Б. Б. ГУРЕВИЧ и В. П. МИНОРСКИЙ

УЧЕБНИК АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1958

В. Б. ГУРЕВИЧ и В. П. МИНОРСКИЙ

УЧЕБНИК АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

11-5-2

Книга представляет собой учебник по аналитической геометрии для втузов с программой по математике на 360—400 часов. Авторы стремились изложить материал в наиболее краткой форме, но с достаточной полнотой и строгостью. Исследование общего уравнения кривых второго порядка излагается в двух вариантах, позволяющих изучить этот раздел с меньшей или большей полнотой, в зависимости от времени, отведенного по учебному плану. Раздел «Определители», данный в качестве приложения, рассчитан на минимальное количество учебного времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

При составлении учебника авторы задались целью по возможности кратко изложить материал, полностью охватывающий программу курса аналитической геометрии во втузах (с общим числом часов по математике 360—400), включая необязательные пункты. Вместе с тем авторы стремились, чтобы все выводы и доказательства были даны с достаточной полнотой и строгостью и чтобы краткость достигалась выбором возможно простых и в то же время точных доказательств.

С самого начала в учебнике вводится термин «вектор» для направленного отрезка. Однако, кроме термина «вектор», обозначения и определения равных векторов, никаких других сведений о векторах в начале курса не дается. Приняты следующие обозначения: $\overrightarrow{AB}$ — вектор, AB — его длина, $\overline{AB}$ — величина вектора на оси.

Глава V «Исследование общего уравнения линии второго порядка» построена так, что ее можно изучить с большей или меньшей полнотой, в зависимости от имеющегося времени на прохождение этой главы. Если ограничиться установлением, какие геометрические образы определяет уравнение линии второго порядка, то достаточно прочитать текст, помещенный на стр. 75—78 для центральной линии и на стр. 85—86 для нецентральной линии. При этом даются и формулы для нахождения коэффициентов упрощенного уравнения, но требующие в практическом применении довольно длительных вычислений (особенно для центральной линии).

На стр. 79—80 помещены два варианта простых и удобных способов нахождения коэффициентов упрощенного уравнения центральной линии и ее построения. В первом варианте (близком к обычному изложению) некоторые выкладки опущены (опустить можно и текст, напечатанный в этом варианте мелким шрифтом). Во втором варианте все полностью доказано и дана более удобная формула для нахождения угла поворота осей координат, при котором $2B' = 0$. Обращаем внимание преподавателей на второй вариант, в котором способы вывода необходимых формул и расположение выкладок таковы, что времени требуется не намного больше, чем на первый вариант, при полном доказательстве во втором варианте всех формул.

На стр. 87—89 помещен весьма удобный в практическом применении второй способ упрощения и исследования уравнения нецентральной линии второго порядка.

Текст, напечатанный в главе V мелким шрифтом, содержит материал, углубляющий и расширяющий исследование общего уравнения линии второго порядка, включая классификацию линий второго порядка, при помощи определителей

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & H \end{vmatrix}.$$

Ввиду краткости времени, которое может быть уделено изучению раздела «Определители», авторы ограничились рассмотрением одних только миноров вместо минора и адъюнкты, различных по определению, но равных по величине или отличающихся только знаком. Это избавляет от затраты времени на установление связи между обоими понятиями и в то же время не мешает полноте и точности изложения.

Исследование решения системы линейных уравнений проводится в учебнике методом, отличным от обычно принятого во втузах, с целью достижения большей простоты и отчетливости.

Авторы выражают благодарность доценту Р. Я. Шостаку и редактору В. А. Солодкову за ценные советы и указания.

Авторы будут признательны читателям, которые пришлют свои замечания и пожелания относительно учебника (по адресу: Москва, Ленинский проспект, 15, Государственное издательство физико-математической литературы).

В. Гуревич
В. Минорский

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия есть раздел математики, в котором изучаются геометрические образы (точки, линии, поверхности, геометрические фигуры) при помощи алгебры. В основе такого способа изучения геометрических свойств лежит *метод координат*, позволяющий определить любую точку плоскости и пространства несколькими числами (координатами), а линии и поверхности — уравнениями.

Создателем аналитической геометрии является французский математик и философ Декарт (1596—1650), который в своем сочинении «Геометрия», изданном в 1637 г., изложил основы этой науки. Некоторые идеи аналитической геометрии (правда, в иной форме) содержатся также в работах французского математика Ферма (1601—1665).

Создание аналитической геометрии имело исключительно важное значение. «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому уже стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*...» (Ф. Энгельс).

Аналитическая геометрия и связанное с ее появлением открытие дифференциального и интегрального исчисления создали новые мощные средства математических исследований. Многие важные и сложные задачи, которые не умели решать в течение сотен лет, были разрешены. Методы этих математических наук явились основой крупных успехов механики и физики, получили богатейшие применения в разнообразных областях технических знаний и способствовали быстрому развитию точных наук и техники.

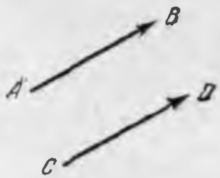
Курс аналитической геометрии мы разделим на две части: в первой части излагается аналитическая геометрия на плоскости, во-второй — аналитическая геометрия в пространстве.

ЧАСТЬ I
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА I
МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Вектор. *Направленный отрезок* (черт. 1), *в котором одна из точек, его ограничивающих, например A, рассматривается как начало, а другая, B, как конец, называется вектором* и обозначается $\overrightarrow{AB}$. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ мы будем обозначать $|\overrightarrow{AB}|$ или AB.

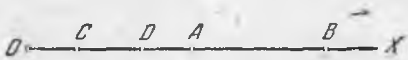
Черт. 1.



Черт. 2.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (черт. 2) называются *равными*, если 1) равны их длины, 2) они параллельны и 3) направлены в одну сторону. В этом случае мы будем записывать: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

§ 2. Ось. Величина вектора на оси. *Осью* называется прямая, на которой указано направление (черт. 3). Если вектор лежит на оси,



Черт. 3.

то мы называем *величиной* вектора *число*, равное длине вектора, взятой со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление вектора противоположно направлению оси. Величину вектора $\overrightarrow{AB}$, лежащего на оси, мы будем обозначать $\overline{AB}$. На черт. 3 имеем: $\overline{AB} = 4$; $\overline{CD} = 2$; $\overline{BA} = -4$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, лежащие на оси, имеют противоположные направления и одинаковую длину, то всегда

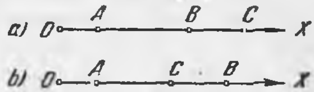
$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \tag{1}$$

Теорема. *При любом расположении точек A, B и C на оси имеет место равенство*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{2}$$

Доказательство. Всевозможных расположений точек A, B, C на оси OX имеется шесть: 1) ABC, 2) ACB, 3) BAC, 4) BCA, 5) CAB, 6) CBA.

В случае 1) (черт. 4, *a*) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ равны длинам отрезков AB, BC и AC, и формула (2) выражает то очевидное свойство, что сумма длин отрезков AB и BC равна длине отрезка AC. Все остальные случаи приводятся к случаю 1). Так, в случае 2) (черт. 4, *b*) имеем, как в случае 1), $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Так как $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ и $\overline{AB}$ — числа, то из этого числового равенства получаем: $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{CB}$. Но в силу равенства (1) $-\overline{CB} = +\overline{BC}$, следовательно, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

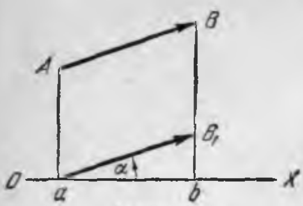


Черт. 4.

Доказав теорему для 3 точек на оси, легко доказать ее для 4 точек, 5 точек, ..., а затем и для любого числа как угодно расположенных точек A, B, C, D, ..., K, L на оси

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}. \tag{3}$$

§ 3. Проекция вектора на ось. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось OX (черт. 5). Опустим из точек A и B перпендикуляры Aa и Bb на ось OX. Величина $\overline{ab}$ вектора $\overrightarrow{ab}$ называется *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX.



Черт. 5.

Угол α между осью OX и вектором $\overrightarrow{AB}$ (черт. 5) определяется следующим образом: строим вектор $\overrightarrow{aB_1} = \overrightarrow{AB}$, у которого начало a лежит на оси OX; угол α между осью OX и вектором $\overrightarrow{aB_1}$ (или $\overrightarrow{AB}$) равен углу, на который надо повернуть луч aX против вращения часовой стрелки, чтобы он совместился с вектором $\overrightarrow{aB_1}$ (или же углу поворота луча aX по часовой стрелке до совмещения с вектором $\overrightarrow{aB_1}$, причем угол этот берется со знаком минус). Таким образом, рассматриваемый угол α определяется, как в тригонометрии.

Теорема. *Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между осью проекций и вектором.*

Доказательство. Как известно из тригонометрии, по определению косинуса любого угла (черт. 5) имеем:

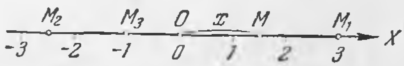
$$\cos\alpha = \frac{\overline{ab}}{|\overrightarrow{aB_1}|} = \frac{\overline{ab}}{|\overrightarrow{AB}|},$$

откуда

$$\overline{ab} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha = AB\cos\alpha. \tag{4}$$

§ 4. Координаты на прямой. *Координатами* точки называются числа, определяющие положение точки на линии, на поверхности, в пространстве.

Для определения положения любой точки на прямой (черт. 6) выберем на этой прямой направление (называемое *положительным* *)) и какую-



Черт. 6.

нибудь точку O, называемую *началом координат*. Выберем также единицу измерения длин (масштабную единицу). *Назовем координатой любой точки M на оси OX величину $\overline{OM} = x$ вектора $\overrightarrow{OM}$.* Тогда каждую точку M прямой OX определит координата этой точки. Действительно, зная координату x точки M (черт. 6), строим на оси OX вектор $\overrightarrow{OM}$, *величина* которого $\overline{OM} = x$, и находим единственную точку M; например, зная координату $x = 3$, найдем точку M_1 (черт. 6), по координате $x = -2{,}5$ — точку M_2. Обратно, зная точку M на оси OX, найдем *величину* $\overline{OM}$ вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. координату $x = \overline{OM}$ точки M. Например, на черт. 6 найдем координату точки M_3: $x = \overline{OM_3} = -1$.

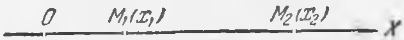
Запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x. Например, на черт. 6 построены точки $M_1(3)$, $M_2(-2{,}5)$. *Задать точку* на оси координат это значит задать ее координату. Ось, на которой выбраны начало координат и масштабная единица, называется *координатной осью*.

§ 5. Вектор с заданными координатами начала и конца. Теорема. *Чтобы найти величину вектора, лежащего на оси координат, надо из координаты его конца вычесть координату его начала.*

---

*) На чертежах это направление указывается стрелкой.

Доказательство (черт. 7). Пусть даны начало $M_1(x_1)$ и конец $M_2(x_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, лежащего на оси координат OX. При любом



Черт. 7.

расположении точек M_1, M_2, O имеем (§ 2):

$$\overline{OM_1}+\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2},$$

откуда

$$\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}.$$

По заданному имеем: $\overline{OM_1}=x_1$, $\overline{OM_2}=x_2$. Следовательно,

$$\overline{M_1M_2}=x_2-x_1, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Длина отрезка M_1M_2 [или *расстояние* между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$] равна абсолютному значению числа $\overline{M_1M_2}$. Следовательно,

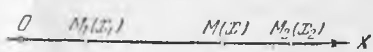
$$M_1M_2=|\overline{M_1M_2}|=|x_2-x_1|. \tag{6}$$

Пример. Даны точки $M_1(-3)$, $M_2(-8)$. Найти $\overline{M_1M_2}$ и M_1M_2.

Решение. $\overline{M_1M_2}=x_2-x_1=-8+3=-5$; $M_1M_2=|-5|=5$.

§ 6. Деление отрезка на оси в данном отношении.

Задача. Даны концы $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ отрезка M_1M_2 (черт. 8). Найти точку $M(x)$, делящую отрезок M_1M_2 в отношении:



Черт. 8.

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\lambda.$$

Черт. 9.

Если искомая точка $M(x)$ лежит *между* точками M_1 и M_2, то такое деление отрезка M_1M_2 называется *внутренним*. Но можно поставить ту же задачу, потребовав, чтобы точка $M(x)$ лежала *вне* отрезка M_1M_2 (черт. 9); такое деление называется *внешним*. В случае внутреннего деления отрезка числа $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ одного знака, и отношение их λ — число положительное. В случае внешнего деления числа $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ (черт. 9) разных знаков и их отношение λ — число отрицательное.

По формуле (5) (§ 5) имеем:

$$\overline{M_1M}=x-x_1; \qquad \overline{MM_2}=x_2-x.$$

По заданию

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\lambda, \text{ т. е. } \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

Находим x из последнего уравнения:

$$x-x_1=\lambda x_2-\lambda x; \quad x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{7}$$

Пример 1. Даны концы отрезка $M_1(2)$ и $M_2(8)$. Найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\frac{1}{2}$.

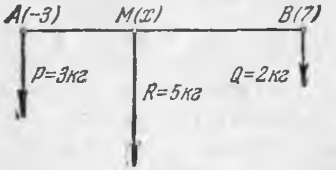
Решение:

$$x=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 8}{1+\frac{1}{2}}=4.$$

Так как $\lambda=\frac{1}{2}>0$, то деление внутреннее. Сделайте чертеж: постройте ось OX и на ней точки $M_1(2)$, $M_2(8)$, $M(4)$.

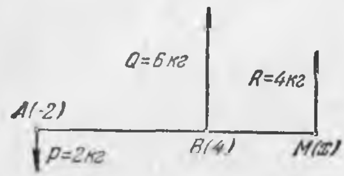
Пример 2. В точках $A(-3)$ и $B(7)$ приложены параллельные силы $P=3$ *кг* и $Q=2$ *кг*. Найти точку $M(x)$ приложения равнодействующей.

Решение. Сначала делаем черновой чертеж («эскиз») (черт. 10), служащий лишь для лучшего уяснения содержания задачи (точный чертеж при решении задач по аналитической геометрии делается после аналитического решения). Из физики известно, что при сложении параллельных сил P и Q (черт. 10) плечи AM и MB обратно пропорциональны прилежащим силам: $\frac{AM}{MB}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{2}{3}=\lambda$. По формуле (7)



Черт. 10.

$$x=\frac{-3+\frac{2}{3}\cdot 7}{1+\frac{2}{3}}=1.$$



Черт. 11.

Итак, точка приложения равнодействующей есть $M(1)$. Теперь постройте точный чертеж: на оси OX нанесите точки $A(-3)$, $B(7)$, $M(1)$ и постройте приложенные в них силы P, Q, R.

Пример 3. В точках $A(-2)$ и $B(4)$ приложены параллельные силы $P=2$ *кг* и $Q=6$ *кг*, направленные в разные стороны. Найти точку приложения равнодействующей R (черт. 11).

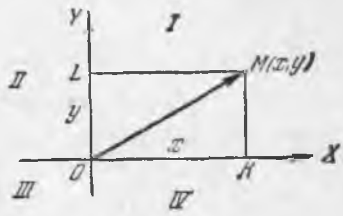
Решение. Из физики известно: $\frac{AM}{MB}=\frac{6}{2}=3$. Но так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ имеют противоположные направления (черт. 11), то $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=-3=\lambda$.

Следовательно, по формуле (7)

$$x = \frac{-2-3\cdot 4}{1-3} = 7.$$

Постройте точный чертеж.

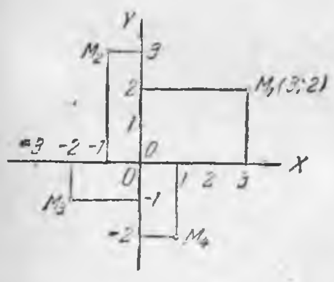
§ 7. Прямоугольные координаты на плоскости. Для определения положения точки на плоскости возьмем две взаимно перпендикулярные координатные оси OX и OY с общим началом O (черт. 12) и одинаковой масштабной единицей.



Черт. 12.

Ось OX называется *осью абсцисс*, ось OY — *осью ординат*. Вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с точкой M плоскости, называется *радиусом-вектором* точки M. *Проекции x и y радиуса-вектора точки M на оси координат называются координатами точки M*. При этом проекция $\overline{OK} = x$ на ось OX называется *абсциссой* точки M, а проекция $\overline{OL} = y$ на ось OY — *ординатой* точки M.

Заданная пара координат x и y определяет единственную точку M плоскости, и, обратно, каждая точка плоскости имеет единственную пару координат. В самом деле, пусть заданы координаты x и y точки M. Строим на осях OX и OY точки K и L по заданным $\overline{OK} = x$ и $\overline{OL} = y$ (черт. 12). Восставив из точек K и L перпендикуляры к осям координат, найдем единственную точку M с координатами x и y. Так, например, по заданным координатам $x = 3$; $y = 2$ можно построить единственную точку M_1 (черт. 13). Обратно, если дана точка плоскости M, то, определив проекции $\overline{OK} = x$ и $\overline{OL} = y$ ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси координат, получим единственную пару координат x и y точки M.



Черт. 13.

Отметим, что для построения координат $\overline{OK} = x$ и $\overline{KM} = y$ точки M (черт. 12) достаточно из точки M опустить один перпендикуляр MK на ось OX.

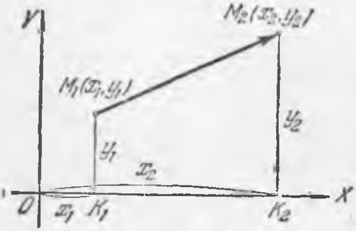
Запись $M(x, y)$ или $M(x; y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y. На чертеже 13 нанесены точки $M_1(3; 2)$; $M_2(-1; 3)$; $M_3(-2; -1)$.

