b + b');$$
$$\text{III} \quad (a,\ b) \cdot (a'b') \equiv (aa' + 3bb',\ ab' + ba').$$

1) Проверить свойства [A] (кн. I, гл. I, § 4) для обеих операций, а также и дистрибутивность. Определить нейтральные элементы ω и η.

2) Доказать, что множество E образует кольцо, такое, что

$$\mu_1\mu_2 \equiv \omega \Longleftrightarrow \mu_1 \equiv \omega, \ \textbf{или} \ \mu_2 \equiv \omega$$

(здесь **или** — не исключающее) (кольцо целостности).
(Известно, что во множестве Z, $3b^2 - a^2 \neq 0$.)

3) Найти обратный элемент по отношению к $\mu = (2, 1)$. Доказать, что E не является полем.

З а м е ч а н и е. Чтобы выполнить вычисления, используя обычную практику счета с действительными числами, можно положить $\mu = a + b\sqrt{3}$.

Упражнение 2. Выполнить то же исследование над множеством F, удовлетворяющим тем же аксиомам, но с заменой в III числа 3 числом 2.

Можно ли определить взаимно однозначное соответствие между множествами E и F, сохраняющее обе операции (изоморфизм колец)? (Ответ отрицательный.)

Д о п о л н е н и я. Разнообразить ситуацию. (Заменить 3 на 4. Заменить Z на Q.)

О КВАДРАТНЫХ РАДИКАЛАХ

Основное упражнение. Пусть Q — множество рациональных чисел с элементами $a, a', b, b', \ldots$ и пусть r и r' — два элемента множества Q^+, не являющиеся квадратами элементов множества Q, как и $\frac{r}{r'}$. Записывается: $\varrho = \sqrt{r}$; $\varrho' = \sqrt{r'}$; $\varrho \notin Q$; $\varrho' \notin Q$. Доказать единственность комплексного выражения $a + b\varrho$:

$$[a + b\varrho = a' + b'\varrho] \Longleftrightarrow [a = a', \ b = b', \ r = r'].$$

(Доказательство: изолировать ϱ и возвести в квадрат.)

Приложение.

1) Проверить:

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2) Даны элементы u и $v \in Q$, $\sqrt{v} \notin Q$. Определить x и $y \in Q$, такие, что

$$\sqrt{u + \sqrt{v}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Найти условие возможности такого равенства.

Проверить, что те же числа удовлетворяют условию

$$x > y, \ \sqrt{u - \sqrt{v}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Использовать этот результат для исследования выражения

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{r}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

Упражнение. Проверить, что, вычисляя сторону c_n правильного выпуклого n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, находим:

$$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}; \quad c_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}};$$

$$c_{15} = \frac{R}{4}\left[\sqrt{20+2\sqrt{5}} - \sqrt{6(3-\sqrt{5})}\right].$$

Можно ли избежать наложения радикалов на радикалы?

Упражнения с кубическими радикалами.

Увидеть одно решение (x, y) уравнения:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}; \; x \in Q; \; y \in Q.$$

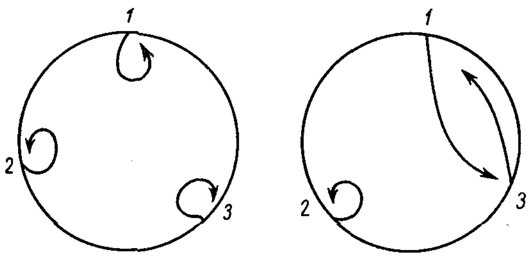
Вычислить значение:

$$z = \sqrt{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

ПРИМЕР КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Группа перестановок * трех элементов

Упражнение 1. Три предмета a, b, c могут быть расположены в трех положениях, нумерованных 1, 2, 3. Каждая перестановка является некоторым отображением этого множества на себя. Это отображение можно, например, представить такой схемой:



Черт. 72

$$i\,(a, b, c,) = (a, b, c) \text{ и } (a, b, c) = (c, b, a).$$

1) Нарисуйте схемы всех перестановок. Через i будет обозначаться *тождественное преобразование*, через u, v, w будут обозначаться перестановки, меняющие местами два элемента (*транспозиции*), через r и r' будут обозначаться перестановки, где каждый элемент, находящийся на n-м месте, переходит на $n+1$ или $n-1$ (mod 3) место (*циклические перестановки*).

* В литературе чаще употребляется термин «подстановка» (Substitution).— *Прим. ред.*

2) На множестве перестановок определяется *произведение*, как перестановка, результирующая две последовательные перестановки. Составьте таблицу умножения в форме таблицы с двумя входами. Проверить:

$$u^2 = v^2 = w^2 = i;$$

$$rr' = r'r = i; \; r^3 = i; \; r'^3 = i.$$

Коммутативно ли умножение?

Проверить, составляет ли множество перестановок группу. Каждый ли элемент имеет квадратный корень? Решить уравнения: $x^2 = i$ и $x^3 = i$.

3) *Геометрическая модель.* Самосовмещение равностороннего треугольника (r и r' являются вращениями, u, v, w — осевые симметрии).

