

Grundlagen der Atomphysik

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik

Von

Dr. phil. Hans Adolf Bauer

a. o. Professor der Technischen Hochschule in Wien

Mit 154 Abbildungen und 20 Zahlentafeln im Text



Springer-Verlag Wien GmbH

1938

Grundlagen der Atomphysik

Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik

Von

Dr. phil. Hans Adolf Bauer

a. o. Professor der Technischen Hochschule in Wien

Mit 154 Abbildungen und 20 Zahlentafeln im Text



Springer-Verlag Wien GmbH 1938

ISBN 978-3-662-36121-4

ISBN 978-3-662-36951-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-36951-7

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten

Copyright 1938 by Springer-Verlag Wien

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Vienna 1938

Vorwort.

In den ersten Monaten des Jahres 1937 hat der Verfasser im Rahmen des Außeninstitutes der Wiener Technischen Hochschule an zehn Abenden eine Vortragsreihe unter dem Titel „Grundlagen der Atomphysik“ abgehalten mit der Bestimmung, zur wissenschaftlichen Weiterbildung der Ingenieure beizutragen. Ihr Inhalt, der von einem Kreise von Ingenieuren, Physikern und Studenten mit größtem Interesse aufgenommen wurde, bildet den Gegenstand des vorliegenden Buches. Die spätere Niederschrift der Vorträge hat dazu geführt, daß manches ausführlicher behandelt und vieles ergänzt wurde, wobei insbesondere der inzwischen erzielte Fortschritt auf dem Gebiete der Kernphysik berücksichtigt worden ist und mehrere Abschnitte über den Aufbau der Linienspektren, über Atom- und Kernmagnetismus sowie über die magnetische Aufspaltung der Spektrallinien neu hinzugefügt wurden.

Schon bei der Abhaltung der Vorträge und ebenso in dem nun aus ihnen entstandenen Buche war der Verfasser bestrebt, die vorgebrachten Tatsachen nach Möglichkeit theoretisch zu begründen, da ohne Zweifel jede, wenn oft auch unvollkommene „Erklärung“, die die Einordnung einer neuen Erkenntnis in ein Gebäude bereits bekannter Erscheinungen und Begriffe ermöglicht, erst Sinn und Wert eines Lehrbuches bestimmt. Im Hinblick auf die moderne Quantenmechanik als letztes Ziel kann man gewissermaßen von einer Erkenntnis des atomaren Geschehens in *zwei* Stufen sprechen. Die *erste* beruht auf der Anwendung von Vorstellungen und Begriffen der klassischen Physik, die, wenn auch heute vielfach als unzulänglich erkannt, doch immer noch wegen ihrer besseren Vertrautheit und Anschaulichkeit einen gewissen heuristischen und besonders für den Anfänger nicht zu leugnenden Wert besitzen. Ihrer bedient sich der Verfasser im ersten und zweiten Teile des Buches, die über Teilchen- und Wellenstruktur der Materie handeln. Erst im dritten Teile, der die Vereinigung des Teilchen-

und Wellenbildes zum Gegenstande hat, wird die *zweite* Erkenntnisstufe zu erreichen versucht und jene Grundbegriffe und mathematischen Verfahren entwickelt, die die Quanten- bzw. Wellenmechanik von heute kennzeichnen. Da die vorliegende Schrift nur das Ziel einer ersten Einführung verfolgt, hat sich der Verfasser bei der Darstellung wellenmechanischer Rechnungen möglichste Beschränkung auferlegt, aber das Wenige doch so ausführlich und vollständig behandelt, daß eine Nachrechnung ohne weiteres möglich ist, wobei gewisse unvermeidliche Schwierigkeiten mathematischer Natur, die jeder Anfänger einmal überwinden muß, nicht geleugnet werden sollen. Wer sich aber der Mühe einer genauen Durchrechnung unterzieht, wird nicht nur den Eindruck gewinnen, den mathematischen Verfahren der Wellenmechanik nicht mehr fremd gegenüberzustehen, er wird auch so viele Kenntnisse erworben haben, um an der Hand ausführlicherer Werke — es sei hier vor allem auf den wellenmechanischen Ergänzungsband von A. Sommersfelds Standardwerk „Atombau und Spektrallinien“ (Fr. Vieweg, Braunschweig) hingewiesen — tiefer in die Quantenmechanik eindringen zu können.

Der Verfasser hat sämtliche Zahlenangaben dem neuesten Wissensstande unter Zugrundlegung der in Zahlentafel 1, S. 4, angegebenen Werte für das elektrische Elementarquantum e und das Plancksche Wirkungsquantum h angepaßt. Er war ferner bemüht, seine Ausführungen durch eine große Anzahl von Abbildungen lebendiger zu gestalten, wobei ihm neben eigenen Zeichnungen insbesondere Bilder aus dem ausgezeichneten „Lehrbuch der Physik“ von Grimsehl-Tomaschek (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin) zustatten gekommen sind, dem die Abbildungen 3, 17, 18, 19, 23, 30, 32, 39, 40, 64, 68, 75, 77, 87, 88, 93, 94, 98, 102, 126, 127, 132, 136 und 153, sowie die Zahlentafel 5 entnommen wurden. Bei Bildern aus anderen Werken wurde jeweils die Quelle angegeben. Die Abbildungen 53 und 55 verdankt der Verfasser dem freundlichen Entgegenkommen Dr. A. Bouwers (N. V. Philips' Glühlampenfabriken, Eindhoven, Holland), dessen demnächst erscheinender Schrift „Elektrische Höchstspannungen“ (Julius Springer, Berlin) sie entstammen. In diesem Zusammenhange sei auch noch auf die aus den Laboratorien der N. V. Philips' Glühlampenfabriken hervor-

gegangene, jüngst erschienene Delfter Dissertation „Radioactivity Induced by Neutrons“ von F. A. Heyn hingewiesen, in der zwei, auf dem S. 68 angegebenen (d, n)-Prozeß beruhende *Neutronengeneratoren* beschrieben werden, bei denen Deuteriumverbindungen (ND_4Cl , D_3PO_4), Be und Li als Neutronenquellen verwendet werden. Die genannte Schrift enthält auch eine nach den chemischen Elementen geordnete, am 15. April 1938 abgeschlossene Übersicht aller jener Reaktionen, die zur Erzeugung radioaktiver Kerne geführt haben (vgl. S. 64 ff.).

Für die Herstellung einer Mitschrift gelegentlich der ursprünglichen Vorträge, die den Ausgangspunkt für das vorliegende Buch bildete, sowie für wertvolle Anregungen beim Lesen der Korrekturbogen ist der Verfasser seinem Fachgenossen Dr. Ernst Rothe zu herzlichem Dank verpflichtet. Bei der Anfertigung der endgültigen Niederschrift hat den Verfasser seine Frau in dankenswerter Weise unterstützt. Besonders gedankt sei auch dem Verlag für die rasche und sorgfältige Drucklegung, sowie für das Entgegenkommen, das er gegenüber den Wünschen des Verfassers gezeigt hat.

Salzburg, im August 1938.

Dr. H. A. Bauer.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Die Teilchenstruktur der Materie	2
A. Die Elementarteilchen	2
1. Das (negative) Elektron e^- oder β -Teilchen	2
a) Elektronenladung	2
b) Elektronenmasse	5
α) Beschleunigung im elektrischen Längsfeld 5. — β) Ablenkung im elektrischen Querfeld 6. — γ) Ablenkung im magnetischen Querfeld 7.	
2. Das Positron (positive Elektron) e^+	8
3. Das Proton (Wasserstoffkern) ${}^1_1p \equiv {}^1_1H \equiv H^+$	13
4. Das Neutron (Element mit der Kernladung 0) 1_0n	14
5. Das Deuteron (Deuton, Deuteriumkern) ${}^2_1H \equiv {}^2_1D \equiv {}^2_1d$..	15
6. Das Alphateilchen (Heliumkern) ${}^4_2\alpha \equiv {}^4_2He \equiv He^{++}$	17
B. Die Strahlungs-(Licht-)Quanten (Photonen)	21
1. Der lichtelektrische Effekt (Photoeffekt)	24
2. Der Compton-Effekt	26
3. Umwandlung von Strahlung in Materie	29
C. Höhenstrahlung (kosmische oder Ultrastrahlung)	32
1. Mindestenergie eines lotrecht einfallenden, die Erdoberfläche erreichenden Ultraelektrons	34
2. Einfluß des magnetischen Feldes der Erde. Energie eines entlang des magnetischen Äquators eingefangenen Ultraelektrons	35
3. Höhen- und Tiefeneffekt	35
4. Geomagnetischer Breiteneffekt	37
5. Azimutaleffekt	37
6. Barometereffekt	38
D. Die zusammengesetzten Atomkerne	38
1. Feststellung der Kernarten durch Kanalstrahlenanalyse ..	38
a) Parabelmethode von J. J. Thomson	38
b) Der Massenspektrograph	40
c) Die chemischen Grundstoffe, ihre Entdeckung und ihre stabilen Isotope	46
2. Natürliche Radioaktivität	55
3. Künstliche Atomumwandlung	60

	Seite
a) Erzeugung stabiler Kerne	61
α) Der Impulssatz 62. — β) Der Energiesatz 62. —	
γ) Das Gesetz der Erhaltung der elektrischen Ladung 64.	
— δ) Beobachtete Umwandlungen 64.	
b) Erzeugung instabiler Kerne. Künstliche Radioaktivität.	68
c) Erzeugung energiereicher (hochgeschwinder) Protonen	
und Deuteronen	71
α) Elektrische Hochspannungsgeneratoren 71. — β) Hoch-	
spannungswechselfeld in Verbindung mit einem Magnet-	
feld 73.	
4. Aufbau der Kerne	77
5. Massendefekt, Bindungsenergie und Stabilität der Kerne.	81
a) Bindungsenergie des Deuterons	81
b) Bindungsenergie des Alphateilchens	82
c) Bindungsenergie der übrigen Kerne	82
6. Tröpfchenmodell und Energiefläche der Atomkerne. α -Teil-	
chenmodell	84
E. Das Atommodell von Lenard-Rutherford und Bohr-	
Sommerfeld. Die Linienspektren	88
1. Atommodell von N. Bohr mit ruhendem Kern	91
a) Das dritte Keplersche Gesetz	92
b) Die Quantenbedingung	93
c) Der Energiesatz	94
d) Die Frequenzbedingung	94
2. Das Bohrsche Atom mit mitbewegtem Kern	96
3. Sommerfeldsches Atom mit elliptischen Bahnen.....	98
a) Fassung mit konstanter Elektronenmasse	99
b) Fassung mit veränderlicher Elektronenmasse	101
4. Das Korrespondenzprinzip von N. Bohr	104
5. Gesetzmäßigkeiten der Röntgenlinien	107
6. Periodisches System der chemischen Elemente	110
7. Die Quantenzahlen des einzelnen Elektrons. Räumliche	
Quantelung und Elektronendrall	114
a) Räumliche Quantelung. Magnetische Quantenzahl	115
b) Elektronendrall. Spinquantenzahl.....	116
c) Ausschließungsprinzip von Pauli („Pauliverbot“)..	118
d) Elektronenanordnung in der Atomhülle	119
8. Quantenzahlen bei Mehrelektronensystemen	125
9. Aufbau der Linienspektren	127
10. Atom- und Kernmagnetismus	130
a) Bahnimpuls und magnetisches Moment eines kreisenden	
Elektrons	130
b) Mechanisches und magnetisches Spinmoment des	
Elektrons	132

	Seite
c) Der Atomstrahlversuch von O. Stern und W. Gerlach	132
d) Mechanische und magnetische Kernmomente	134
11. Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld	136
a) Einwirkung schwacher Magnetfelder (anomaler und normaler Zeeman-Effekt)	136
b) Einwirkung starker Magnetfelder (Paschen-Back-Effekt)	143
II. Die Wellenstruktur der Materie	145
A. Flüssigkeits- und Luftwellen	145
B. Ätherwellen	147
1. Sichtbares Licht	147
a) Strichgitter (eindimensionales Gitter)	150
b) Kreuzgitter (zweidimensionales Gitter)	150
2. Röntgenstrahlen	151
a) Röntgenröhren	151
b) Geschichtliches zur Wellenlängenmessung	152
c) Beugung am Raumgitter (Kristallgitter). Verfahren von M. v. Laue	155
d) Auswertung eines Laue-Bildes	157
e) Ermittlung der Gitterkonstanten bei kubischen Gittern	159
α) Das einfache kubische Gitter 160. — β) Das flächenzentrierte kubische Gitter 160. — γ) Das körperzentrierte kubische Gitter 162.	
f) Die Beugung am Raumgitter als Reflexion an Netzebenen	162
α) Das Drehkristallverfahren von W.H. und W.L. Bragg 167. — β) Das Kristallpulververfahren von P. Debye und P. Scherrer 171.	
C. Elektronen als Wellen	173
III. Die Vereinigung des Teilchen- und Wellenbildes in der Wellen-(Quanten-)Mechanik	179
A. Die de Brogliesche Gleichung	179
1. Die Lichtbrechung vom wellenmechanischen Standpunkt ..	180
a) Die Lichtbrechung nach der Emissionstheorie	180
b) Die Lichtbrechung nach der Wellentheorie	181
c) Die Vereinigung der Darstellung a) und b)	182
2. Verallgemeinerung auf ein beliebiges Massenteilchen. Begriff der Materiewelle	183
3. Anwendungen des Materiewellenbildes	184
a) Das ideale Gas	184
b) Das Bohrsche Wasserstoffatom	185
c) Die Brechung einer Materiewelle bei der Elektronenbeugung	185

	Seite
4. Das Massenteilchen als Wellengruppe (Wellenpaket)	187
5. Die Ungenauigkeitsbeziehung von W. Heisenberg	191
a) Ungenauigkeit der Ortsbestimmung	191
b) Ungenauigkeit der Impulsbestimmung	191
B. Die Schrödingersche zeitunabhängige Wellengleichung (Amplitudengleichung)	193
C. Quantisierung als Eigenwertproblem	196
1. Der harmonische Oszillator als Modell eines schwingenden, zweiatomigen Moleküls (schwingendes Hantelmodell)	197
2. Der starre Rotator als Modell eines rotierenden, zwei- atomigen Moleküls (rotierendes Hantelmodell).....	203
3. Anwendung auf die Bandenspektren	208
a) Rotationsbanden im langwelligen Ultrarot (30 bis 150 μ)..	210
b) Rotationschwingungsbanden im Ultrarot (1 bis 5 μ)..	211
c) S m e k a l - R a m a n - E f f e k t	213
4. Das Planetenelektron eines wasserstoffähnlichen Atoms .	217
a) $E < 0$ (Seitenstück zu den Ellipsenbahnen der Bohr- schen Theorie)	218
b) $E > 0$ (Seitenstück zu den Hyperbelbahnen der Bohr- schen Theorie)	221
D. Die Schrödingersche zeitabhängige Wellengleichung („Zeitgleichung“)	222
E. Ausbau der Wellenmechanik	224
1. Die Schrödingersche „Dichte“ (Wahrscheinlichkeits- dichte) und die wellenmechanische Deutung des Strah- lungsvorganges.....	224
2. Normierung und Orthogonalität der Eigenfunktionen ...	230
3. Linienintensitäten und Auswahlregel beim harmonischen Oszillator.....	231
Schrifttum für ergänzendes und gründlicheres Studium	236
Namenverzeichnis.....	239
Sachverzeichnis.....	242

Einleitung.

Die mit dem Bohrschen Atommodell verknüpfte, heute bereits klassisch gewordene *Quantentheorie* wird getragen von der Vorstellung der *Teilchenstruktur* der Atome und ihrer Bestandteile. Der Anwendbarkeit der für Massenzentren gültigen mechanischen Gesetze erscheinen keine Grenzen gezogen, sie werden auch für *atomare* Teilchen als gültig angenommen. Man redet von Elektronenbahnen in derselben Weise, wie man von Bahnen der Geschosse und Planeten redet. Daneben besteht ohne jede Beziehung die Vorstellung von *Wellen*, die insbesondere für das Licht und alle Strahlungsvorgänge im Äther gilt. Der *Photo-* und der *Compton-Effekt* zeigen zwar deutlich, daß gelegentlich auch dem Licht die Struktur von Teilchen (*Lichtquanten* oder *Photonen*) zukommt, doch kann man diese Merkwürdigkeit vom Standpunkt der klassischen Quantentheorie nicht verstehen. Erst die neue *Quanten-* oder *Wellenmechanik* vermag uns Rechenschaft über diese *Doppelnatur* des Lichtes zu geben, ja sie fordert sie sogar für die *gesamte Materie*, die uns bald in der Gestalt von Teilchen, bald in der von Wellen entgegentritt. Sie gibt uns dabei zugleich eine Anweisung, wann wir die eine oder die andere Erscheinungsform zu erwarten haben. Gerade in den *atomaren* Ausdehnungen liegt die *Gültigkeitsgrenze* der *klassischen* Mechanik, die — ähnlich wie die Strahlenoptik im Bereiche der Wellenlängen des Lichtes durch die Wellenoptik — im Bereiche der Atome durch die Wellenmechanik ersetzt werden muß. Eine eindrucksvolle Bestätigung erfährt diese Auffassung durch die Elektronenbeugung an Kristallen, die den Wellencharakter der Elektronen außer Zweifel setzt und damit die schon früher beim Licht erkannte Doppelnatur auch für atomare Teilchen offenbart.

Unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, soll die vorliegende Schrift in ihrem ersten Teil ein Bild von der *Teilchenstruktur* der Materie, in ihrem zweiten Teil ein Bild von ihrer *Wellenstruktur* entwerfen, während ihr dritter Teil die Vereinigung der beiden Vorstellungen „*Teilchen*“ und „*Welle*“ in der *Wellenmechanik* behandeln soll.

I. Die Teilchenstruktur der Materie.

A. Die Elementarteilchen.

(Zahlentafel I, S. 4.)

1. Das (negative) Elektron e^- oder β -Teilchen.

Dieses *negativ* geladene Elementarteilchen ist der Träger der *Kathodenstrahlung*, die bei der Untersuchung der Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen von W. Hittorf 1869 entdeckt und zuerst von ihm und später von J. Perrin, J. J. Thomson und vor allem von P. Lenard genauer erforscht wurde, wodurch ihr *Teilchencharakter* sichergestellt worden ist. Der Name „*Elektron*“ wurde 1881 von J. Stoney für das von H. v. Helmholtz zur Erklärung der Elektrolyse eingeführte „*elektrische Elementarquantum*“ vorgeschlagen und hat seit dem Erscheinen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz (1895) allgemeine Verwendung gefunden. Zur Kennzeichnung der besonderen Natur des Elektrons ist vor allem die Bestimmung seiner *Ladung* und *Masse* erforderlich.

a) **Elektronenladung.** Die Elektronenladung e — das *elektrische Elementarquantum* — ist sehr genau nach der von F. Ehrenhaft (1910) eingeführten *Schwebemethode* durch R. A. Millikan ermittelt worden (Abb. 1). Millikan hat Öl durch einen Zerstäuber fein zerteilt. Beim Austritt aus einer feinen Düse bei A erhalten die Öltröpfchen elektrische Ladungen. Sie treten sodann durch ein kleines Loch bei p in der oberen Platte eines waagrecht aufgestellten Kondensators MN zwischen dessen Platten. Die Beobachtung geschieht durch ein Fernrohr bei seitlicher Beleuchtung (Lichtbogen a). Durch Einschalten eines elektrischen Feldes kann man das Fallen der Tröpfchen verhindern und sie in *Schwebe* halten. Dies tritt ein, wenn die auf das betrachtete Tröpfchen

Zahlentafel 1. Elementarteilchen und Photonen.¹

Name des Teilchens, Entdecker und Jahr der Entdeckung	Zeichen	Ruhmasse in Gramm	Atomgewicht $m_0 = \frac{1}{16}$ 1 ME. = $1,661 \cdot 10^{-24}$ g	Elektrische Ladung in e. st. E. ($\text{cm}^2 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$)	Beobachter
<i>Elektron</i> (β -Teilchen): J. W. Hittorf, 1869 J. Perrin, 1895 P. Lenard, 1899	β, e^-	$m_e = (9,118 \pm 0,010) \cdot 10^{-28}$	$A_e = 0,000549$	$e = (4,805 \pm 0,005) \cdot 10^{-10}$ $-e$	
<i>Positron</i> : P. A. M. Dirac, 1928 C. D. Anderson, 1932	e^+	m_e	A_e	$+e$	
<i>Proton</i> (H^+ -Teilchen): Marsden, 1914	${}^1_1\text{H}$	$m_p = (1,673 \pm 0,010) \cdot 10^{-24}$ $m_H = (1,674 \pm 0,010) \cdot 10^{-24}$	$A_p = 1,00758 \pm 0,00002$ $A_H = 1,00813 \pm 0,00002$	$+e$	Bainbridge und Jordan
<i>Neutron</i> : J. Chadwick, 1932	${}^1_0\text{n}$	$m_n = (1,676 \pm 0,010) \cdot 10^{-24}$	$A_n = 1,00897 \pm 0,00006$	0	
<i>Deuteron</i> (Deuteron): H. C. Urey, F. G. Brickwedde, G. M. Murphy, 1932	${}^2_1\text{H}, {}^2_1\text{D}$	$m_d = (3,345 \pm 0,020) \cdot 10^{-24}$ $m_D = (3,346 \pm 0,020) \cdot 10^{-24}$	$A_d = 2,01418 \pm 0,00002$ $A_D = 2,01473 \pm 0,00002$	$+e$	Bainbridge und Jordan
α -Teilchen (Heliumkern): H. Becquerel, 1896	${}^4_2\alpha, {}^4_2\text{He}$	$m_\alpha = (6,647 \pm 0,040) \cdot 10^{-24}$ $m_{\text{He}} = (6,649 \pm 0,040) \cdot 10^{-24}$	$A_\alpha = 4,00279 \pm 0,00007$ $A_{\text{He}} = 4,00389 \pm 0,00007$	$+2e$	Bainbridge und Aston
<i>Photon</i> (Lichtquant, γ -Quant): M. Planck, 1900 A. Einstein, 1905	γ	$Masse m_\gamma = \frac{h\nu}{c^2} = 7,36 \cdot 10^{-48} \nu$ $h = (6,62 \pm 0,01) \cdot 10^{-27}$ erg. sec $c = (2,99774 \pm 0,00001) \cdot 10^{10}$ cm. sec ⁻¹	$A_\gamma = \frac{16 m_\nu}{m_0} = \frac{16 h\nu}{m_0 c^2} = 4,42 \cdot 10^{-24} \nu$ ν in Hertz (sec ⁻¹)	0	

¹ Die *Massenzahlen*, e , h und c nach „Tables annuelles des constantes et données numériques“, Paris, Hermann & Cie. 1937; die *Atomgewichte* nach M. Stanley Livingston und H. A. Bethe, Reviews of Modern Physics, 9, 380, 1937. Über das *Neutrino* s. S. 79.

so zeigt sich, wie aus Millikans zahlreichen Versuchen hervorgeht, daß die Ladung stets ein ganzzahliges Vielfaches n eines *Elementarquantums* e ist:

$$Q = n e. \tag{3}$$

Für die Größe dieser *Elementarladung* gilt gegenwärtig der verbesserte Millikansche Wert:

$$\begin{aligned} e &= (4,805 \pm 0,005) \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E. (cm}^{\frac{3}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}) = \\ &= (1,603 \pm 0,002) \cdot 10^{-19} \text{ Coul.} \end{aligned}$$

b) Elektronenmasse. Die *Masse* m des Elektrons wird aus der *spezifischen Ladung* $\frac{e}{m}$ gewonnen, die sich durch *elektrische* und *magnetische Ablenkung* von Kathoden- (Elektronen-) Strahlen ermitteln läßt (Kathodenstrahlrohr, Abb. 3).

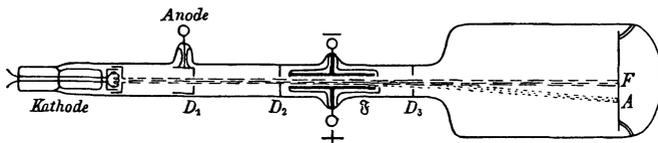


Abb. 3. Kathodenstrahlrohr (Braunsche Röhre).

α) Beschleunigung im elektrischen Längsfeld (Abb. 4). Durch die Spannung U_i zwischen der Kathode K und der durchbrochenen Anode A wird jedes aus der Kathode austretende Elektron mit der Masse m und der Ladung $-e$ beschleunigt

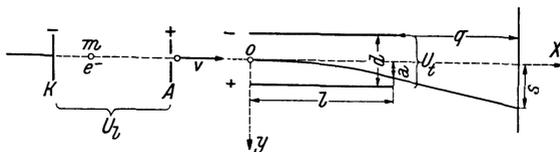


Abb. 4. Elektron im elektrischen Längs- und Querfeld.

bis zu einer Geschwindigkeit v , die sich aus der Energiegleichung: kinetische Energie = elektrische Energie

$$\frac{m}{2} v^2 = e U_i \tag{4}$$

berechnen läßt. Allerdings ist der Wert $\frac{m}{2} v^2$ nur für *langsame*

Elektronen ($v \ll c$) richtig; bei sehr *rasch* bewegten ändert sich die Masse (s. S. 8) nach der Formel:

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

(c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, m_e = Ruhmasse), und die kinetische Energie wird gleich $mc^2 - m_e c^2$ (gesamte mechanische Energie — Ruhenergie), so daß dann die *strenge* Formel gilt:

$$e U_t = (m - m_e) c^2. \quad (6)$$

Wir bleiben zunächst bei der angenäherten Gl. (4), aus der

$$\frac{\text{Geschwindigkeitsquadrat}}{\text{spezifische Ladung}} = \frac{v^2}{\frac{e}{m}} = 2 U_t \quad (4a)$$

folgt.

β) Ablenkung im elektrischen Querfeld (Abb. 4). Mit der Geschwindigkeit v fliegt das Teilchen in das Querfeld eines Kondensators mit der Transversalspannung U_t . In diesem Querfeld beschreibt es eine Parabel wie ein waagrecht geworfener Stein im Schwerfeld der Erde. Es erreicht dabei [s. das Koordinatensystem (x, y) in der Abb. 4] den Punkt (l, a) , wobei l die Länge des Kondensators, a die Strecke bedeutet, um welche das Teilchen abgelenkt worden ist. Dann fliegt es in der Richtung der Tangente weiter, bis es auf den Schirm S trifft, auf dem die Ablenkung s beobachtet wird. Die ganze Anordnung befindet sich in einer Vakuumröhre (Abb. 3). Das *elektrische Querfeld* liefert eine zweite Gleichung, die sich, wie folgt, gewinnen läßt.

In der x -Richtung beschreibt das Teilchen eine gleichförmige, in der y -Richtung eine gleichförmig beschleunigte Bewegung:

$$x = vt, \quad y = \frac{b}{2} \cdot t^2 = \frac{e U_t}{2 m d} \cdot t^2;$$

dabei ist nach der Formel: Beschleunigung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$

$$b = \frac{e U_t}{m d} \quad (7)$$

¹ Gl. (4) erscheint als erste Näherung von Gl. (6), wenn wir $(m - m_e) c^2$ im Hinblick auf Gl. (5) in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} (m - m_e) c^2 &= m_e c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = \\ &= m_e c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right) \approx \frac{m_e}{2} v^2. \end{aligned}$$

gesetzt worden. Es bedeutet e wie früher die Elektronenladung und d den Abstand der Platten des Kondensators. Die *Bahngleichung* lautet dann:

$$y = \frac{e U_t}{2 m d v^2} \cdot x^2; \quad (8)$$

sie ist die einer Parabel:

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad p = \frac{m d v^2}{e U_t} \text{ (Halbparameter).}$$

Als Gleichung der Tangente im Punkte (l, a) finden wir:

$$x l = p (y + a), \quad a = \frac{l^2}{2p}.$$

Am Schirm im Abstände q vom Kondensator ist $x = l + q$, also gilt:

$$(l + q) \cdot l = p (s + a),$$

woraus für die auf dem Schirm eintretende Ablenkung s des Strahles schließlich

$$s = \frac{l(l + 2q)}{2 m d v^2} \cdot e U_t \quad (9)$$

folgt. Man erhält so die zweite Gleichung:

$$\frac{v^2}{e} = \frac{l(l + 2q)}{2 d s} \cdot U_t, \quad (10)$$

die mathematisch zwar nichts Neues bietet, aber eine genauere Auswertung als Gl. (4a) gestattet, da sie für *beliebig schnelle* Elektronen gültig ist.

γ) Ablenkung im magnetischen Querfeld (Abb. 5). Eine weitere Gleichung liefert uns ein *magnetisches Querfeld*. Der Kondensator wird ausgeschaltet und statt dessen *senkrecht* zum Elektronenstrahl das Feld eines Elektromagneten mit bekannter Feldstärke H , gemessen in Γ (Gauß), eingeschaltet, das den Strahl zu einer Kreisbahn mit dem Halbmesser r krümmt, wobei die Zentrifugalkraft der magnetischen Kraft auf das Teilchen gleich sein muß:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{e}{c} v H, \quad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}. \quad (11)$$

Wir erhalten so nach Kürzung durch v die gesuchte Gleichung:

$$\frac{v}{e} = \frac{r}{c} \cdot H. \quad (11 a)$$

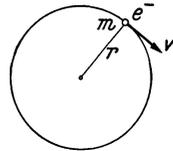


Abb. 5. Elektron im magnetischen Querfeld.

Aus den beiden Gl. (10) und (11a) sind v und $\frac{e}{m}$ zu bestimmen:

$$v = \frac{c l (l + 2q)}{2 d s r} \cdot \frac{U_t}{H}, \quad (12)$$

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 l (l + 2q)}{2 d s r^2} \cdot \frac{U_t}{H^2}. \quad (13)$$

Begonnen wurden die *Ablenkungsversuche* 1899 von Kaufmann und Wiechert. Neuere Messungen stammen von Kirchner (1932) und Dunnington (1933). Die *spezifische Ladung* $\frac{e}{m}$, als deren bester Wert für *langsame* Elektronen gegenwärtig $\frac{e}{m} = (5,2697 \pm 0,0009) \cdot 10^{17}$ e. st. E./g = $(1,7579 \pm 0,0003) \cdot 10^8$ Coul./g anzusehen ist, ändert sich bei diesen Versuchen mit der Geschwindigkeit v , also muß dies auch für die Masse m selbst gelten. Es läßt sich so die angegebene *Massenformel* der *Relativitätstheorie* experimentell bestätigen:

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

Je näher v der Lichtgeschwindigkeit c kommt, desto größer wird die Masse. Bis 99% von c reichen die Beobachtungen, wie aus der folgenden Zahlentafel 2 zu entnehmen ist.

Zahlentafel 2.

Durchlaufene Spannung U Volt	Geschwindigkeit v km/sec	Masse m g
0,01	59,5	$9,12 \cdot 10^{-28} = m_e$
10^2	$59,5 \cdot 10^2$	$9,12 \cdot 10^{-28} = m_e$
10^3	$18,7 \cdot 10^3$	$9,15 \cdot 10^{-28} = 1,003 m_e$
10^4	$58,5 \cdot 10^3$	$9,30 \cdot 10^{-28} = 1,02 m_e$
10^5	$16,5 \cdot 10^4$	$11,0 \cdot 10^{-28} = 1,2 m_e$
10^6	$28,3 \cdot 10^4$	$29,2 \cdot 10^{-28} = 3,2 m_e$
$3,1 \cdot 10^6$	$29,7 \cdot 10^4$	$64,6 \cdot 10^{-28} = 7,1 m_e$

2. Das Positron (positive Elektron) e^+ .

Schon im Jahre 1928 ist aus theoretischen Erwägungen von P. A. M. Dirac, einem Mitbegründer der heutigen Quantenmechanik, die Existenz eines *positiven* Teilchens, das sonst die gleichen Eigenschaften wie das Elektron besitzt, gefordert worden.

Aber erst 1932 ist es C. D. Anderson in *Pasadena* bei der Untersuchung der *Höhenstrahlung* (s. S. 32 ff.) mit Hilfe einer Wilsonschen *Nebelkammer* gelungen, das vorausgesagte *Positron* zu entdecken und seine Spur im Lichtbild festzuhalten (Abb. 8).

Die Einrichtung einer vom Verfasser angegebenen,¹ mit einfachen Mitteln herstellbaren *Nebelkammer* zeigen die Abb. 6 und 7

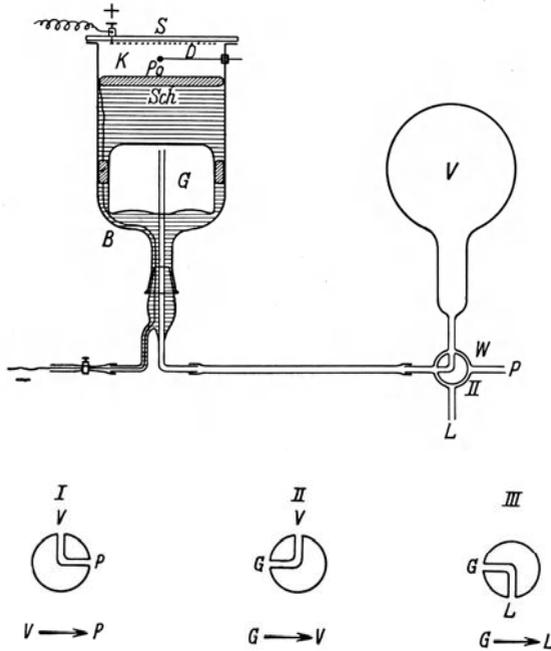


Abb. 6. Einfache Nebelkammer (schematisch) und aufeinanderfolgende Stellungen des Winkelhahnes W.

Ein zum Teil mit Wasser oder besser 50%igem *Wasser-Äthylalkohol*-Gemisch gefüllter, oben durch eine Spiegelglasplatte S mit Drahtnetz D abgeschlossener Glasbehälter B, der behelfsweise auch aus einer Woulfeschen Flasche mit zwei oder besser drei Hälsen hergestellt werden kann, enthält in seinem oberen Teil die Nebelkammer K, in der sich an einem Träger der radioaktive Körper R

¹ H. Bauer: Eine einfache Wilsonsche Nebelkammer. *Physikal. Ztschr.* **37**, 627 (1936); *Ztschr. math. naturwiss. Unterr.* **67**, 293 (1936), mit einer Aufnahme der Po- α -Strahlung vom Verfasser.

(z. B. Polonium oder Radiumsulfat) oder (auch in anderer Befestigung) die zu untersuchende Strahlungsquelle befindet. Unten wird die Nebelkammer durch einen mit leitender, geschwärzter Oberfläche versehenen Schwimmer *Sch* gegen die Flüssigkeit abgegrenzt. Im Inneren derselben ist eine mit Korkstückchen

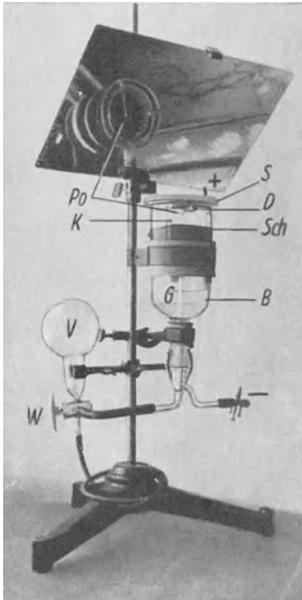


Abb. 7. Lichtbild der Nebelkammer mit Betrachtungsspiegel.

befestigte Glasglocke (Taucherglocke) *G* angebracht, die anfänglich mit Luft gefüllt ist und durch Verbindung mit einem früher luftleer gemachten Vakuumgefäß *V* entlüftet werden kann. Die Abbildung zeigt den Augenblick, in dem durch Drehen des Winkelhahnes *W* in die Stellung II dieser Vorgang eingeleitet wird. Das damit verbundene Eindringen von Flüssigkeit in die Glocke *G* hat ein jähes Sinken des Schwimmers *Sch* und damit eine *adiabatische Ausdehnung* der Luft in der Kammer *K* zur Folge. Die eintretende Abkühlung bewirkt Kondensation des in der Kammer enthaltenen gesättigten Flüssigkeitsdampfes an geeigneten *Kernen*, die in der Gestalt von *Gasionen* durch *Stoßionisation* immer neu gebildet werden. Bei entsprechender seitlicher Beleuchtung der Kammer *K* durch eine kräftige Lichtquelle können über dem dunklen Grund des Schwimmers die hellen *Nebelspuren*, die die durch die Kammer fliegenden, geladenen Teilchen (α -Teilchen, Elektronen usw.) hervorbringen, beobachtet und auch photographiert werden. Um stets nur die augenblicklich entstehenden Bahns Spuren verfolgen zu können, müssen die bereits früher gebildeten Gasionen beseitigt werden, was durch Anlegen einer elektrischen *Gleichspannung*, etwa der üblichen Netzspannung von 220 Volt, an Drahtnetz *D* und Schwimmer *Sch* erreicht wird.

Um Art der *elektrischen Ladung* und *Geschwindigkeit* eines die

Nebelkammer durchlaufenden Teilchens prüfen zu können, bringt man diese in ein *magnetisches Feld*, dessen Stärke um so größer gewählt werden muß, je massiger und geschwinder die zu

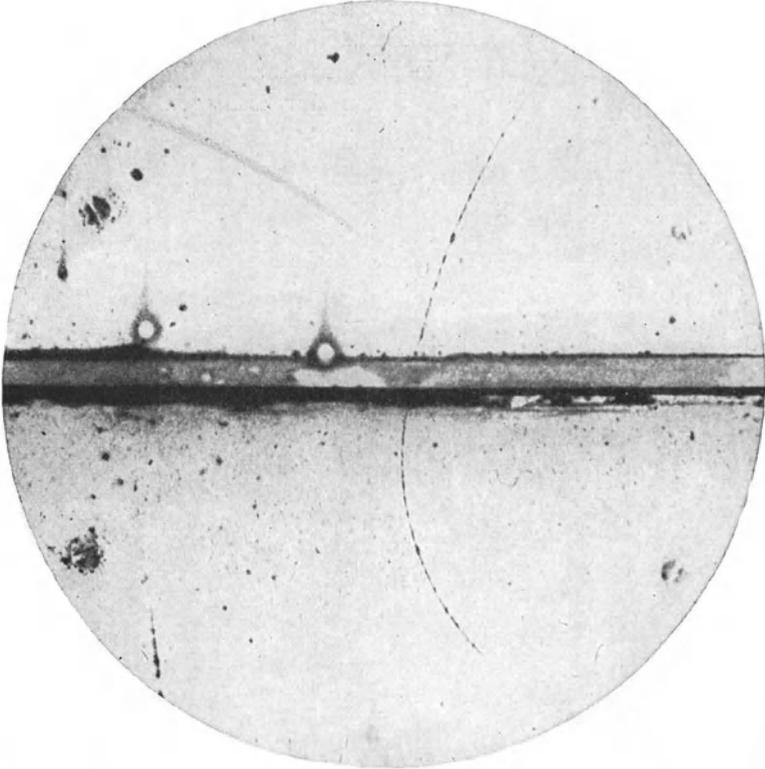


Abb. 8. Nebelkammeraufnahme eines Positrons im Magnetfeld (nach C. D. Anderson). Ein 63 eMV-Positron (schwach gekrümmte Bahn) durchsetzt eine 6 mm dicke Bleiplatte und verläßt sie als 23 eMV-Positron (stärker gekrümmte Bahn). Die Bahnlänge des letzteren ist mindestens 10 mal größer als die mögliche Länge der Bahn eines Protons, dessen Energie der vorhandenen Krümmung entspricht.

untersuchende Strahlung ist, wenn man noch eine merkliche Krümmung der Bahnen erzielen will. Dies geht unmittelbar aus der Gl. (11a) hervor, aus der sich für die *Krümmung*

$$\frac{1}{r} = \frac{eH}{cmv} \quad (11 b)$$

ergibt. Um die Bahnen der hochgeschwinden, durch die *Höhenstrahlung* (s. S. 32ff.) ausgelösten Teilchen zu krümmen, mußte Anderson Magnetfelder von 15000Γ verwenden. Es ist ihm dabei zum ersten Male geglückt, für eine Bahnspur den Nachweis zu erbringen, daß sie von einem *positiv* geladenen Elektron herührt. Dies gelang durch die Feststellung der Flugrichtung des Teilchens mit Hilfe einer die Nebelkammer abteilenden, 6 mm dicken *Bleiplatte*, die das Teilchen durchschlagen hatte. Der

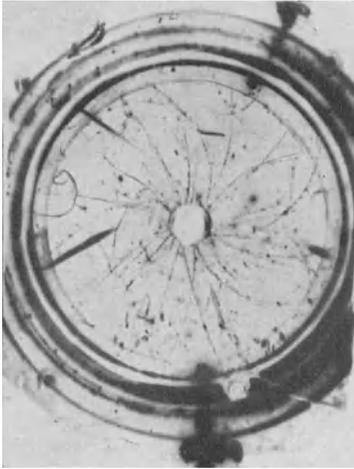


Abb. 9.



Abb. 10.

Nebelkammeraufnahmen von Elektronen und Positronen im Magnetfeld (R. Trattner).

mit dem Durchschlag verbundene Geschwindigkeitsverlust äußert sich in einer Vergrößerung der Bahnkrümmung nach dem Verlassen der Bleiplatte (Abb. 8). Die Flugrichtung im Verein mit der bekannten Richtung des Magnetfeldes gestattet so die *positive* Ladung des Teilchens einwandfrei nachzuweisen, dessen Spur im übrigen ganz den Charakter der Bahnen negativer Elektronen besitzt.

Entgegengesetzt gekrümmte, sonst völlig gleichartige Bahnspuren *positiver* und *negativer* Elektronen zeigen besonders deutlich die Abb. 9 und 10, die R. Trattner im Institut von G. Kirsch (Wien) unter Anwendung eines Magnetfeldes von etwa 350Γ

aufgenommen hat. In den Deckel einer Wilson-Kammer wurde ein Messingtopf dicht eingelassen (Abb. 11), der neben dem Alphastrahler *Polonium* (Po) auch *Beryllium* (Be) enthielt; durch die Alphastrahlen des Po wird aus dem Be eine sehr harte *Gammastrahlung* (daneben auch *Neutronen*) ausgelöst. Die Gammastrahlung durchdringt die Wand des Messingtopfes und trifft auf einen herumgelegten dünnen Bleimantel Pb, aus dem eine große Zahl von Elektronen und Positronen austreten. (In Abb. 9 befindet sich der Messingtopf in der Mitte, in Abb. 10 am Rande der Nebelkammer.) Demgemäß ist auf den Aufnahmen eine Fülle von Bahnen zu sehen. Ihre Krümmung ist infolge der sehr verschiedenen Geschwindigkeit der Teilchen natürlich verschieden; kommt ein Teilchen aus einem tieferliegenden Bleiatom, so hat es geringere Geschwindigkeit. Man bemerkt öfter entgegengesetzt gekrümmte Bahnen, die augenscheinlich von *einem* Punkt ausgehen und einen sogenannten „*Elektronenzwilling*“ (s. S. 29) darstellen. Das Positron scheint nur solange zu existieren, als es sich frei bewegt. Beim Auftreffen auf Materie vereinigt es sich gleich mit einem Elektron und verschwindet.

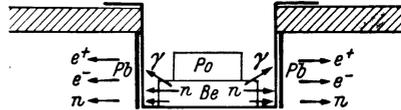


Abb. 11. Messingtopf mit Po und Be zur Erzeugung harter γ -Strahlen, die aus dem Bleimantel Pb Elektronen und Positronen auslösen. Neben der γ -Strahlung gehen von Be auch Neutronen aus.

nen zu sehen. Ihre Krümmung ist infolge der sehr verschiedenen Geschwindigkeit der Teilchen natürlich verschieden; kommt ein Teilchen aus einem tieferliegenden Bleiatom, so hat es geringere Geschwindigkeit. Man bemerkt öfter entgegengesetzt gekrümmte Bahnen, die augenscheinlich von *einem* Punkt ausgehen und einen sogenannten „*Elektronenzwilling*“ (s. S. 29) darstellen. Das Positron scheint nur solange zu existieren, als es sich frei bewegt. Beim Auftreffen auf Materie vereinigt es sich gleich mit einem Elektron und verschwindet.

3. Das Proton (Wasserstoffkern) ${}^1_1p \equiv {}^1_1H \equiv H^+$.¹

Wir haben in ihm das *leichteste* „*stoffliche*“ Teilchen vor uns, den *leichtesten Atomkern*, den Kern des Wasserstoffatoms. Er besitzt die elektrische Ladung eines positiven Elementarquantums e^+ und die abgerundete Masse 1 (wenn, wie üblich, als Masseneinheit der 16. Teil der Masse des Sauerstoffatoms gewählt wird), die etwa 1835 Elektronenmassen gleichkommt.

Die Feststellung dieser Eigenschaften kann wie bei den Elektronen durch Ablenkungsversuche mit Hilfe elektrischer und magnetischer Felder erfolgen (s. hierzu den späteren Abschnitt

¹ Der *obere Zeiger* (*Massenzahl*) bedeutet im folgenden stets die Anzahl der *Masseneinheiten* (ME), der *untere Zeiger* (*Kernladungszahl*) die Anzahl der *Ladungseinheiten* (Elementarquanten).

über Kanalstrahlenanalyse, S. 38 ff.). Man findet so für die *spezifische Ladung* des Protons

$$\frac{e}{m_p} = (95\,797 \pm 7) \text{ Coul./g},$$

woraus sich mit Rücksicht auf den Betrag des Elementarquantums e (S. 5) und der Elektronenmasse m_e (Zahlentafel 1) für die *Masse* m_p des Protons der Wert

$$m_p = (1,673 \pm 0,010) \cdot 10^{-24} \text{ g} = (1835 \pm 8) m_e$$

ergibt.

Während die Elektronenbahnen in der Nebelkammer perlenstrichartig erscheinen, sind die Protonenbahnen kräftiger, gleichmäßig, aber im Vergleich mit den Spuren der Alphateilchen verhältnismäßig dünn (vgl. die Abb. 14 und 47b). Man kann Protonenstrahlen dadurch erzeugen, daß man einen Alphastrahler mit einer *wasserstoffhaltigen* Substanz (z. B. Paraffin) umgibt, aus der die α -Teilchen Wasserstoffkerne herauschlagen (Marsden 1914). Dadurch entsteht eine H^+ -Strahlung, die weiter reicht als die Alphastrahlung (Abb. 14).

4. Das Neutron (Element mit der Kernladung 0) ${}_0^1n$.

Auf Wilson-Kameraaufnahmen, welche bei der oben (s. S. 13) besprochenen Anordnung die Bahnen von Elektronen und Positronen erkennen lassen, die durch die Gammastrahlung des mit Alphateilchen beschossenen Berylliums aus Blei erzeugt worden sind, beobachtet man bisweilen die merkwürdige Erscheinung, daß plötzlich irgendwo von einem Punkt *unter stumpfem Winkel zwei kurze Spuren* ausgehen, wovon die eine meist etwas länger ist als die andere (Abb. 46). Die Erklärung hierfür fand J. Chadwick (Cambridge, 1932). Die Alphateilchen lösen aus Beryllium nicht bloß Gammastrahlen, sondern auch *sehr durchdringungsfähige* Teilchen aus, die *keine Ladung* tragen und daher in der *Wilson-Kammer* nicht sichtbar sein können, die *Neutronen*. Sie sind imstande, *andere* Teilchen in Bewegung zu setzen und dabei zu *ionisieren*, so daß deren Bahnen dann in der Nebelkammer sichtbar werden. Energetische Überlegungen weisen darauf hin, daß es sich um *ungeladene Teilchen mit Wasserstoffmasse* handelt.

Zur Bestimmung der *Masse* dieser neuen Teilchen maß Chadwick in einer einmal mit *Wasserstoff*, einmal mit *Stickstoff* ge-

füllten Nebelkammer die kinetische Energie (und damit die Geschwindigkeit) der schnellsten H- bzw. N-Teilchen, die durch Neutronen derselben Quelle in Bewegung gesetzt worden waren. Unter der naheliegenden Annahme eines zentralen elastischen Stoßes liefert der *Impulssatz*,¹ wenn wir die bezüglichen Massen mit m_{H} , m_{N} und m_n und die zugehörigen Geschwindigkeiten vor dem Stoße mit c_{H} , c_{N} ($c_{\text{H}} = c_{\text{N}} = 0$) und c_n , diejenigen nach dem Stoße mit v_{H} , v_{N} und v_n bzw. v_n' bezeichnen, die beiden Gleichungspaare:

für den Stoß $n \rightarrow \text{H}$:

$$(m_{\text{H}} + m_n) v_{\text{H}} = 2 m_n c_n, \quad (m_{\text{H}} + m_n) v_n = (m_n - m_{\text{H}}) c_n;$$

für den Stoß $n \rightarrow \text{N}$:

$$(m_{\text{N}} + m_n) v_{\text{N}} = 2 m_n c_n, \quad (m_{\text{N}} + m_n) v_n' = (m_n - m_{\text{N}}) c_n.$$

Die ersten Gleichungen der beiden Paare ergeben für die gesuchte Neutronenmasse m_n und die Anfangsgeschwindigkeit c_n die Beziehungen:

$$m_n = \frac{m_{\text{N}} v_{\text{N}} - m_{\text{H}} v_{\text{H}}}{v_{\text{H}} - v_{\text{N}}}, \quad (14)$$

$$c_n = \frac{(m_{\text{N}} - m_{\text{H}}) v_{\text{H}} v_{\text{N}}}{2 (m_{\text{N}} v_{\text{N}} - m_{\text{H}} v_{\text{H}})}. \quad (15)$$

Aus Gl. (14) konnte Chadwick für m_n auf eine Masse von der Größe der *Protonenmasse* schließen. Auf die Tatsache, daß Neutronen auch *Kernumwandlungen* bewirken können, sei schon hier hingewiesen (s. S. 66 und 70f. sowie Abb. 46).

Elektron, Positron, Proton und Neutron stellen die *echten Urteilchen* dar.

5. Das Deuteron (Deuton, Deuteriumkern) ${}^2_1d \equiv {}^2_1\text{H} \equiv {}^2_1\text{D}$.

Wir haben es hier mit dem Kern des *schweren Wasserstoffes* zu tun, der auch *Deuterium* genannt wird. Er wurde sehr spät entdeckt, weil er nur in sehr geringer Menge neben dem gewöhnlichen Wasserstoff ${}^1\text{H}$ vorkommt. Der einwandfreie Nachweis

¹ Der Impulssatz drückt die *Erhaltung* des Impulses beim Stoßvorgang aus. Unter *Impuls* oder *Bewegungsgröße* versteht man das Produkt $m \cdot v$ aus Masse m und Geschwindigkeit v des Teilchens.

gelang Urey, Brickwedde und Murphy (1932) durch Untersuchung des Linienspektrums von angereichertem ^2H . Die Entdeckung wurde vorbereitet durch eine Überlegung von Birge und Menzel.

Die Bestimmung des Atomgewichtes von H auf *chemischem* Wege mit Bezug auf O = 16 hatte als besten Wert $A_{\text{H}} = 1,00777 \pm \pm 0,00002$ ergeben. Aston hatte durch *Massenspektroskopie* (s. S. 40 ff.) $A_{\text{H}} = 1,00778 \pm 0,00015$ erhalten. Birge und Menzel erkannten nun, daß, gerade weil die beiden Werte so gut übereinstimmten, etwas *falsch* sein müsse.

Die Bezugsnormale des Massenspektroskopikers ist nämlich ^{16}O , das Sauerstoffatom mit der genauen Massenzahl 16, diejenige des Chemikers aber eine *mittlere* Sauerstoffmasse, die sich auf das in der Natur vorkommende Gemisch der drei Isotope ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O bezieht, also ein wenig größer ist (O = 16,0035). Demgemäß muß zum Vergleich der Astonsche Wert erst auf die *chemische* Skala umgerechnet werden, was zum *kleineren* Wert $A_{\text{H}} = 1,00756$ führt. Im Hinblick auf die angegebene Fehlergrenze muß mit einer tatsächlichen Verschiedenheit der beiden Messungen für A_{H} gerechnet werden. Es liegt dabei nahe anzunehmen, daß der höhere Wert des Chemikers darauf zurückzuführen ist, daß der von ihm gemessene *natürliche* Wasserstoff in Wirklichkeit ein *Gemisch* von wenigstens zwei Isotopen ^1H und ^2H ist. Eine solche Annahme gestattet das *Mischungsverhältnis* der beiden Isotope zu berechnen, wofür sich

$$^1\text{H} : ^2\text{H} = 4700 : 1$$

ergibt. Das ist freilich noch kein Beweis für die Existenz des *schweren* Wasserstoffs ^2H .

Das *Experiment* mußte die Entscheidung bringen. 1932 fanden die genannten Forscher bei der Untersuchung des *Linienspektrums* von Wasserstoff neben der H_{α} -Linie einen ganz schwachen Begleiter D_{α} als Hinweis auf das *schwere Isotop*. Man hatte unter der Annahme dieses schweren Wasserstoffes in dem Präparat bereits eine Anreicherung des schweren Bestandteiles versucht. Dies gelingt z. B. durch *Verdampfen* von gewöhnlichem Wasser; das leichtere Wasser H_2O verdampft eher. Nach längerem Verdampfen ist der Gehalt des Rückstandes an D_2O größer geworden. Besonders erfolgreich erweist sich jedoch die *Elektrolyse* von

0,8 norm. NaOH, worin ^2H angereichert wird, bis man schließlich durch *Destillation* 0,12% D_2O erhält (Verfahren von Schwarz, Küchler und Steiner). Heute kann man praktisch *vollkommen reinen* schweren Wasserstoff durch *Diffusion* erzeugen. Dann zeigt sich im Linienspektrum die Linie D_α allein. Abb. 12 zeigt *beide* Linien und wurde dadurch gewonnen, daß bei der photographischen Aufnahme einmal das obere, einmal das untere Drittel der Platte abgedeckt wurde. Aus der *Linienverschiebung* (s. hierzu auch S. 98) und durch *Massenspektroskopie* (s. S. 40 u. Abb. 34) läßt sich die *Masse* m_{D} des *Deuteriums* und m_a des *Deuterons* bestimmen. Der gegenwärtig beste massenspektroskopische Wert für das Atomgewicht des Deuteriums (bezogen auf $^{16}\text{O} = 16$) beträgt nach Bainbridge:

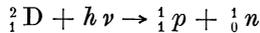
$$\text{woraus } A_{\text{D}} = 2,01473 \pm 0,00002,$$

$$m_{\text{D}} = (3,346 \pm 0,020) \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

und weiter

$$m_a = m_{\text{D}} - m_e = (3,345 \pm 0,020) \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

folgt. Das *Deuteron* ist *kein* echtes Urteilchen, sondern *zusammengesetzt*, wie durch den Umwandlungsvorgang:



(s. S. 68) bewiesen wird.

6. Das Alphateilchen (Heliumkern) $^4_2\alpha \equiv ^4_2\text{He} \equiv \text{He}^{++}$.

Die Alphastrahlung wurde als Bestandteil der *radioaktiven* Strahlung des *Urans* 1896 von H. Becquerel entdeckt. In der Nebelkammer zeigen α -strahlende Körper, z. B. das *Polonium*, einen hellen, scharf begrenzten Strahlenschein, wie wir ihn ähnlich an den Funken unserer Weihnachtssprühkerzen beobachten. Besonders schön zeigen die deutlich begrenzte *Reichweite* der α -Strahlen die Aufnahmen von L. Meitner und K. Freitag an $\text{Th C} + \text{C}'$ (Abb. 13 und 14). Daß alle von derselben Quelle ausgehenden Strahlen fast dieselbe Länge aufweisen (in Luft bei Normaldruck 3 bis 6 cm; Abb. 13 zeigt deutlich zwei verschie-

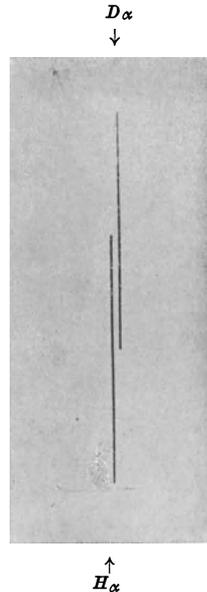


Abb. 12. Die Spektrallinien H_α und D_α (nach Hert z).

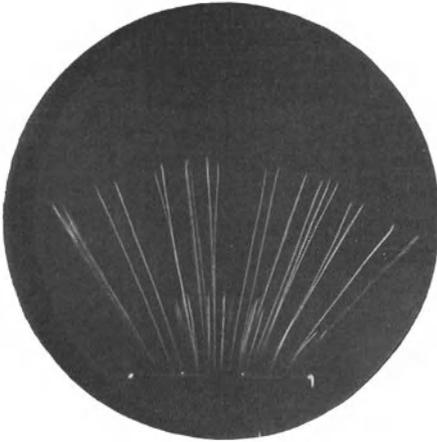


Abb. 13. α -Strahlen des ThC und C' mit zwei verschiedenen Reichweiten (L. Meitner und K. Freitag).

dene Reichweiten), läßt darauf schließen, daß die von derselben Atomart ausgeschleuderten Teilchen alle ungefähr dieselbe kinetische Energie besitzen, die sie durch die fortgesetzten Zusammenstöße mit Gasmolekülen alsbald einbüßen. Ihre *Durchdringungsfähigkeit* ist *sehr gering*, wie aus Abb. 14 zu erkennen ist, die die rasche Abbremsung der Strahlen durch eine dünne Paraffinschicht veranschaulicht. Diese Abbildung ist aber

noch in anderer Hinsicht bemerkenswert, weil sie zeigt, daß ein Teilchen beim Zusammenprall mit einem Paraffinmolekül aus diesem

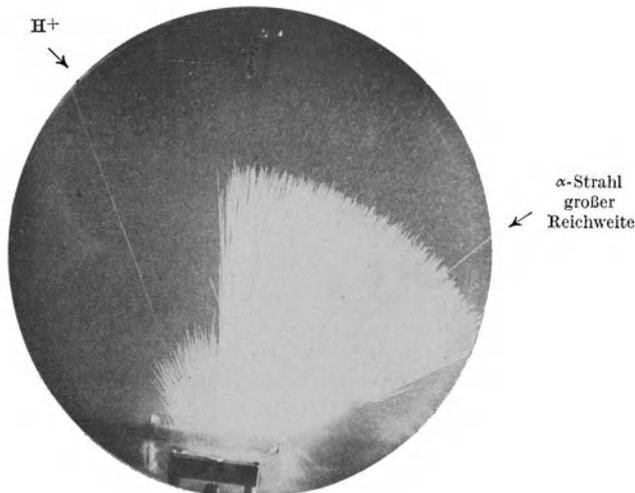


Abb. 14. H^+ -Strahl aus Paraffin bei Beschießung mit α -Strahlen (L. Meitner).

ein *leichteres* Teilchen (*Proton*) herausschlagen kann, dessen Reichweite etwa fünfmal so groß ist (s. S. 14). Gelegentlich zeigt sich am

Ende einer Alphabahn ein *Knick*. Der kleine *Fortsatz* an der Knickstelle läßt erkennen, daß dort ein *Zusammenstoß mit einem schweren Gasatom* erfolgt ist. Während sich das schwere, ionisierte Atom (O, N) nur ein ganz kleines Wegstück weiterbewegt, durchläuft das Alphateilchen noch eine längere Strecke (Abb. 15 und 16).

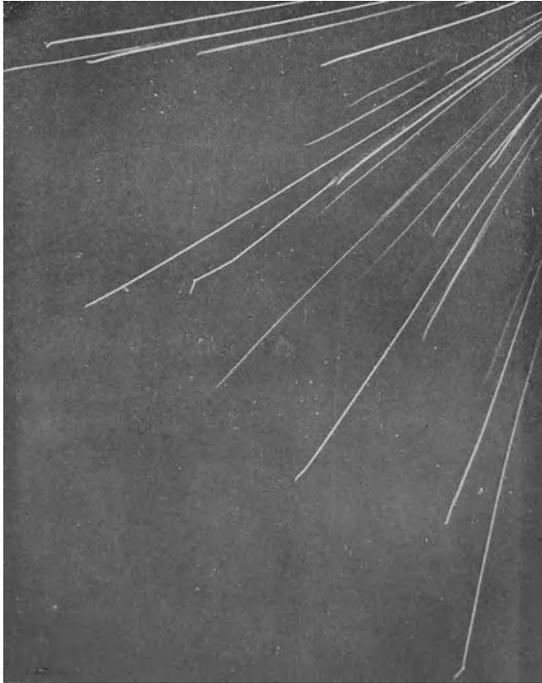


Abb. 15. Bahnen von α -Teilchen (C. T. R. Wilson). Streuung der Reichweite.

Zur Erforschung der Natur des Alphateilchens dienen:

a) die Bestimmung der *spezifischen Ladung* durch elektrische und magnetische Ablenkung. Man erhält so Verhältnis

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} = (48\,231 \pm 6) \text{ Coul./g} \approx \frac{e}{2m_p},$$

also etwa halb so groß wie beim Proton (s. S. 14). Um e_{α} und m_{α} selbst zu erhalten, bestimmt man direkt die Ladung;

b) die Messung der *Ladung* selbst durch Zählung der *Szintillationen* (Lichtblitze) auf ZnS (Sidotblende) nach Rutherford, Geiger und Regener (1908).

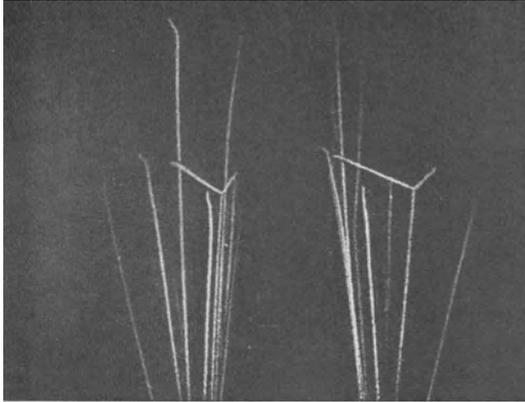


Abb. 16. Stereoaufnahme des Zusammenstoßes eines α -Teilchens mit einem Sauerstoffatom. Die längere Spur stellt die Rückstoßbahn des α -Teilchens, die kürzere die des Sauerstoffatoms dar (Rutherford-Chadwick-Ellis).

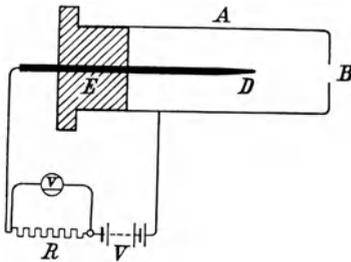


Abb. 17.
Geigerscher Spitzenzähler.

Metallrohr *A* mit Öffnung *B* zum Eintritt der geladenen Teilchen, durch einen Ebonitstopfen *E* von der Innenelektrode *D* (Grammophonmadel) isoliert. Spannung *V* etwa 600 bis 2000 Volt. Großer Überbrückungswiderstand *R* zur raschen Dämpfung der Stromstöße.

Die Teilchen werden mit Hilfe einer Lupe durch die von ihnen ausgelösten Lichtblitze gezählt (*Spintheriskop*) und die auf die Sidotblende übertragene Ladung gemessen. Eine andere, zuverlässigere Methode bedient sich des *Spitzenzählers* von Geiger 1913 (Abb. 17). Zwischen der Spitze *D* und dem äußeren Metallgehäuse *A* wird eine solche elektrische Spannung angelegt, daß noch keine selbständige Entladung einsetzt. Jedes bei *B* eintretende Alphateilchen aber macht die Luft durch *Stoßionisation* leitend und bewirkt einen Entladungsstoß be-

stimmter Stärke, der am Ausschlage eines Elektrometers beobachtet bzw. durch Anbringung eines Verstärkers hörbar gemacht

werden kann. Es zeigt sich so, daß die *Ladung* e_α des Alphateilchens *zwei positive* Elementarquanten beträgt, seine *Masse* m_α also das *Vierfache* der Protonenmasse ausmachen muß:

$$e_\alpha = 2 e, \quad m_\alpha = 4 m_p.$$

Jenes Element aber, das viermal so schwer wie H ist, ist He; also ist das Alphateilchen offenbar ein *Heliumkern*: ${}^4_2\text{He} \equiv \text{He}^{++}$. Die neueste Messung mit dem Massenspektrographen ergab, bezogen auf ${}^{16}\text{O} = 16$,

$$A_{\text{He}} = 4,00389 \pm 0,00007$$

(Bainbridge und Aston), woraus

$$m_{\text{He}} = (6,649 \pm 0,040) \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

$$m_\alpha = m_{\text{He}} - 2 m_e = (6,647 \pm 0,040) \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

folgt.

Auch das Alphateilchen ist *kein* echtes Urteilchen. Gewisse Kernumwandlungen von Li und B (s. S. 64 f. u. 68 o.) lassen seine *zusammengesetzte* Natur erkennen:

$${}^4_2\alpha = 2 \frac{1}{1}p + 2 \frac{1}{0}n \text{ oder } 2 \frac{2}{1}d.$$

B. Die Strahlungs-(Licht-) Quanten (Photonen).

Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes, seine Reflexion an spiegelnden Oberflächen, seine Brechung beim Übertritt in ein anderes Mittel erscheint mit der *Teilchenvorstellung* durchaus vereinbar, wengleich der zuletzt genannte Vorgang bereits auf eine grundsätzliche Schwierigkeit hinsichtlich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes führt (s. S. 180 f.). Bei allen Erscheinungen aber, wie *Interferenz*, *Beugung*, die wir heute gewohnt sind, als Ausdruck der *Wellennatur* des Lichtes aufzufassen, hatte die Vorstellung mechanischer Teilchen nach Art der Atome versagt. Dies war auch der Grund, warum die von Huygens begründete *Wellentheorie* des Lichtes der Newtonschen *Korpuskulartheorie* sehr rasch den Rang abließ und bis in die jüngste Zeit niemand an der Allgemeingültigkeit der Wellentheorie ernstlich gezweifelt hat.

Newton hat zwar selbst noch versucht, seine Lichtteilchen auch zur Erklärung von *Interferenzerscheinungen*, z. B. der nach

ihm benannten *Ringe*, geeignet zu machen und ihnen zu diesem Zwecke „fits“ („Launen“), das sind *Anwendungen*, zugeschrieben, die sie bald zu leichterem Durchgang, bald zu leichter Reflexion befähigen und sich *regelmäßig wiederholen*. Man könnte diese Teilchen mit *pulsierenden Wassertropfen* vergleichen, die bald eine längliche, bald eine breite Form haben, wie wir sie in Wasserstrahlen bei intermittierender Beleuchtung beobachten. In dem Versuch Newtons, seine *Emissionstheorie* mit Hilfe von „fits“ zu retten, können wir den ersten Schritt zu einer *semikorporkularen* Theorie der Strahlung erblicken, die uns die heutige *Wellenmechanik* in vollendeter Form beschert hat.

Schon die einfache Vorstellung pulsierender Teilchen erlaubt es, von einer *Frequenz* (*Schwingungszahl*) ν zu sprechen, wenn wir darunter die sekundliche Zahl der Pulsationen („fits“) verstehen. Wir können jedem Lichtteilchen auch eine „*Wellenlänge*“ λ zuordnen, die den während zweier aufeinanderfolgender Pulsationen zurückgelegten Weg des Lichtteilchens bedeutet. Bezeichnen wir in üblicher Weise die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit c , so gilt für ein im Vakuum bewegtes Lichtteilchen:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad c = 2,99774 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}. \quad (16)$$

Es liegt nahe, den verschiedenen Lichtteilchen je nach ihrer Farbe eine bestimmte, unterschiedliche Frequenz ν zuzuweisen und sie so in eindeutiger Weise zu kennzeichnen. Jedes solche Lichtteilchen wird je nach seiner mechanischen *Masse* m_ν mit einer bestimmten *Energie* E_ν und mit einem entsprechenden *Impuls* p_ν begabt sein, für die wir im Sinne der *Relativitätstheorie* den Ansatz machen:

$$E_\nu = m_\nu c^2, \quad p_\nu = m_\nu c. \quad (17)$$

Es erübrigt sich noch, m_ν bzw. E_ν mit der Frequenz ν des Lichtteilchens in Verbindung zu bringen, was wir im Sinne M. Plancks tun wollen, der 1900 aus Strahlungsrechnungen festgestellt hat, daß ein Lichtteilchen mit der Frequenz ν eine Energie

$$E_\nu = h \nu, \quad h = (6,62 \pm 0,01) \cdot 10^{-27} \text{ Erg sec} \quad (18)$$

¹ Der Gedanke, daß der *Strahlungsenergie* träge Masse zukommt, stammt von dem Wiener Physiker F. Hasenöhrli (1904).

Zahlentafel 3. Elektromagnetische Wellen (Strahlungsquanten).

Strahlenart	Wellenlänge λ	Wellenzahl $\omega = \frac{1}{\lambda}$ cm ⁻¹	Frequenz ν Hertz (sec ⁻¹)	Energie $E_\nu = h \nu$		Masse m_ν in Elektronen- massen m_e $\frac{m_\nu}{m_e} = \frac{h \nu}{m_e c^2}$
				in Erg	in eV ¹	
Rundfunkwellen	1 km = 10 ⁵ cm	10 ⁻⁵	3 · 10 ⁵	1,99 · 10 ⁻²¹	1,24 · 10 ⁻⁹	2,43 · 10 ⁻¹⁵
Hertzsche Wellen	10 cm	10 ⁻¹	3 · 10 ⁹	1,99 · 10 ⁻¹⁷	1,24 · 10 ⁻⁵	2,43 · 10 ⁻¹¹
Ultrakurze Wellen	10 ⁻¹ cm	10	3 · 10 ¹¹	1,99 · 10 ⁻¹⁵	1,24 · 10 ⁻³	2,43 · 10 ⁻⁹
Infra(ultra-)rote Strahlen .	10 μ = 10 ⁻³ cm	10 ³	3 · 10 ¹³	1,99 · 10 ⁻¹³	1,24 · 10 ⁻¹	2,43 · 10 ⁻⁷
Sichtbares Licht	0,5 μ = 5 · 10 ⁻⁵ cm	2 · 10 ⁴	6 · 10 ¹⁴	3,98 · 10 ⁻¹²	2,48 · 10 ⁰	4,86 · 10 ⁻⁶
Ultraviolette Strahlen	0,1 μ = 10 ⁻⁵ cm	10 ⁵	3 · 10 ¹⁵	1,99 · 10 ⁻¹¹	1,24 · 10	2,43 · 10 ⁻⁵
Röntgenstrahlen	1 m μ = 10 ⁻⁷ cm 1 Å = 10 ⁻⁸ cm	10 ⁷ 10 ⁸	3 · 10 ¹⁷ 3 · 10 ¹⁸	1,99 · 10 ⁻⁹ 1,99 · 10 ⁻⁸	1,24 · 10 ³ 1,24 · 10 ⁴	2,43 · 10 ⁻³ 2,43 · 10 ⁻²
Vernichtungsstrahlen	24,3 X = 2,43 · 10 ⁻¹⁰ cm	4,12 · 10 ⁹	1,24 · 10 ²⁰	8,20 · 10 ⁻⁷	5,12 · 10 ⁵	10 ⁰ = 1
γ -Strahlen	10 X = 10 ⁻¹⁰ cm	10 ¹⁰	3 · 10 ²⁰	1,99 · 10 ⁻⁶	1,24 · 10 ⁶	2,43 · 10 ⁰
Sehr kurze γ -Strahlen	1 X = 10 ⁻¹¹ cm	10 ¹¹	3 · 10 ²¹	1,99 · 10 ⁻⁵	1,24 · 10 ⁷	2,43 · 10
Photonen der Höhenstrahlung	0,01 X = 10 ⁻¹³ cm	10 ¹³	3 · 10 ²³	1,99 · 10 ⁻³	1,24 · 10 ⁹	2,43 · 10 ³

¹ Siehe die Fußnote auf S. 81f.

mit sich führt, wobei das Plancksche „*Wirkungsquantum*“ h eine für alle Lichtteilchen gültige Konstante bedeutet. Ein mit dieser Eigenschaft ausgestattetes Lichtteilchen wollen wir im folgenden ein *Lichtquantum* oder *Photon* nennen. Für jedes solche Teilchen gilt:

$$m_\nu = \frac{h \nu}{c^2}, \quad p_\nu = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (19)$$

mit Rücksicht auf Gl. (16).

Zahlentafel 3 gibt für einen weiten Bereich elektromagnetischer Strahlungsquanten Wellenlänge, Wellenzahl, Frequenz, Energie und Masse (ausgedrückt in Elektronenmassen m_e) an.

Die *Teilchennatur* des Lichtes (der Strahlung) wird besonders sinnfällig bei den *Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie*, zwischen *Photonen* und *Elektronen*.

1. Der lichtelektrische Effekt (Photoeffekt).

Wie zuerst Hertz (1887) und Hallwachs (1888) beobachteten und später Lenard (1902) genauer untersuchte, geben Metalle bei Bestrahlung mit *kurzwelligem* Licht Elektronen frei. Einstein hat diese Erscheinung 1905 gedeutet: Es handelt sich um eine Wechselwirkung zwischen je zwei Teilchen; jedes Photon wirkt auf ein ihm allein zur Verfügung stehendes Metallelektron derart, daß es durch die ihm innewohnende Energie $h \nu$ aus dem Metall freigemacht wird. Die kinetische Energie des Elektrons ist dabei etwas *kleiner* als der Betrag $h \nu$. Die *Energiedifferenz* wird erklärt durch die *Abtrennungsarbeit* A , die zur Befreiung (Ablösung) des Elektrons aus dem Metall erforderlich ist und nur einige eV (s. weiter unten) beträgt. Für *langsame* Elektronen gilt:

$$h \nu = \frac{m_e}{2} v^2 + A. \quad (16)$$

In strenger Fassung mit Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit [Gl. (5)] lautet die auch für *schnellste* Elektronen gültige Gleichung:

$$h \nu - A = (m - m_e) c^2 = m_e c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (17)$$

Die Geschwindigkeit der austretenden Elektronen wird nach Lenard mittels einer *Gegenspannung* gemessen, gegen die man

die Elektronen anlaufen läßt (*Gegenfeldmethode*, Abb. 18). Bei geringer Gegenspannung können sie an die Elektrode gelangen, bei größerer nicht mehr. Man ändert also die Spannung bis zu einem Betrage U_{\max} , wo kein Teilchen mehr gegen das Feld aufkommt. Dadurch erfährt man die *maximale kinetische Energie* der Elektronen, die gleich $e \cdot U_{\max}$ sein muß:

$$e \cdot U_{\max} = (m - m_e) c^2 \approx \frac{m_e}{2} v^2. \quad (18)$$

Zufolge Gl. (17) und Gl. (18) besteht zwischen der Spannung U_{\max} des Gegenfeldes und der Frequenz ν der Lichtquanten ein *linearer Zusammenhang*:

$$h \nu - A = e \cdot U_{\max}, \quad (19)$$

der experimentell mit größter Genauigkeit von Millikan (1916) bestätigt worden ist (Abb. 19). Für die Neigung der Geraden ergibt sich im Mittel:

$$\frac{h}{e} = 1,377 \cdot 10^{-17} \text{ abs. E.},$$

woraus mit Rücksicht auf $e = 4,805 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. im Mittel

$$h = 6,616 \cdot 10^{-27} \text{ Erg sec}$$

folgt, was mit dem S. 4 u. 22 angegebenen Wert sehr gut übereinstimmt. Die Gerade trifft ferner die ν -Achse bei $\nu = 4,39 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$. Wir errechnen hieraus im Hinblick auf Gl. (19) für $U_{\max} = 0$ die *Abtrennungsarbeit*:

$$A = 6,62 \cdot 10^{-27} \cdot 4,39 \cdot 10^{14} \text{ Erg} = 2,91 \cdot 10^{-12} \text{ Erg} = 1,82 \text{ eV}$$

(s. hierzu die Fußnote auf S. 81 f.).

Es gilt aber auch die *Umkehrung* von Gl. (19) für die *Erzeugung von Röntgenlicht* durch *Abbremsung* von Elektronen, die durch eine gewisse Spannung U (abs. E.) beschleunigt worden sind:

$$e U = (m - m_e) c^2 = h \nu_{\max}. \quad (20)$$

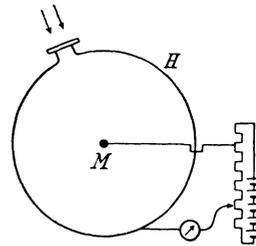


Abb. 18. Gegenfeldmethode mit kugelsymmetrischer Anordnung.

H leitende Hohlkugel, gegen die die aus M ausgelösten Elektronen anlaufen.

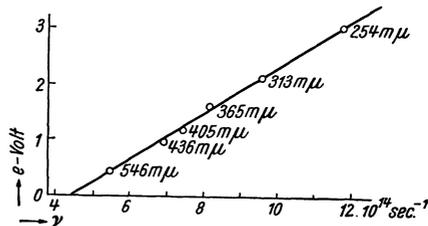


Abb. 19. Elektronenenergien in Abhängigkeit von der Frequenz.