Задать точку плоскости — это значит задать ее координаты.

Координатные углы (т. е. углы, образованные осями координат) нумеруются, как показано на черт. 12.

Упражнение. Постройте прямоугольную систему координат; постройте в этой системе точки $A(-3;\ -3)$; $B(3;\ -2)$; $C(-2;\ 3)$. По черт. 13 найдите координаты точки M_4.

§ 8. Проекции вектора на оси координат. Теорема. *Если заданы координаты начала и конца вектора, то, чтобы найти проекцию этого вектора на каждую ось координат, надо из соответствующей координаты его конца вычесть координату начала.*



Черт. 14.

Доказательство. Пусть даны начало $M_1(x_1, y_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2)$ вектора $\overline{M_1M_2}$ (черт. 14). Проекция вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на ось OX равна $\overline{K_1K_2}$. Из определений следует, что точка K_1 имеет на оси OX координату x_1, точка K_2 — координату x_2. Следовательно, по теореме § 5 имеем:

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{M_1M_2} = \overline{K_1K_2} = x_2 - x_1. \tag{8}$$

Аналогично найдем:

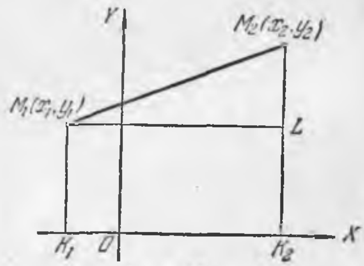
$$\text{пр}_{OY}\overrightarrow{M_1M_2} = y_2 - y_1. \tag{8'}$$

§ 9. Расстояние между двумя точками. Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и требуется найти длину d отрезка M_1M_2 (черт. 15). Из прямоугольного треугольника M_1M_2L имеем:

$$d^2 = M_1M_2^2 = M_1L^2 + LM_2^2;$$

но, по предыдущему (см. § 5),

$$M_1L = K_1K_2 = |\overline{K_1K_2}| = |x_2 - x_1|;$$
$$LM_2 = |y_2 - y_1|.$$



Черт. 15.

Следовательно,

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{9}$$

откуда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{10}$$

Пример 1. Расстояние между точками $M_1(1;\ -3)$, $M_2(7;\ 5)$ равно

$$d = \sqrt{(7-1)^2 + (5+3)^2} = 10.$$

Пример 2. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $M_1(2;\ 2)$, $M_2(-5;\ 1)$, $M_3(3;\ -5)$.

1) Сделаем эскиз (черт. 16), обозначив координаты искомого центра C через x и y: $C(x, y)$.

2) Решаем задачу (аналитически). По условию задачи $CM_1 = CM_2 = CM_3$. По формуле (10) имеем:

$$CM_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}; \quad CM_2 = \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2};$$
$$CM_3 = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}.$$

Следовательно,

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2 + (y-1)^2;$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+5)^2.$$

Упростив уравнения, найдем:

$$7x + y = -9, \qquad x - 7y = 13,$$

откуда

$$x = -1; \quad y = -2.$$

Черт. 16.

Итак, искомый центр есть $C(-1; -2)$. Радиус окружности

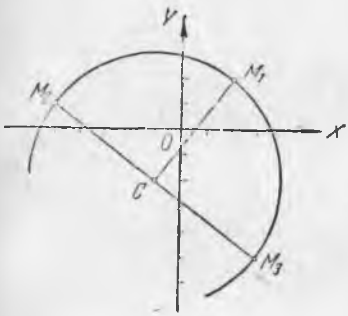
$$CM_1 = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-2)^2} = 5.$$

3) Делаем *проверку* (аналитическую) полученного решения. Для этого находим:

$$CM_2 = \sqrt{(-1+5)^2 + (-2-1)^2} = 5; \quad CM_3 = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+5)^2} = 5.$$

Мы видим, что все три данные точки M_1, M_2, M_3 находятся на одном и том же расстоянии, равном 5, от точки $C(-1; -2)$, т. е. лежат на окружности с центром в точке C.

4) Строим точный чертеж (черт. 17).



Черт. 17.

§ 10. Деление отрезка в данном отношении. Задача. Даны концы $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ отрезка M_1M_2 (черт. 18). Найти точку $M(x, y)$, делящую отрезок M_1M_2 в отношении

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda.$$

При этом предполагается, что отрезок M_1M_2 лежит на некоторой оси.

Из элементарной геометрии известно (см. черт. 18):

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{K_1K}{KK_2}.$$

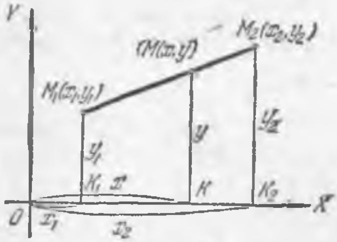
Таким образом, точка $K(x)$ делит отрезок K_1K_2 между точками $K_1(x_1)$ и $K_2(x_2)$ оси OX в отношении

$$\frac{\overline{K_1K}}{\overline{KK_2}} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \lambda.$$

Следовательно (§ 6),

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{11}$$

Проектируя на ось OY, аналогично найдем:



Черт. 18.

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{12}$$

Если $\lambda = 1$, то точка M есть середина отрезка M_1M_2 и формулы (11) и (12) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{13}$$

т. е. ***координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концов.***

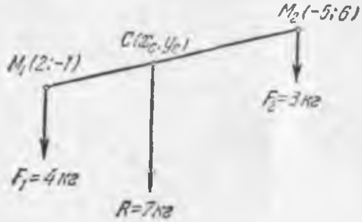
Пример 1. В точках M_1 (2; — 1) и M_2 (— 5; 6) приложены параллельные силы $F_1 = 4$ *кг* и $F_2 = 3$ *кг*, направленные в одну сторону. Найти точку C (x_C, y_C) приложения их равнодействующей R (черт. 19).

Из физики известно (§ 6, пример 2), что $\frac{M_1C}{CM_2} = \frac{3}{4} = \lambda$. По формулам (11) и (12) находим:

$$x_C = \frac{2 + (-5)\cdot\frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = -1; \qquad y_C = \frac{-1 + 6\cdot\frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = 2.$$

Ответ. Сила R приложена в точке C (— 1; 2).

Пример 2. Даны вершины треугольной тонкой пластинки M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3). Найти центр тяжести пластинки C (черт. 20).



Черт. 19.

Черт. 20.

Из физики известно, что центр тяжести треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. На черт. 20 M_3K — медиана. По формуле (13) для середины K отрезка M_1M_2 находим: $x_K = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Точка пересечения медиан C (центр тяжести) делит, как известно, медиану M_3K в отношении $\frac{M_3C}{CK} = \frac{2}{1} = 2 = \lambda$. По формулам (11) и (12) находим:

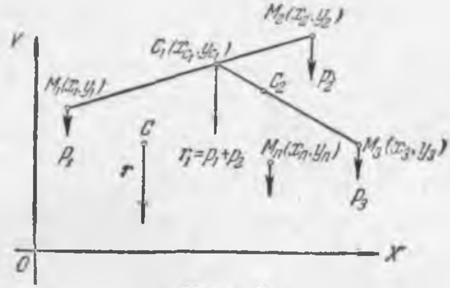
$$x_C = \frac{x_3 + x_K\cdot 2}{1+2} = \frac{x_3 + \frac{x_1 + x_2}{2}\cdot 2}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$

$$y_C = \frac{y_3 + y_K\cdot 2}{1+2} = \frac{y_3 + \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot 2}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

§ 11. Центр параллельных сил. Пусть в точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$ приложены параллельные силы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, направленные в одну сторону, и требуется найти точку C приложения их равнодействующей

$$r = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Для решения задачи методами аналитической геометрии строим систему координат OXY (черт. 21). Пусть в этой системе точки



Черт. 21.

приложения заданных сил имеют координаты:

$$M_1(x_1, y_1);\ M_2(x_2, y_2);\ \ldots;\ M_n(x_n, y_n).$$

Складываем силы p_1 и p_2. Точку приложения их равнодействующей $r_1 = p_1 + p_2$ обозначим $C_1(x_{C_1}, y_{C_1})$. Из физики известно: $\frac{M_1C_1}{C_1M_2} = \frac{p_2}{p_1} = \lambda$. По формулам (11), (12) (см. § 10) находим:

$$x_{C_1} = \frac{x_1 + \frac{p_2}{p_1} x_2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2}{p_1 + p_2}; \quad y_{C_1} = \frac{y_1p_1 + y_2p_2}{p_1 + p_2}.$$

Теперь сложим силы $r_1 = p_1 + p_2$ и p_3.

Точку приложения их равнодействующей $C_2(x_{C_2}, y_{C_2})$ найдем по формулам (11) и (12) (см. черт. 21), приняв во внимание, что

$$\frac{C_1C_2}{C_2M_3} = \frac{p_3}{p_1 + p_2} = \lambda.$$

$$x_{C_2} = \frac{x_{C_1} + \frac{p_3}{p_1 + p_2} x_3}{1 + \frac{p_3}{p_1 + p_2}} = \frac{x_{C_1}(p_1 + p_2) + x_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3} =$$

$$= \frac{\frac{x_1p_1 + x_2p_2}{p_1 + p_2}(p_1 + p_2) + x_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3};$$

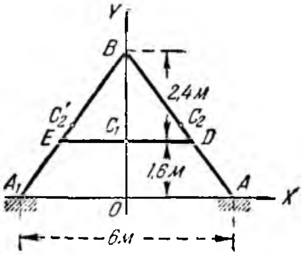
$$y_{C_2} = \frac{y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Прибавляя последовательно силы p_4, p_5, ..., получим аналогичными вычислениями формулу:

$$x_C = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}; \quad y_C = \frac{y_1p_1 + y_2p_2 + \ldots + y_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \quad (14)$$

Сокращенно эти формулы записываются при помощи знака суммы $\sum$:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}. \quad (14)$$



Черт. 22.

Пример. Найти центр тяжести симметричной стержневой фермы из однородных стержней одного диаметра, изображенной на черт. 22.

Решение. Выбираем координатные оси, как показано на черт. 22; $OA = 3$ *м*; $OB = 1{,}6 + 2{,}4 = 4$ *м*; $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ *м*; из подобия треугольников EDB и A_1AB имеем: $\frac{ED}{6} = \frac{2{,}4}{4}$; $ED = 3{,}6$ *м*.

Точки A, B, A_1 имеют координаты: A (3; 0); B (0; 4); A_1 (— 3; 0).

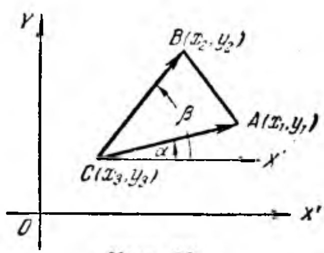
Вес каждого стержня приложен в его середине. Обозначим вес одного погонного метра стержня через γ (*кг*). Тогда вес стержня ED равен $3{,}6\gamma$ *кг*, вес стержня AB (или A_1B) равен 5γ *кг*. Следовательно, в середине C_1 (0; 1,6) стержня ED приложена сила $p_1 = 3{,}6\gamma$ *кг*. Середина C_2 стержня AB имеет координаты: $x = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$; $y = \frac{0+4}{2} = 2$. В точке C_2 (1,5; 2) приложена сила $p_2 = 5\gamma$ *кг* (вес стержня AB). В середине C'_2 (— 1,5; 2) стержня A_1B приложена сила $p_3 = 5\gamma$ *кг*.

В силу симметричности фермы $x_C = 0$. По формуле (14):

$$y_C = \frac{y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1{,}6 \cdot 3{,}6\gamma + 2 \cdot 5\gamma + 2 \cdot 5\gamma}{3{,}6\gamma + 5\gamma + 5\gamma} = \frac{25{,}76}{13{,}6} = 1{,}89 \text{ м}.$$

Итак, центр тяжести C фермы находится на ее оси симметрии, на высоте 1,89 *м*, считая от прямой A_1A.

§ 12. Площадь треугольника. Найдем площадь треугольника по заданным его вершинам $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (черт. 23).



Черт. 23.

Площадь треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin \angle ACB = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} CA \cdot CB (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

По определению косинуса и синуса любого угла находим:

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_{OX}\overrightarrow{CA}}{CA}; \quad \sin\alpha = \frac{\text{пр}_{OY}\overrightarrow{CA}}{CA}; \quad \cos\beta = \frac{\text{пр}_{OX}\overrightarrow{CB}}{CB}; \quad \sin\beta = \frac{\text{пр}_{OY}\overrightarrow{CB}}{CB}.$$

Но

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{CA}=x_1-x_3;\quad \text{пр}_{OY}\overrightarrow{CA}=y_1-y_3;$$
$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{CB}=x_2-x_3;\quad \text{пр}_{OY}\overrightarrow{CB}=y_2-y_3$$

(см. § 8). Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}CA\cdot CB\left(\frac{y_2-y_3}{CB}\cdot\frac{x_1-x_3}{CA}-\frac{x_2-x_3}{CB}\cdot\frac{y_1-y_3}{CA}\right)$$

или

$$S=\frac{1}{2}\Big[(y_2-y_3)(x_1-x_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)\Big]. \qquad (15)$$

Если на черт. 23 переставить точки A и B, то угол β, составленный вектором $\overrightarrow{CB}$ с осью OX, будет меньше угла α, составленного вектором $\overrightarrow{CA}$ с осью OX, и

$$S=\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin(\beta-\alpha).$$

Поэтому получим в этом случае ту же формулу (15) для S, но со знаком минус. Итак,

$$S=\pm\frac{1}{2}[(y_2-y_3)(x_1-x_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)], \qquad (15')$$

причем знак плюс берется, если обход вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ в этой последовательности производится против направления вращения часовой стрелки (черт. 23), и знак минус, если этот обход производится по часовой стрелке.

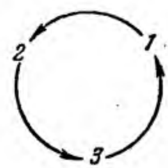
Раскрыв круглые скобки в формуле (15′), приведем ее к виду:

$$S=\pm\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]. \qquad (16)$$

При помощи определителей эти формулы запишутся так:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}; \qquad (15'')$$

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (16')$$



Черт. 24.

Замечание. *Циклической*, или *круговой*, *перестановкой* чисел 1, 2, 3 называется такая перестановка, когда вместо 1 ставится 2, вместо 2 ставится 3, вместо 3 ставится 1 (черт. 24).

В формуле (16) каждое последующее слагаемое в квадратных скобках можно получить из предыдущего циклической перестановкой индексов букв x и y.

Упражнение. Найти формулу для площади четырехугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, разбив четырехугольник на два треугольника.

Ответ. $S = \pm\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)]$ (в последовательных слагаемых внутри квадратных скобок — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3, 4).

§ 13. Уравнения геометрических мест. Пусть дано уравнение $F(x, y) = 0$. Каждая пара значений x и y, удовлетворяющая данному уравнению, называется, как известно, решением этого уравнения. Для получения решений можно в данном уравнении придавать букве x произвольные численные значения, тогда соответствующие значения y определятся из уравнения.

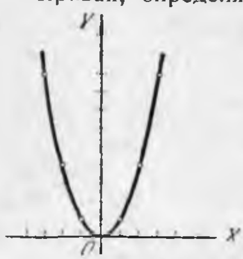
Будем рассматривать x как абсциссу точки, а y — как ординату. Тогда каждое решение уравнения $F(x, y) = 0$ определит точку (x, y) плоскости, а множество всех решений этого уравнения определит некоторое геометрическое место точек (линию) C на плоскости.

Пример 1. Дано уравнение $x^2 - y = 0$. Придадим x значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ и вычислим соответствующие значения y из заданного уравнения (для требуемых вычислений удобнее представить это уравнение в виде $y = x^2$). Получим таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Строим найденные точки (—3; 9), (—2; 4), (—1; 1), ... (черт. 25). Мы можем по заданному уравнению $y = x^2$ вычислить и построить сколько угодно точек.

Кривая, определяемая уравнением $y = x^2$, называется *параболой*. Она есть геометрическое место точек, у которых ордината равна квадрату абсциссы.



Черт. 25.

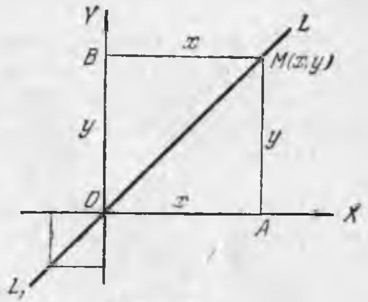
Пусть теперь, наоборот, задано геометрическое место C точек плоскости. По определению геометрического места точек, все точки, принадлежащие ему (и только эти точки), обладают некоторым общим свойством. На основе этого общего свойства составляется уравнение $F(x, y) = 0$, связывающее координаты x и y каждой точки геометрического места (линии) C, другими словами, уравнение, которому удовлетворяют координаты *каждой* точки линии C (и *только* точек этой линии).

Пример 2. Дана биссектриса L_1L первого и третьего координатных углов (черт. 26). Возьмем на данной прямой *произвольную* («текущую») точку $M(x, y)$ и будем искать соотношение между ее координатами x и y. Таким образом, мы будем искать соотношение между координатами x и y, справедливое для *каждой* точки данной прямой (и *только* этой прямой).