4) *Аксиоматическое построение.* Показать, что таблица умножения определена следующими аксиомами:

Имеются 6 элементов i, r, r', u, v, w. Операция ассоциативна; i — нейтральный элемент. Допускается левое и правое сокращение. Известны 5 равенств:

$$u^2 = i; \; v^2 = i; \; uv = r; \; vu = r'; \; vr = w.$$

5) Показать на геометрической модели, что соединение двух условий $rr' = i$, $r'r = i$ недостаточно для доказательства равенства

$$r^2 = r'.$$

Другое упражнение. То же исследование провести для 4 элементов. Построить двумерную и трехмерную геометрические модели.

ПРИМЕРЫ КОЛЕЦ

Упражнение 1. Пусть A — множество элементов m, кратных целого числа a,

$$a \in N; \; m = qa; \; q \in Z.$$

Сложение и умножение, определенные в Z, придают подмножеству A строение кольца. Существует ли нейтральный элемент для сложения? А для умножения?

Упражнение 2. Доказать, что если кольцо является телом, то оно удовлетворяет условию

$$ab = 0 \Rightarrow [a = 0 \text{ **или** } b = 0].$$

(Умножить слева на a^{-1} **или** справа на b^{-1}.)

Обратно, если кольцо удовлетворяет этому условию (*кольцо целостности*) и если оно состоит лишь из конечного числа элементов, то оно является телом. (Исходя из $a \neq 0$, образовать произведения ax, $x \in A$.)

Упражнение 3. *Пример кольца во множестве* $\mathcal{F}$ *числовых функций*, определенных на $[0, 1]$.
Пусть

$$x \underset{f}{\searrow\!\!\nearrow} f(x) \quad \text{и} \quad x \underset{g}{\searrow\!\!\nearrow} g(x).$$

Определяются две операции:

$$s = f + g, \text{ определено условием } x \underset{s}{\searrow\!\!\nearrow} f(x) + g(x).$$

$$p = fg, \text{ определено условием } x \underset{p}{\searrow\!\!\nearrow} f(x) \cdot g(x).$$

Указать нейтральные элементы этих операций. Доказать, что нейтральный элемент сложения может быть разложен на произведение ненулевых множителей.

(Иметь в виду функции, равные нулю, на отрезке, включенном в $[0, 1]$, и неравные нулю на его дополнении.) $\mathcal{F}$ не является кольцом целостности.

УПРАЖНЕНИЯ НА СРАВНЕНИЯ

Обозначим символом A многочлен от x, коэффициенты которого принадлежат множеству Z, и через $A(x)$ его числовое значение для $x \in Z$. Рассмотрим сравнения по модулю m, где m — натуральное число, большее 1.

1) Проверить, что $x_1 \equiv x_2 \Rightarrow A(x_1) \equiv A(x_2)$.

2) Сколько значений x достаточно испытать для решения сравнения $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$?

Показать, что можно свести многочлен A к многочлену, у которого коэффициенты равны $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим буквой d степень приведенного таким образом многочлена.

3) Можно ограничиться предположением, что m простое число. Действительно, если $m = m_1 m_2$, то условие наличия сравнения равносильно следующим:

$$\begin{cases} x = u + v; \\ A(u) \equiv 0 \pmod{m_1}; \\ A(u + m_1 \ v) \equiv 0 \pmod{m_2}. \end{cases}$$

4) Если m — простое число, то сравнение $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$ допускает не более d решений.

Пример 1. Решить $x^2 \equiv a \pmod 5$ для различных значений a.

Пример 2. Решить:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) \equiv 0 \pmod{81}$$

(имеется 39 решений).

МНОГОЧЛЕН И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Буквой S обозначим сумму трех членов, которые мы получаем из записанного члена, выполняя циклические перестановки элементов a, b, c.

Упражнение. Упростить многочлен:

$$P(x) \equiv Sa \frac{(x-b)(x-c)^*}{(a-b)(a-c)}.$$

1) Какова степень этого многочлена?
2) Вычислить $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.
3) Сравнить P с многочленом $Q(x) \equiv x$.
4) Проверить это, развернув данное выражение.

Аналогичные упражнения. Вскрыть простейшие многочлены в следующих примерах:

Пример 2.

$$P(x) \equiv S \frac{(b+c)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Пример 3.

$$P(x) \equiv S \frac{(b^2+c^2)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Теоретическое упражнение. Доказать, что многочлен не может являться периодической функцией. (Определение, кн. III, гл. III, § 1.)

ПОНЯТИЕ О ВЫПУКЛОСТИ ПОДМНОЖЕСТВА

I. Определение

Напомним, что в точечном пространстве, соответствующем векторному пространству, *отрезок* M_1M_2 является множеством точек M, определенных следующими условиями:

$$\mathbf{M_1M} = k\mathbf{M_1M_2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1,$$

или же

$$\mathbf{OM} = \lambda \mathbf{OM_1} + (1-\lambda)\mathbf{OM_2}; \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Подмножество $\mathscr{E}$ называется *выпуклым*, если

$$\forall M_1, \ \forall M_2 \in \mathscr{E}; \ M \in M_1M_2 \Rightarrow M \in \mathscr{E}.$$

Уславливаются множества $\varnothing$ и $\{M\}$ рассматривать как выпуклые.

a) Привести примеры из аффинной или метрической геометрии.

b) Доказать, что ненулевое пересечение выпуклых подмножеств выпукло.

c) Даны n точек, принадлежащих множеству $\mathscr{E}$, которым приписываются коэффициенты одинакового знака. Доказать, что центр тяжести принадлежит множеству $\mathscr{E}$. Как можно определить минимальное выпуклое множество, содержащее n данных точек?