Gemessen wird dabei die Spannung U an der Röntgenröhre; die wenigen Volt, die auf die Austrittsarbeit A entfallen, spielen gegenüber den vielen tausend Volt der Röhrenspannung keine Rolle. Die maximale Röntgenfrequenz (*Bremsstrahlungskante*) ν_{\max} ist spektroskopisch sehr genau beobachtbar; sie bestätigt in geradezu glänzender Weise diese Gleichung, wie Versuche von Duane, Palmer, Wagner u. a. ergeben haben („*Verschiebungsgesetz*“ für die Endkante des Röntgenspektrums).

2. Der Compton-Effekt (A. H. Compton, 1923).

Zum Unterschied vom Photoeffekte handelt es sich in diesem Falle um eine Wechselwirkung zwischen Photonen und den *locker gebundenen* Elektronen eines Streukörpers von kleinem Atomgewicht (z. B. Graphit), die wir in der folgenden Rechnung praktisch als *frei* ansehen dürfen (Abtrennungsarbeit $A = 0$).

Trifft ein Photon auf ein solches Elektron, so haben wir es mit einem *Stoßvorgang* zu tun. Das ruhend gedachte Elektron bekommt einen Impuls; das Photon verliert dabei Energie und vermindert infolgedessen seine Frequenz. Wir beobachten eine *Streuungsfrequenz* ν' , die kleiner ist wie die eingestrahelte Frequenz ν . Es gelten wie bei jedem Stoßvorgang die folgenden Sätze:

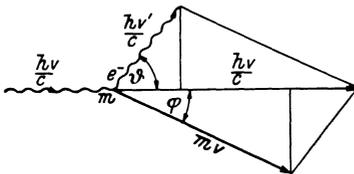


Abb. 20. Zusammenstoß eines Elektrons mit einem Photon (Compton-Effekt).

α) Der *Energiesatz*.

Eingestrahelte Energie = Streulichtenergie + kinetische Energie des Elektrons:

$$h\nu = h\nu' + c^2 \cdot (m - m_e). \quad (21)$$

Als *Näherungsgleichung* kann für *langsame* Compton-Elektronen

gesetzt werden.
$$h\nu = h\nu' + \frac{m_e}{2} v^2 \quad (22)$$

β) Der *Impulssatz*.

Aus Abb. 20 entnimmt man die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c} \cos \vartheta + m v \cos \varphi, \\ 0 &= \frac{h\nu'}{c} \sin \vartheta - m v \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

dabei ist gemäß Gl. (5)

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (24)$$

Quadrieren und Addieren der Impulssatzgleichungen ermöglichen zunächst die Elimination von φ :

$$\left(\frac{h\nu}{c^2} - \frac{h\nu'}{c^2} \cos \vartheta\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c^2} \sin \vartheta\right)^2 = m^2 \beta^2 = \frac{m_e^2 \beta^2}{1-\beta^2}$$

oder

$$\frac{h^2}{c^4} (\nu - \nu' \cos \vartheta)^2 + \frac{h^2 \nu'^2}{c^4} \sin^2 \vartheta = \frac{m_e^2}{1-\beta^2} - m_e^2.$$

Dazu liefert der *Energiesatz* Gl. (21):

$$\frac{h}{c^2} (\nu - \nu') + m_e = \frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Elimination von β bzw. $\frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und Division durch $\frac{h^2}{c^4}$ ergibt ferner:

$$\begin{aligned} (\nu - \nu' \cos \vartheta)^2 + \nu'^2 \sin^2 \vartheta &= \\ &= (\nu - \nu')^2 + \frac{2 m_e c^2}{h} (\nu - \nu') \end{aligned}$$

oder nach Ausrechnung der Quadrate:

$$\nu \nu' (1 - \cos \vartheta) = \frac{m_e c^2}{h} (\nu - \nu'),$$

wofür wir schließlich nach Division durch $\nu \nu'$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (25)$$

schreiben können.

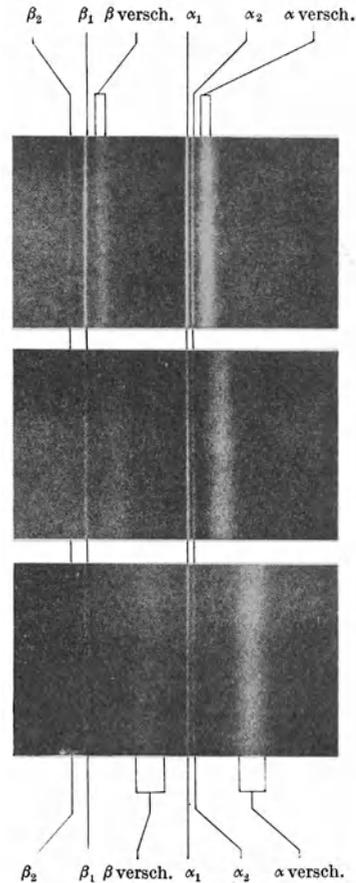


Abb. 21. Photographisches Spektrum des Compton-Effektes (nach du Mond). Streuwinkel: oben $63\frac{1}{2}^\circ$, in der Mitte 90° , unten 135° .

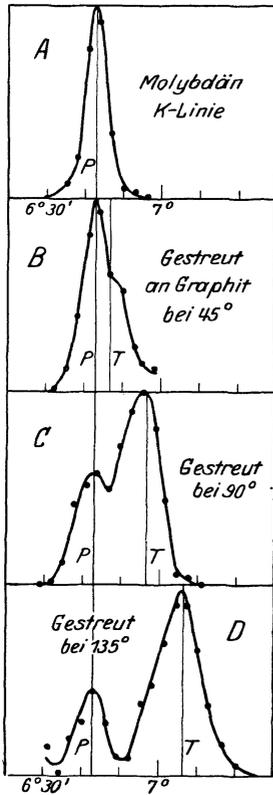


Abb. 22. Elektrometrisches Spektrum der Compton-Streuung an Graphit.

P unveränderte Wellenlänge (Primärlinie), T gestreute Wellenlänge (Comptonlinie).

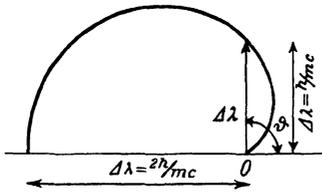


Abb. 23. Winkelabhängigkeit der Wellenlängenänderung beim Compton-Effekt.

Diese Gleichung kennzeichnet das Wesen des *Compton-Effektes*. Wir führen, um die Ausdrucksform noch zu vereinfachen, die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ein und berechnen $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ („*Compton-Verschiebung*“):

$$\Delta\lambda = c\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (26)$$

Durch die *Compton-Streuung* tritt eine *Vergrößerung der Wellenlänge* um den Betrag $\Delta\lambda$ ein, der nur vom Streuwinkel ϑ , nicht aber von der Wellenlänge λ des eingestrahelten Lichtes abhängt. Diese theoretische Folgerung wurde experimentell durch genaue Messungen bestätigt (Abb. 21 und 22). Trägt man den Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ als Funktion des Streuwinkels ϑ in Polarkoordinaten auf, so erhält man eine *Kardioide* (Abb. 23). Besonders genau fand so *Gingrich* (1930):

$$\frac{h}{m_e c} = (0,02424 \pm 0,00004) \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

oder

$$\frac{h}{m_e} = (7,270 \pm 0,001) \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Nimmt man das Wirkungsquantum h als bekannt an ($h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ Erg sec), so erhält man

$$m_e = 9,106 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis der *Ablenkungsversuche* (s. S. 8, Zahlentafel 2).

3. Umwandlung von Strahlung in Materie.

Wie zuerst Anderson (1932) und etwas später Blackett und Occhialini (1933) beim Durchgang von *Höhenstrahlung* durch eine Bleischicht beobachteten, kann es geschehen, daß sich ein *energiereiches Photon* in der Nähe eines Atomkerns, der einen Teil des Impulses aufnimmt, in einen „*Elektronenzwilling*“, d. h. in ein *positives* und ein *negatives Elektron* verwandelt. Curie und Joliot ist es erstmals 1934 gelungen, einen solchen Umwandlungsvorgang in einer Nebelkammeraufnahme festzuhalten (Abb. 24), wobei sie die sehr energiereiche γ -Strahlung von Th C' in Anwendung brachten. Während das von unten kommende Photon keine Spur hinterläßt, bemerkt man deutlich das unmittelbare Auftreten zweier, entgegengesetzt gekrümmter Bahnen (Aufnahme im Magnetfeld), die von der Umwandlungsstelle ausgehen: $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. Eine solche Umwandlung ist natürlich nur denkbar, wenn die Energie $h\nu$ des Photons *mindestens* gleich der



Abb. 24. Umwandlung eines Photons in einen „Elektronenzwilling“ Nebelkammeraufnahme im Magnetfeld von J. Curie und F. Joliot.

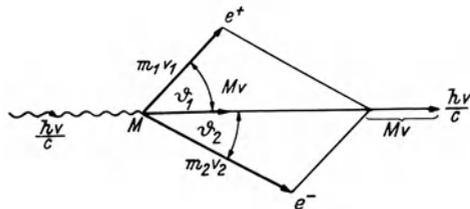


Abb. 25. Entstehung eines „Elektronenzwillings“.

$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. Eine solche Umwandlung ist natürlich nur denkbar, wenn die Energie $h\nu$ des Photons *mindestens* gleich der

Summe der Gesamtenergien der beiden Elektronen ist:

$$h\nu \geq 2m_e c^2 = 1,62 \cdot 10^{-6} \text{ Erg} \approx 10^6 \text{ eV} = 1 \text{ eMV}$$

(s. Fußnote, S. 81 f.).

Die Energie des Röntgenlichtes reicht hierzu nicht hin, wohl aber die der *Höhenstrahlung* (siehe Abschnitt C) oder der *Gammastrahlung* von Th C' (2,6 · 10⁶ eV) oder von Be (5 · 10⁶ eV). Bei γ (Th C') wurden Einzelelektronen mit Energien bis 2,5 · 10⁶ eV, *Zwillinge* jedoch nur mit Energien bis 1,6 · 10⁶ eV, bei γ (Be) *Positronen* mit Energien bis 4 · 10⁶ eV beobachtet. Der Unterschied beträgt in jedem Falle 10⁶ eV, die zur *Erzeugung des Zwillinges* erforderlich sind (Anderson, Chadwick, Blackett und Occhialini).

Eine einfache energetische Betrachtung zeigt, daß die Entstehung eines *Elektronenzwillinges* ohne die Mitwirkung eines impulsaufnehmenden Atomkernes M nicht denkbar ist. Zu diesem Behuf wollen wir uns vorstellen, daß sich der Impuls $\frac{h\nu}{c}$ des Photons im Augenblick der „Zwillingengeburt“ nicht nur auf die beiden Elektronen, sondern zum Teil auch auf den in unmittelbarer Nähe befindlichen, ruhend gedachten Kern von der *Ruhmasse* M_0 verteilt (Abb. 25). Der *Impulssatz* liefert dann ähnlich wie früher (S. 26 u.) die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= m_1 v_1 \cos \vartheta_1 + m_2 v_2 \cos \vartheta_2 + M v, \\ 0 &= m_1 v_1 \sin \vartheta_1 - m_2 v_2 \sin \vartheta_2, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

aus denen man durch Quadrieren und Addieren mit Berücksichtigung von

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (28)$$

die Beziehung

$$\left(\frac{h\nu}{c^2} - M\beta \right)^2 = m_1^2 \beta_1^2 + m_2^2 \beta_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

erhält. Daneben gilt der *Energiesatz*:

$$h\nu = (m_1 + m_2) c^2 + (M - M_0) c^2$$

oder

$$\frac{h\nu}{c^2} = m_1 + m_2 + M - M_0 \approx m_1 + m_2, \quad (29)$$

indem wir überlegen, daß die *Energieaufnahme* durch den Kern, die zu einer Änderung seiner Masse führen muß, jedenfalls nur *äußerst gering* und deshalb *vernachlässigbar* sein wird ($\beta \ll 1$):

$M \approx M_0$. Wir bilden nun

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h\nu}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c^2} - M\beta\right)^2 \approx \\ & \approx m_1^2(1 - \beta_1^2) + m_2^2(1 - \beta_2^2) + 2m_1m_2[1 - \beta_1\beta_2\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)], \end{aligned}$$

wofür wir mit Rücksicht auf Gl. (24)

$$m_1\sqrt{1 - \beta_1^2} = m_2\sqrt{1 - \beta_2^2} = m_e$$

$$\begin{aligned} M\beta\left(\frac{2h\nu}{c^2} - M\beta\right) & \approx \\ & \approx 2m_e^2 + 2m_1m_2[1 - \beta_1\beta_2\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)] > 0 \quad (30) \end{aligned}$$

schreiben können. Aus dieser Beziehung geht aber bereits mit aller Deutlichkeit hervor, daß

$$0 < \beta < \frac{2h\nu}{Mc^2} \approx 2\frac{m_1 + m_2}{M} < \frac{m_1 + m_2}{918m_e} \quad (31)$$

sein, *der Kern also Impuls*, wenn auch sehr wenig, *aufnehmen muß*, soll die Entstehung eines Elektronenzwillings überhaupt möglich sein.

Auch den *umgekehrten* Vorgang finden wir verwirklicht. Durch *Verschwinden eines Positrons* tritt *Gammastrahlung* auf. Man spricht von einer *Vernichtungsstrahlung* des Positrons. Das Positron ist nur losgelöst von der übrigen Materie existenzfähig und beobachtbar. Es verschwindet sofort beim Zusammentreffen mit Materie. Wir haben uns dabei vorzustellen, daß es sich mit einem verfügbaren Elektron vereinigt, das gleichzeitig verschwindet. Die Summe der Energien beider beträgt (S. 30) etwa 1 eMV; als Strahlung treten in der Tat nach Beobachtungen von Joliot und anderen entweder 2 γ -Quanten von je 500 ekV oder 1 γ -Quant von etwa 1 eMV auf.

¹ Da offenbar $M \geq m_{\text{H}} = 1836 m_e$ ist.

C. Höhenstrahlung (kosmische oder Ultrastrahlung).

Wir schicken einen kurzen geschichtlichen Überblick voraus. 1785 entdeckte Coulomb die sogenannte *natürliche Zerstreuung*, derzufolge jedes aufgeladene und sich selbst überlassene Elektroskop seine Ladung allmählich an die umgebende Luft verliert. Wir wissen heute dank den Untersuchungen von Elster und Geitel, C. T. R. Wilson u. a., daß diese Erscheinungen auf die *Ionisation der Luft* durch β - und γ -Strahlen, die aus den obersten Bodenschichten (*Erdsstrahlung*) sowie von den *radioaktiven Gasen* (Ra-, Th- und Ac-Em) der Luft (*Luftstrahlung*) stammen, zurückzuführen sind.

Diese *radioaktiven Strahlen* können durch Bleipanzern abgeschirmt werden. Gleichwohl konnten 1902 Rutherford und Cooke, McLennan und Burton feststellen, daß auch innerhalb dicker Bleipanzern eine Entladung stattfand. Damit war das Vorhandensein einer „*durchdringenden Strahlung*“ erkannt.

Untersuchungen 1909/10 von Wulf auf dem 300 m hohen Eiffelturm und von Gockel im Freiballon bis 4000 m Höhe ließen eine *unbekannte Zusatzstrahlung* in größeren Höhen vermuten.

In den Jahren 1911 bis 1913 stellte V. F. Heß bei Ballonfahrten bis 5000 m Höhe eine Zunahme der Strahlung mit der Höhe fest und wies auf den *außerirdischen* Ursprung derselben hin.

1913/14 bestätigte Kolhörster die Heßschen Angaben bis 9400 m Höhe. Er erkannte die große *Durchdringungskraft* der Strahlen und schrieb ihnen *kosmischen* Ursprung zu. Von ihm stammt die Bezeichnung *Höhenstrahlen*.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen tauchte sodann die Frage auf: Sind diese außerirdischen Strahlen *Wellen-* oder *Teilchenstrahlen*? Es wurden, beiden Erscheinungsformen Rechnung tragend, die Namen *Ultragamma-* bzw. *Ultrabetastrahlung*, allgemein *Ultrastrahlung* vorgeschlagen.

1927 führten Geiger und Müller das *Zählrohr*, Skobelzyn die *Nebelkammer* als Beobachtungsmittel ein. Dadurch wurde alsbald die *Teilchennatur* der *Primärstrahlen* sichergestellt und ihre *Koinzidenzfähigkeit* (s. u.) erwiesen.

Die Höhenstrahlung steht offenbar in nahem Zusammenhang

mit der *Nordlichterscheinung*. Die Teilchen, welche das *Polarlicht* erregen, gehören wohl auch zu jenen, die wir als *Höhenstrahlen* beobachten. In diesem Sinne ist die Birkeland-Störmersche *Polarlichttheorie* von Störmer selbst und anderen auf die Höhenstrahlung ausgedehnt worden. Als *sekundäre* Strahlung erzeugen die Ultrastrahlteilchen (e^+ , e^- , p , α) beim Zusammenstoß mit

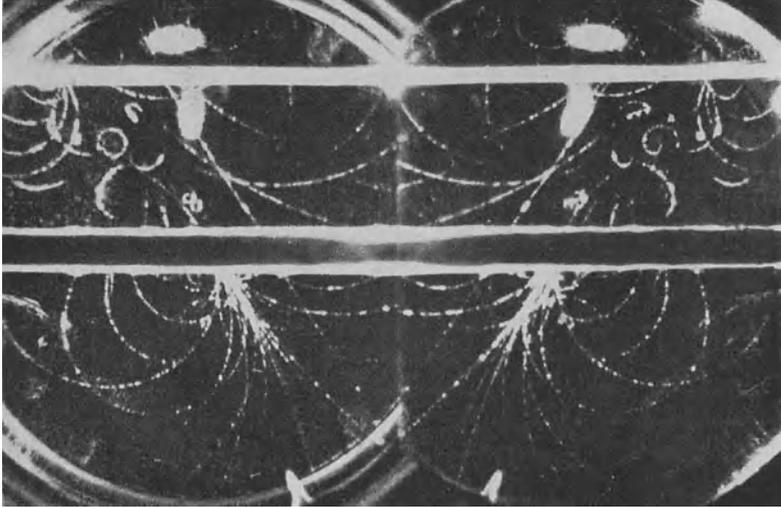


Abb. 26. Stereoaufnahme eines Schauers von Elektronen und Positronen nach dem Zählrohrkoinzidenzverfahren (nach C. D. Anderson).

Magnetfeld 17 000 Gauß. Der aus der unteren Bleiplatte ausgelöste Schauer besteht aus 15 Elektronen und 7 Positronen. Eine Positron von 520 eMV durchsetzt beide Bleiplatten.

Luftteilchen *Photonen*. Letztere bringen beim Auftreffen auf Bleiatome ganze *Schauer von Positronen und Elektronen*, darunter häufig *Zwillinge* hervor. Anderson hat *Wilsonkammer*-Aufnahmen von solchen durch einen Ultrastrahl hervorgerufenen *Schauern* gemacht (Abb. 26). Damit die Bahnen der mit ganz gewaltigen Energien fliegenden Teilchen überhaupt gekrümmt werden, mußte er *sehr starke Magnetfelder* (17 000 Gauß) anwenden. Um nicht aufs Geratewohl zu photographieren und eine bessere Ausbeute zu erzielen, wurden Nebelkammer und Kamera automatisch gesteuert, und zwar durch die Stromstöße, die ein Ultrastrahl in einem über und einem unter der Nebelkammer angebrachten

Zählrohr hervorruft; es erfolgte so die Auslösung von Expansion und Belichtung durch *Zählrohrkoinzidenzen*. Die aus den Bahnkrümmungen berechneten Energien der Ultraelektronen liegen über 10^9 eV.

Wir wollen im folgenden einige einfache Betrachtungen über Energieinhalt und Eigenschaften der Höhenstrahlteilchen anstellen.

1. Mindestenergie eines lotrecht einfallenden, die Erdoberfläche erreichenden Ultraelektrons.

Ein Bild von der Energie eines solchen Elektrons kann man sich schon durch eine ganz einfache Rechnung machen. Das Teilchen muß die Atmosphäre durchstoßen. Es erzeugt dabei Ionen und verliert dadurch Energie. In *Normalluft* entstehen durch einen Ultrastrahl 150 Ionenpaare je Zentimeter, wie man aus der Aufladung von Spitzenzählern errechnet hat. Zur Herstellung eines I ($I = 1$ Ionenpaar) sind ungefähr 30 eV erforderlich. Wir fragen nach der *Zahl der Ionenpaare*, die ein Ultraelektron beim Durchdringen der Atmosphäre erzeugen muß, und weiter nach der *Mindestenergie*, die es dazu befähigt. Zu diesem Zwecke muß die *Höhe der Atmosphäre* auf jene von Luft von *Normaldruck* umgerechnet werden. Für die Höhe einer entsprechenden Atmosphäre von Normalluft finden wir:

$$H = \frac{p_0^1}{s_0} = \frac{1033}{1.293} \cdot 10^3 \text{ cm} = 799 \cdot 10^3 \text{ cm} \approx 8 \text{ km.} \quad (32)$$

Daraus ergibt sich für die *Mindestenergie* des Teilchens bei lotrechtem Einfall:

$$E_{\min} \approx 150 \frac{I}{\text{cm}} \cdot 30 \frac{\text{eV}}{I} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ cm} = 3,6 \cdot 10^9 \text{ eV.} \quad (33)$$

Das ist eine Energie, die wesentlich größer ist als jene, welche wir gegenwärtig in unseren Laboratorien erzeugen können. Da aber häufig mit dem Durchdringen der Luft die Energie des Ultrateilchens noch nicht aufgezehrt ist, muß seine Energie sicher größer als $3,6 \cdot 10^9$ eV gewesen sein. Teilchen mit kleinerer Energie können die Erdoberfläche überhaupt nicht erreichen.

¹ $p_0 = 1033 \frac{\text{g}^*}{\text{cm}^2}$ bedeutet den normalen Luftdruck,

$$s_0 = 1,293 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{g}^*}{\text{cm}^3}$$

das spezifische Gewicht von Normalluft.

2. Einfluß des magnetischen Feldes der Erde. Energie eines entlang des magnetischen Erdäquators eingefangenen Ultralektrons.

Wir berechnen zunächst die *Kraft des Erdmagnetes* (Abb. 27), dessen *Feldstärke* H wir in Äquaturnähe gleich $\frac{1}{3}$ Gauß setzen können, auf das *tangential* ankommende Ultrateilchen (Abb. 5, S. 7). Soll das Elektron in den Bann des Erdmagnetes gezogen werden, so muß seine *Fliehkraft* gleich der *magnetischen Kraft* der Erde [s. Gl. (11)]

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{e}{c} v \cdot H,$$

also

$$m = \frac{e H r}{v c} \quad (34)$$

sein. Für die *Energie* des Ultrateilchens folgt daraus:

$$E = m c^2 = \frac{c}{v} e H r. \quad (35)$$

Wir setzen die besonderen Werte ein (Erdradius $r = 6,4 \cdot 10^8$ cm) und finden, weil die Teilchen bei so großer Energie fast Lichtgeschwindigkeit haben, für $v \approx c$:

$$\begin{aligned} E &\approx e H r \text{ abs. E.} = \\ 300 H r \text{ eV} &= 300 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6,4 \cdot \\ 10^8 &= 6,4 \cdot 10^{10} \text{ eV.} \end{aligned} \quad (36)$$

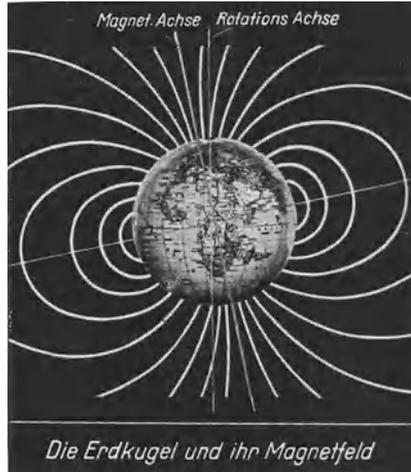


Abb. 27. Magnetisches Feld der Erde (nach A. E. G., Berlin).

Die betrachteten Beispiele geben uns ein Bild von der Größe der *Energie der Ultrateilchen*, die nach Beobachtungsergebnissen zwischen 10^9 und 10^{12} eV liegt.

3. Höhen- und Tiefeneffekt.

Mit *zunehmender Höhe* (abnehmendem Luftdruck) ergab sich ein *Anstieg der Energie* als klarer Beweis für den außerirdischen Ursprung der Strahlung (Abb. 28). Andererseits konnte Kolhörster Höhenstrahlen noch bis 700 m Wassertiefe oder bis 325 m Gesteinstiefe nachweisen.

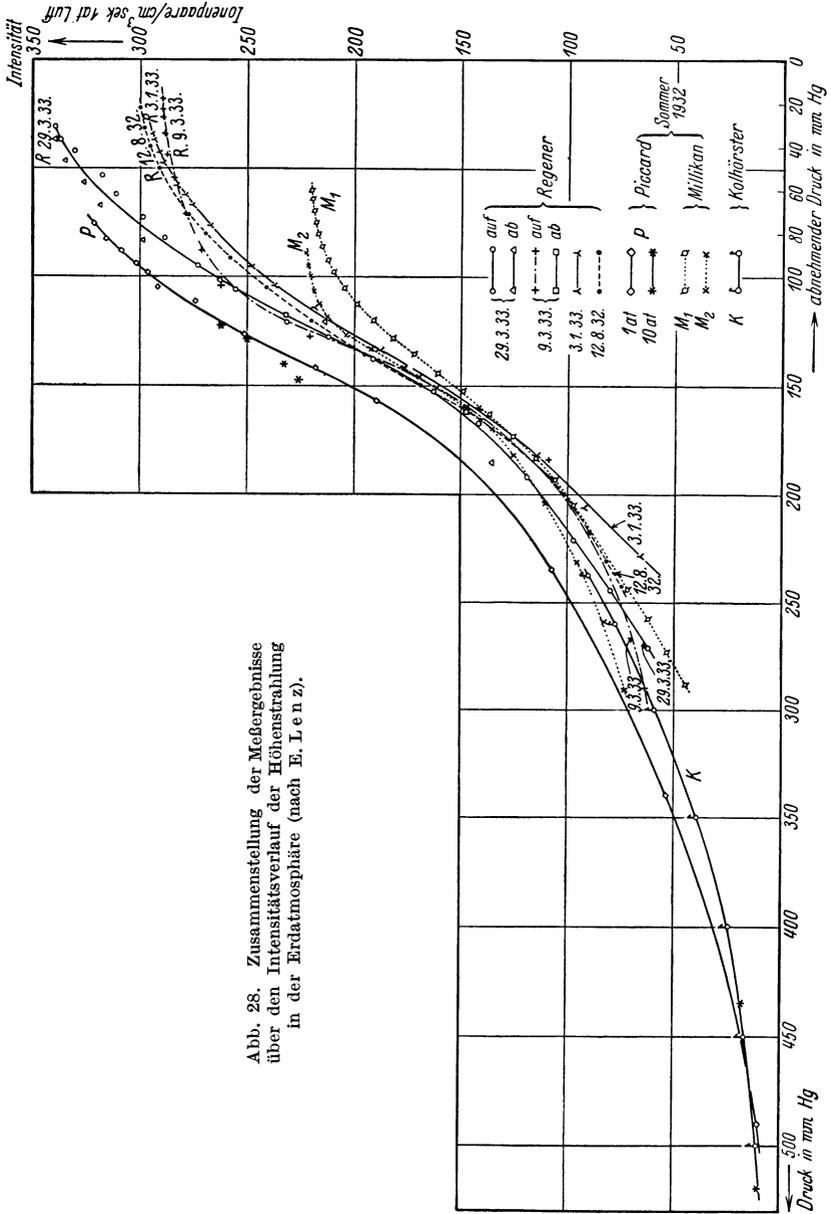


Abb. 28. Zusammenstellung der Meßergebnisse über den Intensitätsverlauf der Höhenstrahlung in der Erdatmosphäre (nach E. Lenz).

4. Geomagnetischer Breiteneffekt.

Die Intensität der Strahlung wächst mit der *geomagnetischen Breite*. Gegen den magnetischen Äquator zu müssen die Teilchen immer höhere Energie haben, um bei lotrechtem Einfall noch die Erdoberfläche zu erreichen. An den *magnetischen Polen* bildet die oben in Gl. (33) errechnete *Absorptionsschranke* von $3,6 \cdot 10^9$ eV die untere Grenze. Die Strahlung ist nicht homogen, sondern ein *Gemisch von Teilchen verschiedener Geschwindigkeit*. Am besten

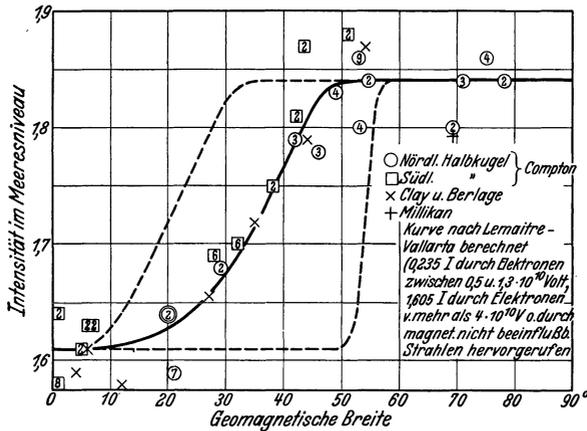


Abb. 29. Abhängigkeit der Höhenstrahlungsintensität von der geomagnetischen Breite (nach Compton).

Die gestrichelten Kurven sind für Elektronen von $1,3 \cdot 10^{10}$ bzw. $0,24 \cdot 10^{10}$ eV berechnet, die ausgezogene ist durch Zusammensetzung aus vier Komponenten zwischen $0,5$ und $1,3 \cdot 10^{10}$ eV gewonnen.

stimmt man mit den Beobachtungen überein, wenn man zur Erklärung vier Komponenten zwischen $0,5$ und $1,3 \cdot 10^{10}$ eV annimmt (Abb. 29).

5. Azimutaleffekt.

Zählt man die Teilchen mit Hilfe der Zählrohrkoinzidenzmethode unter Berücksichtigung der *Einfallrichtung*, so zeigt sich, daß *mehr Teilchen von Westen als von Osten* einfallen: Die Strahlung enthält somit *mehr positive* Teilchen (e^+ , p , α) als negative (e^-). Dieser Überschuß nimmt mit der Höhe und mit Abnahme der geomagnetischen Breite zu.

6. Barometereffekt.

Dieser entspricht dem *Höheneffekt* der Ultrastrahlung bei konstantem Luftdruck (vgl. 3.).

D. Die zusammengesetzten Atomkerne.

1. Feststellung der Kernarten durch Kanalstrahlenanalyse.

a) **Parabelmethode von J. J. Thomson.** 1886 hat E. Goldstein ein Gegenstück zur Kathodenstrahlung entdeckt. Er benützte eine *durchlöcherne* Kathode K (Abb. 30). Noch ehe das

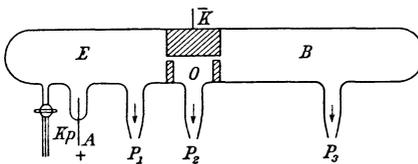


Abb. 30. Kanalstrahlrohr (schematisch).

A Anode, K fein durchbohrte Kathode, E Entladungsraum, B Beobachtungsraum, P_1, P_2, P_3 Anschlüsse für Hochvakuumanschlüsse, Kp Kapillare mit Hahn zur Nachlieferung von Gas.

Kathodenstrahlvakuum erreicht war, zeigte sich hinter der Kathode eine Strahlung, die, aus dem Raume zwischen Anode A und Kathode K stammend, diese durchsetzt hatte. Wie die Untersuchung durch *elektrische* und *magnetische Ablenkung* ergibt,

handelt es sich hierbei um *positiv geladene Kerne* des in der Röhre befindlichen Gases, z. B. O^+, N^+, CO^+ usw. Da die Strahlen

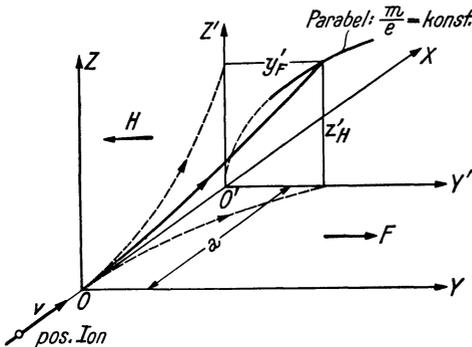


Abb. 31. Ablenkung eines Kanalstrahlteilchens im elektrischen und magnetischen Feld.

durch eine mit *Löchern* („Kanälen“) versehene Kathode gehen, nannte sie Goldstein *Kanalstrahlen*. Um einerseits Kanalstrahlen genügender Intensität zu erhalten, andererseits diese Strahlen möglichst ungestört beobachten zu können, muß im Entladungsraum E vor

der Kathode verhältnismäßig hoher Gasdruck (0,01 mm Hg), im Beobachtungsraum B hinter derselben ein möglichst vollkommenes Hochvakuum (mindestens 10^{-4} mm Hg) vorhanden sein.

Dies wird durch in geeigneter Weise an die Röhre angeschlossene Hochvakuum pumpen erreicht.

Wir wenden uns nun zur *mathematischen* Behandlung des Ablenkungsvorganges (Abb. 31). Wir wollen annehmen, daß ein in der x -Richtung kommendes, positives Teilchen mit der Geschwindigkeit v bei O das *elektrische Feld* mit der Feldstärke F (senkrecht zur Richtung des fliegenden Teilchens) betritt. Dieses Feld biegt seine Bahn nach einer Parabel in der xy -Ebene:

$$y = \frac{b_e}{2v^2} x^2, \quad b_e = \frac{eF}{m} \quad (37)$$

(vgl. S. 7). Bei $x = a$ wird parallel zur yz -Ebene eine photographische Platte angebracht ($y'z'$ -Ebene). Durch das elektrische Feld wird die Schwärzung statt in O' im Punkte

$$y_{F'} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{eF}{mv^2}, \quad z_{F'} = 0 \quad (37a)$$

hervorgebracht.

Würde auf das Teilchen statt des elektrischen Feldes ein *magnetisches Feld* mit der Feldstärke H einwirken, so würde es in einen Kreisbogen gelenkt, der in erster Annäherung durch einen Parabelbogen in der xz -Ebene ersetzt werden kann:

$$z = \frac{b_m}{2v^2} x^2, \quad b_m = \frac{v^2}{r} = \frac{eHv}{cm} \quad (38)$$

(vgl. S. 7). Der Schwärzungsfleck auf der Platte entstünde jetzt im Punkte

$$y_{H'} = 0, \quad z_{H'} = \frac{a^2}{2c} \cdot \frac{eH}{mv}. \quad (38a)$$

Verwendet man *beide Felder* gleichzeitig, so trifft das Teilchen die Platte im Punkt $(y_{F'}, z_{H'})$. Diese Koordinaten hängen ab von der spezifischen Ladung $\frac{e}{m}$ der Teilchen und insbesondere auch von ihrer Geschwindigkeit v . Wir wollen nun auf der Platte die Spur solcher Teilchen ermitteln, die zwar die gleiche spezifische Ladung, aber — wie dies ja durch Zusammenstöße hervorgerufen wird — verschiedene Geschwindigkeit haben. Zu diesem Zwecke entfernen wir aus den zuletzt erhaltenen Gleichungen v :

$$y' = \frac{2c^2}{a^2} \cdot \left(\frac{m}{e}\right) \cdot \frac{F}{H^2} \cdot z'^2. \quad (39)$$

Auf der photographischen Platte entsteht also eine *Parabel*; man nennt daher diese Methode von J. J. Thomson auch die

Parabelmethode. Alle Teilchen von gleicher spezifischer Ladung treffen auf demselben Parabelbogen auf. Die verschiedenen Parabeln unterscheiden sich bei gleichen äußeren Bedingungen (F, H) nur durch die verschiedenen Werte von $\frac{e}{m}$. Für denselben Wert von y' ergibt sich

$$\frac{m_1}{e_1} z_1'^2 = \frac{m_2}{e_2} z_2'^2 \quad \text{oder} \quad \frac{e_1}{m_1} : \frac{e_2}{m_2} = z_1'^2 : z_2'^2; \quad (40)$$

insbesondere für $e_2 = e_1$:

$$m_1 : m_2 = z_2'^2 : z_1'^2. \quad (40a)$$

Die *spezifischen Ladungen* bzw. die *reziproken Massen* verhalten sich also wie die *Quadrate entsprechender Ordinaten*. Den Ursprung des Koordinatensystems findet man mit Hilfe des unabhänglichen Strahles durch Ausschalten der Felder. Die Umkehrung der Felder liefert in den anderen Quadranten symmetrische Parabeln, die die genaue Lage der Koordinatenachsen zu bestimmen gestatten (Abb. 32 und 33).

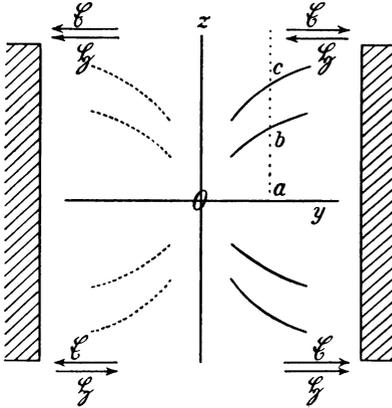


Abb. 32. Parabeln positiver Ionen bei Einwirkung paralleler elektrischer und magnetischer Felder.

Eine eindrucksvolle Anwendung der Parabelmethode zur Bestimmung der Masse des *schweren Wasserstoffes* ^2D im Vergleich mit jener von ^1H zeigt Abb. 34, auf der die Spuren der negativen Ionen

von ^1H und ^2D (die letzteren natürlich bedeutend schwächer) zu erkennen sind. Wie man sich durch einfaches Ausmessen überzeugen kann, beträgt das Ordinatenverhältnis an einer beliebigen Stelle y'

$$z_{\text{H}}' : z_{\text{D}}' = 1,4 : 1 = \sqrt{2} : 1,$$

woraus

$$m_{\text{D}} : m_{\text{H}} = z_{\text{H}}'^2 : z_{\text{D}}'^2 = 2 : 1$$

folgt.

b) Der Massenspektrograph. Einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der Parabelmethode erzielte F. W. Aston 1919 durch

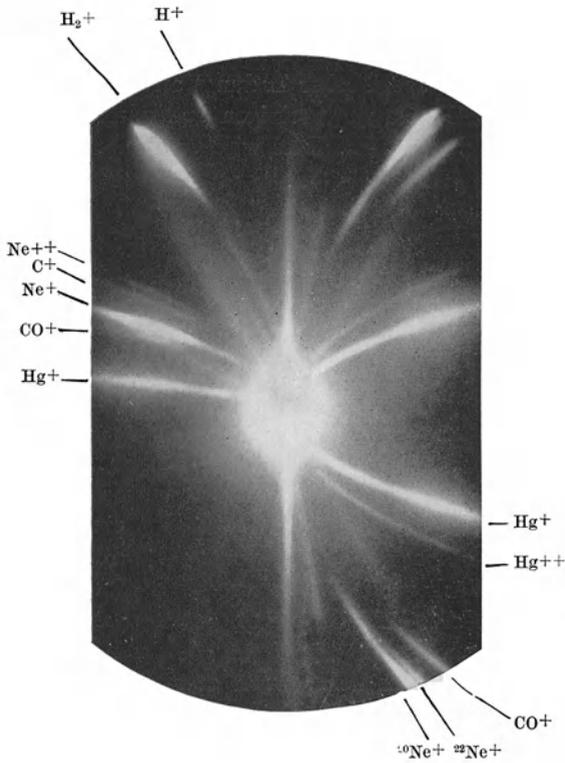


Abb. 33. Kanalstrahlparabeln bei Neonfüllung (nach F. W. Aston).

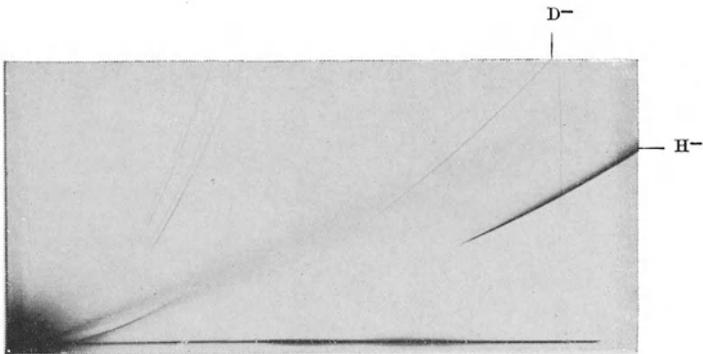


Abb. 34. Massenspektren der negativen Ionen von H und D.

die von ihm eingeführte *Geschwindigkeitsfokussierung* bei *gekreuzten Feldern*. Sie besteht darin, Teilchen von verschiedener Geschwindigkeit (bei gleicher spezifischer Ladung) an derselben Stelle der photographischen Platte zu vereinigen und damit die Intensität der Schwärzung zu steigern. Dies wird erreicht durch ein geeig-

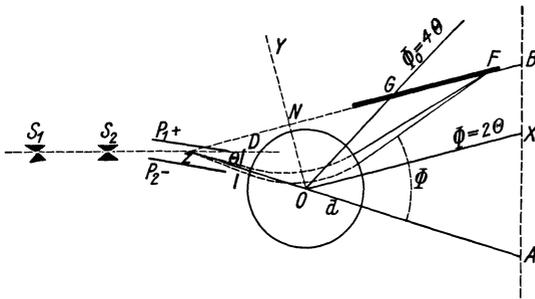


Abb. 35. Geschwindigkeitsfokussierung beim Astonschen Massenspektrographen (nach F. W. Aston).

netes *Magnetfeld* (Abb. 35), dessen Feldlinien *senkrecht* zu denen des *elektrischen* Feldes verlaufen. Während dieses den Strahl der eintretenden Teilchen verschiedener Geschwindigkeit um einen Winkel Θ ablenkt und ihn

dabei in einen Fächer ausbreitet, aus dem die Blende B den Mittelteil aussondert, besorgt das in *entgegengesetzter* Richtung ablenkende Magnetfeld unter einem gewissen Winkel Φ die Wiedervereinigung dieser verschieden geschwinden Teilchen, die auf der photographischen Platte in P gesammelt werden.

Nehmen wir die im Bogenmaß gemessenen Ablenkungswinkel Θ und Φ als *klein* an, so gilt im Hinblick auf Gl. (37 a) und (38 a)

$$\Theta = k \frac{e F}{m v^2}, \quad \Phi = k' \frac{e H}{m v}, \quad (41)$$

wobei k , k' von der Anordnung abhängige Proportionalitätsfaktoren bezeichnen. Die durch das elektrische bzw. magnetische Feld infolge der verschiedenen Geschwindigkeit v der Teilchen hervorgerufene Streuung beträgt:

$$\delta \Theta = -2 k \frac{e F}{m v^3} \delta v, \quad \frac{\delta \Theta}{\Theta} = -2 \frac{\delta v}{v};$$

$$\delta \Phi = -k' \frac{e H}{m v^2} \delta v, \quad \frac{\delta \Phi}{\Phi} = -\frac{\delta v}{v}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\delta \Theta}{\Theta} = 2 \frac{\delta \Phi}{\Phi}. \quad (42)$$

Setzen wir mit Bezug auf Abb. 35 die Strecken $\overline{ZO} = l, \overline{OF} = r$, so finden wir unter der bereits gemachten Voraussetzung *kleiner*

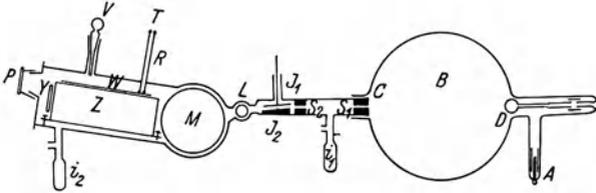


Abb. 36. Massenspektrograph von F. W. Aston.

Ablenkungswinkel Θ und Φ und mit Berücksichtigung von Gl. (42) für die gesamte Streuung

$$\Delta = (l + r) \delta \Theta - r \delta \Phi = \left[l + r \left(1 - \frac{\Phi}{2\Theta} \right) \right] \delta \Theta.$$

Diese *Streuung* muß, um die angestrebte *Fokussierung* zu erreichen, *verschwinden*, d. h. es muß

$$r(\Phi - 2\Theta) = l \cdot 2\Theta \approx \overline{ON}$$

werden. Um *scharfe Massenspektren* zu erhalten, muß somit die photographische Platte in die Lage der Astonschen *Geraden* ZB nach GF gebracht werden (Abb. 35).

Die Anordnung des Astonschen Gerätes, das einem *Prismenspektrographen ohne Linsen* vergleichbar ist, zeigt Abb. 36. Aus dem Entladungsrohr B treten die Kanalstrahlen durch die mit einem sehr feinen Kanal S_1 von 0,03 mm Weite versehene Kathode C und eine weitere Schlitzblende S_2 in das elektrische Feld des Ablenkkondensators mit den Platten J_1, J_2 ein, aus dem

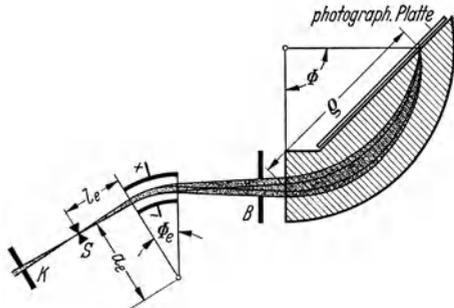


Abb. 37. Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung beim Mattauch-Herzogschen Massenspektrographen (nach J. Mattauch).

K Kanalende; S abzubildender Spektrographenspalt im Brennpunkt eines elektrischen Radialfeldes vom Öffnungswinkel Φ_e und mittleren Radius a_e ; B Blende; Φ Ablenkungswinkel im Magnetfeld. Eingezeichnet sind zwei Strahlenbündel verschiedener Geschwindigkeit einer bestimmten Masse, die jedes für sich und beide zusammen in einem Punkt der photographischen Platte vereinigt werden. Diese Abbildung des Spaltes S findet in der Entfernung q vom Eintrittspunkt des Mittelstrahles statt. Die photographische Platte stellt den geometrischen Ort der Bildpunkte für die verschiedenen Massen des Strahles dar.

sie durch den verstellbaren Hahnpalt L in das Feld des Magneten M und von dort je nach ihrer spezifischen Ladung $\frac{e}{m}$ (hinsichtlich ihrer verschiedenen Geschwindigkeiten fokussiert) auf verschiedene Stellen der photographischen Platte W gelangen. Das Rohr R mit einer Lichtquelle bei T erlaubt die Anbringung einer Meßmarke auf der photographischen Platte. Der Leuchtschirm Y dient zur Überprüfung der Einstellung der ablenkenden Felder.

Eine Verbesserung ähnlicher Art, wie sie Aston gegenüber dem Thomsonschen Apparat erzielt hat, gelang 1934 J. Mattauch und R. Herzog gegenüber dem Gerät von Aston dadurch, daß sie die *Geschwindigkeitsfokussierung* mit einer *Richtungsfokussierung* verbanden, die eine weitere Steigerung der Intensität zur Folge hatte. Abb. 37 erläutert den Strahlengang in dem *Mattauch-Herzogschen Massenspektrographen*, der das vollständige Gegenstück zum *optischen Prismenspektrographen* darstellt und einen solchen sogar an Linienschärfe übertrifft. Die im folgenden besprochenen Massenspektren (Abb. 38) wurden von Mattauch aufgenommen.

Alle Massenspektren zeigen, abgesehen von den der besonderen Füllung des Entladungsrohres entsprechenden Linien, immer wieder dieselben Linien, die von *Verunreinigungen*, insbesondere von Gasen (C-Verbindungen) herrühren, die den Hahnfetten entstammen. Diese Linien eignen sich vorzüglich als *Bezugslinien*. Abb. 38, die eine der Breite nach halbierte Platte mit 6 Aufnahmen (3 mit größerem, 3 mit kleinerem Magnetfeld und Expositionszeiten von 1 Stunde, 20 Minuten und 3 Minuten hergestellt) zur Darstellung bringt, zeigt viele solche Linien. Die beigedruckten Zahlen bedeuten die Massenzahlen (bezogen auf $O = 16$). Man findet z. B. CO^+ ($12 + 16$) und $C_2H_4^+$ ($2 \cdot 12 + 4 \cdot 1$) bei der Massenzahl 28, N^+ und CO_2^+ ($12 + 2 \cdot 1$) bei der Massenzahl 14, O^{++} bei der Massenzahl 8 (doppelte Ladung kommt halber Masse gleich). Man erkennt ferner (deutlich getrennt) bei der Massenzahl 16 die Linien CH_4^+ und NH_2^+ (Dublett), die einer Massendifferenz $CH_4 - NH_2 = (12,0036 + 4 \cdot 1,0081) - (14,0073 + 2 \cdot 1,0081) = 16,0360 - 16,0235 = 0,0125$ M. E. entsprechen und ein Maß für das *Auflösungsvermögen* des Apparates darstellen. Um die Zugehörigkeit einer bestimmten Linie zu einem bestimmten Ion (z. B. CO_2^+) festzustellen, kann man so verfahren.

ren, daß man den entsprechenden Stoff (CO_2) der Füllung des

Entladungsrohres beifügt, was zu einer deutlichen Verstärkung der betreffenden Linieföhren muß. Die Massenzahl eines Ions wird an der Massenskala abgelesen, die im Falle des Mattauchschen Apparates eine quadratische Funktion des Abstandes ist.

Als ein wesentliches Ergebnis der Massenspektroskopie ist die Tatsache anzusehen, daß die *Massen der Atome* sämtlicher Elemente, bezogen auf $\text{O} = 16$, nahezu ganzzahlig erscheinen und Abweichungen von dieser Ganzzahligkeit (z. B. bei $\text{Cl} = 35,46$) darauf hindeuten, daß das betreffende chemische Element keine einheitlichen Atome, sondern solche mit *verschiedener* Massenzahl, sogenannte *Isotope* (bei Cl gibt es Atome mit der Massenzahl 35 und 37)

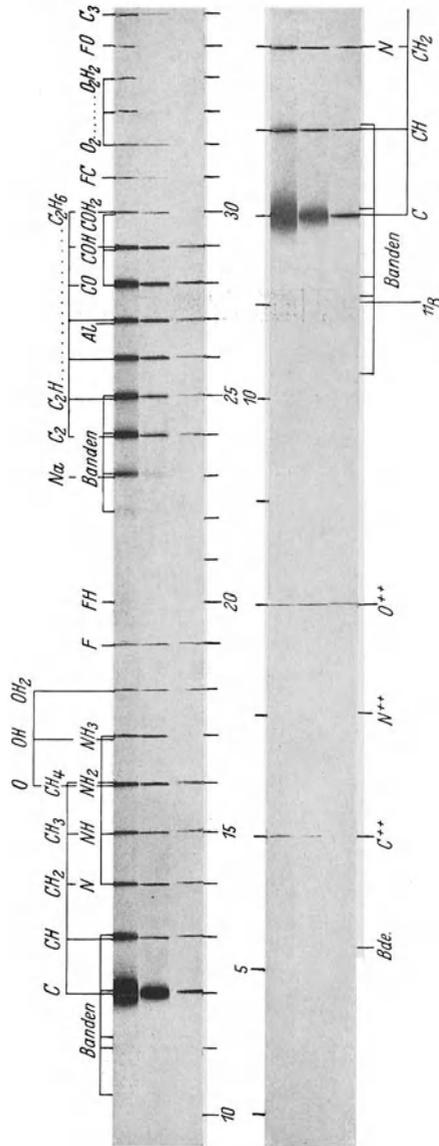


Abb. 38. Massenspektren von J. Mattauch.

besitzt. Die Gesamtheit der zu demselben Element gehörigen Atome mit verschiedener Massenzahl bezeichnet man als eine *Plejade* und das betreffende Element als *Mischelement*. Als *Rein-elemente* gelten heute noch etwa zwei Dutzend Grundstoffe.¹

c) Die chemischen Grundstoffe, ihre Entdeckung und ihre stabilen Isotope. Übersichten über *sämtliche* bekannten *chemischen Elemente* und deren *stabile Isotope* findet man in dem nachfolgenden *alphabetischen Verzeichnis* und in der *Zahlentafel 4* (S. 51 ff.).

Name des Grundstoffes ²	Zeichen	Atomnummer	Häufigstes Isotop	Entdecker und Jahr der Entdeckung ³
Aktinium	Ac	89	227	A. Debierne, 1899; F. Giesel, 1902
Aluminium	Al	13	27	F. Wöhler, 1827; erstes Herstellungspatent von Cowles, 1885
Antimon	Sb	51	121	Basilius Valentinus (J. Thölde aus Hessen) 1450
Argon	Ar	18	40	Lord Rayleigh u. W. Ramsay, 1894
Arsen	As	33	75	Albertus Magnus, 1250
Barium	Ba	56	138	H. Davy, 1808
Beryllium	Be	4	9	das Oxyd entdeckt v. Vauquelin, 1798; das Metall gewonnen v. F. Wöhler; Bussy u. Debray, 1828
Blei	Pb	82	208	seit alter Zeit bekannt
Bor	B	5	11	H. Davy; Gay-Lussac u. Thénard, 1808
Brom	Br	35	79	A. J. Balard, 1826
Cadmium	Cd	48	114	Stromeyer, 1817
Caesium	Cs	55	133	W. Bunsen u. R. Kirchhoff, 1860 (spektroskopisch)

¹ He, Be, F, Na, Al, P, Sc, V, Mn, As, Y, Nb, J, Cs, La, Pr, Tb, Ho, Tm, Cp, Ta, Au, Bi, Th.

² Im *auswärtigen* Schrifttum finden sich noch folgende Namen: *Celtium* (Ct) für Hafnium, *Columbium* (Cb) für Niob, *Glucinium* (Gl) für Beryllium, *Lutecium* (Lu) für Kassiopium und *Tungsten* für Wolfram. Siehe ferner die Fußnote * zur Zahlentafel 9, S. 111.

³ Siehe Handbook of Chemistry and Physics, 20. Aufl., herausgeg. v. Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio, U. S. A., 1935.

Name des Grundstoffes	Zeichen	Atom- nummer	Häufig- stes Isotop	Entdecker und Jahr der Entdeckung
Cer	Ce	58	140	M. H. Klaproth; J. J. v. Berzelius und Hisinger, 1803; das Metall gewonnen v. Hillebrand u. Norton, 1875
Chlor	Cl	17	35	K. W. Scheele, 1774; benannt von H. Davy, 1810
Chrom	Cr	24	52	Vauquelin, 1797
Dysprosium . . .	Dy	66	164	Lecoq de Boisbaudran, 1886
Eisen	Fe	26	56	schon von den Ägyptern verarbeitet, 3000 v. Chr.
Erbium	Er	68	166	Mosander, 1843
Europium	Eu	63	151	Demarcay, 1901
Fluor	F	9	19	K. W. Scheele, 1771; rein dargestellt von H. Moissan, 1886
Gadolinium . . .	Gd	64	156, 158	J. Ch. Galissard de Marignac, 1880
Gallium	Ga	31	69	Lecoq de Boisbaudran, 1875 (spektroskopisch); als Eka Al vorausgesagt v. Mendelejeff
Germanium . . .	Ge	32	74	Kl. Winkler, 1886; als Eka Si vorausgesagt v. Mendelejeff
Gold	Au	79	197	seit ältesten Zeiten bekannt
Hafnium	Hf	72	180	D. Coster u. G. v. Hevesy, 1922 (röntgenspektroskopisch)
Helium	He	2	4	N. Lockyer, 1868 (im Sonnenspektrum); das Gas gewonnen v. W. Ramsay, 1895
Holmium	Ho	67	165	Clève, 1879; Ho ₂ O ₃ rein dargestellt von Holmberg, 1911
Indium	In	49	115	Reich u. Richter, 1863 (spektroskopisch); der letztere gewinnt später das Metall
Iridium	Ir	77	193	Tennant, 1803
Jod	J	53	127	Courtois, 1811
Kalium	K	19	39	H. Davy, 1807 (elektrolytisch)
Kalzium	Ca	20	40	H. Davy; J. J. v. Berzelius u. Pontin, 1808

Name des Grundstoffes	Zeichen	Atomnummer	Häufigstes Isotop	Entdecker und Jahr der Entdeckung
Kassiopeium ..	Cp	71	175	Urbain, 1907; C. Auer v. Welsbach, 1908 (durch Zerlegung von Marignacs Yb in eigentliches Yb und Cp)
Kobalt	Co	27	59	Brandt, 1735
Kohlenstoff ...	C	6	12	schon in vorgeschichtlicher Zeit bekannt
Krypton	Kr	36	84	W. Ramsay u. Travers, 1898
Kupfer	Cu	29	63	schon in vorgeschichtlicher Zeit entdeckt; Kupfergruben vor mehr als 5000 Jahren
Lanthan	La	57	139	Mosander, 1839
Lithium	Li	3	7	Arfvedson, 1817
Magnesium ...	Mg	12	24	J. Black, 1755; rein dargestellt v. H. Davy, 1808; in zusammenhängender Form gewonnen v. Bussy, 1831
Mangan	Mn	25	55	Gahn, 1774
Masurium	Ma	43	—	Noddack, Tacke (jetzt Frau Noddack) u. Berg, 1925 (röntgenspektroskopisch)
Molybdän	Mo	42	98	Hjelm, 1782
Natrium	Na	11	23	H. Davy, 1807 (elektrolytisch)
Neodym	Nd	60	142	C. Auer v. Welsbach, 1885 (durch Zerlegung von Mosanders Didym in Nd und Praseodym Pr)
Neon	Ne	10	20	W. Ramsay u. Travers, 1898
Nickel	Ni	28	58	Cronstedt, 1751
Niob	Nb	41	93	Hatchett, 1801; das Metall gewonnen von Blomstrand, 1864
Osmium	Os	76	192	Tennant, 1803
Palladium	Pd	46	106	W. H. Wollaston, 1803
Phosphor	P	15	31	Alchemist Brand, 1669
Platin	Pt	78	195	A. de Ulloa, 1735 (in Südamerika); Wood, 1744
Polonium	Po	84	210	M. Curie, 1898 (bei Untersuchung der Radioaktivität der Joachimstaler Pechblende)

Name des Grundstoffes	Zeichen	Atomnummer	Häufigstes Isotop	Entdecker und Jahr der Entdeckung
Praseodym	Pr	59	141	C. Auer v. Welsbach, 1885 (s. Neodym Nd)
Protaktinium .	Pa	91	(231)	F. Soddy u. Cranston; Halin u. L. Meitner, 1917; identisch mit Eka Ta und isotop mit UX ₂ (UZ)
Quecksilber ...	Hg	80	202	schon den alten Chinesen und Hindus bekannt; gefunden in ägyptischen Gräbern, 1500 v. Chr.
Radium	Ra	88	226	M. Curie u. A. Debierne, 1911 (durch Elektrolyse von RaCl ₂)
Radon (Ra-Emanation, Niton)	Rn-(Em)	86	222	E. F. Dorn, 1900; rein dargestellt von Ramsay u. Gray, 1908
Rhenium	Re	75	187	Noddack, Tacke (jetzt Frau Noddack) u. Berg, 1925
Rhodium	Rh	45	103	W. H. Wollaston, 1803
Rubidium	Rb	37	85	W. Bunsen u. R. Kirchhoff, 1861 (spektroskopisch)
Ruthenium	Ru	44	102	Claus, 1844
Samarium	Sm	62	152	Lecoq de Boisbaudran, 1879
Sauerstoff	O	8	16	J. Priestley, 1774 (Erhitzung v. HgO durch Sonnenstrahlen mit einem Brennglas)
Scandium	Sc	21	45	Nilson, 1879 (= Eka B)
Schwefel	S	16	32	schon im Altertum bekannt
Selen	Se	34	80	J. J. v. Berzelius, 1817
Silber	Ag	47	107	schon im Altertum bekannt
Silizium	Si	14	28	J. J. v. Berzelius, 1823
Stickstoff	N	7	14	D. Rutherford, 1772
Strontium	Sr	38	88	Crawford, 1790; rein dargestellt von H. Davy, 1808 (durch Elektrolyse)
Tantal	Ta	73	181	Ekeberg, 1802

Name des Grundstoffes	Zeichen	Atom- nummer	Häufig- stes Isotop	Entdecker und Jahr der Entdeckung
Tellur	Te	52	130	Müller v. Reichenstein, 1782; benannt von M. H. Klaproth, 1798
Terbium	Tb	65	159	Mosander, 1843
Thallium	Tl	81	205	W. Crookes, 1861 (spektrosko- pisch); das Metall gewonnen von Crookes u. von Lamy, 1862
Thorium	Th	90	232	J. J. v. Berzelius, 1828
Thulium	Tm	69	169	Clève, 1879; Tm_2O_3 rein dar- gestellt von James, 1911
Titan	Ti	22	48	Gregor, 1791; benannt von M. H. Klaproth, 1795; das Metall rein dargestellt von Hunter, 1910
Uran	U	92	238	M. H. Klaproth, 1789; das Me- tall gewonnen von Peligot, 1841
Vanadin	V	23	51	Sefström, 1830; rein dargestellt von H. E. Roscoe, 1869
Wasserstoff . . .	H	1	1	H. Cavendish, 1766; benannt von A. L. Lavoisier
Wismut	Bi	83	209	Alchemist Basilius Valentinus, 1450
Wolfram	W	74	184	Brüder d'Elhujar, 1783
Xenon	Xe	54	129	W. Ramsay u. Travers, 1898
Ytterbium	Yb	70	174	J. Ch. Galissard de Marignac, 1878; s. ferner Kassiopium Cp
Yttrium	Y	39	89	Yttererde entdeckt von J. Ga- dolin, 1794; ihre Zusammen- setzung aus Y_2O_3 , Er_2O_3 und Tb_2O_3 erkannt von Mosander, 1843; Y rein dargestellt von F. Wöhler, 1828
Zink	Zn	30	64	Th. Paracelsus, 1530
Zinn	Sn	50	120	schon im Altertum bekannt
Zirkon	Zr	40	90	M. H. Klaproth, 1789; rein dar- gestellt von J. J. v. Berzelius, 1824

Zahlentafel 4. Die stabilen Isotope und ihre relative Häufigkeit.¹

Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent	Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent
1	H	1	99,98	16	S	32	97,0
		2	0,02			33	0,8
		3	10 ⁻⁸			34	2,2
2	He	4	100	17	Cl	35	76
3	Li	6	7,9			37	24
		7	92,1	18	Ar	36	0,31
4	Be	9	100			38	0,06
		10	20,6			40	99,63
5	B	11	79,4	19	K	39	93,2
		6	C			12	99
13	~ 1					41	6,8
7	N	14	99,7	20	Ca	40	96,76
		15	0,3			42	0,77
8	O	16	99,76			43	0,17
		17	0,04			44	2,30
		18	0,20	21	Sc	45	100
9	F	19	100			46	8,5
		10	Ne	20	90,00	47	7,8
				21	0,27	22	Ti
22	9,73			49	5,5		
50	6,9						
11	Na	23	100	23	V	51	100
12	Mg	24	77,4	24	Cr	50	4,9
		25	11,5			52	81,6
		26	11,1			53	10,4
54	3,1						
13	Al	27	100	25	Mn	55	100
14	Si	28	89,6	26	Fe	54	6,5
		29	6,2			56	90,2
		30	4,2			57	2,8
58	0,5						
15	P	31	100				

¹ M. Stanley Livingston u. H. A. Bethe: Reviews of Modern Physics 9, 380 (1937). Der einer Massenzahl beigefügte Buchstabe α bzw. β bedeutet, daß sich das betreffende Isotop als *instabil* und zwar als α - bzw. β -Strahler sehr großer Halbwertszeit (s. S. 56) erwiesen hat.

Fortsetzung der Zahlentafel 4.

Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent	Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent
27	Co	57	0,2	37	Rb	85	72,7
		59	99,8			87 β	27,3
28	Ni	58	67,2	38	Sr	84	0,5
		60	27,0			86	9,6
		61	~ 1			87	7,5
		62	3,8			88	82,4
		64	~ 1	39	Y	89	100
29	Cu	63	68	40	Zr	90	48
		65	32			91	11,5
30	Zn	64	50,9			92	22
		66	27,3			94	17
		67	3,9			96	1,5
		68	17,4	41	Nb	93	100
70	0,5						
31	Ga	69	61,2	42	Mo	92	14,2
		71	38,8			94	10,0
32	Ge	70	21,2			95	15,5
		72	27,3			96	17,8
		73	7,9			97	9,6
		74	37,1	98	23,0		
		76	6,5	100	9,8		
33	As	75	100	43	Ma	—	—
		34	Se			74	0,9
76	9,5			(98)	—		
77	8,3			99	12		
78	24,0			100	14		
80	48,0			101	22		
82	9,3			102	30		
35	Br	79	50,7	45	Rh	101	0,1
		81	49,3			103	99,9
36	Kr	78	0,42	46	Pd	102	0,8
		80	2,45			104	9,3
		82	11,79			105	22,6
		83	11,79			106	27,2
		84	56,85			108	26,8
		86	16,70			110	13,5

Fortsetzung der Zahlentafel 4.

Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent	Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent				
47	Ag	107	52,5	54	X	124	0,08				
		109	47,5			126	0,08				
48	Cd	106	1,4			128	2,30				
		108	1,0			129	27,13				
		110	12,8			130	4,18				
		111	13,0			131	20,67				
		112	24,2			132	26,45				
		113	12,3			134	10,31				
		114	28,0			136	8,79				
		116	7,3			55	Cs	133	100		
49	In	113	4,5			56	Ba	130	0,16		
		115	95,5					132	0,015		
		50	Sn					112	1,1	134	1,72
114	0,8							135	5,7		
115	0,4			136	8,5						
116	15,5			137	10,8						
117	9,1			138	73,1						
118	22,5			57	La			139	100		
51	Sb	121	56	58	Ce	136	< 1				
		123	44			138	< 1				
		52	Te			120	< 0,1	140	89		
						122	2,9	142	11		
						123	1,6	59	Pr	141	100
						124	4,5	60	Nd	142	36
125	6,0	143	11								
126	19,0	144	30								
128	32,8	145 β	5								
130	33,1	146	18								
53	J	127	100	148	< 1						
		54	X	120	< 0,1	150	< 1				
				122	2,9	61	—	—			
				123	1,6	62	Sm	144	3		
				124	4,5			147	17		
				125	6,0			148	14		
126	19,0			149	15						
128	32,8	150 α	5								
130	33,1	152	26								
154	20										

Fortsetzung der Zahlentafel 4.

Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent	Kern- ladungs- zahl	Zeichen	Massen- zahlen	Relative Häufigkeit in Prozent		
63	Eu	151	50,6	74	W	182	22,6		
		153	49,4			183	17,3		
64	Gd	155	21	75	Re	184	30,2		
		156	23			186	29,9		
		157	17	76	Os	185	38,2		
		158	23			187	61,8		
		160	16			186	1,0		
65	Tb	159	100	77	Ir	187	0,6		
		66	Dy			161	22	188	13,4
162	25			189	17,4				
163	25			190	25,1				
164	28			192	42,5				
67	Ho	165	100	78	Pt	191	38,5		
		68	Er			166	36	193	61,5
167	24			79	Au	192	0,8		
168	30					194	30,2		
170	10			195	35,3				
69	Tm			169	100	196	26,6		
		70	Yb	171	9	198	7,2		
				172	24	80	Hg	197	100
				173	17			196	0,15
				174	38	198	10,1		
				176	12	199	17,0		
71	Cp	175	100	200	23,3				
		72	Hf	176	5	201	13,2		
177	19			202	29,6				
178	28			204	6,7				
179	18			81	Tl	203	30,5		
180	30	205	69,5						
73	Ta	181	100	82	Pb	204	1,50		
		74	W			182	22,6	206	28,3
				183	17,3	207	20,1		
				184	30,2	208	50,1		
				186	29,9	83	Bi	209	100

Die Massenspektroskopie ermöglicht so eine *Reihung sämtlicher Atome nach steigender Massenzahl*, wie sie im wesentlichen mit der später zu besprechenden Aufeinanderfolge im „*periodischen System*“ (S. 111) übereinstimmt. Doch sei schon hier festgestellt, daß für eine solche Anordnung die *Massenzahl* (das *Atomgewicht*) als *Ordnungsprinzip nicht in Betracht* kommen kann, da ja gerade mit Hilfe des Massenspektrographen nachgewiesen werden konnte, daß es Atome verschiedener Elemente mit derselben Massenzahl, sogenannte *Isobare* gibt, z. B. Ar, K und Ca mit der Massenzahl 40, Ti und Cr mit der Massenzahl 50, Cr und Fe mit der Massenzahl 54, Zn und Ge mit der Massenzahl 70, Se und Kr mit den Massenzahlen 78, 80 und 82 usw.

Die durch die Massenspektroskopie zutage geförderte Ganz-zahligkeit der Atomgewichte gab dem Gedanken, daß *alle schweren Atome zusammengesetzt* und aus einem einzigen *Grundatom* (H-Atom nach der *Hypothese von Prout*, 1815) aufgebaut sein könnten neue Nahrung. Eine besondere Stütze hatte diese Auffassung schon früher durch die bei den schwersten Atomen entdeckte Erscheinung des *radioaktiven Zerfalls* erhalten, mit der wir uns nun näher beschäftigen wollen.

2. Natürliche Radioaktivität.

Die von H. Becquerel 1896 zuerst am Uran und von einer Reihe anderer Forscher noch an anderen schweren Atomen beobachtete Strahlung erwies sich als von *dreifacher* Art (Abb. 39). Es handelt sich in jedem Fall um eine Veränderung des Atomkerns. Die bereits besprochene *α -Strahlung* (s. S. 17 ff.) besteht in der Aussendung von He-Kernen ($\frac{1}{2}\text{He}$), die *doppelt positiv* geladen sind; demgemäß vermindert sich die Massenzahl *M* des strahlenden Kerns um 4, seine Kernladungszahl *Z* um 2 Einheiten. Die *β -Strahlung* ist eine *Elektronenstrahlung*, die bei unveränderter Massenzahl eine Erhöhung der Kernladung um 1 Elementarquantum zur Folge hat. Diese beiden Aus-sagen bilden den Inhalt der *Verschiebungssätze* von Soddy und Fajans (vgl. Abb. 40). Bei der *γ -Strahlung*, die immer in

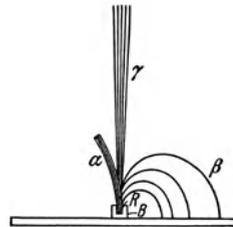


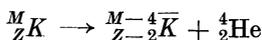
Abb. 39. Radioaktive Strahlen in einem Magnetfeld, senkrecht zur Zeichenebene von vorne nach hinten.

R radioaktiver Körper, B Bleibehälter.

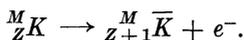
Begleitung von sekundärer β -Strahlung auftritt, werden von dem gebildeten Folgekern *Lichtquanten* (*Photonen*, s. S. 21 ff.) ausgesandt, die dem Übergang dieses zunächst in einem angeregten Zustand entstehenden Kerns in den Grundzustand ihre Entstehung verdanken. Die γ -Strahlung ist mit keiner Änderung der Massen- und Kernladungszahl verknüpft. Bedienen wir uns für einen beliebigen Kern der Darstellung:

$$\begin{array}{l} {}^M_Z K \quad M = \text{Massenzahl (abgerundetes Atomgewicht),} \\ \quad \quad Z = \text{Kernladungszahl (Zahl der pos. Elementarladungen),} \end{array}$$

so können wir die bei der α - und β -Strahlung auftretenden *Kernumwandlungen* leicht verständlich in der Form ausdrücken:



bzw.



Die *radioaktiven Umwandlungen* vollziehen sich nach dem statistischen *Zerfallsgesetz*. Demgemäß ist die Zahl dN der in der Zeit dt umgewandelten Atome proportional der Gesamtzahl N derselben und der Zeit dt :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (43)$$

$\lambda = \text{Zerfallskonstante}$ (das negative Vorzeichen drückt die Abnahme der Atomzahl aus). Durch Integration folgt daraus

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (44)$$

$N_0 = \text{Atomzahl zur Zeit } t = 0$. Die Bedeutung der Konstanten λ kommt in der *mittleren Lebensdauer* t_m , bzw. in der *Halbwertszeit* T zum Ausdruck:

$$t_m = \frac{1}{\lambda}, \quad (45)$$

für welche Zeit $N = \frac{N_0}{e} = 0,368 N_0$ wird;

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693 t_m, \quad (46)$$

für welche Zeit $N = \frac{N_0}{2}$ wird. Sind λ_α , λ_β die Zerfallskonstanten

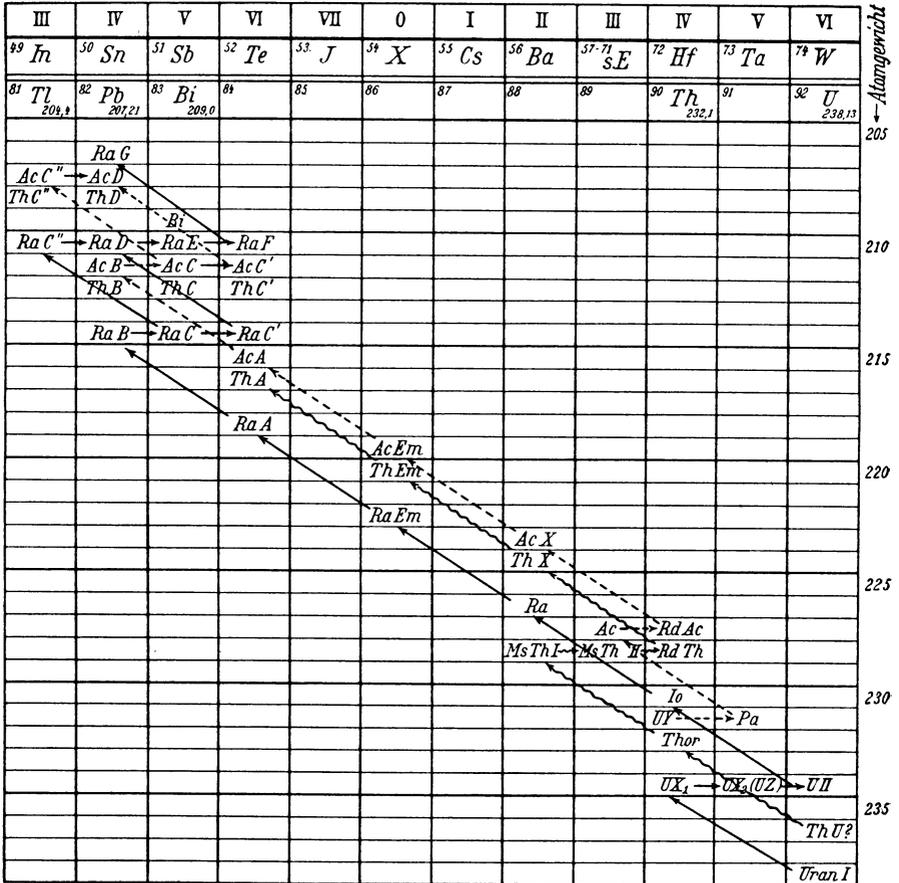


Abb. 40. Die radioaktiven Zerfallsreihen und ihre Einordnung in das periodische System.
 ———→ Uran-Radiumreihe; - - - - -→ Aktiniumreihe; ~~~~~→ Thoriumreihe (der Übersichtlichkeit halber nur bis *ThA* gezeichnet, dann parallel zur Aktiniumreihe mit um 1 vermindertem Atomgewicht).

α -Umwandlung = Verminderung des Atomgewichts um 4 Einheiten, Verschiebung um 2 Spalten nach links (= Abnahme der Kernladungszahl um 2); β -Umwandlung = gleiches Atomgewicht, Verschiebung um eine Spalte nach rechts (= Zunahme der Kernladungszahl um 1).

Zahlentafel 5. Die radioaktiven Stoffe.