Мы знаем, что биссектриса OL угла XOY есть геометрическое место точек, равно отстоящих от сторон угла: $AM = BM$. Это общее свойство *всех* точек полупрямой OL (и *только* этих точек). Отсюда следует, что координаты любой точки $M(x, y)$ полупрямой OL удовлетворяют уравнению

$$y = x. \tag{17}$$

Координаты x и y каждой точки полупрямой OL_1 также удовлетворяют уравнению $y = x$, так как они равны по абсолютному значению (черт. 26) и обе отрицательны. Координаты же точек, не лежащих на прямой LL_1, не удовлетворяют уравнению $y = x$. Таким образом, координаты *всех* точек прямой LL_1 (и *только* этих точек) удовлетворяют уравнению $y = x$ (или уравнению $x - y = 0$).



Черт. 26.

Определение. *Уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты всех точек линии C (и только этих точек), называется уравнением линии C.*

Из этого определения следует, что биссектриса первого и третьего координатных углов (см. пример 2) имеет уравнение $y = x$. Кривая, определенная в примере 1 (парабола), имеет уравнение $y = x^2$.

Пусть линия C имеет уравнение $F(x, y) = 0$. Тогда из определения уравнения линии следует, что любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, принадлежит линии C, и обратно, координаты всех точек линии C удовлетворяют ее уравнению $F(x, y) = 0$.

Подставив координаты данной точки плоскости в уравнение линии, мы узнаем, лежит ли данная точка на этой линии или нет: если уравнение удовлетворится, то точка лежит на этой линии, если уравнение не удовлетворится, то точка на этой линии не лежит. Например, точка M (4; 16) лежит на параболе $y = x^2$ (черт. 25), так как $16 = 4^2$, а точка M_1 (—2; 7) не лежит: $7 \neq (-2)^2$.

В уравнении линии $F(x, y) = 0$ числа x и y рассматриваются как координаты любой точки линии и называются *текущими координатами*.

Пример 3. Найти уравнение биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

Рассуждая, как в примере 2, найдем уравнение $y = -x$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, параллельной оси OX и пересекающей ось OY в точке с ординатой, равной b (черт. 27).

Решение. Любая точка прямой имеет ординату

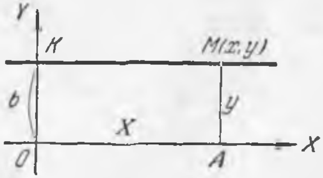
$$y = b. \tag{18}$$

Этим свойством обладают *только* точки прямой L_1L, так как для всякой точки, не лежащей на этой прямой, имеем либо $y > b$, либо $y < b$. Следовательно, уравнение (18) есть уравнение прямой L_1L.

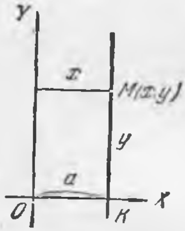
В частности, уравнение оси OX будет:

$$y = 0. \tag{19}$$

Пример 5. Найти уравнение прямой, параллельной оси OY и пересекающей ось OX в точке с абсциссой a (черт. 28).



Черт. 27.



Черт. 28.

Решение. Рассуждая, как в примере 4, найдем уравнение

$$x = a. \tag{20}$$

В частности, уравнение оси OY будет:

$$x = 0. \tag{21}$$

Упражнение. Построить прямые $y = 3$; $y = -1$; $x = -4$. Написать уравнение прямой, параллельной оси OY и пересекающей ось OX в точке с абсциссой, равной 2.

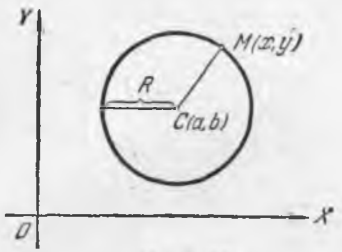
Пример 6. Какое геометрическое место точек определяют уравнения: а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 2 = 0$?

Решение. а) Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют координаты лишь одной точки O (0, 0): $0^2 + 0^2 = 0$. Всякая другая пара чисел, отличная от $x = 0$, $y = 0$, не удовлетворяет данному уравнению, так как в левой его части получится после подстановки положительное число, а правая часть равна нулю, и равенство невозможно. Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет одну точку O (0, 0).

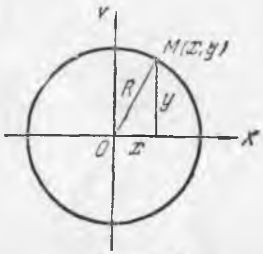
б) Уравнению $x^2 + y^2 + 2 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, так как при любых x и y в левой части равенства — положительное число, в правой — нуль, и равенство невозможно. Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 + 2 = 0$ не определяет ни одной (действительной) точки.

§ 14. Уравнение окружности. Найдем уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом R (черт. 29).

Исходим из общего свойства точек данной окружности: *любая* точка $M(x, y)$ заданной окружности отстоит от центра $C(a, b)$ на расстоянии $CM = R$ (и этим свойством обладают точки *только* данной окружности). Отсюда следует, что для *всех* точек M заданной окружности, и притом *только* для точек этой окружности, $CM^2 = R^2$. В самом деле, для точек M, не лежащих на окружности, $CM > R$ или $CM < R$, следовательно, $CM^2 > R^2$ или $CM^2 < R^2$ (так как



Черт. 29.



Черт. 30.

$CM > 0$ и $R > 0$). Найдя квадрат расстояния между точками $C(a, b)$ и $M(x, y)$ по формуле (9) § 9, получим уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{22}$$

Уравнение (22) и есть *уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом R*, так как, по доказанному, этому уравнению удовлетворяют координаты *всех* точек заданной окружности, и *только* этих точек.

В уравнении (22) x и y — текущие координаты.

Постоянные a, b, R, входящие в уравнение данной окружности, называются *параметрами*; они определяют положение окружности на плоскости и ее величину. При переходе к другой окружности параметры изменяют свое значение.

Полагая в уравнении (22) $a = 0$, $b = 0$, найдем уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R (черт. 30):

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{23}$$

Уравнение (23) усматривается также непосредственно из черт. 30.

Пример 1. Найти уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 4$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 16$.

Пример 2. Найти уравнение окружности с центром в точке $C(3; -4)$ и радиусом $R = 5$.

Решение. По формуле (22) находим уравнение заданной окружности:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

или

$$x^2+y^2-6x+8y=0.$$

Задача I. Определить, лежат ли точки $M_1(3;\ 1)$, $M_2\ (7;\ -1)$, $M_3\ (2;\ 3)$ на окружности с центром в точке $C\ (3;-4)$ и радиусом $R=5$.

Решение. В примере 2 мы уже нашли уравнение заданной окружности: $x^2+y^2-6x+8y=0$. Подставим в это уравнение координаты точек $M_1\ (3;\ 1)$, $M_2\ (7;\ -1)$, $M_3\ (2;\ 2)$:

1) $M_1\ (3;\ 1)$ $\quad 9+1-18+8=0$; точка M_1 лежит на окружности;
2) $M_2\ (7;\ -1)$ $\quad 49+1-42-8=0$; точка M_2 лежит на окружности;
3) $M_3\ (2;\ 2)$ $\quad 4+4-12+16\neq 0$; точка M_3 не лежит на окружности.

Упражнение. Постройте в прямоугольной системе координат данную окружность [центр ее в точке C (3; —4), радиус $R=5$] и нанесите на чертеж точки M_1, M_2 и M_3.

Задача II. На окружности $x^2+y^2-6x+8y=0$ найти точки: а) с абсциссой $x=6$; б) с ординатой $y=-7$.

Решение. Координаты всех точек линии удовлетворяют ее уравнению. Поэтому, зная абсциссу точки, принадлежащей данной линии, найдем ординату этой точки, подставив заданную абсциссу в уравнение линии. Подставив $x=6$ в уравнение $x^2+y^2-6x+8y=0$, найдем: $y^2+8y=0$, откуда 1) $y=0$; 2) $y=-8$. Таким образом, на заданной окружности имеются две точки с абсциссой $x=6$: $M_1\ (6;\ 0)$ и $M_2\ (6;\ -8)$.

Аналогично, чтобы найти на заданной окружности точку с ординатой $y=-7$, положим в уравнении окружности $y=-7$. Получим: $x^2+49-6x-56=0$; $x^2-6x-7=0$, откуда 1) $x=7$; 2) $x=-1$. Таким образом, на данной окружности имеются две точки с ординатой $y=-7$: $M_3\ (7;\ -7)$ и $M_4\ (-1;\ -7)$.

Упражнение. Подставив координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 в уравнение данной окружности, проверьте, что эти точки лежат на ней. Постройте данную окружность [ее центр C (3; —4), радиус $R=5$ (см. пример 2)] и нанесите на чертеж точки M_1, M_2, M_3 и M_4.

Пример 3. Расстояние между точками A и B равно 3. Найти геометрическое место точек, которые отстоят от точки A вдвое ближе, чем от точки B.

Решение. В данном примере, в отличие от предыдущих, мы вида геометрического места не знаем. Метод аналитической геометрии заключается в том, что мы находим *уравнение* геометрического места, по уравнению узнаем форму кривой и строим ее.

Выберем оси координат, как показано на черт. 31. Тогда точки A и B будут иметь координаты: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (3;\ 0)$. Пусть $M\ (x,\ y)$ — *произвольная* точка искомого геометрического места. По условию задачи $MB = 2MA$. Но

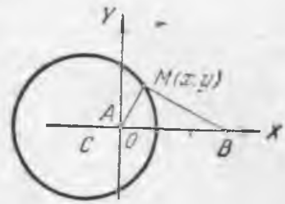
$$MA = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{24}$$

откуда

$$(x-3)^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2; \tag{25}$$
$$x^2 + 2x + y^2 = 3. \tag{26}$$



Черт. 31.

Прибавив к обеим частям уравнения (26) по единице, получим уравнение:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4,$$

или

$$(x+1)^2 + y^2 = 2^2. \tag{27}$$

Из сравнения полученного уравнения (27) с уравнением окружности (22) заключаем, что искомое геометрическое место есть окружность с центром в точке $C\ (-1;\ 0)$ и радиусом 2.

Упражнение. Постройте точный чертеж. Проверьте для нескольких точек полученной окружности (26) выполнение условия задачи $MB = 2MA$, например для точек: 1) с ординатой $y = 0$; 2) с абсциссой $x = -1$. Постройте на чертеже эти точки.

Если взять какие-нибудь две точки A и B и отношение $\frac{MA}{MB} = k \neq 1$, то такими же вычислениями можно показать, что геометрическое место точек M есть также окружность.

Замечание. Уравнение (25) получено из уравнения (24) путем возведения в квадрат. При возведении уравнения в квадрат могут, как известно, к решениям первоначального уравнения присоединиться посторонние решения. Однако в данном случае этого не будет, так как из равенства (25) следует равенство квадратных корней с положительными знаками из обеих его частей, т. е. следует равенство (24). Таким образом, уравнение (25) [а следовательно уравнение (26)] имеет те же решения, что и уравнение (24), и определяет ту же линию, что и уравнение (24).

§ 15. Значение метода координат. Мы видим, что при помощи метода координат на плоскости устанавливается взаимное соответствие между следующими геометрическими и аналитическими понятиями:

Геометрические понятия	Аналитические понятия
Точка	Пара чисел (координаты)
Линия	Уравнение с текущими координатами

Это соответствие позволяет *исследование геометрических свойств линий производить путем изучения уравнений этих линий.* Такой способ исследования геометрических свойств, называемый *аналитическим*, весьма плодотворен, так как дает возможность применить *общие методы*: решение уравнений, буквенные преобразования, использование тригонометрических зависимостей и т. д. Так, в примере 3 § 14 искомое геометрическое место было найдено при помощи несложных алгебраических преобразований и использования приемов решения уравнений. Для решения же этой задачи без аналитической геометрии пришлось бы из-за отсутствия общего метода придумывать способ решения на основе геометрических теорем *). На примере § 11 мы видим ценность методов аналитической геометрии для нахождения центров тяжести.

Благодаря своим преимуществам аналитический метод исследования геометрических свойств является в настоящее время основным. В инженерных расчетах геометрические формы (профили арок, очертания деталей машин и т. д.) также обычно изучаются методами аналитической геометрии.

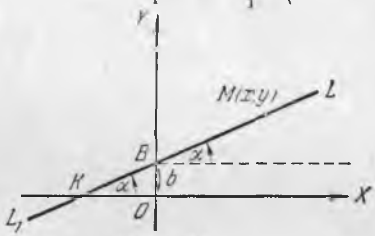
---

*) Такое геометрическое решение рассматриваемой задачи (далеко не простое) дано древнегреческим математиком Аполлонием (III век до нашей эры).

ГЛАВА II

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 16. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выведем уравнение прямой линии. Условимся прежде всего, как мы будем определять угол, составляемый прямой с осью OX. Если прямая L_1L (черт. 32) *пересекает* ось OX (в точке K), то под углом, составляемым прямой L_1L с осью OX, будем понимать угол α, на который надо повернуть ось OX вокруг точки K в направлении, обратном вращению часовой стрелки, чтобы ось OX совместилась с прямой L_1L (имеется в виду первое совмещение оси OX с L_1L). Если же прямая L_1L *параллельна* оси OX, то угол, составляемый прямой L_1L с осью OX, принимается равным нулю. Из определения угла α, составляемого прямой с осью OX, следует: $0 \leqslant \alpha < \pi$.



Черт. 32.

Пусть даны: угол α, составляемый прямой L_1L с осью OX (черт. 32), и ордината b точки пересечения прямой с осью OY. Эту ординату называют также *отрезком, отсекаемым прямой на оси OY*. Заданными величинами (параметрами) α и b прямая вполне определена. Найдем уравнение этой прямой.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой (справа от точки B). По определению тангенса любого угла $\alpha\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{пр}_{OY}\overrightarrow{BM}}{\text{пр}_{OX}\overrightarrow{BM}}$.

Так как координаты точки B равны (O, b), а точка M имеет координаты (x, y), то $\text{пр}_{OY}\overrightarrow{BM} = y - b$; $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{BM} = x - 0 = x$ (§ 8). Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}. \qquad (1)\text{*})$$

Если точка $M(x, y)$ будет взята на прямой L_1L слева от точки B, то угол между осью OX и $\overrightarrow{BM}$ будет равен $\alpha + \pi$, но $\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, и формула (1) останется верной и для такой точки.

---

*) В каждой главе дается своя нумерация формул. Если при ссылке на формулу указывается лишь ее номер, то имеется в виду формула данной главы.

Таким образом, координаты *любой* точки прямой L_1L удовлетворяют уравнению (1). Координаты же всякой точки $M(x, y)$, не лежащей на прямой L_1L, не удовлетворяют уравнению (1), так как ось OX составляет с вектором $\overrightarrow{BM}$ *этой точки* угол α_1, отличный от угла α, и $\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha_1 \neq \operatorname{tg} \alpha$.

Отсюда следует, что уравнение (1) есть уравнение заданной прямой. Из уравнения (1) получим уравнение:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b. \tag{2}$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} \alpha = k. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ называется *угловым коэффициентом* прямой.

Итак, всякая прямая, не параллельная оси OY, имеет уравнение $y = kx + b$, где k — тангенс угла, составляемого прямой с осью OX, а b — отрезок, отсекаемый прямой на оси OY (т. е. ордината точки пересечения прямой с осью OY). Обратно, уравнение $y = kx + b$ при любых заданных k и b есть уравнение прямой, так как прямая, отсекающая отрезок b на оси OY и составляющая с осью OX угол α, тангенс которого равен k, имеет это самое уравнение: $y = kx + b$ *).

При $b = 0$ отрезок, отсекаемый прямой на оси OY, равен нулю, следовательно, прямая проходит через начало координат. Таким образом, уравнение

$$y = kx \tag{4'}$$

определяет прямую, проходящую через начало координат (и не совпадающую с осью OY).

Напомним, что всякая прямая, *параллельная оси OY*, имеет уравнение (§ 13, пример 5)

$$x = a. \tag{5}$$

Если дано уравнение прямой $y = kx + b$, то, задав какие-нибудь два значения x и вычислив из уравнения соответствующие значения y, найдем две точки, по которым можно построить прямую. Легко также построить прямую по одной точке и угловому коэффициенту.

Пример 1. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок $b = 2$ и составляющей с осью OX угол $\alpha = 45°$.

---

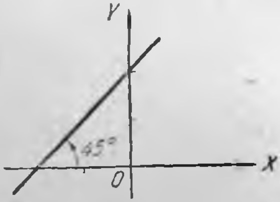
*) При любом заданном k найдется угол α, тангенс которого равен k, так как тангенс может иметь любое значение.

Решение. $k = \operatorname{tg} 45° = 1$; уравнение прямой: $y = 1 \cdot x + 2$, т. е. $y = x + 2$. На черт. 33 прямая построена по двум ее точкам: 1) $x = 0$, $y = 2$; 2) $x = -2$, $y = 0$.

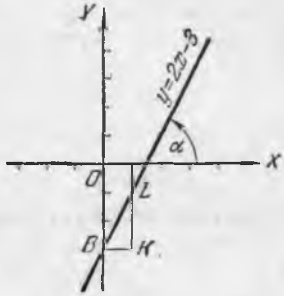
Пример 2. Дана прямая $y = 2x - 3$. Какой отрезок отсекает эта прямая на оси OY и какой угол составляет она с осью OX?

Решение. $b = -3$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°27'$.

На черт. 34 заданная прямая построена по точке B $(0; -3)$ и по



Черт. 33.



Черт. 34.

угловому коэффициенту $\operatorname{tg} \alpha = 2$: для этого отложены отрезки $BK = 1$ и $KL = 2$, BL — заданная прямая, так как $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \angle KBL = \frac{KL}{BK} = 2$.

§ 17. Общее уравнение прямой. Любая прямая, не параллельная оси OY, имеет уравнение $y = kx + b$, а параллельная оси OY — уравнение $x = a$. Оба эти уравнения — первой степени относительно x и y. Таким образом, *уравнение всякой прямой есть уравнение первой степени относительно текущих координат* x *и* y. Докажем обратную теорему.