---

* Смысл знака $\equiv$ см. стр. 201.— *Прим. ред.*

II. Расстояние некоторой точки $K \notin \mathscr{E}$ от выпуклого множества $\mathscr{E}$ (*метрическая геометрия*)

Напоминание. Расстояние h точки K до множества $\mathscr{E}$ определяется следующим образом:

$$h = \operatorname{Inf} d(KM), \quad M \in \mathscr{E},$$

где через $d\,(AB)$ обозначено расстояние между двумя точками A и B.

a) Если существует точка $H \in E$, такая, что $d\,(KH) = h$, то эта точка единственна.

b) Пусть точка H существует и пусть δ — перпендикуляр в точке H к KH, тогда

1) $\delta \cap E$ есть точка H, или отрезок прямой δ, или сама прямая δ;
2) никакая точка множества $\mathscr{E}$ не находится по ту же сторону от прямой δ, что и точка K.

c) Точка H находится на границе множества $\mathscr{E}$. Если эта граница представляет собой кривую, имеющую касательную в точке H, то прямая δ и является этой касательной.

III. Приложение к анализу

Пусть дуга AB является графиком непрерывной функции $x \xrightarrow{f} y$ на $[a, b]$. Говорят, что точка $K\ (x_0, y_0)$ *выше* графика, если $y_0 > f\,(x_0)$

1) Пусть даны три точки U, V, W с абсциссами $u < v < w$.

$$[V \text{ выше } UW]^* \Longleftrightarrow [\text{наклон } UV > \text{наклона } UW].$$

2) Положим

$$p_{1,2} = \frac{f\,(x_2) - f\,(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Сформулировать свойство, которое записывается так:

$$\forall x_1,\ \forall x_2 \in [a,\ b],\ \ \forall x \in [x_1,\ x_2];$$
$$f\,(x) > f\,(x_1) + p_{1,2}\,(x - x_1).$$

a) Доказать, что это условие выражает, вместе с условием выбора положительного направления на оси y-в, выпуклость множества точек, заключенных между дугой AB и хордой AB.

b) Пусть имеются n значений аргумента x

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b,$$

и n чисел того же знака

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n.$$

---

* Символом UW обозначен отрезок прямой, соединяющий U и W. — *Прим. ред.*

Доказать, что точка

$$G\left(x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n};\ y_G = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right)$$

является внутренней точкой множества $\mathcal{E}$.

c) Предположим, что функция f имеет производную. Доказать, что

$$[x_1 < x_2] \Rightarrow [f'(x_1) < p_{1,2} < f'(x_2)].$$

Вывести отсюда знак второй производной, предполагая, что она существует.

d) Функция, имеющая вышеуказанное свойство, называется *выпуклой* на $[a, b]$. Определить аналогично *вогнутую* функцию, а также выпуклую или вогнутую в широком смысле, заменяя знак $<$ на $\leqslant$, или знак $>$ на $\geqslant$.

Исследовать с этой точки зрения линейные функции, трехчлены второй степени и функции типа

$$y = |ax + b| + |a'x + b'| + |a''x + b''| \text{ и т. д.}$$

Заметим, что понятие выпуклой функции имеет очень большое значение для интегрального исчисления и для статистики: например, точка G, о которой идет речь в *b*), изображает «среднее» явление, если каждая точка графика изображает некоторое состояние исследуемого явления.

СИСТЕМЫ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

●

Системы неравенств. Рассматривается пространство R^n точек $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

1) Доказать, что множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n < k,$$

выпукло.

2) Вывести отсюда, что множество, определенное системой линейных неравенств, выпукло (или пусто).

3) То же самое для системы линейных неравенств и линейных уравнений.

Дать числовые примеры и геометрические модели для $n = 1$, 2 или 3.

Линейное программирование. Измерение величин приводит к введению векторных пространств. Меры оказываются связанными линейными соотношениями. Приводим очень простой пример, допускающий графическое исследование на плоскости.

Постановка задачи. В одной мастерской планируется выпуск костюмов и платьев из одной и той же ткани. Для каждого объекта известна необходимая длина отреза (в метрах), продолжительность работы (в часах) и прибыль (во франках):

	Длина	Продолжительность	Прибыль
Для одного костюма	$l=5$	$d=4$	$b=10$
Для одного платья	$l'=3$	$d'=5$	$b'=9$

Имеется в распоряжении 60 метров ткани и 80 часов рабочего времени. Как получить максимальную прибыль?