Stoff	Z	Strahlung	Halbwertszeit	η cm/sec 10^9	Reichweite ¹ in cm bei 15° C	Atom- gewicht
Uran I	92	α	$4,5 \cdot 10^8$ a	1,40	2,70	238,18
Uran X ₁	90	β	23,8 d	14,4 bis 17,7	—	234
99,65% β ↓ 0,35% α ↓						
Uran Z	91	β	6,7 h	—	—	234
Uran X ₂	91	β, γ	70 s	24,6 bis 28,8	—	234
Uran II	92	α	etwa 10^6 a	1,50	3,28	234
3% α ↓						
Uran Y	90	β	24,6 h	—	—	230
97% α ↓						
Ionium	90	α	etwa $9 \cdot 10^4$ a	1,48	3,03	230
Radium	88	$\alpha (\beta, \gamma)$	1580 a	1,51	3,38	226,0
Radium-Emanation (Radon)	86	α	3,83 d	1,61	4,12	222
Radium A	84	α	3,0 m	1,69	4,72	218
Radium B	82	β, γ	26,8 m	10,8 bis 24,1	—	214
Radium C	83	$\alpha, \beta (\gamma)$	19,6 m	1,6	4	214
α ↓ 0,03% β ↓						
Radium C'	81	β, γ	1,32 m	—	—	210
Radium C''	84	α	$0,9 \cdot 10^{-8}$ s	1,92	6,97	214
Radium D (Radioblei)	82	β, γ	16 a	9,9 bis 12,1	—	210
Radium E	83	β, γ	4,85 d	$\sim 23,1$	—	210
Polonium (Radium F)	84	$\alpha (\beta)$	136,5 d	1,59	3,92	210
Uranblei (Radium G)	82	—	∞	—	—	206,0

Protoaktinium ←	91	α	1,2 · 10 ⁴ a	1,55	3,68	231
Aktinium	89	β	etwa 20 a	—	—	227
Radio-Aktinium	90	α (β, γ)	18,9 d	1,68	4,68	227
Aktinium X	88	α	etwa 11,2 d	1,65	4,41	223
Aktinium-Emanation (Aktinon)	86	α	3,9 s	1,81	5,79	219
Aktinium A	84	α	0,0015 s	1,89	6,58	215
Aktinium B	82	β, γ	36,0 m	11,4 bis 19,5	—	211
Aktinium C	83	α, β	2,16 m	1,78	5,51	211
↓ β 0,32%						
99,68% α Aktinium C'	84	α	etwa 0,005 s	1,88	6,49	211
Aktinium C'' ↓ α	81	β, γ	4,76 m	18 bis 27,3	—	207
Aktiniumblei (Aktinium D)	82	—	∞ (?)	—	—	207
Thorium	90	α	1,65 · 10 ¹⁰ a	1,39	2,59	232,12
Mesothor I	88	β	6,7 a	—	—	228
Mesothor II	89	β, γ	5,95 h	11 bis 29,97	—	228
Radiothor	90	α (β)	1,90 a	1,60	4,01	228
Thorium X	88	α	3,64 d	1,64	4,35	224
Thorium-Emanation (Thoron)	86	α	54,5 s	1,73	5,06	220
Thorium A	84	α	0,14 s	1,80	5,68	216
Thorium B	82	β, γ	10,6 h	18 bis 23,1	—	212
Thorium C	83	α, β	60 m	1,7	4,79	212
↓ β 65%						
35% α Thorium C'	84	α	etwa 10 ⁻¹¹ s	2,06	8,62	212
Thorium C'' ↓ α	81	β, γ	3,20 m	8,7 bis 25,2	—	208
Thoriumblei (Thorium D)	82	—	∞	—	—	208

¹ Bezogen auf Luft bei Atmosphärendruck.

für die α - bzw. β -Umwandlung, so gilt für den Fall, daß sich *beide Umwandlungen zugleich* vollziehen:

$$\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_\beta, \quad (47)$$

$$t_m = \frac{(t_m)_\alpha \cdot (t_m)_\beta}{(t_m)_\alpha + (t_m)_\beta}, \quad (48)$$

$$T = \frac{T_\alpha \cdot T_\beta}{T_\alpha + T_\beta}. \quad (49)$$

Setzt sich der radioaktive Zerfall bei den Folgekernen fort, so stellt sich schließlich zwischen der *Muttersubstanz* und ihren *Abkömmlingen radioaktives Gleichgewicht* ein, das durch die folgende Beziehung gekennzeichnet wird:

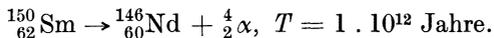
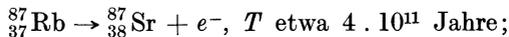
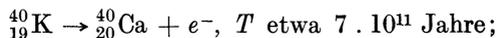
$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = \dots = \\ = -\lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2 = -\lambda_3 N_3 = \dots \end{aligned} \quad (50)$$

oder

$$\begin{aligned} N_1 : N_2 : N_3 : \dots = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} : \frac{1}{\lambda_3} : \dots = \\ = (t_m)_1 : (t_m)_2 : (t_m)_3 : \dots = T_1 : T_2 : T_3 : \dots; \end{aligned} \quad (51)$$

d. h. die jeweils vorhandenen Mengen N_1, N_2, N_3, \dots der Muttersubstanz und ihrer Abkömmlinge sind den mittleren Lebensdauern (Halbwertszeiten) proportional.

Aus der Erfahrung haben sich die folgenden drei großen *Zerfallsreihen* ergeben: die *Uran-Radium-*, die *Aktinium-* und die *Thorium-Reihe*. Über Massen- und Kernladungszahl, Art des Zerfalls und Halbwertszeit der einzelnen Abkömmlinge geben Abb. 40 und Zahlentafel 5 Auskunft. Außerdem wurde bei *Kalium* ($Z = 19$), *Rubidium* ($Z = 37$) und *Samarium* ($Z = 62$) Radioaktivität festgestellt:



3. Künstliche Atomumwandlung.

Der Ausdruck *Atomzertrümmerung* ist häufig *falsch* angebracht; denn oft handelt es sich um den *Aufbau* eines schwereren Atoms aus einem leichteren, wenn das zur Kernumwandlung verwendete Geschoß (α -Teilchen oder Deuteron) im Kern stecken bleibt und

ein leichteres Teilchen (Proton oder Neutron) ausgesandt wird. Wir beschäftigen uns zunächst mit der

a) **Erzeugung stabiler Kerne.** Die erste, künstliche *Atomumwandlung* wurde von E. Rutherford im Jahre 1919 beob-

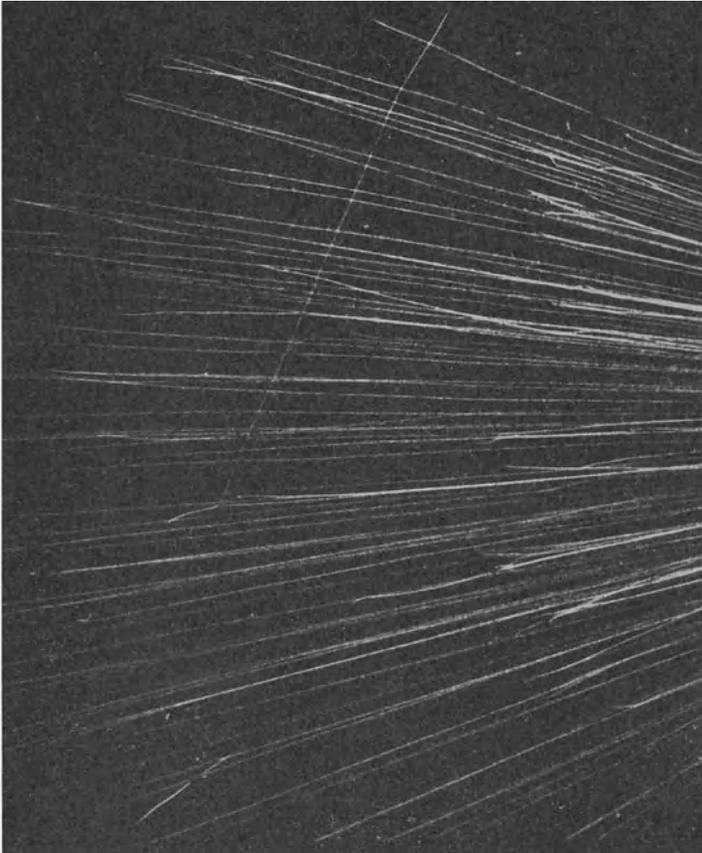
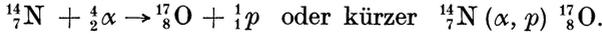


Abb. 41. Nebelkammeraufnahme der Kernumwandlung: ${}^{14}_7\text{N} (\alpha, p) {}^{13}_6\text{C}$ (nach Blackett).

achtet. Bei der Beschießung von *Stickstoff* mit Alphateilchen gibt es hie und da (unter etwa 100000 Schuß einmal) einen Treffer. Mit Hilfe einer Wilson-Kammer kann der Umwandlungsvorgang sichtbar gemacht werden (Abb. 41). Es zeigt sich dabei eine lange, dünne und eine kürzere, meist dickere Spur. Die letztere rührt

von dem getroffenen, in einen O-Kern verwandelten N-Kern her, die erstere von einem *Proton*, das an Stelle des steckengebliebenen Alphateilchens ausgesendet wird. Der Vorgang läßt sich durch die folgende *kernchemische* Gleichung beschreiben:



Bei dieser und jeder anderen Umwandlung haben sich folgende Sätze als gültig erwiesen: der *Impuls-* und der *Energiesatz* sowie der Satz von der *Erhaltung der elektrischen Ladung*.

α) Der *Impulssatz*. Angenommen (Abb. 42), eine Masse m , die in Ruhe sei, werde von einer Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 getroffen, z. B. ein N-Atom von einem Alphateilchen.

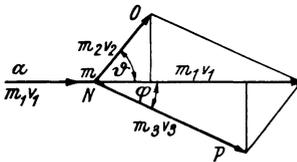


Abb. 42. Impulssatz bei einer Kernumwandlung.

Dabei bilden sich zwei neue Teilchen m_2 und m_3 , welche mit den Geschwindigkeiten v_2 und v_3 unter den Winkeln ϑ und φ auseinanderfliegen, in unserem Beispiel ein O-Atom und ein Proton. Um eine Kernumwandlung zu bewirken, dürfen wir annehmen, daß es sich um einen zentralen Stoß handelt,

bei dem das Geschöß in dem getroffenen Kern stecken bleibt und dabei ein *Zerplatzen* desselben (wie bei einer Rakete) in zwei, allenfalls auch drei neue Kerne hervorruft. Wir wollen hier nur den ersteren Fall näher betrachten.

Es gelten dann folgende Gleichungen [vgl. Gl. (23)]:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_2 v_2 \cos \vartheta + m_3 v_3 \cos \varphi, \\ 0 &= m_2 v_2 \sin \vartheta - m_3 v_3 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Durch *Stereo*aufnahmen kann der *räumliche* Verlauf des Vorganges und damit die Winkel ϑ und φ festgestellt werden (Abb. 46).

β) Der *Energiesatz*. Wir wollen im folgenden die Massen m_1, m_2, m_3 im Sinne der Relativitätstheorie von ihren Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 abhängig betrachten:

$$m_1 = \frac{(m_1)_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad \dots, \quad (53)$$

dann sind $m_1 c^2, m_2 c^2, m_3 c^2$ die Gesamtenergien (Ruh- und Bewegungsenergien) der einzelnen Teilchen. Für den beschriebenen

Zusammenstoß mit gleichzeitiger Kernumwandlung des ruhend gedachten Teilchens m ($= m_0$) gilt somit der *Energiesatz* in der Form:

$$m_1 c^2 + m c^2 = m_2 c^2 + m_3 c^2 + W; \quad (54)$$

W bedeutet die *Reaktionsenergie*, die bei der Kernumwandlung auftritt. W ist *positiv* bei einem *exothermen*, *negativ* bei einem *endothermen* Vorgang.

Schreibt man Ruh- und Bewegungsenergien getrennt, so lautet die Gleichung:

$$(m_1)_0 c^2 + E_1 + m_0 c^2 = (m_2)_0 c^2 + E_2 + (m_3)_0 c^2 + E_3 + W, \quad (54a)$$

dabei sind:

$$E_1 \approx \frac{m_1 v_1^2}{2}, \dots$$

die klassischen kinetischen Energien, erhalten aus den ersten Gliedern der Reihenentwicklungen der oben angegebenen Quadratwurzeln für den Fall, daß die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 klein gegen c sind.

Nach Division durch c^2 findet man die *Massengleichung*:

$$(m_1)_0 + m_0 + \frac{E_1}{c^2} = (m_2)_0 + (m_3)_0 + \frac{E_2 + E_3}{c^2} + \frac{W}{c^2}. \quad (54b)$$

Da für *jede* Energieform

$$E = m c^2, \text{ daher } \frac{E}{c^2} = m \quad (55)$$

gilt, besitzt jede Energie E ein *Massenäquivalent* m ; also sind $\frac{E_1}{c^2}, \frac{E_2}{c^2}, \frac{E_3}{c^2}$ die *Massenwerte* der kinetischen Energien, die meist sehr klein sind. Bei kleinen Geschwindigkeiten ($v_1, v_2, v_3 \ll c$) kann man sie vernachlässigen. Dagegen spielt der *Massenwert der Reaktionsenergie (Massendefekt)*

$$\frac{W}{c^2} = \Delta m \quad (56)$$

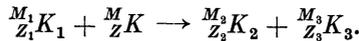
gewöhnlich eine größere Rolle, wenn er in der Regel auch nur einen *kleinen Bruchteil einer ME* beträgt.

Die erhaltene Massengleichung vereinfacht sich so zur Form:

$$(m_1)_0 + m_0 = (m_2)_0 + (m_3)_0 + \Delta m.^1 \quad (57)$$

¹ Δm ist gewöhnlich *positiv*, was einem exothermen Vorgang entspricht, der mit dem Übergang in einen Zustand *tieferer Energie* (*größerer Stabilität*) verknüpft ist (s. das Beispiel S. 65).

Der entsprechende *Kernprozeß* lautet:



Für die Massenzahlen muß demgemäß die Gleichung gelten:

$$M_1 + M = M_2 + M_3. \quad (58)$$

γ) Das Gesetz der Erhaltung der elektrischen Ladung. Die *elektrische Ladung* erweist sich auch bei den Kernum-

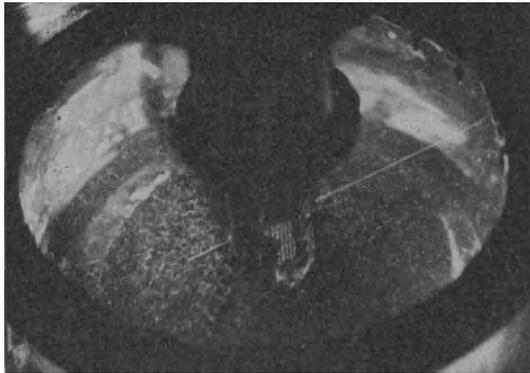
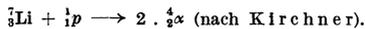


Abb. 43. Nebenkameraaufnahme der Kernumwandlung:



Eine dünne Lithiumschicht in der in der Mitte der Abbildung sichtbaren Kapsel wird durch von oben eintretende Protonen bestrahlt. Zwei α -Teilchen werden in entgegengesetzter Richtung ausgeschleudert, wobei das linke Teilchen in den Boden der Nebelkammer geht.

wandlungen als *unzerstörbar*, was in der folgenden Beziehung der Kernladungszahlen zum Ausdruck kommt:

$$Z_1 + Z = Z_2 + Z_3. \quad (59)$$

δ) Beobachtete Umwandlungen. Neben dem bereits eingangs erwähnten *Umwandlungsvorgang* (α, p), der eine mit Protonenaussendung verbundene Kernumwandlung durch α -Teilchen bezeichnet, wurde auch der *umgekehrte Vorgang* (p, α) beobachtet, der ebenso wie der erste besonders häufig bei *ungeradem* Z und *ungeradem* M vorkommt. Hierher gehören die von Cockcroft, Dee und Walton sowie von Kirchner erzielten Umwandlungen von Li und B durch hochgeschwinde Protonen:

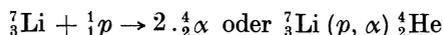
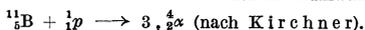




Abb. 44. Nebelkammeraufnahme der Kernumwandlung:



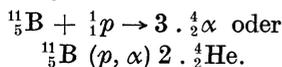
Drei α -Teilchen werden unter Winkeln von annähernd 120° ausgeschleudert.

(Abb. 43 und 47 a) mit der zugehörigen *Mas-sengleichung*:

$$7,0164 + 1,0076 = 2 \cdot 4,0028 + 0,0184,$$

aus der sich ein *Mas-sendefekt* $\Delta m = 0,0184$ ME ergibt.

Ebenso wie dieser Prozeß wurde auch der folgende photographisch festgehalten:



Es entstehen dabei drei Heliumkerne, die unter Winkeln von je 120° ausgeschleudert werden (Abb. 44).

Die Kernumwandlung (α, p) und ebenso ihre Umkehrung (p, α) lassen sich schematisch in einem *Koordinatensystem* (Z, M) zur Darstellung bringen, in dem jedem Atom entsprechend seiner

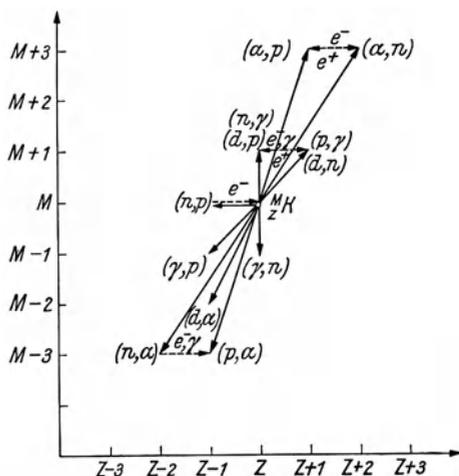


Abb. 45. Beobachtete Kernumwandlungen.

Radioaktive Vorgänge:

- > Aussendung eines Elektrons e^- ,
- <----- Aussendung eines Positrons e^+ .

Massenzahl M und seiner Kernladungszahl Z ein bestimmter Punkt zugeordnet wird (Abb. 45). Dasselbe gilt auch für *alle anderen* Kernumwandlungen, die wir im folgenden, mit Beispielen versehen, übersichtlich zusammenstellen:

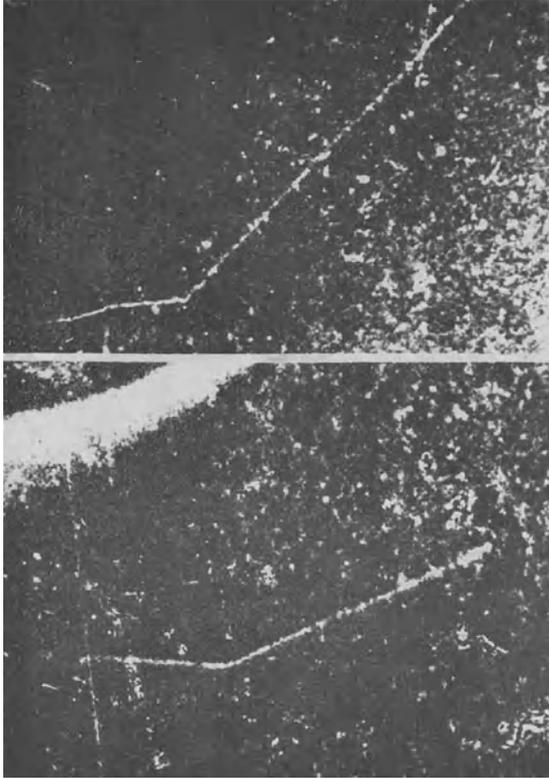
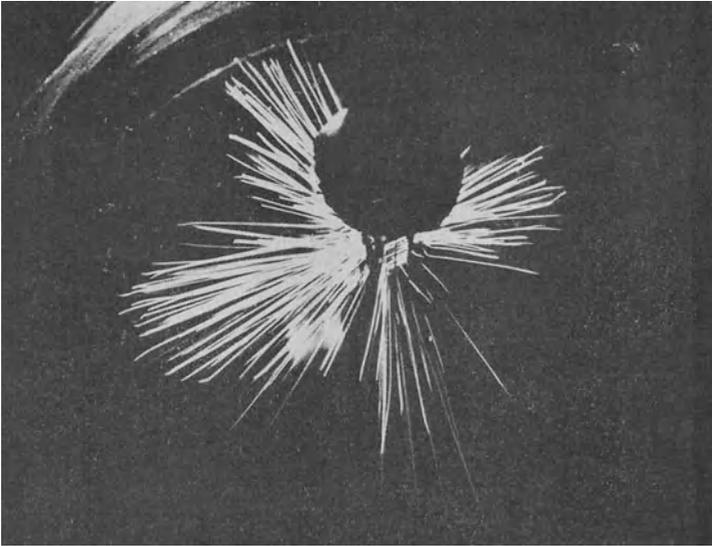


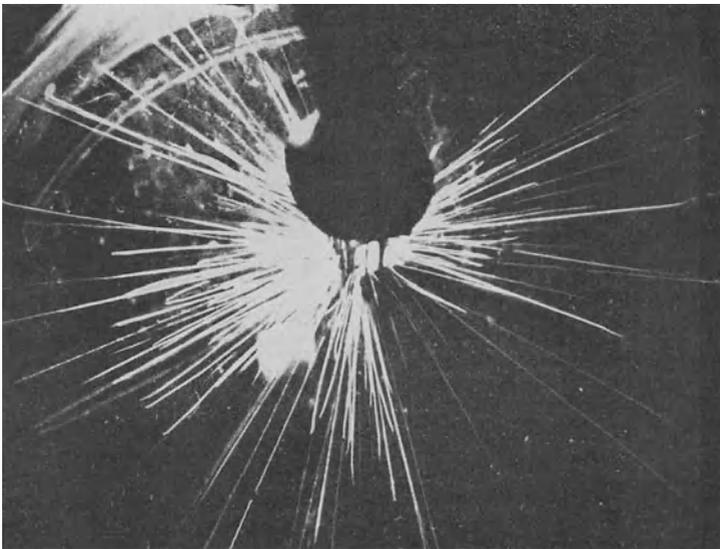
Abb. 46. Nebelkammeraufnahme der Kernumwandlung:
 ${}^{20}_{10}\text{Ne} (n, \alpha) {}^{17}_8\text{O}$ aus zwei verschiedenen Richtungen (nach Harkins, Gans und Newson).

(α, n) : besonders häufig bei *geradem* Z und *ungeradem* M : ${}^9_4\text{Be}$
 $(\alpha, n) {}^{12}_6\text{C}$ stellt jenen Vorgang dar, der zur *Entdeckung des Neutrons* geführt hat;

(n, α) : häufig, unter verschiedenartigen Bedingungen: ${}^{14}_7\text{N} (n, \alpha)$
 ${}^{11}_5\text{B}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne} (n, \alpha) {}^{17}_8\text{O}$ (Abb. 46);



a



b

Abb. 47 a und b. Zertrümmerung von Lithium durch Protonen (a) und Deuteronen (b) (nach De e und Wal ton).

Es ist deutlich zu erkennen, daß im zweiten Falle (b) neben α -Teilchen (kürzere, dicke Nebelspuren) auch Protonen (lange, dünne Spuren) entstehen.

- (d, α) : häufig bei *ungeradem* Z und *geradem* M : ${}^6_3\text{Li} (d, \alpha) {}^4_2\text{He}$ (Abb. 47 b), ${}^{10}_5\text{B} (d, \alpha) 2 {}^4_2\text{He}$, ${}^{14}_7\text{N} (d, \alpha) {}^{12}_6\text{C}$;
- (α, d) : wegen zu geringer Stabilität des ${}^2_1\text{D}$ (s. S. 81) *unwahrscheinlich*;
- (d, p) : bedeutet *Anlagerung eines Neutrons*, die besonders bei *ungerader Neutronenzahl* ($M - Z$) häufig ist: ${}^6_3\text{Li} (d, p) {}^7_3\text{Li}$ (Abb. 47 b), ${}^2_1\text{D} (d, p) {}^3_1\text{H}$;
- (p, d) : aus denselben Gründen wie (α, d) *nicht beobachtet*;
- (d, n) : bedeutet *Anlagerung eines Protons*, die besonders bei *ungeradem* Z auftritt: ${}^{11}_5\text{B} (d, n) {}^{12}_6\text{C}$, ${}^2_1\text{D} (d, n) {}^3_2\text{He}$;
- (n, d) : aus denselben Gründen wie (α, d) *nicht beobachtet*;
- (p, n) : *nicht beobachtet*;
- (n, p) : s. unter *b*.

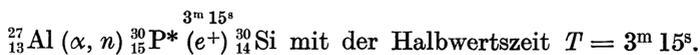
Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß auch *Lichtquanten hoher Energie* Kernumwandlungen bewirken können:

$$(\gamma, p): {}^2_1\text{D} (\gamma, p) {}^1_0n;$$

$$(\gamma, n): {}^2_1\text{D} (\gamma, n) {}^1_1p, h\nu = 2,6 \text{ eMV (s. Fußnote S. 81 f.)}$$

Der zuletzt beschriebene Vorgang wurde von Chadwick und Goldhaber 1934 zur *Berechnung der Neutronenmasse* verwendet. Auch die *Umkehrungen* (p, γ) und (n, γ) wurden beobachtet, besonders die zweite erweist sich als sehr häufig bei allen Kernen.

b) Erzeugung instabiler Kerne. Künstliche Radioaktivität. Diese der natürlichen Radioaktivität entsprechende Erscheinung wurde von Irene Curie und F. Joliot (1934) bei der Beschießung von Al mit Alphastrahlen entdeckt. Man gibt den Alphastrahler (z. B. Polonium) in einen Topf, der außen von einer Aluminiumschicht umhüllt ist. Nach Entfernen des Alphastrahlers beobachtet man noch eine Zeitlang, daß vom Al-Blech *Positronen* ausgehen, also eine *selbsttätige Weiterzerlegung* mit genau bestimmter *Halbwertszeit* eintritt. Offenbar hat sich zunächst *radioaktiver Phosphor* P^* gebildet, der sich als *Positronenstrahler* erweist. Die Kernreaktionsgleichung lautet:



Lise Meitner hat diesen Vorgang durch Nebelkammeraufnahmen im Bild festgehalten (Abb. 48 a, b und c). Bei der natürlichen

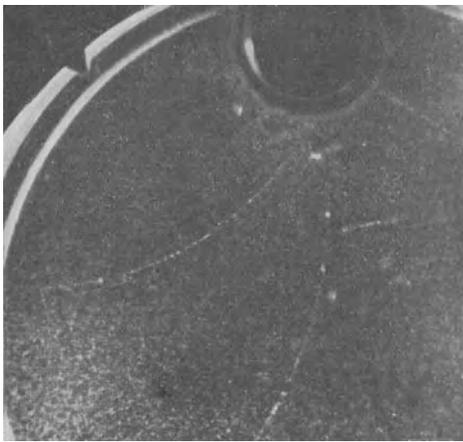
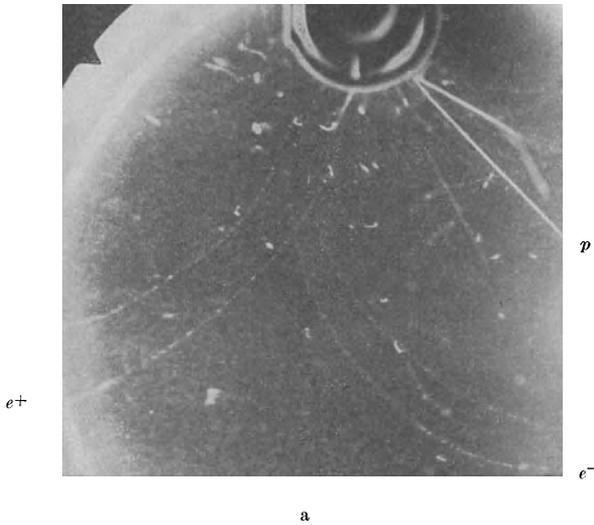


Abb. 48 a. Aussendung von Elektronen, Positronen und Protonen aus Al bei Bestrahlung mit α -Teilchen.

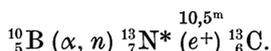
Abb. 48 b und c. Aussendung von Positronen aus Al: b kurz, c 9^m nach Entfernen des α -Strahlers.

(Nebenkammeraufnahmen im Magnetfeld von L. Meitner.)

Radioaktivität gibt es keinen solchen Positronenzerfall. Die Halbwertszeit der e^+ -Strahlung ist durchwegs sehr kurz. Daher wurden auch die Positronen erst so spät entdeckt.

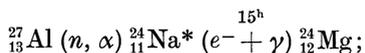
Wir fassen die bisher beobachteten Fälle *künstlicher* Radioaktivität in einer *Übersicht* zusammen (Abb. 45):

(α , n) mit nachfolgendem e^+ -Zerfall: Außer dem angegebenen Beispiel, das zur Entdeckung der Erscheinung geführt hat, sei noch das folgende hierhergesetzt:

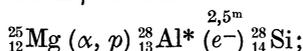


Aber auch künstliche Radioaktivität mit nachfolgendem β -(e^-)-Zerfall und γ -Strahlung wurde beobachtet:

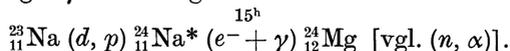
(n , α) mit nachfolgendem β -Zerfall und sehr kurzweiliger γ -Strahlung:



(α , p) mit nachfolgendem β -Zerfall:

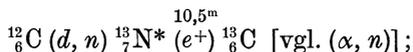


(d , p), n -Anlagerung mit nachfolgendem β -Zerfall und sehr kurzweiliger γ -Strahlung:

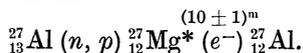


Dem *radioaktiven* Na, das durch Beschießung von *Steinsalz* mit hochgeschwinden Deuteronen erhalten werden kann (s. u.), scheint besondere *medizinische* Bedeutung zukommen, da sich durch Verabreichung von radioaktivem Steinsalz an Kranke die Möglichkeit zur inneren Bestrahlung von Magen und Darm mit einer durch die Halbwertszeit ($T = 15^{\text{h}}$) beschränkten Dosierung eröffnet.

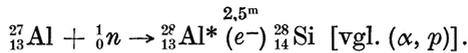
(d , n), p -Anlagerung mit nachfolgendem e^+ -Zerfall:



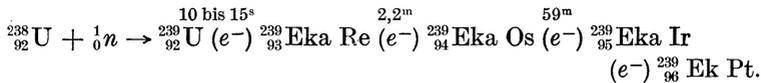
(n , p), mit nachfolgendem β -Zerfall ergibt *Rückbildung* des ursprünglichen Kerns:



Umwandlung durch *langsame Neutronen* mit nachfolgendem β -Zerfall:



Während *positiv geladene* Teilchen ($\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}p$) sich nur mit entsprechend *hoher Geschwindigkeit* einem ebenfalls positiv geladenen Kern zu nähern vermögen, können die *ungeladenen* Neutronen auch bei *sehr langsamer* Bewegung unmittelbar an die Kerne herankommen und mit ihnen in Wechselwirkung treten. Dabei wird es zu keiner Ablösung eines anderen schweren Teilchens wie im Falle (n, α) oder (n, p) , sondern bloß zu einer Aufnahme des Neutrons in den Kern kommen. Die darauf folgende Aussendung eines β -Teilchens bewirkt sodann eine Erhöhung der Kernladungszahl um 1. Es ist zu erwarten, daß dieser Umwandlungsvorgang auch bei den Kernen mit *größter* Kernladung bis zum *Uran* eintritt. Damit eröffnet sich, wie zuerst E. Fermi (1934) erkannt hat, die Möglichkeit, die *natürliche Reihe* der Elemente noch zu *erweitern*. Es ist ihm sowie L. Meitner und Mitarbeitern gelungen, die folgenden „*Transurane*“ zu erhalten: ${}_{93}\text{Eka Re}$, ${}_{94}\text{Eka Os}$, ${}_{95}\text{Eka Ir}$ und ${}_{96}\text{Eka Pt}$. Die Umwandlungen finden, wie folgt, statt:



c) Erzeugung energiereicher (hochgeschwinder) Protonen und Deuteronen.

α) Elektrische Hochspannungsgeneratoren. Außerordentlich hohe Spannungen sind im *Massachusetts Institute of Technology* nach dem Verfahren von Van de Graaff erreicht worden, bei dem mit Ausnützung der *Influenzwirkung* ähnlich wie bei den Influenzmaschinen auf zwei großen kugelförmigen Konduktoren von 4,5 m Durchmesser Elektrizitätsmengen bis zu einer Spannung von 2,5 MV gegen Erde angesammelt werden können, die in einem Entladungsrohr einen *Protonen-* bzw. *Deuteronenstrom* von $25 \cdot 10^{-6}$ Amp. liefern. Die dabei erzielten kinetischen Energien reichen hin, um die unter 3, a, δ beschriebenen Kernumwandlungen (p, α) und (d, α) , (d, p) und (d, n) durchzuführen. Ein schematisches Bild des Elektrizitätstransportes vermittels laufender, aus isolierendem Stoff bestehender Bänder zeigt

Abb. 49, ein Gesamtbild der Anlage von Van de Graaff, Compton und Van Atta bietet Abb. 50. Eine leistungsfähige Hochspannungsanlage gleicher Art jedoch kleineren Umfanges von

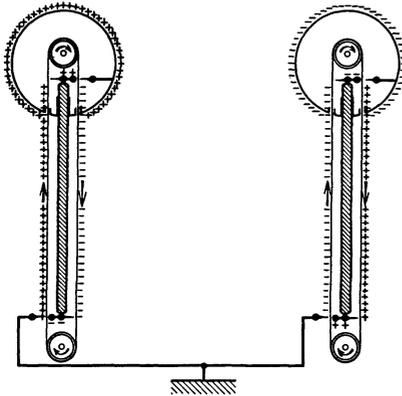


Abb. 49. Prinzip des elektrostatischen Hochspannungsgenerators (nach R. J. Van de Graaff, K. T. Compton und L. C. Van Atta).

Bothe und Gentner, die sich im *Heidelberger* Physikalischen Institut befindet und auf einer zylindrischen Elektrode von 58 cm Durchmesser eine Spannung von 540 kV liefert, ist in Abb. 51 dargestellt. Die Entladung findet in der unter der zylindrischen Elektrode angebrachten Porzellanröhre von 43,5 cm Innendurchmesser und 167 cm Länge statt.

In jüngster Zeit hat eine zuerst von H. Greinacher (1920) angegebene Anordnung von Kondensatoren und Ventilröhren zur

Erreichung hoher Gleichspannungen eine weitere Ausbildung erfahren, deren Ergebnis der heutige „*Kaskadengenerator*“ darstellt. Die Schaltung einer solchen Anlage, wie sie gegenwärtig N. V. Philips'

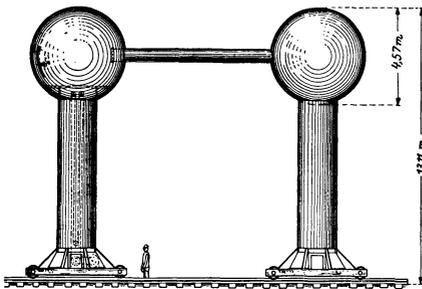


Abb. 50. Gesamtbild des Van de Graaffschen Hochspannungsgenerators (nach R. J. Van de Graaff, K. T. Compton und L. C. Van Atta).

herstellen, zeigt Abb. 52. Man kann vergleichsweise sagen, daß beim Kaskadengenerator an die Stelle des den Ladungstransport besorgenden, laufenden Bandes der Van de Graaffschen Anlage eine Reihe von Ventilröhren tritt, die die elektrischen Ladungen auf eine bestimmte Höchstspannung gegen Erde em-

porpumpen. Der dabei erzielte Vorteil gegenüber den zuerst beschriebenen elektrostatischen Anlagen besteht einerseits in den geringeren Abmessungen der Apparatur, anderseits und ganz besonders in dem Gewinn an Stromstärke der Teil-

chenstrahlen (einige mA) sowie in der Unabhängigkeit von atmosphärischen Einflüssen (Luftfeuchtigkeit). Das Gesamtbild eines 6stufigen Kaskadengenerators mit Hochfrequenz-

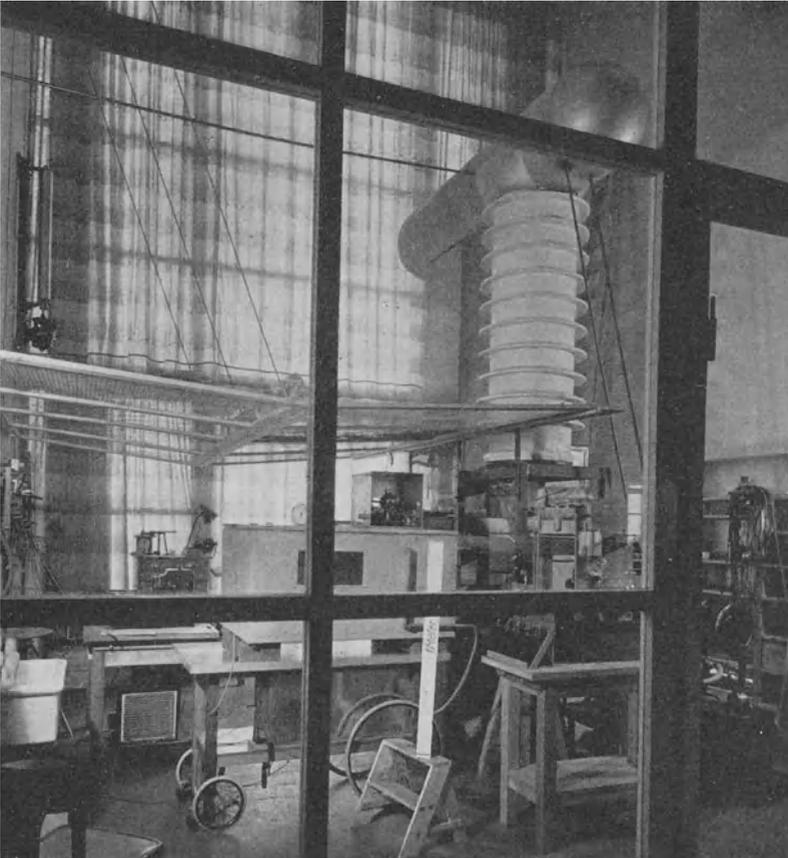


Abb. 51. Hochspannungsanlage zur Erzeugung schneller Korpuskularstrahlen von W. Bothe und W. Gentner im Heidelberger Physikalischen Institut.

heizung der Ventilröhren aus dem Cavendish-Laboratorium zu Cambridge sehen wir in Abb. 53.

β) Hochspannungswechselfeld in Verbindung mit einem Magnetfeld. Nach einem wesentlich anderen Verfahren

sind Lawrence und Livingstone im *California Institute of Technology* vorgegangen. In dem von ihnen gebauten „*Cyclotron*“ (Abb. 54) werden *Protonen* und *Deuteronen* durch ein *starkes Magnetfeld* auf *Kreisbahnen* gezwungen, die sie mit stets *gleich-*

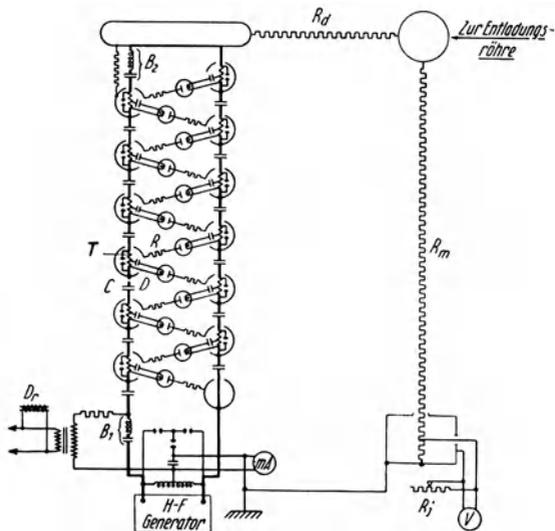


Abb. 52. 6stufiger Kaskadengenerator mit Hochfrequenzheizung der Ventilkathoden (Schaltbild).

Gleichspannungsanlage: Hochspannungstransformator von 120 kV Scheitelspannung bei 200 Htz mit Drossel D_r (links unten); zwei Reihen von je 6 Kondensatoren C in Serie, dazwischen 12 Ventiltröhren; R_d und R_m Hochohmwiderstände; R_j Regelwiderstand für das Spannungsmeßgerät V .

Hochfrequenzkreis (stark ausgezogen): $H-F$ Hochfrequenzgenerator mit 250 W abgegebener Leistung und einer festen Frequenz von 500 000 Htz; B_1 und B_2 Überbrückungsglieder zur linken bzw. zwischen beiden Kondensatorreihen; T Hochfrequenztransformatoren zur Heizung der Ventilkathoden; R Dämpfungswiderstände zur Verhinderung eines Hochfrequenzkurzschlusses zwischen den Kondensatorreihen; D Kondensatoren zur Verminderung der Strahlung der ganzen Anordnung. (Nach A. Bouwers und A. Kuntke).

bleibender Umlaufszeit durchlaufen. Durch ein mit dieser Umlaufszeit *synchronisiertes Wechselfeld* von 100 kV werden die Teilchen jeweils nach Durchlaufung eines Halbkreises *nachbeschleunigt*, bis sie (bei zunehmendem Bahnradius) schließlich die kinetische Energie von $5 \cdot 10^6$ eV erreichen, die sie unter anderem befähigt, die unter 3, b beschriebene Erzeugung von *radioaktivem Na* durch einen (d, p)-Prozeß durchzuführen. Der in Abb. 54 dargestellte

Elektromagnet erforderte zu seiner Herstellung 65 t Magnetstahl und 9 t Kupferdraht für die 3600 Windungen der Magnetspulen.

Das Verfahren, nach dem beim *Cyclotron* die *Mehrfachbeschleunigung* der Ionen bewerkstelligt wird, wollen wir noch etwas näher betrachten. Die Abb. 55 und 56 zeigen die in der Mitte durch einen Spalt geteilte, zylindrische Dose, deren Hälften je an einen Pol eines Hochfrequenzge-

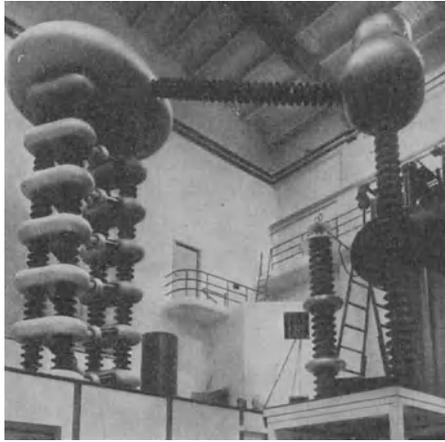


Abb. 53. 6stufiger Kaskadengenerator im Cavendish-Laboratorium zu Cambridge, der 1,25 MV gegen Erde liefert. (N. V. Philips, Glühlampenfabriken, Eindhoven, Holland.)

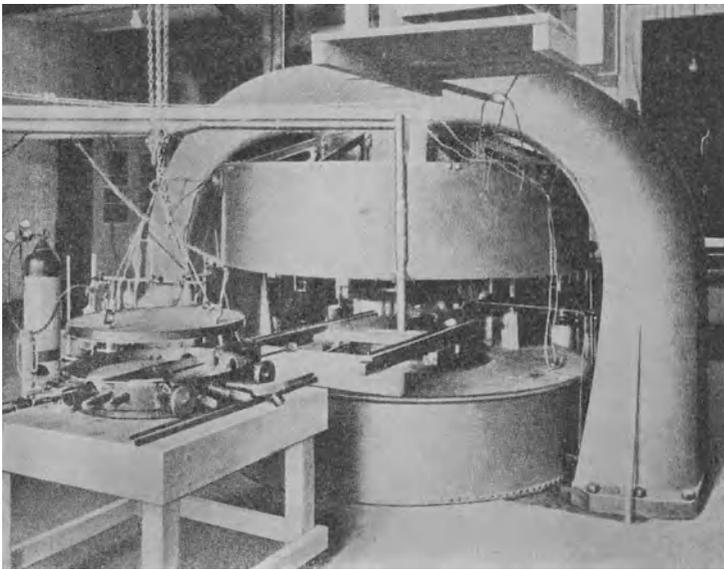


Abb. 54. Cyclotron von E. O. Lawrence und M. S. Livingston zur Erzeugung hochgeschwinder Ionen (Protonen und Deuteronen).

nerators gelegt sind. Die von einem Glühfaden F über dem Spalt ausgehenden Elektronen erzeugen im Innern der Dose

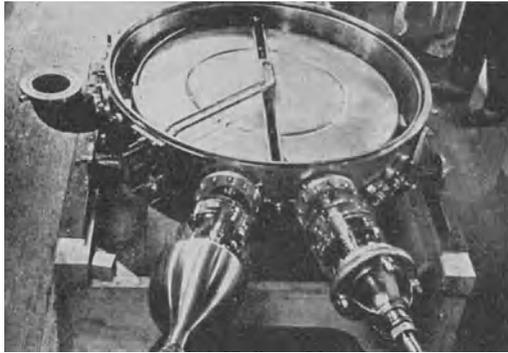


Abb. 55. Vorrichtung zur Mehrfachbeschleunigung von Ionen im Cyclotron. Vorne Anschlüsse an einen Hochfrequenzgenerator von etwa 15 kV (20 kW).

durch Stoß Gasionen, die durch die Wechselfspannung beschleunigt und von dem senkrecht zur Dose verlaufenden Magnetfeld H in immer größer werdende, halbkreisförmige Bahnen gelenkt werden. Ist v die augenblickliche Geschwindigkeit eines Ions mit der Masse m und der Ladung e , so ist sein Bahnradius r (s. S. 7) durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{e}{c} v H, \quad r = \frac{m c v}{e H}, \quad (11)$$

und die zur Durchlaufung des Halbkreises erforderliche Zeit beträgt:

$$\tau = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m c}{e H};$$

sie erweist sich also *unabhängig* von r und v , d. h. bei zunehmendem Bahnradius und wachsender Geschwindigkeit bleibt die Umlaufzeit des Ions unverändert. So wird es möglich, durch eine im gleichen Rhythmus veränderliche Wechselfspannung die Ionen jeweils beim Durchlaufen des Spaltes neuerdings zu

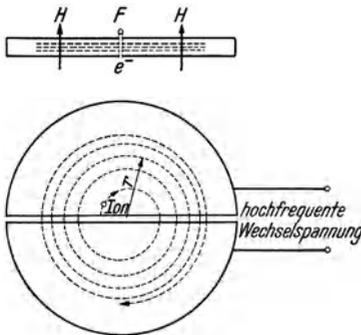


Abb. 56. Ionenbahn im Cyclotron. F Glühfaden (Elektronenquelle); H Magnetfeld von 10 bis 14 k G. (Nach Lawrence und Livingston.)

laufzeit des Ions unverändert. So wird es möglich, durch eine im gleichen Rhythmus veränderliche Wechselfspannung die Ionen jeweils beim Durchlaufen des Spaltes neuerdings zu

beschleunigen. Für die *Wellenlänge* des Wechselstromes ergibt sich:

$$\lambda = 2 c \tau = \frac{2 \pi m c^2}{e H}.$$

Abb. 56 zeigt die aus Halbkreisen gebildete, spiralgige Bahn eines Ions. Durch eine Ablenkspannung von etwa 20000 V wird schließlich das Ion aus seiner Endbahn ($r = r_e$) herausgelenkt. Die erlangte *Endenergie* beträgt:

$$E_e = \frac{m v_e^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{r_e^2 e^2 H^2}{m^2 c^2} \text{ Erg} = 150 \frac{e}{m c^2} H^2 r_e^2 \text{ eV}.$$

Bei etwa 14000 Gauß ($\lambda = 14 \text{ m}$) lassen sich Protonenhöchstenergien bis 6 eMV bei Stromstärken von einigen μA (10^{-6} A) erreichen.

4. Aufbau der Kerne.

Aus den Versuchsergebnissen der Kernforschung geht hervor, daß als *Kernbausteine* die Teilchen e^+ , e^- , $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}\alpha$ in Betracht kommen, also *Positronen*, *Elektronen*, *Protonen*, *Neutronen* und *Alphateilchen*, welche letztere, selbst zusammengesetzt, wahrscheinlich im Kern Gebilde mit besonderer Festigkeit darstellen.

Wegen der *Unabhängigkeit* der Massenzahl M von der Kernladungszahl Z sind zum Aufbau eines Kernes *mindestens zwei* Bestandteile erforderlich. e^+ und e^- für sich allein scheiden aus, weil sie keinen ausreichenden Beitrag zur Masse des Kernes zu liefern vermögen. Wenn Masse und Ladung sichergestellt sein sollen, so bleiben nur folgende Möglichkeiten:

- a) $\frac{M}{Z}K = M \cdot \frac{1}{2}p + (M - Z) \cdot e^-;$
- b) $\frac{M}{Z}K = M \cdot \frac{1}{2}n + Z \cdot e^+;$
- c) $\frac{M}{Z}K = Z \cdot \frac{1}{2}p + (M - Z) \cdot \frac{1}{2}n.$

Dabei zeigt sich, daß für Elemente, deren Kernladungszahl $Z > 20$ ist, $M - Z > Z$, also $M > 2Z$ ist.

Fall a ist lange Zeit als zutreffend angesehen worden, mußte aber schließlich so wie Fall b aufgegeben werden, da es heute sicher zu sein scheint, daß im Kern *weder* e^+ noch e^- als *solche* vorhanden sind. Die für die Existenz solcher Kernteilchen sprechende *Elektronenradioaktivität* dürfte ihre Erklärung darin finden, daß die ausgesandten *Positronen* und *Elektronen erst im Augenblick des Zerfalls entstehen*. Überdies bildet der Umstand, daß der *Elektronen-*

radius größenordnungsmäßig mit dem der Kerne übereinstimmt,¹ schon längst eine Schwierigkeit für die Vorstellung, daß nach a ($M - Z$) $. e^-$, nach b $Z . e^+$ im Kern Platz finden sollen, wobei noch zu bemerken ist, daß diese Teilchen als Massenträger gar nicht in Betracht kommen, also für die eigentliche schwere Materie noch genügend Raum vorhanden sein muß.

Es vermag somit *nur Fall c die Wirklichkeit richtig wiederzugeben.*

d) Die *natürlich radioaktiven* Prozesse legen ferner die Annahme nahe, daß beim Kernaufbau die *Alphateilchen* eine besondere Rolle spielen. Wir müssen dabei unterscheiden:

α) $Z = 2z$ (gerade Kernladungszahl):

$${}^M_{2z}K = z \cdot \frac{1}{2}\alpha + (M - 4z) \cdot \frac{1}{0}n, \text{ wenn } M \geq 4z;$$

β) $Z = 2z + 1$ (ungerade Kernladungszahl):

$${}_{2z+1}^M K = z \cdot \frac{1}{2}\alpha + (M - 4z - 1) \cdot \frac{1}{0}n + \frac{1}{1}p, \text{ wenn } M \geq 4z + 1.$$

Dieser Aufbau dürfte in vielen Fällen Bedeutung haben.

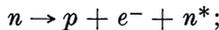
Zu der oben erwähnten *Elektronenradioaktivität* natürlicher und künstlich hergestellter Kerne sei noch ergänzend bemerkt, daß die Tatsache der Aussendung von Elektronen und Positronen aus Kernen, die diese Teilchen von vornherein gar nicht enthalten, die nur aus Protonen und Neutronen aufgebaut sind, nicht das einzige Rätsel dieses Vorganges darstellt, daß vielmehr der β -Zerfall auch vom *energetischen* Standpunkt rätselhaft erscheint. Während beim α -Zerfall deutlich unterschiedene, *quantenmäßig* bedingte

¹ Der „klassische“ *Elektronenradius* r_e wird aus der Überlegung abgeleitet, daß die *potentielle* Energie des Elektrons, das wir uns zunächst als Kugel mit *Oberflächenladung* denken wollen, dessen gesamten Energieinhalt darstellt und dadurch auch dessen Ruhmasse m_e bestimmt:

$$\frac{e^2}{2r_e} = m_e c^2, \quad r_e = \frac{e^2}{2m_e c} = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Die Annahme einer zusätzlichen *Kohäsionsenergie* vom gleichen Betrage führt zum üblichen Elektronenradius $2,8 \cdot 10^{-13}$ cm. Nimmt man eine Kugel mit *Raumladung* an, so wird die potentielle Energie und damit $r_e \frac{6}{5}$ mal so groß. Für die *Kernradien* auch der *schwersten Kerne* folgt aus Streuversuchen $r_K \leq 9,5 \cdot 10^{-13}$ cm.

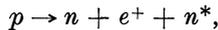
Energiestufen auftreten, ist das Spektrum des β -Zerfalles *kontinuierlich*, und es erhebt sich die Frage, was mit dem jeweiligen *Energierest* geschieht, der den langsameren β -Teilchen an kinetischer Energie abgeht. Um einem Widerspruch mit dem *Energiesatz* zu entgehen, mußte man sich entschließen, einem Vorschlag W. Paulis folgend, die Existenz von *Teilchen ohne Ladung* und mit einer *Masse*, die höchstens der des *Elektrons* gleichkommt, anzunehmen. E. Fermi hat für ein solches Teilchen den Namen „*Neutrino*“ eingeführt. Nach seiner Auffassung vollzieht sich der β -Zerfall eines Kernes folgendermaßen:



beim Übergang eines Kernneutrons n in ein Proton p wird ein Elektron e^- zugleich mit einem Neutrino n^* ausgesendet. Für die bei der Kernumwandlung freiwerdende Energie gilt dann der *Energiesatz* in der Form:

$$E = m_e c^2 + (E_{\text{kin}})_e + m_{n^*} c^2 + (E_{\text{kin}})_{n^*}.$$

Mit der kinetischen Energie des ausgesandten Elektrons $(E_{\text{kin}})_e$ ändert sich diejenige des gleichzeitig ausgesandten Neutrinos $(E_{\text{kin}})_{n^*}$ derart, daß die gesamte freiwerdende Energie E stets gleichbleibt. Der höchste Wert von $(E_{\text{kin}})_e$ wird offenbar dann erreicht, wenn $(E_{\text{kin}})_{n^*} = 0$ wird. Der Satz von der *Erhaltung des Drehimpulses* macht ferner, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, die Annahme notwendig, daß das *Neutrino* einen *Spin vom gleichen Betrag wie das Elektron* (s. S. 116) besitzt. In ähnlicher Weise wie den β -Zerfall haben wir uns auch den e^+ -Zerfall vorzustellen:



bei dem die Umwandlung eines Kernprotons p in ein Neutron n unter Aussendung eines Positrons e^+ in Verbindung mit der eines Neutrinos n^* erfolgt.

Auch die Tatsache, daß Vereinigungen *gleichartig* (positiv) *geladener* Teilchen, wie sie in den Atomkernen vorliegen, Bestand haben können, bedarf einer Erklärung. Wir wollen uns vorstellen, ein positiv geladenes Teilchen (etwa ein α -Teilchen) bewege sich gegen einen Kern. Vorerst wird die *Coulombsche Abstoßung* zu überwinden sein und die bei der Annäherung zu leistende Arbeit gemäß der in Abb. 57 dargestellten Poten-

tialkurve ansteigen. Dies wird bis in unmittelbare Kernnähe $r_0 \approx 10^{-12}$ cm der Fall sein. Dann wird die zwischen einem Proton und einem Neutron wirkende Anziehungskraft, die sogenannte *Neutron-Proton-Kraft*, wirksam werden, die mit einer sehr viel höheren Potenz wächst als die Coulombsche Abstoßung. Die Folge hiervon ist ein rascher Abfall der Potentialkurve, die Ausbildung eines „*Potentialtopfes*“, wie ihn Abb. 57 zeigt, die man sich zur Gewinnung eines räumlichen Bildes um

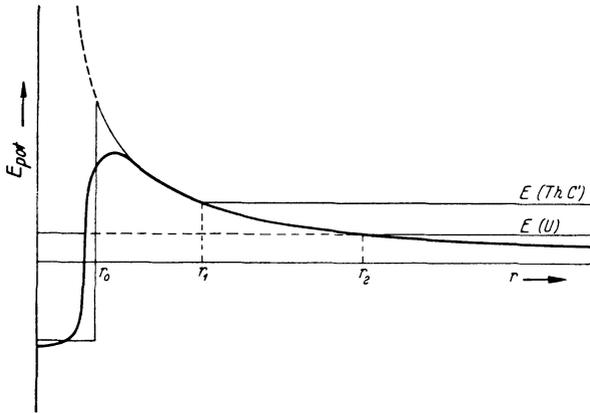


Abb. 57. Verlauf der potentiellen Energie zwischen einem schweren Kern und einem α -Teilchen (nach G. G a m o w).

r_0 Kernradius; $E(U)$ bzw. $E(Th C')$ Energie eines Uran- bzw. Thorium C' - α -Teilchens, die geringer ist als die Höhe des „Potentialwalles“. Nach klassischen Vorstellungen ist somit der Austritt eines α -Teilchens aus dem Kern ausgeschlossen. Der radioaktive α -Zerfall findet seine Erklärung erst durch die Quantenmechanik, die für seinen Eintritt eine gewisse Wahrscheinlichkeit anzugeben vermag.

die E_{pot} -Achse gedreht zu denken hat. Die Verhältnisse liegen hier ganz ebenso wie bei einer mit einem Wall umgebenen Erdmulde, in die eine heranrollende Kugel nach Überwindung des Walles hineinfällt. Die Protonen bzw. α -Teilchen eines Atomkerns liegen in ihm wie Kugeln in einer solchen Erdmulde. Ebenso wie diese in ihr nur in beschränkter Zahl Platz haben und bei einer Überfüllung schließlich über den äußeren Wall hinabrollen werden, so können auch Protonen bzw. α -Teilchen nicht in beliebiger Zahl in einem Atomkern angehäuft werden. Sobald (von einem gewissen Z an) die Abstoßungsenergie der Coulombschen Kräfte die Anziehungsenergie der Neutron-Proton-Kraft überwiegt, ist

ein stabiler Zusammenhalt der positiven Teilchen nicht mehr möglich, es kommt zum *Zerfall* des Kernes mit Aussendung eines geladenen, schweren Teilchens, wie wir dies bei den natürlich *radioaktiven* Vorgängen beobachten.

5. Massendefekt, Bindungsenergie und Stabilität der Kerne.

Wie schon bemerkt (s. S. 63 u.), tritt in der Massengleichung einer Kernumwandlung in der Regel ein *Massendefekt* Δm zutage, der der *Reaktionsenergie* des Vorganges entspricht und als Maß für die *Stärke der Bindung (Stabilität)* des entsprechenden Kerngebildes angesehen werden kann.

Wenn wir für den Aufbau eines Kernes die Annahme 4, c (S. 77) machen, ihn also aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt betrachten, so können wir aus der zwischen der Kernmasse m_K und der Summe der Protonen- und Neutronenmassen bestehenden *Massendifferenz* Δm (*Massendefekt*) die *Bindungsenergie* des Kernes berechnen (vgl. S. 63):

$$\begin{aligned} W &= c^2 \Delta m = c^2 \cdot [Z m_p + (M - Z) m_n - m_K] = \\ &= c^2 \cdot [Z m_H + (M - Z) m_n - m_A]. \end{aligned} \quad (60)$$

Es ist für die Rechnung bequemer, statt der Kernmasse m_K die *Atommasse* m_A zu benützen, die mit Hilfe des Massenspektrographen unmittelbar erhalten werden kann. Da diese aber außer der Kernmasse auch noch die Masse der Z Hüllenelektronen enthält, ist es nötig, die Masse derselben wieder in Abrechnung zu bringen, was am einfachsten dadurch geschieht, daß man statt der Z Protonenmassen Z H-*Atommassen* m_H in Rechnung stellt. Wir wollen die angegebene Formel zur Ermittlung der *Bindungsenergie* des *Deuterons* und des *Alpha-teilchens* verwenden (s. Zahlentafel 1, S. 4).

a) *Bindungsenergie des Deuterons* ${}^2\text{D} \{ {}^1\text{p} + {}^1\text{n} \}$.

$$\Delta m_d = m_p + m_n - m_d = (1,673 + 1,676 - 3,345) \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

$$\Delta m_d = 0,4 \cdot 10^{-26} \text{ g},$$

$$W_d = c^2 \cdot \Delta m_d = 0,4 \cdot 10^{-26} \cdot 9,10^{20} \text{ Erg},$$

$$W_d = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Erg} \approx 2,10^6 \text{ eV.}^1$$

¹ 1 eV (*Elektronvolt*) bedeutet jene Energie, die der kinetischen Energie eines Elektrons (allgemein jedes Trägers einer Elementar-

b) Bindungsenergie des Alphateilchens ${}^4_2\alpha \{2\frac{1}{2}p + 2\frac{1}{2}n\}$.

$$\Delta m_{\alpha} = 2(m_p + m_n) - m_{\alpha} = [2(1,673 + 1,676) - 6,647] \cdot 10^{-24} \text{ g,}$$

$$\Delta m_{\alpha} = 5,1 \cdot 10^{-26} \text{ g,}$$

$$W_{\alpha} = c^2 \Delta m_{\alpha} = 5,1 \cdot 10^{-26} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ Erg,}$$

$$W_{\alpha} = 46 \cdot 10^{-6} \text{ Erg} \approx 29 \cdot 10^6 \text{ eV} \approx 14 W_d.$$

Die Annahme ${}^4_2\alpha \{2 \cdot \frac{1}{2}d\}$ führt, wie man leicht nachrechnet, auf

$$W_{\alpha'} \approx 38 \cdot 10^{-6} \text{ Erg} \approx 24 \cdot 10^6 \text{ eV} \approx 12 W_d.$$

Aus dieser Rechnung geht mit aller Deutlichkeit die *große Stabilität des Alphateilchens* hervor, das erst unter dem Einfluß außerordentlich hoher Spannung, wie sie in keinem Laboratorium der Gegenwart erzeugt werden kann, zerlegt werden könnte. *Wesentlich geringer* ist dagegen die *Festigkeit des Deuterons*, dessen Zertrümmerung durch harte γ -Strahlung ($h\nu = 2,6 \cdot 10^6 \text{ eV}$) bereits gelungen ist (s. S. 68). Als Grund für die wesentlich *stärkere Bindung* des α -Teilchens gegenüber dem Deuteron ist nach Wigner der Umstand maßgebend, daß bei der Vereinigung von einem Neutron und einem Proton zu einem Deuteron die beiden Teilchen einander noch nicht genügend nahe kommen, um im Bereiche stärkster Wirkung der *Neutron-Proton-Kraft* (s. S. 80) zu sein, die sich nur auf eine sehr geringe Entfernung erstreckt. Erst beim Zusammentritt von vier Teilchen (2 Neutronen und 2 Protonen) oder von zwei Deuteronen zu einem α -Teilchen erfolgt eine so starke Annäherung der Teilchen, daß die Bindungsenergie, wie angegeben, auf den 14- bzw. 12-fachen Wert ansteigt.

e) Bindungsenergien der übrigen Kerne. Die mit Hilfe von Gl. (60) unter Zugrundelegung genauer Massenwerte ermittelten Bindungsenergien verschiedener Atomkerne enthält Zahlen-tafel 6.

ladung) beim Durchlaufen einer Spannung von 1 Volt gleichkommt:

$$1 \text{ eV} = 4,805 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{300} \text{ Erg} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ Erg,}$$

$$1 \text{ Erg} = 6,24 \cdot 10^{11} \text{ eV}; \quad 1 \text{ eMV} = 10^6 \text{ eV.}$$

Zahlentafel 6. Genaue Massenwerte einiger Atome und Bindungsenergien ihrer Kerne.¹

Atom ²	Genauer Massenwert, bezogen auf O = 16,0000	Bindungsenergie W in 10^{-3} ME = = 0,934 eMV	Atom	Genauer Massenwert, bezogen auf O = 16,0000	Bindungsenergie W in 10^{-3} ME = = 0,934 eMV
² ₁ H	2,01473	2,37	²⁷ ₁₃ Al	26,9899	241,4
³ ₁ H	3,01705	9,02	²⁸ ₁₄ Si	27,9866	252,8
³ ₂ He	3,01707	8,16	³¹ ₁₅ P	30,9843	281,2
⁴ ₂ He	4,00389	30,31	³² ₁₆ S	31,9823	291,3
⁶ ₃ Li	6,01686	34,44	³⁵ ₁₇ Cl	34,9803	319,2
⁷ ₃ Li	7,01818	42,09	⁴⁰ ₁₈ Ar	39,97504	375,5
⁷ ₃ Li*	~ 8,0251	~ 44,1	⁵² ₂₄ Cr	51,948	501,0
⁸ ₄ Be	8,00792	60,48	⁵⁸ ₂₈ Ni	57,942	558,0
⁹ ₄ Be	9,01504	62,33	⁶⁴ ₃₀ Zn	63,937	615,0
¹⁰ ₄ Be	10,01671	69,63	⁷⁵ ₃₃ As	74,934	714,0
¹⁰ ₅ B	10,01631	69,19	⁷⁴ ₃₄ Se	73,937	703,0
¹¹ ₅ B	11,01292	81,55	⁷⁹ ₃₅ Br	78,929	755,0
¹² ₅ B*	12,0192 ₅	84,2	⁸⁴ ₃₆ Kr	83,928	800,0
	(Mittelwert)		⁹³ ₄₁ Nb	92,926	879,0
¹¹ ₆ C*	11,01526	77,87	⁹⁸ ₄₂ Mo	97,945	905,0
¹² ₆ C	12,00398	98,62	¹²⁰ ₅₀ Sn	119,912	1130,0
¹³ ₆ C	13,00761	103,96	¹²⁷ ₅₃ I	126,932	1171,0
¹³ ₇ N*	13,01004	100,69	¹³⁴ ₅₄ X	133,929	1236,0
¹⁴ ₇ N	14,00750	112,21	¹³³ ₅₅ Cs	132,933	1222,0
¹⁵ ₇ N	15,00489	123,78	¹³⁸ ₅₆ Ba	137,916	1284,0
¹⁶ ₈ O	16,00000	136,80	¹⁸¹ ₇₃ Ta	180,928	1646,0
¹⁷ ₈ O	17,00450	141,27	¹⁸⁴ ₇₄ W	184,000	1600,0
¹⁸ ₈ O	18,00369	151,0 ₅	¹⁸⁷ ₇₅ Re	186,981	1645,0
¹⁹ ₉ F	19,00452	158,3 ₅	¹⁹² ₇₆ Os	191,980	1689,0
²⁰ ₁₀ Ne	19,99881	172,2	²⁰⁰ ₈₀ Hg	200,016	1713,0
²⁴ ₁₂ Mg	23,9924	211,8	²⁰⁵ ₈₁ Tl	205,037	1736,0

¹ M. Stanley Livingston u. H. A. Bethe: Reviews of Modern Physics 9, 373 (1937), bis einschließlich ⁴⁰₁₈Ar; für die übrigen Atome s. H. Kallmann: Einführung in die Kernphysik, S. 95, Tabelle 6. F. Deuticke. 1938.

² Ein dem chemischen Zeichen beigefügtes Sternchen bedeutet, daß das betreffende Isotop radioaktiv, also instabil ist (vgl. Abschnitt 3b, S. 68 ff.).

6. Tröpfchenmodell und Energiefläche der Atomkerne. α -Teilchenmodell.

Denken wir uns am Aufbau der Kerne ausschließlich *Protonen* und *Neutronen* beteiligt, so gibt uns die Massenzahl

$$M = Z + N \quad (N = M - Z = \text{Neutronenzahl})$$

unmittelbar die *Zahl der Teilchen* an. Aus der Zahlentafel 6 und der Abb. 58 geht mit Deutlichkeit die annähernde *Proportionalität* zwischen *Bindungsenergie* und *Teilchenzahl* hervor. Dieser Umstand legt den Vergleich des Kernes mit einem *Flüssigkeitströpfchen* nahe, ein Bild, das erstmals von G. Gamow (1930) auf den Atomkern angewendet wurde, der sich ihn jedoch aus α -Teil-

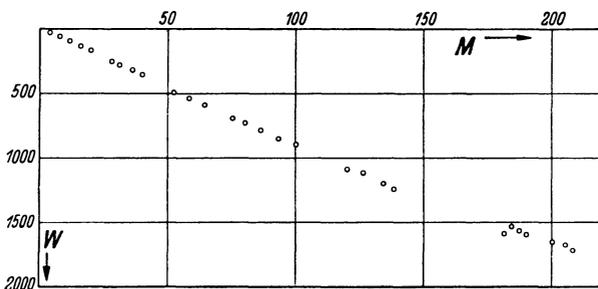


Abb. 58. Bindungsenergie W der stabilen Kerne (in 10^{-3} ME) als Funktion der Teilchenzahl (= Massenzahl) M (nach Weizsäcker).

chen aufgebaut dachte. Die Tatsache, daß bei den natürlichen Kernen nicht jedes beliebige Mischungsverhältnis zwischen Protonen und Neutronen auftritt, läßt erkennen, daß aus der gesamten Bindungsenergie nicht einfach durch Division durch M auf die Bindungsenergie jedes Teilchens geschlossen werden darf, daß erstere vielmehr von dem *Mischungsverhältnis* $\frac{N}{Z}$ abhängig erscheint. Da bei den stabilen Isotopen mit Kernladungszahlen $Z < 20$ $N = Z$, das Mischungsverhältnis also gleich 1 ist und auch bei den schwersten Atomkernen den Betrag 1,6 nicht überschreitet, liegt es nahe, an der Bindungsenergie vor allem die *Teilchenpaare* (p, n) beteiligt anzusehen, woraus man auf einen Betrag von etwa $17,5 \cdot 10^{-3}$ ME je Paar schließen kann. Wir wollen also annehmen, daß auch bei den schweren Kernen nur die Paare (p, n), in denen „Austauschkräfte“ mit Absättigungscharakter nach Art der chemischen Valenzkräfte

auf äußerst kleine Entfernungen wirksam sind, einen wesentlichen Beitrag zur Bindungsenergie leisten, während der auf die Wechselwirkung gleichartiger Teilchen entfallende Anteil verhältnismäßig gering ist. In Übereinstimmung mit den natürlichen Verhältnissen folgern wir daraus, daß bei gleicher Teilchenzahl M ein Kern um so stabiler ist, je mehr Teilchenpaare (p, n) er enthält; unter den denkbaren Isobaren mit der Massenzahl M werden demgemäß die Kerne mit der Protonenzahl $Z = M$ ($N = 0$) und ebenso jene mit der Neutronenzahl $N = M$ ($Z = 0$) die Bindungsenergie 0 und jene mit $Z = N = \frac{M}{2}$ die größte

Bindungsenergie und damit die *größte Stabilität* aufweisen. Das trifft für die Kerne, bei denen $Z < 20$ ist, in der Tat genau zu; daß bei den *schwereren* Kernen zur Erzielung der notwendigen Stabilität die *Neutronenzahl N überwiegt*, erscheint gleichwohl verständlich, wenn man überlegt, daß die mit wachsender Protonenzahl immer stärker werdenden Coulombschen Kräfte, die schließlich zu

einer Sprengung des Kernes führen müssen, offenbar durch den Neutronenüberschuß in ihrer Wirkung ausgeglichen werden. Streng genommen haben wir uns den Energieinhalt eines Atomkerns aus *drei* Bestandteilen zusammengesetzt zu denken: aus der eigentlichen „*Flüssigkeitsenergie*“, die im wesentlichen durch die Teilchenpaare (p, n) bestimmt wird, einer besonders bei den leichten Kernen zu berücksichtigenden „*Oberflächenspannung*“ und der von der elektrischen Ladung herrührenden *Coulombschen Energie*.

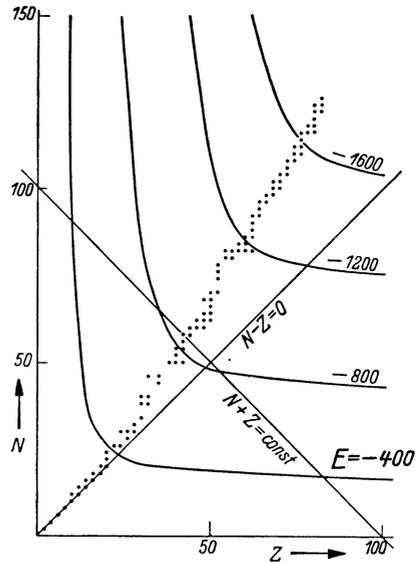


Abb. 59. Höhenlinienbild der Kernenergiefläche (nach C. F. v. Weizsäcker).

E Kernenergie in 10^{-8} ME. Die eingezeichneten Punkte geben die Lage der stabilen Isotope (den Verlauf des „Baches“ der stabilen Elemente) an.

Diese Erwägungen haben zur Konstruktion einer *Energiefläche* $E = f(Z, N)$ für alle wirklichen und denkbaren Kerne geführt, die so beschaffen ist, daß die in der Natur verwirklichten Kerne, für die wir in erster Näherung $N = Z$ annehmen dürfen, unter allen Isobaren die größte Bindungsenergie, also den *tiefsten Energiewert* aufweisen. In diesem Sinn setzen wir wie üblich den *Energiewert* E

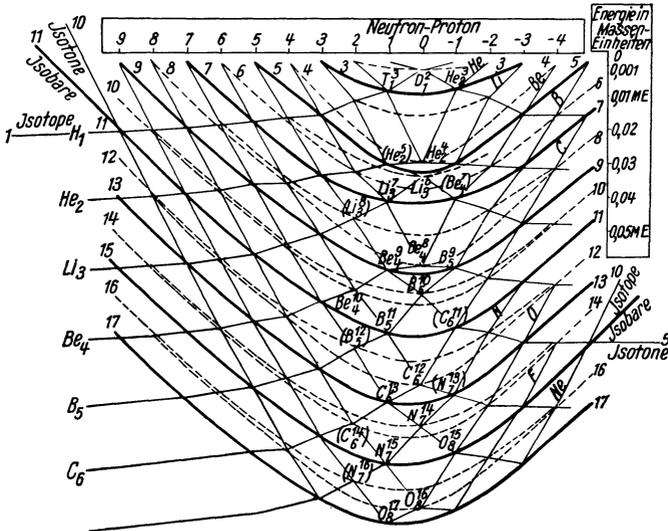


Abb. 60. Verlauf der aufeinanderfolgenden Isobarenkurven im Gebiet der leichten Kerne (nach H. Euler).

Die stark ausgezogenen Kurven entsprechen den ungeraden Massenzahlen, die gestrichelten, die stets doppelt vorhanden sind und auf eine Zweischichtigkeit der Energiefläche hinweisen, entsprechen den geraden Massenzahlen. Die an den „Talhängen“ gelegenen instabilen (radioaktiven) Isobaren sind in Klammern gesetzt worden. Als Abszisse wurde $N - Z$ aufgetragen.

eines Kernes seiner *negativ* genommenen, durch Gl. (60) bestimmten Bindungsenergie W gleich:

$$E = -W.$$

Das *Höhenlinienbild* dieser Energiefläche zeigt Abb. 59; die hyperbelähnlichen Höhenlinien tragen jeweils die Bezeichnung des zugehörigen, negativen Energiewertes E in 10^{-3} ME. Die Gerade $N + Z = 100$ stellt die Projektion der auf der Energiefläche verlaufenden *Isobarenkurve* dar, die der Massenzahl $M = 100$ entspricht und dort, wo der „*Bach*“ der stabilen Elemente „*fließt*“, ihren tiefsten

Punkt besitzt. Diesen Verlauf der Isobarenkurven (s. auch Abb. 60) bestätigen die *künstlich radioaktiven* Kerne, die infolge ihrer geringeren Bindungsenergie auf die „Hänge“ des „Tales der stabilen Elemente“ zu liegen kommen: z. B. hat ${}^8_3\text{Li}^*$ laut Zahlentafel 6 die Bindungsenergie $44,1 \cdot 10^{-3}$ ME; es geht durch einen e^- -Zerfall in das stabile, isobare ${}^8_4\text{Be}$ mit der Bindungsenergie $60,48 \cdot 10^{-3}$ ME über; ebenso verwandelt sich ${}^{13}_7\text{N}^*$ mit der Bindungsenergie $100,69 \cdot 10^{-3}$ ME durch einen e^+ -Zerfall in das stabile, isobare ${}^{13}_6\text{C}$ mit der Bindungsenergie $103,96 \cdot 10^{-3}$ ME. Auch der ohneweiters verständliche Doppelprozeß: ${}^{27}_{12}\text{Mg}^* \xrightarrow{e^-} {}^{27}_{13}\text{Al} \xleftarrow{e^+} {}^{27}_{14}\text{Si}^*$ zeigt, daß auf der Isobarenkurve $M = 27$ das stabile ${}^{27}_{13}\text{Al}$ die tiefste Lage einnimmt. Für $Z < 20$ verläuft das Tal der stabilen Elemente in der Richtung $N = Z$; bei den schwereren Grundstoffen tritt infolge des Neutronenüberschusses eine immer stärker werdende Krümmung desselben gegen die N -Achse ein.

Isotope Elemente liegen in Abb. 59 auf Parallelen zur N -Achse ($Z = \text{konst.}$), die als Projektionen der *Isotopenkurven* der Energiefläche aufzufassen sind. Jede Parallele zur Z -Achse ($N = \text{konst.}$) stellt die Projektion einer *Isotonenkurve* dar, auf der Elemente mit gleicher Neutronenzahl, die man als „*isoton*“ bezeichnet, liegen.