Теорема. *Всякое уравнение первой степени относительно текущих координат* x *и* y *есть уравнение прямой.*

Доказательство. Любое уравнение первой степени относительно x и y имеет вид:

$$Ax + By + C = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим два возможных случая:

1) $B \neq 0$. Тогда из (6) найдем: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Обозначим: $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$. Уравнение примет вид: $y = kx + b$. Это уравнение прямой (§ 16).

2) $B = 0$. Тогда $A \neq 0$, так как если $A = 0$ и $B = 0$, то равенство (6) не будет уравнением первой степени относительно x и y. Уравнение (6) при $B = 0$ запишется в виде $Ax + C = 0$. Отсюда $x = -\frac{C}{A}$ $(A \neq 0)$. Обозначив $-\frac{C}{A} = a$, получим уравнение $x = a$. Это уравнение прямой (§ 13).

Итак, всякое уравнение первой степени относительно текущих координат, $Ax + By + C = 0$, есть уравнение прямой. Теорема доказана.

Из всего сказанного в настоящем параграфе следует: *прямая и только прямая имеет уравнение первой степени относительно текущих координат.*

Уравнение (6) называется *общим уравнением* прямой. Чтобы перейти от общего уравнения прямой к уравнению с угловым коэффициентом (при $B \neq 0$), надо решить уравнение относительно y.

Пример. Дано уравнение прямой: $3x+3y-8=0$. Привести его к уравнению с угловым коэффициентом и найти угол, составляемый прямой с осью OX.

Решение. $3y=-3x+8$, $y=-x+\frac{8}{3}$, $k=\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=135°$. Постройте заданную прямую по двум точкам.

§ 18. Особые случаи расположения прямой. Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ в случаях, когда некоторые коэффициенты равны нулю.

1) $C=0$; $Ax+By=0$. Прямая проходит через начало координат, так как координаты начала $(0,\ 0)$ удовлетворяют этому уравнению.

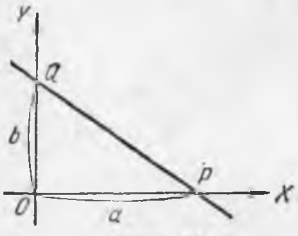
2) $B=0$; $Ax+C=0$; $x=-\frac{C}{A}$. Прямая параллельна оси OY (§ 13, пример 5).

3) $A=0$; $By+C=0$; $y=-\frac{C}{B}$. Прямая параллельна оси OX (§ 13, пример 4).

4) $B=0$; $C=0$; $Ax=0$; $x=0$. Прямая совпадает с осью OY.

5) $A=0$; $C=0$; $By=0$; $y=0$. Прямая совпадает с осью OX.

§ 19. Уравнение прямой в отрезках. Пусть даны абсцисса a точки пересечения P прямой с осью OX и ордината b точки пересечения Q прямой с осью OY; другими словами, даны отрезки a и b, отсекаемые прямой на осях координат (черт. 35). При этом предполагается, что прямая не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало координат. Составим уравнение прямой по данным параметрам a и b.



Черт. 35.

Напишем уравнение прямой в общем виде: $Ax+By+C=0$. Из задания следует, что точки P и Q пересечения прямой с осями OX и OY имеют координаты $(a;\ 0)$; $(0;\ b)$. Так как точки P и Q лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой $Ax+By+C=0$. Подставив координаты точек $P(a;\ 0)$ и $Q(0;\ b)$ в это уравнение, получим ($a \neq 0$, $b \neq 0$ по условию):

$$Aa+C=0, \text{ откуда } A=-\frac{C}{a};$$

$$Bb+C=0, \text{ откуда } B=-\frac{C}{b}.$$

Следовательно, уравнение $Ax+By+C=0$ можно записать в виде

$$-\frac{C}{a}x-\frac{C}{b}y+C=0 \quad \text{или} \quad C\frac{x}{a}+C\frac{y}{b}=C;$$

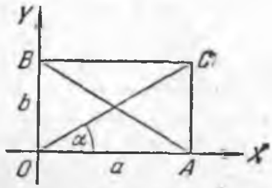
$C\neq 0$, так как прямая по заданию не проходит через начало координат. Сократив на C, получим уравнение:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7}$$

Это и есть *уравнение прямой, отсекающей отрезки a и b на осях OX и OY* («уравнение в отрезках»).

Зная отрезки a и b, отсекаемые прямой на осях координат, легко построить прямую.

Замечание. Так как точка P пересечения прямой с осью OX имеет ординату $y=0$, то чтобы найти ее абсциссу, т. е. отрезок a, отсекаемый прямой на оси OX, надо в уравнении прямой положить $y=0$. Аналогично, чтобы найти отрезок b, отсекаемый прямой на оси OY, надо в уравнении прямой положить $x=0$. Этим можно воспользоваться для преобразования уравнения прямой к уравнению в отрезках.



Черт. 36.

Пример 1. Преобразовать уравнение $3x-4y+12=0$ к уравнению в отрезках.

Решение. Положив в заданном уравнении $y=0$, получим $3x+12=0$, откуда $x=-4=a$; положив в уравнении $x=0$, найдем $y=3=b$. Искомое уравнение прямой в отрезках:

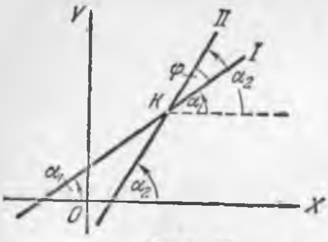
$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1.$$

Проверка. Освободившись от знаменателя, придем к первоначальному уравнению.

Постройте заданную прямую по отрезкам, отсекаемым ею на осях.

Пример 2. По черт. 36 найти уравнение сторон и диагоналей параллелограмма со сторонами, длины которых равны a и b.

Решение. Уравнение BC (§ 13, пример 4): $y=b$, AC (§ 13): $x=a$; OB (§ 18): $x=0$; OA (§ 18): $y=0$; OC (§ 16): $y=kx$; $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$; $y=\frac{b}{a}x$; AB (§ 19): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.



Черт. 37.

§ 20. Угол между двумя прямыми. Пусть даны две прямые уравнениями

$$y=k_1x+b_1, \tag{I}$$
$$y=k_2x+b_2 \tag{II}$$

и требуется найти угол φ (черт. 37) между этими прямыми. Пусть прямые пересекаются в точке K. Назовем углом между прямой (I) и прямой (II) (рассматриваемыми в этом порядке) угол φ, на который надо повернуть прямую (I) вокруг точки K в направлении, обратном вращению часовой стрелки, до первого совмещения с прямой (II) (если прямые параллельны, то принимаем $\varphi=0$). Таким образом $0 \leqslant \varphi < \pi$.

Обозначим угол, составляемый прямой (I) с осью OX через α_1, а прямой (II) с осью OX через α_2. Так как угол α_1 равен углу поворота оси OX до совмещения с прямой (I), а угол φ равен углу поворота (I) до совмещения с прямой (II) (черт. 37), то

$$\alpha_2=\alpha_1+\varphi, \tag{8}$$

отсюда $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ и

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\alpha_1=k_1; \quad \operatorname{tg}\alpha_2=k_2. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}. \tag{10}$$

Стрелка показывает, что по формуле (10) находят угол поворота прямой (I), имеющей угловой коэффициент k_1, до совмещения с прямой (II), имеющей угловой коэффициент k_2 (черт. 39), т. е. находят угол между прямой (I) и прямой (II) [этот угол обозначают часто так: $(\widehat{\mathrm{I}, \mathrm{II}})$]. Для угла между прямой (II) и прямой (I) надо в формуле (10) в числителе дроби взять k_1-k_2, т. е. правая часть формулы изменит знак на обратный; угол $(\widehat{\mathrm{II}, \mathrm{I}})$, очевидно, будет равен $\pi-\varphi$. Если же по условию задачи требуется рассмотрение того и другого угла, то в правой части формулы (10) надо взять двойной знак.

Пример 1. Найти угол между прямой $y=-4x+1$ (I) и прямой $5x-3y-7=0$ (II).

Решение. $k_1=-4$; $k_2=\frac{5}{3}$ (§ 17, пример); $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\frac{5}{3}+4}{1-4\cdot\frac{5}{3}}=-1$; $\varphi=135°$.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей угол 45° с прямой $y=2x$.

Решение. Искомая прямая проходит через начало координат и уравнение ее имеет вид: $y=kx$ [§ 16 (4′)]. Известен угол $\varphi=45°$ между прямыми $y=kx$ и $y=2x$ и в формуле (10) можно положить: $\varphi=45°$; $k_2=2$; $k_1=k$, или же $\varphi=45°$; $k_2=k$; $k_1=2$ [другими словами, в данной задаче в формуле (10) надо дробь взять с двойным знаком $\pm$].

$$1) \operatorname{tg}45°=\frac{2-k}{1+2k};\ 1=\frac{2-k}{1+2k}, \quad \text{откуда} \quad k=\frac{1}{3};$$

$$2) \operatorname{tg}45°=\frac{k-2}{1+2k};\ 1=\frac{k-2}{1+2k}, \quad \text{откуда} \quad k=-3.$$

Итак, задача имеет два решения:

1) прямая $y=\frac{1}{3}x$; 2) прямая $y=-3x$.

Проверка. 1) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1;\quad \varphi=45^\circ;$

2) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{-3-2}{1-3\cdot 2}=1;\quad \varphi=45^\circ.$

Постройте данную и найденные прямые (каждую по двум точкам, за одну из которых можно взять начало координат).

§ 21. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. I. Две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны в том и только в том случае, когда составляют равные углы α_1 и α_2 с осью OX; следовательно $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$ или [см. (9) § 20]

$$k_1=k_2. \tag{11}$$

II. Две прямые перпендикулярны в том и только в том случае когда угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Тогда, по формуле (8), $\alpha_2=\alpha_1+\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$, откуда

$$k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{12}$$

Из доказанного следует [см. формулы (11) и (12)]: *для того чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны; для того чтобы две прямые были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратными числами с противоположными знаками.*

Пример. Доказать, что прямые 1) $3x-4y+12=0$ и 2) $8x+6y-9=0$ перпендикулярны.

Решение. $k_1=\frac{3}{4}$; $k_2=-\frac{4}{3}$ (§ 17, пример). Угловые коэффициенты данных прямых — обратные дроби с противоположными знаками. Прямые перпендикулярны.

Постройте каждую данную прямую по двум точкам.

§ 22. Уравнение прямой, проходящей через данную точку. Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1)$. Если прямая $y=kx+b$ проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_1=kx_1+b$. Отсюда находим $b=y_1-kx_1$. Подставив найденное значение b в уравнение прямой $y=kx+b$, получим: $y=kx+y_1-kx_1$, откуда

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{13}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$. Если еще будет задан угловой коэффициент k, то мы получим определенную прямую. Если же задана только точка $M_1(x_1, y_1)$, то коэффициент k в уравнении (13) может принимать всевозможные значения, и тогда уравнение (13) есть уравнение любой прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ (за исключением прямой $x = x_1$, параллельной оси OY). Поэтому уравнение (13) при всевозможных k называется уравнением *пучка прямых*, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -1)$ и параллельной прямой $2x - 5y + 7 = 0$.

Решение. Уравнение любой прямой, проходящей через точку $M_1(2; -1)$ (не параллельной оси OY), по формуле (13):

$$y + 1 = k(x - 2).$$

Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = \frac{2}{5}$ (§ 17, пример).

Из условия параллельности (§ 21) $k = k_1$ находим угловой коэффициент искомой прямой $k = \frac{2}{5}$. Уравнение искомой прямой $y + 1 = \frac{2}{5}(x - 2)$ или $2x - 5y - 9 = 0$.

§ 23. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки прямой: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдем ее уравнение. Положим $x_2 \neq x_1$. Тогда прямая M_1M_2 не параллельна оси OY. Уравнение любой прямой: проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и не параллельной оси OY (§ 22), будет: $y - y_1 = k(x - x_1)$. Так как прямая проходит также через точку $M_2(x_2, y_2)$, то координаты точки M_2 удовлетворяют этому уравнению: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда находим:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{14}$$

т. е. *угловой коэффициент прямой равен разности ординат каких-либо двух точек прямой, деленной на разность абсцисс этих точек*. Подставив найденное значение k в уравнение (13), получим *уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{15}$$

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, параллельна оси OY и имеет уравнение $x = x_1$ (сделайте чертеж). Уравнение (15) записывают также в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{15'}$$

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 2)$, $M_2(4; -1)$.

Уравнение искомой прямой [по формуле (15)]:

$$y - 2 = \frac{-1 - 2}{4 - 3}(x - 3);\ y - 2 = -3(x - 3);\ 3x + y - 11 = 0.$$

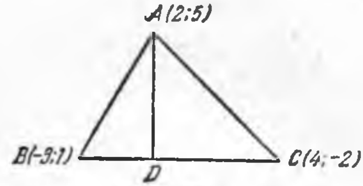
Проверка. $3 \cdot 3 + 2 - 11 = 0;\ 0 = 0;$

$$3 \cdot 4 + (-1) - 11 = 0;\ 0 = 0.$$

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(2; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(4; -2)$. Найти уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины A.

Решение (черт. 38). Угловой коэффициент стороны BC (§ 23, правило нахождения углового коэффициента прямой по двум ее точкам):

$$k_{BC}=\frac{1-(-2)}{-3-4}=-\frac{3}{7}.$$



Черт. 38.

Угловой коэффициент высоты AD (по условию перпендикулярности, § 21):

$$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{7}{3}.$$

Уравнение высоты AD (§ 22):

$$y-5=\frac{7}{3}(x-2) \text{ или } 7x-3y+1=0.$$

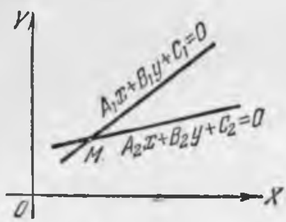
Упражнение. Постройте точный чертеж. Высоту AD постройте по точке A и какой-либо другой точке, найденной из полученного уравнения AD.

§ 24. Точка пересечения двух прямых. Пусть даны прямые (черт. 39):

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad \text{(I)}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \quad \text{(II)}$$

Требуется найти их точку пересечения $M(x, y)$.



Черт. 39.

Точка $M(x, y)$ лежит как на прямой (I), так и на прямой (II), следовательно, ее координаты x, y должны удовлетворять как первому, так и второму уравнению. Отсюда следует, что *для нахождения точки пересечения двух прямых надо решить совместно уравнения этих прямых* *).

При решении системы уравнений (I) и (II) возможны три случая (см. § 119).

1) Система имеет одно решение: $x=x_0$, $y=y_0$. В этом случае прямые имеют одну точку пересечения $M_0(x_0, y_0)$.

2) Система несовместна (т. е. не имеет решений). В этом случае общих точек прямые не имеют, прямые параллельны.

3) Система неопределенная (т. е. имеет бесконечное множество решений). В этом случае система приводится к одному уравнению, прямые сливаются.

Пример. Найти точку пересечения прямых $2x-y-3=0$, $4x+3y-11=0$. Решив совместно данные уравнения, найдем: $x=2$, $y=1$. Точка пересечения есть $M(2; 1)$.

---

*) Очевидно, тем же рассуждением докажем: чтобы найти точки пересечения двух каких угодно линий, надо решить совместно их уравнения.

§ 25. Уравнение пучка прямых. Даны две пересекающиеся прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{I}$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{II}$$

Умножим уравнения (I) и (II) соответственно на числа α и β и почленно сложим. Получим уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) при любых заданных α и β, не равных одновременно нулю, определит некоторую прямую, так как это уравнение — первой степени относительно x и y.

1) Покажем, что при любых α и β прямая (16) проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ пересечения прямых (I) и (II). В самом деле точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на обеих прямых (I) и (II), поэтому $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$, $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ и подставив в уравнение (16) координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, получим тождество:

$$\alpha\underbrace{(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}_{=0} + \beta\underbrace{(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}_{=0} = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 \equiv 0.$$

Меняя значения α и β в уравнении (16), мы будем получать различные прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$.

2) Покажем, что, обратно, *любая* прямая, проходящая через точку M_0 пересечения прямых (I) и (II), определится уравнением (16) при некоторых значениях α и β. Пусть дана какая угодно прямая, проходящая через точку M_0. Возьмем на этой прямой еще точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки M_0. Прямая (16), как мы доказали, через точку M_0 проходит. Чтобы она прошла и через точку M_1 и, следовательно, совпала с заданной прямой (M_0M_1), нужно, чтобы координаты точки M_1 удовлетворили уравнению (16), т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \tag{17}$$

Так как точка M_1 не совпадает с точкой M_0 пересечения прямых (I) и (II), то по крайней мере один из трехчленов $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$ и $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ не равен 0. Пусть $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0$. Тогда из равенства (17) найдем $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}$. При этом значении отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ будет выполняться равенство (17) и прямая (16) пройдет через точки M_0 и M_1, следовательно, уравнение (16) определит заданную прямую (M_0M_1).

Итак, уравнение (16) при различных значениях α и β определяет совокупность *всех* прямых, проходящих через точку M_0 пересечения прямых (I) и (II) (*пучок прямых*).

Если $\alpha \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (16) на α и обозначив $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, получим уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{18}$$

Это уравнение, очевидно, изображает тот же пучок прямых, что и уравнение (16), за исключением прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (II), так как при переходе от уравнения (16) к уравнению (18) исключается значение $\alpha = 0$, дающее в пучке (16) прямую (II).