Указания к решению. Отложить на оси абсцисс число x костюмов, а на оси ординат число y платьев; отметить области, определенные следующими условиями:

$$R_1:(x\geqslant 0);\quad R_2:(y\geqslant 0);$$
$$R_3:(5x+3y\leqslant 60);\quad R_4:(4x+5y\leqslant 80).$$

Рассматривается множество прямых

$$\Delta\,(10x+9y=\lambda),$$

таких, что

$$E=\Delta\cap(R_1\cap R_2\cap R_3\cap R_4).$$

Пусть Δm будет та прямая, расстояние которой $\delta=\lambda/\sqrt{181}$ от начала координат максимально. Показать, что Δ_m проходит через некоторую вершину A области E. Искомой точкой с целыми координатами будет не наиболее близкая к A точка из E, а та точка, через которую проходит прямая Δ, наиболее близкая к прямой Δ_n.

Дополнения. Изменить условие так, чтобы Δ_m содержала отрезок границы множества E.

МНОЖЕСТВА, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Множество $\mathfrak{A}$ зависит от параметра λ, если оно находится во взаимно однозначном соответствии с множеством R или с одним из его подмножеств:

$$\lambda\in R \leftrightarrow a\in\mathfrak{A}.$$

Множество $\mathfrak{A}$ зависит от n параметров, если оно находится во взаимно однозначном соответствии с R^n:

$$(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in R^n \leftrightarrow a\in\mathfrak{A}.$$

Подмножество множества $\mathfrak{A}$ определено p условиями, если параметры связаны p независимыми уравнениями.

Случай прост, лишь когда эти уравнения позволяют определить однозначно p параметров, через остальные $n-p$ параметров, остающихся независимыми.

I. Семейство кривых, зависящее от одного параметра

Упражнение 1. Пусть семейство $\mathcal{F}$ парабол P_m состоит из графиков трехчленных функций, коэффициенты которых в свою очередь функции второй степени от параметра.

$$m \in R \longleftrightarrow T_m \equiv (m^2+1)\,x^2 +$$
$$+\,2\,(m^2+2m+2)\,x + m\,(m+4) \longleftrightarrow P_m.$$

1) Определить кривые P_m, проходящие через точку $A\,(x_0,\ y_0)$. Исследование числа решений выявляет некоторую точку K и некоторую параболу Q.

2) Доказать, что Q есть огибающая семейства $\mathcal{F}$ (то есть что $\forall m$, P_m касательна к Q и $\forall K \in Q$, $\exists m$, такое, что K является точкой касания Q и P_m).

Упражнение 2. Подобно предшествующему

$$T_\theta \equiv 2x^2 - 4x\cos\theta + \cos 2\theta - \cos\theta.$$

1) Вводится параметр $u = \cos\theta$. Уточнить подмножества, которые должны пробегать θ и u для обеспечения взаимно однозначного соответствия.

2) Найти C_θ кривые, проходящие через точку $A\,(x_0,\ y_0)$. Провести исследование.

3) Найти множество кривых, проходящих через точку

$$B\,(x_1 = \lambda\sin\theta;\ \ y_1 = 2 - \cos\theta),$$

где λ дано (положить $\lambda = \operatorname{tg}\alpha$). Провести исследование.

(Будет выяснено, что результаты из 2) и 3) не противоречат друг другу!)

II. Геометрический пример

Упражнение: семейство подобий на плоскости. Даны две взаимно перпендикулярные прямые d и d', пересекающиеся в точке O. Положим

$$(d,\ d') = +\pi/2\ (\operatorname{mod}\pi).$$

Рассматриваются множества:

Γ: множество окружностей γ (центр C, радиус R), касающихся в точке O к прямой d'.

Γ': множество окружностей γ_1 (центр C', радиус R'), касающихся в точке O к прямой d.

$\mathcal{C}$ множество $\Gamma\times\Gamma'$ пар $(\gamma,\ \gamma')$.

Δ: множество прямых δ центров окружностей γ и γ' (прямые CC').

$\mathscr{S}$: множество подобий S (центр M, угол α, коэффициент k), которые преобразуют γ в γ'.

$\mathfrak{M}$: множество точек M центров подобий S, отличных от точки O.

Λ: множество геометрических мест λ точек M, соответствующих паре (γ, γ').

$\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{M}_1$; $\mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_2'$; $\mathfrak{M}_3$: множества точек M, соответствующих значениям $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = +\frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, α — произвольный данный угол.

$\mathfrak{M}_4$ и $\mathfrak{M}_5$: множества точек M, соответствующих значению $k = 1$ и некоторому произвольному значению k.

От скольких параметров зависит каждое из этих множеств?

Уточнить отображения, которые определяются между каждым из этих множеств и $\mathscr{C}$, указывая геометрические построения соответствующего элемента, если известно (γ, γ'), и обратно.

Обозначим b и b' биссектрисы угла (d, d') и T', T'' — точки, определенные условием $(T', T'') = \lambda \cap (b' \cup b'')$.

Для исследования множества $\mathfrak{M}_3$, может быть, будет полезно рассмотреть в каждом подобии точку предшествующую и последующую для точки O*.

УПРАЖНЕНИЯ ПО АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(простые примеры)

●

Упражнение 1. Даны: две прямые d и d' и две точки A и B. Рассматривается

1) прямая $\delta \ni A$; $P = d \cap \delta$; $Q = d' \cap \delta$;

2) прямая $\delta' \ni Q$; $\delta' \parallel AB$.

Исследовать множество точек $M = PB \cap \delta'$.