Den Verlauf der Energiefläche erläutert genauer und in besonders anschaulicher Weise die von H. Euler stammende Abb. 60. Die bald voll, bald gestrichelt ausgezogenen, hyperbelähnlichen Kurven zeigen die zu den aufeinanderfolgenden Massenzahlen $M = 2, 3, 4, 5, \dots, 17$ gehörigen *Isobarenkurven* in ihrer wahren Gestalt. Bei *geradem* M (N und Z beide gerade bzw. ungerade) erweist sich eine Aufspaltung der Energiefläche in *zwei* Schichten als notwendig (gestrichelte Kurven). Auch die Projektionen der *Isotopen-* und *Isotonenkurven* auf eine zu den Isobaren parallele Ebene finden wir in Abb. 60 eingezeichnet.

Neben dem eben besprochenen, in vieler Hinsicht befriedigenden Tröpfchenmodell hat in jüngster Zeit das *α -Teilchen-Modell* von W. Wefelmeier Bedeutung erlangt. Dieser betrachtet den Kern als einen kleinen *Kristall* aus α -Teilchen, wobei letztere als starre Kugeln angenommen werden, zwischen denen Kräfte mit Absättigungscharakter wirken. Die in der Natur verwirklichten Kerne erscheinen dadurch ausgezeichnet, daß die α -Teilchen die

dichteste Packung, also die *meisten gegenseitigen Berührungspunkte* aufweisen. Bei $^{12}_6\text{C}$ z. B. bilden die α -Teilchen ein gleichseitiges Dreieck, bei $^{16}_8\text{O}$ ein Tetraeder, bei $^{20}_{10}\text{Ne}$, $^{24}_{12}\text{Mg}$, $^{28}_{14}\text{Si}$ ein regelmäßiges Drei-, Vier- bzw. Fünfeck, über dessen Mittelpunkt oben und unten je ein weiteres α -Teilchen liegt. Die Bindungsenergien der Kerne, auf das α -Teilchen als Bauelement bezogen, liefert dieses Modell in überraschend guter Übereinstimmung mit der Erfahrung, wobei im Mittel auf jede „Berührung“ der gleiche Betrag an Bindungsenergie, nämlich etwa $2,5 \cdot 10^{-3}$ ME entfällt. Die große Stabilität und Häufigkeit des Eisens ($Z = 26$), dessen Kern gerade 13 α -Teilchen enthält, findet so in der Tatsache ihre Erklärung, daß die Vereinigung eines α -Teilchens mit 12 unmittelbaren Nachbarn die dichteste Kugelpackung überhaupt darstellt.

E. Das Atommodell von Lenard-Rutherford und Bohr-Sommerfeld. Die Linienspektren.

Zu den Erscheinungen, die wir als vom Atom erzeugt anzusehen haben, gehören vor allem die Strahlungserscheinungen im Gebiete der Optik wie in dem der Röntgenstrahlen. Wir richten dabei unsere Aufmerksamkeit auf die sogenannten *Linienspektren*. Ihre Beobachtung erfolgt im optischen Bereich mittels eines *Prismenspektroskopes* (Abb. 61), im Gebiete der Röntgenstrahlen mit Hilfe von *Kristallspektrographen* (s. S. 167 ff.).

Als Beispiel eines *optischen Linienspektrums* wollen wir die sogenannte *Balmer-Serie* des Wasserstoffes betrachten (Abb. 62). Wir bemerken einzelne, mit H_α , H_β , H_γ , . . . bezeichnete Linien, die mit zunehmender Frequenz immer näher aneinanderrücken und bei einer bestimmten Grenze (*Seriengrenze*) eine *Häufungsstelle* haben. Wie entsteht ein solches Linienspektrum und welche Gesetzmäßigkeit wohnt ihm inne? Dieses Rätsel wurde von N. Bohr gelöst durch Anwendung der Quantentheorie auf das Atom. Schon 1885 aber ist es Joh. Jakob Balmer gelungen, in der nach ihm benannten Serie eine Gesetzmäßigkeit für die Linienfrequenzen ν zu entdecken. Wir wollen seine Formel gleich in der jetzt üblichen Darstellungsweise in *Wellenzahlen* ausdrücken. Unter der *Wellenzahl* ω verstehen wir die Zahl der Wellen je Zentimeter [vgl. Gl. (16)]:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} \text{ cm}^{-1}. \quad (61)$$

Wellenzahl ω und Frequenz ν sind somit zueinander proportional.
Die Balmerische *Formel* lautet dann:

$$\omega = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (62)$$

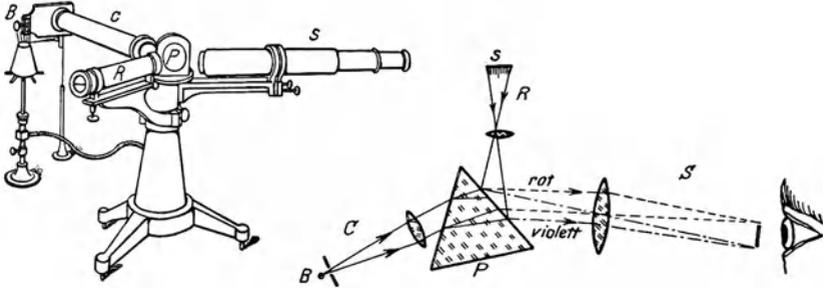


Abb. 61. Prismenspektroskop: Gesamtbild links, Strahlengang rechts (aus Kramers-Holst, Das Atom).

Das zu untersuchende Licht der Lichtquelle B tritt durch einen verstellbaren Spalt in das Kollimatorrohr C ein, durch dessen am anderen Ende befindliche Linse die Strahlen parallel gemacht werden. Diese werden sodann durch ein Prisma P mit lotrechter Kante, nach ihrer Wellenlänge (Frequenz) verschieden, gebrochen und gelangen schließlich durch eine Linse in das Beobachtungsfernrohr S , in dessen Brennebene scharfe Spaltbilder in Gestalt verschiedenfarbiger Linien (Linienspektrum) entstehen. Das Skalenrohr R mit der Skala s , die durch Reflexion der von ihr ausgehenden Strahlen an der dem Fernrohr zugewandten Prismenfläche neben den Spektrallinien sichtbar wird, ermöglicht eine Ausmessung des Spektrums. Durch Schwenkung des Fernrohrs einerseits und des Skalenrohrs andererseits kann eine bestimmte Linie mit einem in der Brennebene des Fernrohrs befestigten Spinnwebfaden und mit einem bestimmten Skalenstrich zur Deckung gebracht werden.

Im vorliegenden Fall muß man $R_H = 1,09678 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ setzen (s. u.). Man bekommt so der Reihe nach die Linien $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$
Wie überraschend gut die Beobachtung durch die Balmer-

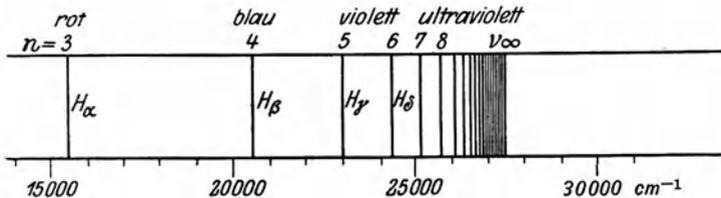


Abb. 62. Balmer-Serie des Wasserstoffs.

sche Formel wiedergegeben wird, zeigt Zahlentafel 7, die für die ersten 8 Linien der Balmer-Serie beobachtete und berechnete Wellenzahlen nebeneinanderstellt.

Zahlentafel 7. Die ersten 8 Linien der Balmer-Serie. Beobachtete und nach Formel (62) berechnete Wellenzahlen.

Linie	k	Wellenlänge λ_L in Normalluft beobachtet ¹ Å	Wellenzahl $\omega_L = \frac{1}{\lambda_L}$ in Normalluft		Differenz $\Delta \omega_L$ cm^{-1}
			beobachtet cm^{-1}	berechnet cm^{-1}	
H $_{\alpha}$..	3	6562,80	15 237,4	15 237,44	— 0,04
H $_{\beta}$..	4	4861,33	20 570,5	20 570,55	— 0,05
H $_{\gamma}$..	5	4340,47	23 039,0	23 039,00	0,00
H $_{\delta}$..	6	4101,74	24 379,9	24 379,91	— 0,01
H $_{\epsilon}$..	7	3970,07	25 188,5	25 188,42	+ 0,08
H $_{\zeta}$..	8	3889,06	25 713,2	25 713,19	+ 0,01
H $_{\eta}$..	9	3835,40	26 072,9	26 072,96	— 0,06
H $_{\phi}$..	10	3797,91	26 330,3	26 330,30	0,00

Die auf 6 Stellen genauen Beobachtungswerte rechtfertigen den Ausdruck „spektroskopische Genauigkeit“ als eine besonders hohe, die selbst die Genauigkeit astronomischer Messungen noch wesentlich übertrifft. Die berechneten Wellenzahlen wurden mit Hilfe der Balmer'schen Formel unter Zugrundelegung des Wertes

$$(R_H)_L = 109\,709,6 \text{ cm}^{-1}$$

gewonnen. Die Übereinstimmung ist so ausgezeichnet, daß für den betrachteten Linienbereich die Abweichungen noch nicht die Hälfte von 0,001% des Wertes ausmachen. Da sich die folgenden Untersuchungen auf Strahlungsvorgänge im *Vakuum* beziehen sollen, ist es nötig, die beobachteten, auf Luft von 760 mm Hg (Normalluft) bezogenen Wellenlängen λ_L auf Wellenlängen λ im Vakuum umzurechnen, was durch Multiplikation mit dem Brechungsquotienten

$$n_L = 1,0002926$$

geschieht:

$$\lambda = \lambda_L \cdot n_L.$$

Daraus folgt weiter

$$\omega = \frac{\omega_L}{n_L}$$

und

$$R_H = \frac{(R_H)_L}{n_L} = 109\,677,5 \text{ cm}^{-1}.$$

¹ Handbook of Chemistry and Physics, 20. Aufl. Cleveland, Ohio. 1935.

Die Balmer'sche Formel besteht aus einem *konstanten Term* $\frac{R_H}{2^2}$ und einem *Laufterm* $\frac{R_H}{k^2}$. Für alle Serien gibt es Formeln dieser Art. Die Häufungsstelle der Linien, die *Seriengrenze* ω_∞ , erhält man für $\lim k \rightarrow \infty$; im Falle der Balmer-Serie liegt sie bei $\frac{R_H}{4} = 0,27419 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$.

Man hat sich lange Zeit vergebens bemüht, dieser durch die Beobachtung ausgezeichnet bestätigten Formel einen physikalischen Sinn abzugewinnen.

Auch das der klassischen Auffassung am nächsten stehende *Atommodell von J. J. Thomson* erwies sich zur Erklärung der Serienspektren als *ungeeignet*. Darnach sollten die negativen Ladungen (Elektronen) *innerhalb* des positiven Kerns, der als geladene Vollkugel gedacht war, symmetrisch verteilt, um ihre Ruhelagen *harmonische Schwingungen* ausführen. Es zeigte sich alsbald die Unhaltbarkeit dieses Modells. Abgesehen davon, daß es nicht imstande war, die *Vielfältigkeit* der jedem einzelnen Atom eigentümlichen Spektren zu erklären, stand es auch mit der Tatsache im Widerspruch, daß sich nach den *Absorptionsversuchen* Lenards und den *Streuversuchen* Rutherfords die Atomkernradien größenordnungsmäßig vom gleichen Betrag ergaben wie der klassische Elektronenradius (s. Fußnote S. 78), während die Thomsonsche *Atomkugel*, die sämtliche Elektronen in ihrem Innern enthalten soll, jedenfalls *viel größer* sein muß.

Die Erklärung des Rätsels der Linienspektren gelang erst 1913 Niels Bohr, der auf Plancks Erkenntnis der *Energiequanten* eine erfolgreiche Atomtheorie aufbauen konnte.

1. Atommodell von N. Bohr mit ruhendem Kern.

Die Schwierigkeiten des Thomsonschen *statischen* Atommodells veranlaßten zuerst E. Rutherford, an seine Stelle ein *dynamisches* zu setzen, bei dem im *neutralen* Zustand um einen mit Z *positiven Elementarquanten* e geladenen Kern *ebenso viele Elektronen* e^- *planetengleich* herumlaufen. Eine ruhende Verteilung der Elektronen außerhalb des Kerns ist wegen der von ihm ausgehenden Anziehungskraft unmöglich. Aber auch das dynamische Modell begegnet vom Standpunkt der klassischen Physik unüberwindlichen Schwierigkeiten. Nach den Gesetzen der *Elektrodynamik* geht nämlich von jeder *beschleunigt* bewegten Ladung

eine *Strahlung* aus, die einen Verlust an kinetischer Energie des geladenen Teilchens zur Folge haben muß. Dies gilt sinngemäß auch für ein den Kern umlaufendes Elektron, das infolge des mit Strahlung verbundenen Energieverlustes sich dem Kern in spiraler Bahn immer mehr nähern und schließlich in denselben hineinstürzen muß. Die *ausgestrahlte Frequenz* ν wird dabei der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit des Teilchens proportional sein und sich mit dieser *stetig verändern*, d. h. das ausgestrahlte Spektrum wird *kontinuierlich* sein. Die Entstehung bestimmter *diskreter* Linien erscheint somit *ausgeschlossen*. Diese würde die Möglichkeit der Beibehaltung bestimmter, ausgewählter Bahnen durch die umlaufenden Elektronen zur Voraussetzung haben. Das vermag aber das klassische Modell nicht zu leisten.

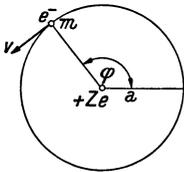


Abb. 63. Um einen Atomkern kreisendes Elektron.

Tatsächlich bietet sich *im Rahmen der klassischen Physik kein Ausweg*. Nur durch kühne, jedoch mit der Erfahrung im Einklang befindliche Festsetzungen ist es Niels Bohr gelungen, hier vorwärtszukommen. Es sind ihrer drei: erstens, daß es *strahlungsfreie* Elektronenbahnen gibt, zweitens, daß *nur eine diskrete Zahl* solcher Bahnen möglich ist, drittens, daß *Ausstrahlung nur beim Übergang (Sprung)* des Elektrons von einer

äußeren Bahn zu einer inneren, und zwar *im Ausmaß eines Lichtquants* erfolgt, das dem Unterschied der Energie des Elektrons auf diesen Bahnen entspricht.

Wir wollen uns nun als einfachsten Fall (Modell des *Wasserstoffatoms* und der *wasserstoffähnlichen* Atome) einen Kern mit der Ladung $+Ze$ von nur *einem* Elektron auf *kreisförmiger* Bahn umlaufen denken (Abb. 63). Ein solches Modell entspricht durchaus der Bewegung eines *Planeten* um die *Sonne*; denn das Coulombsche Gesetz für die Anziehung elektrischer Ladungen stimmt in der Form mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz überein. Demgemäß gilt auch für unser Atommodell:

a) das *dritte Keplersche Gesetz*. Aus der Gleichung: Coulombsche Kraft = Fliehkraft, d. h.

$$\frac{Z e^2}{a^2} = \frac{m v^2}{a}$$

folgt:

$$m v^2 a = Z e^2 \tag{63}$$

als dessen Ausdruck, wenn wir mit a den Halbmesser der Kreisbahn und mit v die Bahngeschwindigkeit des Elektrons bezeichnen. Dieses der klassischen Physik entstammende Gesetz nimmt Bohr als gültig für jene Bahnen an, die das Elektron *strahlungsfrei* durchlaufen kann.

b) Die Quantenbedingung. Um sein Modell für die Darstellung eines *diskontinuierlichen* Spektrums geeignet zu machen, bedient sich Bohr der Planckschen Entdeckung, daß es eine kleinste Wirkungsgröße, das *Wirkungsquantum* h gibt, das die Größe $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ Erg sec hat (s. S. 22 u.) und als „*Wirkungsatom*“ anzusehen ist, aus dem sich jede „*Wirkung*“ atomistisch aufbaut. Demgemäß muß jede in der Erscheinungswelt auftretende *Wirkungsgröße*, also jede physikalische Größe, die die Dimension Erg sec aufweist, ein *ganzzahliges Vielfaches* des *Wirkungsquantums* h sein. Bohr erkannte hierin die Möglichkeit, unter den zulässigen strahlungsfreien Elektronenbahnen eine *Auswahl* zu treffen, und suchte in seinem Modell nach einer Größe von der Dimension einer Wirkung. Er fand sie im *Drehimpuls*:

$$p_{\varphi} = m v a, \quad (64)$$

dessen Maßbestimmung $g \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm} = \text{Erg sec}$ tatsächlich der einer Wirkung gleichkommt. Um zu einer vernünftigen „*Quantisierungsregel*“ zu gelangen, muß man die Wirkung auf eine *Periode* beziehen, also den *Drehimpuls* für einen *ganzen Umlauf* berechnen, wobei sich die Winkelveränderliche φ von 0 bis 2π ändert. Dies geschieht mit Hilfe des Integrals:

$$\int_0^{2\pi} p_{\varphi} d\varphi = 2\pi m v a. \quad (65)$$

Wir erhalten so die *Quantenbedingung* von Bohr:

$$2\pi m v a = n h, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Jetzt sind nicht mehr alle Bahnen zulässig; durch die Quantenbedingung wird eine Auslese unter ihnen getroffen. Aus dem dritten Keplerschen Gesetz und der Quantenbedingung errechnet man durch Division der Gl. (63) durch Gl. (66) zunächst die *Geschwindigkeit* auf der n^{ten} Bahn:

$$v_n = \frac{2\pi Z e^2}{n h}. \quad (67)$$

Für v sind somit nicht alle Werte erlaubt. Setzt man diesen Wert v_n in die Gl. (63) ein, so erhält man den *Bahnradius* der n^{ten} Bahn:

$$a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{4 \pi^2 m Z e^2}. \quad (68)$$

Auch a ist abhängig von der ganzen Zahl n , die wir mit Bohr als (*Haupt-Quantenzahl*) bezeichnen wollen. Die Radien der zulässigen Bahnen verhalten sich somit wie die Quadrate der Quantenzahlen:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots = 1^2 : 2^2 : 3^2 : \dots \quad (69)$$

Für $Z = 1$ ist unser Modell ein Bild des *Wasserstoffatoms*. Wie groß ist der Radius a_1 seiner *ersten* Bahn (des *ersten Bohrschen Kreises*)? Für $Z = 1$ und $n = 1$ erhalten wir:

$$(a_1)_H = \frac{\hbar^2}{4 \pi^2 m e^2} = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ cm}. \quad (68 \text{ a})$$

Diese Feststellung befriedigt sehr, da der Atomdurchmesser mit 10^{-8} cm richtig wiedergegeben wird. Wir berechnen ferner:

$$(v_1)_H = 0,00728 \cdot c = 2182 \text{ km/sec}. \quad (67 \text{ a})$$

Wie hat man sich nun die Entstehung einer *Linienreihe* zu erklären? Wie schon oben bemerkt, nimmt Bohr an, daß bei jedem „Sprung“ des Elektrons von einer Bahn auf eine andere die entsprechende *Energiedifferenz* als *Lichtquant (Photon) ausgestrahlt* wird. Dazu müssen wir zunächst die Energie des Elektrons auf einer bestimmten Bahn berechnen. Es gilt

c) der **Energiesatz:**

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}};$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v_n^2 = \frac{Z e^2}{2 a_n} \quad (70)$$

im Hinblick auf Gl. (63),

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Z e^2}{a_n} = -2 \cdot E_{\text{kin}}. \quad (71)$$

Somit beträgt die *Gesamtenergie* des Elektrons auf der n^{ten} Bahn:

$$E_n = -E_{\text{kin}} = \frac{-Z e^2}{2 a_n} = -\frac{2 \pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2}. \quad (72)$$

Die Art der Ausstrahlung des Atoms findet ihren Ausdruck in der von Bohr aufgestellten

d) **Frequenzbedingung:**

$$E_k - E_n = h \nu = h c \omega. \quad (73)$$

Sie besagt, daß die Differenz zwischen den Energiewerten des Elektrons auf der k^{ten} und n^{ten} Bahn als *Lichtquant* der Frequenz ν ausgestrahlt wird. Für die *Wellenzahl* ω finden wir so mit Rücksicht auf Gl. (72):

$$\omega = \frac{E_k - E_n}{hc} = \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{c h^3} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (74)$$

$$k = n + 1, n + 2, \dots$$

Den Faktor

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} = 1,0974 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1} \quad (75)$$

bezeichnet man als *Rydbergsche Zahl*. So gewann Bohr die bei beliebiger Kernladungszahl Z für alle *wasserstoffähnlichen* Spektren gültige, *verallgemeinerte* Balmersche Formel:

$$\omega = R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k = n + 1, n + 2, \dots \quad (74a)$$

Eine bestimmte, durch die erhaltene Formel dargestellte *Spektralserie* wird durch *zwei Terme* beschrieben: einen *unveränderlichen (konstanten)* Term $\frac{R_\infty Z^2}{n^2}$, der die betrachtete Serie in eindeutiger Weise kennzeichnet und zugleich die *Seriengrenze*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega = \omega_\infty = \frac{R_\infty Z^2}{n^2} \quad (76)$$

bedeutet, und den mit k *veränderlichen*, sogenannten *Laufterm* $\frac{R_\infty Z^2}{k^2}$, der, mit $k = n + 1$ beginnend, immer kleiner werdende Werte annimmt, deren Grenze Null ist. Jeder Differenz zweier Terme entspricht eine bestimmte Spektrallinie (*Kombinationsprinzip* von Ritz).

Wir wollen hier als Beispiel die *Spektralserien* des *Wasserstoffs* betrachten, die sich aus der oben abgeleiteten Formel für $Z = 1$ ergeben, soweit sie beobachtet worden sind. Wir fassen die wesentlichsten Merkmale dieser Serien in der folgenden Zahlentafel 8 zusammen.

Im *sichtbaren* Teile des Spektrums liegt also bloß die *Balmer-Serie*, während die *kurzwellige Lyman-Serie* zur Gänze im *Ultraviolett* und die übrigen H-Serien zur Gänze im *Infrarot* liegen. Abb. 64 gibt ein anschauliches Bild, wie wir uns die Entstehung der einzelnen Serien durch Elektronensprünge vorzustellen haben.

Zahlentafel 8.

Name der Serie	Hauptquantenzahl der Endbahn n	Seriengrenze $\omega_\infty = \frac{R_\infty}{n^2} \text{ cm}^{-1}$	Erste Linie $\omega_1 = R_\infty \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \text{ cm}^{-1}$
Lyman-Serie . .	1	109 737 (Ultraviolett)	82 303 (Ultraviolett)
Balmer-Serie . .	2	27 434 („)	15 241 (Rot)
Paschen-Serie .	3	12 193 (Infrarot)	5 335 (Infrarot)
Brackett-Serie .	4	6 858 („)	2 469 („)
Pfund-Serie . . .	5	4 389 („)	1 341 („)

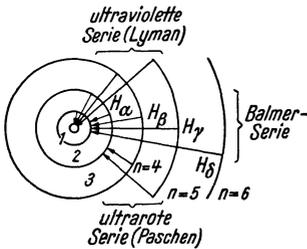


Abb. 64. Entstehung der Wasserstoffserien durch Elektronensprünge nach N. Bohr.

Als Mangel dieses ersten Bohrschen Modells erwies sich, daß die mit Hilfe der Gl. (75) errechnete Rydberg-Zahl R_∞ doch *nicht ganz genau* mit der Erfahrung übereinstimmte. Also bedurfte das Modell einer *Verbesserung*. In welcher Richtung haben wir die zu suchen? Bohr spann den Vergleich mit der Planetenbewegung weiter und erkannte, daß wie bei dieser die *Mitbewegung* der Sonne

hier die *Mitbewegung des Atomkernes* eine Verbesserung der Darstellung erwarten ließ.

2. Das Bohrsche Atom mit mitbewegtem Kern.

Wird die Bewegung des Planetenelektrons und des Kerns auf den gemeinsamen *Schwerpunkt* bezogen, so muß man — wie dies auch in der Himmelsmechanik geschieht — statt der gewöhnlichen Masse m des Elektrons dessen „*reduzierte*“ Masse μ einführen, die aus der *Elektronenmasse* m und der *Kernmasse* M nach der folgenden Formel berechnet wird:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{m M}{m + M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} \quad (77)$$

Die Einführung von μ statt m hat zur Folge, daß die Formeln des Modells mit *ruhendem* Kern in jene übergehen, die für den Fall

¹ Siehe hiezu die entsprechende Rechnung beim rotierenden *Hantelmodell* auf S. 204.

des *mitbewegten* Kerns gelten. Wir erhalten so als *verbesserte* Strahlungsformel an Stelle von Gl. (74a):

$$\omega = R \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad k = n + 1, n + 2, \dots, \quad (78)$$

wo jetzt die Rydberg-Zahl

$$R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{c h^3} = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M}} \quad (79)$$

zu setzen ist. Aus der letzten Darstellung erklärt sich die schon früher angewandte Schreibweise R_∞ als $\lim R$ (Grenzwert bei $M \rightarrow \infty$ *unendlich großer* Masse des Kerns). Die geringfügigen, aber doch mit erheblicher Genauigkeit meßbaren Abweichungen der Rydberg-Zahl R vom Wert R_∞ bei verschiedenen Atomen läßt sich in überaus befriedigender Weise durch den Einfluß der Kernmasse M erklären.

Im Falle des *Wasserstoffs* ($Z = 1$) ist M durch m_p , im Falle des *Heliums* ($Z = 2$) durch m_α zu ersetzen. W. V. Houston hat 1927 die entsprechenden Rydberg-Zahlen aus spektroskopischen Beobachtungen *äußerst genau* bestimmt:

$$R_H = (109677,759 \pm 0,008) \text{ cm}^{-1},$$

$$R_{He} = (109722,403 \pm 0,004) \text{ cm}^{-1}.$$

Aus diesen beiden Werten läßt sich mit Rücksicht auf $m = m_e$ und $m_\alpha \approx 4m_p$ unter Zugrundelegung der Formel

$$\frac{R_{He} - R_H}{R_H} = \frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{m_\alpha}} - 1 = \frac{m_e}{m_p} \cdot \frac{1 - \frac{m_p}{m_\alpha}}{1 + \frac{m_e}{m_\alpha}} \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{m_e}{m_p}$$

ein spektroskopischer Wert für das *Massenverhältnis* $\frac{m_p}{m_e}$ finden:

$$\frac{m_p}{m_e} = 1838,1$$

in bester Übereinstimmung mit der Angabe auf S. 14.

Ferner gelingt es, die experimentell nicht bestimmbare Größe R_∞ mit größerer Genauigkeit zu berechnen:

$$R_\infty = R_H \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right) = 109737,43 \text{ cm}^{-1}. \quad (80)$$

Für das *Deuterium* ($M = m_d$) ergibt sich mit $m_d \approx 2m_p$ die Rydberg-Zahl:

$$R_D \approx \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} = \frac{3676,2}{3677,2} \cdot R_\infty = 109707,59 \text{ cm}^{-1},$$

woraus für den *Abstand der D α - und H α -Linie* im Hinblick auf Gl. (78) ($Z = 1, n = 2, k = 3$)

$$\omega_{D\alpha} - \omega_{H\alpha} = (R_D - R_H) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} \cdot 29,83 \text{ cm}^{-1} = 4,14 \text{ cm}^{-1}$$

folgt. Dieser Unterschied ist groß genug, um mit Sicherheit nachweisbar zu sein; er ermöglichte die bereits früher (S. 17) besprochene *Entdeckung des schweren Wasserstoffs* durch Urey, Brickwedde und Murphy (vgl. Abb. 12).

Die Bohrsche Theorie erweist sich somit als sehr leistungsfähig. Trotzdem bleibt noch ein ungeklärter Rest bestehen. Bei sehr genauer Beobachtung stellte sich nämlich heraus, daß die einzelnen Linien der Balmer-Serie und anderer Serien nicht einheitlich sind, sondern daß sich jede Linie aus mehreren Linien zusammensetzt, daß eine sogenannte *Feinstruktur* vorhanden ist. Sie vermag die Theorie vorläufig nicht zu erklären. Es ist also noch eine *Erweiterung* derselben nötig. Dieser nächste Schritt wurde von A. Sommerfeld getan.

3. Sommerfeldsches Atom mit elliptischen Bahnen.

Wie bekannt, haben sich zur Beschreibung der Planetenbewegung Kreisbahnen als unzureichend erwiesen. An ihre Stelle mußten *Ellipsenbahnen* treten, wie dies Kepler zuerst erkannt hat. Es liegt die Frage nahe: Kann man vielleicht auch in der Atomphysik durch *elliptische* Bahnen mehr erreichen? Das Bohrsche Modell auf Ellipsenbahnen auszudehnen, hat 1915/16 A. Sommerfeld unternommen.

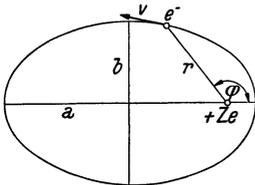


Abb. 65. Polarkoordinaten bei elliptischer Elektronenbahn.

Während für die Quantisierung der *Kreisbahnen*, zu deren Bestimmung schon die Angabe *einer* Größe, nämlich die des Radius ausreicht, bereits *eine* Quantenbedingung genügt, liegt es nahe, bei der Quantisierung der *Ellipsenbahnen*, die erst durch die Angabe *zweier*

unabhängiger Stücke, nämlich der beiden Halbachsen a , b bestimmt sind, nach *zwei Quantenbedingungen* zu suchen.

Betrachtet man die kinetische Energie E_{kin} des bewegten Teilchens als Funktion der Polarkoordinaten r und φ (s. Abb. 65) sowie von deren *Geschwindigkeiten* \dot{r} und $\dot{\varphi}$,¹ so ist leicht zu erkennen, daß die *zugeordneten Momente (Impulse)*

$$p_r = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{r}}, \quad p_\varphi = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{\varphi}} \quad (81)$$

in den Produktion $p_r d r$ bzw. $p_\varphi d \varphi$ Ausdrücke ergeben, deren jeder die Maßbestimmung Erg sec einer „*Wirkung*“ hat. Bezeichnen wir die bloße Maßangabe durch Einschließung in eckige Klammern, so bestätigen wir folgendermaßen diese Behauptung:

$$[p_r d r] = \left[\frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{r}} d r \right] = \frac{\text{Erg}}{\frac{\text{cm}}{\text{sec}}} \cdot \text{cm} = \text{Erg sec},$$

$$[p_\varphi d \varphi] = \left[\frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{\varphi}} d \varphi \right] = \frac{\text{Erg}}{\text{sec}^{-1}} = \text{Erg sec}.$$

Diese Überlegung, die sich auf beliebige Koordinaten verallgemeinern läßt, veranlaßte Sommerfeld zur Einführung *zweier Quantenintegrale*, deren jedes für einen vollen Umlauf des Elektrons zu berechnen ist:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_\varphi d \varphi &= k h, & k &= \text{azimutale oder Nebenquantenzahl}, \\ \oint p_r d r &= n_r h, & n_r &= \text{radiale Quantenzahl}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Um das Problem nicht gleich zu stark zu komplizieren, sehen wir vorerst mit Sommerfeld davon ab, daß sich die Masse des Elektrons bei großer Geschwindigkeit ändert.

a) **Fassung mit konstanter Elektronenmasse.** Die erforderlichen Rechnungen, die man in Sommerfelds Buch „Atom- und Spektrallinien“ nachlesen möge, sollen ihrer Weitläufigkeit wegen hier nicht gebracht werden; es seien nur die Ergebnisse mitgeteilt. Für die *Halbachsen* der gequantelten Ellipsen erhält man:

$$a_n = \frac{h^2 n^2}{4 \pi^2 \mu Z e^2}; \quad b_{n_k} = a_n \cdot \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (83)$$

$$^1 \dot{r} = \frac{d r}{d t}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d \varphi}{d t}.$$

Zu jeder (halben) Hauptachse a_n gehören somit n (halbe) Nebenachsen $b_{n_1} = \frac{a_n}{n}$, $b_{n_2} = 2 \frac{a_n}{n}$, ... $b_{n_n} = n \frac{a_n}{n} = a_n$, denen ebensoviele Ellipsen n_k entsprechen, die alle an die Stelle des n^{ten} Bohr-

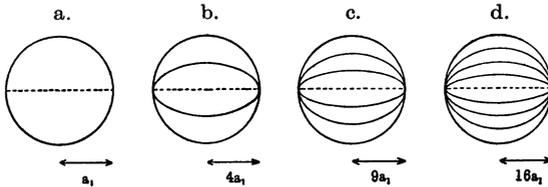


Abb. 66. Zu den Hauptquantenzahlen $n = 1, 2, 3$ und 4 gehörige Ellipsenbahnen (nach Sommerfeld).

schen Kreises treten. Die letzte dieser Ellipsen (a_n, b_{n_n}) ist der n^{te} Bohrsche Kreis selbst. Dem Wert $k = 0$ würde eine Ellipse mit der Nebenachse $b_{n_0} = 0$, also eine *Pendelbahn* des Elektrons entsprechen, die wir im Hinblick auf den dann unvermeidlichen

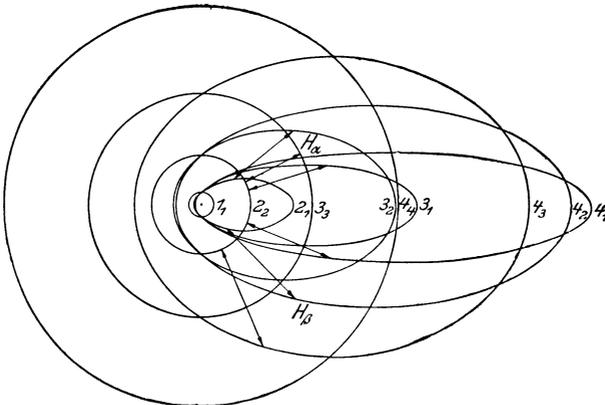


Abb. 67. Wasserstoffatom mit elliptischen Elektronenbahnen (nach Kramers-Holst). Die eingezeichneten Pfeile stellen die nach der Auswahlregel (89) erlaubten Elektronensprünge dar, die den Feinstrukturkomponenten der H_α - und H_β -Linie entsprechen.

„Zusammenstoß desselben mit dem Kern“ ausschließen wollen. Die Zusammengehörigkeit der Ellipsen und ihre Lagen zum Kern erläutern die Abb. 66 und 67.

Für die *Gesamtenergie* einer n^{ten} Quantenbahn, d. h. für jede der n zusammengehörigen Ellipsen ergibt sich derselbe Wert E_n , der

mit dem früher gefundenen Wert des Bohrschen Modells übereinstimmt:

$$E_n = -\frac{2\pi^2\mu Z^2 e^4}{h^2 n^2} = -hc \cdot \frac{RZ^2}{n^2}, \quad (84)$$

wobei die *Hauptquantenzahl*

$$n = n_r + k \quad (84a)$$

zu setzen ist. Es kommt somit die *gleiche Strahlungsformel* wie früher, also eigentlich nichts Neues heraus. n erscheint zwar aufgeteilt in n_r und k , aber für die Gesamtenergie ist doch nur die Hauptquantenzahl n von Bedeutung. Der Energiewert aller elliptischen n_k -Bahnen, für die $n_r + k = n$ ist, ist derselbe und stimmt überein mit dem Energiewert des n^{ten} Bohrschen Kreises.

Trotz der Vervielfachung der Zahl der möglichen Bahnen verläuft die Rechnung ergebnislos. Es ergibt sich nicht die erwartete Erklärung für die *Feinstruktur* der Linien; denn beispielsweise ist bei den Sprüngen $4_3 \rightarrow 2_2$, $4_3 \rightarrow 2_1$, $4_4 \rightarrow 2_2$ usw. immer die Energiedifferenz und somit auch die ausgestrahlte Frequenz dieselbe. Zur Erklärung der *Linienaufspaltung* (Multipletts) aber müßten *kleine Abweichungen* von den Bohrschen Energiestufen auftreten. Das davon verschiedene Ergebnis erheischt eine nähere Betrachtung. Die von Sommerfeld eingeführten Quantenzahlen n_r und k , die in die Strahlungsformel nur in der Verbindung $n_r + k = n$ eingehen, erweisen sich als „überzählig“. Die Ellipsenbahnen, die zu ihrer quantentheoretischen Kennzeichnung nur *eine* Quantenzahl, die *Hauptquantenzahl* n , erfordern wie die Bohrschen Kreise, sind „entartet“. Es erhebt sich nun die Frage, ob den Quantenzahlen n_r und k überhaupt eine Bedeutung zukommt. Wir können sie bejahen, wenn die „Entartung“ durch geeignete Mittel *aufgehoben* wird. Dies tritt ein, sobald das *Coulombsche Feld* durch äußere Einflüsse (zusätzliche elektrische oder magnetische Felder) *gestört* wird. Ein solcher Fall liegt auch dann vor, wenn, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, das Kepler-Problem relativistisch, d. h. mit Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit des Elektrons behandelt wird.

b) Fassung mit veränderlicher Elektronenmasse. Mit Berücksichtigung der bekannten Massenformel:

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

gestaltet sich die Berechnung der Kepler-Ellipsen wohl noch komplizierter, ist aber in geschlossener Form durchführbar. Auch in diesem Fall sei auf Sommerfelds Darstellung a. a. O. verwiesen. Wenn wir die Bahnbezeichnung n_k im gleichen Sinn verstehen wie früher, so können wir jetzt feststellen, daß die n_k -Bahnen nicht mehr energetisch gleichwertig erscheinen, daß vielmehr eine *Aufspaltung der Energiestufen* eintritt gemäß der Formel:

$$E_{n_k} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n_r + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}}}} - m_e c^2, \quad (85)$$

in der die Quantenzahlen n_r und k *selbständig* (nicht mehr in der Verbindung $n_r + k$) auftreten und

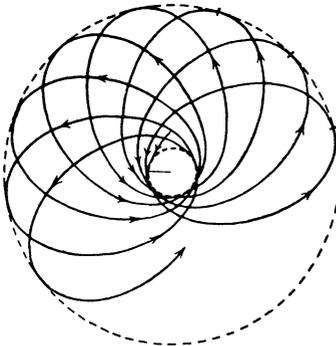
$$\alpha = \frac{2 \pi e^2}{h c} = (7,284 \pm 0,006) \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137} \quad (86)$$

die Sommerfeldsche *Feinstrukturkonstante* bedeutet.

Die *Elektronenbahnen* sind nicht mehr rein periodische Kepler-Ellipsen, sie sind *bedingt* periodische „Ellipsen“ mit *Perihelvor-*

rückung (Rosettenbahnen), wie sie Abb. 68 zur Darstellung bringt.

Die Größe der *Perihelvorrückung*, d. h. der zu $\varphi = 2 \pi$ hinzutretende Winkelbetrag δ , bei dem abermals das Perihel erreicht wird, ergibt sich zu:



$$\delta = 2 \pi \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - \alpha^2 \cdot Z^2}} - 1 \right) \approx \frac{\pi \alpha^2 Z^2}{n^2}, \quad (87)$$

Abb. 68. Ellipse mit Perihelvorrückung (Rosettenbahn).

ist also im Hinblick auf die Kleinheit von α *sehr gering* und

für innere Bahnen (kleine n -Werte) größer als für äußere.

Die Formel für die Energiestufen E_{n_k} wird zur praktischen Auswertung erst durch *Reihenentwicklung* geeignet. Man erhält so:

$$E_{n_k} = - h c \frac{R Z^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \quad (88)$$

Bei festem n und veränderlichem k bekommt man jetzt *verschiedene* Energiewerte. Weil k die ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft,

gehören zum n^{ten} Bohrschen Kreis n Bahnen mit verschiedenen Energiestufen.

Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß jede Serie *einfacher* Linien des ursprünglichen Bohrschen Modells, deren konstanter Term $\frac{R_\infty Z^2}{n^2}$ ist (s. S. 95), in eine Serie von *n-fachen* Linien (*Multipletts*) aufgespalten wird, wenn wir zunächst nur die durch die Ver-*n*-fachung der Endbahn bedingte Struktur der Linien im groben berücksichtigen. Im einzelnen geht aus jeder einfachen Linie, die dem Sprung eines Elektrons vom k^{ten} auf den n^{ten} Bohrschen Kreis entspricht, ein Gebilde von k *n-fachen* Linien, also im

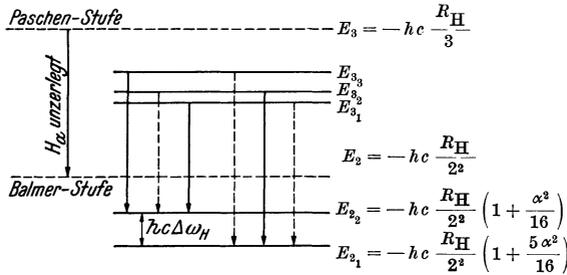


Abb. 69. Feinstruktur der H_α -Linie.

$\Delta\omega_H$ stellt das sogenannte „Wasserstoffdublett“ dar. Die Aufspaltung der Energiestufen E_2 und E_3 ist im Vergleich zu ihrem Abstand stark vergrößert gezeichnet.

ganzen von $k \cdot n$ Linien hervor (*Feinstruktur*). Für die *Balmer-Serie* des Wasserstoffs bedeutet dies, daß sie im groben eine *Dublettserie* ist und z. B. die einfache H_α -Linie des ursprünglichen Bohrschen Modells, die wir uns durch den Sprung eines Elektrons vom dritten auf den zweiten Bohrschen Kreis vorzustellen haben, aus 3 Doppellinien, im ganzen also aus 6 Linien bestehen müßte. Der Dublettcharakter entspricht nun durchaus den Tatsachen, die Zahl der beobachteten Linien ist indessen nicht 6, sondern nur 3 (s. Abb. 67 u. 69, ausgezogene Pfeile).¹ In ähnlicher Weise lassen sich von den theoretisch geforderten $4 \cdot 2 = 8 H_\beta$ -Linien wieder nur 3 nachweisen, die übrigen fehlen. Die Theorie liefert somit *zu viel* Linien. Wie kann man unter ihnen die *richtigen* herausfinden?

¹ Nach neuerer Erkenntnis sind es allerdings 5, von denen aber 2 von den anderen nicht getrennt werden können.

Der Vergleich zwischen den von der Theorie *geforderten* und den tatsächlich *beobachteten* Spektrallinien legt eine auch sonst gültige *Auswahlregel* für die Nebenquantenzahl k nahe. Bezeichnen k und k' die Nebenquantenzahlen der Anfangs- und Endbahn des in Betracht kommenden Elektronensprunges, so darf nur

$$k' = k \pm 1 \quad (89)$$

sein. Es sind also nur jene Elektronensprünge zulässig, bei denen sich die *Nebenquantenzahl um 1 ändert*. Alle anderen Übergänge sind ausgeschlossen. Auf die Feinstruktur der H_α -Linie angewendet, besagt diese Regel, daß nur die Übergänge $3_2 \rightarrow 2_1$, $3_1 \rightarrow 2_2$, $3_3 \rightarrow 2_2$ erlaubt und daher nur die entsprechenden drei Komponenten beobachtbar sind (Abb. 67 und 69). Diese Auswahlregel bewährt sich ganz allgemein. Sie findet jedoch zunächst *keine Begründung im Atommodell*, und erst die später zu besprechende *Wellenmechanik* vermochte von ihr befriedigende Rechenschaft zu geben.

Die *Größe der Aufspaltung* der Linien wird im wesentlichen durch die Sommerfeldsche *Feinstrukturkonstante* α (s. S. 102) bestimmt und beträgt für die Balmer-Stufe ($n = 2$)

$$\Delta \omega = \frac{1}{h c} (E_{2_2} - E_{2_1}) = \frac{R Z^4 \alpha^2}{2^4}, \quad (90)$$

woraus sich im besonderen für $Z = 1$ das „*Wasserstoffdublett*“ ergibt:

$$\Delta \omega_H = \frac{R_H \alpha^2}{16} = 0,3636 \text{ cm}^{-1} \quad (90 \text{ a})$$

in Übereinstimmung mit der Beobachtung, die das Dublett allerdings nicht unmittelbar liefert (Abb. 69).

4. Das Korrespondenzprinzip von N. Bohr.

Die Anwendung der Bohrschen Strahlungsformel Gl. (74a) auf *große Quantenzahlen* n bei *kleinen Sprüngen* des strahlenden Elektrons

$$\Delta n = k - n \ll n \quad (91)$$

liefert in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \omega &= R_\infty Z^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n + \Delta n)^2} \right] = \\ &= R_\infty Z^2 \frac{\Delta n (2n + \Delta n)}{n^2 (n + \Delta n)^2} \approx \frac{2 R_\infty Z^2}{n^3} \cdot \Delta n. \quad (92) \end{aligned}$$

Betrachten wir andererseits das umlaufende Elektron als Strahler im Sinne der klassischen Elektrodynamik, so ist seine Frequenz ν_{kl} durch die *sekundliche Umlaufszahl* bestimmt. Wir erhalten in diesem Falle aus den früher (S. 93 ff.) gewonnenen Formeln für v_n , a_n und R_∞ die Beziehung:

$$\nu_{\text{kl}} = \frac{v_n}{2\pi a_n} = \frac{2\pi Z e^2}{n\hbar} \cdot \frac{2\pi m Z e^2}{n^2 \hbar^2} = 2c \frac{R_\infty Z^2}{n^3} \quad (93)$$

oder

$$\omega_{\text{kl}} = \frac{\nu_{\text{kl}}}{c} = \frac{2 R_\infty Z^2}{n^3}. \quad (93a)$$

Ein Vergleich mit dem oben gefundenen Näherungswert für die *quantentheoretische* Wellenzahl ω ergibt:

$$\omega \approx \omega_{\text{kl}} \cdot \Delta n; \quad (94)$$

d. h. im Gebiet *sehr hoher Quantenzahlen* strahlt das Bohrsche Atommodell ebenso wie ein *klassischer Strahler* (etwa eine schwingende Saite), der (die) für $\Delta n = 2, 3, 4, \dots$ die harmonischen Oberschwingungen einer bestimmten Grundschwingung ω_{kl} aussendet.

Diese asymptotische Übereinstimmung seines Atommodells mit einem klassischen Strahler hat Bohr zur Beantwortung einer Frage herangezogen, über die das Modell als solches keinen Aufschluß gibt. Es ist dies die Frage nach *Intensität* und *Polarisation* der einzelnen Spektrallinien. Bohr verlangt, daß die hierfür auf *klassischem* Wege ermittelten Werte nicht nur im Bereich hoher Quantenzahlen, wo das Verhalten seines Atommodells dem eines klassischen Strahlers gleichkommt, sondern *auch für kleine Quantenzahlen* mit den zugehörigen Werten des Atommodells „*korrespondieren*“ sollen. Dieser Gedanke hat sich als außerordentlich fruchtbar zur Gewinnung gewisser *Auswahlregeln* erwiesen; Sommerfeld hat das Bohrsche *Korrespondenzprinzip* wegen seiner ungewöhnlichen *heuristischen Bedeutung* geradezu als „*Zauberstab*“ bezeichnet.

Um dieses wertvolle Prinzip auch im Rahmen dieser Schrift etwas näher zu beleuchten, wollen wir es zur Ableitung der bereits mitgeteilten *Auswahlregel für die Nebenquantenzahl k* heranziehen. Wir betrachten zu diesem Behufe das Sommerfeldsche Modell der *Ellipsenbahnen mit Perihelvorrückung* als klassischen Strahler. Wenn wir zunächst ohne Rücksicht auf die Perihelvorrückung

rückung nur die wechselnde Geschwindigkeit bedenken, mit der das strahlende Elektron seine Ellipsenbahn durchläuft, so können wir die damit verbundenen, durch Normalprojektion zu gewinnenden Schwingungen in der x - und y -Richtung in *Fourier-Reihen* einer gewissen Grundfrequenz ν entwickeln; wir bedienen uns dabei nach dem Vorgange Cl. Schaeffers zur Vereinfachung der Darstellung der *komplexen* Schreibweise:

$$x + iy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{2\pi i n \nu t},$$

$$x - iy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_n e^{2\pi i n \nu t},$$

wobei die *Amplituden* A_n und \bar{A}_n selbst als *komplex* anzusehen sind. Die Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt die Fourier-Entwicklungen für die in der x - und y -Richtung verlaufenden Schwingungen. n bedeutet die *Hauptquantenzahl*, die alle Werte durchlaufen kann, für die also *keine Auswahlregel* besteht.

Denken wir uns nun dieselbe Ellipse mit einer bestimmten Frequenz ν' sich drehend, also *mit Perihelorrückung*, so erhalten wir für die zugeordneten Schwingungen in einem *mitbewegten* Koordinatensystem (ξ, η) *dieselbe* Fourier-Darstellung wie früher:

$$\left. \begin{aligned} \xi + i\eta &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{2\pi i n \nu t}, \\ \xi - i\eta &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_n e^{2\pi i n \nu t}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

In einem *ruhenden* Koordinatensystem (x, y) wird dagegen die Drehbewegung mit der Frequenz ν' zum Ausdruck kommen:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= (\xi + i\eta) e^{2\pi i \nu' t}, \\ x - iy &= (\xi - i\eta) e^{-2\pi i \nu' t}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

¹ Die beiden Gleichungen sind nur die *komplexe* Fassung der bekannten *Drehtransformation*:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos 2\pi \nu' t - \eta \sin 2\pi \nu' t, \\ y &= \xi \sin 2\pi \nu' t + \eta \cos 2\pi \nu' t, \end{aligned} \right\} \quad (96a)$$

wie man sich leicht durch Trennung von Real- und Imaginärteil überzeugt.

Wir erhalten so die gesuchten *Fourier-Entwicklungen* für die einer Ellipsenbahn mit Perihelvorrückung zugeordneten Schwingungen:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{2\pi i(n\nu + \nu')t}, \\ x - iy &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_n e^{2\pi i(n\nu - \nu')t}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Die der *Drehbewegung mit der Frequenz ν' zuzuordnende Quantenzahl* ist offenbar die *azimutale* oder *Nebenquantenzahl k* , deren Quantensprüngen in der klassischen Darstellung die allein vorhandenen Faktoren ± 1 von ν' „*korrespondieren*“; das heißt aber, daß sich *k nur um ± 1 ändern darf* und allen anderen Übergängen die Intensität Null entspricht. Wir erkennen in diesem Ergebnis die gesuchte *Auswahlregel*. Gleichzeitig liefern die nicht verschwindenden *Koeffizienten* der zuletzt erhaltenen Fourier-Reihen näherungsweise ein Maß für die zu erwartenden *Linienintensitäten*.

5. Gesetzmäßigkeiten der Röntgenlinien.

Wir wenden uns nun zu einer besonderen Untersuchung der *Röntgenspektren*. Die allgemeine Formel [Gl. (78)] für die Wellenzahl ω enthält das *Quadrat der Kernladungszahl Z* . Geht man vom Wasserstoff zum Helium über, so ist die Frequenz der gleichen Linie (n und k gleich genommen) schon auf das Vierfache gestiegen. Die Linien rücken also mit *wachsender Kernladung Z* immer rascher gegen die *größeren Frequenzen* (kleineren Wellenlängen).

Wo werden wir also die der Balmer-Serie entsprechenden Linien, z. B. beim *Uran* ($Z = 92$), zu suchen haben? Da in diesem Fall Z^2 rund 9000 ist, wird das durch dieselben Sprünge ausgesandte Licht schon *Röntgenlicht* sein. Der H_α -Linie z. B. würde eine Wellenzahl von rund $14000 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$ (s. Zahlentafel 3 und 6) entsprechen.

Bei Untersuchung der *Röntgenspektren* fand H. G. J. Moseley 1913/14 mit Benützung des *Kristallinterferenzverfahrens* (s. S. 167 ff.), daß die Wellenzahlen der K_α -Linien proportional $(Z - 1)^2$ sind. Diese Linien entsprechen bei den Elementen mit höheren Kernladungszahlen jeweils der *ersten* Linie der Lyman-

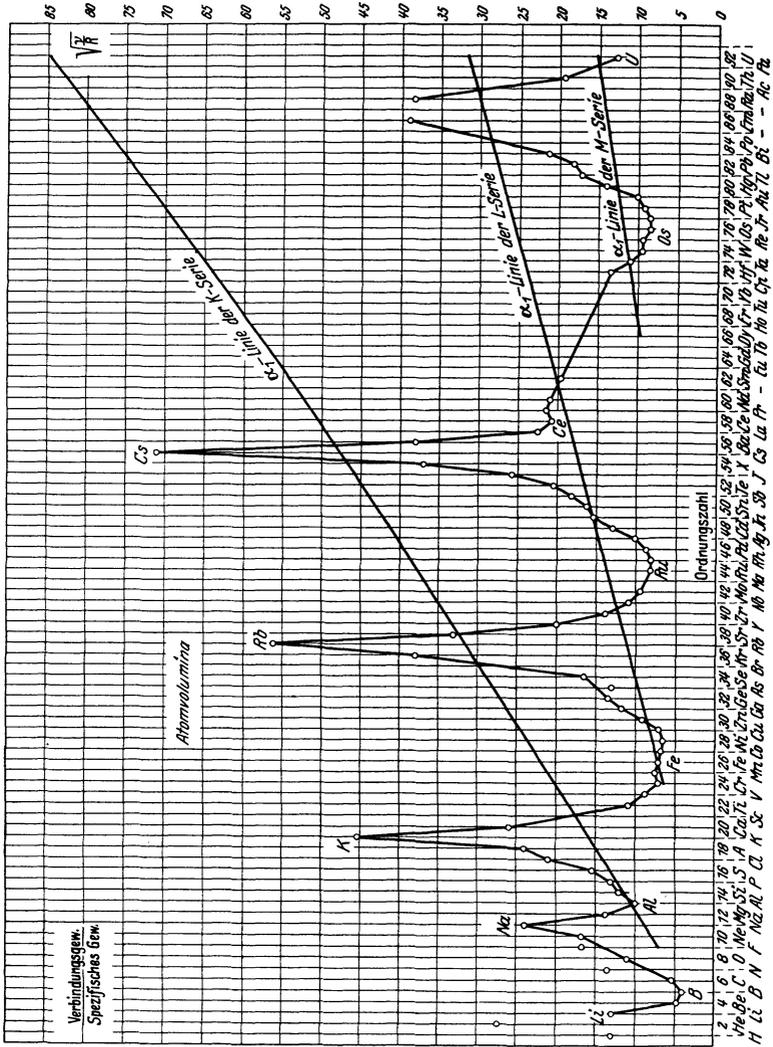


Abb. 70. Die Atomvolumina (Verbindungsgew./spez. Gew.) als Funktion der Kernladungs-(Ordnungs-)zahl und die „Moseleyschen Geraden“ für die Röntgenlinien K_{α_1} , L_{α_1} , M_{α_1} (nach F. Paneth).

Serie des Wasserstoffes. Bei den L_α -Linien (entsprechend jeweils der *ersten* Linie der Balmer-Serie) fand Moseley die Wellenzahlen proportional $(Z - 7,4)^2$. Im Hinblick auf die Bohrsche Strahlungsformel [Gl. (78)] geben wir dem *Moseleyschen Gesetz* die Fassung:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{K_\alpha} &= \frac{3}{4} R \cdot (Z - 1)^2 = R \cdot (Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right), \\ \omega_{L_\alpha} &= \frac{5}{36} R \cdot (Z - 7,4)^2 = R \cdot (Z - 7,4)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Läßt man neben Z die Zahlen 1 bzw. 7,4 fort, so erhält man genau die Bohrsche Formel. Welche physikalische Bedeutung haben nun diese Zahlen, die man von der Kernladung Z in Abzug bringen muß? Wir können ihnen den Sinn von „*Abschirmungszahlen*“ geben. Bei den Atomen mit höherer Ordnungszahl wird nämlich die Bewegung der äußeren Elektronen durch die weiter innen befindlichen beeinflusst. Diese Beeinflussung besteht im wesentlichen darin, daß *die inneren Elektronen die Kernladung teilweise abschirmen*.

Die abschirmende Wirkung und damit die „*Abschirmungszahl*“ muß offenbar um so größer werden, je weiter die „*Endbahn*“ vom Kern entfernt, d. h. je größer die zum konstanten Term einer Röntgenserie gehörige Hauptquantenzahl n ist. Für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ sind die Bezeichnungen *K-, L-, M-, N-Serie* usw. üblich geworden.

Moseley kleidete sein Gesetz in die besondere Form:

$$\sqrt{\frac{\omega}{R}} = \text{konst.} \cdot (Z - s), \quad s = \text{Abschirmungszahl.} \quad (98a)$$

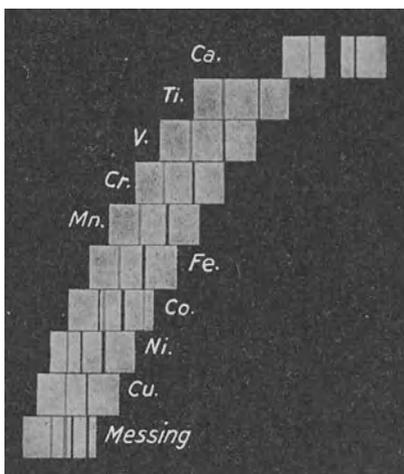


Abb. 71. Moseleys erste Aufnahmen der Röntgenlinien K_α und K_β der Elemente Ca ($Z = 20$) bis Zn ($Z = 30$). Lücke bei $Z = 21$ (Sc), Messing-Legierung von Cu und Zn. Die Wellenlängen nehmen von links nach rechts zu.

Sie besagt, daß die Wurzel aus der Wellenzahl einer bestimmten Linie von der Kernladungszahl Z linear abhängig ist. In Abb. 70 sind die sich so ergebenden „*Moseleyschen Geraden*“, die den Linien K_{α_1} , L_{α_1} und M_{α_1} entsprechen, zur Darstellung gebracht. Abb. 71 zeigt die von Moseley durch *Interferenzspektroskopie* erhaltenen photographischen Bilder der K_{α} - und K_{β} -Linien der Elemente Ca ($Z = 20$) bis Zn ($Z = 30$) [das letztere enthalten in Messing, einer Legierung von Cu und Zn]. Man bemerkt deutlich das Fehlen der Linien, die dem (Moseley nicht zur Verfügung gestandenen) Scandium Sc ($Z = 21$) entsprechen.

Moseley vermochte so nach der *Reihenfolge der K_{α} - und L_{α} -Linien* die Elemente zu *ordnen* und erkannte in der *Kernladungszahl Z* das *Ordnungsprinzip* des periodischen Systems, wie dies schon Van den Broek vermutet hatte.

6. Periodisches System der chemischen Elemente.

(Lothar Meyer [1864], Mendelejeff [1869].)

Man ordnete anfänglich die chemischen Elemente nach steigendem Atomgewicht und bemerkte dabei eine merkwürdige *Periodizität ihrer chemischen Eigenschaften*, z. B. ihres *Atomvolumens* (Verbindungsgewicht/spezifisches Gewicht, s. Abb. 70). Dies war der Anlaß, sie in einer *rechteckigen Tafel* anzuordnen, die wir als *periodisches System der Elemente* zu bezeichnen pflegen (Zahlentafel 9). Es zeigt sich dabei, daß die Zahl der in einer Periode untergebrachten Elemente in gesetzmäßiger Weise zunimmt, wie die Übersicht in Zahlentafel 10 verdeutlicht.

Daß, wie schon bemerkt, nicht das Atomgewicht, sondern in Wahrheit die *Kernladungszahl Z* als *ordnendes Prinzip* in Frage kommt, beweisen die in Zahlentafel 7 durch Pfeile angedeuteten Umstellungen: 18 Ar 39,94 \leftrightarrow 19 K 39,10; 27 Co 58,97 \leftrightarrow 28 Ni 58,68; 52 Te 127,5 \leftrightarrow 53 J 126,92 und 90 Th 232,1 \leftrightarrow 91 Pa 231. Die *Kernladungszahl Z* ist zugleich die „*Atomnummer*“ des betreffenden Elementes im periodischen System. Ihre Feststellung gelingt mit Hilfe des *Röntgenspektrums* auf Grund des *Moseleyschen Gesetzes* (s. S. 109), das aber über die Periodizität keinerlei Aufschluß gibt.

Wie erklärt sich nun die Entstehung der *Perioden*? Sie hängt mit dem *Aufbau (Schalenbau) der Elektronenhülle* eng zusammen.

Zahlentafel 10.

1. Periode	1 H,	2 He	2 Elemente
2. „	3 Li bis	10 Ne	$8 = 2 \cdot 2^2$ Elemente
3. „	11 Na „	18 Ar	$8 = 2 \cdot 2^2$ „
4. „	19 K „	36 Kr	$18 = 2 \cdot 3^2$ „
5. „	37 Rb „	54 X	$18 = 2 \cdot 3^2$ „
6. „	55 Cs „	86 Em	$32 = 2 \cdot 4^2$ „
7. „	87 — „	118 —	$32 = 2 \cdot 4^2$ „

Jedes Element enthält im neutralen Zustand soviele Elektronen in der Hülle, als die Kernladungszahl angibt. Offenbar muß die Elektronenhülle bei den chemisch trägen *Edelgasen* einen besonders *stabilen* Zustand erreichen. Dieser Umstand legt den Gedanken nahe, daß bei den Elementen mit den Atomnummern 2, 10, 18, 36, 54 und 86 immer gerade eine Schale bzw. Untergruppe (s. S. 117 ff.) der Elektronenhülle vollendet sein muß.

Damit findet auch die *Wertigkeit* der Elemente eine einfache Erklärung (*Valenztheorie* von W. Kossel, 1916). Betrachten wir z. B. die Verbindung NaCl. Na ist gerne geneigt, sein 11. Elektron (Valenzelektron) abzugeben und sich in den Zustand des Neons (einen *abgeschlossenen Edelgaszustand*) zu versetzen; Cl andererseits hat gerade ein Elektron zu wenig im Vergleich mit der Elektronenanzahl des Ar. In der Verbindung NaCl erreicht Na⁺ den Neon-, Cl⁻ den Argontypus.

Jedes Element betätigt nach Kossel seine Wertigkeit derart, daß es in der entstehenden Verbindung eine *Edelgaskonfiguration* erreicht. Dieses Verhalten bringt Abb. 72 zum Ausdruck.

Man gewinnt so eine Vorstellung von der Anordnung der Elektronen in der Atomhülle der einzelnen Elemente (Abb. 73). Wasserstoff besitzt ein Elektron auf einer Kreisbahn, He zwei in gleichem Abstand kreisende Elektronen; damit ist schon die *erste Schale* (*K-Schale*) mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ abgeschlossen. Dann beginnt die Schale mit der Hauptquantenzahl $n = 2$, die der Reihe nach die Elemente 3 Li, 4 B, 5 Be, 6 C, 7 N, 8 O, 9 F und als letztes das Edelgas 10 Ne umfaßt, bei dem die *L-Schale* mit 8 Elektronen abgeschlossen ist. Es folgten sodann, den Hauptquantenzahlen $n = 3, 4, 5, 6, 7$ entsprechend, die *M-, N-, O-, P- und Q-Schale*, die im abgeschlossenen Zustand der Reihe nach 18 ($2 \cdot 3^2$), 32 ($2 \cdot 4^2$), 50 ($2 \cdot 5^2$), 72 ($2 \cdot 6^2$) und 98 ($2 \cdot 7^2$) Elektronen enthalten bzw. ent-

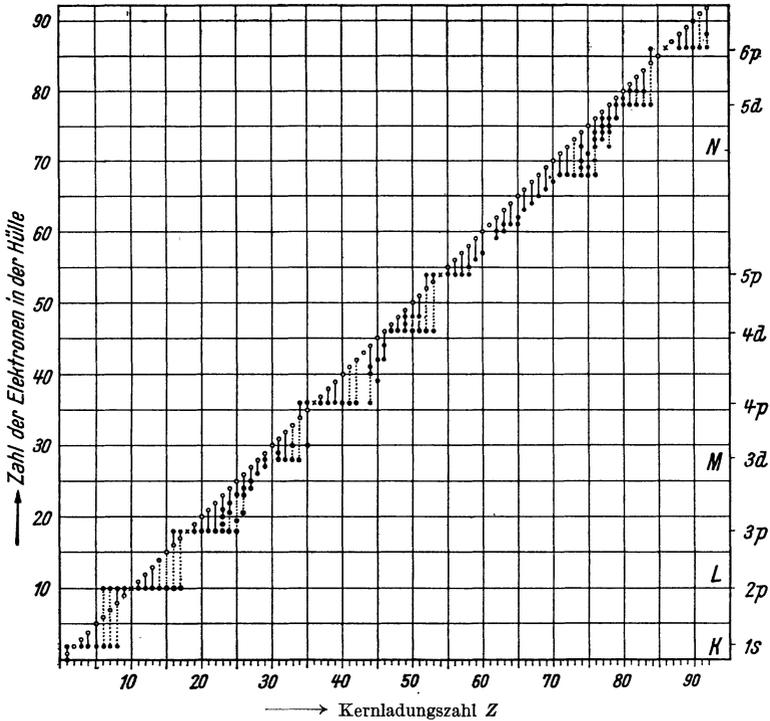


Abb. 72. Darstellung der Wertigkeit (Valenz) der Elemente nach W. Kossel.

Jedes Element sucht so viel Elektronen in seine Atomhülle aufzunehmen, bzw. aus ihr abzugeben, bis eine Edelgaskonfiguration erreicht ist.

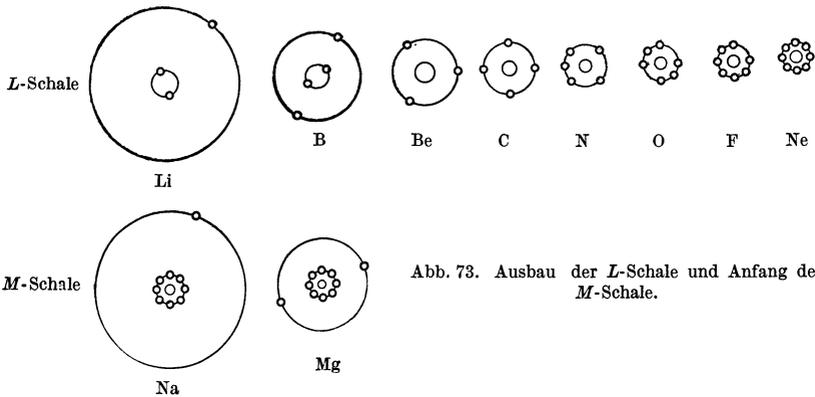


Abb. 73. Ausbau der L-Schale und Anfang der M-Schale.

halten würden (vgl. Zahlentafel 10, S. 112). Beim letzten Element des periodischen Systems, bei 92 U, sind sämtliche Schalen mit Einschluß der *N*-Schale abgeschlossen, in der *O*-Schale befinden sich 22, in der *P*-Schale 8 und in der *Q*-Schale 2 Elektronen (s. Zahlentafel 12, S. 122). Man kann an diesem Beispiel die auch sonst gültige Regel erkennen, daß *der Ausbau der einzelnen Schalen nicht der Reihe nach* erfolgt, daß vielmehr die Besetzung neuer Schalen anfängt, ehe noch die vorausgehenden abgeschlossen sind. Über den *Feinbau* der einzelnen Schalen siehe den nächsten Abschnitt.

7. Die Quantenzahlen des einzelnen Elektrons. Räumliche Quantelung und Elektronendrall.

Die folgende Darstellung enthält alles Wesentliche über den Aufbau der Elektronenhülle. Es handelt sich dabei um die Beantwortung folgender Fragen: Durch welche Angaben kann der Zustand jedes einzelnen Elektrons in einfachster und eindeutiger Weise beschrieben werden? Wie viele solche Zustände sind möglich? Wie viele Elektronen befinden sich jeweils in einem bestimmten Zustand? Wie erklären sich damit die Anzahlen der Elemente in den einzelnen Perioden des periodischen Systems? Wie sind die Elektronen in der Atomhülle eines jeden Elementes verteilt? Die befriedigende Lösung all dieser Fragen ist durch die *Einführung von vier Quantenzahlen* zur Kennzeichnung des Elektronenzustandes im Verein mit dem *Ausschließungsprinzip* von Pauli (1925) möglich geworden.

Wir betrachten zunächst die vier Quantenzahlen. Von ihnen sind uns zwei bereits bekannt: Die *Hauptquantenzahl* n und die *azimutale* oder *Nebenquantenzahl* k , die alle Werte von 1 bis n , also im ganzen n Werte annehmen kann. Die *erstere* bestimmt, wie wir wissen, die *Schale*, in der sich das Elektron befindet, die *letzte* die ihm zukommende *Bahnform innerhalb derselben*. Die *Nebenquantenzahl* k wurde zunächst formal von Sommerfeld zur Quantelung der Kepler-Ellipsen eingeführt (s. S. 99), sie hat aber erst wirkliche Bedeutung bei der relativistischen Behandlung der Ellipsenbahnen (s. S. 102), bzw. bei *Abweichungen vom Coulomb-schen Feld* erlangt, wie sie in allen jenen Fällen vorliegen, wo die Elektronenbewegungen im Felde des teilweise *abgeschirmten* Kernes (des „*Atomrumpfes*“) erfolgen.

a) **Räumliche Quantelung. Magnetische Quantenzahl.** Die Bedeutung der *Nebenquantenzahl* k liegt darin, daß sie den *Bahndrehimpuls* \vec{k}^1 des Elektrons bestimmt. In diesem Sinne muß die ganze Zahl k als *Vektor* (senkrecht zur Bahn) aufgefaßt werden. Das Vorhandensein *äußerer* (elektrischer oder magnetischer) *Felder* kann die *Raumlage* der Bahnen und damit die *Richtung* des Vektors \vec{k} beeinflussen. Eine naheliegende Erwägung ist die, daß nur jene Richtungen von \vec{k} zulässig erscheinen, für welche die Pro-

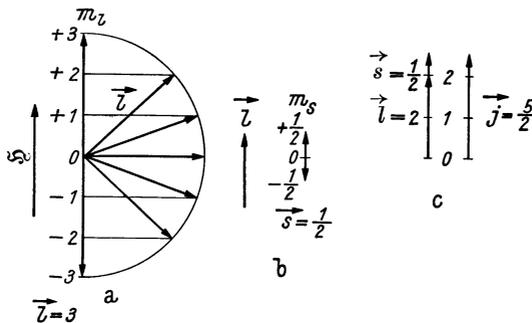


Abb. 74. a) Räumliche Quantelung des Bahndrehimpulses \vec{l} , b) Elektronenspin \vec{s} , c) Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ eines Elektrons.¹

jektion von \vec{k} auf die Richtung des störenden Feldes, das für das Atom eine bevorzugte Raumrichtung erst definiert, selbst wieder eine *ganze Zahl* ist (*räumliche* oder *Richtungsquantelung*). Statt der Quantenzahl k wollen wir im folgenden die *Quantenzahl* l verwenden, die durch die Beziehung

$$l = k - 1 = 0, 1, 2, 3, \dots n - 1^2 \quad (99)$$

festgelegt wird und ihr ebenso wie k einen *Vektor* \vec{l}^1 zuordnen, der *räumlich gequantelt* ist (s. Abb. 74). Die sämtlichen *ganzzahligen* Projektionen von \vec{l} auf die Richtung des äußeren Feldes (z. B.

¹ Bezogen auf $\frac{h}{2\pi}$ als Einheit. Siehe ferner die Fußnote auf S. 116.

² In unmittelbarer und ungezwungener Weise ergibt sich diese *azimutale* Quantenzahl vom Standpunkt der *Wellenmechanik* (s. S. 219).

des magnetischen Feldes §) ergeben die Gesamtheit der $(2l + 1)$ -Werte der *magnetischen Quantenzahl* m_l :

$$l, l - 1, l - 2, \dots + 1, 0, -1, -2, \dots - l + 1, -l. \quad (100)$$

Im Falle der Abb. 74 a ($\vec{l} = 3$) sind dies die sieben Werte: 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3. Für die Wertereihe $l = 0, 1, 2, 3, 4$ usw. wird gewöhnlich die *Buchstabenbezeichnung* s, p, d, f, g usw. angewendet (Zahlentafel 11).

b) Elektronendrall. Spinquantenzahl. Wir haben aber noch nicht genug Möglichkeiten zur Erklärung der Spektren, sondern gerade nur die *Hälfte* der erforderlichen Anzahl zur eindeutigen Beschreibung der Zustände eines Elektrons im Atom. Uhlenbeck und Goudsmit erweiterten 1925 die Theorie durch die Annahme, daß jedes Elektron, abgesehen von seinem *räumlich gequantelten Bahnimpuls* \vec{l} ,¹ noch einen *Eigendrehimpuls* infolge einer Drehung um die eigene Achse besitzt. Diesen vektoriellen Drehimpuls \vec{s} ¹ nennt man *Drall* oder *Spin* des Elektrons. Dirac lieferte 1928 eine den Rahmen dieser Schrift weit überschreitende Theorie für diesen *Spin*. Es sind nur *zwei Spinstellungen* möglich: *in* der Richtung des *Bahnimpulses* \vec{l} oder ihm *entgegen*. Für sie gelten die spektroskopisch bestätigten Werte der *Spinquantenzahl*

$$m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (101)$$

(Abb. 74 b). *Bahnimpuls* \vec{l} und *Spin* \vec{s} setzen sich für das einzelne Elektron *vektoriell* zu einem *Gesamtdrehimpuls* \vec{j} ¹ (*innere Quantenzahl*) zusammen:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}. \quad (102)$$

j kann somit die Werte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ usw. annehmen. Die *räum-*

¹ Bezogen auf $\frac{h}{2\pi}$ als Einheit. Der Pfeil über einem Buchstaben bedeutet hier und im folgenden, daß die betreffende physikalische Größe als *Vektor* aufzufassen ist. Durch Weglassung des Pfeiles wird zum Ausdruck gebracht, daß nur der *absolute Betrag* dieser Größe in Betracht kommt.

Zahlentafel II. Quantenzahlen des einzelnen Elektrons.

n	1		2		3		4									
	0	s	0	p	0	p	0	1	2	3						
l																
m_l	0	0	0	± 1	0	± 1	± 2	± 1	± 2	± 3	± 1					
m_s	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$									
m	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$									
j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$					
Zahl der Zustände	2	2	2	4	2	4	6	4	6	8	8					
Gesamtzahl	$8 = 2 \cdot 2^2$				$18 = 2 \cdot 3^2$				$32 = 2 \cdot 4^2$							
Elektronenanordnung	$2 s^2 p^6$				$3 s^2 p^6 d^{10}$				$4 s^2 p^6 d^{10} f^{14}$							
Schale und Untergruppe	K	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V	N_I	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}

liche Quantelung des Gesamtdrehimpulses \vec{j} ergibt die folgenden $2(2l+1)$ Werte der magnetischen Quantenzahl

$$m = m_l + m_s: \quad (102a)$$

$$l \pm \frac{1}{2}, \quad (l-1) \pm \frac{1}{2}, \quad \dots, 1 \pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{1}{2},$$

$$-1 \pm \frac{1}{2}, \quad \dots, (-l+1) \pm \frac{1}{2}, \quad -l \pm \frac{1}{2}.$$

Abb. 74c stellt den Fall $\vec{l} = 2, \vec{j} = \frac{5}{2}$ dar. Jetzt haben wir *genug* verschiedene Möglichkeiten, deren jede durch bestimmte Werte der vier Quantenzahlen n, l, m_l, m_s gekennzeichnet ist. Ihnen wollen wir noch das

e) **Ausschließungsprinzip von Pauli („Pauliverbot“)** hinzufügen. In einem bestimmten Quantenzustand (n, l, m_l, m_s) kann sich jeweils nur *ein* Elektron befinden. Die möglichen Elektronenzustände, die sich so ergeben, sind in der Zahlentafel 11 zusammengefaßt.