П р и м е р. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $x - 4y + 5 = 0$ и через точку $M_1(-2; 3)$.

Р е ш е н и е. Задачу можно решить, вычислив координаты точки M_0 пересечения данных прямых, а затем найдя уравнение прямой, проходящей через точки M_0 и M_1. Но можно избежать получающихся при этом решении громоздких вычислений с дробями, если не находить точки пересечения M_0 данных прямых, а использовать уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_0:

$$2x + 3y - 8 + \lambda(x - 4y + 5) = 0. \tag{19}$$

Так как искомая прямая проходит через точку $M_1(-2; 3)$, то

$$2\cdot(-2) + 3\cdot 3 - 8 + \lambda(-2 - 4\cdot 3 + 5) = 0,$$

откуда $\lambda = -\frac{1}{3}$. Подставив $\lambda = -\frac{1}{3}$ в уравнение (19), получим:

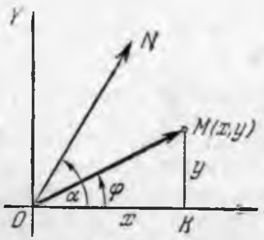
$$2x + 3y - 8 - \frac{1}{3}(x - 4y + 5) = 0,$$

откуда

$$6x + 9y - 24 - x + 4y - 5 = 0; \quad 5x + 13y - 29 = 0.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой будет: $5x + 13y - 29 = 0$.

§ 26. Проекция радиуса-вектора точки на ось. Пусть даны точка $M(x, y)$ (черт. 40) и угол α между осью OX и осью ON (угол α будем понимать, как в тригонометрии).



Черт. 40.

По теореме о проекции вектора на ось (§ 3) имеем (черт. 40): при $\alpha \geqslant \varphi$

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = OM\cos(\alpha - \varphi);$$

при $\alpha < \varphi$

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = OM\cos(\varphi - \alpha) = OM\cos(\alpha - \varphi).$$

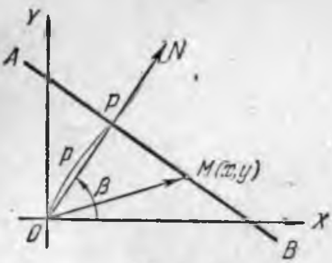
Итак,

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = OM\cos(\alpha - \varphi) = OM(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi);$$

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = OM\cos\varphi\cos\alpha + OM\sin\varphi\sin\alpha. \tag{20}$$

Но $OM\cos\varphi = x$; $OM\sin\varphi = y$. Следовательно, формулу (20) можно записать в виде:

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha. \tag{21}$$



Черт. 41.

Таким образом, *если угол между осью OX и осью ON равен α* (черт. 40), *то проекция радиуса-вектора точки $M(x, y)$ на ось ON равна $x\cos\alpha + y\sin\alpha$.*

§ 27. Нормальное уравнение прямой. Найдем уравнение прямой по следующим данным (параметрам): дано расстояние $OP = p \geqslant 0$ от начала координат до прямой и угол β между осью OX и вектором $\overrightarrow{OP}$, перпендикулярным к прямой. Этими данными прямая вполне определена (черт. 41).

Проведем ось ON, имеющую то же направление, что вектор $\overrightarrow{OP}$ (если прямая AB проходит через начало координат, то проводим ось ON также перпендикулярно прямой AB, а направление в ту или другую сторону выбираем по произволу). Возьмем *произвольную* точку $M(x, y)$ на прямой. По формуле (21), $\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = x\cos\beta + y\sin\beta$. С другой стороны, для *любой* точки M прямой (и только для точек прямой)

$$\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM} = \overline{OP} = |\overline{OP}| = p.$$

Следовательно, для *любой* точки $M(x, y)$ прямой (и *только* для точек прямой)

$$x\cos\beta + y\sin\beta = p, \tag{22}$$

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) называется *нормальным* уравнением прямой.

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальной форме, умножим обе части уравнения на некоторый множитель M:

$$MAx + MBy + MC = 0. \tag{24}$$

Подберем множитель M так, чтобы уравнение (24) обратилось в нормальное уравнение (23), т. е. чтобы выполнялись равенства:

$$MA = \cos\beta; \tag{25}$$

$$MB = \sin\beta; \tag{26}$$

$$MC = -p. \tag{27}$$

Возведя в квадрат и сложив равенства (25) и (26), найдем:

$$M^2(A^2 + B^2) = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Отсюда

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{28}$$

По этой формуле всегда найдем действительное значение M, так как $A^2 + B^2 > 0$. Множитель M называется *нормирующим*. Из (27) следует, что при $C \neq 0$ знак нормирующего множителя M надо выбрать обратным знаку свободного коэффициента C в уравнении прямой (так как по заданию $p > 0$, следовательно $-p < 0$). Если $C = 0$, то $p = 0$ [см. (27)] и знак нормирующего множителя M можем выбрать по произволу.

Пример. Привести к нормальной форме уравнение $3x - 4y - 25 = 0$.
Решение.

$$M = +\frac{1}{\sqrt{9+16}} = +\frac{1}{5}.$$

Нормальное уравнение $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 = 0$.

Следовательно, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $p = 5$.

§ 28. Расстояние точки от прямой. Задача. Даны: прямая LL_1 уравнением в нормальной форме $x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. Найти расстояние d точки M_0 от прямой (черт. 42).

Решение. Проведем ось ON перпендикулярно прямой LL_1, как в § 27, и обозначим проекцию точки M_0 на ось ON буквой P_0. Искомое расстояние $d = |\overrightarrow{KM_0}| = |\overrightarrow{PP_0}|$. По формуле (2) § 2:

$$\overline{OP} + \overline{PP_0} = \overline{OP_0}.$$

Но $\overline{OP_0} = \text{пр}_{ON}\,\overrightarrow{OM_0}$. Следовательно, $\overline{OP} + \overline{PP_0} = \text{пр}_{ON}\,\overrightarrow{OM_0}$, откуда

$$\overline{PP_0} = \text{пр}_{ON}\,\overrightarrow{OM_0} - \overline{OP} = \text{пр}_{ON}\,\overrightarrow{OM_0} - p.$$

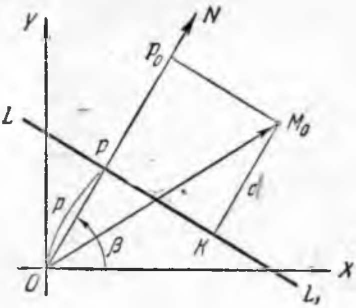
Так как по формуле (21) $\text{пр}_{ON}\,\overrightarrow{OM_0} = x_0\cos\beta + y_0\sin\beta$, то

$$\overline{PP_0} = x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p, \tag{29}$$

следовательно,

$$d = |\overline{PP_0}| = |x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p|. \tag{30}$$

Таким образом, *чтобы найти расстояние точки от прямой, надо в левую часть нормального уравнения прямой подставить координаты данной точки вместо текущих координат и взять результат подстановки по абсолютному значению.*



Черт. 42.

Если уравнение прямой дано в общей форме: $Ax + By + C = 0$, то, приведя это уравнение к нормальной форме, найдем для расстояния d точки $M_0(x_0, y_0)$ от этой прямой формулу:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{31}$$

Замечание. *Величина* $\overline{PP_0} = x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p$ вектора $\overrightarrow{PP_0}$ (или равного ему вектора $\overrightarrow{KM_0}$) положительна, если вектор $\overrightarrow{PP_0}$ (или $\overrightarrow{KM_0}$) направлен в ту же сторону, что и ось ON (§ 27), т. е. если точка M_0 находится с той стороны прямой LL_1, куда направлена ось ON; эта величина отрицательна, когда точка M_0 находится со стороны прямой LL_1, противоположной направлению оси ON. Отсюда следует, что координаты всех точек, находящихся с одной стороны от прямой $x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$, обращают левую часть уравнения в положительное число, а находящихся с другой стороны — в отрицательное. То же относится и к прямой, заданной ее общим уравнением $Ax+By+C=0$, так как левая часть нормального уравнения этой прямой получается из левой части его общего уравнения умножением на постоянное число (нормирующий множитель).

Например, подставив в левую часть уравнения $4x-6y-5=0$ координаты начала O (0, 0), заключаем, что координаты всех точек, расположенных с той же стороны от данной прямой, как начало, обращают трехчлен $4x-6y-5$ в отрицательное число.

Пример 1. Найти расстояние точки M_1 $(1;\ -3)$ от прямой $5x+12y-8=0$.

Решение. По формуле (31):

$$d=\left|\frac{5\cdot 1+12(-3)-8}{\sqrt{25+144}}\right|=\left|\frac{-39}{13}\right|=3.$$

Пример 2. Показать, что прямые $2x-3y-6=0$ и $4x-6y+3=0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение. Угловой коэффициент первой заданной прямой $k_1=\frac{2}{3}$, а второй $k_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (§ 17, пример). Следовательно, $k_1=k_2$ и прямые параллельны (§ 21). Чтобы найти расстояние между ними, возьмем какую-нибудь точку на первой прямой и найдем ее расстояние до второй прямой. С этой целью положим в уравнении первой прямой $2x-3y-6=0$, например, $y=0$. Найдем $x=3$; следовательно, на первой прямой имеется точка $M_0\,(3;\ 0)$. Расстояние этой точки до второй прямой $4x-6y+3=0$ равно

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{4\cdot 3-6\cdot 0+3}{\sqrt{4^2+6^2}}\right|=\left|\frac{15}{10}\right|=1{,}5.$$

Итак, расстояние между данными параллельными прямыми равно 1,5. Постройте чертеж.

ГЛАВА III

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 29. Определение линий второго порядка. Мы исследовали геометрическое значение уравнения первой степени $Ax+By+C=0$. Теперь нам предстоит исследовать геометрическое значение уравнения второй степени, которое обычно записывается в виде:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+H=0 \tag{1}$$

(коэффициенты при xy, x и y записываются в виде $2B$, $2D$, $2E$ для большей симметричности получающихся в дальнейшем формул).

Линии, определяемые уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, называются *линиями второго порядка* *).

§ 30. Окружность. Покажем, что окружность есть линия второго порядка. В самом деле, уравнение окружности с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом R

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{2}$$

(§ 14) после раскрытия скобок принимает вид:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0, \tag{3}$$

а это уравнение второй степени относительно текущих координат.

Сравнивая уравнение (3) с (1), видим, что в уравнении окружности коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой и отсутствует слагаемое с произведением координат.

Ставим обратную задачу: что определяет уравнение второй степени относительно текущих координат, в котором коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой и отсутствует слагаемое с произведением координат, т. е. уравнение

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+H=0. \tag{4}$$

---

*) В § 52 будет показано, что выбор осей координат не влияет на степень уравнения линии.

Постараемся преобразовать уравнение (4) к виду (2). Разделив обе части уравнения (4) на A и обозначив $\frac{2D}{A}=2D_1$, $\frac{2E}{A}=2E_1$, $\frac{H}{A}=H_1$, получим уравнение

$$x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+H_1=0,$$

которое можно представить в виде

$$(x+D_1)^2-D_1^2+(y+E_1)^2-E_1^2+H_1=0$$

или

$$(x+D_1)^2+(y+E_1)^2=D_1^2+E_1^2-H_1. \tag{5}$$

Возможны три случая:

1) $D_1^2+E_1^2-H_1>0$. Тогда, обозначив $D_1^2+E_1^2-H_1=R^2$, получим уравнение окружности с центром в точке $C(-D_1, -E_1)$ и с радиусом $R=\sqrt{D_1^2+E_1^2-H_1}$;

2) $D_1^2+E_1^2-H_1=0$; уравнению (5) удовлетворяет лишь одна точка с координатами $x=-D_1$, $y=-E_1$ (ср. § 13, пример 6, *а*);

3) $D_1^2+E_1^2-H_1<0$. В этом случае уравнению (5) не удовлетворяют координаты ни одной (действительной) точки, так как положительное, или равное нулю число [в левой части уравнения (5)] не может быть равно отрицательному числу (в правой).

Если и в случаях 2) и 3) обозначим $D_1^2+E_1^2-H_1=R^2$, то в случае 2) $R=0$, а в случае 3) R — мнимое число.

Итак, *уравнение второй степени относительно x и y, в котором коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой и отсутствует слагаемое с произведением координат, определяет окружность с действительным* (положительным или равным нулю) *или мнимым радиусом* (другими словами, определяет либо окружность, либо точку, либо не имеет геометрического значения).

Пример 1. Какую линию определяет уравнение $x^2+y^2-2x-4y-31=0$?

Ответ. Окружность.

Пример 2. Найти центр и радиус окружности, уравнение которой дано в примере 1.

Решение. Преобразуем левую часть данного уравнения окружности: $(x-1)^2-1+(y-2)^2-4-31=0$; $(x-1)^2+(y-2)^2=36$; $(x-1)^2+(y-2)^2=6^2$.

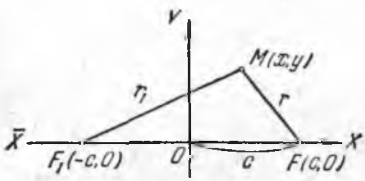
Следовательно, данное в примере 1 уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $C(1; 2)$ и радиусом $R=6$.

§ 31. Эллипс. *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F и F_1, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная* (большая, чем расстояние между фокусами).

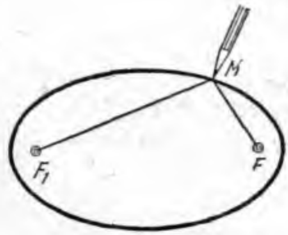
Обозначим эту постоянную величину через $2a$, расстояние между фокусами через $2c$. По определению, для *любой* точки M эллипса (и *только* для точек эллипса) имеем $FM+F_1M=2a$ (черт. 43), причем $2a>2c$.

Если взять нить (черт. 44) и укрепить ее концы в двух точках F и F_1 (причем длина нити больше расстояния FF_1), то острие карандаша M, натягивая нить, опишет эллипс, как это следует из определения.

Следуя методу аналитической геометрии, составим уравнение эллипса, а затем по уравнению изучим его форму и свойства. Выберем оси координат так: ось OX проведем через фокусы F и F_1, направив ее от F_1 к F, а за начало координат примем середину O отрезка FF_1 (черт. 43). Тогда координаты фокусов будут $F(c, 0)$; $F_1(-c, 0)$.



Черт. 43.



Черт. 44.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Обозначим $FM = r$, $F_1M = r_1$. По формуле расстояния между двумя точками (§ 9) имеем:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \tag{6}$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{7}$$

Для *всех* точек эллипса, и *только* для точек эллипса $r_1 + r_2 = 2a$ или

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{8}$$

Следовательно, уравнение (8) и есть уравнение эллипса.

Для освобождения уравнения (8) от радикалов уединим один из радикалов и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \tag{9}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Снова уединим радикал и разделим обе части уравнения на $4a$:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx;$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{10}$$

Теперь опять возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2, \tag{11}$$

откуда

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2;$$

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2;$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $a^2-c^2\neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{12}$$

Так как $2a>2c\geqslant 0$, то $a^2>c^2$, $a^2-c^2>0$. Обозначим:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{13}$$

Уравнение (12) примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{14}$$

Уравнение (12) $(a>c)$ выведено из соотношения $r+r_1=2a$, определяющего эллипс, поэтому координаты всех точек заданного эллипса удовлетворяют уравнению (12) [или уравнению (14)]. Надо показать, что и обратно, для всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (12) $(a>c)$, имеет место соотношение $r+r_1=2a$, т. е. все эти точки принадлежат эллипсу. Для этого достаточно вывести соотношение $r+r_1=2a$ из уравнения (12) (при $a>c$), что будет сделано ниже, в § 32.

Уравнение (13) называется *простейшим* или *каноническим* уравнением эллипса.

Замечание. Левая часть $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ формулы (10) есть расстояние r (черт. 43) точки эллипса $M(x, y)$ от фокуса F (см. формулу (6)]. Следовательно, формулу (9) можно записать в виде

$$r=a-\frac{c}{a}x. \tag{15}$$

Для расстояния r_1 точки $M(x, y)$ эллипса от фокуса F_1, на основании формулы $r+r_1=2a$, имеем:

$$r_1=2a-\left(a-\frac{c}{a}x\right)=a+\frac{c}{a}x. \tag{16}$$

Обозначим:

$$\frac{c}{a}=\varepsilon. \tag{17}$$

Тогда формулы (15) и (16) можно записать в виде

$$r=a-\varepsilon x; \tag{18}$$

$$r_1=a+\varepsilon x. \tag{19}$$

Расстояния точки M от фокусов эллипса называются ее *фокальными радиусами*. Формулы (18) и (19) выражают фокальные радиусы каждой точки эллипса $M(x, y)$ через абсциссу этой точки.

§ 32. Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек F и F_1, называемых фокусами гиперболы, взятая по абсолютному значению, есть величина постоянная* (неравная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами). Обозначим эту постоянную величину через $2a$ ($a > 0$), расстояние между фокусами — через $2c$. По определению, для *любой* точки M гиперболы (и *только* для точек гиперболы) имеем: $F_1M - FM = 2a$ или $FM - F_1M = 2a$ (черт. 43), причем $2a < 2c$.

Выберем оси координат так же, как при выводе уравнения эллипса, и обозначим $FM = r$, $F_1M = r_1$. Формулы (6) и (7) остаются те же, что для эллипса.

Для *любой* точки гиперболы (и *только* для точек гиперболы) $r_1 - r = \pm 2a$ или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{20}$$

Следовательно, уравнение (20) и есть уравнение гиперболы.