Обзор двух решений (заметим, что M зависит от параметра):

Первое исследование: аффинная геометрия

Гомотетия $\mathscr{H}$ с центром P.

Идея: рассмотреть предшествующую точку O' для точки O. Посмотреть, что неизменно. Вывод делается с помощью перспективы с центром B.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathscr{H}} & Q \\ B & \longrightarrow & M \\ O' & \longrightarrow & O \end{array}$$

Второе исследование: проективная геометрия, а потом аффинная.

Обобщить, заменяя $\delta' \parallel AB$ прямой $\delta' \ni C$, где C — фиксированная точка, коллинеарная с AB. Удалить с помощью перспективы прямую ABC в бесконечность и закончить исследование в аффинной геометрии (гомотетия с центром O).

---

* То есть прообраз и образ точки O. — *Прим. ред.*

Упражнение 2. Пусть в треугольнике ABC точка M — середина медианы BK, а D — точка $AM \cap BC$. В каком отношении D делит BC?

Первое исследование: проектировать на BC параллельно AM.
Второе исследование: проектировать на BC параллельно AC.
Третье исследование: проектировать на BK параллельно AC.
Четвертое исследование: проектировать на BC параллельно AB.
Пятое исследование: рассмотреть точку M, как центр тяжести тройки A, B, C с надлежаще выбранными коэффициентами.

Шестое исследование: рассмотреть бесконечно удаленные точки прямых фигуры и удалить в бесконечность прямую AMD или же прямую AB.

Седьмое исследование: использовать векторный счет (аналитическая геометрия), исходя из $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{j}$, или же $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{v}$. Обобщить.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОНЯТИЯ ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЫ

Любое математическое предложение содержит следующие составные части:

1. Описание некоторой ситуации S; речь идет об элементах некоторых определенных множеств.
2. Предположения: $H_1, H_2, \ldots, H_n$.
3. Заключения: $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

Внутреннее обратное предложение

Внутреннее обратное предложение в данной ситуации сохраняет ситуацию S. Некоторые из заключений C становятся предположениями вместо некоторых предположений H. Спрашивается, становятся ли эти исчезнувшие предположения заключениями.

Внешнее обратное предложение. Отправляясь от некоторых из старых предположений H и некоторых заключений C, определяем новую ситуацию S'. Спрашивается, является ли новая ситуация той же, что и старая ситуация, то есть является ли система аксиом ситуации S' эквивалентной системе аксиом ситуации S, снабженной предположениями H?

Элементарный пример (единственное условие, единственное заключение).

Предложение. 1) S — речь идет об окружности Γ с центром O, о двух точках A и B этой окружности и о некоторой точке M. Полагают: $(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}) = 2\alpha \pmod{2\pi}$.

2) Предположение: $M \in \Gamma$.

3) Заключение: $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$.

Внутреннее обратное предложение. Сохранить S; поменять местами предположение и заключение.

Заключение В ситуации S, $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi} \Leftrightarrow M \in \Gamma$.

Внешнее обратное предложение

1) Идет речь о двух точках A, B и об угле $\alpha \pmod{\pi}$.

2) Вывести, что существует окружность Γ, такая, что

$$(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi} \iff M \in \Gamma.$$

Упражнение. *Прямое исследование.* Пусть даны две параллельные прямые D, Δ и точка F. Речь идет о преобразовании $M \searrow\underline{\mathscr{C}}\nearrow M'$, таком, что точка M' получается, как образ точки E в такой гомотетии с центром в M, которая преобразует D в Δ. Образ некоторой кривой C обозначаем C'.

Исследовать C', если C является *a*) прямой, *b*) окружностью с центром в F. (Эти вопросы содержат внутренне обратное предложение потому, что речь идет о нахождении такого C', что $M \in C \iff M' \in C'$.)

Внешнее обратное предложение. Любое коническое сечение может быть определено как образ окружности при таком рассмотренном выше преобразовании.

Д о п о л н е н и е. Использовать это преобразование для исследования конических сечений (пересечение с прямой, касательные, асимптоты и т. д.). Вскрыть происхождение этого предложения, исходя из определения конических сечений на конусе вращения (рассмотреть вписанную сферу, касательную к плоскости сечения).

ЗАМЕЧАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ

●

Исследование очень общих структур (таких, как группа, кольцо, тело, векторное пространство, аффинная или проективная геометрия, метрическая евклидова геометрия) позволяет найти направление частных исследований, сразу же как только эти структуры распознаны в поставленной проблеме. Исследование частных ситуаций в классических случаях принимает две существенные формы, известные под названием «решение фигур» или «построение фигур».

Мы хотели бы выявить возможное единство метода при изложении этих вопросов.

А) Аксиоматическое исследование некоторой ситуации

Мы исследовали в этой работе наиболее важные элементарные ситуации *аксиоматическим методом.* Следует осознать его природу.

1. *Анализ.* Некоторая ситуация наглядно известна из физического или математического опыта неполно и недостаточно согласованно. Анализ ситуации выявляет свойства появляющихся здесь множеств (отношения, отображения). Заметим, что, желая ввести числа или евклидово пространство, мы могли бы ограничиться обращением к опыту современного читателя.