Dieser Zahlentafel seien einige Bemerkungen beigefügt. Die *K-Schale* entspricht dem *ersten Bohrschen Kreis* des H-Atoms ($n = 1$); sie enthält zwei *s*-Elektronen mit dem Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \frac{1}{2}$, deren *Spins* entweder *parallel* („*Ortho-Zustand*“) oder *antiparallel* („*Para-Zustand*“) sein können. Bei 2 He ist die *K-Schale* abgeschlossen; es kommt je nach der Spineinstellung seiner beiden Elektronen in zwei Modifikationen vor: als *Ortho-* und *Parhelium*. Zur Hauptquantenzahl $n = 2$ gehört die *L-Schale*, die also dem *zweiten Bohrschen Kreis* entspricht; sie umfaßt nach ihrer Vollendung, die bei 10 Ne erreicht ist, 2 *s*-Elektronen (Nebenquantenzahl $l = 0$) mit $\vec{j} = \frac{1}{2}$ und 6 *p*-Elektronen ($l = 1$), von denen zwei den Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \frac{1}{2}$ und vier den Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \frac{3}{2}$ aufweisen. Man pflegt, dieser Unterscheidung folgend, die *L-Schale* in eine *L_I*-, *L_{II}*- und *L_{III}*-Schale zu unterteilen. In ähnlicher Weise wird bei der *M-Schale* ($n = 3$) und *N-Schale* ($n = 4$) verfahren, wie dies aus Zahlentafel 9 deutlich hervorgeht. Die angegebene Verteilung der Elektronen auf die *Untergruppen* der einzelnen Schalen weicht von der ursprünglich von Bohr vorgeschlagenen ab und stammt von M. Smith und

E. Stoner (1924). Sie wird durchaus dem Paulischen Prinzip gerecht.

Auf dieser Grundlage sind wir imstande, die Atomspektren in erschöpfender Weise zu deuten. Abb. 75 zeigt das *vollständige*

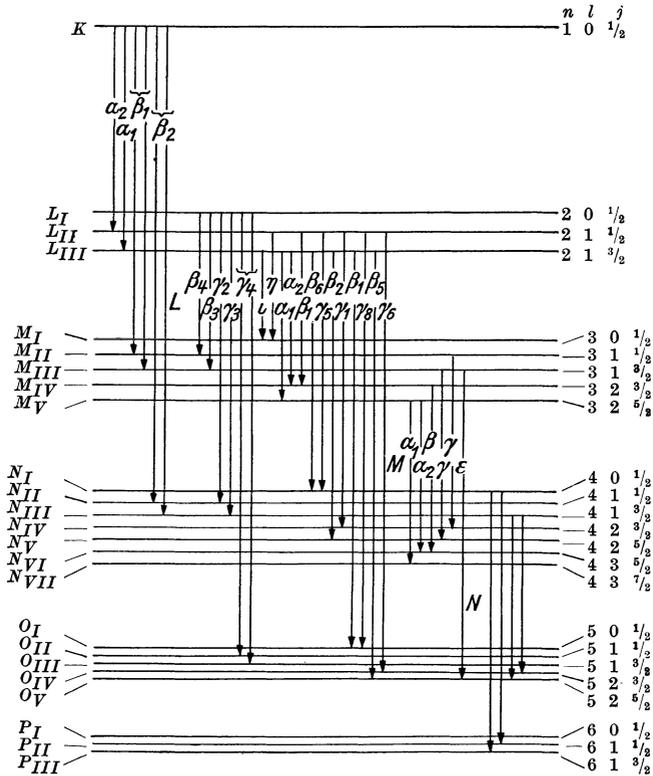


Abb. 75. Vollständiges Termschema der Röntgenlinien eines schweren Atoms. Die Abstände der Energiestufen sind nicht maßstäblich richtig wiedergegeben. Die eingezeichneten Pfeile entsprechen den beobachteten Linien; die ihnen zugeordneten, „erlaubten“ Elektronensprünge sind durch die *Auswahlregeln* gekennzeichnet:

$$\Delta l = \pm 1; \Delta j = 0 \text{ und } \pm 1.$$

Termschema der Röntgenspektren eines schweren Atoms, das auch über die Feinstruktur der Linien Rechenschaft gibt. Die den einzelnen Untergruppen entsprechenden Energiestufen sind durch waagrechte, parallele Schichtenlinien dargestellt.

d) **Elektronenanordnung in der Atomhülle.** Über die *Elektronenverteilung* jedes Elementes gibt Zahlentafel 12 Aufschluß. I H besitzt *ein Valenzelektron*; dasselbe ist bei 3 Li und später bei 11 Na, 19 K, 37 Rb, 55 Cs und dem noch unbekanntem Elemente mit der Atomnummer 87 der Fall. Wir finden, daß die übereinstimmenden chemischen Eigenschaften dieser Elemente offenbar in der Tatsache ihren Grund haben, daß bei jedem von ihnen das locker gebundene Valenzelektron auf einer *s*-Bahn den *Anbau einer neuen Schale* einleitet. Die weiter innen liegenden Schalen müssen dabei noch nicht vollständig ausgebaut sein. Wohl aber sind bei jedem vorausgehenden *Edelgas gewisse Untergruppen vollendet* worden, was die chemische Trägheit gerade dieser Elemente verständlich macht. Indem wir jede *vollendete Schale* durch ihren Buchstaben angeben und die *Anzahl der Elektronen in einer Untergruppe* in üblicher Weise als *Exponenten* schreiben, ergibt sich für die *Edelgase* die leicht verständliche Darstellung:

$$\begin{aligned} \text{He} &= K, \\ \text{Ne} &= KL, \\ \text{Ar} &= KL 3 s^2 p^6, \\ \text{Kr} &= K L M 4 s^2 p^6, \\ \text{X} &= K L M 4 s^2 p^6 d^{10} 5 s^2 p^6, \\ \text{Rn} &= K L M N 5 s^2 p^6 d^{10} 6 s^2 p^6. \end{aligned}$$

Wir verstehen nun auch die in Zahlentafel 10 angegebene Gesetzmäßigkeit der *Periodenlängen*. Die *erste* Periode entspricht dem Ausbau der *K*-Schale, umfaßt also nur zwei Elemente. In der *zweiten* Periode wird die *L*-Schale mit $2 + 2 + 4 = 8 = 2 \cdot 2^2$ Elementen vollendet. Die *dritte* Periode reicht bis zur Ausbildung der *M_I*-, *M_{II}*- und *M_{III}*-Schale, die zusammen an Umfang der vollen *L*-Schale gleichkommen, also wieder acht Elemente umfassen. In der *vierten* Periode werden Elemente im Umfang der vollen *M*-Schale, also $2 + 2 + 4 + 4 + 6 = 18 = 2 \cdot 3^2$ Elemente hinzugefügt. In der *fünften* Periode werden die Untergruppen *N_{IV}*, *N_V*, *O_I*, *O_{II}* und *O_{III}* mit $4 + 6 + 2 + 2 + 4 = 18$ Elementen wieder im Umfang einer vollen *M*-Schale ausgebildet. Die *sechste* Periode umfaßt die Untergruppen *N_{VI}*, *N_{VII}*, *O_{IV}*, *O_V*, *P_I*, *P_{II}* und *P_{III}* mit $6 + 8 + 4 + 6 + 2 + 2 + 4 = 32 = 2 \cdot 4^2$ Elementen im Ausmaß einer vollen *N*-Schale, und auch die *siebente*, nicht mehr vollendete Periode müßte wohl den gleichen Umfang

haben. Man erkennt darin das für die Periodenlängen gültige, allgemeine Gesetz:

$$\sum_{l=0}^{x-1} 2 \cdot (2l + 1) = 4 \cdot \frac{x(x-1)}{2} + 2x = 2x^2. \quad (103)$$

Zahlentafel 12 bringt außerdem eine von Madelung (1936) als *Ordnungsprinzip der Elektronenanlagerung* erkannte und vom Ver-

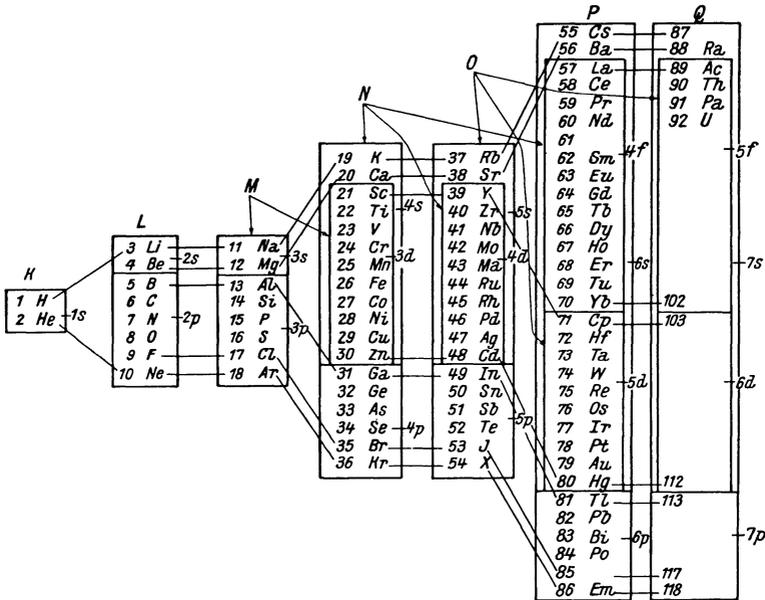


Abb. 76. Periodisches System der Elemente nach Bohr und Thomsen mit Angabe der in Ausbildung begriffenen Schalen und Untergruppen.

fasser etwas *abgeänderte Regel* zum Ausdruck: Schreibt man die auf das zuletzt angelagerte Elektron bezüglichen Zahlen $n + l$, n , $m_s + \frac{1}{2}$, $m_l + l$ in dieser Reihenfolge nebeneinander, so ergibt sich eine *aufsteigende Reihe vierstelliger Zahlen*. Die vom Verfasser getroffene *Abänderung* besteht darin, daß er an die Stelle von m_s , das nur die Werte $\pm \frac{1}{2}$ annehmen kann, $m_s + \frac{1}{2}$ und an die Stelle von m_l , das die Reihe der ganzen Zahlen von $-l$ bis $+l$ durchläuft, also auch negative Werte annehmen kann, $m_l + l$ gesetzt

hat, wodurch sich *lauter positive, ganze Zahlen* ergeben, die sich zu *vierstelligen Zahlen* vereinigen lassen.

Übersichtlich zeigt den *Aufbau des periodischen Systems* die von Bohr und Thomsen herrührende *Anordnung der Elemente* in Abb. 76, die durch *Angabe der Schalen und Untergruppen* vom Verfasser ergänzt worden ist.

Besonders bemerkenswert sind die „*seltene Erden*“ (*Lanthaniden*), die Elemente von 57 La bis 70 Yb, die, wie bekannt, chemisch nur sehr schwer zu trennen sind. Ihre in weitem Maße übereinstimmenden Eigenschaften werden verständlich, wenn man bedenkt, daß sie alle *in den äußeren Schalen* (O- und P-Schale) *die-selbe Elektronenanordnung* aufweisen und Unterschiede nur in den Elektronenzahlen der N-Schale bestehen, von der die noch fehlenden *Untergruppen* N_{VI} und N_{VII} (4f) *fertig ausgebaut* werden.

8. Quantenzahlen bei Mehrelektronensystemen.

Bei Atomen mit mehreren Elektronen stellen sich die Spinvektoren \vec{s}^1 der einzelnen Elektronen parallel oder antiparallel zueinander ein und können zum *Gesamtspin* \vec{S} vereinigt werden, der bald *ganz-*, bald *halbzahlig* ist, wie man dies aus der Zahlentafel 13 ersehen kann. Während bei Vorhandensein eines einzigen Elektrons die doppelte Möglichkeit der Einstellung seines Spins eine Aufspaltung jeder Energiestufe des Atoms, deren $l > 0$ ist, in 2, also das Auftreten von Dublettes mit der Vielfachheit $r = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$ verständlich macht, erklärt uns in gleicher Weise der Gesamtspin \vec{S} die zu erwartende *Vielfachheit* der Energiestufen eines Atoms mit mehreren Elektronen:

$$r = 2S + 1. \quad (104)$$

Auch hierüber gibt Zahlentafel 13 unter Hinweis auf kennzeichnende Beispiele Rechenschaft.

Ebenso wie die Spinvektoren ergeben auch die Bahnimpulse \vec{l} der einzelnen Elektronen einen *Gesamtbahnimpuls* \vec{L} , der immer ganzzahlig ist. \vec{L} und \vec{S} setzen sich vektoriell zusammen und

¹ S. die Fußnote auf S. 116.

Zahlentafel 13. Spinanordnung, Gesamtspin und Vielfachheit der Energiestufen bei Mehrelektronensystemen.

Elektronen- zahl	Spin- anordnung	Gesamt- spin \vec{S}	Vielfachheit r für $L > 0$	Beispiele ¹
1	1 \uparrow	1/2	2, Dublett	H, He ⁺ , Alkali, Ca ⁺
2	1 \uparrow 1 \downarrow 2 \uparrow	0 1	1, Singulett 3, Triplett	Par-He, Ca, Sc ⁺ Ortho-He, Ca, Sc ⁺
3	2 \uparrow 1 \downarrow 3 \uparrow	1/2 3/2	2, Dublett 4, Quartett	Sc, Ti ⁺ , Zn ⁺
4	2 \uparrow 2 \downarrow 3 \uparrow 1 \downarrow 4 \uparrow	0 1 2	1, Singulett 3, Triplett 5, Quintett	Ti, Ni Ti, V ⁺ , Ni Ti, V ⁺ , Ni
5	3 \uparrow 2 \downarrow 4 \uparrow 1 \downarrow 5 \uparrow	1/2 3/2 5/2	2, Dublett 4, Quartett 6, Sextett	V, Co V, Cr ⁺ , Co V, Cr ⁺ , Co
6	3 \uparrow 3 \downarrow 4 \uparrow 2 \downarrow 5 \uparrow 1 \downarrow 6 \uparrow	0 1 2 3	1, Singulett 3, Triplett 5, Quintett 7, Septett	Cr, Fe Cr, Fe Cr, Mn ⁺ , Fe
7	4 \uparrow 3 \downarrow 5 \uparrow 2 \downarrow 6 \uparrow 1 \downarrow 7 \uparrow	1/2 3/2 5/2 7/2	2, Dublett 4, Quartett 6, Sextett 8, Oktett	Mn Mn, Fe ⁺ Mn
8	4 \uparrow 4 \downarrow 5 \uparrow 3 \downarrow 6 \uparrow 2 \downarrow 7 \uparrow 1 \downarrow 8 \uparrow	0 1 2 3 4	1, Singulett 3, Triplett 5, Quintett 7, Septett 9, Nonett ²	Edelgase

liefern den bald ganz-, bald halbzahligen *Gesamtdrehimpuls* \vec{J} des Atoms:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (105)$$

wie dies Abb. 83 (S. 137) erläutert. Der Wertereihe $L = 0, 1, 2, 3, \dots$ wird entsprechend dem Vorgang beim einzelnen Elektron (s. S. 116)

¹ S. Flügge u. A. Krebs: Experimentelle Grundlagen der Wellenmechanik. Th. Steinkopff, 1936.

² Wurde bisher nicht beobachtet.

die *Großbuchstaben*bezeichnung S, P, D, F, \dots zugeordnet. Es ist üblich geworden, jeden Term durch Beifügung seiner *Vielfachheit* r und seines *Gesamtdrehimpulses* J zu kennzeichnen, also z. B. rP_J . 1D_2 bedeutet demgemäß einen Singulett- D -Term mit dem Gesamtdrehimpuls $J = 2$, ${}^4F_{3/2}$ einen Quartett- F -Term mit dem Gesamtdrehimpuls $\frac{3}{2}$. S -Terme ($L = 0$) sind stets *einfach*; es wird jedoch in der Regel auch ihnen die Vielfachheit des Term-Systems beigelegt, zu dem sie gehören. So bezeichnet z. B. ${}^2S_{1/2}$ den S -Term eines Dublettsystems mit dem Gesamtdrehimpuls $\frac{1}{2}$.

9. Aufbau der Linienspektren.

Wird das *neutrale* Atom zur Ausstrahlung angeregt, was in der Regel in Flammen oder im elektrischen Lichtbogen der Fall ist, so nennen wir das erzeugte Spektrum *Bogenspektrum*. Bei starker Erregung, die durch den elektrischen Funken erfolgen kann, entsteht das Spektrum des *ionisierten* Atoms (*Funkenpektrum*), wobei je nach der Stärke der Anregung die Ionisierung einfach oder mehrfach sein kann. So erklärt es sich, daß das Spektrum desselben Atoms je nach den Anregungsbedingungen recht verschieden aussehen kann. Wir wollen uns hier auf eine kurze Betrachtung des *Bogenspektrums* beschränken.

Wir gewinnen eine erschöpfende Darstellung der möglichen *Spektralserien* eines neutralen Atoms, wenn wir dessen verschiedene Energiezustände (Terme) kennen. Denn jede Serie kann wie beim Wasserstoffatom (s. S. 95) als Differenz eines konstanten und eines Laufterms dargestellt werden. Abb. 77 zeigt uns das vereinfachte Term-schemata eines Alkaliatoms (die Dubletterme sind einfach gezeichnet). Jeder Pfeil entspricht einer bestimmten Termdiffe-

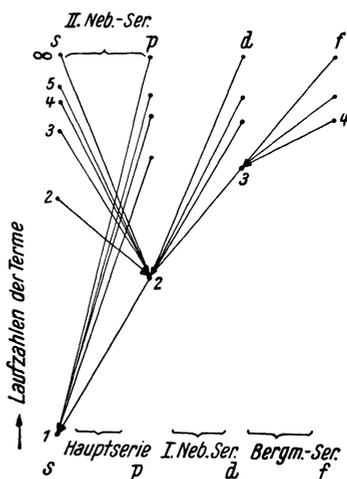


Abb. 77. Vereinfachtes Termschema (Dubletterme einfach gezeichnet) für das Bogenspektrum eines Alkaliatoms.

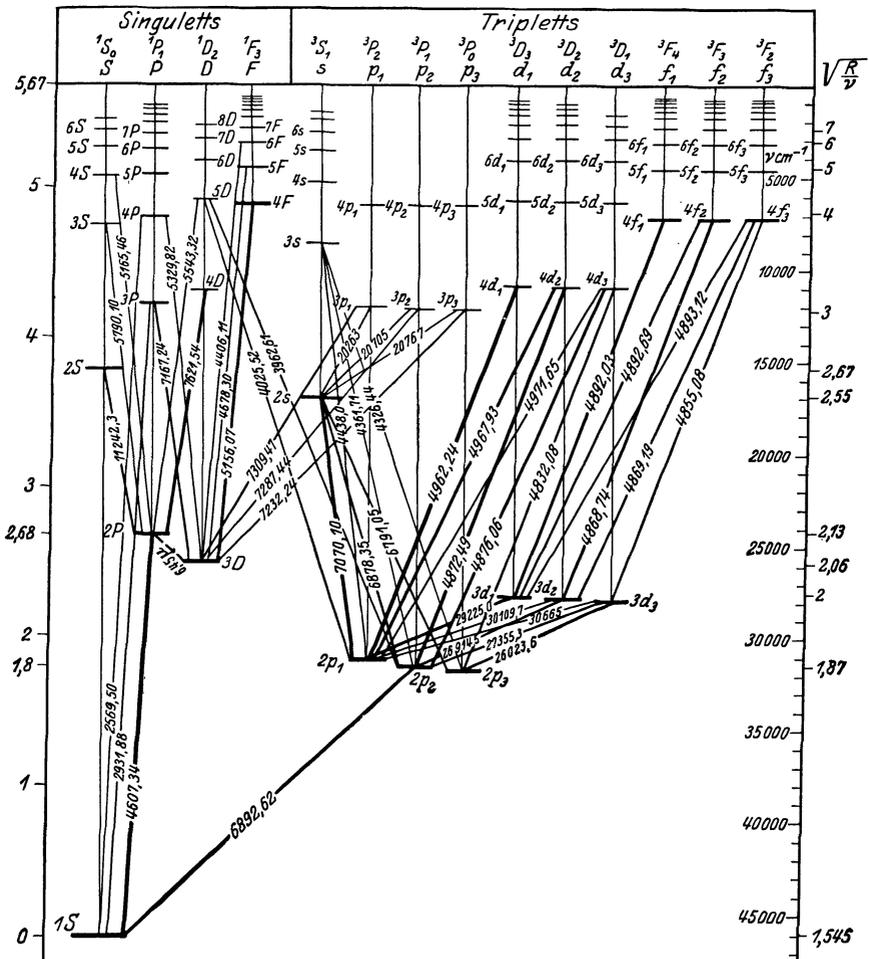


Abb. 78. Vollständiges Termschema für das Bogenspektrum des Strontiums (nach Grotrian). Die am linken Rande stehenden Zahlen geben die den Energiestufen entsprechenden Werte in eV an. Der Übersichtlichkeit halber sind nur die Übergänge zwischen den niedrigsten Energiestufen (Termen) für jede Serie eingezeichnet. Die Hauptlinien des Spektrums sind stark ausgezogen.

renz und damit einer bestimmten Spektrallinie. Es wird so die Entstehung der wichtigsten Spektralserien veranschaulicht; zur mathematischen Darstellung bedienen wir uns nach Paschen der abgekürzten Schreibweise:

<i>Haupt- oder Prinzipalserie</i> (H. S.)	$\omega = 1 s - m p,$ $m = 2, 3, 4, \dots;$
<i>erste oder diffuse Nebenserie</i> (I. N. S.)	$\omega = 2 p - m d,$ $m = 3, 4, 5, \dots;$
<i>zweite oder scharfe Nebenserie</i> (II. N. S.)	$\omega = 2 p - m s,$ $m = 2, 3, 4, \dots;$
<i>Bergmann- oder Fundamentalserie</i> (B. S.)	$\omega = 3 d - m f,$ $m = 4, 5, 6, \dots$

Während zur Darstellung der Wasserstoffspektren die Balmer'sche Termform

$$(m, 0) = \frac{R}{m^2} \quad (R = \text{Rydbergzahl})$$

ausreicht, ist dies bei den Spektren der *höheren* Elemente nicht mehr der Fall. An die Stelle des einfachen Balmerterms treten als Ergebnis langwieriger und mühsamer Forscherarbeit zwei verwickeltere Termformen: der Rydbergterm

$$(m, a) = \frac{R}{(m + a)^2}$$

mit einem konstanten Zusatzglied a , das eine bestimmte Spektralserie kennzeichnet, und der zu noch feinerer Unterscheidung geeignete Ritzterm

$$(m, a, \alpha) = \frac{R}{m + a + \alpha \cdot (m, a, \alpha)^2},$$

dessen weiteres Zusatzglied $\alpha \cdot (m, a, \alpha)$ mit ins Unendliche wachsender Laufzahl m verschwindet. In diesem Sinne sind die konstanten Terme der oben angegebenen Spektralserien:

$$1 s = \frac{R}{(1 + s)^2}, \quad 2 p = \frac{R}{(2 + p)^2}, \quad 3 d = \frac{R}{(3 + d)^2}$$

und ihre Laufterme

$$m s = \frac{R}{(m + s)^2}, \quad m p = \frac{R}{(m + p)^2}, \quad m d = \frac{R}{(m + d)^2},$$

$$m f = \frac{R}{(m + f)^2}$$

zu setzen. Als Beispiel sei die *Hauptserie* (H. S.) des *Kaliums*

angeführt, die eine *Dublettserie* mit den Konstanten $s = 0,77$, $p_1 = 0,235$ und $p_2 = 0,232$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{R}{(1 + 0,77)^2} - \frac{R}{(m + 0,235)^2} \\ \omega_2 &= \frac{R}{(1 + 0,77)^2} - \frac{R}{(m + 0,232)^2} \end{aligned} \right\} m = 2, 3, 4, \dots$$

Entsprechend der im allgemeinen vorhandenen Vielfachheit der *p*-, *d*-, *f*-Terme erscheinen die genannten Serien mehrfach (*Multiplettserien*). Abb. 78 zeigt als Beispiel das Termschema und die wichtigsten Serien des Bogenspektrums des *Strontiums*. Entsprechend den Angaben der Zahlentafel 13 — es handelt sich beim neutralen Sr um ein 2-Elektronen-System — sind 2 Termsysteme vorhanden: eines mit einfachen Stufen (Singulettsystem) und eines mit dreifachen Stufen (Triplettsystem).

10. Atom- und Kernmagnetismus.

a) Bahnimpuls und magnetisches Moment eines kreisenden Elektrons. Bei der Betrachtung des Bohrschen Atoms (S. 93) haben wir unsere Aufmerksamkeit dem Bahnimpuls

$$p_\varphi = m_e v a \tag{64}$$

eines kreisenden Elektrons zugewendet und für ihn die Quantenbedingung gefunden:

$$2 \pi m_e v a = n h \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{66}$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{106}$$

Jedes kreisende Elektron bedeutet aber zugleich einen elektrischen *Kreisstrom* von der Stärke:

$$I = e \cdot \frac{v}{2\pi a} \tag{107}$$

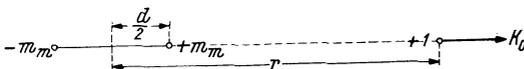


Abb. 79. Kraft K_D eines magnetischen Dipols auf einen in der Verbindungsgeraden seiner Pole befindlichen Einheitspol.

und stellt eine magnetische Doppelfläche dar, deren *magnetisches Moment* wir nun bestimmen wollen.

Wir erinnern uns zunächst an die Kraft eines magnetischen *Dipols* mit der Polstärke m_m und dem Polabstand d auf einen

Einheitspol, der sich in der verlängerten Verbindungsgeraden der Pole in der Entfernung r von der Mitte des Dipols befindet (Abb. 79):

$$K_D = \frac{m_m \cdot 1}{\left(r - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{m_m \cdot 1}{\left(r + \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{2 m_m d r}{\left(r^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2}.$$

Bezeichnen wir in üblicher Weise mit

$$\mathbf{M} = m_m \cdot \mathbf{d}$$

das *magnetische Moment* des Dipols und denken wir uns den Einheitspol in großer Entfernung von demselben:

$$r \gg d,$$

so können wir

$$K_D = \frac{2 M r}{r^4 \left(1 - \frac{d^2}{4 r^2}\right)^2} \approx \frac{2 M}{r^3} \quad (108)$$

setzen.

Wir bestimmen nun anderseits die Kraft K_{St} eines *Kreisstroms* von der Stärke I auf einen im Abstand r von seinem Mittelpunkt in axialer Richtung gelegenen Einheitspol (Abb. 80). Nach dem Gesetz von Biot-Savart ist die von einem Leiterelement ds (bei A) ausgeübte magnetische Kraft, da sein Abstand ϱ auf der Richtung von I senkrecht steht,

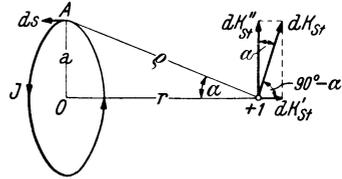


Abb. 80. Kraft eines Kreisstroms auf einen in axialer Richtung gelegenen Einheitspol.

$$dK_{St} = \frac{I ds \cdot 1}{c \varrho^2},$$

von der in die Richtung von r der Anteil

$$dK_{St}' = \frac{I ds}{c \varrho^2} \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{I ds}{c \varrho^2} \sin \alpha = \frac{I ds a}{c \varrho^2 r}$$

entfällt. Für die Berechnung der von dem Kreisstrom ausgehenden Gesamtkraft K_{St} kommt von jedem Leiterelement ds jeweils nur dieser Anteil dK_{St}' in Betracht, da die dazu senkrechten Komponenten dK_{St}'' sich paarweise gegenseitig aufheben; wir erhalten so

$$K_{St} = \frac{I a}{c \varrho^2 r} \cdot \int_0^{2\pi a} ds = \frac{2 \pi a^2 I}{c \varrho^2 r} = \frac{2 \pi a^2 I}{c (r^2 + a^2) r} = \frac{2 \pi a^2 I}{c r^3 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)} \quad (109)$$

und für Entfernungen $r \gg a$

$$K_{St} \approx \frac{2 \pi a^2 I}{c r^3}. \quad (109a)$$

Betrachten wir nun unseren *Kreisstrom* als gleichwertig mit einem magnetischen Dipol, so erhalten wir durch Vergleich der Gl. (108) und (109 a) für dessen *magnetisches Moment* \mathbf{M} den Wert:

$$\mathbf{M} = \frac{\pi a^2 I}{c}, \quad (110)$$

im Hinblick auf Gl. (107) und (64) folgt weiter

$$\mathbf{M} = \frac{\pi a^2}{c} \cdot \frac{e v}{2 \pi a} = \frac{e a v}{2 c} = \frac{e}{2 m_e c} p_\varphi \quad (111)$$

und mit Rücksicht auf die Quantenbedingung Gl. (106)

$$\mathbf{M} = n \cdot \frac{e h}{4 \pi m_e c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (112)$$

Es erscheint somit auch das magnetische Moment des atomaren Kreisstromes *gequantelt*, und der kleinste Betrag desselben

$$\mu = \frac{e h}{4 \pi m_e c} = 9,260 \cdot 10^{-21} g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{5}{2}} \text{ sec}^{-1} \quad (113)$$

wird als *Bohrsches Magneton* bezeichnet.

b) Mechanisches und magnetisches Spinnmoment des Elektrons.

In ähnlicher Weise wie wir dem kreisenden Elektron neben seinem gequantelten Bahnimpuls p_φ ein gequanteltes magnetisches Moment \mathbf{M} zuordnen mußten, ist es auch nötig, mit dem Eigendrehimpuls (Spin) des Elektrons (s. S. 116) ein *magnetisches Spinnmoment* zu verbinden. Es liegt nahe, zwischen dem mechanischen Spinnmoment p_s und dem magnetischen Spinnmoment \mathbf{M}_s denselben Zusammenhang anzunehmen, wie er in Gl. (111) zwischen p_φ und \mathbf{M} zum Ausdruck kommt. Erfahrungen über die Linienaufspaltung im anomalen Zeeman-Effekt (s. S. 136 ff.) lehren jedoch, daß wir

$$\vec{\mathbf{M}}_s = 2 \frac{e}{2 m_e c} \vec{p}_s = \frac{e h}{4 \pi m_e c} \cdot 2 \vec{s}, \quad s = \frac{1}{2} \quad (114)$$

zu setzen haben. Das magnetische Spinnmoment des Elektrons ist also seinem Betrage nach gerade gleich einem *Bohrschen Magneton*. Für diesen Wert vermochte erst die relativistische Erweiterung der Quantenmechanik durch Dirac eine befriedigende Erklärung zu geben.

c) Der Atomstrahlversuch von O. Stern und W. Gerlach.

Wie bereits früher (s. S. 116) ausgeführt worden ist, setzen sich

¹ S. die Fußnote auf S. 116.

Bahnimpuls \vec{l} und Spin \vec{s} eines Elektrons vektoriell zum gleichgerichteten Gesamtdrehimpuls \vec{j} zusammen:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}. \quad (102)$$

In gleicher Weise ergeben auch die magnetischen Momente \vec{M}_l und \vec{M}_s ein *magnetisches Gesamtmoment*:

$$\vec{M} = \vec{M}_l + \vec{M}_s. \quad (115)$$

Da \vec{M}_l offenbar nach Gl. (112) — wir haben dort bloß n durch l zu ersetzen —, \vec{M}_s dagegen nach Gl. (114) zu quanteln ist, so erhalten wir für \vec{M} die Quantisierungsregel:

$$\vec{M} = \mu (\vec{l} + 2\vec{s}) = \mu \left(\vec{j} + \vec{s} \right) = \mu j \frac{j \pm s}{l \pm s}, \quad s = \frac{1}{2}. \quad (116)$$

Bei Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes muß neben der S. 115 f. besprochenen *räumlichen Quantelung* des Gesamtdrehimpulses \vec{j} — jedem Wert von j entsprechen $2j + 1$ mögliche Raumlagen des Vektors \vec{j} — stets auch eine solche des magnetischen Momentes \vec{M} in Erscheinung treten. Dieser Umstand ermöglicht, einerseits die Tatsache der räumlichen Quantelung von \vec{M} festzustellen und andererseits den angegebenen Wert des Bohrschen Magnetons experimentell zu prüfen. O. Stern und W. Gerlach benützten hierzu 1921 die in Abb. 81 dargestellte Versuchsanord-

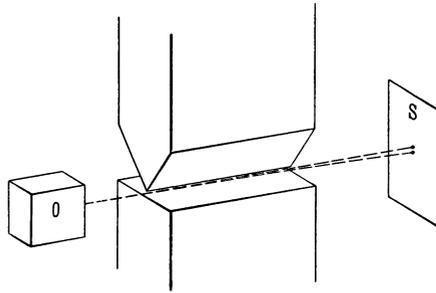


Abb. 81. Schematische Darstellung des Atomstrahlversuches von O. Stern und W. Gerlach (aus M. Born, *Moderne Physik*).

Aus dem Ofen O tritt ein Atomstrahl, der in dem inhomogenen Feld eines mit verschieden gestalteten Polschuhen versehenen Magnets aufgespalten wird und dann auf die photographische Platte S trifft, wo er ein Bild von der Art des in Abb. 82 dargestellten erzeugt.

nung. Ein durch Verdampfung eines Metalles (z. B. Ag oder Li) in einem Ofen O erzeugter und entsprechend ausgeblendeter Atomstrahl durchsetzt ein *stark inhomogenes* Magnetfeld, in dem sich

die einzelnen Atome je nach der räumlichen Quantelung ihrer magnetischen Momente verschieden einstellen und verschiedene Ablenkungen erfahren. Ein homogenes Feld würde auf jedes Atom nur ein Drehmoment, aber keine Kraft auf das Atom als *ganzes* ausüben. Dadurch, daß Stern einen als Schneide ausgebildeten Polschuh einem eben begrenzten gegenüberstellt, ist es

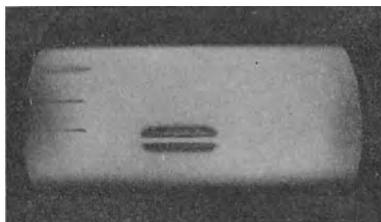


Abb. 82. Aufspaltungsbild eines Lithium-Atomstrahles nach dem Verfahren von Stern und Gerlach (aufgenommen von Taylor).

ihm gelungen, eine so große Inhomogenität des Feldes zu erzeugen, daß sich bereits im Bereich der Atomdimensionen eine Verschiedenheit der Feldstärke bemerkbar macht. Die Versuche erbrachten eine glänzende Bestätigung der erwarteten räumlichen Quantelung. Abb. 82 zeigt die magnetische Aufspaltung eines *Li-Atomstrahles* in zwei deutlich ge-

trennte Strahlen, was dem Umstande entspricht, daß sich jedes Li-Atom, für dessen Valenzelektron $\vec{l} = 0$, also $\vec{j} = \vec{s} = \pm \frac{1}{2}$ ist, parallel oder antiparallel zum Felde einstellt.

d) Mechanische und magnetische Kernmomente. Die Verfeinerung der spektroskopischen Beobachtungsmethode, insbesondere die Untersuchung des *Intensitätswechsels* benachbarter Linien in den Bandenspektren (s. S. 215 f.) und der *Hyperfeinstruktur* der Linienspektren, haben die Bestätigung der naheliegenden Vermutung gebracht, daß gleich dem Elektron auch die Atomkerne einen Eigendrehimpuls p_K und ein mit ihm verbundenes *magnetisches Moment* M_K besitzen. Der *Kernspin* p_K tritt deutlich *gequantelt* auf. Für alle Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl (*Z und N gerade*) ist $p_K = 0$; alle Kerne mit *einer* ungeraden Teilchenzahl (*Z oder N ungerade*) haben halbzahligem, jene mit *zwei* ungeraden Teilchenzahlen (*Z und N ungerade*) ganzzahligem Kernspin. Die Angaben in Zahlentafel 14 bestätigen diese Regeln. Schreiben wir dem Proton wie dem Neutron den Spin $\frac{1}{2}$ zu, so folgen die angegebenen Regeln über Halb- und Ganzzahligkeit von p_K unmittelbar aus der Annahme, daß alle Kerne aus Protonen und Neutronen aufgebaut sind.

Zahlentafel 14. Mechanische und magnetische Kernmomente (die ersteren in Einheiten $h/2\pi$, die letzteren in Kernmagnetonen μ_K).¹

a) *Z und N gerade.*

Nach den bisherigen Beobachtungen ist stets $p_K = 0$, $M_K = 0$.

b) *Z ungerade, N gerade.*

Atomkern	Z	M	p_K	M_K	Atomkern	Z	M	p_K	M_K
H	1	1	1/2	2,8 ± 0,5	Ag	47	107		klein
Li	3	7	3/2	3,29			109		"
F	9	19	1/2	3 ± 1	In	49	115	9/2	5,3
Na	11	23	3/2	2,1	Sb	51	121	5/2	~ 2,7
Al	13	27	1/2	1,9			123	7/2 od. 5/2	~ 2
P	15	31	1/2	klein	J	53	127	5/2 ?	> 0
Cl	17	35	5/2	"	Cs	55	133	7/2	2,9
		37	5/2	"	La	57	139	7/2	~ 2,7
K	19	39	3/2	- 0,57	Pr	59	141	5/2	> 0
Sc	21	45	7/2	3,6 ± 1	Eu	63	151	5/2	> 0
V	23	51	7/2	> 0			153	5/2	> 0
Mn	25	55	5/2	> 0	Tb	65	159	3/2	> 0
Co	27	59	7/2	> 0	Ho	67	165	7/2	> 0
Cu	29	63	3/2	2,5	Tu	69	169	1/2	> 0
		65	3/2	2,6	Cp	71	175	7/2	> 0
Ga	31	69	3/2	2,1 ± 0,3	Ta	73	181	7/2	> 0
		71	3/2	2,7 ± 0,3	Re	75	185	5/2	> 0
As	33	75	3/2	0,9			187	5/2	> 0
Br	35	79	3/2	> 0	Au	79	197	3/2	~ 0,2
		81	3/2	> 0	Tl	81	203	1/2	1,5
Rb	37	85	5/2	1,5			205	1/2	1,5 ²
		87	3/2	3,1	Bi	83	209	9/2	3,8
Nb	41	93	9/2	> 0	Pa	91	231	3/2	> 0

c) *Z gerade, N ungerade.*

n	0	1	1/2	-2 ± 0,6	X	54	129	1/2	< 0
Zn	30	67	5/2 od. 3/2	1 ± 0,3			131	3/2	> 0
Kr	36	83	≥ 7/2	< 0	Ba	56	135	5/2 od. 3/2	
Sr	38	87	≥ 3/2	- 0,9			137	5/2 od. 3/2	
Cd	48	111	1/2	- 0,6	Hf	72		≤ 3/2	
		113	1/2	- 0,6	Hg	80	199	1/2	~ 0,55
Sn	50	117	1/2	- 0,95			201	3/2	~ - 0,62 ³
		119	1/2	- 0,95	Pb	82	207	1/2	0,6

d) *Z und N ungerade.*

H	1	2	1	0,7 ± 0,2	N	7	14	1	≤ 0,2
Li	3	6	1 ?	0,6 ± 0,2					

¹ C.F. von Weizsäcker: Die Atomkerne, S. 57, Tab. 2. Leipzig, Akad. Verlagsges. 1937. ² $M_{205} : M_{203} = 1,008$. ³ $M_{199} : M_{201} = - 0,9018$.

Die *magnetischen Momente* der Kerne sind nur recht ungenau bekannt und zeigen *keine Quantelung*. Neben den Hyperfeinstrukturuntersuchungen der Linienspektren kann auch das oben beschriebene Verfahren der Ablenkung von Atomstrahlen in einem inhomogenen Magnetfeld von Stern-Gerlach zur Bestimmung magnetischer Kernmomente herangezogen werden. Die ermittelten Beträge sind aus der Zahlentafel 14 zu ersehen. Als Einheit wurde ein „*Kernmagneton*“

$$\mu_K = \frac{e h}{4 \pi m_p c} = \frac{\mu}{1835} = 5,046 \cdot 10^{-24} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{5}{2}} \text{ sec}^{-1} \quad (117)$$

zugrunde gelegt.

11. Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld.

a) **Einwirkung schwacher Magnetfelder (anomaler und normaler Zeeman-Effekt).** Wir haben im vorhergehenden Abschnitt festgestellt, daß jedem Elektron ein seinem Bahnimpuls \vec{l} entsprechendes magnetisches Moment \vec{M}_l und ein seinem Spin \vec{s} entsprechendes magnetisches Moment \vec{M}_s zukommt. Bei Atomen mit mehreren Elektronen werden wir nach resultierenden magnetischen Momenten in bezug auf Bahnimpuls und Spin fragen. Es liegt nahe, die magnetischen Momente der einzelnen Elektronen so zusammensetzen, wie die zugehörigen Bahnimpuls- bzw. Spinvektoren. Bezeichnen wir wie früher (s. S. 125) den Gesamtbahnimpuls mit \vec{L} , den Gesamtspin mit \vec{S} , so werden wir dem ersteren das magnetische Moment

$$\vec{M}_L = \frac{e h}{4 \pi m_e c} \vec{L} = \mu \vec{L}, \quad L = 0, 1, 2, 3, \dots (\text{ganzzahlig}), \quad (118)$$

dem letzteren das magnetische Moment

$$\vec{M}_S = \frac{e h}{4 \pi m_e c} \cdot 2 \vec{S} = \mu \cdot 2 \vec{S}, \quad (119)$$

$$S = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots (\text{ganzzahlig}), \\ 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots (\text{halbzahlig}), \end{cases}$$

zuordnen, indem wir in derselben Weise verfahren, wie wir dies bei

Vorhandensein nur eines Elektrons (S. 132) getan haben. \vec{L} und \vec{S} ergeben zusammen den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{105}$$

des Atoms; die Richtung des *magnetischen Gesamtmomentes*

$$\vec{M} = \vec{M}_L + \vec{M}_S = \mu (\vec{L} + 2\vec{S}) \tag{120}$$

wird mit der Richtung von \vec{J} nicht zusammenfallen, wie aus Abb. 83 hervorgeht. Da wir uns ebenso wie \vec{L} und \vec{S} auch \vec{M} um den Gesamtdrehimpuls \vec{J} präzessierend vorstellen müssen, so wird von \vec{M} nur die in die Richtung von \vec{J} fallende Komponente \vec{M}_J nach außen wirksam sein, während die dazu senkrechte \vec{M}' infolge der Rotation wirkungslos bleiben wird.

Wir wollen an Hand der Abb. 83 M_J berechnen:

$$\begin{aligned} M_J &= M_L \cos(\vec{L}, \vec{J}) + M_S \cos(\vec{S}, \vec{J}) = \\ &= \mu [L \cos(\vec{L}, \vec{J}) + 2S \cos(\vec{S}, \vec{J})]; \end{aligned} \tag{121}$$

aus dem Vektordreieck $\vec{L}, \vec{S}, \vec{J}$ ermitteln wir mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{L}, \vec{J}) &= \frac{J^2 + L^2 - S^2}{2LJ}, \\ \cos(\vec{S}, \vec{J}) &= \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2SJ} \end{aligned}$$

und erhalten so weiter:

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{\mu}{2J} (J^2 + L^2 - S^2 + 2J^2 + 2S^2 - 2L^2) = \\ &= \frac{\mu}{2J} (2J^2 + J^2 + S^2 - L^2), \\ \vec{M}_J &= \mu \vec{J} \left(1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} \right). \end{aligned} \tag{122}$$

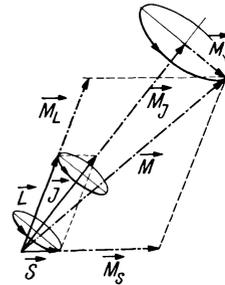


Abb. 83. Vektorgerüst zur Erklärung des anomalen Zeeman-Effekts.

Gesamtbahnimpuls \vec{L} , Gesamtspin \vec{S} und magnetisches Gesamtmoment \vec{M} präzessieren um den Gesamtdrehimpuls \vec{J} . Magnetisch wirksam ist nur die Komponente \vec{M}_J , die Komponente \vec{M}' bleibt infolge der Rotation um \vec{J} unwirksam.

Man bezeichnet den für die Größe der Linienaufspaltung beim *anomalen Zeeman-Effekt* maßgebenden Klammerausdruck

$$g = 1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} = \frac{3}{2} + \frac{S^2 - L^2}{2J^2} \quad (123)$$

als den *Landéschen Aufspaltungsfaktor*, mit dessen Hilfe sich \vec{M}_J in der Form

$$\vec{M}_J = \frac{e h}{4 \pi m_e c} g \vec{J} = \mu g \vec{J} \quad (122 a)$$

darstellen läßt. Die Herleitung des Ausdruckes für g ist hier auf klassischem Wege erfolgt; die *Quantenmechanik* liefert den etwas verschiedenen, jedoch *von der Erfahrung bestätigten* Ausdruck

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \quad (124)$$

der aus dem klassischen hervorgeht, wenn wir dort jedes Quadrat x^2 durch das Produkt $x(x+1)$ ersetzen.

Für den Fall der *Einelektronensysteme* (z. B. Alkaliatome) stimmt die Richtung von \vec{l} und \vec{s} mit der von \vec{j} überein, es wird gemäß Gl. (101)

$$s = \frac{1}{2}, \quad j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2}$$

und somit für diesen Sonderfall

$$g = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - l(l+1)}{2\left(l \pm \frac{1}{2}\right)\left(l \pm \frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\left(l + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2} \pm 1\right)}{\left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2} \pm 1\right)} = \frac{j + \frac{1}{2}}{l + \frac{1}{2}}, \quad (124 a)$$

$$\mathbf{M}_j = \vec{M} = \mu \vec{j} \cdot \frac{j + \frac{1}{2}}{l + \frac{1}{2}}, \quad (122 b)$$

was mit der auf klassischem Wege gewonnenen Gl. (116) wohl nur für den positiven Wert von \vec{s} übereinstimmt, mit der Erfahrung aber in Einklang steht.

Wird $\vec{S} = 0$, also $\vec{J} = \vec{L}$, so folgt aus Gl. (124) unmittelbar

$$g = 1. \quad (124b)$$

Dieser einfachste Fall von magnetischer Aufspaltung, dem das *normale Lorentz-Triplett* (s. Zahlentafel 16 und Abb. 84a) entspricht, tritt nur bei Systemen mit *gerader* Elektronenzahl auf und wird als *normaler Zeeman-Effekt* bezeichnet.

Die Bedeutung des Landéschen Aufspaltungsfaktors g geht nun aus der Überlegung hervor, daß beim Einschalten eines magnetischen Feldes \mathfrak{H} von der Stärke H der Vektor \vec{M} des magnetischen Momentes um die Richtung des Feldes präzessieren und infolgedessen ein *Zusatz an magnetischer Energie* zur Atomenergie hinzutreten wird. Für \vec{J} bzw. \vec{j} tritt dabei die *Richtungsquantelung* in Kraft, d. h. die Projektion von \vec{J} bzw. \vec{j} auf die Richtung von \mathfrak{H} , die *magnetische Quantenzahl* (s. S. 118)

$$m = J \cos(\mathfrak{H}, \vec{J}) \text{ bzw. } j \cos(\mathfrak{H}, \vec{j}), \quad (125)$$

wird alle ganz- oder halbzahligen Werte zwischen den Grenzen $+J$ ($+j$) und $-J$ ($-j$) annehmen können:

$$m = J, J-1, \dots, -J+1, -J \text{ bzw. } j, j-1, \dots, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -j+1, -j. \quad (126)$$

Der *energetische Beitrag* ΔE des Magnetfeldes \mathfrak{H} zur Atomenergie ist zufolge Gl. (122a) bestimmt durch

$$|\Delta E| = H M_J \cos(\mathfrak{H}, \vec{J}) = \mu H m g \quad (127)$$

und bedeutet eine *Termänderung*, deren Größe von m , vor allem aber von dem Aufspaltungsfaktor g abhängt.

Wir betrachten als Beispiel die *Zeeman-Aufspaltung* der Terme eines *Einelektronensystems* (*Alkaliatoms*), worüber uns Zahlentafel 15 Aufschluß gibt.

Man erkennt, daß der aufgespaltene Term selbst nicht mehr in Erscheinung tritt und an seiner Stelle zu ihm *symmetrisch* um so mehr Energiestufen auftreten, je höher der Term ist. Die Zahl der Stufen und die Größe der Aufspaltung hängt ausschließlich von den Quantenzahlen l und j ab, ist also für gleichartige Terme stets dieselbe (*Prestonsche Regel*). Die Aufspaltung ist immer

Zahlentafel 15. Anomale Zeeman-Aufspaltung der Terme eines Eielektronensystems (Alkaliatoms).¹

Term	l	j	g	$ \Delta E /\mu H = mg$ für $m =$									
				-7/2	-5/2	-3/2	-1/2	+1/2	+3/2	+5/2	+7/2		
s	0	1/2	2										
p	1	1/2	2/3										
		3/2	4/3										
d	2	3/2	4/5										
		5/2	6/5										
f	3	5/2	6/7										
		7/2	8/7										

Zahlentafel 16. Anomale Zeeman-Aufspaltung der Terme eines Zweielektronensystems (Erdalkaliatoms).

Term	L	J	g	$ \Delta E /\mu H = mg$ für $m =$						
				-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
a) Parazustände (Gesamtspin $S = 0$). ²										
S	0	0	0/0							
P	1	1	1							
		2	1							
D	2	2	1							
F	3	3	1							
b) Orthozustände (Gesamtspin $S = 1$).										
S	0	1	2							
P	1	0	0/0							
		1	3/2							
		2	3/2							
D	2	1	1/2							
		2	7/6							
		3	4/3							

¹ Die eingezeichneten Pfeile deuten die Entstehung des in Abb. 84 b dargestellten Liniensextetts an, in das die Natrium- D_2 -Linie durch ein Magnetfeld aufgespalten wird. Ausgezogene Pfeile weisen auf zirkuläre Polarisation (σ -Komponenten), gestrichelte Pfeile auf lineare Polarisation (π -Komponenten) hin.

² Die eingezeichneten Pfeile deuten die Entstehung des *normalen* Lorentz-Triplets an (s. S. 139 und Abb. 84 a).

durch *einfache* Brüche darstellbar (*Rungesche Regel*), deren gemeinsamer Nenner mit zunehmendem l größer wird; für s -Terme ist der Rungesche Nenner 1, für p -Terme 3, für d -Terme 5, für f -Terme 7 usw.

Wie beim Einelektronensystem, liegen auch bei Atomen mit zwei Elektronen die durch magnetische Aufspaltung entstehenden Energiestufen *symmetrisch* zum ursprünglichen Term, der diesfalls jedoch auch selbst in der Aufspaltung in Erscheinung tritt.

Es sind jedoch nicht alle denkbaren Übergänge zwischen den verschiedenen Energiestufen verwirklicht und durch Spektrallinien vertreten, vielmehr bestehen auch beim Zeeman Effekt *Auswahlregeln*, die erst durch die Quantenmechanik ihre Begründung erfahren haben. In Übereinstimmung mit Gl. (89) gilt für *erlaubte Übergänge*

$$l' = l \pm 1, \quad \Delta l = \pm 1; \quad (128)$$

ferner muß

$$m' = \begin{cases} m + 1 \\ m \\ m - 1 \end{cases}, \quad \Delta m = +1, 0, -1 \quad (129)$$

sein. Linien, die dem Übergang $m \rightarrow m$ entsprechen, zeigen *lineare* Polarisation (der elektrische Lichtvektor schwingt *parallel* zum Magnetfeld); wir nennen diese Linien π -Komponenten. Den Übergängen $m \rightarrow m \pm 1$ entsprechen *rechts* bzw. *links zirkular* polarisierte Schwingungen *senkrecht* zum Magnetfeld, die als σ -Komponenten bezeichnet werden. Bei Beobachtung *in* der Feldrichtung fallen die π -Komponenten aus, es treten nur die σ -Komponenten in Erscheinung; bei Beobachtung *senkrecht* zur Feldrichtung erscheinen alle Komponenten linear polarisiert, und zwar die π -Komponenten parallel zum Feld, die σ -Komponenten senkrecht zum Feld.

Abb. 84 zeigt *Aufspaltungsbilder* von Spektrallinien im Magnetfeld; darunter a das *normale Lorentz-Triplett*, das dem Aufspaltungsfaktor $g = 1$ entspricht und durch die in Zahlentafel 16 durch Pfeile dargestellten Übergänge zustande kommt. Die beiden voll ausgezogenen Pfeile deuten die σ -Komponenten, der gestrichelte Pfeil die π -Komponente des Triplett an. b stellt den anomalen Zeeman-Effekt am *Na-D-Dublett* dar. Dieses Dublett besteht aus den Linien D_1 ($\lambda = 5895,93 \text{ \AA}$) und D_2 ($\lambda = 5889,97 \text{ \AA}$), die sich

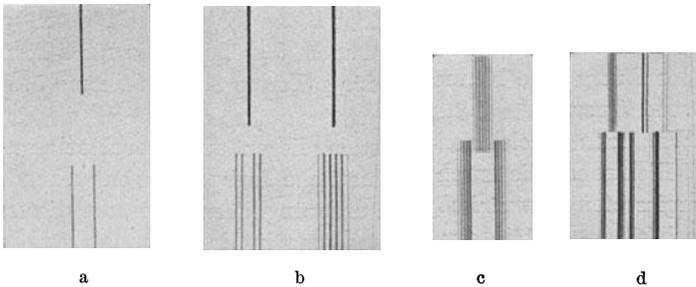


Abb. 84. Aufspaltungsbilder von Spektrallinien im Magnetfeld (nach E. Back und A. Landé). a) Normales Lorentz-Triplett der Cd-Linie $\lambda = 6439 \text{ \AA}$ (oben π -Komponente, unten σ -Komponenten). b) Zeeman-Aufspaltung des Na-D-Dubletts (oben die Linien ohne Magnetfeld, unten links das Quartett von D_1 ($\lambda = 5895,93 \text{ \AA}$), rechts das Sextett von D_2 ($\lambda = 5889,97 \text{ \AA}$)). c) Anomaler Zeeman-Effekt an einer Cr-Linie (oben π -, unten σ -Komponenten). d) Aufspaltung des Cr-Tripletts ($\lambda = 5208, 5206, 5204 \text{ \AA}$) in einem Magnetfeld von 38000 Gauß (oben π -, unten σ -Komponenten). Die beobachtbaren Störungen (s. S. 144) weisen auf den Übergang vom anomalen Zeeman-Effekt zum Paschen-Back-Effekt hin.

im Magnetfeld in ein *Quartett* bzw. *Sextett* aufspalten. D_1 entspricht dem Übergang ${}^2p_{\frac{1}{2}} \rightarrow {}^2s_{\frac{1}{2}}$. Da beide Terme, wie aus Zahlentafel 15 hervorgeht, in je zwei Energiestufen aufgespalten werden, ist die Entstehung eines Quartetts von Linien ohne weiteres verständlich. D_2 entsteht durch den Übergang ${}^2p_{\frac{3}{2}} \rightarrow {}^2s_{\frac{3}{2}}$, wobei der erste Term in 4, der zweite in 2 Komponenten aufgespalten wird. Im Hinblick auf die angegebene Auswahlregel für die Quantenzahl m ergeben sich statt der möglichen 8 nur 6 Linien. In Zahlentafel 15 ist die Entstehung dieses Sextetts durch Pfeile angedeutet; voll ausgezogene Pfeile weisen auf die σ -Komponenten, gestrichelte Pfeile auf π -Komponenten hin.

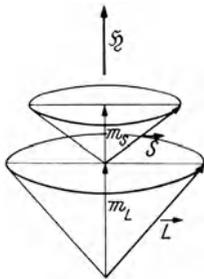


Abb. 85. Vektorgerüst zur Erklärung des Paschen-Back-Effekts.

Die Wirkung des äußeren Magnetfeldes \vec{H} ist so stark, daß Gesamtbahnimpuls \vec{L} und Gesamtspin \vec{S} entkoppelt werden und gesondert um die Feldrichtung präzisieren.

Genaue Aufspaltungsmessungen von Back ergaben

$$\frac{e}{m_e} = 5,300 \cdot 10^{17} \text{ e. st. E./g}$$

in guter Übereinstimmung mit dem aus *Ablenkungsversuchen* gewonnenen Wert für die *spezifische Ladung* (s. S. 8).

b) Einwirkung starker Magnetfelder (Paschen-Back-Effekt).

Mit zunehmender Feldstärke H wird die durch die Vektorgl. (105) dargestellte *Kopplung* zwischen \vec{L} und \vec{S} *gelöst*; jeder der beiden Vektoren stellt sich *für sich allein* richtungsgequantelt zum Magnetfeld \mathfrak{H} ein und präzisiert im Sinne der Abb. 85 um die Feldrichtung. Ihre Projektionen auf die Feldrichtung

$$m_L = L \cos(\mathfrak{H}, \vec{L}), \quad m_S = S \cos(\mathfrak{H}, \vec{S}) \quad (130)$$

können somit die Werte

$$\left. \begin{aligned} m_L &= L, L-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -L+1, -L; \\ m_S &= S, S-1, \dots, -S+1, -S \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

annehmen. Für die magnetische Quantenzahl m gilt dementsprechend

$$m = m_L + m_S. \quad (132)$$

Die magnetische Zusatzenergie beim Einschalten des Magnetfeldes H beträgt jetzt in Hinblick auf Gl. (118), (119) und (130)

$$\begin{aligned} |\Delta E| &= H [M_L \cos(\mathfrak{H}, \vec{L}) + M_S \cos(\mathfrak{H}, \vec{S})] = \\ &= \mu H (m_L + 2 m_S). \end{aligned} \quad (133)$$

Die Zahlentafeln 17 und 18 erläutern für den Fall eines *Ein-* bzw. *Zweielektronensystems* die *Termaufspaltung* bei diesem als *Paschen-Back-Effekt* bezeichneten Vorgang und ermöglichen so einen Vergleich mit den entsprechenden, in den Zahlentafeln 15 und 16 angegebenen *Termaufspaltungen* beim *anomalen Zeeman-Effekt*.

In mittelstarken Magnetfeldern tritt mit zunehmender Feldstärke

ein *stetiger Übergang* des anomalen Zeeman-Effektes in den Paschen-Back-Effekt ein, wie dies Abb. 86 für das p -Dublett eines Eielektronensystems erläutert. Abb. 84d zeigt die Auf-

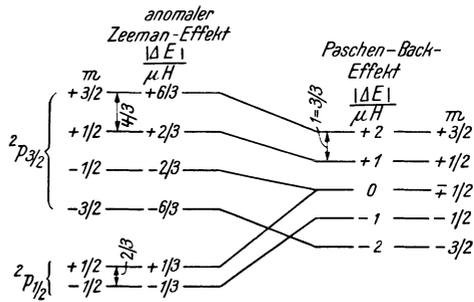


Abb. 86. Übergang des anomalen Zeeman-Effektes in den Paschen-Back-Effekt, dargestellt für das p -Dublett eines Eielektronensystems (Alkaliatoms). Es ergibt sich schließlich für jeden Bestandteil des Dubletts die Aufspaltung in ein normales Lorentz-Triplett.

spaltung des Cr-Triplets (von links nach rechts: $\lambda = 5208, 5206, 5204 \text{ \AA}$) im Quintettsystem unter dem Einfluß eines Magnetfeldes von 38000 Gauß. Während die π -Komponenten von $\lambda = 5208 \text{ \AA}$ noch ungestört erscheinen, sind die kurzwelligen σ -Komponenten derselben Linie bedeutend stärker als die langwelligen. Eine deutliche Asymmetrie zeigt sich bei den σ -Komponenten von $\lambda = 5206$ und 5204 \AA : die kurzwelligen Komponenten der ersteren Linie sind mit den langwelligen der letzteren verschmolzen. Diese Verhältnisse weisen unzweifelhaft auf einen allmählichen Übergang vom anomalen Zeeman-Effekt zum Paschen-Back-Effekt hin.

Zahlentafel 17. Paschen-Back-Aufspaltung der Terme eines Einelektronensystems (Alkaliatoms).

Term	l	m_s	$ \Delta E /\mu H = m + m_s$ für $m = m_l + m_s =$								
			$-7/2$	$-5/2$	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$	$+5/2$	$+7/2$	
s	0	$-1/2$					-1				
		$+1/2$						$+1$			
p	1	$-1/2$			-2	-1	0				
		$+1/2$				0	$+1$	$+2$			
d	2	$-1/2$		-3	-2	-1	0	$+1$			
		$+1/2$			-1	0	$+1$	$+2$	$+3$		
f	3	$-1/2$	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$		
		$+1/2$		-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	

Zahlentafel 18. Paschen-Back-Aufspaltung der Terme eines Zweielektronensystems (Erdalkaliatoms).

Term	L	m_S	$ \Delta E /\mu H = m + m_S$ für $m = m_L + m_S =$								
			-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$		
S	0	-1					-2				
		0						0			
		$+1$							$+2$		
P	1	-1		-3	-2	-1					
		0			-1	0	$+1$				
		$+1$				$+1$	$+2$	$+3$			
D	2	-1	-4	-3	-2	-1	0				
		0		-2	-1	0	$+1$	$+2$			
		$+1$				0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	

II. Die Wellenstruktur der Materie.

A. Flüssigkeits- und Luftwellen.

Der Grundvorgang jeder *Wellenerscheinung* besteht in der Vermittlung des *Schwingungszustandes* des einzelnen Teilchens durch elastische Kräfte an die Nachbartheilchen in Gestalt einer sogenannten „*Elementarwelle*“ (*Huygenssches Prinzip*, 1690). Letztere ergeben in ihrer Gesamtheit als „*Einhüllende*“ die in dem elastischen Mittel fortschreitende *Wellenfront*. Schon beim Zustandekommen einer einfachen, flächenhaft oder räumlich sich ausbreitenden Welle spielt eine Erscheinung, die man als *Überlagerung* (*Interferenz*) bezeichnet, die entscheidende Rolle. Sie besteht im wesentlichen darin, daß sich die Verschiebungen, die ein Teilchen (aus verschiedenen Ursachen) gleichzeitig ausführen soll, *vektoriell* (nach der Parallelogrammregel) zusammensetzen lassen. Dadurch erscheint es möglich, daß in einem ausgedehnten Mittel an gewissen Stellen lebhafteste Bewegung (*Verstärkung*), an anderen Stellen dagegen Ruhe (*Auslöschung*) eintritt. Die Überlagerung

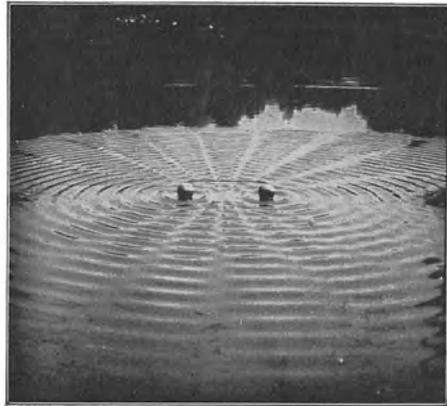


Abb. 87. Interferenz zweier gleicher (kohärenter) Kreiswellensysteme auf einer Wasseroberfläche (nach Grimsehl). Das Bild unten zeigt die Interferenzerscheinung vergrößert.

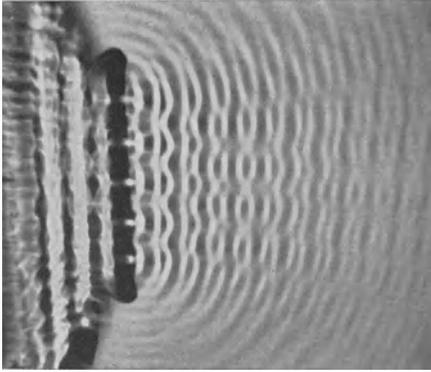


Abb. 88. Durchtritt von Wasserwellen durch ein Gitter (nach Grimsehl).

von zwei *Kreiswellensystemen* auf einer Wasseroberfläche, die durch gleichzeitiges Eintauchen zweier Holzkugeln erregt wurden, zeigt in sehr schöner Weise Abb. 87. Wir erkennen in ihr deutlich die durch stellenweise Auslöschung bzw. Verstärkung der Bewegung entstehenden *Hyperbelscharen*. Abb. 88 erläutert den Hindurchtritt einer geraden

Wellenfront durch eine Reihe gleich weit entfernter Öffnungen (*Gitter*) gleichfalls auf einer Wasseroberfläche. Auch die Ausbreitung von *Wellen in der Luft (Schallwellen)* kann sichtbar gemacht werden; man bedient sich dazu der Töplerschen

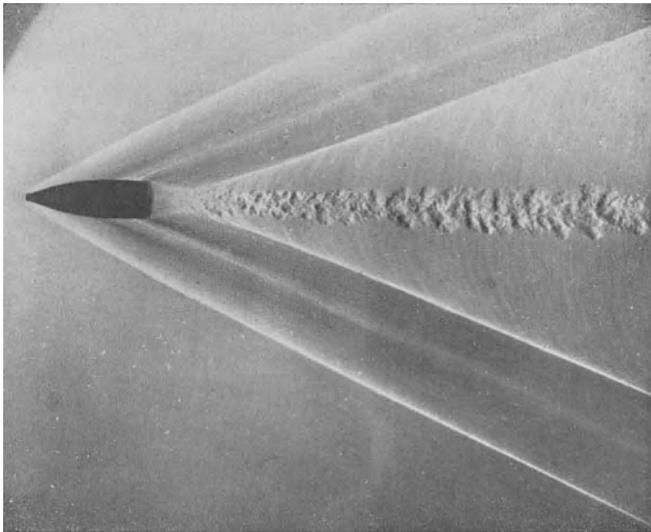


Abb. 89. „Machsche Welle“ eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Geschosses (aus P. P. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen).

Schlierenmethode, bei der die durch die Wellenbewegung auftretenden Dichteveränderungen der Luft im Lichtbild festgehalten werden. Abb. 89 zeigt die Wellenfront („*Machsche Welle*“) eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Geschosses, deren Zu-

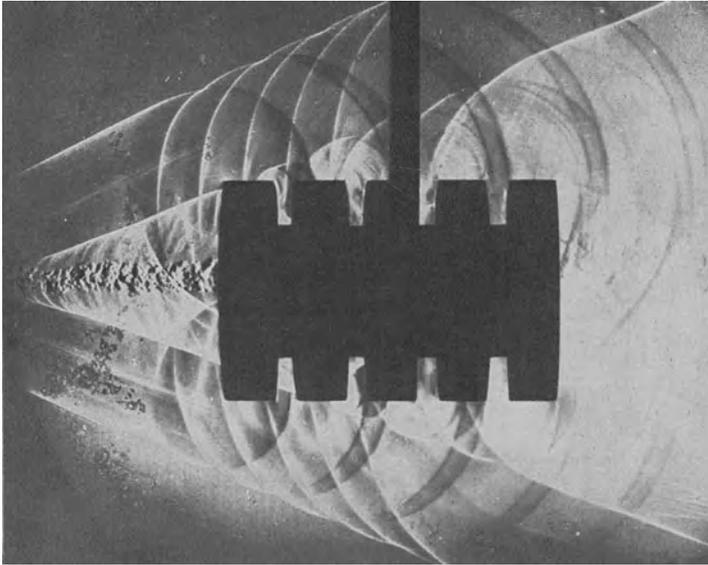


Abb. 90. „Machsche Welle“ als Einhüllende von Kugelwellen, die von den seitlichen Öffnungen einer Dose ausgehen, die das in der Abbildung nicht mehr sichtbare Geschöß durchsetzt hat (aus P. P. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen).

standekommen durch Überlagerung von Kugelwellen nach dem Huygensschen Prinzip Abb. 90 veranschaulicht, die den Durchtritt des Geschosses durch eine mit seitlichen Öffnungen versehene Dose zur Darstellung bringt.

B. Ätherwellen.

1. Sichtbares Licht.

Obwohl für das Licht als Wellenbewegung nicht in derselben Weise wie bei Flüssigkeits- und Luftwellen ein stofflicher Träger namhaft gemacht werden kann und dafür ein besonderer „*Licht-äther*“ erfunden werden mußte, so hat sich doch die zuerst von

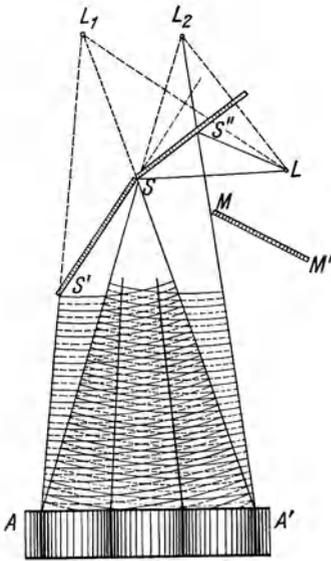


Abb. 91. Fresnelscher Spiegelversuch.

$M M'$ Schirm, um direktes Licht der Lichtquelle L von $A A'$ fernzuhalten.

Chr. Huygens vertretene Auffassung von der *Wellennatur* des Lichtes immer mehr befestigt und die ungefähr ebenso alte *Emissionstheorie* Newtons (s. S. 180f.) schließlich völlig verdrängt, da die auch beim Licht beobachtbaren *Beugungs-* und *Interferenzerscheinungen* in überzeugender Weise dessen *Wellennatur* darzutun schienen. Das größte Verdienst um den Ausbau der Wellentheorie des Lichtes hat A. J. Fresnel, von dem jener berühmte *Spiegelversuch* stammt, der in jeder Hinsicht das Seitenstück zu dem in Abb. 87 dargestellten Interferenzversuch bedeutet. Abb. 91 gibt ein Bild der Fresnelschen Versuchsanordnung zur Erzeugung der Interferenz von Wellen zweier kohärenter (d. h. genau die gleichen Schwingungen ausführender oder „in

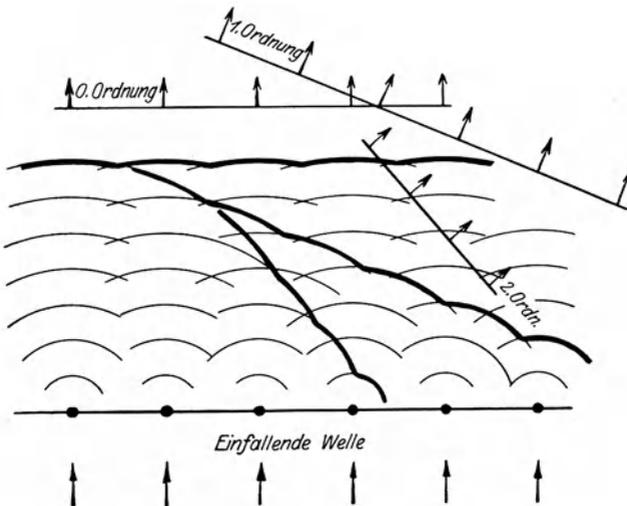


Abb. 92. Entstehung der Wellenfronten 0., 1. und 2. Ordnung bei der Beugung von Lichtwellen durch ein eindimensionales Gitter (nach Ewald).

Phase“ schwingender) Lichtquellen L_1, L_2 , die durch Spiegelung derselben Lichtquelle L an zwei gegeneinander unter sehr flachem Winkel (etwa $179^\circ 30'$) geneigten Spiegeln S' und S'' erhalten werden. Man erkennt die auf dem Schirm A, A' entstehenden *Streifen* als jene Stellen, wo die *Interferenzhyperbeln* den Schirm treffen.

Auch zum *Gitterversuch* der Abb. 88 gibt es ein *optisches Analogon*: die Beugung von Lichtwellen durch ein eindimensionales „*Strichgitter*“ (in Glas geritzte, parallele, gleich weit abstehende Striche). Mit Rücksicht auf das Folgende wollen wir diese Erscheinung an Hand der Abb. 92 näher betrachten. Die eingezeichneten Kreise stellen die Wellen-

berge der von den einzelnen Gitteröffnungen ausgehenden Elementarwellen dar, die sich je nach dem „*Gangunterschied*“ benachbarter Elementarwellen zu *Wellenfronten* nullter, erster, zweiter, . . . Ordnung zusammenschließen. Jeder dieser Fronten entspricht ein dazu normaler *Strahl*, der auf einem hinter dem Gitter befindlichen Schirm ein entsprechendes *Beugungsbild* des als Lichtquelle verwendeten Spaltes erzeugt. Diese Bilder entstehen ebenso rechts wie links von dem nicht abgelenkten Spaltbild nullter Ordnung. Abb. 93 veranschaulicht diese Erscheinung für Licht größerer und geringerer Wellenlänge (rotes und blaues Licht). Zwei in einer Ebene *senkrecht zueinander* angeordnete Strichgitter ergeben ein „*Kreuzgitter*“, dessen lichtbeugende Wirkung wir am einfachsten beim Durchblick durch das

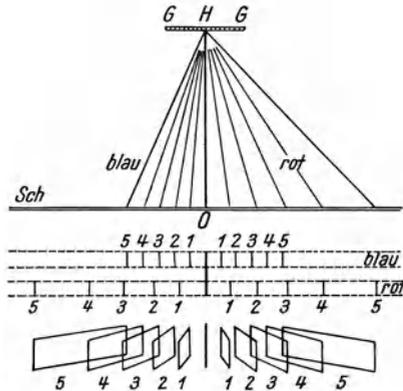


Abb. 93. Beugung von Licht verschiedener Wellenlänge durch ein Gitter.

Die mit Nummern versehenen Parallelogramme deuten die jeweilige Ausdehnung des von weißem Licht erzeugten Spektrums der betreffenden Ordnung an.

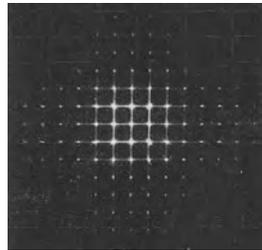


Abb. 94. Beugungerscheinung durch ein Kreuzgitter.

Gewebe eines Regenschirmes gegen eine entfernte, helle Straßenlaterne beobachten können (Abb. 94). Wir wenden uns nun zur mathematischen Behandlung der *Gitterbeugung*.

a) **Strichgitter (eindimensionales Gitter)**. Im Hinblick auf Abb. 95 berechnen wir die Winkel φ der gebeugten Strahlen mit dem Gitter. Für das

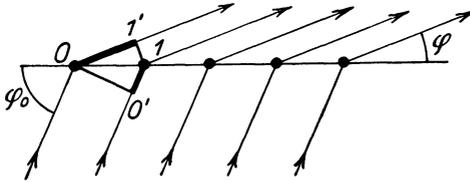


Abb. 95. Beugung durch ein Strichgitter.

Spektrum k^{ter} Ordnung muß der Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen offenbar $k \lambda$ (ein *gerades Vielfaches* von $\frac{\lambda}{2}$, also $2k \cdot \frac{\lambda}{2}$) betragen. Bezeichnen wir

mit φ_0 den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Gitter und mit a den *Abstand zweier benachbarter Gitterstriche* (*Gitterkonstante*), so erhalten wir für den gesuchten *Gangunterschied*:

$$a \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_0) = k \cdot \lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (134)$$

Für die so bestimmten Winkel φ ergeben sich *Helligkeitsmaxima*

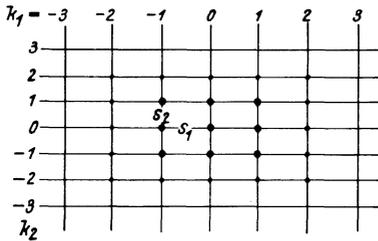


Abb. 96. Ordnungszahlen der Interferenzpunkte bei der Beugung durch ein Kreuzgitter.

auf dem Schirm, die durch Stellen größter Dunkelheit bei Gangunterschieden von $(2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ unterbrochen werden.

Da für k im allgemeinen nur eine *kleine Zahl* in Betracht kommt, können wir aus Gl. (134) schließen, daß deutliche Beugungsbilder nur dann zu erwarten sind, wenn die *Gitterkonstante* a der *Wellenlänge* λ

des zu beugenden Lichtes *nahe kommt*, also etwa:

$$1 < \frac{a}{\lambda} < 10.$$

b) **Kreuzgitter (zweidimensionales Gitter)**. Bedeuten α_0, β_0 die Winkel des einfallenden Strahles mit den beiden Gittern im Sinne der Abb. 95 und sind a_1 und a_2 deren *Strichabstände*, so

bestehen nunmehr zur Bestimmung der Richtungen (α, β) *größerer Helligkeit* die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= k_1 \lambda, & k_1 \\ a_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) &= k_2 \lambda, & k_2 \end{aligned} \right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (135)$$

Die ganzen Zahlen k_1, k_2 geben die *Ordnung* des Beugungsbildes an und bestimmen die Lage des zugehörigen Interferenzfleckes auf

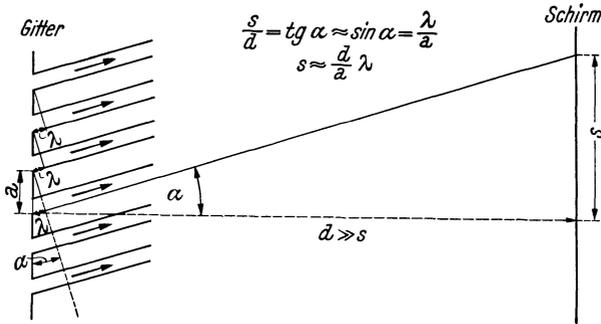


Abb. 97. Zusammenhang zwischen dem Abstand s der Interferenzbilder, dem Schirmabstand d , der Gitterkonstanten a und der Wellenlänge λ .

dem Schirm (Abb. 96). Die Abstände s_1, s_2 der Interferenzpunkte auf dem Schirm sind für *kleine Beugungswinkel* dem Abstand d des Gitters vom Schirm, sowie der Wellenlänge λ direkt und den Strichabständen a_1, a_2 verkehrt proportional, wie ein Blick auf Abb. 97 erkennen läßt:

$$s_1 \approx \frac{d}{a_1} \cdot \lambda, \quad s_2 \approx \frac{d}{a_2} \cdot \lambda. \quad (136)$$

2. Röntgenstrahlen.

a) **Röntgenröhren.** Allen Röhren gemeinsam ist die Erzeugung der Röntgenstrahlen durch *Abbremsung von Elektronen*, die durch *hohe Spannungen* (10 bis 50 kV) *beschleunigt* worden sind, an einer aus *Schwermetall* (meist *Wolfram*) hergestellten *Antikathode* bzw. *Anode* (s. dazu das S. 25f. über das *Bremsspektrum* Gesagte). Wegen der beim Aufprall der Elektronen entstehenden beträchtlichen Erwärmung muß für ausreichende Kühlung (Wasserkühlung) der Antikathode (Anode) Sorge getragen werden. Die ursprüngliche Form der Röntgenröhre ist die durch ein kräftiges Induktorium

betriebene „Ionenröhre“, die zur Aufrechterhaltung der Entladung einen gewissen Gehalt an *Gasionen* aufweisen muß und dazu gelegentlich einer „Regenerierung“ bedarf (Abb. 98).