Для освобождения уравнения (20) от радикалов уединим первый радикал и в правой части полученного равенства возьмем сначала $-2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{21}$$

Уравнение (21) отличается от уравнения (9) только знаком правой части, поэтому после возведения в квадрат получится то же уравнение (10), что для эллипса:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{10}$$

Если же возьмем в правой части уравнения (21) не $-2a$, а $+2a$, то и в полученной формуле (10) надо будет, очевидно, заменить a на $-a$:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -a + \frac{c}{a}x = -\left(a - \frac{c}{a}x\right). \tag{22}$$

Теперь возведем уравнения (10) и (22) в квадрат. Так как уравнение (10) — то же, что для эллипса, а уравнение (22) отличается лишь знаком правой части, то после возведения в квадрат получим то же уравнение (11), как и для эллипса, а следовательно, после преобразований будем иметь снова уравнение (12).

Но для гиперболы, как указано выше, $0 < a < c$, следовательно, $a^2 - c^2 < 0$. Обозначим

$$a^2 - c^2 = -b^2. \tag{23}$$

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{24}$$

Мы получили *простейшее* или *каноническое* уравнение гиперболы.

Как было указано в § 31, надо еще для эллипса вывести из уравнения (12) ($a>c$) соотношение $r+r_1=2a$. Также и для гиперболы надо вывести из уравнения (12) ($a<c$) соотношение $r_1-r=\pm 2a$.

Пусть в уравнении (12) $a>c$. Из уравнения (12) выведем уравнение (11) при помощи тех же действий, как при переходе от (11) к (12), но произведенных в обратном порядке. Если же сделаем то же преобразование уравнения (12), но представим в нем c^2 в виде $(-c)^2$, то получим уравнение (11) с заменой c на $-c$:

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2. \tag{25}$$

Левая часть уравнения (11) равна r^2, уравнения (25) r_1^2 [см. формулы (6) и (7)]:

$$\left.\begin{aligned} r^2&=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2; \\ r_1^2&=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2 \end{aligned}\quad\left(\frac{c}{a}=\varepsilon;\quad a>c\right)\right\}. \tag{26}$$

Эта система уравнений имеет четыре решения:

1) $r=a-\varepsilon x$; $\quad r_1=a+\varepsilon x$;
2) $r=a-\varepsilon x$; $\quad r_1=-(a+\varepsilon x)$;
3) $r=-(a-\varepsilon x)$; $\quad r_1=a+\varepsilon x$;
4) $r=-(a-\varepsilon x)$; $\quad r_1=-(a+\varepsilon x)$.

Легко видеть, что решение 4) невозможно. Действительно, $r>0$, $r_1>0$, а из 4) следует $r+r_1=-2a<0$. Из решений 2) и 3) следует $r_1-r=\pm 2a$ или $|r_1-r|=2a$. С другой стороны, *для любой точки M плоскости* $|r_1-r|\leqslant F_1F$ (черт. 43). В самом деле, если точка M находится на полупрямых FX и $F_1\overline{X}$, то $|r_1-r|=F_1F$, а если она лежит на отрезке F_1F, то $|r_1-r|<F_1F$. При всяком другом положении точки M на плоскости также $|r_1-r|<F_1F$, так как разность двух сторон треугольника F_1MF меньше третьей стороны F_1F. По заданию $c<a$, следовательно, из неравенства $|r_1-r|\leqslant F_1F$ или $|r_1-r|\leqslant 2c$ вытекает, что $|r_1-r|<2a$ для любой точки плоскости и равенство $|r_1-r|=2a$ невозможно ни для одной точки плоскости. Таким образом, значения 2) и 3) для r и r_1 также невозможны, а из решения 1) следует: $r+r_1=2a$.

Для гиперболы в уравнении (12) $a<c$. Из этого уравнения получим те же четыре пары значений (26) для r и r_1, из которых 4) по-прежнему невозможно. Из решения 1) следует $r_1+r=2a$. Между тем *для любой точки плоскости* $r+r_1\geqslant F_1F$ (черт. 43) или $r+r_1\geqslant 2c$, а так как, по заданию, $c>a$, то $r+r_1>2a$, и равенство $r+r_1=2a$ невозможно ни для одной точки плоскости. Таким образом, решение 1) также невозможно, а из остающихся решений 2) и 3) следует: $r_1-r=\pm 2a$.

Замечание. Левая часть каждого из равенств (10) и (22) есть расстояние r (черт. 43) точки $M(x, y)$ гиперболы от фокуса F [см. (6)]. Следовательно, формулы (10) и (22) можно записать в виде: $r=a-\frac{c}{a}x$ и $r=-\left(a-\frac{c}{a}x\right)$. Формулу $r=a-\frac{c}{a}x$ мы получили, полагая

$r_1 - r = -2a$, откуда находим: $r_1 = -2a + r = -2a + \left(a - \frac{c}{a}x\right) = -\left(a + \frac{c}{a}x\right)$. Формулу $r = -\left(a - \frac{c}{a}x\right)$ мы получили, полагая $r_1 - r = 2a$, откуда $r_1 = 2a + r = 2a - \left(a - \frac{c}{a}x\right) = a + \frac{c}{a}x$.

Так как $r > 0$ и $r_1 > 0$, то полученные формулы для r и r_1 можно объединить (при этом, как и для эллипса, введем обозначение $\frac{c}{a} = \varepsilon$): для *любой* точки $M(x, y)$ гиперболы

$$r = |a - \varepsilon x|; \tag{27}$$

$$r_1 = |a + \varepsilon x|. \tag{28}$$

Формулы (27) и (28) выражают фокальные радиусы каждой точки гиперболы через абсциссу этой точки.

Формулы (27) и (28) можно также сразу получить из (26), приняв во внимание, что $r > 0$ и $r_1 > 0$.

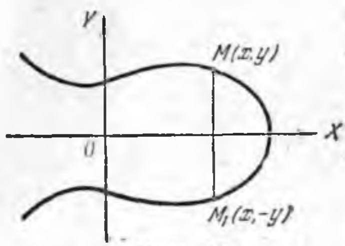
§ 33. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению.

I. Точки пересечения с осями координат. *Если в уравнении линии положим* $y = 0$, *то найдем* точки линии, имеющие ординату, равную нулю, т. е. *точки пересечения линии с осью* OX. Положив в уравнении эллипса (14) $y = 0$, найдем $\frac{x^2}{a^2} = 1$, откуда $x = \pm a$. Следовательно, эллипс пересекается с осью OX в двух точках: $A(a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$. Таким же образом, *полагая в уравнении линии* $x = 0$, *найдем точки пересечения линии с осью* OY. Положив в уравнении эллипса (14) $x = 0$, найдем две точки пересечения эллипса с осью OY: $B(0;\ b)$; $B_1(0;\ -b)$.

II. Область расположения. Из уравнения (14) следует:

1) $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$: $x^2 \leqslant a^2$; $|x| \leqslant a$;
$-a \leqslant x \leqslant a$;

2) $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$; $y^2 \leqslant b^2$; $|y| \leqslant b$;
$-b \leqslant y \leqslant b$.



Черт. 45.

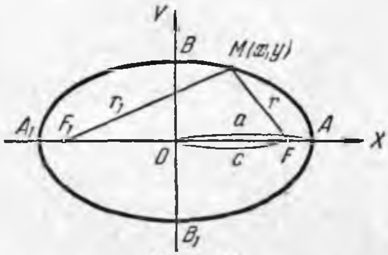
Следовательно, эллипс расположен в прямоугольнике, образованном прямыми $x = \pm a$; $y = \pm b$.

III. Симметрия. *Если уравнение линии не изменяется от замены* y *на* $-y$, *то линия симметрична относительно оси* OX. В самом деле, пусть $M(x, y)$ *какая угодно* точка линии (черт. 45). Тогда ее координаты удовлетворяют уравнению этой линии. Но если уравнение линии не изменяется от замены y на $-y$, то и координаты точки $M_1(x,\ -y)$ (черт. 45), симметричной точке $M(x,\ y)$ относительно оси

OX, также удовлетворяют уравнению линии; следовательно, точка $M_1(x, -y)$ также лежит на этой линии.

Заменив в уравнении эллипса y на $-y$, замечаем, что уравнение не изменяется. Следовательно, эллипс симметричен относительно оси OX.

Аналогично можно убедиться, что *если уравнение линии не изменяется от замены x на $-x$, то линия симметрична относительно оси OY.* Так как уравнение эллипса не изменяется от замены x на $-x$, то эллипс симметричен и относительно оси OY. Вследствие симметрии эллипса относительно обеих осей координат достаточно рассмотреть эллипс лишь в первой координатной четверти (в которой координаты всех точек неотрицательны: $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$).



Черт. 46.

IV. Форма эллипса. Решив уравнение эллипса относительно y, получим:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{29}$$

Рассматривая эллипс в первой координатной четверти, берем в формуле (29) знак плюс. Из этой формулы видим, что с возрастанием x от 0 до a ордината y точки эллипса убывает от b до 0.

Из всего сказанного следует, что эллипс имеет форму, показанную на черт. 46.

Отрезки OA и OB, длины которых равны соответственно a и b, называются *полуосями* эллипса. Формула (13) $b^2 = a^2 - c^2$ показывает, что $b \leqslant a$, поэтому a называется *большой полуосью*, b — *малой полуосью*. Фокусы эллипса расположены на большой оси A_1A. Точка O пересечения осей симметрии эллипса называется *центром* эллипса. Расстояние $OF = c$ фокуса эллипса от центра называется *полуфокусным расстоянием*. Из формулы $b^2 = a^2 - c^2$ находим:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,. \tag{30}$$

Замечание. Если в уравнении (14) эллипса положим $b = a$, то получим уравнение $x^2 + y^2 = a^2$, определяющее окружность [§ 14, формула (23)]. Следовательно, окружность есть частный вид эллипса: *эллипс с равными полуосями есть окружность.*

V. Эксцентриситет. Отношение полуфокусного расстояния c эллипса к большой полуоси a называется *эксцентриситетом* эллипса (обозначим эксцентриситет буквой ε):

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\,. \tag{31}$$

Так как $c < a$, то *эксцентриситет эллипса меньше единицы.* По формуле (33) находим для окружности $c = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, следовательно, эксцентриситет окружности $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$. Таким образом, для эллипса $0\leqslant\varepsilon<1$.

Формулу для эксцентриситета эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}$ можно представить в виде

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Из этой формулы мы видим, что чем ближе эксцентриситет эллипса ε к нулю, тем отношение $\frac{b}{a}$ ближе к 1 и тем ближе форма эллипса к окружности. Наоборот, при увеличении эксцентриситета эллипс делается все более вытянутым.

В формулах (18) и (19) (§ 31) для фокальных радиусов эллипса было введено обозначение $\frac{c}{a}=\varepsilon$, следовательно, в этих формулах ε — эксцентриситет эллипса.

Пример. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет. Найти фокальные радиусы точки M эллипса с абсциссой $x=2$.

Решение. $a=\sqrt{25}=5$; $b=\sqrt{16}=4$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$. Фокусы: F (3; 0); F_1 (—3; 0); эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$; фокальные радиусы точки M: $r=a-\varepsilon x=5-\frac{3}{5}\cdot 2=3{,}8$; $r_1=a+\varepsilon x=5+\frac{3}{5}\cdot 2=6{,}2$. (Постройте чертеж.)

§ 34. Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению.

I. Точки пересечения с осями координат. Положив в уравнении гиперболы (24) $y=0$, получим $x=\pm a$. Следовательно, гипербола пересекает ось OX в точках $A\,(a, 0)$; $A_1\,(-a, 0)$. Положив в уравнении гиперболы $x=0$, получим невозможное равенство $-\frac{y^2}{b^2}=1$; это означает, что с осью OY гипербола вовсе не пересекается. Как и для эллипса, a и b называются *полуосями* гиперболы, при этом a называется *действительной полуосью*, b — *мнимой полуосью*; число a есть длина отрезка OA.

II. Область расположения. Из уравнения гиперболы (24), которое запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2},$$

следует:

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1;\ x^2\geqslant a^2;\quad |x|\geqslant a;\quad x\geqslant a \text{ или } x\leqslant -a.$$

Следовательно, все точки гиперболы расположены справа от прямой $x=a$ и слева от прямой $x=-a$.

III. Симметрия. Так как уравнение гиперболы (24) не изменяется от замены y на $-y$ и x на $-x$, то *гипербола симметрична относительно обеих осей координат.* Точка пересечения осей симметрии гиперболы называется ее *центром.*

Вследствие симметрии гиперболы достаточно рассмотреть ее в первой координатной четверти.

Расстояние $OF=c$ от центра гиперболы до фокуса называется *полуфокусным расстоянием.* Из формулы (23) находим:

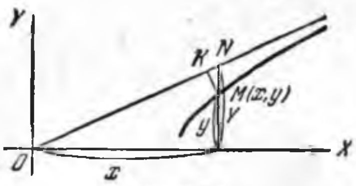
$$c=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{32}$$

IV. Асимптоты гиперболы. Решив уравнение (24) относительно y и рассматривая гиперболу в первой координатной четверти ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$), найдем:

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{33}$$

При $x=a$ ордината y имеет наименьшее значение $y=0$, с увеличением x ордината y монотонно растет, причем когда x растет неограниченно, то и y также растет неограниченно.

При больших значениях x постоянное число a^2 в формуле (33) мало сравнительно с x^2 и ордината y близка к $\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x$. Рассмотрим прямую $Y=\frac{b}{a}x$. Из сказанного следует, что если взять точку M гиперболы $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ с некоторой абсциссой x и точку N прямой $Y=\frac{b}{a}x$ с той же абсциссой x, то при большом значении x ордината y точки M будет близка к ординате Y точки N; следовательно, точка M гиперболы будет близка к точке N прямой (черт. 47). При этом $y<Y$, так как $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x=Y$. Докажем, что при неограниченном возрастании x разность $Y-y$ стремится к 0 (и притом монотонно):



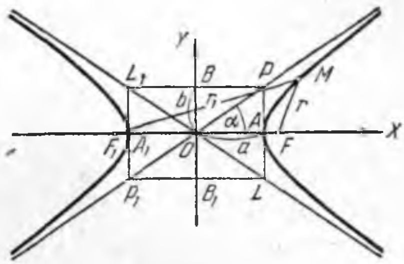
Черт. 47.

$$\lim_{x\to\infty}(Y-y)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\,\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Так как расстояние MK точки M кривой до прямой $Y=\frac{b}{a}x$ меньше, чем $MN=Y-y$, то из доказанного следует, что *при неог-*

раниченном увеличении абсциссы точки гиперболы расстояние от этой точки до прямой $Y = \frac{b}{a}x$ *стремится к нулю. Прямая* $y = \frac{b}{a}x$ *называется асимптотой гиперболы* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Из симметрии гиперболы следует существование *второй асимптоты* $y = -\frac{b}{a}x$.

Для построения асимптот гиперболы строим прямоугольник LPL_1P_1 (черт. 48), образованный прямыми $x = \pm a$; $y = \pm b$. Асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям этого прямоугольника, так как угловой коэффициент одной из диагоналей $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, а другой $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b}{a}$, и уравнения диагоналей будут $y = \pm\frac{b}{a}x$.



Черт. 48.

V. Форма гиперболы. Из всего сказанного следует, что гипербола состоит, как показано на черт. 48, из двух ветвей, приближающихся сколь угодно близко к асимптотам $y = \pm\frac{b}{a}x$.

VI. Эксцентриситет. Отношение полуфокусного расстояния c гиперболы к действительной полуоси a называется *эксцентриситетом* гиперболы:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon. \qquad (34)$$

Так как $c > a$, то *эксцентриситет гиперболы больше единицы.*

В формулах (27) и (28) $\varepsilon = \frac{c}{a}$; следовательно, ε в этих формулах есть эксцентриситет гиперболы.

Пример. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Найти ее полуоси, фокусы, уравнения асимптот, эксцентриситет. Найти фокальные радиусы точки M гиперболы с абсциссой $x = -6$.

Решение. $a = \sqrt{9} = 3$; $b = \sqrt{16} = 4$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$; уравнения асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$; фокальные радиусы точки M: $r = |a - \varepsilon x| = |3 - \frac{5}{3}(-6)| = 13$; $r_1 = |a + \varepsilon x| = |3 + \frac{5}{3}(-6)| = |-7| = 7$. (Постройте чертеж.)

§ 35. Парабола. *Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом* *параболы, и данной прямой DD', называемой ее директрисой* (предполагается, что фокус расположен вне директрисы).

Для вывода уравнения параболы выберем оси координат так: ось OX проведем через фокус F перпендикулярно директрисе DD', а за начало координат возьмем середину отрезка FP (черт. 49). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы, $p>0$ — расстояние фокуса от директрисы, KM — расстояние точки M от директрисы. Тогда координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$; расстояние $PO=\frac{p}{2}$. Расстояние между точками $M(x, y)$ и $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ равно (§ 9):

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Расстояние KM равно расстоянию PL между точками $P\left(-\frac{p}{2}\right)$ и $L(x)$ оси OX (§ 5):

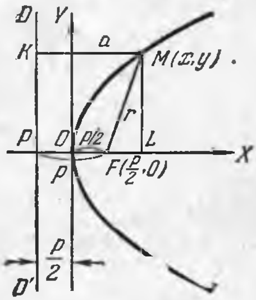
$$KM=PL=\left|x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right|=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{35}$$

По определению параболы

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{36}$$

Возведем в квадрат обе части последнего уравнения:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2. \tag{37}$$



Черт. 49.

Раскрыв скобки и упростив, найдем:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4};$$

$$y^2=2px. \tag{38}$$

Уравнение (37) [или (38)] равносильно первоначальному уравнению (36). В самом деле, если извлечь квадратный корень из обеих частей уравнения (37), то получим два уравнения: уравнение (36) и уравнение $-\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$, но второе уравнение решений не имеет, так как положительное число не может быть равно отрицательному.