2. *Построение структуры некоторой ситуации.* Выбирается совокупность свойств, рассмотренных как существенные, которые формулируются явно, образуя *совокупность аксиом*; потом изучают следствия из аксиом, чтобы найти другие подмеченные свойства, а также открыть новые.

3. *Исследование.* *a*) Непротиворечивость *. Необходимо обеспечить *существование* элементов построенного множества, то есть обеспечить непротиворечивость.

b) Исследовать *единственность* построенного множества с точностью до изоморфизма (*категоричность множества аксиом*): так мы видели в одном упражнении существование неизоморфных колец, значит, аксиомы кольца составляют не категоричную систему; для уточнения кольца надо присоединить к этой системе дополнительные условия.

Метод, весьма близкий к вышеизложенному, используется для исследования самых незначительных вопросов.

В) Решение некоторой фигуры

Рассматриваемая ситуация определяется некоторыми *данными условиями*. Они вводят множества, зависящие от *числовых параметров*, так что каждый элемент определен некоторым числом или совокупностью чисел. Полагая известным множество этих чисел (данные a, b, ..., l), требуется *указать в явном виде вычисление* других чисел (*неизвестных* x_1, x_2, ... x_n).

1) *Анализ.* Выявить и обозначить параметры. Выделить независимые параметры, выразить соотношения с помощью неравенств (условных и безусловных) и равенств (уравнений). Это будет множество условий.

2) *Решение.* Отделяя данные от неизвестных, выбирают совокупность уравнений и неравенств для выполнения *решения.* Разрешенная система позволяет вычислить последовательно неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(a, b, c, \ldots, l); \\ x_2 = f_2(a, b, c, \ldots, l, x_1); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(a, b, \ldots, l, x_1, \ldots, x_{n-1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(a, \ldots, l) < x_1 < h_1(a, \ldots, l); \\ g_2(a, \ldots, l, x) < x_2 < h_2(a, \ldots, l, x_1). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3) *Исследование.* Убеждаемся, что решения *существуют* (непротиворечивость) и удовлетворяют всем неиспользованным при расчетах условиям задачи (совместность этих условий).

Кроме того, исследуется *единственность* решения.

---

* Употребителен также термин «совместность» (compatibilité), которым пользуется автор.— *Прим. ред.*

В заключение рассматриваются некоторые отношения между данными, чтобы выделить различные возможные ситуации.

С) Построение фигуры

Множества, введенные в задаче, не всегда все параметризованы численно. Предполагая известной некоторую систему элементов (данные), требуется указать *построение* других элементов (неизвестных).

1) Отношения уточняются с помощью числовых равенств и неравенств и с помощью соответствий известного типа между множествами.

2) Различая данные от неизвестных, выбирают совокупность таких условий, чтобы можно было «построить» неизвестные, исходя из данных; используют логическое правило: «объединению условий соответствует пересечение множеств, а неисключающей дизъюнкции условий соответствует объединение множеств». В чем заключается смысл слова «построить» в классической геометрии? Правило построения сводится к указанию порядка операций пересечения прямых, окружностей, плоскостей, сфер, определенных соответственно двумя, тремя, четырьмя точками (на этом пути мы не можем выйти за пределы аналитической геометрии первой и второй степени) *. Это обеспечивает существование элементов в смысле Платона.

3) *Исследование* (как в В).

Примеры.

В′) **Решение фигуры.** В практике можно, вообще говоря, оперировать триангуляцией и «решать» шаг за шагом. Чтобы воспользоваться гибкостью тригонометрических вычислений, удобно взять в качестве неизвестных один или несколько углов.

Отсюда важность с этой точки зрения задач, называемых «решением треугольников». Возьмем наугад один пример без особенностей, чтобы выявить метод.

Задача. Определить элементы треугольника ABC, удовлетворяющего условию $B = 2C$, если даны длина l стороны BC и значение k отношения высоты, выходящей из вершины A, к радиусу окружности, вневписанной в угол C.

Решение. Ситуация известна. Элементы, о которых идет речь: a, b, c, A, B, C, h_a, r_c. Система, выражающая условие задачи:

---

* Автор указывает на книгу Henri Lebesgue «Leçons sur les constructions géométriques» Gauthier — Villars. Paris, 1950. (Лебег, Лекции о геометрических построениях). На русском языке см.: Адлер А., Теория геометрических построений, изд. 3, Л., 1940; Клейн Ф., Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии, Казань, 1898. Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Геометрия, М., 1963.

Существование треугольника — *Определение элементов*

$$(2)\quad \begin{cases} (1)\ A+B+C=\pi; \\ (3)\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}; \\ a>0,\ A>0,\ B>0, \\ C>0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (4)\ a=h_a(\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} B); \\ (5)\ a=r_c\left(\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\right). \\ \text{специальное условие задачи} \\ (6)\ B=2C. \end{cases}$$

Данные:

$$a=l \quad (7)$$

и k, определенное уравнением, $h_a = kr_c$. (8)

2) Решение. Нет никакой симметрии. Исключаются длины. Главная неизвестная

$$u=\cos C. \tag{10}$$

Система для решения (9 уравнений, после введения u):

$$\begin{cases} (9)\ 2(k-1)u-(2-k)=0; & {}^1/_2<u<1; \\ (10)\ \cos C=u; & 0<C<\dfrac{\pi}{3}; \\ (11)\ B=2C; & (7),\ (2),\ (3),\ (4),\ (8). \\ (12)\ A=\pi-3C; & \end{cases}$$

3) *Исследование.* Если $4/3<k<3/2$, то имеем одно решение.