Die moderne Röntgenröhre ist eine *gasfreie Elektronenröhre mit Glühfaden*. Ihre ältere Form ist die *Lilienfeld-Röhre* (Abb. 99). Sie enthält einen Glühfaden, der je nach der Stärke der Heizung mehr oder weniger Elektronen aussendet; diese laufen durch eine hohle

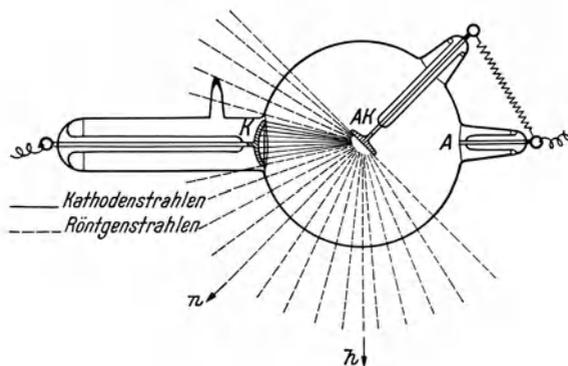


Abb. 98. Ionenröhre (älteste Form der Röntgenröhren).

Kathode und können durch eine angelegte hohe Spannung entsprechend beschleunigt werden. Bei der neueren *Coolidge-Röhre* (Abb. 100) ist die Kathode selbst als *Glühkathode* in Gestalt einer Heizspirale ausgebildet und der Anode unmittelbar gegenübergestellt. Wie bei der *Lilienfeld-Röhre* kann durch die angelegte Spannung die *Härte (Frequenz)*, durch die Heizung die *Stärke (Intensität)* der Röntgenstrahlung in weiten Grenzen geregelt werden. Für Zwecke der *Spektroskopie* und *Kristallstrukturanalyse* werden heute zumeist *offene* Röntgenröhren mit auswechselbarem Glühfaden und angeschlossener Hochvakuumpumpe verwendet, die Spannungen bis 100 kV bei Stromstärken bis 100 mA im Dauerbetrieb ertragen. Abb. 101 zeigt das Schaltbild einer *Seemann-Röntgenröhre* in Verbindung mit einem Spektrographen.

b) Geschichtliches zur Wellenlängenmessung. Da man von Anfang die von W. C. Röntgen 1895 entdeckten Strahlen wegen ihrer Nichtablenkbarkeit durch elektrische und magnetische Felder für *Wellenstrahlen* hielt, erschien es als die vor-

nehmste Aufgabe, ihre *Wellenlänge* zu bestimmen. Man versuchte zu diesem Zwecke, *Beugungserscheinungen* zu beobachten. Vom sichtbaren Licht her war bekannt: Je enger der Spalt, desto stärker die Beugung [vgl. Gl. (136)]. Um überhaupt eine Beugungserscheinung zu erhalten, muß, wie schon bemerkt, die Spaltbreite der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes nahekommen.

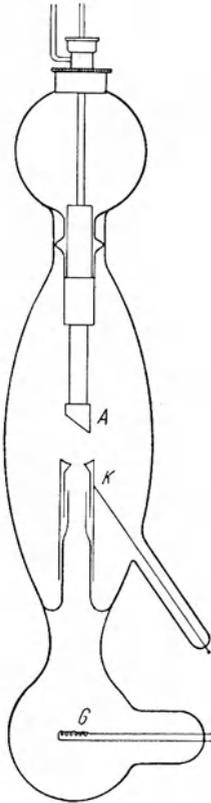


Abb. 99. Lilienfeld-Röhre (J. E. Lilienfeld, 1912). *A* Anodenspiegel, *K* Hilfskathode mit engem Loch, *G* Glühkathode.



Abb. 100. Siemens-Dofok-Diagnostikröhre mit Siedekühlung (System W. D. Coolidge, 1913).

Wie *eng* muß man also den Spalt machen, damit man Röntgenstrahlen beugen kann? Um diese Frage zu entscheiden, machten zuerst Haga und Wind (1902), später Walter und Pohl (1909) Versuche mit einem *Keilspalt*, der gegen die Schneide des Keiles hin immer enger wird. Mit gewöhnlichem Licht ergeben

sich dabei Beugungsbilder, die um so weiter auseinandergehen, je enger der Spalt wird (Abb. 102). Mit *Röntgenstrahlen* ist ein solcher Versuch zunächst *nicht* einwandfrei gelungen. Sommerfeld konnte aus dem zweifelhaften Ergebnis nur mutmaßen, daß

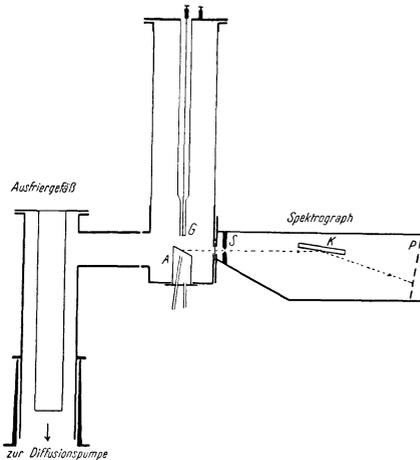


Abb. 101. Versuchsanordnung mit Seemann-Röntgenröhre für Spektroskopie (schematisch nach Regler).

A Hohlanode mit Wasserkühlung, G austauschbarer Glühfaden. Um die Hg-Dämpfe der Hg-Diffusionspumpe von der Röhre fernzuhalten, muß ein Ausfriergefäß dazwischengeschaltet werden, das statt mit flüssiger Luft auch mit einer Mischung von CO_2 -Schnee und Azeton beschickt werden kann. Die Röntgenstrahlung tritt durch ein Fenster (aus Al für kürzerwellige, aus Be, Zellophan oder Goldschlägerhaut für längerwellige Strahlung) aus der Röhre in den Spektrographen (in der Abbildung zur besseren Übersicht im Grundriß gezeichnet). S Spalt, K Kristall, P photographische Platte.

die *Wellenlänge* etwa von der Größe der *Atomausdehnung* ($\lambda \approx 4 \cdot 10^{-9}$ cm) sei. Erst bei einer späteren Wiederholung der Versuche (1924) konnte Walter deutlich schwache Streifen neben dem zentralen Spaltbild (im Bereiche von 2 bis 4μ Spaltbreite) erkennen. In neuerer Zeit ist es auch gelungen, *Röntgenstrahlen* mit Hilfe *mechanisch geritzter Glasgitter* mit verhältnismäßig großer Gitterkonstante (300 Furchen/mm) zu beugen und dabei eine gute Trennung der Ordnungen zu erzielen, wenn man die *Reflexion* unter *hinreichend großem Einfallswinkel*, d. h. *nahezu streifend*, erfolgen läßt, was praktisch einer weitgehenden Verkleinerung der Gitterkonstanten gleichkommt. Abb. 103 zeigt

in 45facher Vergrößerung die Interferenzstreifen, die 1935 E. Bäcklin nach der *Plangittermethode* bei der Beugung von $C K_\alpha$ -Strahlung ($\lambda = 44,7 \text{ \AA}$) durch einen Spalt von $33 \cdot 10^{-4}$ cm Breite erhalten hat.

Die erste erfolgreiche *Bestimmung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen* gelang durch Gitter hinreichender Feinheit. Woher aber nahm man Gitter mit Maschen von atomarer Größe? M. v. Laue faßte den Gedanken, *Kristalle als Gitter* zu verwenden; auf

Grund seiner Vorschläge führten Friedrich und Knipping 1912 ihre Versuche gemäß Abb. 104 durch. Laue hat für diesen Fall seine Theorie der *Raumgitterbeugung* entwickelt, die eine Weiterführung unserer Betrachtungen über das Kreuzgitter darstellt.

c) **Beugung am Raumgitter (Kristallgitter). Verfahren von M. v. Laue.** Wir betrachten hier nur das *rhombische* Gitter mit drei aufeinander senkrechten Achsen mit den *Gitterkonstanten* a_1, a_2, a_3 . Zur Festlegung der *Richtungen größter Helligkeit* α, β, γ (s. Abb. 105), für die die folgenden Gleichungen gelten:

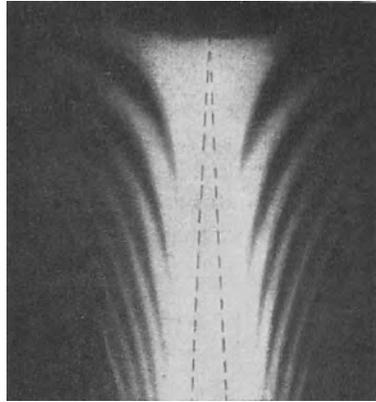


Abb. 102. Beugung von sichtbarem Licht durch einen keilförmigen Spalt (nach Grimsehl).

bedarf es jetzt dreier Winkel die die folgenden Gleichungen

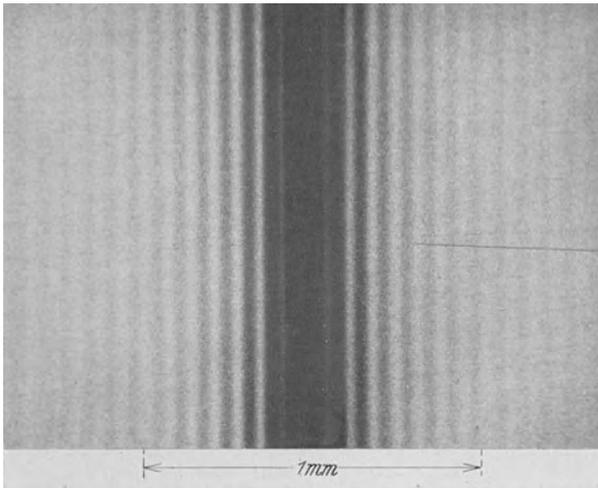


Abb. 103. Beugung von Röntgenlicht ($\lambda = 44,7 \text{ \AA}$) durch einen Spalt von 33μ in 45facher Vergrößerung (nach E. Bäcklin).

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= k_1 \lambda, & k_1 \\ a_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) &= k_2 \lambda, & k_2 \\ a_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= k_3 \lambda, & k_3 \end{aligned} \right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (137)$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sind die Neigungswinkel des einfallenden Strahles; k_1, k_2, k_3 bedeuten wie früher *Ordnungszahlen*, die die Lage des Beugungsbildes bestimmen. Diese Zahlen sind jedoch *nicht mehr voneinander unabhängig*; denn es besteht noch die geometrische

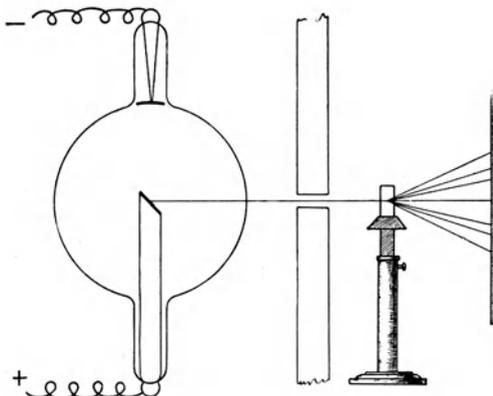


Abb. 104. Beugung der Röntgenstrahlen nach dem Laue-Verfahren (nach Ewald).

Bedingung für die Richtungswinkel des gebeugten Strahles:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (138)$$

Wir können somit von einem Strahl nicht beliebige Beugungsbilder bekommen, sondern *nur solche*, die dieser geometrischen Bedingung entsprechen. Lösen wir die Gleichungen (107) nach

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ auf und setzen deren Quadratsumme gleich 1, so können wir aus dieser Gleichung jene Wellenlängen λ berechnen, die bei gegebener Einfallsrichtung ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$) durch den Kristall gebeugt werden können:

$$\lambda = -2 \cdot \frac{\frac{k_1}{a_1} \cos \alpha_0 + \frac{k_2}{a_2} \cos \beta_0 + \frac{k_3}{a_3} \cos \gamma_0}{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{k_3}{a_3}\right)^2}. \quad (139)$$

Aus Gründen der Vereinfachung befassen wir uns des weiteren nur mit dem *kubischen (tesseralen) Gitter* oder *Würfelgitter*: $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Dann wird

$$\lambda = -2a \cdot \frac{k_1 \cos \alpha_0 + k_2 \cos \beta_0 + k_3 \cos \gamma_0}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \quad (139a)$$

Für die praktische Auswertung kommt vor allem der Fall in Frage,

daß der Kristall *senkrecht zu einer Kristallfläche durchstrahlt* wird: $\alpha_0 = \beta_0 = 90^\circ$, $\gamma_0 = 0^\circ$ (Abb. 105).

Der Strahl möge also *in der Richtung der Z-Achse* senkrecht auf den Kristall treffen. Unter diesen Umständen gelten die folgenden, aus Gl. (139a) und Gl. (137) hervorgehenden Gleichungen:

$$\lambda = \frac{-2 a k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \quad k_3 \leq 0; \quad (140)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-2 k_1 k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, & \cos \beta &= \frac{-2 k_2 k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \\ \cos \gamma &= 1 + \frac{k_3}{a} \lambda = \frac{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

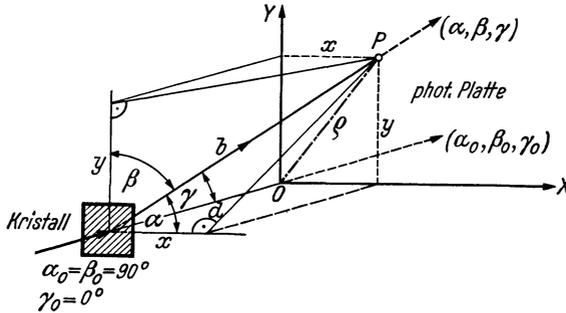


Abb. 105. Ortsbestimmung eines Interferenzfleckes beim Laue-Verfahren.

d) Auswertung eines Laue-Bildes. Der Messung zugänglich ist außer dem bekannten Abstand d der photographischen Platte vom Kristall noch der Abstand ϱ des Auftreffpunktes des gebeugten Strahles (*Interferenzpunktes*) von der Bildmitte, die durch den meist überbelichteten, von der direkten Bestrahlung durch sämtliche Wellenlängen herrührenden *Primärfleck* gekennzeichnet ist. Im Hinblick auf Abb. 105 berechnen wir mit Berücksichtigung von Gl. (141):

$$\left. \begin{aligned} x &= b \cos \alpha = d \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = \frac{-2 k_1 k_3}{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2} d, \\ y &= b \cos \beta = d \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-2 k_2 k_3}{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2} d, \\ x : y &= k_1 : k_2, \\ \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{-2 k_3 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2} d = d \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Nach Gl. (140) muß, da λ jedenfalls positiv ist, die Ordnungszahl k_3 in der z -Richtung negativ sein. Für $k_3 = -1$ bekommt man die *erste* Reihe von Punkten rings um den Mittelpunkt (*Ring erster Ordnung*). Die auf demselben Kreis um den Primärfleck gelegenen Punkte gehören zur gleichen Ordnung und weisen *vier* oder *drei* *Spiegelachsen* auf, je nachdem ob der tesserale Kristall

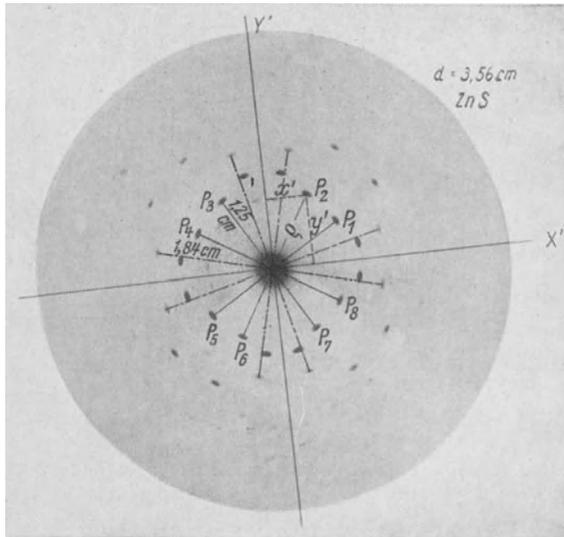


Abb. 106. Auswertung eines Laue-Bildes.

Das Bild gibt eine Zinkblendeaufnahme von Laue, Friedrich und Knipping wieder, bei der die photographische Platte 3,56 cm vom Kristall entfernt war. Die Flecken P_1, P_2, \dots, P_8 stellen einen achtfachen Punkt dar. Die Koordinaten x', y' sind mit den Koordinaten x, y der Abb. 105 und des Textes identisch.

senkrecht zu einer Würffläche (längs einer *vierzähligen* Achse) oder parallel zu einer Körperdiagonale des Würfels (längs einer *dreizähligen* Achse) durchstrahlt worden ist. Man erhält im *ersten* Fall im allgemeinen einen *achtfachen*, im *zweiten* einen *sechsfachen* Punkt. So spiegelt sich die *Symmetrie des Kristalls* in den Laue-Bildern wider.

Zur Erläuterung des Gesagten möge eine der ersten Aufnahmen an *Zinkblende* (ZnS) von Laue, Friedrich und Knipping dienen (Abb. 106). Bei einem Abstand $d = 3,56$ cm entspricht einem

Ring erster Ordnung ($k_3 = -1$) ein Radius $\varrho = 1,25$ cm. Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varrho}{d} = 0,351; \quad \gamma = 19^\circ 20' \quad \text{und} \quad \cos \gamma = 0,9436.$$

Die Gl. (141₃) $\cos \gamma = 1 + \frac{k_3}{a} \lambda$ liefert sodann

$$\frac{\lambda}{a} = 0,0564.$$

Will man die *Wellenlänge* λ selbst, so braucht man noch die *Gitterkonstante* a , deren Bestimmung im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Der soeben für $k_3 = -1$ ermittelte Wert von $\frac{\lambda}{a}$ kann folgendermaßen überprüft und verbessert werden. Im Hinblick auf Gl. (140) muß

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{2a}{\lambda} = \frac{2}{0,0564} = 35,4$$

sein. Da k_1 und k_2 ganze Zahlen sein müssen, war die Messung offenbar fehlerhaft, da sich ihre Quadratsumme nicht ganzzahlig ergibt: $k_1^2 + k_2^2 = 34,4$. Wir vermuten, daß die richtige Summe 34 ist. Welche Möglichkeiten für k_1 und k_2 gibt es da? Es sind die folgenden:

k_1	k_2
± 3	± 5
± 5	± 3

Das Photogramm gestattet eine Prüfung mit Hilfe der Gl. (142₃): $x : y = k_1 : k_2 = 3 : 5$ bzw. $5 : 3$. Dieses Koordinatenverhältnis erweist sich für den beobachteten achtfachen Punkt als richtig. Wir erhalten somit als *verbesserten* Wert:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2}{35} = 0,0571.$$

Die Wellenlänge λ selbst erhält man erst nach Bestimmung der Gitterkonstanten a (s. u.). Im vorliegenden Fall ergibt sich

$$a_{\text{ZnS}} = 5,42 \text{ \AA}, \quad \text{daher} \quad \lambda = 0,309 \text{ \AA}.$$

e) Die Ermittlung der Gitterkonstanten bei kubischen Gittern. Nun beschäftigt uns die Frage: Welche *Struktur* besitzen die Gitter der verschiedenen Kristalle? Da eine allgemeine Untersuchung unmöglich ist, beschränken wir uns auf *kubische* Gitter.

α) Das einfache kubische Gitter (Abb. 107) kommt in der Natur nicht vor. Bei den *tesseralen* Kristallen spielen immer nur *zusammengesetzte* Gitter eine Rolle.

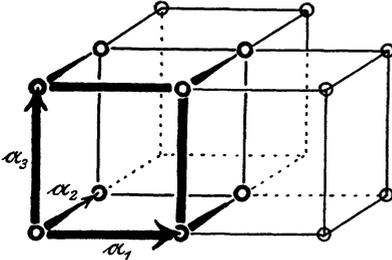


Abb. 107. Einfaches kubisches Gitter oder Würfelgitter (nach Ewald).

Durch wiederholte Verschiebung des Ausgangspunktes in der Richtung der drei Pfeile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (Grundverschiebungen) kann das ganze Gitter hervorgebracht werden.

β) Das flächenzentrierte kubische Gitter (Abb. 108). Dies ist eine sehr häufig vorkommende Form. Dabei ist *jede Flächenmitte* des Elementarwürfels wieder *Ausgangspunkt eines einfachen kubischen Gitters*. Die Pfeile der Abb. 108 geben die Parallelverschiebungen des ursprünglichen Gitters an: es liegen also vier *einfache kubische Gitter ineinander*.

Wir betrachten einen *Elementarwürfel*, d. i. einen Würfel mit der Gitterkonstanten a als Seitenlänge. Wie viele Atome entfallen auf einen solchen? 8 Atome befinden sich in den Ecken; jedes davon gehört zu 8 Würfeln, daher zählen die 8 Eckenatome als

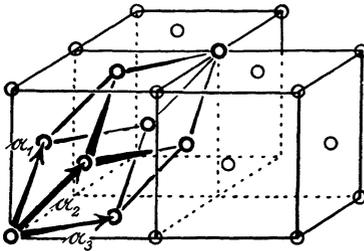


Abb. 108. Flächenzentriertes kubisches Gitter (nach Ewald).

Die Pfeile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ deuten die drei Grundverschiebungen an, durch die dieses Gitter erzeugt werden kann.

$8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ Atom. 6 Atome liegen auf den Flächen; jede Fläche gehört zu 2 Würfeln, daher zählen die 6 Flächenatome als $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ Atome. Insgesamt entfallen somit $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$ Atome auf den Elementarwürfel. Aus der Formel: *Dichte* $\delta = \text{Masse des Elementarwürfels}$ dividiert durch das Volumen des Elementarwürfels

$$\delta = \frac{4m}{a^3}, \quad m = \text{Atommasse},$$

kann man die *Gitterkonstante* a berechnen:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4m}{\delta}}. \quad (143)$$

Viele Metalle, wie Cu, Ag, Au, Al, Pb, Fe(γ), Ni, besitzen flächenzentrierte kubische Gitter.

Wir betrachten als Beispiel das Kupfer. Seine Dichte beträgt $\delta_{\text{Cu}} = 8,96 \text{ g/cm}^3$; seine Atommasse ist:

$$m_{\text{Cu}} = A_{\text{Cu}} \text{ ME} = 63,57 \cdot 1,661 \cdot 10^{-24} \text{ g.}$$

Daraus ergibt sich der Gitterabstand $a_{\text{Cu}} = 3,61 \text{ \AA}$.

Ein weiteres Beispiel bietet das Steinsalz NaCl. Die Na-Atome einerseits und Cl-Atome andererseits bilden zwei ineinandergestellte flächenzentrierte Gitter (Abb. 109). Auf den Elementarwürfel entfallen:

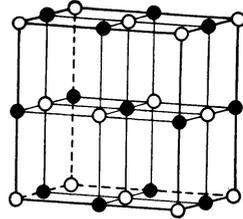


Abb. 109. Steinsalzgitter.
● Na⁺, ○ Cl⁻.

$$\left. \begin{array}{l} 8 \text{ Cl in den Ecken, zu zählen als } \dots \quad 8 \cdot \frac{1}{8} = 1 \text{ Cl} \\ 6 \text{ Cl auf den Flächen, zu zählen als } \dots \quad 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ Cl} \end{array} \right\} 4 \text{ Cl,}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \text{ Na auf den Kanten, zu zählen als } \dots \quad 12 \cdot \frac{1}{4} = 3 \text{ Na} \\ 1 \text{ Na in der Mitte, zu zählen als } \dots \dots \dots \quad 1 \text{ Na} \end{array} \right\} 4 \text{ Na,}$$

somit im ganzen 4 Cl- und 4 Na-Atome. Es gelten jetzt die entsprechenden Formeln:

$$\delta_{\text{NaCl}} = \frac{4(m_{\text{Na}} + m_{\text{Cl}})}{a^3}; \quad a_{\text{NaCl}} = \sqrt[3]{\frac{4(m_{\text{Na}} + m_{\text{Cl}})}{\delta_{\text{NaCl}}}}. \quad (143 \text{ a})$$

Nun ist: $m_{\text{Na}} = A_{\text{Na}} \text{ ME}$, $m_{\text{Cl}} = A_{\text{Cl}} \text{ ME}$, $1 \text{ ME} = 1,661 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, $A_{\text{Na}} = 23,00$, $A_{\text{Cl}} = 35,46$; $\delta_{\text{NaCl}} = 2,16 \text{ g/cm}^3$, woraus

$$a_{\text{NaCl}} = 5,64 \text{ \AA}$$

folgt. Als Bezugsnormale galt bisher der Wert $5,628 \text{ \AA}$, der sich jedoch infolge Neubestimmung der Masseneinheit (s. Zahlentafel I, S. 4) auf $5,642 \text{ \AA}$ erhöht.

Von ähnlicher Beschaffenheit ist die Struktur der früher betrachteten Zinkblende (ZnS). Bei ihr sind jedoch die zwei flächenzentrierten Gitter nicht wie beim Steinsalz um die Hälfte der Würfeldiagonale verschoben, sondern nur um ein Viertel derselben. Es gilt aber auch in diesem Falle sinngemäß dieselbe Gl. (143 a):

$$a_{\text{ZnS}} = \sqrt[3]{\frac{4(m_{\text{Zn}} + m_{\text{S}})}{\delta_{\text{ZnS}}}} = 5,42 \text{ \AA}$$

wenn man

$$\delta_{\text{ZnS}} = 4,06 \text{ g/cm}^3, \quad A_{\text{Zn}} = 65,38, \quad A_{\text{S}} = 32,06$$

berücksichtigt.

γ) Das körperzentrierte kubische Gitter (Abb. 110). Es entsteht aus dem einfachen kubischen Gitter durch Hinzufügung eines um die halbe Raumdiagonale parallel-verschobenen zweiten einfachen kubischen Gitters. Diese Form kommt ebenfalls bei vielen Metallen vor, z. B. bei Eisen von gewöhnlicher Temperatur Fe (α), ferner bei Li, Na, K, Va, Ta, Cr, Mo und W. Wir betrachten wieder einen Elementarwürfel.

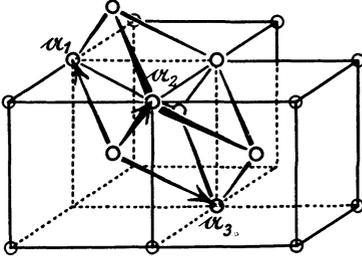


Abb. 110. Körperzentriertes kubisches Gitter (nach Ewald).

Die Pfeile α_1 , α_2 , α_3 bezeichnen die drei Grundverschiebungen, durch die dieses Gitter erzeugt werden kann.

8 Atome in den Ecken zählen
als $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ Atom,

1 Atom in der Mitte zählt
als 1 Atom,

also befinden sich durchschnittlich 2 Atome im Elementarwürfel.
Demgemäß gelten jetzt die Formeln:

$$\delta = \frac{2m}{a^3}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{2m}{\delta}}. \quad (144)$$

So erhält man beispielsweise für die Gitterkonstante des α -Eisens:

$$a_{\text{Fe}(\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{2m_{\text{Fe}}}{\delta_{\text{Fe}(\alpha)}}} = 2,87 \text{ \AA}$$

unter Berücksichtigung der Werte $m_{\text{Fe}} = 55,84 \text{ ME}$,
 $\delta_{\text{Fe}(\alpha)} = 7,865 \text{ g/cm}^3$.

f) Die Beugung am Raumgitter als Reflexion an Netzebenen. Die Lauesche Rechnung für das Raumgitter erscheint als sinn-gemäße Verallgemeinerung der Strich- und Kreuzgitterformeln. Die Beugung an den räumlich gelagerten Atomen kann aber noch anders gedeutet werden. Dieser neue Gesichtspunkt rührt von W. H. und W. L. Bragg (Vater und Sohn) her, die damit auch einen neuen Weg zur Gewinnung von Röntgenspektren fanden. Die Beugung der Röntgenstrahlen kann man in ihrem Sinne als Reflexion an gewissen Ebenen, den sogenannten Netzebenen, auf-

fassen. Es sind dies Ebenen, die jeweils durch unendlich viele Atome des Raumgitters hindurchgehen und deren jede einzelne schon durch 3 Atome bestimmt ist.

Wir gehen von den Laueschen Gl. (137) in der Form aus:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha - \cos \alpha_0 &= \frac{k_1}{a_1} \lambda, \\ \cos \beta - \cos \beta_0 &= \frac{k_2}{a_2} \lambda, \\ \cos \gamma - \cos \gamma_0 &= \frac{k_3}{a_3} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (137 a)$$

Jede Gleichung quadriert, dann alle drei addiert und die Summe der cos-Quadrate gleich 1 gesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cdot (\cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \\ + \cos \gamma \cos \gamma_0) &= \\ &= \lambda^2 \cdot \left(\frac{k_1^2}{a_1^2} + \frac{k_2^2}{a_2^2} + \frac{k_3^2}{a_3^2} \right). \end{aligned}$$

Sind im Raum zwei Strahlen durch ihre Richtungswinkel (α, β, γ) und $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ gegeben, so stellt nach einem elementaren raumgeometrischen Satz

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \\ + \cos \gamma \cos \gamma_0 &= \cos 2 \vartheta \quad (145) \end{aligned}$$

den cos des von den beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels 2ϑ dar (Abb. 111), und wir erhalten weiter:

$$\lambda^2 \cdot \left(\frac{k_1^2}{a_1^2} + \frac{k_2^2}{a_2^2} + \frac{k_3^2}{a_3^2} \right) = 2 - 2 \cos 2 \vartheta = 4 \cdot \sin^2 \vartheta$$

oder

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{k_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{k_3}{a_3} \right)^2}. \quad (146)$$

Die *Symmetrale des Winkels* 2ϑ hat eine besondere Bedeutung; sie kann als *Schnitt der Spiegelebene der beiden Strahlen mit der durch diese hindurch gelegten Ebene* angesehen werden. Die *Beugung* der Röntgenstrahlen kann also auch als *Reflexion an solchen Symmetrieebenen* („*Netzebenen*“) gedeutet werden. Für jeden gebeugten Strahl läßt sich solch eine Ebene angeben. Die Strecke $\sin \vartheta$ steht senkrecht zur Netzebene; also sind $\frac{k_1}{a_1}, \frac{k_2}{a_2}, \frac{k_3}{a_3}$ offenbar pro-

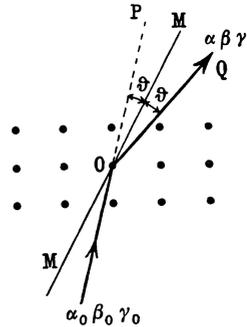


Abb. 111. Reflexion eines Röntgenstrahles an einer Netzebene des Kristalls.

portional den Richtungskosinus des zugehörigen Lotes. Die drei Zahlen k_1, k_2, k_3 bestimmen somit die *Lage der Netzebene* im Kristallgitter. Setzt man

$$k_1 = l h_1, \quad k_2 = l h_2, \quad k_3 = l h_3, \quad (147)$$

wobei das *größte gemeinsame Maß*

$$M(k_1, k_2, k_3) = l, \quad M(h_1, h_2, h_3) = 1 \quad (148)$$

ist, so wird

$$\left(\frac{k_1}{a_1}, \frac{k_2}{a_2}, \frac{k_3}{a_3} \right) = l \cdot \left(\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}, \frac{h_3}{a_3} \right)$$

und

$$\sin \vartheta = \frac{l \lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{h_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{h_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{h_3}{a_3} \right)^2}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (149)$$

Die drei ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3 sind die in der Mineralogie schon längst verwendeten *Millerschen Indizes*. Die Größen $\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}, \frac{h_3}{a_3}$ bestimmen die *Richtung der Normalen* auf die durch die In-

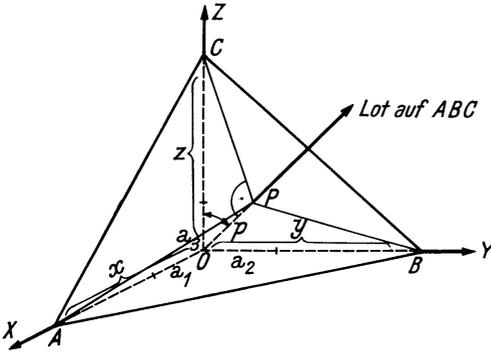


Abb. 112. Achsenabschnitte x, y, z und Lot p einer Netzebene.

izes h_1, h_2, h_3 festgelegte Netzebene.

Die *Millerschen Indizes* sind *verkehrt proportional* den in den bezüglichen Gitterkonstanten gemessenen *Achsenabschnitten* der Netzebene. Dies ist folgendermaßen einzusehen. Wir berechnen das Lot p aus den rechtwinkligen Dreiecken der Abb. 112:

$$p = x \cos(p, x) = y \cos(p, y) = z \cos(p, z);$$

dabei sind die $\cos(p, x), \cos(p, y), \cos(p, z)$ proportional den Größen $\frac{h_1}{a_1}, \frac{h_2}{a_2}, \frac{h_3}{a_3}$. Somit gilt:

$$x \cdot \frac{h_1}{a_1} = y \cdot \frac{h_2}{a_2} = z \cdot \frac{h_3}{a_3}$$

oder:

$$\frac{x}{a_1} : \frac{y}{a_2} : \frac{z}{a_3} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}. \quad (150)$$

Nun kehren wir zur Betrachtung der *Laue-Aufnahmen* zurück. Jeder Interferenzpunkt eines Laue-Bildes kann durch *Reflexion* des eintretenden Primärstrahles an einer bestimmten

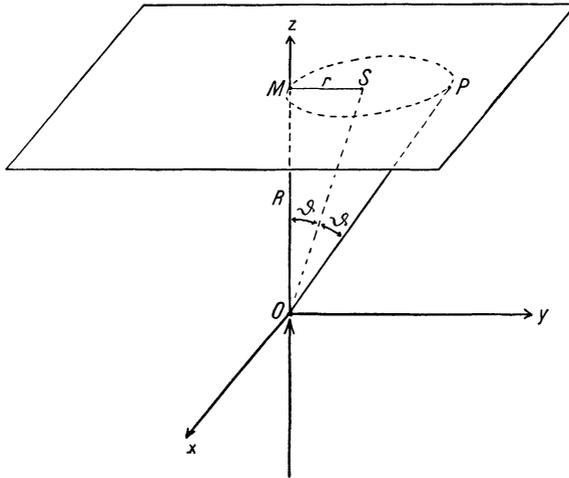


Abb. 116. Entstehung einer „Zonenellipse“ (s. Text).

Netzebene entstanden gedacht werden. Man kann daher jeden *Laue-Punkt* durch jene drei *Miller-Indizes* beziffern, die zur entsprechenden, *reflektierenden Netzebene* gehören (Abb. 115). Alle reflektierten Strahlen, welche von Ebenen zurückgeworfen werden, die als

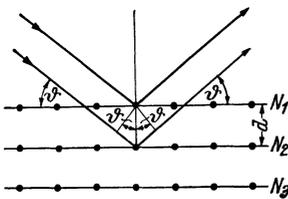


Abb. 117. Reflexion an benachbarten Netzebenen.

gemeinsame Achse („*Zonenachse*“) die *Winkelsymmetrale OS* der Abb. 116 haben, liegen auf einem *Kreiskegel* mit dieser Symmetralen als Achse. Dieser liefert als Schnitt mit der photographischen Platte die „*Zonenellipsen*“ (s. Abb. 116), die näherungs-

weise als *Kreise* („*Zonenkreise*“) dargestellt werden können (Abb. 115).

Zu jeder Netzebene gibt es unendlich viele parallele Netzebenen. Der *Abstand zweier unmittelbar benachbarter, paralleler Netzebenen* sei d (Abb. 117). Damit die von den beiden Nachbar-ebenen reflektierten Strahlen sich durch Interferenz verstärken,

muß ihr Gangunterschied $\overline{BC} + \overline{CD}$ ein ganzzahliges Vielfaches von λ sein: $2d \sin \vartheta = l\lambda, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$ (151)

eine Beziehung, die unter dem Namen „Braggsche Formel“ bekannt ist. Dabei bedeutet ϑ den Winkel („Glanzwinkel“) zwischen Strahl und Netzebene. Ein Vergleich dieser Formel mit der früher erhaltenen Gl. (149) liefert für den *Kehrwert des Netzebenenabstandes* mit den *Müllerschen Indizes* folgenden Zusammenhang:

$$\frac{1}{d} = \sqrt{\left(\frac{h_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{a_3}\right)^2}. \quad (152)$$

Diese Überlegungen bilden die theoretische Grundlage des

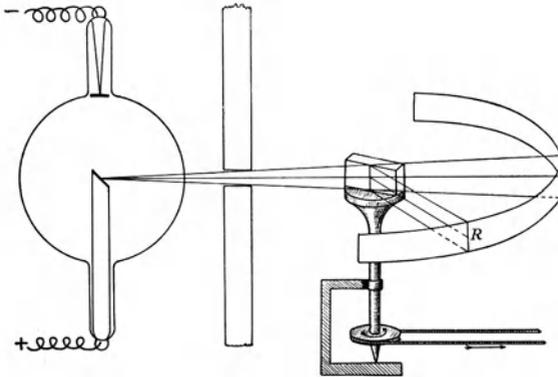


Abb. 118. Drehkristallverfahren von W. H. und W. L. Bragg (nach Ewald).

α) Drehkristallverfahrens von W. H. und W. L. Bragg (1913). Wie Abb. 118 erläutert, fallen die Röntgenstrahlen durch eine Bleibende Bl auf den *drehbar angebrachten Kristall K* und werden an dessen Netzebenen zurückgeworfen. Sie erzeugen dann auf dem zylindrisch angeordneten Film FF' an einzelnen Stellen R scharfe Linien (vgl. Abb. 71 und 119).¹ Ein besonderer Vorzug des Bragg-Verfahrens besteht darin, daß nicht wie beim Laue-Verfahren ein schmales Bündel *paralleler* Röntgenstrahlen verwendet werden muß, sondern daß das Bündel *divergent* sein kann.

¹ Die photographische Methode ist erst durch Herwegh und de Broglie eingeführt worden; W. H. und W. L. Bragg bedienten sich zum Nachweis der Reflexionen an Stelle des Filmes einer *Ionisierungskammer*.

Legt man nämlich das Filmband in einem Kreis um die Drehachse des Kristalls bei O als Mittelpunkt (Abb. 120) so, daß dieser durch den Spalt S hindurchgeht, von dem aus die Strahlung auf den

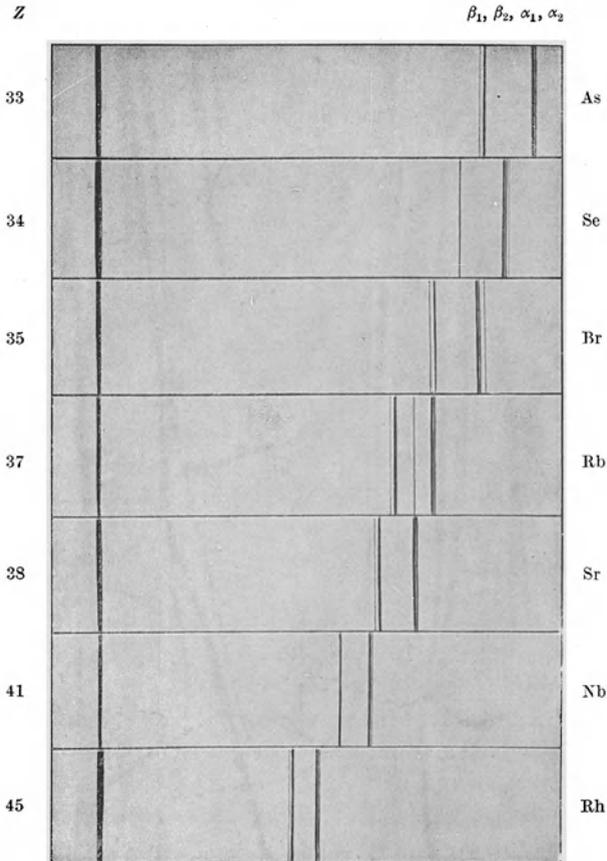


Abb. 119. Die Röntgenlinien der K -Reihe nach M. Siegbahn.

Kristall fällt, so werden *bei Drehung des Kristalls* nach dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel (über demselben Bogen POS) *alle in derselben Ordnung n reflektierten Strahlen gleicher Wellenlänge λ [also gemäß Gl. (151) mit gleichem ϑ] in demselben Punkt P des Films vereinigt (fokussiert)*. Mit der Möglichkeit, ein

divergentes Röntgenstrahlenbündel zu verwenden, ist der weitere große Vorteil gegenüber dem Laue-Verfahren verbunden, daß nicht wie bei diesem nur eine einzige Stelle des Kristalls ausgenützt wird, die unter Umständen gerade fehlerhaft sein kann. Beim *Drehkristall* benützt man nicht nur die Stelle *O*, wo der Mittelstrahl auftrifft, allein, sondern *seine ganze Oberfläche*. Ist irgendwo ein *Kristallfehler*, so *stört er nicht*, da man im Mittel die Gitterbeschaffenheit eines gut ausgebildeten Kristalls wohl als einwandfrei annehmen darf.

Moseley hat seine Aufnahmen der Röntgenspektren (Abb. 71, S. 109) bereits nach diesem Verfahren gemacht. Bei gleichbleibender Versuchsanordnung hat er nur die Antikathode der Röntgenröhre ausgewechselt. Die Genauigkeit seiner ersten Aufnahmen

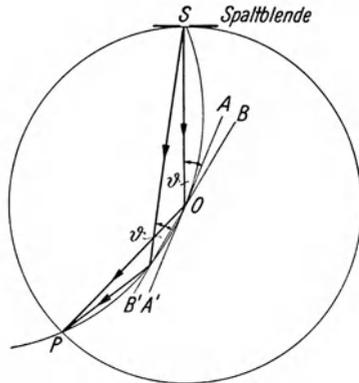


Abb. 120. Fokussierung beim Drehkristallverfahren.

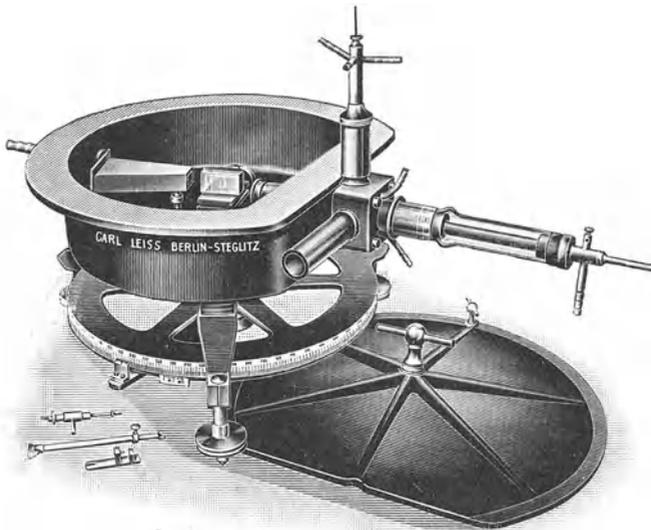


Abb. 121. Vakuumspektrograph (nach Siegbahn) mit angeschlossener Röntgenröhre.

wurde später weit übertroffen durch den *Vakuumspektrographen* von M. Siegbahn (Abb. 121), bei dem *keine Streuung der Röntgenstrahlen* an darin be-

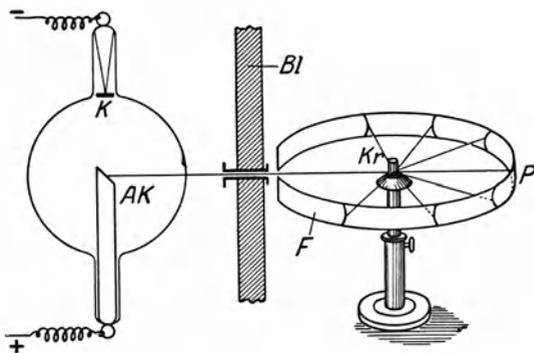


Abb. 122. Kristallpulververfahren von P. Debye und P. Scherrer (nach Ewald).

man den Spalt in Gestalt einer der Kristalloberfläche genäher-

ten *Metallschneide* unmittelbar an den Kristall verlegt, wodurch

nur das in der Um-

gebung der Schneide

befindliche Stück des-

selben zur Reflexion

herangezogen wird

(*Schneidenmethode*

von H. Seemann).

Bei *sehr harter* Rönt-

genstrahlung läßt

man die Strahlen

durch den Kristall

hindurchgehen, wo-

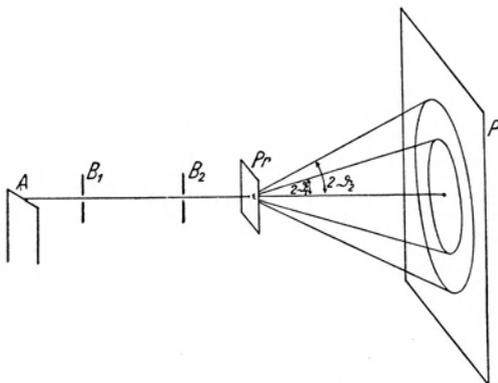


Abb. 123. Entstehung der Debye-Scherrer-Ringe (nach Regler).

A Anode, B_1 , B_2 Blenden, Pr Präparat (mikrokristalline Folie), ψ_1 , ψ_2 Beugungswinkel an verschiedenen Netzebenen, P photographische Platte.

Bei *sehr harter* Röntgenstrahlung läßt man die Strahlen durch den Kristall *hindurchgehen*, wobei sie an inneren Netzebenen reflektiert werden. Um scharf bestimmte Reflexionswinkel zu erhalten, muß in diesem Falle der Spalt *hinter* dem Kristall angebracht werden (*Durchstrahlungsmethode* von Rutherford und Andrade).

Eine andere Form der Drehkristallmethode ist

β) das Kristallpulververfahren von P. Debye und P. Scherrer (1916). Statt einen gut ausgebildeten Kristall zu verwenden, preßten Debye und Scherrer *sehr feines Kristallpulver* zu einem *dünnen zylindrischen Stäbchen* (Kr in Abb. 122). An die Stelle des Stäbchens kann auch eine sehr dünne, mikrokristalline *Metallfolie* treten, die von dem Röntgenstrahl durchsetzt wird (Abb. 123). Damit sind von vornherein alle möglichen Stellungen einer bestimmten Kristallfläche vorhanden. Während jedoch beim Braggschen Verfahren die gedrehte Kristallfläche lotrecht bleibt, ist hier *jede räumliche Stellung* möglich. Es wird also jede Fläche, die mit dem einfallenden Strahl den zugehörigen Winkel ϑ bildet, zur Reflexion herangezogen. Die reflektierten Strahlen liegen somit auf einem *Kreiskegel* mit dem Öffnungswinkel 4ϑ , dessen Scheitel ein Punkt des Kristallstäbchens bzw. der Metallfolie und dessen Achse der einfallende Strahl bildet (Abb. 123). Jeder Wellenlänge λ und jeder Ordnung l

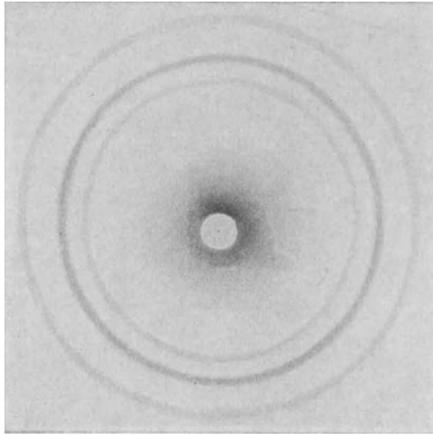


Abb. 124. Beugung von $\text{Cu-K}\alpha$ -Strahlung an ungeordnetem, feinkörnigem Al-Pulver (nach Regler).

entspricht gemäß Gl. (151) ein solcher (noch von der Art der reflektierenden Netzebenen abhängiger) Kegel. Als *Schnitte dieser Kegel* mit einer zum einfallenden Strahl senkrechten Platte ergeben sich Kreise (Abb. 154), mit dem *Filmzylinder* der Abb. 122 dagegen *gekrümmte Linien*, denen entlang der Film geschwärzt wird. Das in die Ebene abgewickelte Filmband einer Debye-Scherrer-Aufnahme zeigt Abb. 125. Die Röntgenlinien zeigen nur dort einen *geraden Verlauf*, wo der *Reflexionskegel* zu einer *Ebene* ausartet, d. i. bei einer Ablenkung unter 90° (bei $\vartheta = 45^\circ$). Eine Spielart der Debye-Scherrer-Methode stellt das *Kegel-Rückstrahlverfahren* von F. Regler dar, bei dem an die Stelle

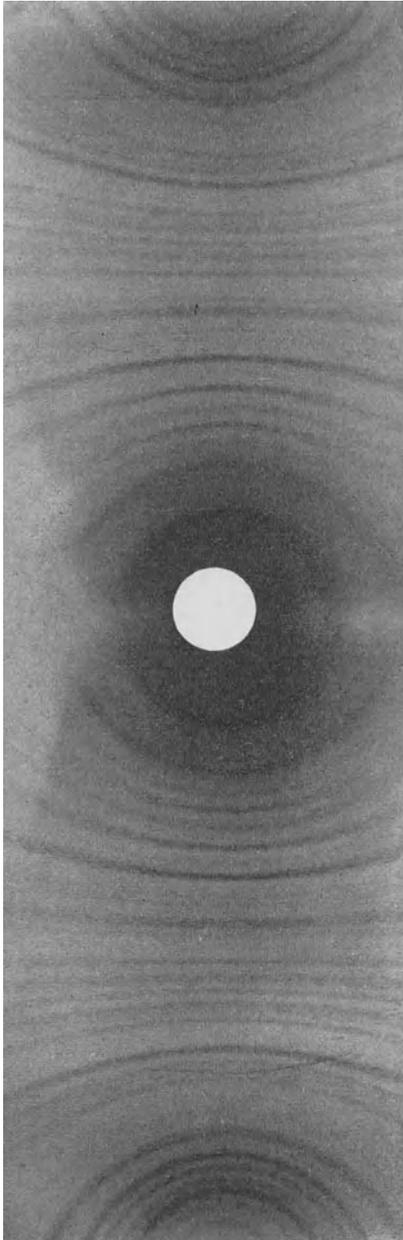


Abb. 125. Beugung von Röntgenstrahlen an Quarzpulver. Aufnahme von P. Scherrer.

des zylindrischen Film-
bandes ein zu einem
Kegelmantel geboge-
ner Film tritt, dessen
Achse mit der Achse
der Kegel der gebeug-
ten Strahlen zusam-
menfällt. Die aufge-
zeichneten Linien er-
scheinen so als Schnitte
zweier koaxialer Ke-
gel in Kreisform und
bilden konzentrische
Kreisbogenstücke auf
dem in die Ebene ab-
gewickelten Filmkegel.

Während beim
Bragg-Verfahren die
Zuordnung der Rönt-
genwellenlängen λ und
ihrer Beugungswinkel
 ϑ zu den reflektieren-
den Netzebenen von
vornherein klar ist,
hat man bei der Me-
thode von Debye und
Scherrer ebenso wie
bei der von Laue hier-
über *keine* unmittel-
bare Kenntnis. Jeder

Strukturbestimmung
muß also hier wie
dort erst eine *Deutung*
der Bilder *vorausgehen*.
Dagegen ist das *Kri-
stallpulververfahren*
praktisch *von Kristall-
fehlern unabhängig*.

C. Elektronen als Wellen.

Daß auch *Elektronen Welleneigenschaften* zeigen können, erwiesen die *Interferenzversuche von Davisson und Germer*.

Davisson und Germer untersuchten 1927, nachdem bereits Versuche ähnlicher Art (Davisson und Kunsman, 1923) vorausgegangen waren, die Zurückwerfung von Elektronen an einem *Nickel-Einkristall* mit Hilfe einer schwenkbaren *Ionisationskammer K* (Abb. 126). Solange man die Elektronen als Teilchen auffaßt, muß man erwarten, daß jeder einfallende Strahl nach dem mechanischen Reflexionsgesetz zurückgeworfen wird. Davisson und Germer fanden aber, daß die Elektronen (selbst bei *senkrechtem Einfall*) auch unter *anderen Winkeln* zurückgeworfen werden. Man konnte bevorzugte, mit der Ge-

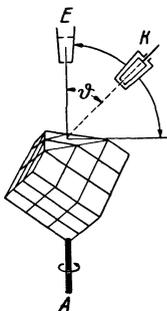


Abb. 126. Elektronenreflexion an einer Oktaederfläche (111) bei senkrechtem Einfall.

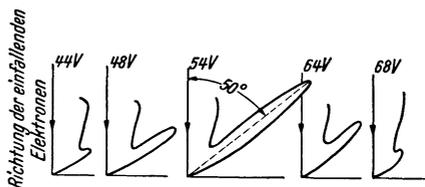


Abb. 127. Polardiagramme der von einer Ni-Einkristallfläche (111) zurückgestrahlten Elektronenmenge bei verschiedener Einfallsgeschwindigkeit (gemessen durch die Voltzahl der beschleunigenden Spannung).

schwindigkeit der auftreffenden Elektronen veränderliche Richtungen feststellen (Abb. 127). Es schien sich also um einen ähnlichen Vorgang zu handeln wie bei der *Beugung der Röntgenstrahlen*. Man hat daher an Stelle der Elektronen Röntgenstrahlen auf denselben Kristall fallen gelassen und die erhaltenen Beugungserscheinungen miteinander verglichen. Es zeigte sich, wie unten näher erläutert wird, eine *eindeutige Zuordnung* möglich, und dieser Umstand bestätigt die zuerst von W. Elsasser (1925) vermutete *Wellennatur der Elektronen*.

Schon 1924 hatte L. de Broglie vorgeschlagen, *jedes materielle Teilchen* von der *Masse m* mit einer *Wellenbewegung* einer bestimmten *Frequenz nu* verknüpft zu denken derart, daß

$$m c^2 = h \nu \quad (153)$$

ist, wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und h das Planck'sche Wirkungsquantum bedeutet. Gl. (153) ist somit eine Verallgemeinerung der Photonengleichung (19) auf *beliebige* Teilchen. Auf diesen Gedanken soll im III. Teil dieser Schrift näher eingegangen werden. Zu jedem Massenteilchen gehört also eine bestimmte Frequenz ν und damit auch eine bestimmte Wellenlänge λ , die, wie später (s. S. 182f.) begründet werden wird, außer von der Masse m auch noch von seiner Geschwindigkeit v abhängt:

$$\lambda = \frac{h}{m v} \quad (154)$$

(die de Brogliesche Wellenlänge). Davisson und Germer vermuteten zunächst, daß in diesem Sinne *gleichwellige Röntgen- und Elektronenstrahlen* auch *gleich reflektiert* werden müßten. Das war aber nicht der Fall. Um die Geschwindigkeit und damit die Wellenlänge der Elektronen zu bestimmen, bediente man sich des bekannten Zusammenhanges zwischen kinetischer Energie und angelegter Spannung U :

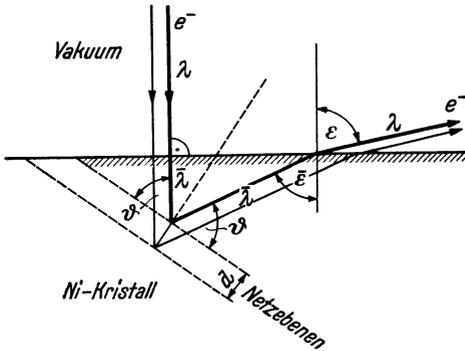


Abb. 128. Reflexion eines senkrecht einfallenden Elektronenstrahles an den Netzebenen eines Kristalls und Brechung des Strahles beim Austritt.

$$\frac{m v^2}{2} = e \cdot U. \quad (4)$$

(Bei größeren Geschwindigkeiten muß relativistisch nach Gl. (6) gerechnet werden.)

Daß die *Beugungserscheinungen* zwar ganz analog, aber durchaus *nicht gleich* waren, bedeutete zunächst eine große Schwierigkeit. Man wiederholte die Versuche und fand schließlich die folgende Erklärung. Um Theorie und Experiment in Einklang zu bringen, muß die *Wellenlänge* $\bar{\lambda}$ der *Elektronen im Kristall* eine *andere* sein als jene λ *außerhalb* desselben. Fällt ein Elektronenstrahl von der Wellenlänge λ senkrecht auf den Kristall (Abb. 128), so ändert sich zwar nicht seine Richtung, wohl aber seine Wellenlänge. Für die *Reflexion an einer Netzebene* des Kri-

stalls gemäß der Braggschen Gl. (151) kommt nicht λ , sondern $\bar{\lambda}$ in Betracht:

$$2d \cdot \sin \vartheta = l \bar{\lambda}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Beim *Austritt* aus dem Kristall erhält der reflektierte Elektronenstrahl wieder die *ursprüngliche* Wellenlänge λ , wird also *gebrochen*. Im Gegensatz hierzu ist für die Röntgenstrahlen die Brechung ganz verschwindend klein (s. die Fußnote auf S. 179). Es gibt also zu jeder Wellenlänge λ der Elektronen eine entsprechende Wellenlänge $\bar{\lambda}$ der Röntgenstrahlen, die mit der Elektronenwellenlänge *im* Kristall übereinstimmt. Damit kann der *Brechungsquotient* \bar{n} der *Elektronen* bestimmt werden (Abb. 128):

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \bar{\varepsilon}}. \quad (155)$$

Wenn man die de Brogliesche *Theorie* auf den Brechungsvorgang anwendet (s. S. 185 ff.), muß für den Brechungsquotienten auch die Beziehung gelten:

$$\bar{n} = \sqrt{1 - \frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}}, \quad (156)$$

wobei E_{pot} die *potentielle* Energie der Elektronen *im Kristall*, E_{kin} die *kinetische* Energie derselben bedeutet, mit der sie *auf den Kristall treffen*. Der Versuch gibt also Rechenschaft über die potentielle Energie, der ein Elektron im Kristall unterworfen ist. Weil diese nur vom Kristall (insbesondere von seinem Gitterbau) abhängen kann, muß sich bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Elektronen im Mittel immer dasselbe *Gitterpotential* ergeben. Die folgende Zahlentafel 19 gibt Aufschluß über Ver-

Zahlentafel 19.

E_{kin} (eV)	λ (Å)	$\bar{\lambda}$ (Å)	$\bar{n} > 1$	E_{pot} von Ni (eV)
54	1,67	1,47	1,12	— 13
106	1,19	1,13	1,06	— 11,5
160	0,97	0,92	1,05	— 14
189	0,89	0,85	1,04	— 15
310	0,70	0,68	1,03	— 16
370	0,64	0,62	1,03	— 25
				im Mittel: — 15 eV

Zahlentafel 20.

	E_{pot} (eV)
Ni ...	— 15
Fe ...	— 14
Cu ...	— 13,5
Ag ..	— 14
Al ...	— 17
Zn ...	— 16
Au ...	— 14

suche an einem *Ni-Einkristall*, der senkrecht zu einer Oktaederfläche (111) mit Elektronen bestrahlt wurde.

Zahlentafel 20 zeigt, daß die *Gitterpotentiale* der verschiedenen *Metalle* zwischen 10 und 20 Volt liegen. Für *nichtleitende* Kristalle ergeben sich Brechungsquotienten $n < 1$, also $E_{\text{pot}} > 0$.

Dieser Vorgang, bei dem der Elektronenstrahl *senkrecht* auf den Kristall trifft,

entspricht im wesentlichen dem bei Röntgenstrahlen erläuterten Laueschen Verfahren (s. S. 155 ff.). Es gibt aber auch ein Analogon zur Braggschen Methode (s. S. 167 ff.) mit *schräg* einfallenden Elektronenstrahlen, dessen sich besonders E. Rupp bedient hat (Abb. 129). Infolge der im Kristall eintretenden *Brechung* muß die den Reflexionsvorgang beschreibende Braggsche Gl. (151) *abgeändert* werden, wie dies aus Abb. 130

hervorgeht.

Der *Gangunterschied* zwischen dem an der Oberfläche und dem an der ersten parallelen Netzebene reflektierten Elektronenstrahl beträgt unter Berücksichtigung der Brechung des letzteren und Umrechnung von dessen

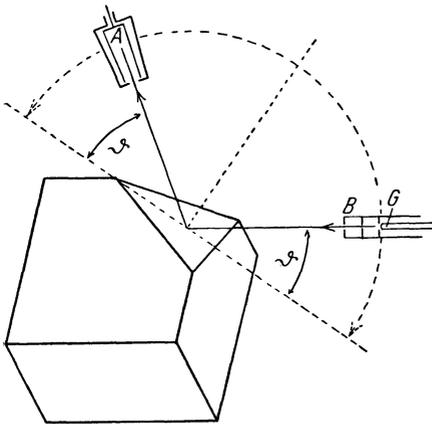


Abb. 129. Elektronenbeugung nach dem Bragg-Verfahren (nach Regler).

G Glühfaden (Elektronenquelle), B Blende, A Auffänger (Ionisationskammer).

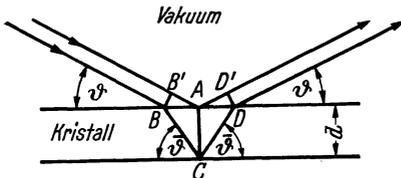


Abb. 130. Elektronenreflexion mit Brechung.

Weg im Kristall auf einen *optisch gleichwertigen* Weg außerhalb des Kristalls (durch Multiplikation mit dem Brechungsquotienten n):

$$\begin{aligned}\delta &= 2(n \overline{BC} - \overline{AB'}) = 2 \left(\frac{nd}{\sin \vartheta} - \overline{AB} \cos \vartheta \right) = \\ &= 2d \left(\frac{n}{\sin \vartheta} - \cotg \vartheta \cos \vartheta \right) = \frac{2d}{\sin \vartheta} \cdot (n - \cos \vartheta \cos \vartheta).\end{aligned}$$

Wegen des Brechungsgesetzes, das jetzt die Form

$$\frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta} = n$$

annimmt, ist

$$\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{n^2}}$$

und

$$n - \cos \vartheta \cos \vartheta = n - \frac{\cos^2 \vartheta}{n} = n \left(1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{n^2} \right).$$

Wir erhalten daher weiter

$$\delta = 2dn \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{n^2}} = 2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \vartheta}.$$

Um *Interferenzmaxima* zu bekommen, muß wie früher

$$\delta = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

werden; dies ergibt im Vereine mit der vorhergehenden Gleichung die gesuchte *Abänderung* der Bragg'schen Gl. (151):

$$2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \vartheta} = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (157)$$

aus der

$$n = \sqrt{\frac{k^2 \lambda^2}{4d^2} + \cos^2 \vartheta} \quad (157a)$$

folgt. Es ist somit wiederum der *Brechungsquotient* n bestimmbar und mit Hilfe von Gl. (156) können die *Gitterpotentiale* berechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{k^2 \lambda^2}{4d^2} + \cos^2 \vartheta &= 1 - \frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}, \\ -E_{\text{pot}} &= \left(\frac{k^2 \lambda^2}{4d^2} - \sin^2 \vartheta \right) \cdot E_{\text{kin}}\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = eU \quad (4)$$

und

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{m^2 v^2} = \frac{h^2}{2meU} \quad (154a)$$

erhalten wir schließlich

$$-E_{\text{pot}} = \left(\frac{k^2}{4d^2} \cdot \frac{h^2}{2meU} - \sin^2 \vartheta \right) \cdot eU = \frac{k^2 h^2}{8md^2} - eU \sin^2 \vartheta; \quad (157b)$$

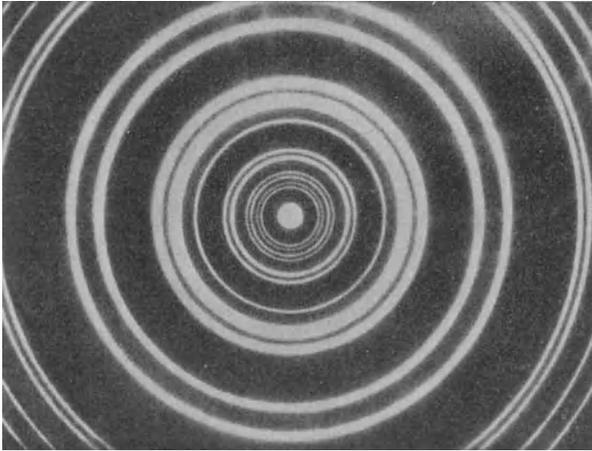


Abb. 131. Elektronenbeugung durch eine Goldfolie. Debye-Scherrer-Aufnahme von E. Rupp.

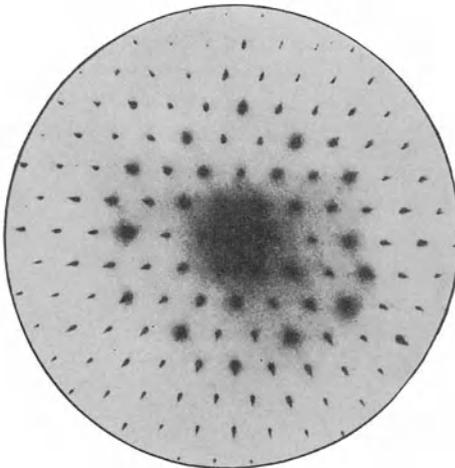


Abb. 132. Elektronenbeugung durch eine dünne Glimmerfolie bei einer Spannung von 45 kV.

hierin bezeichnet d den Abstand der beugenden Netzebenen, ϑ den zugehörigen, von dem Ordnungsgrad k abhängigen Glanzwinkel und U die (in absoluten Einheiten gemessene) die Elektronen beschleunigende Spannung.

Zusammenfassend kann man sagen, daß sich die Erscheinung der Elektronenbeugung nur durch die Annahme erklären läßt, daß sich *Elektronenstrahlen* wie *Wellenstrahlen* verhalten

und wie solche auch *gebrochen* werden. Bei Steigerung der Geschwindigkeit der Elektronen nähert sich der Brechungsquotient immer mehr dem Werte 1; d. h. *hochgeschwinde Elek-*

tronen zeigen ähnlich wie die Röntgenstrahlen¹ praktisch keine Brechung mehr.

Auch mit raschen Elektronenstrahlen ($E_{\text{kin}} = 17,5$ bis $61,2$ ekV) hat man Beugungsversuche angestellt, indem man sie durch mikrokristalline Folien aus Au, Ag, Al von 10^{-6} bis 10^{-7} cm Dicke hindurchschickte (G. P. Thomson, 1927; E. Rupp u. a.). Es ergeben sich Beugungskreise; wie bei dem Debye-Scherrer-Verfahren (s. S. 170 f.) liegen die gebeugten Strahlen auf Kegelflächen, die eine hinter der Folie senkrecht zum Primärstrahl angebrachte photographische Platte in Kreisen schneiden (Abb. 131). Abb. 132 zeigt die Elektronenbeugung durch eine dünne Glimmerfolie. Es entstehen abweichend von den Laue-Bildern zahlreiche Punkte, die äquidistant sind. Somit kann es sich um keine durch das Raumgitter des Glimmers entstandenen Beugungsbilder handeln; vielmehr scheint auf die Elektronen nur eine Atomschicht der Glimmerfolie wie ein Kreuzgitter zu wirken.

III. Die Vereinigung des Teilchen- und Wellenbildes in der Wellen- (Quanten-) Mechanik.

A. Die de Brogliesche Gleichung.

Der letzte Teil dieser Schrift hat die Vereinigung der beiden ersten zum Ziele. Die Gegensätze des Teilchen- und Wellenbildes sollen sich in Harmonie auflösen. Die zuletzt erläuterte Wellennatur der sonst als Massenteilchen erscheinenden Elektronen wurde auch an Protonen beobachtet. Es gibt also Fälle, in denen die Elementarteilchen als Partikel aufzufassen sind, und daneben solche, in denen diese Vorstellung versagt, wie z. B. bei der Beugung der Elektronen und Protonen an Kristallgittern. Zugleich erinnern wir uns, daß diese Doppelnatur am Licht schon früher erkannt worden ist, das bald als Welle (s. S. 147 ff.), bald als massebegabtes Teilchen (Lichtquantum, s. S. 21 ff.) auftritt. Wir wollen

¹ Röntgenstrahlen besitzen einen Brechungsquotienten, der nur um ein geringes kleiner als 1 ist; so ist z. B. für die Eisenlinie K_{α} = $1,933 \text{ \AA}$ der Brechungsquotient in Glas $n = 1 - 12,38 \cdot 10^{-6}$.

zunächst beim *Licht* die miteinander in Widerspruch scheinenden Auffassungen in Einklang zu bringen versuchen.

Zu diesem Behufe betrachten wir

1. die Lichtbrechung vom wellenmechanischen Standpunkt.

Die Newtonsche *Emissionstheorie* hat man sehr bald verlassen und sich der Huygensschen *Wellentheorie* zugewendet, weil man *erstere* zur Erklärung der Beugungserscheinungen für ungeeignet und darum für *falsch* hielt. Wir wissen aber heute, daß das Licht auch Erscheinungen zeigt, z. B. den *Photo- und Compton-Effekt*, in denen es unzweifelhaft *korpuskular* erscheint. Also kann der Versuch, schon bei der Erklärung der *Lichtbrechung* eine *Vereinigung der beiden Vorstellungen* herbeizuführen, keineswegs aussichtslos sein. Wir untersuchen den Brechungsvorgang nach beiden Gesichtspunkten.¹

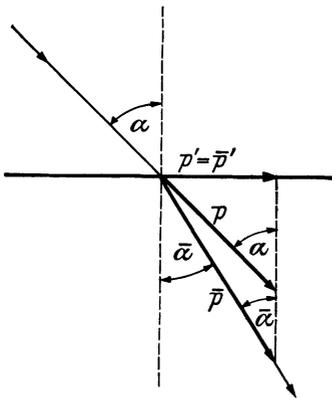


Abb. 133. Lichtbrechung nach der Emissionstheorie.

a) **Die Lichtbrechung nach der Emissionstheorie.** Wir denken uns ein in einem Strahle bewegtes *Lichtteilchen*. Seine Reflexion an einer Grenzfläche erfolgt ebenso wie die Zurück-

werfung einer Billardkugel. Seine *Bewegungsgröße* wird beim Rückprall genau so groß, nur anders gerichtet sein wie beim Auftreffen: Während die *Normalkomponente* ihre Richtung umkehrt, bleibt die *Tangentialkomponente ungeändert*. Das letztere müssen wir auch beim Vorgange der *Brechung* erwarten (Abb. 133). Bezeichnen wir mit

$$p = m v \text{ bzw. } \bar{p} = \bar{m} \bar{v} \quad (158)$$

die *Bewegungsgrößen (Impulse)* in den beiden Medien, so müssen deren Komponenten in der Wandrichtung gleich sein:

$$p' = \bar{p}' \text{ oder } p \cdot \sin \alpha = \bar{p} \cdot \sin \bar{\alpha}. \quad (159)$$

¹ L. Flamm: Die neue Mechanik. Naturwiss. 15, 569 (1927).

Für den *Brechungsquotienten* fand Snell 1618 das nach ihm benannte *Brechungsgesetz*:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \bar{\alpha}} = \text{konst.}; \quad (160)$$

somit folgt:

$$n = \frac{\bar{p}}{p} = \frac{\bar{m} \bar{v}}{m v} = \text{konst.} \quad (161)$$

Der Brechungsquotient stellt sich also als das Verhältnis der Bewegungsgrößen \bar{p} und p in den beiden Medien dar, das für alle Einfallrichtungen *konstant* ist. Bei der *Brechung zum Lot* ist insbesondere $n > 1$, die Bewegungsgröße \bar{p} im zweiten Medium also größer als diejenige p im ersten:

$$\bar{p} > p, \quad \bar{m} \bar{v} > m v.$$

Wir haben in Gl. (158) nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern *auch die Massen* in beiden Medien *verschieden* bezeichnet. Solange man zur Annahme geneigt war, daß die *Masse* des Lichtteilchens *unveränderlich* sei:

$$\bar{m} = m,$$

war der Schluß unvermeidlich, daß bei der Brechung *zum Lot* ($n > 1$) die Geschwindigkeit *größer* wird:

$$\bar{v} > v.$$

Dies steht aber *im Widerspruch mit der Erfahrung*, die eine *kleinere* Geschwindigkeit ergibt. Also, schloß man, ist die *Emissionstheorie falsch*. Es ist jedoch im Sinne der relativistischen Mechanik zu erwarten, daß die Masse des Lichtteilchens, wenn es in den Bereich anderer Massenteilchen kommt, zunimmt; läßt man aber einen Massenzuwachs zu, so kann man hinsichtlich der Geschwindigkeit nicht mehr den erwähnten, der Erfahrung widersprechenden Schluß ziehen.

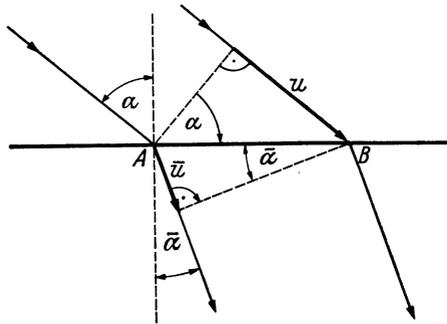


Abb. 134. Lichtbrechung nach der Wellentheorie.

b) Die Lichtbrechung nach der Wellentheorie. Bezeichnen wir unter Zugrundelegung der bekannten wellentheoretischen

Darstellung (Abb. 134) die Wellengeschwindigkeiten in den beiden Medien mit u bzw. \bar{u} , so gilt:

$$\overline{AB} = \frac{u}{\sin \alpha} = \frac{\bar{u}}{\sin \alpha}, \quad (162)$$

woraus das *Brechungsgesetz* in der Form folgt:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{u}{\bar{u}}. \quad (163)$$

Für die *Brechung zum Lot* ($n > 1$) erhalten wir jetzt:

$$u > \bar{u},$$

d. h. die *Geschwindigkeit \bar{u} im zweiten Medium muß kleiner sein* als diejenige u im ersten. Damit erscheint die *Wellentheorie* unmittelbar *im Einklang mit der Erfahrung*, was ihre Bevorzugung gegenüber der Emissionstheorie verständlich macht.

Nach heutiger Auffassung müssen *beide Theorien verträglich* sein; wir wollen daher die *Vereinigung beider* im Falle der *Lichtbrechung* versuchen.

c) Die Vereinigung der Darstellungen a und b. Die Geschwindigkeiten u und v wollen wir allgemein als voneinander verschieden betrachten, d. h. die Lichtteilchen sollen im allgemeinen mit einer von der Geschwindigkeit u der Welle verschiedenen Geschwindigkeit v laufen. Genauer gesagt, wollen wir uns die Welle, die wir uns mit dem Teilchen verknüpft denken, als *modulierte Trägerwelle* vorstellen, bei der die *Modulation* als *Inbegriff der Energie (Masse)* mit *anderer* Geschwindigkeit v fortschreitet als die Geschwindigkeit u der *Trägerwelle*. Wir nehmen damit für das Licht eine Vorstellung vorweg, die de Broglie als das Wesen jeglicher Materiewelle erkannt hat (s. den folgenden Abschnitt). Die Gleichsetzung der für den Brechungsquotienten n unter a und b erhaltenen Ausdrücke führt zu dem Ergebnis:

$$n = \frac{\bar{m} \bar{v}}{m v} = \frac{u}{\bar{u}}$$

oder

$$m v u = \bar{m} \bar{v} \bar{u} = \text{konst.} \quad (164)$$

Das *Produkt* aus *Masse, Teilchengeschwindigkeit* und *Wellengeschwindigkeit* ist somit von der Natur des Mediums unabhängig, ist eine *Konstante*. Anders geschrieben:

$$p u = \bar{p} \bar{u} = \text{konst.} \quad (164a)$$

Das Produkt: *Bewegungsgröße* mal *Wellengeschwindigkeit* ist *konstant*. Dies ist ein ganz neuartiges Ergebnis, eine spezifische Gleichung der *Wellenmechanik*.

Wir versuchen nun die

2. Verallgemeinerung auf ein beliebiges Massenteilchen. Begriff der Materiewelle.

Aus dem optischen Beispiel können wir ersehen, wie die Verallgemeinerung des Wellenbegriffes *auf beliebige Massenteilchen* zu erfolgen hat. Das *Licht* muß ja als *Sonderfall* erscheinen. Was bedeutet nun für das Licht $p \cdot u$? Das erkennen wir am besten, wenn wir, wie dies im Vakuum der Fall sein muß, $u = v = c$ setzen. Die Bewegungsgröße ist dann (s. S. 22) $p = m v = m c$; also bedeutet

$$p u = m c^2 = E_\nu = h \nu$$

die *Energie des Photons*.