Уравнение (38) называется *простейшим* или *каноническим* уравнением параболы. Число p называется *параметром* параболы.

§ 36. Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению.

I. Т о ч к и п е р е с е ч е н и я с о с я м и к о о р д и н а т. Положив $y=0$ в уравнении параболы $y^2=2px$, найдем $x=0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

II. Симметрия. Так как уравнение параболы не изменяется от замены y на $-y$, то *парабола симметрична относительно оси OX.*

III. Область расположения. Так как $y^2 \geqslant 0$ и $p > 0$ (§ 35), то из уравнения $y^2 = 2px$ следует: $x \geqslant 0$. Следовательно, все точки параболы расположены справа от оси OY.

IV. Форма параболы. Решив уравнение $y^2 = 2px$ относительно y и рассматривая параболу в первой координатной четверти, найдем $y = +\sqrt{2px}$. Из этой формулы видим, что при возрастании x ордината y монотонно возрастает; при неограниченном возрастании x ордината y также растет неограниченно.

Из всего сказанного следует, что парабола имеет форму, показанную на черт. 49.

Точка O параболы, лежащая на ее оси симметрии, называется *вершиной* параболы.

Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ (черт. 49), директриса отстоит от вершины O (0, 0) на расстоянии $\frac{p}{2}$ (влево); следовательно, уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{39}$$

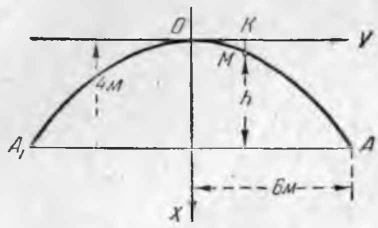
V. Фокальный радиус. По определению параболы (§ 35) фокальный радиус r *любой* ее точки $M(x, y)$ (черт. 49) равен расстоянию d этой точки от директрисы; $r = d = KM = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ [§ 35, формула (35)]. Но $x \geqslant 0$, $p > 0$, следовательно,

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{40}$$

Пример. Дана парабола $y^2 = 4x$. Найти ее параметр p, фокус, уравнение директрисы и фокальный радиус точки M параболы с абсциссой $x = 4$.

Решение. $p = 2$; фокус F (1; 0); уравнение директрисы $x = -1$; фокальный радиус точки M: $r = x + \frac{p}{2} = 4 + 1 = 5$. [Постройте чертеж (при построении параболы найдите несколько точек по ее уравнению).]

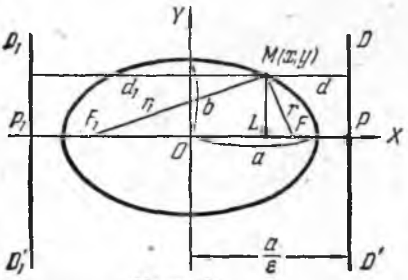
Задача. Профиль мостовой арки имеет форму параболы. Пролет арки 12 *м*, высота (наибольшая) 4 *м*. Найти высоту арки на расстоянии 2 *м* от ее оси симметрии.



Черт. 50.

Решение. Оси координат выбираем так, как показано на черт. 50. В этой системе профиль арки имеет уравнение $y^2 = 2px$ (§ 35). Из условия задачи следует, что точка A (4; 6) лежит на этой параболе; следовательно, $36 = 2p \cdot 4$, откуда $2p = 9$, и уравнение параболы принимает вид $y^2 = 9x$. Точка M (черт. 50) имеет ординату $OK = y = 2$. Из уравнения параболы находим абсциссу этой точки: $2^2=9x$; $x=\frac{4}{9}=KM$. Высота арки на расстоянии 2 *м* от ее оси симметрии $h=4-\frac{4}{9}=3\frac{5}{9}\approx 3{,}56$ *м*.

§ 37. Директрисы эллипса и гиперболы. *Директрисами эллипса* называются прямые (DD' и D_1D_1'), параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$ (черт. 51). *Директрисами гиперболы* называются прямые (DD' и D_1D_1'), параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ (черт. 52).

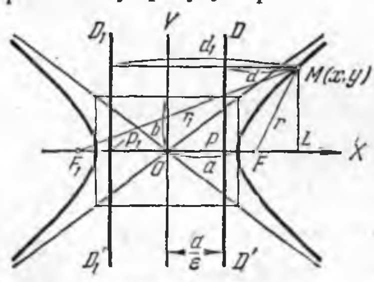


Черт. 51.

Из этих определений следует, что директрисы эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ имеют уравнения: $x=\frac{a}{\varepsilon}$ (правая директриса) и $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ (левая директриса) (черт. 51 и 52).

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon<1$, следовательно, $\frac{a}{\varepsilon}>a$ и директрисы эллипса DD' и D_1D' расположены *вне* эллипса (черт. 51). Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon>1$, следовательно, $\frac{a}{\varepsilon}<a$ и директрисы гиперболы DD' и D_1D_1' расположены *вне* ветвей гиперболы (черт. 52). Правую директрису DD' эллипса (гиперболы) назовем *соответствующей* правому фокусу F, левую директрису D_1D_1' — левому фокусу F_1.

Теорема I. *Отношение расстояния любой точки эллипса от фокуса к расстоянию ее от соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса.*



Черт. 52.

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ — *произвольная* точка эллипса (черт. 51), r и r_1 — ее расстояния от фокусов (фокальные радиусы), d и d_1 — ее расстояния от директрис. Ввиду симметрии эллипса достаточно доказать теорему для одного из фокусов, например правого.

Точки L и P на оси OX имеют абсциссы x и $\frac{a}{\varepsilon}$. По формуле (5) § 5, $d=LP=\overline{LP}=\frac{a}{\varepsilon}-x$. По формуле (18) § 31, $r=a-\varepsilon x$.

Следовательно,

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}-x\right)}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon.$$

Итак,

$$\frac{r}{d}=\varepsilon. \qquad (41)$$

По симметрии эллипса также

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon. \qquad (42)$$

Теорема II. *Отношение расстояния любой точки гиперболы от фокуса к расстоянию этой точки от соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.*

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ — *произвольная* точка гиперболы (черт. 52). Точки L, P имеют абсциссы x и $\frac{a}{\varepsilon}$. По формуле (6) § 5, $d=LP=\left|\frac{a}{\varepsilon}-x\right|$; по формуле (27) § 32, $r=|a-\varepsilon x|$. Следовательно,

$$\frac{r}{d}=\frac{|a-\varepsilon x|}{\left|\frac{a}{\varepsilon}-x\right|}=\left|\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}\right|=|\varepsilon|=\varepsilon.$$

По симметрии гиперболы также $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$.

§ 38. Эксцентриситет параболы. Общее геометрическое свойство эллипса, гиперболы, параболы. По определению параболы расстояние r (черт. 49) любой точки M параболы от фокуса (фокальный радиус) равно расстоянию d этой точки от директрисы: $r=d$. Поэтому для всякой точки параболы отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянное число, равное 1. Так как для эллипса и гиперболы отношение $\frac{r}{d}$ есть также постоянное число, равное эксцентриситету ε, то естественно для параболы назвать отношение $\frac{r}{d}$ ее эксцентриситетом. Таким образом, отношение расстояния r любой точки параболы от фокуса к расстоянию этой точки d от директрисы называется *эксцентриситетом* параболы:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon. \qquad (41)$$

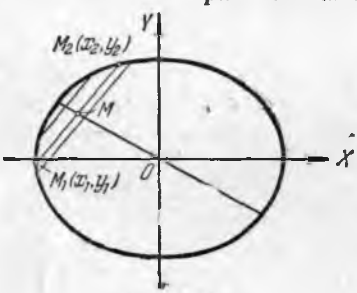
Из сказанного выше следует: *эксцентриситет параболы равен* 1:

$$\varepsilon=1.$$

Из теорем I и II § 37 и формулы (41) настоящего параграфа следует, что эллипс, гипербола и парабола обладают общим геометрическим свойством: отношение расстояния r любой точки каждой из этих кривых от фокуса к расстоянию этой точки d от директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε кривой: $\frac{r}{d}=\varepsilon$. Можно доказать, что этим свойством обладают только эллипс, гипербола и парабола (если фокус не лежит на директрисе).

Из предыдущего следует: геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что отношение расстояния каждой из них от данной точки F к расстоянию от данной прямой DD_1 является постоянным числом ε, есть эллипс при $\varepsilon<1$, гипербола при $\varepsilon>1$ и парабола при $\varepsilon=1$ (предполагается, что точка F не лежит на прямой DD_1).

§ 39. Диаметры эллипса и гиперболы. *Диаметром кривой называется геометрическое место середин параллельных хорд.* Ниже мы докажем, что середины параллельных хорд эллипса, гиперболы и параболы располагаются на прямых.



Черт. 53.

Найдем уравнение диаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Обозначим угловой коэффициент параллельных хорд эллипса (одинаковый для всех хорд в виду их параллельности) буквой k. Возьмем какую угодно из этих хорд и пусть она пересекает эллипс в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (черт. 53). Мы будем предполагать, что хорда M_1M_2 не параллельна оси OY, следовательно, $x_2 \neq x_1$. Середина M хорды M_1M_2 имеет координаты

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad Y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{43}$$

Мы ищем зависимость между X и Y.

Так как точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса (14):

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

Вычтя из первого равенства второе, получим:

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$$

или

$$\frac{1}{a^2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{b^2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$

Разделив обе части этого равенства на 2, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{x_1+x_2}{2}(x_1-x_2)+\frac{1}{b^2}\frac{y_1+y_2}{2}(y_1-y_2)=0.$$

Подставим сюда X и Y из (43) и разделим обе части равенства на x_2-x_1 (по условию $x_2 \neq x_1$, следовательно, $x_2-x_1 \neq 0$). Получим:

$$-\frac{1}{a^2}X+\frac{1}{b^2}Y\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}=0; \qquad -\frac{1}{a^2}X=\frac{1}{b^2}Y\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Но отношение $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ равно угловому коэффициенту хорды k [§ 23, формула (14)]. Следовательно,

$$-\frac{1}{a^2}X=\frac{1}{b^2}Y\cdot k,$$

откуда (полагая $k \neq 0$)

$$Y=-\frac{b^2}{a^2k}X. \tag{44}$$

Так как X, Y являются координатами середины M *любой* из заданных параллельных хорд, то уравнению (44) удовлетворяют координаты середин всех этих хорд, следовательно, середины всех этих хорд лежат на прямой (44). Обратно, всякая точка $M(X, Y)$ прямой (44), лежащая внутри эллипса, есть середина хорды M_1M_2 с угловым коэффициентом k, проведенной через эту точку. В самом деле, середина этой хорды, по доказанному, лежит на прямой (44), следовательно, совпадает с точкой $M(X, Y)$. Таким образом, *уравнение* (44) *есть уравнение диаметра эллипса, проходящего через середины параллельных хорд с угловым коэффициентом* k. Из уравнения (44) видим, что диаметры эллипса проходят через начало координат (центр эллипса).

По определению, диаметры — отрезки прямых (44), заключенные внутри эллипса, но иногда диаметром называют всю бесконечную прямую (44).

Диаметр называется *сопряженным* хордам, через середины которых он проходит.

Формула (44) непригодна для хорд, параллельных осям симметрии эллипса. Но из симметрии эллипса непосредственно следует, что для хорд, параллельных оси OY (черт. 53), сопряженный диаметр совпадает с осью OX, а для хорд, параллельных оси OX, сопряженный диаметр совпадает с осью OY. Диаметры, совпадающие с осями симметрии эллипса, называются его *главными диаметрами*.

Обозначим буквой k' угловой коэффициент диаметра, сопряженного хордам с угловым коэффициентом k (т. е. диаметра, проходящего через середины этих хорд). Тогда из уравнения диаметра (44) следует:

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}. \tag{45}$$

Из этой формулы находим: $k=-\frac{b^2}{a^2k'}$, откуда видно, что если угловой коэффициент параллельных хорд равен k', то угловой коэффициент сопряженного диаметра окажется равным k.

Таким образом, если диаметр с угловым коэффициентом k' сопряжен хордам с угловым коэффициентом k, то и диаметр с угловым коэффициентом k сопряжен хордам с угловым коэффициентом k': каждый из этих двух диаметров делит пополам хорды, параллельные другому.

Два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются сопряженными диаметрами. Угловые коэффициенты k и k' сопряженных диаметров эллипса связаны, следовательно, равенством (45) или равенством

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}. \qquad (45')$$

Для вывода уравнения диаметра гиперболы, сопряженного хордам с угловым коэффициентом k, представим уравнение гиперболы в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-b^2}=1$. Тогда все вычисления остаются те же, что и для диаметра эллипса, с заменой b^2 на $-b^2$. Поэтому уравнение диаметра гиперболы, сопряженного хордам с угловым коэффициентом k, получится заменой b^2 на $-b^2$ в уравнении (44):

$$y=\frac{b^2}{a^2k}x. \qquad (46)$$

Рассуждая на основе уравнения (46) так же, как мы рассуждали выше для эллипса, исходя из уравнения (44), придем к выводу, что угловые коэффициенты k и k' двух сопряженных диаметров гиперболы связаны соотношением

$$k'=\frac{b^2}{a^2k} \quad \text{или} \quad kk'=\frac{b^2}{a^2}. \qquad (47)$$

Из симметрии гиперболы следует, что ее оси симметрии являются сопряженными диаметрами. Диаметры, совпадающие с осями симметрии гиперболы, называются ее *главными диаметрами.*

Пример. Дан эллипс $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение диаметра, сопряженного хордам с угловым коэффициентом $k=1$.

Решение. $b^2=5$; $a^2=10$; $k=1$. Уравнение диаметра [по формуле (44)]: $y=-\frac{5}{10\cdot 1}x$; $y=-\frac{1}{2}x$. (Постройте чертеж.)

§ 40. Диаметры параболы. Обозначим буквой k угловой коэффициент каждой из параллельных хорд параболы $y^2=2px$. Возьмем из данных параллельных хорд произвольную хорду M_1M_2 (черт. 54). Так как точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на параболе $y^2=2px$, то $y_1^2=2px_1$, $y_2^2=2px_2$, откуда $y_2^2-y_1^2=2p(x_2-x_1)$ или

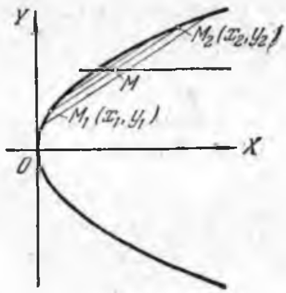
$$\frac{y_2+y_1}{2}(y_2-y_1)=p(x_2-x_1); \quad \frac{y_2+y_1}{2}=p\,\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}. \tag{48}$$

Но середина M хорды M_1M_2 имеет ординату $Y=\frac{y_1+y_2}{2}$; кроме того, по формуле (14) (§ 23) имеем $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$. Следовательно, из уравнения (48) получаем:

$$Y=\frac{p}{k}. \tag{49}$$

Уравнение (49) есть *уравнение диаметра параболы, сопряженного хордам с угловым коэффициентом* k. Так как p и k — постоянные числа, то диаметр (49) параллелен оси OX (при любом заданном значении k). Следовательно, *все диаметры параболы параллельны ее оси симметрии.*

Если хорды параллельны оси OY, то непосредственно видно, что сопряженный им диаметр есть ось симметрии параболы OX (главный диаметр параболы).



Черт. 54.

Пример. Дана парабола $y^2=4x$. Найти уравнение диаметра, сопряженного хордам с угловым коэффициентом $k=2$.

Решение. $p=2$, уравнение диаметра: $y=\frac{p}{k}=\frac{2}{2}$; $y=1$. (Постройте чертеж.)

§ 41. Параметрические уравнения линии. Как мы знаем, линия определяется уравнением вида $F(x, y)=0$, связывающим координаты x и y каждой ее точки. Можно также определить линию двумя уравнениями, выражающими абсциссу x и ординату y каждой ее точки, как функции третьей переменной t, называемой параметром:

$$\left.\begin{aligned} x&=f(t); \\ y&=\varphi(t). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Уравнения (50) называются *параметрическими уравнениями линии.* Исключив из уравнений (50) параметр t (если это возможно), получим уравнение, связывающее x и y, т. е. получим уравнение той же линии в виде $F(x, y)=0$ [если только всякое решение (x, y) этого уравнения может быть получено при некотором t из уравнений (50)].

По уравнениям (50) можно, придавая параметру t произвольные значения и вычисляя соответствующие значения x и y, построить линию по точкам.

Пример. Построить по точкам линию

$$x = 2t^2 - 4t + 2, \qquad y = 2t - 2. \tag{51}$$

Решение. Придавая t значения -1; 0; 1; 2; ..., вычисляем из уравнений (51) x и y (см. таблицу). На черт. 55 построены найденные точки кривой (8; -4); (2; -2); ...

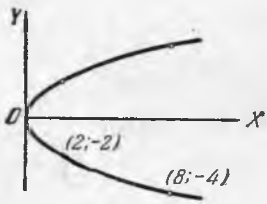
Исключим t из заданных уравнений (51):

t	x	y
-1	8	-4
0	2	-2
1	0	0
2	2	2
3	8	4

$$t = \frac{y+2}{2}; \quad x = 2\left(\frac{y+2}{2}\right)^2 - 4\frac{y+2}{2} + 2 = \frac{1}{2}y^2;$$

$$x = \frac{1}{2}y^2; \quad y^2 = 2x.$$

Обратно, если положим $y = 2t - 2$, то из уравнения $y^2 = 2x$ найдем $x = 2t^2 - 4t + 2$. Таким образом, всякая пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению параболы $y^2 = 2x$, удовлетворяет уравнениям (51) при подходящем значении t. Следовательно, уравнения (51) определяют эту параболу.