Замечание. Можно искать решение, приняв в качестве главных неизвестных стороны, а также искать некоторое геометрическое построение.

C′) **Примеры задач на построение.** (Было бы интересно модернизировать в смысле классификации и формы превосходную книгу Петерсена *, изданную на датском языке в 1866 году.)

Задача. Построить равносторонний треугольник ABC, если известны расстояния α, β, γ его вершин от одной данной точки O.

1) Анализ ситуации.

Дано: точка O и три длины. Указание: ввести три окружности

$$\begin{cases} OA=\alpha \Leftrightarrow A\in\Gamma_a; \\ OB=\beta \Leftrightarrow B\in\Gamma_b; \\ OC=\gamma \Leftrightarrow C\in\Gamma_c. \end{cases}$$

Идея: равносторонний треугольник $\Leftrightarrow$ вращение $\mathscr{R}\left(A, \pm\dfrac{\pi}{3}\right)$**.

---

* Датский геометр. Французское издание этой книги: Petersen J. Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques. Gauthier — Villars. Paris, 1880, стр. 111. (Перевод на французский язык O. Chemin.)— *Прим. ред.*

** То есть вращение вокруг точки A на угол $\pm\dfrac{\pi}{3}$.— *Прим. ред.*

Идея упрощения: найти прототип решения, выбрав одну вершину, например A, и направление угла $(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC})$.

2) Описание предполагаемого построения. Провести окружности Γ_a, Γ_b, Γ_c и выбрать точку $A \in \Gamma_a$. Построить окружность Γ'_c, образ окружности Γ_c при вращении $\mathcal{R}$. $B \in \Gamma'_c \cap \Gamma_b$, а C является прообразом B при вращении R.

Существование: единственное условие: $\Gamma'_c \cap \Gamma_b \neq \varnothing$. Соответствие условиям: построенные точки вполне удовлетворяют условиям.

3) *Исследование.* Число прототипов и множество решений.

Дополнение. Внешняя обратная задача: дан равносторонний треугольник ABC. Исследовать множество точек O, удовлетворяющих равенству $OA = OB + OC$.

ОБЗОР И УПРАЖНЕНИЯ ПО КИНЕМАТИКЕ
(кн. III, гл. III, § IV)

1. *Напоминание.*

Кинематика точки в математической форме — это дифференциальное исследование в пространстве R^3 точки, зависящей от параметра, называемого *временем.*

Движение точки M определено функцией $t \xrightarrow{f} \boldsymbol{OM}$.

Траектория — это кривая, образованная множеством положений точки M.

Скорость — это производная $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{OM})'$.

Ускорение — это $\boldsymbol{\Gamma} = (\boldsymbol{V})' = (\boldsymbol{OM})''$.

По отношению к системе отсчета имеем:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{V} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j} + z''\boldsymbol{k}.$$

Во внутреннем исследовании траекторию ориентируют геометрически и выбирают одну из ее точек в качестве начала. Точка M определена своей криволинейной абсциссой s, функцией от времени t.

Если касательные ориентированы в соответствии с выбранным на траектории направлением, то они являются носителями касательного единичного вектора $\boldsymbol{T}$, функцией от s:

$$\boldsymbol{V} = v\boldsymbol{T}.$$

На плоскости единичный вектор $\boldsymbol{T}$ определяет нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ (мы не исследуем его определение в пространстве среди всех нормальных векторов) и

$$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}) = \pm\frac{\pi}{2}; \quad \boldsymbol{\Gamma} = v'\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{N}.$$

Замечание об единицах. Имеются две основные независимые единицы длины и времени, а также две производные единицы скорости и ускорения. Для представления этих единиц выбирают длины. Производные порядка выше чем второго в классическую механику не вводятся. Классическая механика выводится из формулы Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\Gamma}$, которая вводит силу F и массу m.

Замечание. На ориентированной траектории движение называется *прямым*, если оно производится в положительном направлении ($v > 0$), и *обратным* в противном случае. Отметим, что часто рисуют *диаграммы*, то есть графики таких числовых величин, как меры s, v, γ, рассматриваемых, как функции от времени.

Теоретическое упражнение

1. Два вектора $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ являются функциями времени. Вычислить производную их скалярного произведения. Рассмотреть случай, когда $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$.

2. Пусть $\boldsymbol{V}$ — скорость движущейся точки. Доказать, что

$$|v| \nearrow \Leftrightarrow |(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma})| < \frac{\pi}{2}.$$

Говорят, что в этом случае движение *ускоренно*. В противном случае оно называется *замедленным*.