Nach dem Vorgange von Louis de Broglie (1924) kennzeichnen wir nun *jedes materielle* Teilchen durch folgende Eigenschaften:

1. Seine *Energie* E^* [siehe S. 195, Gl. (196)] sei gleich der eines Planckschen *Energiequantums* $h \nu$:

womit wir
$$E^* = h \nu, \tag{165}$$

2. die Vorstellung einer zugeordneten „*Materiewelle*“ mit der „*de Broglie-Wellenlänge*“

verbinden.
$$\lambda = \frac{u}{\nu} \tag{166}$$

3. Soll *ganz allgemein* die Beziehung:

$$p u = E^* \tag{167}$$

gelten, die die gesuchte Verallgemeinerung von Gl. (164) darstellt. Durch Zusammenfassung der erhaltenen drei Gleichungen ergibt sich die „*de Brogliesche Gleichung*“:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{168}$$

die eine *unmittelbare Verallgemeinerung* der *Photonengleichung* (19₂) darstellt.

Neben diesen „*wellenmechanischen*“ Beziehungen bestehen unverändert die „*mechanischen*“:

$$E^* = m c^2 + E_{\text{pot}} \tag{169}$$

bei Vorhandensein eines *Feldes konservativer Kräfte*,¹ denen das Massenteilchen unterworfen ist, ferner

$$p = m v. \quad (170)$$

Wir wollen insbesondere den Fall betrachten, daß *kein Feld* vorhanden ist:

$$E_{\text{pot}} = 0.$$

Dann wird $p u = m v u = m c^2$, also

$$v u = c^2 \quad \text{oder} \quad u = \frac{c^2}{v}. \quad (171)$$

Das ist zunächst ein sehr merkwürdiges Ergebnis. Da nach der *Relativitätstheorie* die Teilchengeschwindigkeit $v < c$ sein muß, so folgt für die Wellengeschwindigkeit: $u > c$. Dies scheint allerdings bedenklich. Man kann aber nur die *Teilchengeschwindigkeit* v *wirklich messen*. Die *Wellengeschwindigkeit* u ist tatsächlich nur eine *Rechengröße*. Die Relativitätstheorie behauptet nur, daß jede physikalisch meßbare Geschwindigkeit, die also notwendig mit dem Transport von Materie (Energie) verbunden ist, kleiner als c sein muß. Andere Geschwindigkeiten, die nicht mit Energietransport verknüpft sind, die sich also auch dem physikalischen Experiment entziehen, unterliegen *nicht* dieser Vorschrift.

3. Anwendungen des Materiewellenbildes.

a) **Das ideale Gas.** Wir nehmen als Beispiel *Wasserstoff* (H_2). Die Teilchenmasse beträgt in diesem Falle $m \approx 3 \cdot 10^{-24}$ g, die thermische Geschwindigkeit bei 0°C $v \approx 2 \cdot 10^5$ cm/sec (nach der kinetischen Gastheorie). Wir berechnen nach Gl. (168) und Gl. (170) die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6,62 \cdot 10^{-27}}{3 \cdot 10^{-24} \cdot 2 \cdot 10^5} \approx 10^{-8} \text{ cm.}$$

Dieser Wert stimmt mit der Größe des *Atomdurchmessers* überein. Erwin Schrödinger hat dieses Ergebnis in das richtige Licht gerückt: So wie wir in der Optik, wenn die Gitterkonstante der Wellenlänge des Lichtes nahekommt, nicht mehr die *Strahlenoptik* anwenden können, sondern uns der *Wellenoptik* bedienen

¹ D. s. solche, die sich aus einem *Potential* ableiten (als „*Gradienten*“ eines *Potentials* darstellen) lassen, wie z. B. die *elastischen Kräfte*, die *Schwerkraft* oder die *Coulombsche Kraft*.

müssen, ebenso dürfen wir auf die Atome nicht mehr unsere *gewöhnliche* Mechanik, die wir vergleichsweise *Strahlenmechanik* nennen können, anwenden; denn die *Atomdimensionen* sind von der Größe der *Materiewellenlängen* der Atome. Wir brauchen an Stelle dieser *Strahlenmechanik* eine *neue* Mechanik. L. de Broglie und E. Schrödinger haben sie aufgebaut: die *Wellenmechanik*.

b) **Das Bohrsche Wasserstoffatom.** Das kreisende Elektron hat infolge seines Impulses $p = m v$ im Sinne de Broglies die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m v}$. Seine *Materiewelle* kommt entlang der Kreisbahn *mit sich selbst zur Interferenz* (Abb. 135). Auslöschung darf nicht eintreten; denn diese käme einem Verschwinden des Elektrons gleich. Also sind nur solche Bahnen möglich, deren Längen $2 \pi a$ *ganzzahlige Vielfache* der de Broglie-Wellenlänge λ sind:

$$\frac{2 \pi a}{\lambda} = n = 1, 2, 3, \dots \quad (172)$$

Das sind die *strahlungsfreien Bahnen* von Bohr. Setzt man den Wert von λ nach Gl. (168) ein, so erhält man die *Quantenbedingung*, die Bohr durch eine glückliche Zusatzannahme aufgefunden hat, sofort als Folge des Materiewellenbildes:

$$2 \pi a m v = n h, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

c) **Die Brechung einer Materiewelle bei der Elektronenbeugung.**¹ Die *Deutung der Versuche* von Davisson und Germer (s. S. 173 ff.) gelingt durch die folgende Überlegung. Das im Vakuum durch eine bestimmte Spannung beschleunigte Elektron erreicht den Kristall mit einer gewissen Geschwindigkeit v und besitzt, als *Materiewelle* aufgefaßt, die Masse

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5)$$

¹ H. Bauer: Über Zerstreung und Brechung der Materiewellen. Physikal. Ztschr. **30**, 139 (1929).

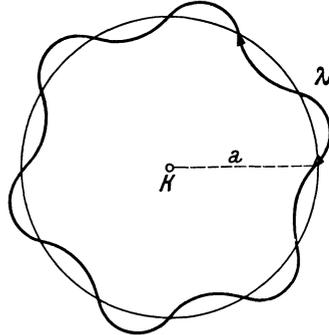


Abb. 135. Wellenmechanisches Bild des Wasserstoffatoms.

die Energie

$$E^* = m c^2 = h \nu \quad (165), (169)$$

(im Vakuum $E_{\text{pot}} = 0$) und die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{m v}. \quad (168)$$

Tritt das Teilchen in den *Kristall* (z. B. Ni) ein, so ändert sich unter dem Einfluß der *Kristallgitterkräfte* seine Geschwindigkeit (\bar{v}) und damit auch seine Masse:

$$\bar{m} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}} \quad (5)$$

und seine de Broglie-Wellenlänge

$$\bar{\lambda} = \frac{h}{\bar{m} \bar{v}}. \quad (168)$$

Seine im Gesamtbetrag unveränderte Energie $h \nu$ stellt sich nun folgendermaßen dar:

$$E^* = h \nu = \bar{m} c^2 + E_{\text{pot}}, \quad (165), (169)$$

wobei E_{pot} die *potentielle Energie* des Elektrons im *Kristallgitter* bedeutet.

Wir suchen eine Formel für den *Brechungsquotienten*

$$n = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{m} \bar{v}}{m v}. \quad (156), (161)$$

Unter der Voraussetzung *langsamer* Elektronen ($v, \bar{v} \ll c$) berechnen wir zunächst

$$\frac{\bar{m}}{m} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{2c^2}\right). \quad (173)$$

Bei Beschränkung auf Glieder *erster* Ordnung ist also

$$\frac{\bar{m}}{m} \approx 1 + \frac{\bar{v}^2 - v^2}{2c^2}. \quad (173 \text{ a})$$

$\frac{\bar{m}}{m}$ kann man aber auch aus der *Energiegleichung* $m c^2 = \bar{m} c^2 + E_{\text{pot}}$ berechnen:

$$\frac{\bar{m}}{m} = 1 - \frac{E_{\text{pot}}}{m c^2}. \quad (174)$$

Durch Vergleich der Gl. (173a) und Gl. (174) ergibt sich:

$$-\frac{E_{\text{pot}}}{m c^2} \approx \frac{\bar{v}^2 - v^2}{2 c^2}$$

oder

$$\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 \approx 1 - \frac{E_{\text{pot}}}{\frac{m}{2} v^2} = 1 - \frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}} \quad (175)$$

unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\frac{m}{2} v^2$ die *kinetische Energie* der *ankommenden* Elektronen darstellt. Wir erhalten so schließlich:

$$n^2 = \left(\frac{\bar{m}}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{E_{\text{pot}}}{m c^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}\right). \quad (176)$$

Der erste Bruch $\frac{E_{\text{pot}}}{m c^2}$ ist gegenüber 1 von *höherer* Ordnung klein als $\frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}$, weil *gemäß Voraussetzung* $m c^2$ viel größer ist als $\frac{m v^2}{2}$; daher dürfen wir ihn *vernachlässigen* und gewinnen so die von Davisson und Germer durch Versuche bestätigte Formel (s. S. 175):

$$n \approx \sqrt{1 - \frac{E_{\text{pot}}}{E_{\text{kin}}}}. \quad (156)$$

4. Das Massenteilchen als Wellengruppe (Wellenpaket).

Die Frage nach dem gegenseitigen Zusammenhang von *Teilchengeschwindigkeit* v und *Wellengeschwindigkeit* u bedarf noch einer weiteren Klärung. Ihre Beantwortung vermittelt uns das Bild von einem Massenteilchen, das zugleich eine Wellenerscheinung ist und das E. Schrödinger mit dem anschaulichen Namen „*Wellenpaket*“ bezeichnet hat. Während ein *harmonischer* Wellenzug wegen seiner räumlichen und zeitlichen Periodizität zweifellos *ungeeignet* ist, eine *Energieanhäufung* (*Amplitudenverstärkung*) *an einer bestimmten Stelle*, die wir dann als den *Ort* des Massenteilchens erklären könnten, zur Darstellung zu bringen, ist dies bei *Überlagerung* (*Superposition*) *solcher Wellenzüge* durch Ausbildung einer „*Schwebung*“, die wir als das *Massenteilchen* auffassen können, ohne weiteres möglich. E. Schrödinger hat so, über L. de Broglie hinausgehend, der nur einen gewissen *Parallelismus* zwischen Teilchen und

Welle annahm, gehofft, eine *völlige Verschmelzung* dieser beiden Vorstellungen herbeizuführen und dabei das wirklichkeitstreuere, *wellenmechanische Abbild des Massenteilchens* zu finden. Diese Auffassung schien sich zunächst auch zu bewähren. Wegen seiner *Anschaulichkeit* und seines gewiß *heuristischen* Wertes wollen wir diesen Gedanken näher ausführen.

Der Einfachheit halber betrachten wir die *Überlagerung* bloß zweier harmonischer, in der x -Richtung laufender Wellenzüge Ψ_1 und Ψ_2 mit gleicher Amplitude a , die sich etwas in Frequenz (ν), Wellenlänge (λ) und Phasenkonstante (ϑ) unterscheiden sollen:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= a \sin 2\pi \varphi_1, & \varphi_1 &= \nu t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta; \\ \Psi_2 &= a \sin 2\pi \varphi_2, & \varphi_2 &= (\nu + \Delta\nu) t - \frac{x}{\lambda + \Delta\lambda} + \vartheta + \Delta\vartheta, \end{aligned} \right\} (177)$$

wobei

$$|\Delta\nu| \ll \nu, \quad |\Delta\lambda| \ll \lambda, \quad |\Delta\vartheta| \ll |\vartheta| \quad (178)$$

sein soll. Die Superposition beider Wellen ergibt als *einfachste* „Wellengruppe“

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2a \sin \pi (\varphi_1 + \varphi_2) \cos \pi (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (179)$$

Indem wir

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \quad \text{und} \quad \varphi_1 + \varphi_2 \approx 2\varphi_1 \quad (180)$$

setzen, da unter der Voraussetzung der Gl. (148) $|\Delta\varphi| \ll \varphi_1$ sein wird, erhalten wir:

$$\Psi \approx 2a \cos \pi \Delta\varphi \cdot \sin 2\pi \varphi_1. \quad (179a)$$

Das Ergebnis ist also eine der Welle Ψ_1 (*Trägerwelle*) ähnliche Welle, die jedoch eine *schwankende Amplitude* $2a \cos \pi \Delta\varphi$ (*Modulation*) aufweist.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der *Trägerwelle* ist offenbar

$$u = \lambda \nu = \frac{\nu}{\frac{1}{\lambda}}; \quad (166)$$

es ist dies die Geschwindigkeit, mit der sich *Punkte gleicher Phase* ($\varphi_1 = \text{konst.}$) fortbewegen (*Phasengeschwindigkeit*):

$$\varphi_1 = \nu t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad x = \lambda \nu t + \text{konst.} \quad (181)$$

Schreitet auch die *Modulation* mit derselben Geschwindigkeit

fort? Indem wir *Punkte gleicher Modulation*, also mit gleichem $\Delta \varphi$ verfolgen, finden wir:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \Delta v t - x \left(\frac{1}{\lambda + \Delta \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) + \Delta \vartheta = \\ &= \Delta v t - x \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \Delta \vartheta = \text{konst.} \end{aligned}$$

oder

$$x = \frac{\Delta v}{\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)} t + \text{konst.}, \quad (182)$$

woraus für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der *Modulation*, die wir als *Gruppengeschwindigkeit* bezeichnen,

$$v = \frac{\Delta v}{\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)} = - \frac{\lambda^2 \Delta v}{\Delta \lambda} \quad (183)$$

folgt.

Zwischen den beiden Geschwindigkeiten u und v besteht ein wichtiger Zusammenhang. Aus Gl. (183) im Verein mit Gl. (166) ergibt sich:

$$\frac{1}{v} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\Delta v} = \frac{\Delta \left(\frac{v}{u} \right)}{\Delta v} = \frac{1}{u} - \frac{v}{u^2} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v}. \quad (184)$$

v wird also von u *verschieden* sein, sobald u mit der *Frequenz v veränderlich* ist, d. h. im Falle von *Zerstreuung (Dispersion)*. Nur beim *Fehlen* einer solchen (im Vakuum) wird $v = u$.

Wir fassen zusammen. Die gesuchte *Wellengruppe* hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} \Psi &= 2 a \cos \pi \left[\Delta v t - x \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \Delta \vartheta \right] \cdot \sin 2 \pi \left(v t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta \right) = \\ &= 2 a \cos \pi \Delta v \left(t - \frac{x}{v} + \Delta \vartheta' \right) \cdot \sin 2 \pi v \left(t - \frac{x}{u} + \vartheta' \right) \quad (185) \end{aligned}$$

mit der *Wellen- (Phasen-) Geschwindigkeit u* und der *Gruppengeschwindigkeit v* . Δv ist die *Schwebungsfrequenz*. Die *Wellenlänge der Schwebung*

$$\lambda' = \frac{1}{\left| \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right|} = \frac{\lambda^2}{|\Delta \lambda|} \quad (186)$$

ist wegen Gl. (178) natürlich *viel größer als die Wellenlänge λ*

selbst. In Abb. 136 ist die Entstehung einer solchen *Wellengruppe* (*Schwebung*) für den Fall $\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} = \frac{1}{15}$, also $\lambda' = 15\lambda$ dargestellt.

Eine *Wellengruppe* der besprochenen *einfachsten* Art ist indes *noch nicht geeignet*, ein *einzelnes* Massenteilchen, dessen Anwesen-

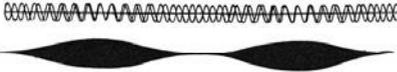


Abb. 136. Entstehung von Schwebungen durch Überlagerung zweier Wellenzüge mit nur wenig verschiedener Wellenlänge.

In der Abbildung entfallen 15 Wellenlängen des ersten auf 16 des zweiten Wellenzuges.

heit zu einer bestimmten Zeit an einen bestimmten Ort gebunden ist, *wiederzugeben*. Dazu ist erforderlich, daß die entsprechende Wellengruppe nur an einer *einzigsten* Stelle, in unserem Falle nur für einen *einzigsten*

x -Wert eine *beträchtliche Amplitude* besitzt; in der Nachbarschaft muß diese rasch abnehmen und in großer Entfernung völlig verschwinden. Eine derartige Wellengruppe kann durch *Überlagerung einer unendlichen Mannigfaltigkeit von harmonischen Wellenzügen* der durch die Gl. (177) dargestellten Form erhalten werden, deren Phase $\varphi = \nu t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta$ sich im *Frequenzbereich* $(\nu, \nu + \Delta\nu)$ *stetig verändert*. Sie wird dargestellt durch das *Integral*

$$\Psi = a \int_{\nu}^{\nu + \Delta\nu} \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta \right) d\nu. \quad (187)$$

Abb. 137 gibt ein Bild von einer solchen *nicht mehr harmonischen* Wellengruppe, die durch ein Hauptmaximum mit rasch abnehmenden Nebenmaxima, die in größerer Entfernung ganz verschwinden, gekennzeichnet ist. Denken wir uns statt dieses nur in der x -Richtung modulierten Gebildes ein solches, das ebenso in der y - und z -Richtung moduliert ist, so haben wir das Schrö-

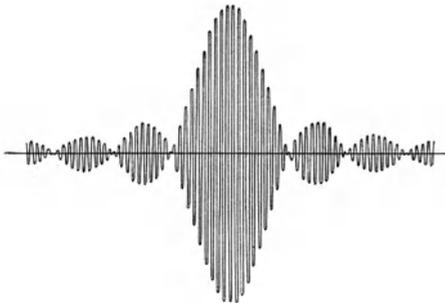


Abb. 137. Nichtharmonische Wellengruppe oder Wellenpaket (nach Flamm).

dingersche „*Wellenpaket*“ vor uns, das nur an einer *einzigsten* Stelle des Raumes eine *beträchtliche Ausdehnung* aufweist und so zur Darstellung eines *Massenteilchens* geeignet er-

scheint. Leider erweisen sich die so gebildeten Wellenpakete in vielen Fällen als *unbeständig*, sie „*zerfließen*“ mit der Zeit und werden damit unfähig, Massenteilchen darzustellen. Dieser Umstand hat neben anderen Schwierigkeiten dazu geführt, die *anschauliche Deutung* der Massenteilchen *als Wellenpakete aufzugeben*.

5. Die Ungenauigkeitsbeziehung von W. Heisenberg.

Es liegt im Wesen der *klassischen* Mechanik, daß *Ort* und *Geschwindigkeit* (*Impuls*) eines Massenteilchens voneinander durchaus *unabhängig* und *mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmbar* erscheinen; jedenfalls ist einer beliebigen Steigerung der Meßgenauigkeit beider Bestimmungen keine Schranke gezogen, wenn natürlich auch *praktisch* durch die Unvollkommenheit der Meßgeräte sicherlich eine solche vorhanden sein wird. Anders liegen die Verhältnisse, wenn wir das Massenteilchen *wellenmechanisch* auffassen, es als „*Wellenpaket*“ behandeln. Wir wollen hier, da es letzten Endes auf dasselbe hinauskommt, als Bild des Massenteilchens nicht das Schrödingersche Wellenpaket Gl. (187), sondern die einfache Wellengruppe Gl. (185) zugrunde legen.

a) **Ungenauigkeit der Ortsbestimmung.** Da wir als Ort des Teilchens das Gebiet anzusehen haben, in dem die Wellengruppe eine merkliche Amplitude aufweist, so wird der *Genauigkeit der Ortsbestimmung* jedenfalls durch die *Wellenlänge λ' der Modulation* (*Schwebung*) eine *Grenze* gesetzt. Bezeichnen wir die *Ungenauigkeit* der Ortsbestimmung der in der x -Richtung laufenden Wellengruppe mit Δx , so muß im Hinblick auf Gl. (186) offenbar

$$\Delta x \geq \lambda' = \frac{\lambda^2}{|\Delta \lambda|} \quad (188)$$

sein. Eine Verbesserung der Ortsgenauigkeit kann also nur durch eine Vergrößerung des Wellenlängenbereiches $\Delta \lambda$ bzw. des Frequenzbereiches $\Delta \nu$ erzielt werden.

b) **Ungenauigkeit der Impulsbestimmung.** Um ein Massenteilchen im physikalischen Sinne festzulegen, ist außer der Bestimmung seines Ortes auch die seiner *Geschwindigkeit* bzw. seines *Impulses* $p = m v$ erforderlich. Nun befindet sich diese Größe zufolge der de Broglieschen Gl. (168) in Abhängigkeit

von der Wellenlänge λ . Ihre *Ungenauigkeit* Δp wird daher durch die *Ungenauigkeit* $\Delta \lambda$ mitbestimmt:

$$\Delta p \geq h \left| \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right| = h \frac{|\Delta \lambda|}{\lambda^2} = \frac{h}{\lambda}. \quad (189)$$

Aus Gl. (188) und Gl. (189) erhalten wir durch Multiplikation die Heisenbergsche *Ungenauigkeitsbeziehung*:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h. \quad (190)$$

Ihr Sinn ist der, daß jede *Verbesserung* der *Ortsbestimmung* (Verkleinerung von Δx) notwendig eine *Verschlechterung* der *Impulsbestimmung* (Vergrößerung von Δp) und umgekehrt zur Folge hat derart, daß das *Produkt beider Ungenauigkeiten* den Betrag des Planckschen *Wirkungsquantums niemals unterschreiten* kann. Es wird also weder die Genauigkeit der Ortsbestimmung noch die der Impulsbestimmung *für sich allein* eingeschränkt; eine *Schranke* besteht nur insoferne, als eine genauere Bestimmung der *einen* Größe nur *auf Kosten* der Genauigkeit der *anderen* erzielt werden kann.

Der bedeutsame Inhalt dieser Feststellung wird durch die folgenden, von Heisenberg stammenden Beispiele veranschaulicht.

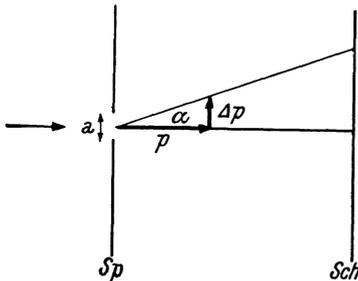


Abb. 138. Beugung eines durch einen Spalt hindurchgehenden Teilchens.

Wir betrachten zunächst ein mit bekanntem Impulse p durch einen Spalt Sp von der Breite a hindurchtretendes Teilchen (Abb. 138). Es wird auf einem Schirm Sch in einiger Entfernung aufgefangen. Die *Ungenauigkeit* in der *Ortsbestimmung* ist hier offenbar durch die *Spaltbreite* a gegeben. Fassen wir das durch den Spalt hindurchgehende Teilchen als Welle auf, so müssen

wir mit einer Beugung derselben im Spalt rechnen. Diese ist mit einer *Impulsänderung* Δp senkrecht zum einfallenden Strahl verknüpft, für die wir aus Abb. 138

$$\Delta p \geq p \operatorname{tg} \alpha \approx p \sin \alpha$$

entnehmen. Nun gilt aber zufolge Abb. 97 die Beugungsformel:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a};$$

mithin folgt weiter unter Beachtung von Gl. (168)

$$\Delta p \geq p \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}$$

oder

$$a \cdot \Delta p \geq h$$

in Übereinstimmung mit Gl. (190). Jede *Verengung* des Spaltes (Verkleinerung von a) zieht eine *Verstärkung seiner beugenden Wirkung* (Vergrößerung von Δp) nach sich. Die Ungenauigkeitsbeziehung [Gl. (190)] bleibt also stets gewahrt.

Als zweites Beispiel sei die *Ortsbestimmung eines Massenteilchens (Elektrons)* durch ein *Mikroskop* angeführt. Man kann mit einem solchen den *Ort* des Teilchens um so *genauer* bestimmen, je *kurzwelliger* das zur Beobachtung verwendete Licht ist. Will man zugleich seine *Geschwindigkeit* bestimmen, so bekommt das Teilchen durch das *kurzwellige* Licht einen *Compton-Stoß* und sein *Impuls* wird durch die Bestrahlung *gefälscht*. Bei genauer Ortsbestimmung wird also die Geschwindigkeits- (Impuls-) Bestimmung *ungenau*. Und umgekehrt: Bei Verwendung von *langwelligem* Licht gibt es wohl *keinen Compton-Stoß*, die *Impulsbestimmung* läßt sich *genau* durchführen. Dafür wird aber die *Ortsbestimmung ungenau*. Beide zugleich kann man unmöglich verbessern. Es gilt also wieder die Heisenbergsche *Ungenauigkeitsbeziehung*, die sich als ein *neues Naturgesetz* erweist. Auf ihre allgemeine physikalische und philosophische Bedeutung, die an die *Grundlagen unserer Naturauffassung* (Gültigkeit des *Kausalgesetzes*) reicht, soll hier nicht eingegangen werden.

B. Die Schrödingersche zeitunabhängige Wellengleichung (Amplitudengleichung).

Anschließend an den de Broglieschen Gedanken einer Verbindung des *Teilchenbildes* mit dem *Wellenbilde*, die zunächst den Charakter eines mehr *äußerlichen Parallelismus* an sich trug, verfolgte E. Schrödinger (1926) das Ziel, eine grundsätzliche *Verschmelzung beider Begriffe* herbeizuführen und so eine der *Wellenoptik* durchaus entsprechende *Wellenmechanik* zu schaffen. Dazu war erforderlich, auf die Grundlage der Wellenoptik zurückzugreifen und nach einem wellenmechanischen Analogon

zu suchen. Als diese *wellenoptische* Grundlage erscheint die *Wellengleichung*:

$$\Delta \Psi \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (191)$$

die in *eindimensionaler* Form für eine in der *X-Richtung* fortschreitenden *Planwelle*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (191 \text{ a})$$

lautet. $u = \lambda \nu$ bedeutet wie bisher die *Wellen-* oder *Phasengeschwindigkeit*, die nicht konstant zu sein braucht, sondern auch *ortsabhängig* (im Falle eines *anisotropen* Mediums) sein kann. Unsere früher betrachteten *harmonischen* Wellenzüge [Gl. (177)] genügen ersichtlich dieser Differentialgleichung (man kann sich davon leicht durch Ausrechnung der partiellen Ableitungen überzeugen). Aber auch jeder durch Überlagerung harmonischer Wellenzüge entstehende Wellenzug, insbesondere die durch Gl. (187) dargestellte *Wellengruppe*, ist ein *Integral* von Gl. (191 a).

Der *harmonische* Wellenzug

$$\Psi = a \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} + \vartheta \right) \quad (177_1)$$

geht mit Hilfe der Beziehungen

$$E^* = h \nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad \vartheta' = \vartheta h$$

in die „*Materiewelle*“ über:

$$\Psi = a \sin \frac{2\pi}{h} (E^* t - p x + \vartheta'). \quad (192)$$

Indem wir uns der bekannten Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

bedienen, können wir die *Materiewelle* *allgemeiner* in der Form schreiben:

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} (E^* t - p x + \vartheta')} = \psi(x) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}. \quad (192 \text{ a})$$

Wir berechnen nun

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} E^* \psi(x) e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 E^{*2}}{h^2} \psi(x) e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}$$

¹ *Real-* und *Imaginärteil* stellen für sich *Integrale* der *Wellengleichung* (191 a) dar.

und setzen dieses Ergebnis in Gl. (191a) ein; wir erhalten so nach Kürzung durch $e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}$

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{4 \pi^2 E^{*2}}{h^2 u^2} \psi = 0. \quad (193)$$

Mit Rücksicht auf $E^* = h \nu$ und $u = \lambda \nu$ wird

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \nu}{\lambda \nu} = \frac{E^*}{u}, \quad (194)$$

womit Gl. (163) in

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{4 \pi^2}{h^2} p^2 \psi = 0 \quad (195)$$

übergeht. Wir nennen diese Differentialgleichung, die die *ortsabhängige Amplitude* der Welle bestimmt, „*Amplitudengleichung*“.

Beschränken wir uns, wie dies auch E. Schrödinger getan hat, auf Vorgänge, die sich mit Geschwindigkeiten $v \ll c$ abspielen (*Newtonsche Näherung*), so können wir die *Gesamtenergie* [Gl. (169)]

$$E^* = m_0 c^2 + \frac{m v^2}{2} + E_{\text{pot}} \quad (196)$$

und

$$p = m v = \sqrt{2 m (E^* - m_0 c^2 - E_{\text{pot}})} = \sqrt{2 m (E - E_{\text{pot}})} = \sqrt{2 m E_{\text{kin}}} \quad (197)$$

setzen, wenn wir mit

$$E = E^* - m_0 c^2 = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (198)$$

die „*klassische*“ Gesamtenergie bezeichnen. Die zugehörige *de Broglie-Wellenlänge* des Teilchens beträgt demgemäß:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m (E - E_{\text{pot}})}} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_{\text{kin}}}} \quad (199)$$

Die *Amplitudengleichung* nimmt so die Gestalt an:

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2}{h^2} m (E - E_{\text{pot}}) \psi = 0 \quad (200)$$

oder

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2}{h^2} m E_{\text{kin}} \psi = 0. \quad (200 \text{ a})$$

Ihre *dreidimensionale* Form lautet dementsprechend:

$$\Delta \psi + \frac{8 \pi^2}{h^2} m (E - E_{\text{pot}}) \psi = 0 \quad (201)$$

oder

$$\Delta \psi + \frac{8 \pi^2}{h^2} m E_{\text{kin}} \psi = 0, \quad (201 \text{ a})$$

wobei Δ den durch Gl. (191) definierten „Laplaceschen Operator“ bedeutet.

Die *Amplitudengleichung* ist für *einen* Massenpunkt *drei-*dimensional. Bei zwei oder mehreren Massenpunkten muß der Laplacesche Operator mit Bezug auf jeden einzelnen gebildet werden. Wir erhalten so für ein *System von n Massenpunkten* die Differentialgleichung:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i \psi}{m_i} + \frac{8 \pi^2}{h^2} (E - E_{\text{pot}}) \psi = 0. \quad (202)$$

Das bedeutet eine *Welle in einem Raum von 3 n-Dimensionen*. Der Anschauung ist hier eine unübersteigbare Grenze gesetzt. Zwei Massenpunkte ergeben nicht zwei dreidimensionale Wellen, sondern eine 6-dimensionale. Der Begriff „*Welle*“ ist also nur im *übertragenen* Sinn zu gebrauchen, er ist bloß eine *mathematische Fiktion*. Auf die Deutung der *Wellenfunktion* ψ als „*Wahrscheinlichkeitsdichte*“ kommen wir noch zurück.

C. Quantisierung als Eigenwertproblem.

So betitelte E. Schrödinger seine ersten Abhandlungen zur *Wellenmechanik*. Der Sinn dieser Bezeichnungsweise ist darin zu erblicken, daß eine *überall endliche* und *stetige Lösung* der Schrödingerschen *Amplitudengleichung* (202) nur für gewisse *diskrete Werte des Energieparameters E* vorhanden ist, was praktisch auf eine *Quantisierung der Energie* hinausläuft, die im wesentlichen durchaus derjenigen entspricht, die von der *Bohrschen Theorie* gefordert wird, wenn sie auch in der Regel zahlenmäßig von ihr abweicht. Gerade diese *zahlenmäßigen Verschiedenheiten* aber begründen die Hoffnung, daß die *neue Theorie* möglicherweise *bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung* aufweist wie die alte Quantentheorie. Und dem ist in der Tat auch so. Das ist aber bei weitem nicht alles. Die Wellenmechanik hilft uns auch in Fragen, auf die die Quantentheorie die Antwort schuldig geblieben ist oder sie nur *andeutungsweise* zu geben vermochte

(Bohrsches Korrespondenzprinzip s. S. 104 ff.), nämlich bei der Beurteilung von *Intensität* und *Polarisation der Spektrallinien*.

Um die Eigenart der *wellenmechanischen* Behandlungsweise kennenzulernen, betrachten wir einige für die Atomphysik grundlegende Probleme.

1. Der harmonische Oszillator als Modell eines schwingenden, zweiatomigen Moleküls (schwingendes Hantelmodell).

Das *Molekülmodell* bestehe aus *zwei punktförmigen Massen* m_1 und m_2 , die im *Ruhezustand* einen festen *Abstand* r haben. Sie sollen in der Richtung ihrer *Verbindungsline* (x -Richtung) *synchrone, harmonische Schwingungen* mit der *Frequenz* ν ausführen. Wir denken uns das Modell im Raum fest, also seinen *Schwerpunkt* S festgehalten

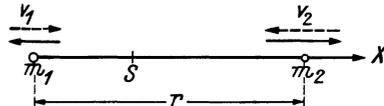


Abb. 139. Schwingendes Hantelmodell. Modell eines schwingenden, zweiatomigen Moleküls.

(Abb. 139). Dieses Problem können wir auf das eines *einzigsten* Teilchens zurückführen. Beziehen wir die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Massen auf den *Schwerpunkt*, so muß nach dem *Schwerpunktsatz* in jedem Augenblick

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

sein. Setzen wir

$$v_1 + v_2 = v,$$

so wird

$$v_1 = m_2 \cdot \frac{v}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = m_1 \cdot \frac{v}{m_1 + m_2}$$

und

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1 v_1}{2} v = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{2} v^2, \quad (203)$$

wenn wir uns, wie schon früher, der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (204)$$

bedienen. Wir haben damit das *Hantelmodell* auf einen *einzigsten* Massenpunkt (μ ; $x = x_2 - x_1$) zurückgeführt, der um die *Ruhe-lage* *harmonisch schwingt*:

$$x - r = a \sin 2 \pi \nu t \quad (205)$$

($a =$ Amplitude, $\nu =$ Frequenz der Schwingung). Wir berechnen seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi a \nu \cos 2\pi \nu t \quad (206)$$

und im Hinblick auf Gl. (173) seine kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = 2\pi^2 a^2 \nu^2 \mu \cos^2 2\pi \nu t = 2\pi^2 \nu^2 \mu [a^2 - (x - r)^2], \quad (207)$$

indem wir die Zeit t mit Hilfe von Gl. (205) eliminieren. Wir erhalten so E_{kin} als Ortsfunktion und damit zufolge Gl. (201a) die *Amplitudengleichung des schwingenden Massenpunktes*:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{16\pi^4}{h^2} \nu^2 \mu^2 [a^2 - (x - r)^2] \psi = 0. \quad (208)$$

Zur leichteren Auflösung führen wir die *Transformation* durch:

$$\xi = (x - r) \sqrt{\alpha}, \quad (209)$$

indem wir zur Abkürzung die *Konstante*

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{h} \nu \mu \quad (210)$$

setzen. Es folgt sodann

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \alpha \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

und nach Einsetzung dieses Ausdruckes in Gl. (208) und Division durch α erhalten wir:

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \left(\frac{4\pi^2}{h} \nu \mu a^2 - \xi^2 \right) \psi = 0.$$

Indem wir schließlich die (klassische) Gesamtenergie des Oszillators

$$E = (E_{\text{kin}})_{\text{max}} = 2\pi^2 \nu^2 a^2 \mu \quad (211)$$

berücksichtigen, können wir die *Amplitudengleichung* in der Form schreiben:

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2E}{h\nu} - \xi^2 \right) \psi = 0. \quad (212)$$

Um das Verfahren zur Lösung dieser Differentialgleichung übersichtlich zu gestalten, gehen wir *schrittweise* vor. $\psi(x)$ bzw. $\psi(\xi)$ muß eine *endliche* und *überall stetige Funktion* sein, die *im Unendlichen verschwindet*. Sie soll ja ein Bild des „*Wellenpaketes*“ sein, das unserem *Oszillator* entspricht.

Wir machen *zuerst* den Ansatz:

$$\psi = C \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

und berechnen damit:

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\xi\psi, \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\psi + \xi^2\psi = (\xi^2 - 1)\psi;$$

also genügt ψ der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (1 - \xi^2)\psi = 0.$$

Der gemachte Ansatz ist somit eine Lösung unserer Aufgabe, wenn

$$\frac{2E}{h\nu} = 1$$

ist, wie ein Vergleich mit Gl. (212) zeigt.

Wir versuchen *sodann* den folgenden Ansatz mit Hinzufügung eines *linearen* Faktors:

$$\psi = C \cdot 2\xi \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Die weitere Rechnung ergibt jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\psi, \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)^2\psi + \left(-\frac{1}{\xi^2} - 1\right)\psi = (\xi^2 - 3)\psi, \end{aligned}$$

und es zeigt sich, daß unser zweiter Ansatz der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (3 - \xi^2)\psi = 0.$$

Um Übereinstimmung mit der Schrödinger-Gleichung (212) zu erzielen, muß nunmehr die Konstante

$$\frac{2E}{h\nu} = 3$$

sein.

Dieses Verfahren läßt sich offenbar fortsetzen und führt zu einer Reihe *ungeradzahlig*er Werte für $\frac{2E}{h\nu}$, die man als „*Eigenwerte*“ bezeichnet. Die Frage der *Quantisierung* der Energie E erscheint in der Wellenmechanik als Frage nach den „*Eigenwerten*“ der Schrödingerschen *Amplitudengleichung*. Der damit erreichte Fortschritt besteht darin, daß diese *Eigenwerte keine willkürliche Zutat* sind wie die Energiestufen von Bohr, sondern schon *aus der Natur der Schrödingerschen Wellengleichung folgen*.

Für die *Eigenwerte* ergeben sich im vorliegenden Falle die *ungeraden Zahlen*:

$$\frac{2E}{h\nu} = 2n + 1; \quad (213)$$

wir erhalten so eine *Quantisierung* der Energie:

$$E_n = \frac{h\nu}{2} (2n + 1) = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (213a)$$

Wir wenden uns nun zur *allgemeinen* Lösung und machen den *Ansatz*:

$$\psi = C \cdot H_n(\xi) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (214)$$

indem wir mit $H_n(\xi)$ ein noch näher zu bestimmendes *Polynom* n^{ten} Grades bezeichnen. Wir berechnen wie früher vorerst

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= C \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot \left(\frac{dH}{d\xi} - \xi H \right), \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= C \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot \left[\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (\xi^2 - 1) H \right] \end{aligned}$$

und setzen die gefundenen Ausdrücke in Gl. (212) ein. Nach Kürzung durch $C \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ erhalten wir eine Differentialgleichung für die gesuchten *Polynome* $H(\xi)$:

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{2E}{h\nu} - 1 \right) H = 0. \quad (215)$$

Zur Berechnung der $H(\xi)$ setzen wir eine *Potenzreihe* an, die mit dem n^{ten} Gliede *abbrechen* soll („*Polynommethode*“ von A. Sommerfeld):

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i (2\xi)^i. \quad (216)$$

Dazu finden wir:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\xi} &= \sum_{i=0}^n 2i a_i (2\xi)^{i-1}; \\ \frac{d^2H}{d\xi^2} &= \sum_{i=0}^n 4i(i-1) a_i (2\xi)^{i-2}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in Gl. (215) ein und fassen wir *gleiche Potenzen* zusammen, so folgt die *identische* Gleichung:

$$\sum_{i=0}^n (2\xi)^i \cdot \left[4(i+2)(i+1)a_{i+2} - 2ia_i + \left(\frac{2E}{\hbar\nu} - 1 \right) a_i \right] \equiv 0.$$

Um sie zu befriedigen, müssen sämtliche Koeffizienten der Potenzen $(2\xi)^i$ gleich 0 sein. Das ergibt eine *Rekursionsformel* für die a_i :

$$a_{i+2} = \frac{2i+1 - \frac{2E}{\hbar\nu}}{4(i+1)(i+2)} a_i. \tag{217}$$

Damit, wie verlangt, die Potenzreihe für $H(\xi)$ ein *Polynom* n^{ten} Grades darstelle, muß für $i = n$ der Zähler von a_{i+2} verschwinden; dann wird $a_{n+2} = a_{n+4} = \dots = 0$. Diese Forderung liefert die bereits angegebene *Quantisierungsregel* für die *Energie*:

$$E_n = \hbar\nu \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{213a}$$

Wir fordern noch, daß $a_n = 1$ werden soll. Das ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn im Ansatz Gl. (214) steht noch der willkürliche, konstante Faktor C zur Verfügung. Aus a_n berechnen wir sodann a_{n+2} , a_{n+4} usw.:

$$1 = a_n = \frac{2(n-2) - 2n}{4(n-1)n} \cdot a_{n-2}, \quad a_{n-2} = -n(n-1) \text{ usw.}$$

Man erhält so für das Hermitesche *Polynom* n^{ten} Grades die Darstellung:

$$\begin{aligned} H_n(\xi) &= (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2\xi)^{n-2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2\xi)^{n-4} - \dots = \\ &= (-1)^n e^{\xi^2} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}. \end{aligned} \tag{218}$$

Die ersten fünf Polynome lauten:

$$\left. \begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, \\ H_1(\xi) &= 2\xi, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, \\ H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi, \\ H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12. \end{aligned} \right\} \tag{218a}$$

Damit haben wir die *allgemeine* Lösung für die *Wellenfunktion* $\psi(\xi)$ gemäß Gl. (214) gefunden. Für C wählen wir gleich jenen

Wert, der sich aus der später noch zu begründenden *Normierungsbedingung* (s. S. 230) ergibt:

$$C = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{4 \pi \mu \nu}{h}} \quad (219)$$

mit Rücksicht auf Gl. (210). Die *normierten Wellenfunktionen* lauten somit:

$$\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (220)$$

Wir bezeichnen diese Lösungen der Schrödingerschen *Amplitudengleichung* als deren „*Eigenfunktionen*“. Zu jeder *Eigenfunktion* ψ_n gehört gemäß Gl. (213a) ein *Eigenwert* E_n .

Der polynomische Bestandteil $H_n(\xi)$ stellt graphisch eine *Parabel* n^{ter} *Ordnung* dar; gleichwohl nehmen die Kurven ψ_n

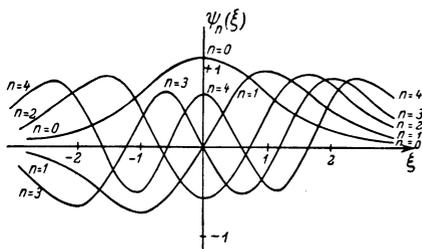


Abb. 140. Die ersten fünf normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators (nach Schrödinger).

für $\xi \rightarrow \infty$ wegen des Faktors $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ nicht unendliche Werte an, sondern nähern sich *asymptotisch* der ξ -Achse.

Der *Normierungsfaktor* C , Gl. (219) schränkt die *Eigenfunktionen* auf den *Bereich* $(-1, +1)$ ein. Die *ersten fünf normierten Eigenfunktionen* des Oszillators

sind nach E. Schrödinger in Abb. 140 dargestellt. Jede Kurve der Abbildung beschreibt einen bestimmten zulässigen Energiezustand des schwingenden Wellenpaketes und stellt die der Trägerwelle aufgedruckte Modulation dar. Die vollständige, *zeitabhängige* Lösung unserer Aufgabe lautet gemäß Gl. (192a):

$$\Psi_n(\xi, t) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2} + 2\pi i t \left[\nu_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \nu \right]}, \quad (221)$$

wenn wir die Beziehungen Gl. (198) und Gl. (213a) berücksichtigen und die *Ruhenergie*

$$m_0 c^2 = h \nu_0 \quad (222)$$

setzen.

Wir stellen der *wellenmechanischen* Rechnung diejenige nach der *Bohrschen Theorie* gegenüber, indem wir nach der auf S. 99 angegebenen Vorschrift verfahren, die wir sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen:

$$\oint p dx = \mu \oint v dx = \mu \int_0^{\frac{1}{\nu}} v \frac{dx}{dt} dt = \mu \int_0^{\frac{1}{\nu}} v^2 dt.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (206) erhalten wir weiter:

$$\mu \int_0^{\frac{1}{\nu}} v^2 dt = 2\pi a^2 \nu \mu \int_0^{2\pi} \cos^2(2\pi \nu t) \cdot d(2\pi \nu t) = 2\pi^2 a^2 \nu \mu = \frac{E}{\nu}$$

unter Beachtung von Gl. (211). Die *Bohrsche Quantenbedingung* lautet somit:

$$\oint p dx = \frac{E}{\nu} = n h \quad (223)$$

oder

$$E_n = n h \nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (223a)$$

Im Gegensatz zu dieser *ganzzahligen, klassischen* Quantisierung liefert die *Wellenmechanik* zufolge Gl. (213a) „*halbzahlige*“ *Quantenzahlen*: $n + \frac{1}{2}$. Bemerkenswerterweise werden solche *auch vom Experiment gefordert*, wie wir noch später bei der Besprechung der *Bandenspektren* (s. S. 208ff.) sehen werden. Ein weiterer, damit zusammenhängender Unterschied gegenüber der klassischen Theorie besteht darin, daß die Wellenmechanik gemäß Gl. (213a) für $n = 0$ eine „*Nullpunktsenergie*“

$$E_0 = \frac{h \nu}{2} \quad (213b)$$

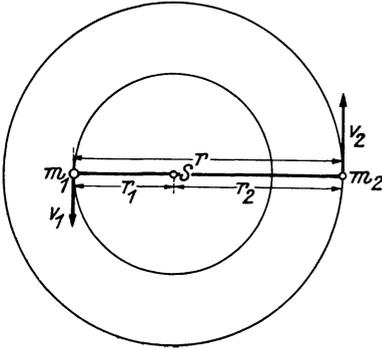
ergibt.

2. Der starre Rotator als Modell eines rotierenden, zweiatomigen Moleküls (rotierendes Hantelmodell).

Die beiden Atommassen m_1 und m_2 mögen bei *gleichbleibendem Abstand* r voneinander um eine durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt S hindurchgehende, zu r senkrechte Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, also *mit konstanter kinetischer Energie rotieren* (Abb. 141):

$$E_{\text{kin}} = \text{konst.} = E. \quad (224)$$

Auch dieses Problem läßt sich auf ein *Einkörperproblem* zurückführen, indem wir uns wie früher [Gl. (204)] der *reduzierten Masse* μ bedienen, die wir uns im Abstand r von einer durch S hindurchgehenden Achse rotierend vorstellen. Das *Trägheitsmoment* des Modells



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

kann wegen

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = r$$

in der Form

$$I = m_1 r_1 (r_1 + r_2) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2 \quad (225)$$

Abb. 141. Rotierendes Hantelmodell. Modell eines rotierenden, zweiseitigen Moleküls.

geschrieben werden.

Unter dieser vereinfachten Annahme erhält die Schrödingersche *Amplitudengleichung* (201a) die Gestalt:

$$\Delta \psi + \frac{8 \pi^2}{h^2} \mu E \psi = 0. \quad (226)$$

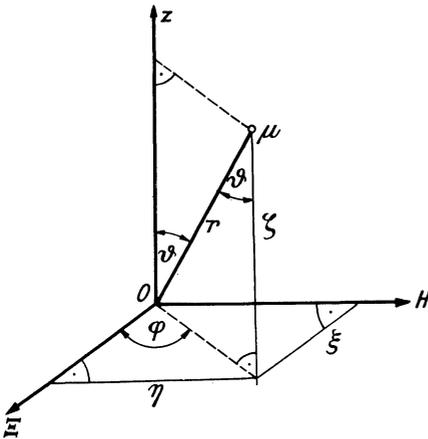


Abb. 142. Räumliche Polarkoordinaten: r, ϑ, φ .

Um dem Modell die *volle Allgemeinheit* zu wahren, die, wie später (s. S. 208) noch deutlich werden wird, von entscheidender Wichtigkeit ist, wollen wir die Aufgabe nicht als ebenes Problem (Rotator mit raumfester Achse), sondern als ein *räumliches* behandeln (*Rotator mit freier Achse*). Diesem Umstand Rechnung tragend, empfiehlt es sich, von den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z zu *Polarkoordinaten*

r, ϑ, φ durch die folgende Transformation überzugehen (Abb. 142):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

Damit wird die *Umrechnung* des Laplaceschen Operators

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (228)$$

auf räumliche Polarkoordinaten erforderlich, die hier nicht durchgeführt werden soll — jedes Lehrbuch der theoretischen Physik gibt darüber Auskunft — und deren Ergebnis für den allein in Betracht kommenden Fall $r = \text{konst.}$ folgendermaßen lautet:

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (229)$$

Damit gewinnen wir für die Schrödinger-Gleichung (226) nach Multiplikation mit r^2 unter Beachtung von Gl. (225) die neue Form:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} I E \psi = 0. \quad (230)$$

Diese Differentialgleichung hat den Charakter einer in der Mathematik schon seit langem bekannten, nämlich derjenigen der *allgemeinen Kugelflächenfunktion*. Die *allgemeine Kugelflächenfunktion*, die gewöhnlich mit $S_n(\vartheta, \varphi)$ bezeichnet wird, genügt der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial S_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) S_n = 0, \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (231)$$

Der Vergleich von Gl. (231) mit Gl. (230) zeigt, daß wir

$$\psi = S_n(\vartheta, \varphi) \quad (232)$$

setzen dürfen — wir erfüllen damit die Forderung nach *Stetigkeit* und *Endlichkeit* der Wellenfunktion —, wenn wir zugleich die *Bedingung* stellen, daß

$$\frac{8\pi^2}{h^2} I E = n(n+1) \quad (233)$$

sein soll. Die *Eigenwerte* der Differentialgleichung (230) liefern uns somit eine *Quantisierungsregel für die Energiewerte beim Rotator*:

$$E_n = \frac{h^2}{8\pi^2 I} n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (233 \text{ a})$$

Wiederum ergeben sich *halbzahlige Quantenzahlen*, wie man aus der folgenden Umformung erkennt:

$$E_n = \frac{h^2}{8 \pi^2 I} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{32 \pi^2 I}. \quad (233 \text{ b})$$

Diesem Ergebnis der *Wellenmechanik* stellen wir die *Quantenbedingung* der *Bohrschen Theorie* für den Fall des starren Rotators gegenüber. Wir stützen uns dabei auf die *Quantelung des Drehimpulses*

$$p_\varphi = \mu v r$$

gemäß Gl. (65):

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = 2\pi \mu v r = n h, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Aus ihr folgt für die Gesamtenergie des Rotators mit Rücksicht auf Gl. (224) und Gl. (225)

$$E_n = E_{\text{kin}} = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{n^2 h^2}{4 \pi^2 \mu^2 r^2} = \frac{n^2 h^2}{8 \pi^2 I} \quad (234)$$

(Deslandresscher Term) als *klassische Quantisierungsregel*, deren wesentliches Merkmal die *Ganzzahligkeit* der Quantenzahlen ist. Das *Experiment* hat aber auch im Falle des *Rotators* (*Rotations-schwingungsbanden*, s. S. 211 ff.) *gegen* die klassische Quantentheorie entschieden und die Gültigkeit der „*halbzahligen*“ Quantisierungs-gleichung (233 a) bzw. (233 b) *außer Zweifel* gesetzt.

Wir wollen noch der (die Lösung der Schrödingerschen *Amplitudengleichung* darstellenden) *allgemeinen Kugelflächenfunktion* $S_n(\vartheta, \varphi)$, ohne auf deren Herleitung, die den Rahmen dieser Schrift überschreiten würde, näher einzugehen, eine kurze Betrachtung widmen. $S_n(\vartheta, \varphi)$ läßt sich durch die Formel darstellen:

$$S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-n}^{+n} S_{n,m}(\vartheta, \varphi), \quad (235)$$

wobei, *in komplexer Form* geschrieben,

$$S_{n,m}(\vartheta, \varphi) = C_m e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \vartheta)^1 \quad (236)$$

ist. Die hierin auftretenden *zugeordneten Kugelfunktionen*

¹ Diese Darstellung ist mit der folgenden *in reeller Form* äquivalent:

$$S_{n,m}(\vartheta, \varphi) = C_m \sin^{\cos} m \varphi P_n^{|m|}(\cos \vartheta);$$

C_m bedeutet dabei einen *willkürlichen, konstanten Faktor*.

$P_n^m(\cos \vartheta)$ bedeuten die mit $\sin^m \vartheta$ multiplizierten m^{ten} Ableitungen der (gewöhnlichen) Kugelfunktion (zonalen Kugelflächenfunktion) $P_n(\cos \vartheta)$:

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \cdot \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d \cos^m \vartheta}, \quad 0 \leq m \leq n. \quad (237)$$

Die (gewöhnliche) Kugelfunktion $P_n(\cos \vartheta)$ selbst, die somit den

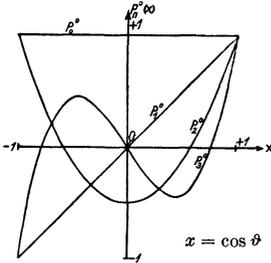


Abb. 143. Die (gewöhnlichen) Kugelfunktionen oder Legendreschen Polynome

$$P_n(x) = P_n^0(x).$$

(Nach Sommerfeld.)

Die Abb. zeigt:

$$P_0 = P_0^0 = 1, \quad P_1 = P_1^0 = x,$$

$$P_2 = P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3 = P_3^0 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

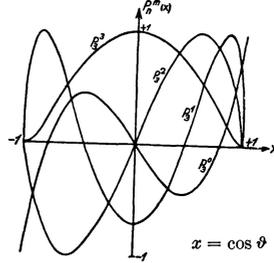


Abb. 144. Die zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^m(x)$.

(Nach Sommerfeld.)

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{d x^m};$$

die dargestellten Funktionen sind durch geeignete Faktoren derart „normiert“, daß ihre Höchstwerte gleich 1 werden:

$$P_0^0 = 1, \quad P_1^1 = \frac{\sqrt{15}}{8}, \quad P_2^1 = \frac{\sqrt{3}}{10}, \quad P_3^1 = \frac{1}{15}.$$

Kernpunkt der ganzen Darstellung bildet, findet ihren Ausdruck in der folgenden „hypergeometrischen“ Reihe:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[\cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \vartheta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \vartheta - \dots \right]; \quad (238)$$

insbesondere ist:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos \vartheta, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) \text{ usw.} \quad (238 \text{ a})$$

Es gilt ferner die *Rekursionsformel*:

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\cos \vartheta P_n + nP_{n-1} = 0. \quad (239)$$

Die Abb. 143 und 144 geben ein Bild vom Verlauf der gewöhn-

lichen und zugeordneten Kugelfunktionen, wobei $\cos \vartheta = x$ und demgemäß $\sin \vartheta = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt worden ist.

Gegenüber dem Problem des *Oszillators* zeigt das des *Rotators* eine *Eigenart*, die darin besteht, daß mit der Quantenzahl n eine zweite m gekoppelt erscheint, die der Bedingung $0 \leq |m| \leq n$ unterworfen ist; d. h., daß zum *Eigenwert* [Gl. (233 a)] nicht eine Eigenfunktion, sondern $(2n + 1)$ *Eigenfunktionen*

$$\psi_{n, m}(\vartheta, \varphi) = S_{n, m}(\vartheta, \varphi) \quad (236 \text{ a})$$

gehören, nämlich, wie aus Gl. (236) zu entnehmen ist:

$$C_0 P_n^0, C_{\pm 1} e^{\pm i\varphi} \cdot P_n^1, C_{\pm 2} e^{\pm 2i\varphi} \cdot P_n^2, \dots C_{\pm n} e^{\pm in\varphi} \cdot P_n^n.$$

Der Eigenwert [Gl. (233 a)] ist somit *kein einfacher*, sondern ein $(2n + 1)$ -*facher*. Man sagt dafür auch, daß das Eigenwertproblem des Rotators $2n$ -*fach entartet* sei. Der Sinn dieser Aussage wird sofort deutlich, wenn wir überlegen, daß bei einem bestimmten Energiezustand E_n der Rotator im Raume noch verschiedene Lagen einnehmen kann, für die die Gesetze der *räumlichen Quantelung* (s. S. 115 f.) bestehen. Damit offenbart sich auch die *Bedeutung der zweiten Quantenzahl m* , die nichts anderes als die *magnetische Quantenzahl m_l* der alten Bohrschen *Theorie* ist. Es erscheint nun auch verständlich, warum das Problem des Rotators *in voller Allgemeinheit* mit *raumfreier* Achse behandelt werden mußte. Nur so konnte der wellenmechanischen Lösung *ihre ganze Tragweite* gesichert werden. Ein Gleiches gilt auch in jedem anderen Falle.

3. Anwendung auf die Bandenspektren.

Bandenspektren sind Quantenstrahlungen, die von einem bewegten *Molekül* ausgehen; *Linienspektren* dagegen entstehen durch Quantenausstrahlung bei *Elektronenbewegungen* im *einzelnen Atom*. Das *Molekül* (Hantelmodell) kann *oszillieren* oder *rotieren* oder *beides zugleich*. Diesen Bewegungen der beiden Kerne werden sich im allgemeinen noch die *Sprünge der Elektronen* in den Atomhüllen (wie beim Bohrschen Atom) überlagern. Das Aussehen eines solcherart entstehenden Spektrums, das dann eine eigentümliche „*Kannelierung*“ aufweist, zeigt für den Fall des Stickstoffmoleküls Abb. 145. Wir haben das Molekül als Oszillator und Rotator ausführlich unter 1 und 2 behandelt. Der *dritte* Fall, daß das Molekül *schwingt und sich zugleich dreht*, kann *in erster Näherung* durch einfache *Überlagerung*

beider Vorgänge dargestellt werden, wobei *sich die unabhängig gequantelten Energien der Schwingung und Drehung (Rotation) addieren*. Zur Bezeichnung der Quantenzahlen bedienen wir uns der im internationalen Schrifttum üblichen Zeichen:

$v =$ Schwingungs- (Oszillations-) Quantenzahl,

$J =$ Drehungs- (Rotations-) Quantenzahl.

Demgemäß erhalten wir im Hinblick auf Gl. (213a) und Gl. (233a) die folgenden Ausdrücke:

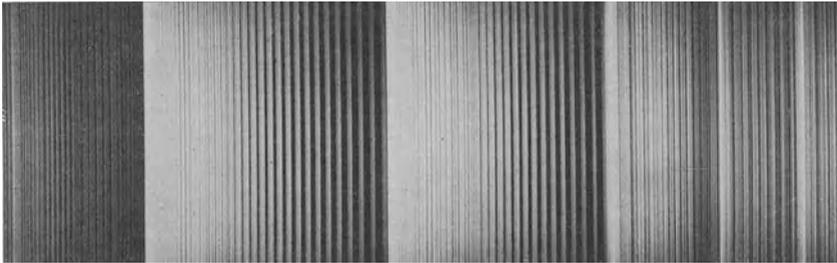


Abb. 145. Bandenspektrum des Stickstoffmoleküls (N_2) im Sichtbaren. (Aus M. BORN, Moderne Physik.)

Die „Bandkanten“ (von links nach rechts) gehören zu den Wellenlängen 4059, 3998, 3942, 3914 und 3894 Å. Die in der einzelnen Bande erkennbaren feinen „Triplets“ entsprechen den Änderungen der Drehungsquantenzahl J um $-1, 0, +1$. Jede Einzelbande gehört zu einem bestimmten Sprung der Schwingungsquantenzahl v . Das ganze Bandensystem wird durch einen Elektronensprung ins sichtbare Spektralgebiet gerückt.

$$\text{Schwingungsenergie } E_v = h \nu_0 \cdot \left(v + \frac{1}{2}\right) = h c \omega_0 \cdot \left(v + \frac{1}{2}\right),^1 \quad (240)$$

$$\text{Drehungsenergie } E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I_0} J(J+1), \quad (241)$$

in dem wir unter $\nu_0 = c \omega_0$ die Frequenz der Grundschiwingung² und unter I_0 das Trägheitsmoment des Moleküls im Grundzustande verstehen. Die Gesamtenergie des bewegten Moleküls setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$E = E_r + E_v + E_{el}. \quad (242)$$

Der dritte Bestandteil E_{el} bedeutet die „Elektronenenergie“, da die Energie des Moleküls offenbar auch von seinem Elektronenzustand abhängt.

¹ $\omega = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$ bedeutet hier wie schon früher die Wellenzahl.

² Nicht zu verwechseln mit dem Wert ν_0 der Gl. (221) und Gl. (222)!

Wir fragen nun nach der *Ausstrahlung*. Ganz wie bei Bohr wird durch Übergang von einem Bewegungszustand zu einem anderen Energie *quantenmäßig* ausgestrahlt. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß sich *Drehungs-* und *Schwingungsenergie ändern*; die *Elektronenanordnung* soll dabei *gleich bleiben*. Die *Frequenzbedingung*¹ des Molekülmodells lautet dann:

$$\omega = \frac{1}{\lambda} = \frac{E' - E}{h c} = \frac{E_r' - E_r}{h c} + \frac{E_v' - E_v}{h c} = \omega_r + \omega_v, \quad (243)$$

indem wir durch Beifügung eines *Akzents* jeweils den *höheren* Energiezustand bezeichnen. Es soll also nur *Rotations-* und *Schwingungsfrequenz* ausgestrahlt werden.

Wir unterscheiden *zwei verschiedene Arten* von Spektren:

a) **Rotationsbanden im langwelligen Ultrarot (30 bis 150 μ).** Diese entstehen, wenn sich *nur* die *Rotationsenergie*, also *nur* die *Drehungsquantenzahl* J ändert. Wir setzen die dem *höheren* Energiezustand entsprechende Quantenzahl

$$J' = J + m \quad (244)$$

und erhalten so für die ausgestrahlte *Wellenzahl*:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{h}{8 \pi^2 c I_0} \cdot \left[\left(J' + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(J + \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{h}{8 \pi^2 c I_0} \cdot \left[m^2 + 2 m \left(J + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

oder

$$\omega_r = \frac{h}{8 \pi^2 c I_0} m (m + 2 J + 1). \quad (245)$$

Nicht für *jeden* Übergang, d. h. nicht für *jeden* ganzzahligen Wert von m ist *Ausstrahlung nachweisbar*, sondern *nur* für

$$m = 1. \quad (246)$$

In diesem Falle erhalten wir:

$$\omega_r = \frac{h}{8 \pi^2 c I_0} (2 J + 2) = 2 B (J + 1), \quad (247)$$

in dem wir die Abkürzung

$$B = \frac{h}{8 \pi^2 c I_0} \quad (248)$$

einführen. Für den *Abstand* zweier Rotationslinien finden wir demgemäß:

$$\Delta \omega_r = \omega_{r, J+1} - \omega_{r, J} = 2 B = \text{konst.} \quad (249)$$

¹ Über ihre *wellenmechanische* Begründung siehe S. 229.

Die *reinen Rotationsspektren* zeigen also eine *andere* Beschaffenheit als die *Atomspektren*: Der *Linienabstand* bleibt immer *derselbe*. Solche *Banden* wurden tatsächlich bei den *Halogenwasserstoffen* HF, HCl, HBr, HJ im *langwelligen Ultrarot* (etwa 30 bis 150 μ) gemessen.

Der Abstand $2B$ gibt uns ein Maß für das *Trägheitsmoment* des Moleküls:

$$I_0 = \frac{h}{8\pi^2 c B}. \quad (248 \text{ a})$$

Wir wählen als Beispiel die *Rotationsbanden* des HCl. Nach sorgfältigen Messungen von M. Czerny (1927) ergibt sich als *Mittelwert*:

$$\Delta\omega_r = 2B = 20,5 \text{ cm}^{-1}.$$

Wir berechnen daraus das *Trägheitsmoment* des Moleküls HCl:

$$I_{\text{HCl}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-27}}{4\pi^2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 20,5} = 2,73 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2.$$

Im Hinblick auf Gl. (225) und Gl. (204) finden wir weiter für den *Abstand* des H-Atoms vom Cl-Atom

$$\begin{aligned} r_{\text{HCl}} &= \sqrt{\frac{I_{\text{HCl}}}{\mu_{\text{HCl}}}} = \sqrt{I_{\text{HCl}} \left(\frac{1}{m_{\text{H}}} + \frac{1}{m_{\text{Cl}}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{I_{\text{HCl}}}{m_{\text{H}}} \left(1 + \frac{1}{A_{\text{Cl}}} \right)} \quad (250) \end{aligned}$$

und mit Beachtung von $A_{\text{Cl}} = 35,5$

$$r_{\text{HCl}} = \sqrt{\frac{2,73 \cdot 10^{-40}}{1,67 \cdot 10^{-24}} \cdot \frac{36,5}{35,5}} = 1,30 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

was mit unseren Erfahrungen über die Ausdehnung der Moleküle sehr gut übereinstimmt.

b) Rotations-schwingungsbanden im Ultrarot (1 bis 5 μ). Spielt neben der *Drehung* auch die *Schwingung* der beiden atomaren Bestandteile des Moleküls eine Rolle, so brauchen wir nach Gl. (243) nur die Wellenzahlen ω_r und ω_v zu summieren, um die gesamte Ausstrahlung zu erhalten. Hierzu bedarf es noch der Berechnung von ω_v . Bezeichnen wir den *höheren* Schwingungszustand wie früher durch Beifügung eines *Akzents*, so wird mit Rücksicht auf Gl. (240) und Gl. (243)

$$\omega_v = \omega_0 \left(v' + \frac{1}{2} \right) - \omega_0 \left(v + \frac{1}{2} \right) = \omega_0 (v' - v) = n \omega_0, \quad (251)$$

wenn wir

$$v' = v + n \quad (252)$$

setzen. Für die *gesamte Ausstrahlung* gilt somit:

$$\omega = \omega_0 + \omega_r = \omega_0 (v' - v) + B \cdot \left[\left(J' + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(J + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (251), Gl. (245) und Gl. (248)

$$\omega = n \omega_0 + B m (m + 2 J + 1). \quad (253)$$

Ebenso wie für die *Drehungsquantenzahl* J gilt auch für die *Schwingungsquantenzahl* v die *Auswahlregel*, daß im allgemeinen *nur eine Änderung um 1* zulässig ist. Im Gegensatz zur *klassischen* Quantentheorie kann die *Wellenmechanik* für diese *Auswahlregel* eine Erklärung geben, auf die wir später noch zu sprechen kommen (s. S. 230 u. 234 f.). Wir haben also

$$n = 1, m = \pm 1^1 \quad (254)$$

zu setzen, was zum Ergebnis führt:

$$\omega = \omega_0 \pm B (2 J + 1 \pm 1). \quad (255)$$

Es ergibt sich so eine *Doppelbande*, wie sie bei verschiedenen Gasen im *Ultraroten* beobachtet wurde. Sie besteht aus *zwei Zweigen*:

dem *R-Zweig* (*pos.* Zweig):

$$\overset{+}{\omega} = \omega_0 + 2 B (J + 1), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \quad (255_1)$$

und dem *P-Zweig* (*neg.* Zweig):

$$\overset{-}{\omega} = \omega_0 - 2 B J, \quad J = 1, 2, 3, \dots \quad (255_2)$$

Der *Linienabstand*

$$\Delta \omega = \Delta \omega_r = 2 B \quad (256)$$

ist, wie früher, konstant und von gleichem Betrag. Das *Rotations-schwingungsspektrum* besteht somit aus einer *äquidistanten* Reihe von Linien mit einer *Lücke in der Mitte*, gerade an der Stelle, die der Schwingungsfrequenz ω_0 entspricht (s. Abb. 146):

¹ Da sich hier die (immer *geringer* frequente) *Drehungsausstrahlung* der *Schwingungsausstrahlung überlagert*, sind *beide* Änderungen $+ 1$ und $- 1$ möglich.

begleitende Linien (Abb. 149). A. Smekal hatte diese Erscheinung bereits 1923 aus *quantentheoretischen* Erwägungen vorausgesagt. Die theoretische Erklärung dieser *inkohärenten Streuung* ist folgende:

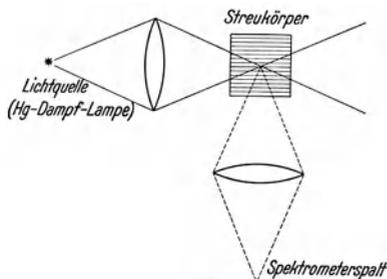


Abb. 148. Schematische Versuchsanordnung zur Beobachtung des Smekal-Raman-Effektes.

Durch die *Einstrahlung* einer bestimmten *Erregerfrequenz* wird die Energie des Moleküls auf ein *höheres Niveau* („Zwischenniveau“) gehoben, worauf ein *Rückfall mit Ausstrahlung* erfolgt; beide Male ändert sich die Drehungsquantenzahl zufolge der Auswahlregel Gl. (254) um ± 1 . Es kann also die *Theorie der Rotationsbanden* zur Erklärung

des *Raman-Effektes* herangezogen werden, die infolge *zweimaliger* Änderung der *Drehungsquantenzahl* die folgende *Auswahlregel* ergibt:

$$m = +1 + 1 = +2, \text{ bzw. } m = \pm 1 \mp 1 = 0, \text{ bzw.}$$

$$m = -1 - 1 = -2. \quad (257)$$

An die Stelle der *Lücke* bei den *Rotationsschwingungsbanden* tritt

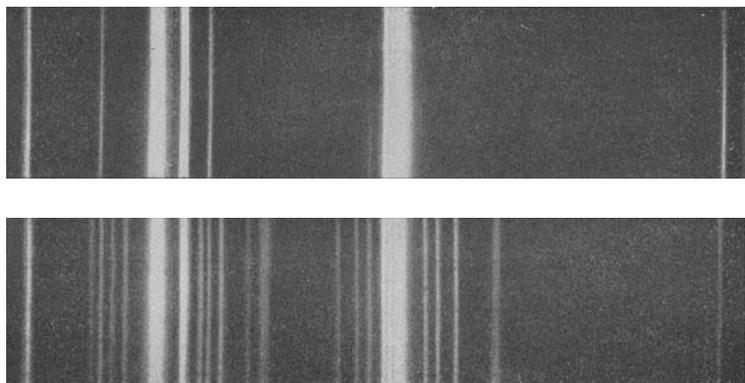


Abb. 149. Smekal-Raman-Effekt (nach Raman und Krishnan).
Oben das Spektrum des einfallenden Lichtes, unten das Spektrum des an Tetra-Chlor-Kohlenstoff (CCl_4) gestreuten Lichtes.

jetzt die besonders stark ausgebildete Linie der *Erregerfrequenz* ω_0 , der sich nach der eben gefundenen *Auswahlregel (ultrarote) Rotationsfrequenzen* überlagern. Es ergeben sich so im Hinblick auf Gl. (257) *drei* Möglichkeiten:

1. $m = +2$:

$$\overset{+}{\omega} = \omega_0 + 2B(2J + 3), \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (258_1)$$

(*R-Zweig, anti-Stokesche* Streuung);

2. $m = 0$:

$$\omega = \omega_0 \quad (258_2)$$

(*Q- oder Null-Zweig, Erregerlinie, kohärente* oder *Rayleigh-Streuung*);

3. $m = -2$:

$$\overset{-}{\omega} = \omega_0 - 2B(2J - 1), \quad J = 2, 3, 4, \dots \quad (258_3)$$

(*P-Zweig, Stokesche* Streuung).

Der *Linienabstand*

$$\Delta\omega = 4B \quad (259)$$

ist *doppelt so groß* wie bei den entsprechenden *Rotationsbanden*; nur die *ersten* Linien haben *beiderseits* von der *Erregerlinie* *größeren* Abstand ($6B$), wie Abb. 150 veranschaulicht.

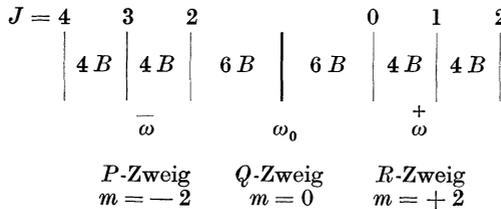


Abb. 150.

In besonderen Fällen können alle *geraden* Linien, die *Übergängen* zwischen *geraden* Drehungsquantenzahlen entsprechen, *fehlen*: erster Abstand $10B$, übrige Abstände immer $8B$; oder es *fehlen* die *ungeraden* Linien (*Übergänge* zwischen *ungeraden* Drehungsquantenzahlen): erster Abstand $6B$, übrige Abstände immer $8B$. Aufnahmen an O_2 und N_2 von Rasetti (Abb. 151) zeigen dies.

Auch der *Raman-Effekt* ermöglicht so durch Messung der *Linienabstände* einen Schluß auf das *Trägheitsmoment der Moleküle*

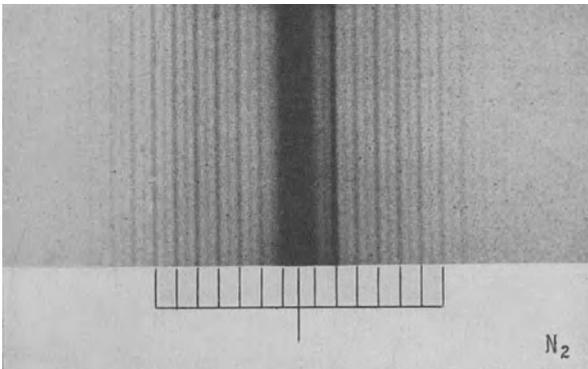
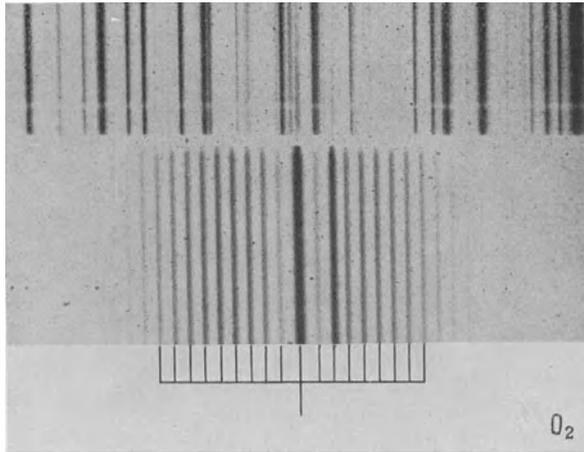


Abb. 151. Smekal-Raman-Effekt am Sauerstoff und Stickstoff (nach Rasetti). Bei Sauerstoff fehlen die geraden Linien (Übergänge zwischen geraden Drehungsquantenzahlen), beim Stickstoff überwiegen sie gegenüber den ungeraden.

und übertrifft dabei an Bedeutung die Spektroskopie der Rotations- und Rotationsschwingungsbanden, da die im *Sichtbaren* gelegenen *Raman-Linien günstiger zu beobachten* sind als die *ultra-roten* Rotationslinien.

Noch ein *weiteres* Problem sei hier in großen Zügen behandelt:

4. Das Planetenelektron eines wasserstoffähnlichen Atoms.

Es handelt sich dabei um die Bewegung eines Elektrons im *Coulombschen Feld* eines Kerns mit der Ladung $+Ze$, dessen *potentielle Energie* wir wie im Falle des Bohrschen Atoms

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Ze^2}{r} \quad (260)$$

zu setzen haben. Die *Schrödingersche Amplitudengleichung* lautet dann gemäß Gl. (201)

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} m \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (261)$$

Bei der Einführung von *Polarkoordinaten*, die sich auch in diesem Falle zur rechnerischen Behandlung der Aufgabe am besten eignen, müssen wir berücksichtigen, daß r jetzt wie im Falle der *Sommerfeldschen Ellipsenbahnen* als *veränderlich* anzusehen ist. Der *Laplacesche Operator* [Gl. (229)] muß demgemäß durch einen von r *abhängigen* Bestandteil *ergänzt* werden:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (262)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (261) bedienen wir uns der *Methode der Trennung (Separation) der Veränderlichen*. Wir setzen die gesuchte Lösung für ψ als ein *Produkt zweier Funktionen* an, von denen die eine *R ausschließlic*h eine Funktion von r , die andere die uns bereits vom *Rotatorproblem* bekannte *allgemeine Kugelflächenfunktion* $S_l(\vartheta, \varphi)$ ist:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot S_l(\vartheta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (263)$$

Gemäß der für die letztere gültigen Differentialgleichung (231) können wir die beiden letzten Glieder von $\Delta \psi$ durch $-\frac{l(l+1)}{r^2} R S_l$ ersetzen¹ und es bleibt bloß eine *Differentialgleichung für die Funktion* $R(r)$ übrig:

¹ l tritt dabei an die Stelle von n .

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \left[\frac{8\pi^2}{h^2} m \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (264)$$

Bei der Lösung unterscheiden wir die *beiden* Fälle $E < 0$ und $E > 0$.

a) $E < 0$ (Seitenstück zu den Ellipsenbahnen der Bohrschen Theorie). Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir die Koordinate

$$\rho = \frac{4\pi r}{h} \cdot \sqrt{-2mE} \quad (265)$$

ein, wodurch die Differentialgleichung (264) in die folgende übergeht:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\pi Ze^2}{h\rho} \sqrt{-\frac{2m}{E}} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0, \quad (266)$$

und folgen im weiteren der *Sommerfeldschen Polynommethode*. Ihr zufolge setzen wir R , vom Faktor $e^{-\frac{\rho}{2}}$ abgesehen, als eine *endliche Potenzreihe* nach ρ mit den unbestimmten Koeffizienten a_i an:

$$R(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^k \sum_{i=0}^{n_r} a_i \rho^i. \quad (267)$$

Die *ganze Zahl* n_r , mit der die Gliederzahl der Reihe *abbricht*, wird sich wie im Falle des *Oszillators* (s. S. 200 f.) im folgenden als *Quantenzahl* entpuppen; k bedeutet eine aus der Natur der Lösung *noch zu bestimmende* Zahl.

Der Ansatz [Gl. (267)] muß die Differentialgleichung (266) *identisch* befriedigen, was nach Kürzung durch $e^{-\frac{\rho}{2}}$ und entsprechende *Zusammenfassung gleicher Potenzen* die *identische* Gleichung zur Folge hat:

$$\sum_{i=0}^{n_r} \left\{ a_i [(i+k)(i+k+1) - l(l+1)] \rho^{i+k-2} - a_i \left(i+k+1 - \frac{\pi Ze^2}{h} \sqrt{-\frac{2m}{E}} \right) \rho^{i+k-1} \right\} \equiv 0. \quad (268)$$

Das *niedrigste* Glied der Reihe (für $i=0$) lautet:

$$a_0 [k(k+1) - l(l+1)] \rho^{k-2}.$$

Es muß *für sich verschwinden*, also

$$k(k+1) = l(l+1) \text{ oder } k = l \quad (269)$$

¹ $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr}.$

sein; die zweite Lösung $k = -(l + 1)$ kommt wegen der notwendigen Endlichkeit von $R(\rho)$ für alle Werte von ρ nicht in Betracht.

Zur Berechnung der a_i schreiben wir Gl. (268) mit Beachtung von $k = l$ in der Form:

$$\sum_{i=0}^{n_r} \left\{ a_{i+1} [(i+l+1)(i+l+2) - l(l+1)] - a_i \left(i+l+1 - \frac{\pi Z e^2}{h} \sqrt{-\frac{2m}{E}} \right) \right\} \rho^{i+l-1} \equiv 0. \quad (270)$$

Das *identische* Verschwinden erfordert die Gültigkeit der folgenden *Rekursionsformel* für die a_i :

$$a_{i+1} [(i+l+1) \cdot (i+l+2) - l(l+1)] = a_i \left(i+l+1 - \frac{\pi Z e^2}{h} \cdot \sqrt{-\frac{2m}{E}} \right). \quad (270a)$$

Soll die *Potenzreihe* Gl. (267) für R mit dem Glied $i = n_r$ *abbrechen*, so muß offenbar

$$a_{n_r+1} = a_{n_r+2} = \dots = 0$$

sein, was durch die „*Quantenbedingung*“:

$$n_r + l + 1 = \frac{\pi Z e^2}{h} \cdot \sqrt{-\frac{2m}{E}} \quad (271)$$

oder

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 (n_r + l + 1)^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} \quad (271a)$$

erreicht wird, wenn wir die „*Hauptquantenzahl*“

$$n = n_r + l + 1 = 1, 2, 3, \dots \quad (272)$$

setzen. Sohin gilt zufolge Gl. (240a):

$$a_{i+1} = \frac{i - n_r}{(i+l+1) \cdot (i+l+2) - l(l+1)} \cdot a_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_r; \quad (273)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{„radiale“ Quantenzahl } n_r \\ \text{„azimutale“ Quantenzahl } l \end{array} \right\} = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (273a)$$

$l + 1$ entspricht der *azimutalen* (*Neben-*) Quantenzahl k der Bohrschen Theorie (s. S. 99 ff.). Es liegt hier in der *Definition* Gl. (272) von n , daß der Wert $n = n_r$ wegen $l \geq 0$ nicht angenommen werden kann. Damit erscheinen *von vornherein* die „*Pendelbahnen*“ ($k = 0$) der Bohrschen Theorie *ausgeschlossen*. Im übrigen er-

geben sich in Gestalt der Eigenwerte [Gl. (271a)] der Differentialgleichung (264) die wohlbekannten Energiestufen [Gl. (72) bzw. Gl. (84)] des Bohrschen Atommodells.

Die gesuchte Lösung der Schrödingerschen Gl. (261) lautet somit im Hinblick auf Gl. (236), Gl. (263), Gl. (267) und Gl. (269):

$$\psi_{n, l, m}(\varrho, \vartheta, \varphi) = C_m P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{i m \varphi} - \frac{\varrho}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-l-1} a_i \varrho^i + l \quad (274)$$

im Verein mit der *Rekursionsformel* Gl. (273).

Dieser Lösung kann man durch Einführung der sogenannten *Laguerreschen Polynome* noch eine andere Form geben. Das k^{te} *Laguerresche Polynom* ist definiert durch:

$$L_k(\varrho) = e^\varrho \frac{d^k}{d\varrho^k} (\varrho^k \cdot e^{-\varrho}) = (-1)^k \cdot \left[\varrho^k - \frac{k^2}{1!} \varrho^{k-1} + \frac{k^2(k-1)^2}{2!} \varrho^{k-2} - \dots + (-1)^k k! \right]. \quad (275)$$

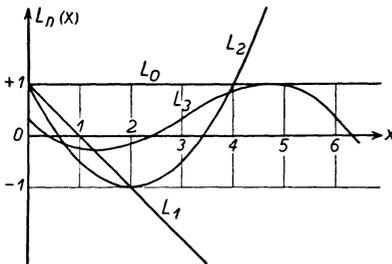


Abb. 152. Die ersten vier Laguerreschen Polynome $L_n(x)$.

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, & L_1 &= -x + 1, \\ L_2 &= x^2 - 4x + 2, \\ L_3 &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6. \end{aligned}$$

Die Polynome L_2 und L_3 sind in der Abb. mit den Faktoren $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{6(1+\sqrt{3})}$ versehen, um ihre Extremwerte auf den Bereich $(+1, -1)$ einzuschränken (nach Sommerfeld).

Die ersten vier Laguerreschen Polynome:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= 1, \\ L_1 &= -\varrho + 1, \\ L_2 &= \varrho^2 - 4\varrho + 2, \\ L_3 &= -\varrho^3 + 9\varrho^2 - 18\varrho + 6 \end{aligned} \right\} (275a)$$

sind in Abb. 152 dargestellt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_{i=0}^{n-l-1} a_i \varrho^i = g(\varrho), \quad (276)$$

so befriedigt $g(\varrho)$, wie man leicht nachrechnen kann, die Differentialgleichung:

$$\varrho \frac{d^2 g}{d\varrho^2} + [2(l+1) - \varrho] \frac{dg}{d\varrho} + (n-l-1)g = 0. \quad (277)$$

Andererseits erfüllt $L_k^{(i)}$, die i^{te} *Ableitung von L_k* , die Differentialgleichung:

$$\varrho \frac{d^2 L_k^{(i)}}{d\varrho^2} + (i+1 - \varrho) \frac{dL_k^{(i)}}{d\varrho} + (k-i)L_k^{(i)} = 0. \quad (278)$$

Die Gegenüberstellung von Gl. (277) und Gl. (278) ermöglicht für $k = n + l$, $i = 2l + 1$ die Darstellung:

$$g(\varrho) = \sum_{i=0}^{n-l-1} a_i \varrho^i = L_{n+l}^{(2l+1)}(\varrho) \quad (279)$$

Man erhält so schließlich die Lösung von Gl. (261) in der Form:

$$\psi_n(\varrho, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{+l} \psi_{n,l,m}(\varrho, \vartheta, \varphi), \quad (280)$$

wobei

$$\psi_{n,l,m}(\varrho, \vartheta, \varphi) = C_m P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi - \frac{\varrho}{2}} \varrho^l L_{n+l}^{(2l+1)}(\varrho) \quad (281)$$

ist. Die $\psi_{n,l,m}$ sind die *Eigenfunktionen des wasserstoffähnlichen Atoms*, die zu einem bestimmten *Eigenwert* E_n gehören. Um den *Grad der Entartung* des vorliegenden Problems beurteilen zu können, berechnen wir ihre *Anzahl*. Offenbar ist:

$$-l \leq m \leq l, \quad 0 \leq l \leq n-1 \quad (282)$$

und somit

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{+l} m = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2. \quad (283)$$

Es gibt also zu jedem *Eigenwert* E_n n^2 *Eigenfunktionen*; jeder *Eigenwert* ist $(n^2 - 1)$ -fach „entartet“. In der Sprache der Bohrschen Theorie ist der Sinn dieser Entartung folgender: Zu jeder *Hauptquantenzahl* n gibt es n n_k -*Bahnen* ($l = k - 1 = 0, 1, 2, \dots, n-1$), deren jede $2l + 1 = 2k - 1$ *verschiedene*, durch die *magnetische* Quantenzahl $m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l$ bzw. $m = -k + 1, -k + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, k - 2, k - 1$ definierte *Raumlagen* annehmen kann (*räumliche Quantelung*). Die *Entartung* findet also in der *Vielfachheit* der zu einer bestimmten (Haupt-)Quantenzahl gehörigen, verschiedenartigen *Elektronenbahnen* ihren Ausdruck (s. dazu auch das früher S. 208 über den *räumlichen Rotator* Gesagte).

Wir wenden uns nun zum Falle

b) $E > 0$ (Seitenstück zu den **Hyperbelbahnen der Bohrschen Theorie**). Führt man diesfalls die *Integration der Schrödingers-*

Gleichung (261) genau so durch, so zeigt sich, daß man jetzt *keine diskreten Eigenwerte* erhält (in Übereinstimmung mit der *Bohrschen Theorie*, die für *Hyperbelbahnen keine Quantenregeln* liefert). Wir erhalten in diesem Falle ein *kontinuierliches* Spektrum. Die *Energiewerte* können dabei *so groß* werden, daß die Elektronen das Atom *verlassen*; es tritt dann eine *kontinuierliche Elektronenemission* ein. Die Wellenmechanik liefert so auch eine Theorie des *lichtelektrischen Effektes*.

D. Die Schrödingersche zeitabhängige Wellengleichung („Zeitgleichung“).

Wir haben früher festgestellt (s. S. 194), daß die *optische Welle*

$$\Psi = a \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{u} + \vartheta \right) \quad (177a)$$

die „*Zeitgleichung*“ der Optik:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (191a)$$

befriedigt. Um zu einer *Materiewelle* zu kommen, brauchen wir bloß (s. S. 183)

$$\frac{1}{u} = \frac{p}{E^*} \quad (167)$$

zu setzen. Während aber die optische Gleichung nur die Wellengeschwindigkeit u enthält, hängt die *Materiewellengleichung* von *zwei* Größen ab: der Bewegungsgröße (dem Impuls) p und der Gesamtenergie E^* . Die Analogie zum optischen Fall ist hier nicht gewahrt. Wir müssen daher eine *andere* Differentialgleichung suchen, die die *Energiekonstante* E^* *nicht mehr aufweist*. Schrödinger schlug folgenden Weg ein.

Gemäß Gl. (192a) muß die *Materiewelle* jedenfalls die Form haben:

$$\Psi(x, y, z; t) = \psi(x, y, z) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t} \quad (284_1)$$

Differenziert man diese Gleichung nach t , so findet man:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} E^* \Psi \quad (285)$$

und kann sodann aus der uns schon bekannten, mit $e^{\frac{2\pi i}{h} E^* t}$ multiplizierten „*Amplitudengleichung*“ (201) in der Form:

$$\Delta \Psi + \frac{8\pi^2}{h^2} m (E^* - E_{\text{pot}}^*) \Psi = 0, \quad (286)$$

in der im Hinblick auf Gl. (198)

$$E_{\text{pot}}^* = E_{\text{pot}} + m_0 c^2 \quad (287)$$

zu setzen ist, den *Energieparameter* E^* entfernen. Man erhält so die gesuchte „Zeitgleichung“:

$$\Delta \Psi - \frac{8 \pi^2}{h^2} m E_{\text{pot}}^* \Psi - \frac{4 \pi i}{h} m \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (288_1)$$

Diese Gleichung hat eine von der oben mitgeteilten optischen Gl. (191 a) wesentlich verschiedene Form, sie besitzt den Charakter der *Differentialgleichung der Wärmeleitung* und derjenigen der *Diffusion*, die beide nur die *erste* Ableitung nach der *Zeit* enthalten; aber die *Energie* E^* *kommt* — wie gewünscht — *nicht mehr darin vor*. Man tut gut, diese Gleichung auch gleich für die *konjugiert-komplexe* Wellenfunktion $\bar{\Psi}$ aufzustellen. Die *Einführung komplexer* Größen ist nur ein *Rechenvorteil*. *Physikalische* Bedeutung haben nur die *reellen* Bestandteile bzw. jene *reellen* Größen, die sich durch Rechenverfahren aus den komplexen ergeben. Wir erhalten somit *zwei* Formen der „Zeitgleichung“: neben Gl. (288₁) gilt auch

$$\Delta \bar{\Psi} - \frac{8 \pi^2}{h^2} m E_{\text{pot}}^* \bar{\Psi} + \frac{4 \pi i}{h} m \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = 0; \quad (288_2)$$

dabei ist $\bar{\Psi}$ *konjugiert-komplex* zu Ψ :

$$\bar{\Psi}(x, y, z; t) = \bar{\psi}(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2 \pi i}{h} E^* t}, \quad (284_2)$$

$\bar{\psi}(x, y, z)$ *konjugiert-komplex* zu $\psi(x, y, z)$. Über den *physikalischen Sinn* der beiden *konjugiert-komplexen* Funktionen Ψ und $\bar{\Psi}$, deren *Produkt* $\Psi \bar{\Psi}$ *reell* ist, gibt das folgende Kapitel Aufschluß.

Die Bedeutung der *Schrödingerschen Zeitgleichung* (288) und ebenso der *Amplitudengleichung* (286) wird dadurch in ein eigenartiges Licht gerückt, daß sich ein *eigentümlicher Zusammenhang* mit dem formalen Ausdruck des für einen Massenpunkt gültigen *Energiesatzes der klassischen Mechanik* herstellen läßt. Der letztere kann gemäß Gl. (198) in der Form geschrieben werden:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}^* = E^* = \text{konst.} \quad (289)$$

unter Beachtung von Gl. (287) oder mit Rücksicht auf $p = m v$ und

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

in der Gestalt:

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + E_{\text{pot}}^* - E^* = 0. \quad (290)$$

Wir wollen nun *rein formal* die Größen p_x, p_y, p_z und E^* durch *Differentialoperatoren* ersetzen in folgender Weise:

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial z},$$

$$E^* \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t}; \quad (291)$$

offenbar haben wir dann weiter:

$$p_x^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad p_y^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad p_z^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (292)$$

zu setzen. Hierdurch geht die linke Seite von Gl. (290) über in den *Operator*:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + E_{\text{pot}}^* - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (293)$$

den wir uns *auf die Wellenfunktion Ψ angewendet* vorstellen wollen. Die *Energiegleichung* verwandelt sich dann in die *Schrödingersche Zeitgleichung*:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi - E_{\text{pot}}^* \Psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (288_1 \text{ a})$$

die nach Multiplikation mit $\frac{8\pi^2 m}{\hbar^2}$ in die Gl. (288₁) übergeht.

Es ist ferner ohne weiteres ersichtlich, daß sich *dieselbe Energiegleichung* (290) bei *gleichem Verfahren*, jedoch mit *Fortlassung der Substitution* $E^* \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$ in die mit $\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m}$ multiplizierte *Amplitudengleichung* (286) verwandelt:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + (E^* - E_{\text{pot}}^*) \Psi = 0. \quad (286 \text{ a})$$

Der durch die Beziehung Gl. (291) angedeutete *Formalismus* erscheint geeignet, die *Wellenmechanik* mit der *klassischen Mechanik* enger zu verketten.

E. Ausbau der Wellenmechanik.

1. Die Schrödingersche „Dichte“ (Wahrscheinlichkeitsdichte) und die wellenmechanische Deutung des Strahlungsvorganges.

Wir wollen den *allgemeinen* Ansatz der Wellenfunktion in einen *räumlichen* und einen *zeitlichen* Anteil spalten:

$$\Psi = \psi(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E^* t}, \quad (284_1)$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\psi}(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E^* t}, \quad (284_2)$$

wie dies schon früher geschehen ist. Um zu einer *physikalischen Deutung* zu gelangen, definieren wir nach E. Schrödinger die *reelle* Größe:

$$\delta = \Psi \bar{\Psi} = \psi \bar{\psi}, \tag{294}$$

bei *reellem* ψ

$$\delta = \psi^2 \tag{294 a}$$

als eine „Dichte“. In diesem Sinne machen wir zunächst die Annahme, daß z. B. die *Dichte der elektrischen Ladung*, die einer gewissen Verteilung derselben bei Anwesenheit des als Wellenpaket gedachten Elektrons an einer bestimmten Stelle des Raumes entspricht, dadurch gefunden wird, daß man die *Elementarladung* e mit δ multipliziert:

$$\begin{aligned} \text{Ladungsdichte} &= e \delta = e \psi \bar{\psi} \\ &\text{bzw. } e \psi^2. \end{aligned} \tag{295}$$

Das *Elektron* erscheint demnach als eine über den ganzen Raum mit verschiedener Dichte verteilte „Ladungswolke“. Als Beispiel sei auf die Abb. 153 und 154 verwiesen, die die radiale Ladungsverteilung (Ladungswolke) für verschiedene, *einfache Zustände des H-Atoms* darstellen. Abb. 153 zeigt nach Pauling die in einer bestimmten Entfernung r vom Kern vorhandene Gesamtladung $D = 4 \pi r^2 e \psi^2$ als Funktion von r . Abb. 154 bringt anschauliche, räumlich zu ergänzende Bilder verschiedener Ladungsverteilungen, bei denen die einem bestimmten Quantenzustand gemäß Gl. (281) entsprechende Ladungsdichte

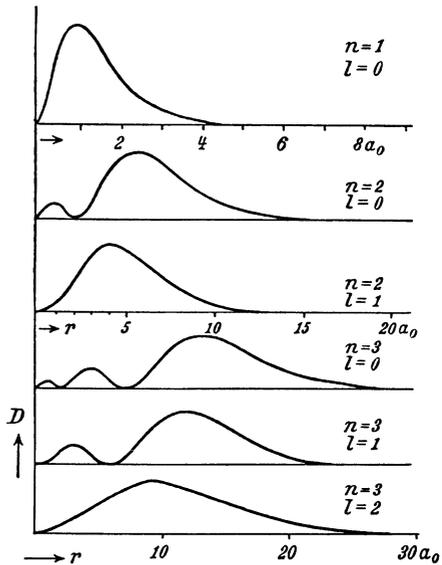


Abb. 153. Radiale Ladungsverteilung im Wasserstoffatom bei verschiedenen Quantenzuständen (nach Pauling).

a_0 bezeichnet den Radius des ersten Bohrschen Kreises.

$$e \psi_{n,l,m}^2 = e C_m^2 [P_l^{|m|}(\cos \vartheta)]^2 \cos^2 m \varphi e^{-\rho} \rho^{2l} [L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)]^2$$

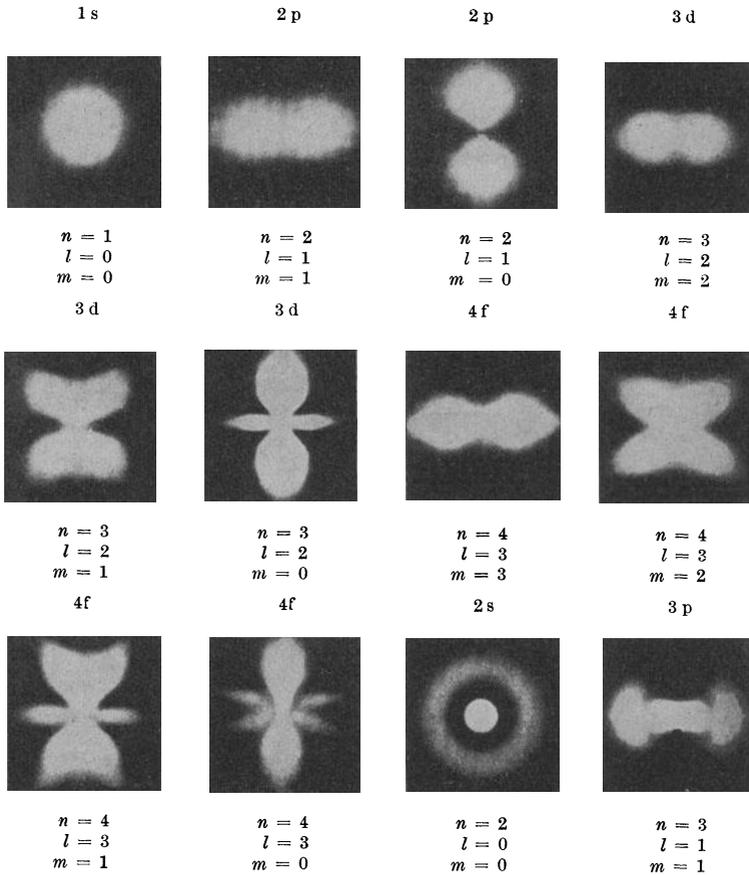


Abb. 154. Anschauliche Darstellung der Ladungsverteilung („Ladungswolke“) bei verschiedenen Quantenzuständen des Wasserstoffatoms (aus: M. BORN, Moderne Physik). Die Helligkeitsstufen jedes Bildes versinnlichen die jeweilige Größe der Ladungsdichte, die unter Berücksichtigung von (281) durch den Ausdruck $e\psi_{n,l,m}^2$ gemessen wird. Für die Quantenzustände mit $m = 0$ erhält man ein Bild der räumlichen Ladungsverteilung durch Drehung der entsprechenden Figur um ihre lotrechte Symmetrale. Sonst stellen die Bilder die Ladungsverteilung in jenen Meridianebenen dar, für welche

$$\cos m\varphi = 1, \text{ also } \varphi = k \cdot \frac{2\pi}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \text{ ist.}$$

durch die Helligkeitsstärke des Bildes versinnlicht wird. Die räumliche Wellenfunktion $\psi_{n,l,m}$ verschwindet, erstens wenn

$$\varrho = 0 \quad (r = 0)^1 \quad \text{und} \quad L_{n+l}^{(2l+1)}(\varrho) = 0$$

¹ Siehe die Fußnote auf der nächsten Seite.

wird, also für $1 + n + l - (2l + 1) = n - l$ Werte von ϱ bzw. r ($n - l - 1$ *Knotenkugeln*), zweitens wenn

$$P_l^{l-m}(\cos \vartheta) = 0$$

wird, also zufolge (237) und (238) für $\vartheta = 0^1$ und $l - m$ Werte von $\cos \vartheta < 1$, somit im ganzen für $l - m + 1$ Werte von ϑ ($l - m$ *Knotenkegel*) und drittens wenn

$$\cos m \varphi = 0$$

wird, also für m Werte von φ (m *Knotenebenen*). Für alle diese *Knotenflächen* ist daher die Ladungsdichte null. *Knotenkugeln* und *-kegel* sind in Abb. 154 deutlich erkennbar.

Diese einfache und *anschauliche Deutung* von $e \delta$ läßt sich indes *nicht aufrecht erhalten*. Schon der Umstand, daß der aus der Masse des Elektrons ermittelte Elektronenradius etwa 10^{-13} cm ausmacht (s. S. 78, Fußnote) und daß auch in der Wellenmechanik das Elektron als Massenpunkt behandelt wird, widerspricht dieser Auffassung. Ihr zufolge müßte ferner bei Vorhandensein *mehrerer* (n) Elektronen *jedem einzelnen* eine solche *Ladungswolke* entsprechen; wir hätten es also mit *n sich überlagernden Ladungswolken* im dreidimensionalen Raum zu tun. Dem ist aber gar nicht so, da das Verhalten von *n Elektronen* (Massenpunkten) nicht durch n entsprechende Schrödingersche Gleichungen im dreidimensionalen Raum, sondern durch *eine solche Gleichung* im *3 n-dimensionalen* Raum beschrieben wird (s.S. 196). Man ist daher nach einem Vorschlag von M. Born zu einer *anderen Deutung* übergegangen, wonach δ als „*Wahrscheinlichkeitsdichte*“ oder „*statistische Dichte*“ erklärt wird. $e \delta$ bedeutet dann die *Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron mit der Ladung e an einer bestimmten Stelle des Raumes anzutreffen ist*. Dort, wo diese Wahrscheinlichkeit ihren *Höchstwert* erreicht, haben wir uns den *Ort* des Elektrons zu denken. Ähnliches gilt für die *Wahrscheinlichkeitsdichte* einer *Masse m*, die durch den Ausdruck $m \delta$ dargestellt wird. Über die mit der Auffassung von δ als Wahrscheinlichkeitsdichte übereinstimmende „*Normierung*“ der Eigenfunktionen ψ_n berichtet der nächste Abschnitt (S. 230).

Wir erklären ferner als „*Moment*“ der „*Dichte*“-*Verteilung*

¹ Ist $l = m = 0$, so fallen die Lösungen $\varrho = 0$ und $\vartheta = 0$ aus und es bleiben nur die $n - 1$ Lösungen für ϱ von $L_n^{(1)}(\varrho) = 0$ ($n - 1$ *Knotenkugeln*).

Gl. (294) bzw. Gl. (294a) in bezug auf eine Koordinate q den Ausdruck

$$M = \int q \delta d\tau = \int q \psi \bar{\psi} d\tau \quad \text{bzw.} \quad \int q \psi^2 d\tau, \quad d\tau = dx dy dz, \quad (296)$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. In diesem Sinne wird z. B. das *elektrische Moment* der beschriebenen „Elektronenladungswolke“ [Gl. (295)] in bezug auf eine bestimmte Koordinate q durch

$$M_e = e \int q \psi \bar{\psi} d\tau \quad \text{bzw.} \quad e \int q \psi^2 d\tau \quad (297)$$

gegeben sein.

E. Schrödinger hat den durch Gl. (294) definierten Begriff der „Dichte“ δ noch in entscheidender Weise *verallgemeinert*. Bei der Berechnung von δ nach Gl. (294) ist offenbar jeweils ein bestimmter Quantenzustand der Energie (Eigenwert) E_k zugrunde zu legen, dem die zugehörige Eigenfunktion Ψ_k bzw. $\bar{\Psi}_k$ (ψ_k bzw. $\bar{\psi}_k$) entspricht:

$$\delta_k = \Psi_k \bar{\Psi}_k = \psi_k \bar{\psi}_k. \quad (298)$$

Wir erhalten so zu *jedem* Quantenzustand eine *eigene* Dichteverteilung, im besonderen eine *eigene* Ladungswolke. Wir wollen nun mit Schrödinger versuchen, unter Benützung von Gl. (284_{1,2}) eine *verallgemeinerte* „Dichte“ durch den folgenden Ansatz zu definieren:

$$\delta_{k,l} = \Psi_k \bar{\Psi}_l = \psi_k \bar{\psi}_l e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k^* - E_l^*) t} = \psi_k \bar{\psi}_l e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - E_l) t} \quad (299)$$

bzw. bei *reellen* Eigenfunktionen ψ_k, ψ_l

$$\delta_{k,l} = \psi_k \psi_l e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - E_l) t}. \quad (299a)$$

Der *physikalische Sinn* dieser „Übergangsdichte“ kann am besten *statistisch* verstanden werden. $\delta_{k,l}$ bedeutet ein Maß für die *Wahrscheinlichkeit*, daß ein *Übergang vom Energiezustand E_k in den Energiezustand E_l* eintritt, d. h. in der Sprache der *Bohrschen Theorie*, daß der *Elektronensprung $E_k \rightarrow E_l$* stattfindet. Im Gegensatz zu δ_k erscheint $\delta_{k,l}$ *zeitabhängig* als Hinweis auf die dabei auftretende *Ausstrahlung* (s. u.).

¹ Im Hinblick auf Gl. (198) ist $E_k^* - E_l^* = E_k - E_l$, da sich die additive Konstante $m_0 c^2$ bei der Differenzbildung weghebt.

Auch ein „Moment“ wollen wir der „Übergangsdichte“ $\delta_{k,l}$ zuordnen:

$$M_{k,l} = \int q \delta_{k,l} d\tau = \int q \Psi_k \bar{\Psi}_l d\tau, \quad (300)$$

das wir in einen zeit- und einen raumabhängigen Teil spalten:

$$M_{k,l} = e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k - E_l)t} \int q \psi_k \bar{\psi}_l d\tau$$

$$\text{bzw. } e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k - E_l)t} \int q \psi_k \psi_l d\tau \quad (300 a)$$

bei reellen Eigenfunktionen. Schrödinger hat für diese über den ganzen Raum zu erstreckenden Integrale, die sich als „Matrixelemente“ auffassen lassen, die *Symbole der Quantenmechanik* eingeführt:

$$q_{k,l} = \int q \psi_k \bar{\psi}_l d\tau \quad \text{bzw.} \quad \int q \psi_k \psi_l d\tau; \quad (301)$$

damit wird

$$M_{k,l} = q_{k,l} e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k - E_l)t}. \quad (302)$$

Hierin liegt der Übergang von der *Schrödingerschen Wellenmechanik* zur *Heisenbergschen Quantenmechanik*, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Schrödinger hat damit bewiesen, daß sich die in der *Quantenmechanik* vorkommenden *Matrixelemente* auch *wellenmechanisch* berechnen lassen. Damit war die Brücke zwischen der *Wellen-* und der *Quantenmechanik* geschlagen und die *Gleichwertigkeit beider Darstellungen* dargetan.

Wenn wir die Größen $M_{k,l}$ näher betrachten, so können wir sie mit dem *Strahlungsprozeß* in Verbindung bringen. Sind nämlich die *Energiezustände ungleich* $E_k \neq E_l$ ($k \neq l$), so existiert ein *von der Zeit abhängiges, elektrisches Moment*, das einen *Strahlungsvorgang* begleitet; es erfolgt also *Ausstrahlung*, und zwar mit der *Frequenz*

$$\nu = \frac{E_k - E_l}{h}. \quad (303)$$

Dieses Ergebnis entspricht der *Frequenzbedingung* [Gl. (73)] von Bohr. Für $k = l$ wird $E_k = E_l$, es findet *keine Ausstrahlung* statt. Dies wieder entspricht den *stationären (strahlungsfreien) Bahnen* der Bohrschen Theorie.

Schrödingers Theorie reicht aber viel weiter. Während die Bohrsche Theorie die *Intensität* der Spektrallinien nur

mit Hilfe des S. 104 ff. besprochenen *Korrespondenzprinzips* zu beurteilen erlaubt, liefert die *Wellenmechanik* unmittelbar auch ein *Maß* für die *Intensität* der Strahlung. Die *Matrixelemente* $q_{k,l}$ können nämlich *ihrem absoluten Betrage nach* als *Intensitätsmaß* der Ausstrahlung für den *Übergang* $E_k \rightarrow E_l$ oder *umgekehrt* gelten; denn es ist

$$|q_{k,l}| = |q_{l,k}|, \quad (304)$$

da

$$q_{k,l} = \int q \psi_k \bar{\psi}_l d\tau = \bar{q}_{l,k} \quad (305)$$

ist und konjugiert komplexe Größen den gleichen absoluten Betrag haben. Ausstrahlungs- und Absorptionsintensität sind somit immer gleich groß.

Erhält man $q_{k,l} = 0$ für eine *bestimmte* Koordinate q , so heißt das, daß die q -Komponente der Strahlung *verschwindet*; das ausgesandte Licht ist „*polarisiert*“ (*Polarisationsregel*).

Ist $q_{k,l} = 0$ für *jede* Koordinate, z. B. für x , y und z , dann findet *überhaupt keine Strahlung* statt. Der Übergang $k \rightarrow l$ ist dann *strahlungslos*, er ist „*verboten*“. Dies bedeutet also eine *Auswahlregel*.

Zusammenfassend läßt sich somit feststellen, daß mit der Möglichkeit, die *Intensität* der Linien zu berechnen, auch die Möglichkeit, *Polarisations-* und *Auswahlregeln* zu finden, gegeben ist.

2. Normierung und Orthogonalität der Eigenfunktionen.

Fassen wir die unter Gl. (298) eingeführte *Schrödingersche „Dichte“* δ_k *statistisch* als „*Wahrscheinlichkeitsdichte*“ auf, so ist klar, daß das über den ganzen Raum erstreckte Integral

$$\int \delta_k d\tau = \int \psi_k \bar{\psi}_k d\tau = 1, \quad (306)$$

bzw. bei *reellem* ψ_k

$$\int \psi_k^2 d\tau = 1 \quad (306 a)$$

werden muß. Wir bringen damit nur die Tatsache zum Ausdruck, daß das betrachtete *Wellenteilchen (Elektron)* *irgendwo im Raum vorhanden* sein muß, daß also die *Wahrscheinlichkeit seiner Existenz im unendlichen Raum gleich 1* ist. Diese Forderung bezeichnet man als „*Normierungsbedingung*“, da mit ihrer Hilfe die durch die *Schrödingersche Amplitudengleichung* (201) nur *bis*

auf einen willkürlichen Faktor bestimmten Eigenfunktionen ψ_k hinsichtlich dieses Faktors normiert werden.

Neben der Normierungsbedingung [Gl. (306)] besteht jedoch für die *Eigenfunktionen* ψ_k noch eine *andere* mathematische Beziehung, die unter dem Namen „*Orthogonalitätsbedingung*“ bekannt ist; sie besagt, daß das gleichfalls über den ganzen Raum erstreckte Integral

$$\int \psi_k \bar{\psi}_l d\tau = 0 \tag{307}$$

bzw. bei *reellen* Eigenfunktionen

$$\int \psi_k \psi_l d\tau = 0 \tag{307a}$$

sein muß, sofern $k \neq l$ und $E_k \neq E_l$ ist. Diese Bedingung ist ein Ergebnis der Anwendung des *Greenschen Satzes* auf die Eigenfunktionen ψ_k . Ihm zufolge gilt:

$$\int_R (\psi_k \Delta \bar{\psi}_l - \bar{\psi}_l \Delta \psi_k) d\tau = \int_O \left(\psi_k \frac{\partial \bar{\psi}_l}{\partial n} - \bar{\psi}_l \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \right) d\mathcal{f}, \tag{308}$$

wobei das rechts stehende Integral über die ganze Oberfläche O desjenigen Raumes R zu erstrecken ist, auf den sich das links stehende Integral bezieht; n bedeutet dabei die Richtung der äußeren Normalen. Dehnen wir das Raumintegral über den unendlichen Raum aus, so rückt dessen Oberfläche ins Unendliche und das Oberflächenintegral wird verschwinden, sobald die Eigenfunktionen ψ_k *im Unendlichen hinreichend stark verschwinden*, was in der Regel zutrifft. Mithin muß auch das über den unendlichen Raum erstreckte Raumintegral verschwinden. Indem wir uns weiter der Schrödingerschen Amplitudengleichung (201) sinngemäß bedienen, können wir sohin schließen:

$$\int (\psi_k \Delta \psi_l - \bar{\psi}_l \Delta \psi_k) d\tau = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E_k - E_l) \int \psi_k \bar{\psi}_l d\tau = 0, \tag{309}$$

woraus für $E_k \neq E_l$ die *Orthogonalitätsbedingung* [Gl. (307)] unmittelbar folgt.

3. Linienintensitäten und Auswahlregel beim harmonischen Oszillator.

Wir begründen vorerst die in Gl. (219) zum Ausdruck kommende *Normierung* der *Eigenfunktionen* des *harmonischen Oszillators*:

$$\psi_n(\xi) = \bar{\psi}_n(\xi) = C_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \tag{310}$$

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2\xi)^{n-2} + \dots = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}. \quad (218)$$

Die *Normierungsbedingung* [Gl. (306a)] verlangt im vorliegenden Fall:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = 1, \quad (311)$$

da sich der unendliche Raum für dieses lineare Gebilde auf den Bereich $-\infty < x < +\infty$ einschränkt. Zwischen der x -Koordinate und der Größe ξ besteht nach Gl. (209) und Gl. (210) der Zusammenhang:

$$\xi = (x-r)\sqrt{\alpha}, \quad \alpha = \frac{4\pi^2}{h} \mu \nu.$$

Wir berechnen vorerst:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi &= C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \\ &= (-1)^n C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} d\xi. \end{aligned}$$

Das zuletzt erhaltene Integral werten wir mit Hilfe fortgesetzter *partieller Integration* aus; wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} d\xi &= \\ &= \left[H_n(\xi) \frac{d^{n-1} e^{-\xi^2}}{d\xi^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d^{n-1} e^{-\xi^2}}{d\xi^{n-1}} d\xi. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der *eckigen Klammer verschwindet* an den Grenzen wegen des beim Differenzieren immer wieder auftretenden Faktors $e^{-\xi^2}$. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes und bei *Fortsetzung des partiellen Integrierens* finden wir schließlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} d\xi = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi = (-1)^n \cdot 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

$$1 \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Mithin wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \cdot C_n^2; \quad (312)$$

andererseits ist im Hinblick auf Gl. (209), Gl. (311) und Gl. (210)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = \sqrt{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu\nu}{h}}. \quad (313)$$

Aus Gl. (312) und Gl. (313) folgt der früher angegebene Wert:

$$C_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{4\pi\mu\nu}{h}}. \quad (219)$$

Die Orthogonalitätsbedingung Gl. (307a) liefert für den harmonischen Oszillator die Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(\xi) \psi_l(\xi) d\xi = 0 \text{ für } k \neq l \quad (314)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (310) unter Weglassung der konstanten Faktoren $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ und $C_k C_l$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(\xi) H_l(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = 0 \text{ für } k \neq l. \quad (315)$$

Wir wenden uns nun zur Berechnung der Ausstrahlungsintensität beim Übergang $E_k \rightarrow E_l$. Indem wir im vorliegenden Fall

$$q = x - r \quad (316)$$

setzen, berechnen wir unter Beachtung von Gl. (209) und Gl. (310) nach Gl. (301) die Matrixelemente

$$\begin{aligned} x_{k,l} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - r) \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_k(\xi) \psi_l(\xi) d\xi = \\ &= \frac{C_k C_l}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} H_k(\xi) H_l(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (317)$$

Wir betrachten die folgenden Fälle:

a) $l = k$:

Es ergibt sich

$$x_{k,k} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_k^2(\xi) d\xi = 0, \quad (318_1)$$

da $\xi \psi_k^2(\xi)$ eine *ungerade* Funktion vom Grade $(2k + 1)$ in ξ ist und somit

$$\int_{-\infty}^0 \xi \psi_k^2(\xi) d\xi = - \int_0^{+\infty} \xi \psi_k^2(\xi) d\xi$$

wird.

b) $l > k$:

Die Funktion $\xi H_k(\xi)$ vom Grad $(k + 1)$ können wir uns *nach den Funktionen* $H_i(\xi)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k + 1$, *in eine Reihe* mit den Koeffizienten c_i *entwickelt* denken:

$$\xi H_k(\xi) = \sum_{i=0}^{k+1} c_i H_i(\xi) = 2^k \xi^{k+1} - \dots = c_{k+1} (2\xi)^{k+1} - \dots$$

woraus wir

$$c_{k+1} = \frac{1}{2} \quad (319)$$

entnehmen. Wir berechnen nun gemäß Gl. (317)

$$x_{k,l} = \frac{C_k C_l}{\alpha} \sum_{i=0}^{k+1} c_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_i(\xi) H_l(\xi) d\xi;$$

der *Orthogonalitätsbedingung* Gl. (315) zufolge *verschwinden alle Integrale*, für die $i < l$ ist, *nur jenes für* $i = l = k + 1$ *ist von Null verschieden*. Mithin sind alle

$$x_{k,l} = 0 \text{ für } l \geq k + 2; \quad (318_2)$$

ungleich Null ist $x_{k,l}$ *nur für* $l = k + 1$:

$$x_{k,k+1} = \frac{C_k C_{k+1}}{\alpha} c_{k+1} \frac{\sqrt{\alpha}}{C_{k+1}^2} = \frac{C_k c_{k+1}}{C_{k+1} \sqrt{\alpha}}$$

nach Gl. (312) und Gl. (313). Die Einsetzung der entsprechenden Werte für C_k , C_{k+1} , c_{k+1} und $\sqrt{\alpha}$ ergibt gemäß Gl. (219), Gl. (319) und Gl. (210):

$$x_{k,k+1} = \sqrt{\frac{k+1}{2\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h(k+1)}{2\mu v}}. \quad (318_3)$$

e) $l < k$:

Dieser Fall läßt sich offenbar auf den vorhergehenden zurückführen, wenn wir dort k und l vertauschen. Wir erhalten so:

$$x_{k,l} = 0 \text{ für } l \leq k - 2 \quad (318_4)$$

und für $l = k - 1$ mit Beachtung von

$$c_k = \frac{1}{2} \quad (319 \text{ a})$$

$$x_{k-1,k} = \frac{C_{k-1} c_k}{C_k \sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hk}{2\mu v}}. \quad (318_5)$$

Es zeigt sich somit, daß von Null verschiedene Linienintensitäten nur für die Übergänge $E_k \rightarrow E_{k+1}$ und $E_k \rightarrow E_{k-1}$ vorhanden sind. Für die Quantenzahl k des harmonischen Oszillators besteht also die Auswahlregel

$$k \rightarrow k \pm 1; \quad (320)$$

alle anderen Übergänge sind „verboten“. Damit erscheint die zur Erklärung der Bandenspektren (s. S. 212) verwendete Auswahlregel für die Schwingungsquantenzahl v

$$v' = v + 1 \quad (252), (254)$$

wellenmechanisch begründet.

Schrifttum für ergänzendes und gründlicheres Studium.

I. Atomphysik im allgemeinen.

- Born, M.: Moderne Physik, sieben Vorträge über Materie und Strahlung. Berlin: Julius Springer. 1933.
- Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Band II/1 (Elektromagnetisches Feld, Optik) und insbes. Band II/2 (Materie u. Äther). 8. Aufl. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1938. Die Darstellung bevorzugt das Experiment, bringt aber auch die Grundlagen der Theorie.
- Schaefer, Cl.: Einführung in die theoretische Physik, Band III/2 (Quantentheorie). Berlin: W. de Gruyter. 1937.
- Sommerfeld, A.: Atombau und Spektrallinien, Braunschweig: Fr. Vieweg. 1931. Wellenmechanischer Ergänzungsband, ebendort 1929. Umfassende Darstellung der Theorie mit Hinweisen auf das Experiment.
- Teichmann, H.: Einführung in die Quantenphysik, Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1935.

II. Besondere Gebiete der Atomphysik.

1. Elementarteilchen und Kernphysik:

- Aston, F. W.: Isotope, deutsch v. E. Norst-Rubinowicz, Leipzig: S. Hirzel. 1923.
- Gamow, G.: Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität, deutsch von C. und F. Houtermans, Leipzig: S. Hirzel. 1932.
- Kallmann, H.: Einführung in die Kernphysik, Leipzig und Wien: F. Deuticke. 1938.
- Lenard, P.: Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg: C. Winter. 1918.
- Meitner, L. u. M. Delbrück: Der Aufbau der Atomkerne, Berlin: Julius Springer. 1935.
- Weizsäcker, C. F. v.: Die Atomkerne, Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft. 1937.
- Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Band XIII. Berlin: Julius Springer. 1934, enthält:
- Fleischmann, R. u. W. Bothe: Künstliche Kern- γ -Strahlen, Neutronen, Positronen.

Kirchner, F.: Elementumwandlung durch schnelle Wasserstoffkerne.

Frerichs, R.: Das Wasserstoffisotop.

2. Höhenstrahlung:

Geiger, H.: Die Sekundäreffekte der kosmischen Ultrastrahlung, Erg. exakt. Naturw., Band XIV. Berlin: Julius Springer. 1935.

Steinke, E. G.: Die kosmische Ultrastrahlung, Erg. exakt. Naturw., Band XIII. a. a. O.

3. Theorie des Atombaus und der Spektren:

Grottrian, W.: Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen, I. u. II. Teil, Band 7 von „Struktur der Materie in Einzeldarstellungen“. Berlin: Julius Springer. 1928.

Hund, F.: Linienspektren und das periodische System der Elemente, Band 4 von „Struktur der Materie in Einzeldarstellungen“. Berlin: Julius Springer. 1927.

Kramers, H. A. u. H. Holst: Das Atom und die Bohrsche Theorie seines Baues, deutsch von F. Arndt, Berlin: Julius Springer. 1925.

Sommerfeld, A.: a. a. O.

4. Röntgenstrahlen und Kristallbau:

Ewald, P. P.: Kristalle und Röntgenstrahlen, Berlin: Julius Springer. 1923.

Regler, F.: Grundzüge der Röntgenphysik, Band XXI der „Sonderbände zur Strahlentherapie“. Berlin und Wien: Urban und Schwarzenberg. 1937.

5. Elektronenstrahlen und -wellen:

Brüche, E. und O. Scherzer: Geometrische Elektronenoptik, Grundlagen und Anwendungen. Berlin: Julius Springer. 1934.

Grimsehl-Tomascheks Lehrbuch der Physik, Band II/2, a. a. O.

Kirchner, F.: Elektronen- und Röntgeninterferenzen, Erg. exakt. Naturw., Band XI. Berlin: Julius Springer. 1932.

Sommerfeld, A.: Wellenmech. Ergänzungsband, a. a. O.

6. Wellen-(Quanten-)Mechanik:

Darrow, K. K.: Elementare Einführung in die Quantenmechanik, deutsch von E. Rabinowitsch. Leipzig: S. Hirzel. 1933.

Darrow, K. K. u. E. Rabinowitsch: Elementare Einführung in die Wellenmechanik, Leipzig: S. Hirzel. 1932.

Flügge, S. und A. Krebs: Experimentelle Grundlagen der Wellenmechanik, Bd. 38 der „Wissenschaftlichen Forschungsberichte, Naturwissenschaftliche Reihe“. Dresden u. Leipzig: Th. Steinkopff. 1936.

Heisenberg, W.: Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Leipzig: S. Hirzel. 1930.

Jahnke, E. und F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1938.

March, A.: Die Grundlagen der Quantenmechanik, Leipzig: J. A. Barth. 1931.

Schrödinger, E.: Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig: J. A. Barth. 1928.

Sommerfeld, A.: Wellenmech. Ergänzungsband, a. a. O.

7. Smekal-Raman-Effekt:

Kohlrausch, K. W. F.: Der Smekal-Raman-Effekt, Band 12 von „Struktur der Materie in Einzeldarstellungen“. Berlin: Julius Springer. 1931.

Namenverzeichnis.

- Anderson, C. D. 4, 9, 11, 30, 33.
Andrade 170.
Aston, F. W. 4, 16, 21, 40ff., 236.
- Back, E. 142ff.
Bäcklin, E. 154f.
Bainbridge 4, 17, 21.
Balmer, J. J. 88.
Bauer, H. (A.) 9, 124, 185.
Becquerel, H. 4, 17, 55.
Bethe, H. A. 4, 51, 83.
Birge 16.
Birkeland 33.
Blackett 29, 30, 61.
Börnstein 111.
Bohr, N. 91ff., 124f., 185.
Born, M. 209, 226f., 236.
Bothe, W. 72f., 236.
Bouwers, A. IV, 74,
Bragg, W. H. u. W. L. 162, 167.
Brickwedde, F. G. 4, 16, 98.
Brogie, L. de 167 (Fußnote), 173,
175, 183, 185, 187.
Brüche, E. 237.
Burton 32.
- Chadwick, J. 4, 14f., 20, 30, 68.
Cockcroft 64.
Compton, A. H. 26, 37.
—, K. T. 72.
Cooke 32.
Coolidge, W. D. 152f.
Coulomb 32.
Curie, I. 29, 68.
Czerny, M. 211.
- Darrow, K. K. 237.
Davisson 173f., 185, 187.
- Debye P. 170ff.
Dee 64, 67.
Delbrück, M. 236.
Dirac, P. A. M. 4, 8, 116, 132.
Duane 26.
Dunnington 8.
- Ehrenhaft, F. 2.
Einstein, A. 4, 24.
Elsasser, W. 173.
Elster 32.
Emde, F. 238.
Euler, H. 86f.
Ewald, P. P. 146ff., 156, 160,
162, 165, 167, 170, 237.
- Fajans 55.
Fermi, E. 71, 79.
Flamm, L. 180.
Fleischmann, R. 236.
Flügge, S. 126, 237.
Freitag, K. 17f.
Frerichs, R. 237.
Fresnel, A. J. 148.
Friedrich 155, 158.
- Gamow, G. 80, 84, 236.
Gans 66.
Geiger, H. 20, 32, 237.
Geitel 32.
Gentner, W. 72f.
Gerlach, W. 132f., 136.
Germer 173f., 185, 187.
Gingrich 28.
Gockel 32.
Goldhaber 68.
Goldstein, E. 38.
Goudsmit 116.

Greinacher, H. 72.
 Grimsehl IV, 145f., 155 236 f.
 Grotrian, W. 128, 237.

Haga 153.
 Hallwachs 24.
 Harkins 66.
 Hasenöhrl, F. 22.
 Heisenberg, W. 191f., 229, 238.
 Helmholtz, H. v. 2.
 Hertz, H. 24.
 Herwegh 167 (Fußnote).
 Herzog, R. 44.
 Heß, V. F. 32.
 Heyn, F. A., V..
 Hittorf, W. 2, 4.
 Holst, H. 89, 100, 237.
 Houston, W. V. 97.
 Hund, F. 237.
 Huygens, Chr. 145, 147f., 180.

Imes 213.

Jahnke 238.
 Joliot, F. 29, 68.
 Jordan 4.

Kallmann, H. 83, 236.
 Kaufmann 8.
 Kirchner, F. 8, 64f., 237.
 Kirsch, G. 12.
 Knipping 155, 158.
 Kohlrausch, K. W. F. 238.
 Kolhörster 32, 35.
 Kossel, W. 112f.
 Kramers, H. A. 89, 100, 237.
 Krebs, A. 126, 237.
 Krishnan 214.
 Küchler 17.
 Kunsman 173.
 Kuntke, A. 74.

Landé, A. 138f., 142.
 Landolt 111.
 Laue, M. v. 154ff.
 Lawrence, E. O. 74ff.
 Lenard, P. 2, 4, 24, 91 236.
 Lenz, E. 36.

Lilienfeld, J. E. 152f.
 Livingston, M. S. 4, 51, 74ff., 83.
 Lorentz, H. A. 2, 139ff.

Madelung 124.
 March, A. 238.
 Marsden 4, 14.
 Mattauch, J. 44f.
 McLennan 32.
 Meitner, L. 17f., 68f., 71, 236.
 Mendelejeff 110.
 Menzel 16.
 Meyer, L. 110.
 Millikan, R. A. 2, 25.
 du Mond 27.
 Moseley, H. G. J. 107ff., 169f.
 Müller 32.
 Murphy, G. M. 4, 16, 98.

Newson 66.
 Newton, I. 22, 148, 180.

Occchialini 29, 30.

Palmer 26.
 Paschen 96, 128, 143f.
 Pauli, W. 79, 118.
 Pauling 225.
 Perrin, J. 2, 4.
 Phillips, N. V., IV, 72, 75.
 Planck, M. 4, 22, 91, 93.
 Pohl 153.
 Preston 139.
 Prout 55.

Rabinowitsch, E. 237.
 Raman, C. V. 213f.
 Rasetti 215f.
 Regener 20.
 Regler, F. 154, 170f., 176, 237
 Ritz 95, 129.
 Röntgen, W. C. 152.
 Rothe, E., V.
 Runge 141.
 Rupp, E. 176, 178f.
 Rutherford, E. 20, 32, 61, 91, 170.
 Rydberg 95, 129.

Schaefer, Cl. 106, 236.

- Scherrer, P. 170ff.
 Scherzer, O. 237.
 Schrödinger, E. 184f., 187, 190f.,
 193, 195f., 202, 222, 225,
 228f, 238.
 Schwarz 17.
 Seemann, H. 152, 154, 170.
 Siegbahn, M. 168ff.
 Skobelzyn 32.
 Smekal, A. 214.
 Smith, M. 118.
 Snell 181.
 Soddy 55.
 Sommerfeld, A. IV, 98ff., 114,
 154, 200, 207, 220, 236 ff.
 Steiner 17.
 Steinke, E. G. 237.
 Stern, O. 132ff., 136.
 Störmer 33.
 Stokes 3.
 Stoner, E. 119.
 Stoney, J. 2.
- Teichmann, H. 236.
 Thomsen 124f.
- Thomson, G. P. 179.
 —, J. J. 2, 38f. 91.
 Tomaschek, R. IV, 236 f.
 Trattner, R. 12.
- Uhlenbeck 116.
 Urey, H. C. 4, 16, 98.
- Van Atta, L. C. 72.
 Van den Broek 110.
 Van de Graaff, R. J. 71f.
- Wagner 26.
 Walter 153f.
 Walton 64, 67.
 Wefelmeier, W. 87.
 Weizsäcker, C. F. v. 84f., 135, 236.
 Wiechert 8.
 Wigner 82.
 Wilson, C. T. R. 9, 19, 32.
 Wind 153.
 Wulf, Th. 32.
- Zeeman, P. 136ff.

Sachverzeichnis.

- Abkömmlinge, radioaktive 60.
Abschirmungszahl 109.
Abtrennungsarbeit 24f.
Alkaliatom s. Einelektronen-
system.
Amplitudengleichung 193ff., 222,
224, 231.
— des harmonischen Oszillators
198.
— des starren Rotators 204f.
— des Wasserstoffelektrons 217.
 α -Teilchen 4, 17ff., 55ff., 67, 77f.
—, Bindungsenergie (Massende-
fekt) 82.
—, Ladung 20f.
—, Masse 21.
—, spezifische Ladung 19.
 α -Teilchenmodell 84, 87f.
Atomabstand in einem zweiato-
migen Molekül 211.
Atommagnetismus 130ff.
Atommodell von Lenard-
Rutherford und Bohr-
Sommerfeld 88ff.
— mit elliptischen Bahnen 98ff.
— mit mitbewegtem Kern 96ff.
— mit ruhendem Kern 91ff.
— v. J. J. Thomson 91.
Atomnummer s. Kernladungs-
zahl.
Atomrumpf 114.
Atomstrahlversuch von Stern
und Gerlach 132ff., 136.
Atomumwandlung, künstliche
60ff.
—, natürliche 55ff.
Atomvolumen 108, 110.
Atomzertrümmerung 60.
Aufspaltung der Spektrallinien
im Magnetfeld s. Zeeman-
und Paschen-Back-Effekt.
— von Atomstrahlen 133f.
Aufspaltungsfaktor von Landé
138ff.
Ausschließungsprinzip von Pauli
118f.
Auswahlregel 230.
— für die azimutale Quanten-
zahl 104ff., 119, 141.
— für die Drehungsquantenzahl
210, 212, 214f.
— für die innere Quantenzahl 119.
— für die magnetische Quanten-
zahl 141.
— für die Schwingungsquanten-
zahl 212, 235.
Azimutaleffekt 37.
Bahn-(Dreh-)impuls 93, 115ff.,
130, 132.
Bahnen, strahlungsfreie (statio-
näre) 92, 185.
Balmer-Serie 88ff., 95f.
— -Term 95, 129.
Balmerische Formel 89ff.
Bandenspektren 208ff.
Barometereffekt 38.
Bergmann-Serie (B. S.) 129.
Beugung s. Interferenz.
Bewegungsgröße s. Impuls.
Bezifferung s. Indizierung.
Bindungsenergien 81ff.
Bogenspektrum 127ff.
Bohrsche Kreise 94, 225.
— Theorie 91ff., 203, 206, 208,
219f., 222.

- Brackett-Serie 96.
 Braggsche Formel (Gleichung) 167, 175ff.
 Brechung (Brechungsquotient, -gesetz) des Lichtes 180ff.
 — der Materiewellen (Elektronen) 174ff., 185ff.
 — der Röntgenstrahlen 179 (Fußnote).
 Breiteneffekt, geomagnetischer 37.
 Bremsspektrum, Bremsstrahlungskante 25f., 151.
 de Broglie-Wellenlänge 174, 183ff., 192, 195.
 de Brogliesche Gleichung 174, 179ff., 183.
 β -Teilchen s. Elektron.
 Compton-Effekt (-Stoß, -Streuung) 1, 26ff., 180, 193.
 Coolidge-Röhre 152f.
 Coulombsche Abstoßung (Kraft) 79f., 92.
 — Energie 85.
 Cyclotron 74ff.
 Debye-Scherrer-Ringe 170ff., 178f.
 Deslandresscher Term 206.
 Deuterium 4, 15ff.
 —, Masse 17.
 —, Rydberg-Zahl 98.
 Deuteron (Deuton) 4, 15ff.
 —, Bindungsenergie (Massendefekt) 81.
 —, Masse 17.
 Deuteronen (Deutonen), hochgeschwinde 67, 71ff.
 Dichte 160.
 —, Schrödingersche (statistische) 224ff., 230.
 D_{α} -Linie 17, 98.
 Doppelbande 212f.
 Doppelfläche, magnetische 130.
 Drall des Elektrons s. Elektronenspin.
 Drehimpuls s. Bahn-(Dreh-)impuls.
 Drehkristallverfahren von W. H. und W. L. Bragg 109, 167ff., 176.
 Drehtransformation 106 (Fußnote).
 Durchstrahlungsmethode von Rutherford und Andrade 170.
 Edelgase, Edelgaskonfiguration 112f., 123.
 Eigendrehimpuls s. Elektronenspin.
 Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators 202, 231ff.
 — des starren Rotators 208.
 — des Wasserstoffelektrons 220f.
 Eigenwerte des harmonischen Oszillators 199ff.
 — des starren Rotators 205f.
 — des Wasserstoffelektrons 219, 221.
 Einelektronensystem 92ff., 126f., 134, 138ff., 142ff., 217ff.
 Elektron 2ff., 55ff., 77ff.
 —, Ablenkung 6f.
 —, Ladung 2.
 —, Masse 5, 8, 28.
 —, Ruhmasse 6, 8.
 —, spezifische Ladung 5, 8, 142.
 — als Welle 173ff.
 Elektronenanlagerung, Prinzip der 124f.
 Elektronenanordnung (-verteilung) in der Atomhülle 120ff.
 Elektronenbeugung (-reflexion) 173ff., 185ff.
 Elektronenradioaktivität 77ff.
 Elektronenradius 78.
 Elektronenspin (-drall) 115ff.
 Elektronensprung 92, 94, 228f.
 Elektronenzwilling 13, 29, 33.
 Elektronvolt 81 (Fußnote).
 Elementarladung (-quantum) IV, 2ff.
 Elementarwelle 145, 147.

- Elementarwürfel 160.
 Elemente, chemische 46ff.
 —, radioaktive 57ff., 68ff., 87.
 —, stabile 51ff., 85ff.
 Ellipsenbahnen 98ff., 217ff.
 — mit Perihelvorrückung 102, 105f.
 Emissionstheorie des Lichtes 180f.
 Energie, Drehungs-(Rotations-) 205f., 209f., 213.
 —, magnetische 139f., 143f.
 —, Schwingungs- (Oszillations-) 200f., 203, 209f.
 Energiefläche 84ff.
 Energiequantum 22, 183.
 Energiesatz 26, 62, 94, 186, 223f.
 Energiestufen 94, 101.
 —, Aufspaltung s. Feinstruktur.
 Entartung, entartete Bahnen 101.
 —, — Eigenwerte 208, 221.
 Erdalkalium s. Zweielektronensystem.
 Erden, seltene 111, 121f., 124f.
 Erdmagnet 35.
 Erdstrahlung 32.
 Erhaltung der elektrischen Ladung 64.
 Erregerfrequenz (-linie) 213ff.
 Erzeugung instabiler Kerne 68ff.
 — stabiler Kerne 61ff.
- Feinbau der Elektronenschalen 117, 120ff.
 Feinstruktur der Spektrallinien 98, 101ff., 170.
 Feinstrukturkonstante von Sommerfeld 102, 104.
 Flüssigkeitsenergie 85.
 Fokussierung beim Drehkristallverfahren 168f.
 — beim Massenspektrographen 42ff.
 Folien, mikrokristalline 170f., 178f.
 Fourier-Entwicklungen (-Reihen) 106f.
 Frequenz (Schwingungszahl) 22, 88f.
- Frequenzbedingung 94f., 210, 229.
 Fundamentalserie s. Bergmann-Serie.
 Funkenspektrum 127.
 Gamma-(γ -)Quant(en), -Strahlen 4, 13, 23, 30, 31, 55f.
 Gas, ideales 184.
 Gegenfeldmethode 25.
 Genauigkeit, spektroskopische 90.
 Gesamtbahnimpuls 125ff., 136f., 142.
 Gesamtdrehimpuls des einzelnen Elektrons 116ff.
 — bei mehreren Elektronen 126f.
 Gesamtmoment, magnetisches, eines Atoms 133, 137.
 Gesamtspin 125f., 136f., 142.
 Geschwindigkeitsfokussierung 42ff.
 Gitter, eindimensionales (Strich-) 146, 148ff.
 —, zweidimensionales (Kreuz-) 149ff., 179.
 —, dreidimensionales (Raum-, Kristall-) 154ff.
 —, kubisches (tesserales, Würfel-) 156ff.
 —, —, einfaches 160.
 —, —, flächenzentriertes 160.
 —, —, körperzentriertes 162.
 —, reziprokes 165.
 Gitterkonstante 150f., 155, 159ff.
 Gitterpotential 175f., 177, 186f.
 Glanzwinkel 167.
 Gravitationsgesetz (Newton-sches) 92.
 Greenscher Satz 231.
 Grundstoffe, chemische 46ff.
 Gruppengeschwindigkeit 189.
- Halbwertszeit** 56.
Hantelmodell, rotierendes 203ff.
 —, schwingendes 197ff.
Hauptquantenzahl s. Quantenzahl.
Hauptserie (H. S.) 129.

- Helium 4.
 —, Rydberg-Zahl 97.
 Heliumkern s. α -Teilchen.
 H $_{\alpha}$ -Linie 90, 96.
 —, Feinstruktur 103f.
 Hochspannungsgeneratoren 71ff.
 Hochspannungswechselfeld 73ff.
 Höhen- und Tiefeneffekt 35f.
 Höhenstrahlung 9, 23, 29, 30, 32ff.
 H⁺-Strahlen 14.
 Huygensches Prinzip 145, 147.
 Hyperbelbahnen 221f.
 Hyperfeinstruktur der Spektrallinien 134.
 Hypothese von Prout 55.
- Impuls 15 (Fußnote), 180, 191ff.
 Impulssatz 15, 26, 62.
 Indizes, Millersche 164ff.
 Indizierung 164ff.
 Intensität der Spektrallinien 105, 107, 230.
 — — — beim harmonischen Oszillator 233ff.
 Intensitätswechsel bei Spektrallinien 134.
 Interferenz von Elektronen 173ff.
 — von Lichtwellen 148ff.
 — von Röntgenstrahlen 154ff.
 — von Wasser- und Luftwellen 145ff.
 Ionenröhre 152.
 Ionisierungskammer 167 (Fußnote).
 Isobare 55, 85.
 Isobarenkurven 86f.
 Isotone 87.
 Isotonenkurven 86f.
 Isotope 45.
 —, stabile 51ff.
 Isotopenkurven 86f.
- Kanalstrahlen 38ff.
 Kannelierung 208.
 Kaskadengenerator 72ff.
 Kathodenstrahlen s. Elektron.
 Kausalgesetz 193.
- Kegel-Rückstrahlverfahren von Regler 171f.
 Keilspalt 153, 155.
 Keplersches Gesetz, drittes 92.
 Kernbausteine 77ff.
 Kernladungszahl 13, 55f., 66, 110.
 Kernmagnetismus 135f.
 Kernmoment, magnetisches 135f.
 —, mechanisches 134f.
 Kernspin 134f.
 Kernumwandlung s. Atomumwandlung.
 K $_{\alpha}$ -Linien 107ff.
 Knotenflächen (-ebenen, -kegel, -kugeln) 226f.
 Koinzidenzfähigkeit 32.
 Kombinationsprinzip 95.
 Korrespondenzprinzip 104ff., 197.
 Kosmische Strahlung s. Höhenstrahlung.
 Kreisstrom 130ff.
 Kreuzgitter s. Gitter.
 Kristallpulververfahren von Debye und Scherrer 170ff., 178f.
 Kugelflächenfunktion, allgemeine 205f.
 —, zonale s. gewöhnliche Kugelfunktion.
 Kugelfunktionen, gewöhnliche 207.
 —, zugeordnete 206ff., 220f.
- Ladungsdichte, -verteilung, -wolke 225ff.
 Landéscher Aufspaltungsfaktor 138ff.
 Lanthaniden s. Erden (seltene).
 Laue-Methode (-Verfahren) 155ff., 172, 176.
 Laufterm s. Term.
 Lebensdauer, mittlere 56.
 Lichtelektrischer Effekt 24f., 222.
 Lichtquant(en) 1, 4, 21ff., 56, 94f.
 —, Impuls 24.
 —, Masse 24.

- Lichtteilchen 22.
 Lilienfeld-Röhre 152f.
 Linienabstand bei den Bandenspektren 210, 212f.
 Linienaufspaltung s. Feinstruktur.
 Linienspektren 88ff., 127ff.
 L_{α} -Linien 108f.
 Lorentz-Triplett, normales 139ff.
 Luftstrahlung 32.
 Lyman-Serie 95f.
- M**achsche Welle 146f.
 Magnetfeld der Erde 35.
 —, inhomogenes 133f.
 Magneton, Bohrsches 132.
 —, Kern- 135f.
 Masse, reduzierte 96, 197, 204.
 Massenäquivalent 63.
 Massendefekt 63, 65, 81f.
 Massendichte, statistische 227.
 Massengleichung 63, 65.
 Massenspektren 41, 45.
 Massenspektrograph 40ff.
 Massenverhältnis $\frac{m_p}{m_e}$ 14, 97.
 Massenwert 63.
 Massenzahl 13, 55f., 66.
 Materiewelle 183ff., 194, 222.
 Matricelemente 229f.
 — des harmonischen Oszillators 233ff.
 Mehrelektronensystem 125ff., 136ff., 142, 144.
 Mehrfachbeschleunigung 75f.
 Mikroskop nach Heisenberg 193.
 Millersche Indizes 164ff.
 Mischelemente 46.
 Mischungsverhältnis $\frac{N}{Z}$ 84.
 Mitbewegung des Atomkerns 96ff.
 M_{α} -Linien 108.
 Modulation 182, 188f.
 Molekülmodell, zweiatomiges, rotierendes 203ff.
 —, —, schwingendes 197ff.
- Moment, der Dichteverteilung (Übergangsdichte) 227ff.
 —, —, magnetisches, eines magnetischen Dipols 131.
 —, —, eines Atoms 133f.
 —, —, eines Atomkerns 135f.
 —, —, eines Elektrons 132.
 —, —, eines Kreisstromes 132.
 Moseleysches Gesetz 109f.
 Moseleysche Gerade 108, 110.
 Multiplett s. Feinstruktur.
 Multiplettserien 130.
 Muttersubstanz 60.
- N**achbeschleunigung s. Mehrfachbeschleunigung.
 Näherung, Newtonsche ($v \ll c$) 6, 25, 30f., 63, 91ff., 96ff., 99ff., 104ff., 186f., 195ff.
 Nebelkammer 9f.
 Nebenquantenzahl s. Quantenzahl.
 Nebenserie, diffuse und scharfe (I. und II. N. S.) 129.
 Netzebenen 162ff., 174.
 Neutrino 79.
 Neutron 4, 14f., 66, 77ff.
 Neutronen, langsame 71.
 Neutronenanlagerung 68, 70f.
 Neutronengenerator V.
 Neutron-Proton-Kraft 80, 82.
 Nickel-Einkristall 173ff.
 Nordlicht 33.
 Normierung (Normierungsbedingung) der Eigenfunktionen 227, 230.
 — des harmonischen Oszillators 202, 231ff.
 Nullpunktsenergie 203.
- O**berflächenspannung 85.
 Operator, Laplacescher 194, 196, 205, 217.
 Ordnung (Ordnungszahlen) der Beugungsbilder (Wellenfronten) 148ff., 156ff.
 Orthogonalitätsbedingung für die Eigenfunktionen 231.

- Orthogonalitätsbedingung für die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators 233ff.
- Ortho-Zustand 118, 140.
- Oszillator, harmonischer 197ff.
- Parabelmethode 38ff.
- Para-Zustand 118, 140.
- Paschen-Back-Effekt 143f.
- Paschen-Serie 96.
- Paulisches Prinzip (Pauli-Verbot) 118f.
- Pendelbahn 100, 219.
- Periodenlängen 112, 123f.
- Periodisches System 55, 110ff.
- Pfund-Serie 96.
- Phase, Phasengeschwindigkeit 188ff., 194.
- Photoeffekt 1, 24f., 180.
- Photon(en) s. Lichtquant(en).
- π -Komponenten 140ff.
- Plangitter 154.
- Plejade 46.
- Polarisation (Polarisationsregel) der Spektrallinien 105, 230.
— der Spektrallinien im Magnetfeld 140f.
- Polarkoordinaten, ebene 99.
—, räumliche 204f., 217.
- Polarlicht 33.
- Polynome, Hermitesche 201f.
—, Laguerresche 220f.
—, Legendresche 207.
- Polynommethode von Sommerfeld 200f., 218ff.
- Positron 4, 8ff., 29ff., 77ff.
- Potentialtopf 80.
- Potentialwall 80.
- Prestonsche Regel 139.
- Primärfleck 157.
- Prinzipalserie s. Hauptserie.
- Prismenspektrograph (-spektroskop) 43, 88f.
- Proton 4, 13f., 18, 67, 69, 77ff.
—, Masse 14.
—, spezifische Ladung 14.
- Protonen, hochgeschwinde 67, 71ff.
- Protonenanlagerung 68, 70.
- Protonenwellen 179.
- Punkt, mehrfacher 158f.
- Quantelung, räumliche 115f., 133f., 139, 208, 221.
- Quantenbedingung, Quantisierung(sregel), Bohrsche, für das Wasserstoffelektron 93f., 185.
— — für den harmonischen Oszillator 203.
— — für den starren Rotator 206.
- Quantenbedingung, Quantisierung(sregel), Schrödingersche 196.
— — für das Wasserstoffelektron 219.
— — für den harmonischen Oszillator 200f.
— — für den starren Rotator 205f.
- Quantenmechanik 1, 179ff., 229f., 233ff.
- Quantenzahl, Drehungs- (Rotations-) 209f., 212ff.
—, Haupt- 94, 101, 114, 219, 221.
—, innere 116ff.
—, Neben- (azimutale) 99, 114f., 219, 221.
—, radiale 99, 219.
—, Schwingungs- (Oszillations-) 209, 211f.
—, Spin- 116f.
- Quantenzahlen des einzelnen Elektrons 114ff.
—, halbzahlige 203, 206.
—, magnetische 118, 139ff., 208, 221.
- Radioaktivität, künstliche 68ff.
—, natürliche 55ff., 81.
- Raman-Effekt s. Smekal-Raman-Effekt.
- Reaktionsenergie 63.
- Reflexion an Netzebenen 162ff.
— von Elektronen 173ff.
- Reihe, hypergeometrische 207.

- Reinelemente 46.
 Rekursionsformel der (gewöhnlichen) Kugelfunktionen 207.
 — für die Koeffizienten der Hermiteschen Polynome 201.
 — für die Koeffizienten der Polynome beim Wasserstoffelektron 219.
 Relativitätstheorie 8, 22, 184.
 Richtungsfokussierung 43f.
 Richtungsquantelung 115f., 133f., 139.
 Ring erster Ordnung 158f.
 Ritz-Term 129.
 Röntgenlinien (-spektren) 107ff.
 Röntgenröhren 151ff.
 Röntgenstrahlen 151ff.
 —, Brechungsquotient der 179 (Fußnote).
 Rosettenbahnen 102.
 Rotationsbanden (-spektren) 210f.
 Rotationsschwingungsbanden (-spektren) 211ff.
 Rotator, starrer 203ff.
 Rungescher Nenner 141.
 Rungesche Regel 141.
 Rydberg-Term 129.
 Rydberg-Zahl 90, 95ff.

 Schalenbau der Elektronenhülle 112ff.
 Schauer von Elektronen und Positronen 33.
 Schneidmethode von H. Seemann 170.
 Schrödinger-Gleichung, zeitabhängige (Zeitgleichung) 222ff.
 — —, zeitunabhängige (Amplitudengleichung) 193ff.
 Schwebemethode 2f.
 Schwebung 187, 189f.
 Schwerpunktsatz 197, 204.
 Seemann-Röhre 152, 154.
 Seriengrenze 88, 91.
 Siemens-Dofok-Röhre 153.
 σ -Komponenten 140ff.

 Smekal-Raman-Effekt 213ff.
 Spiegelversuch von Fresnel 148f.
 Spin s. Elektronenspin.
 Spinmoment, magnetisches 132.
 —, mechanisches (Spin) 116, 132.
 Spinquantenzahl 116f.
 Spintheriskop 20.
 Spitzenzähler 20.
 Stabilität der Atomkerne 63, 81ff., 85ff.
 Steinsalzgitter 161.
 Stokesische Formel 3.
 Stoßionisation 10, 20, 76.
 Strahlenmechanik 185.
 Strahlenoptik 184.
 Strahler, klassischer 105.
 Strahlungsquanten 23.
 Streuung, inkohärente (Stokesische und anti-Stokesische) 214f.
 —, kohärente (Rayleighsche) 213, 215.
 Strichgitter s. Gitter.

 Term, unveränderlicher (konstanter) 95.
 —, Lauf- 95.
 Termschema der Röntgenlinien 119.
 — des Bogenspektrums 127f.
 Tiefeneffekt 35.
 Trägerwelle, modulierte 182, 187ff.
 Trägheitsmoment 204, 209, 211, 216.
 Transurane 71.
 Tröpfchenmodell 84ff.
 Tyndall-Effekt 213.

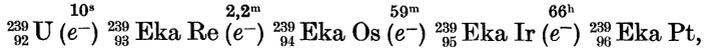
 Übergangsdichte 228f.
 Überlagerung s. Interferenz.
 Ultrabetastrahlung 32.
 Ultraelektron 34f.
 Ultragammapstrahlung 32.
 Ultrastrahlungs.Höhenstrahlung.
 Umwandlung von Strahlung in Materie 29ff.

- Umwandlungen, α - 55ff., 78.
 —, β - (e^-) 55ff., 70f., 77ff.
 —, e^+ - 68ff., 77ff.
 —, sonstige 60ff.
 Ungenauigkeit der Impulsbestimmung 191f.
 — der Ortsbestimmung 191.
 Ungenauigkeitsbeziehung von Heisenberg 191ff.
 Untergruppen der Elektronenhülle 112.
 Vakuumspektrograph 169f.
 Valenz, Valenztheorie von Kossel 112f.
 Vernichtungsstrahlung 23, 31.
 Verschiebungsgesetz für die Bremsstrahlungskante 26.
 Verschiebungssätze von Soddy und Fajans 55.
 Vielfachheit der Energiestufen (Terme) 125ff.
 Wahrscheinlichkeitsdichte (statische Dichte) 224ff., 230.
 Wasserstoff 4.
 —, Rydberg-Zahl 90, 97.
 —, schwerer, s. Denterium.
 Wasserstoffatom 92ff., 185, 217ff.
 Wasserstoffähnliche Atome s. Ein-elektronensysteme.
 Wasserstoffdublett 103f.
 Wasserstoffserien 95f.
 Wellenfunktion Ψ 188ff., 194, 202, 222ff.
 — ψ 194ff., 201f., 205, 208, 222ff.
 Wellengleichung, optische 194, 222.
 —, Schrödingersche s. Schrödinger-Gleichung.
 Wellengruppe, harmonische 188ff.
 —, nichtharmonische (Wellenpaket) 190f., 194, 198.
 Wellenlänge 22.
 —, de Brogliesche 174, 183.
 Wellenmechanik 1, 179ff., insbes. 193ff., 229.
 Wellenoptik 147ff., 184.
 Wellentheorie des Lichtes 181f.
 Wellenzahl 88.
 Wellenzüge, harmonische 188, 194, 222.
 Wertigkeit s. Valenz.
 Wilson-Kammer 9f.
 Wirkung, Wirkungsgröße 93.
 Wirkungsatom, Wirkungsquantum IV, 24, 93, 192.
 Würfelgitter s. Gitter.
 Zählrohrkoinzidenzen 34.
 Zeeman-Effekt, anomaler 132, 136ff.
 —, normaler 139ff.
 Zerfall s. Umwandlung.
 Zerfallsgesetz 56.
 Zerfallskonstante 56.
 Zerfallsreihen, radioaktive 57, 60.
 Zerstreuerung, natürliche 32.
 Zinkblende, Bezifferung (Indizierung) 165.
 —, Gitter 161.
 —, Laue-Bild 158f.
 Zonenachse, -ellipsen, -kreise 165f.
 Zweielektronensystem 126, 128, 130, 140, 144.
 Zweig, negativer (P-) 212f., 215.
 —, Null- (Q-) 215.
 —, positiver (R-) 212f., 215.
 Zwischenniveau 214.

Berichtigungen.

S. VIII, Z. 8 von unten: d) Elektronenanordnung in der Atomhülle: lies 123 statt 119.

S. 71, Z. 20 lies:



womit die Reihe noch keineswegs abgeschlossen ist.

S. 99, Z. 5 von oben: lies $\dot{\varphi}$ statt φ .

S. 109, Abb. 71, Z. 4 von oben: lies Messing = Legierung ... statt Messing-Legierung ...

S. 246, Spalte 2, Z. 3 von oben: lies —, magnetisches, ... statt —, —, magnetisches, ...