Основное классическое упражнение

Движение снарядов (рассматриваемых как точки) в пустоте. Ортонормальная система отсчета O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Последний вектор находится на восходящей физической вертикали. Единицы: метр, секунда. Закон ускорения: $\boldsymbol{\Gamma} = -g\boldsymbol{k}$, где $g \simeq 9{,}8$.
Начальные условия: для $t = 0$ имеем

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 = (v_0 \cos\alpha)\,\boldsymbol{i} + (v_0 \sin\alpha)\,\boldsymbol{j}.$$

1) Показать, что в общем случае движение происходит в одной плоскости и оно параболическое.

2) Пусть v_0 дано. Определить α так, чтобы траектория проходила через данную точку K (x_1, y_1).

Пример простого упражнения

Даны: длина a и угловая скорость ω, выраженная в радианах в единицу времени. Движение точки определено следующими формулами:

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \quad x = a\cos\omega t, \quad y = a(\sin\omega t - \cos\omega t).$$

1) Определить скорость и ускорение. Выразить их меры и уточнить их направления. Является ли движение ускоренным или замедленным?

2) Составить уравнение траектории в прямоугольных координатах. Распознать ее природу (Конические сечения, II, (5)).

2. *Движение недеформируемой фигуры* (кн. IV, ч. II, § 3, *D*). Мы ввели понятие о касательном движении в данный момент и предложили в качестве приложения исследовать движение «бумажной полосы», в результате которого появляется эллипс. Приведем другой пример.

Упражнение. Пусть некоторая фигура остается недеформируемой. Две ее прямые проходят соответственно через две фиксированные точки. Доказать, что каждая прямая фигуры либо проходит через фиксированную точку, как и первые две прямые фигуры, либо огибает некоторую окружность. Определить траекторию некоторой точки фигуры (полученная кривая называется улиткой Паскаля) и с помощью рассмотрения касательного движения определить касательную в траектории в заданной точке.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Начертательная геометрия представляет собой технику изображения пространственных фигур с помощью двух ортогональных проекций *. Эти проекции выполнены на двух взаимно перпендикулярных плоскостях, причем одна плоскость затем совмещается с другой, чтобы получить в одной и той же плоскости *эпюру*, объединяющую обе полученные после проектирования фигуры.

Мы не уточняем здесь ни терминологию, ни технические приемы. Мы указываем лишь на геометрические принципы. Каждая точка изображена парой своих проекций, парой точек, находящихся на прямой фиксированного направления (линия соединения).

Две кривые, проекции некоторой кривой, определяются по точкам, которые в силу теоретических исследований могут быть соединены без ошибок. Общий метод состоит в определении этих точек, с помощью пересечения фигуры семейством простых поверхностей, заметающих все пространство. В качестве таких поверхностей берутся плоскости фиксированного направления или иногда сферы, зависящие от одного параметра. Но естественно, что, когда речь идет об определении прямой, достаточно иметь две точки.

---

* Описанный автором метод называется методом Монжа. В начертательной геометрии употребляются и другие приемы изображений пространственных фигур. Например, аксонометрические проекции, проекции с отметками, перспектива и др. (см.: Н. Н. Крылов, П. И. Лобандиевский, С. А. Мэн, Начертательная геометрия, М., 1959). — *Прим. ред.*

Теоретическая точка зрения

1) Всякое свойство *проективное* или *аффинное* сохраняется в обеих проекциях.

2) Любое свойство плоской метрической геометрии сохраняется при проекции на параллельную плоскость. Такое расположение можно осуществить, меняя плоскости проекций или, что приводит к тому же, перемещая фигуру относительно этих плоскостей.

Правило построения получается простым, если изменять лишь одну плоскость проекции (сохраняя ортогональность) или же если выполнять лишь вращения вокруг осей, перпендикулярных к одной из плоскостей проекции.

3) Метрическая задача, касающаяся некоторой *плоской фигуры*, выполняется предпочтительно совмещением плоскости фигуры с одной из плоскостей проекций, то есть вращением вокруг следа плоскости фигуры, лежащего на той же плоскости проекций, на которую отбрасывают фигуру. Отображенная фигура может быть получена путем осевого аффинитета из проекции, что позволяет использовать коллинеарности после построения одной первой точки.

4) Одно замечательное свойство ортогональной проекции *прямого угла* позволяет рассматривать задачи о прямых, перпендикулярных к некоторой плоскости. Речь идет о двух прямых D_1 и D_2, ортогонально спроектированных в прямые d_1 и d_2 на плоскость P. Если имеется частная ситуация, когда одна из прямых, например D_1, параллельна плоскости проекции, то

$$D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2.$$

Менее часто используется внешняя обратная задача. Речь идет о прямых D_1 и D_2, проектирующихся ортогонально в прямые d_1 и d_2.

В этом случае

$$\left.\begin{array}{c} D_1 \perp D_2 \\ d_1 \perp d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow D_1 \text{ или } D_2 \text{ параллельны к плоскости проекций}$$

(не исключающее *или*).

Только практика дает возможность приобрести навыки в технике начертательной геометрии. Рекомендуется решать графические задачи на пересечение прямых и плоскостей, на углы, на расстояния.

Задачи на сферы или окружности приводят к построению эллипсов; в этом случае «бумажная полоса» полезна для быстрого получения многочисленных точек чертежа.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛЮСЬЕНН ФЕЛИКС

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ ИЗЛОЖЕНИИ