Черт. 55.

Упражнение. Построить по точкам линию

$$x = t - 1,$$
$$y = t + 2.$$

После этого исключить параметр t из данных уравнений.

Замечание. Одна и та же линия может быть задана различными параметрическими уравнениями. Например, каждая пара уравнений

$$x = 4t - 1, \qquad y = 2t + 1$$

и

$$x = 3t - 2, \qquad y = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

определяют одну и ту же прямую. В самом деле, исключив t из каждой пары уравнений, получим одно и то же уравнение $x - 2y + 3 = 0$.

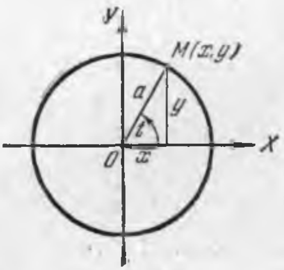
§ 42. Параметрические уравнения окружности. Пусть радиус окружности равен a, а ее центр находится в начале координат. Обозначим через t угол между осью OX и радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ *произвольной* точки $M(x, y)$ окружности (черт. 56). Выражая x и y через t, находим на основе определения косинуса и синуса

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

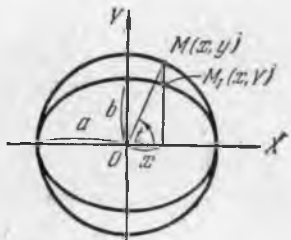
для *любой* точки данной окружности (и только для точек окружности); следовательно, *уравнения* (52) — *параметрические уравнения окружности с центром в начале координат и радиусом* a.

Если уравнения (57) возведем в квадрат и сложим, получим $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$ или $x^2 + y^2 = a^2$ — уравнение окружности в обычной форме.

§ 43. Параметрические уравнения эллипса. Возьмем окружность $x^2 + y^2 = a^2$ (черт. 57). Умножим ординату y каждой ее точки $M(x, y)$ на постоянное число $\frac{b}{a}$ $(b < a)$, оставив абсциссу x без изменения



Черт. 56.



Черт. 57.

(иначе говоря, произведем «сжатие» всех ординат в отношении $b:a$). Обозначим $\frac{b}{a} y = Y$. Тогда $y = \frac{a}{b} Y$ и из уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ найдем

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} Y^2 = a^2; \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, геометрическое место точек $M_1(x, Y)$ есть эллипс с полуосями a и b *). Таким образом, если ординату y каждой точки окружности радиуса a умножить на $\frac{b}{a}$ $(b < a)$, а абсциссу ее x оставить без изменения, то получится эллипс с большой полуосью a и малой полуосью b.

Возьмем теперь параметрические уравнения окружности (52) (§ 42) и умножим y на $\frac{b}{a}$, оставив x без изменения. Получим

$$x = a\cos t,$$

$$Y = \frac{b}{a} y = \frac{b}{a} a\sin t = b\sin t$$

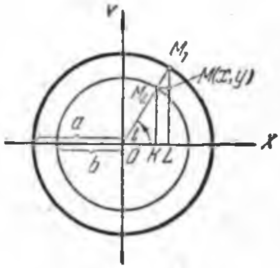
*) Нетрудно видеть, что при помощи такого преобразования точек окружности можно получить любую точку эллипса.

или, изменив обозначение ординаты,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Следовательно, *уравнения* (53) *представляют собой параметрические уравнения эллипса с полуосями* a и b (черт. 57).

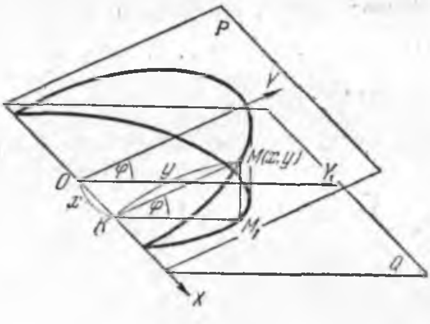
На формулах (53) основан следующий способ построения эллипса по точкам (черт. 58). Строим окружности радиуса a и b. Проводим какой-либо радиус OM_1. Тогда $OL = a\cos t$; $KM_2 = b\sin t$. Проведя $M_2M \| OX$, получим точку $M(x, y)$ с координатами $OL = x = a\cos t$; $LM = y = b\sin t$, т. е. точку эллипса. Таким способом строим точки эллипса, одну за другой.



Черт. 58.

Упражнение. Исключите из уравнений (53) параметр t. Получится $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — уравнение эллипса в обычной форме.

§ 44. Эллипс как проекция окружности. Пусть окружность радиуса a, лежащая в плоскости P, проектируется на плоскость Q, составляющую угол φ с плоскостью P. Для простоты рассуждений предположим, что плоскость Q проходит через центр O окружности, и расположим в плоскостях P и Q прямоугольные системы осей координат OXY и OXY_1, как показано на черт. 59. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ окружности. Ее проекция M_1 на плоскость Q будет иметь в системе OXY_1 координаты x и $Y = KM_1 = y\cos\varphi$. Обозначим $a\cos\varphi = b$, где a (радиус окружности), φ (угол между плоскостями P и Q), b — постоянные числа. Тогда $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ и $Y = \frac{b}{a}y$. Отсюда следует (§ 41), что проекция данной окружности радиуса a на плоскость Q, составляющую угол φ с плоскостью окружности, есть эллипс с полуосями a и $b = a\cos\varphi$.



Черт. 59.

ГЛАВА IV

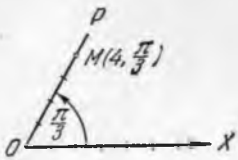
ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

§ 45. Полярные координаты на плоскости. Для определения положения точки на плоскости применяются, кроме прямоугольных координат, *полярные* координаты.

Возьмем некоторую точку плоскости O, которую назовем *полюсом*, и луч OX, который назовем *полярной осью* (черт. 60). Выберем также масштабную единицу. Пусть M — какая-либо точка плоскости. Расстояние $OM = r$ точки M от полюса ($r \geqslant 0$) назовем *полярным радиусом* точки M, а угол φ между осью OX и вектором $\overrightarrow{OM}$ *полярным углом* (угол φ понимается, как в тригонометрии). Числа r и φ определяют положение точки M на плоскости: зная r и φ, построим единственную точку M плоскости; зная точку M, найдем числа r и φ. При этом φ определяется «с точностью до $2k\pi$», т. е. к φ можно прибавить (или от φ отнять) целое число раз по 2π. Полярный радиус r и полярный угол φ точки M называются ее *полярными координатами*.

Черт. 60.

Запись $M(r, \varphi)$ или $M(r; \varphi)$ означает, что точка M имеет полярный радиус r и полярный угол φ.



Черт. 61.

Пример. Построить точку $M\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Строим луч OP под углом $\varphi = \frac{\pi}{3}$ к оси OX и на этом луче откладываем от полюса отрезок $OM = r = 4$ (черт. 61). Построенная точка M и есть искомая.

Замечание. Иногда бывает полезно отказаться от условия $r \geqslant 0$ и рассматривать также значения $r < 0$. Тогда при построении точки $M(r, \varphi)$ в случае $r < 0$ проводим луч OP под углом φ к полярной оси OX и откладываем отрезок $OM = |r|$ на луче OP', являющемся продолжением OP в противоположную сторону от полюса O.

§ 46. Уравнение линии в полярных координатах. Как и в случае прямоугольных координат, в полярных координатах линия определяется уравнением $F(r, \varphi)=0$, которому удовлетворяют координаты *всех* точек $M(r, \varphi)$, лежащих на этой линии, и *только* этих точек.

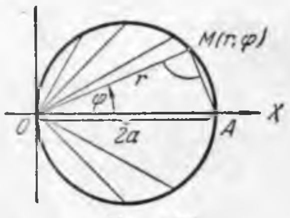
Пример. Построить линию $r=2a\cos\varphi$ по точкам.

Решение. Задаем φ произвольные значения и находим соответствующие значения r по заданному уравнению. Полагаем $r \geqslant 0$; если из уравнения при некотором φ получаем $r<0$, то считаем, что соответствующей точки нет (см. таблицу).

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$2a$	$a\sqrt{3}\approx$ $\approx 1{,}73a$	$a\sqrt{2}\approx$ $\approx 1{,}41a$	a	0	Точек нет		0	$a\sqrt{2}\approx$ $\approx 1{,}41a$	$a\sqrt{3}\approx$ $\approx 1{,}73a$	$2a$

Строим затем найденные точки (черт. 62).

Какую мы получили кривую? Для любой ее точки $M(r, \varphi)$ имеем $r=2a\cos\varphi$ в том случае, если угол OMA *прямой* (и *только* в этом случае). Геометрическое место вершин M прямого угла, опирающегося на отрезок OA, есть окружность, построенная на OA, как на диаметре. Следовательно, уравнение $r=2a\cos\varphi$ определяет окружность с радиусом a, расположенную относительно полярной оси, как на черт. 62.



Черт. 62.

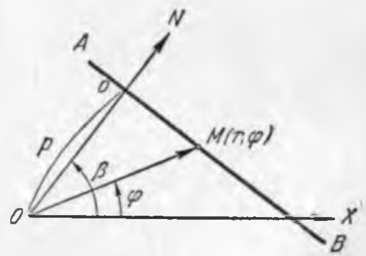
Упражнение. Постройте по точкам кривую $r=2a\cos\varphi$, рассматривая также $r<0$ и пользуясь условием, данным в замечании к § 45. (Получится та же кривая.)

§ 47. Уравнение прямой в полярных координатах. Пусть дано (черт. 63) расстояние $OP=p$ от полюса O до прямой AB ($OP \perp AB$) и угол β между полярной осью OX и вектором $\overrightarrow{OP}$ (этими данными прямая вполне определена).

Для *любой* точки $M(r, \varphi)$ прямой (и *только* для точек прямой) $\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM}=p$. Но $\text{пр}_{ON}\overrightarrow{OM}=r\cos(\beta-\varphi)$ [ничего не изменится, если точка M будет взята на прямой по другую сторону от точки P, так как $\cos(\varphi-\beta)=\cos(\beta-\varphi)$]. Следовательно,

$$r\cos(\beta-\varphi)=p. \tag{1}$$

Это и есть уравнение заданной прямой.



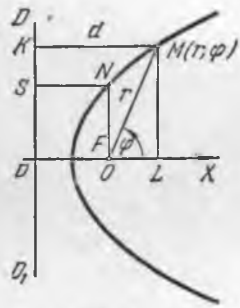
Черт. 63.

Пример. Прямая $r\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=2$ отстоит от полюса на 2 единицы длины и перпендикулярна лучу ON, составляющему с полярной осью OX угол $\frac{\pi}{4}$. Постройте чертеж.

§ 48. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Пусть дана какая-либо из этих трех кривых (черт. 64). Берем один из фокусов F кривой за полюс O и направляем полярную ось перпендикулярно директрисе DD_1. Возьмем *произвольную* точку $M(r, \varphi)$ кривой. Как известно [§ 37 и 38, формула (41)],

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \tag{2}$$

Нам нужно найти зависимость между r и φ. Мы достигнем этого, если в формуле (2) выразим d через r и φ. Обозначим $OP = q$. Имеем: $d = KM = \overline{PL} = \overline{PO} + \overline{OL}$ (§ 2); $\overline{OL} = r\cos\varphi$. Следовательно, $d = q + r\cos\varphi$. Подставив найденное выражение для d в формулу (2), получим:



Черт. 64.

$$\frac{r}{q + r\cos\varphi} = \varepsilon; \quad r = q\varepsilon + r\varepsilon\cos\varphi;$$

$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = q\varepsilon;$$

$$r = \frac{q\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть уравнение эллипса (при $\varepsilon < 1$), гиперболы (при $\varepsilon > 1$) и параболы (при $\varepsilon = 1$) в полярных координатах (q — расстояние от фокуса до директрисы).

Если проведем через фокус O хорду, перпендикулярную OX, и обозначим длину половины этой хорды ON через p, то для точки N будем иметь: $r = p$; $d = SN = q$. Из формулы (2) получим: $\frac{p}{q} = \varepsilon$; $p = q\varepsilon$. Поэтому уравнение (3) можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \tag{3'}$$

(p — длина полухорды ON).

В случае гиперболы для точек одной ветви $r > 0$, для точек другой ветви $r < 0$ (см. замечание в § 45).

Для параболы $y^2 = 2px$ нетрудно доказать, что p в числителе формулы (3′) совпадает с параметром p параболы. В самом деле, параметр параболы p равен расстоянию от фокуса до директрисы (§ 35), обозначенному выше через q. Поэтому в формуле (3) можно положить $q = p$, следовательно, $q\varepsilon = p\varepsilon$, а так как для параболы $\varepsilon = 1$, то числитель формулы (3) равен p, где p — параметр параболы.

Замечание. Число p в уравнении (3) эллипса и гиперболы, равное длине полухорды ON (черт. 64), также называется параметром эллипса и гиперболы. Выразим параметр p через их полуоси.

По доказанному $p = q\varepsilon$, где $q = OP = FP$ (черт. 64).

Для эллипса расстояние FP получится, если из расстояния от центра эллипса до точки P, равного $\frac{a}{\varepsilon}$ (как расстояния от центра до директрисы), вычесть расстояние c от центра до фокуса F; таким образом, для эллипса $q=\frac{a}{\varepsilon}-c$. Следовательно,

$$p=q\varepsilon=\left(\frac{a}{\varepsilon}-c\right)\varepsilon=a-c\varepsilon=a-\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}.$$

Для гиперболы $\frac{a}{\varepsilon}<c$, поэтому $q=c-\frac{a}{\varepsilon}$; $p=q\varepsilon=c\varepsilon-a=\frac{c^2}{a}-$ $-a=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{b^2}{a}$. Итак, для эллипса и гиперболы $p=\frac{b^2}{a}$.

Пример. Дана кривая

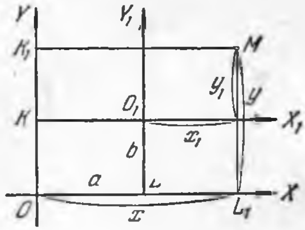
$$r=\frac{2}{1-\cos\varphi}.$$

Написать уравнение этой кривой в прямоугольных координатах в канонической форме.

Решение. Данное уравнение есть уравнение (3′), в котором $p=2$, $\varepsilon=1$. Следовательно, это уравнение параболы с параметром $p=2$. В канонической форме ее уравнение $y^2=4x$.

§ 49. Преобразование прямоугольных координат. Перенос начала.

Пусть в некоторой системе координат точка M имеет координаты x и y. Если мы изменим координатную систему, то точка M в этой новой системе координат будет иметь другие координаты x_1 и y_1. Мы приступаем к решению важной для дальнейшего задачи: зная координаты точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе.



Черт. 65.

Пусть дана прямоугольная система координат с осями OX и OY (черт. 65) и в ней точка $M(x, y)$. Перенесем начало координат в точку $O_1(a, b)$, не изменяя направления осей. Получим новую систему координат с осями O_1X_1 и O_1Y_1. Найдем координаты (x_1, y_1) точки M в этой системе координат.

При любом расположении точек O, L, L_1 на оси OX имеем $\overline{OL}+\overline{LL_1}=\overline{OL_1}$ (§ 2) или $a+x_1=x$. Аналогично $\overline{OK}+\overline{KK_1}=\overline{OK_1}$, или $b+y_1=y$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1+a;\\ y&=y_1+b.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

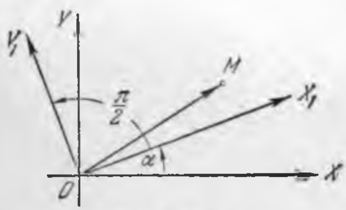
$$\left.\begin{aligned}x_1&=x-a;\\ y_1&=y-b.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Формулы (5) служат для нахождения новых координат по старым, формулы (4) — для нахождения старых координат по новым.

Пример. Дана точка M (4; —8). Найти ее координаты в новой системе координат, начало которых есть точка O_1 (2; —3), а оси имеют прежнее направление.

Решение. $x_1 = x - a = 4 - 2 = 2$; $y_1 = y - b = -8 + 3 = -5$.

§ 50. Поворот осей. Пусть новые координатные оси OX_1 и OY_1 получены путем поворота старых осей OX и OY на угол α (черт. 66). Координаты точки M в системе OXY обозначим (x, y), а в системе OX_1Y_1 (x_1, y_1). Используя формулу (21) § 26 для проекции радиуса-вектора точки $M(x, y)$ на ось и взяв за ось проекций OX_1, найдем: $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{OM} = x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.



Черт. 66.

По той же формуле, проектируя $\overrightarrow{OM}$ на ось OY_1 (учитывая, что угол между OX и OY_1 равен $\alpha + \frac{\pi}{2}$), находим

$$\text{пр}_{OY_1}\overrightarrow{OM} = y_1 = x\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Для нахождения формул, выражающих старые координаты через новые, проектируем радиус-вектор точки $M(x_1, y_1)$ на оси OX и OY. Учитывая, что угол между осями OX_1 и OX равен $-\alpha$ (или $2\pi - \alpha$), а угол между OX_1 и OY равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, получим:

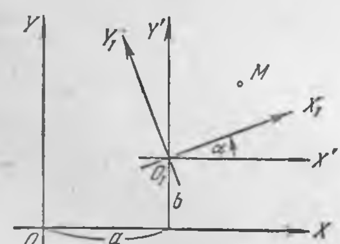
$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{OM} = x = x_1\cos(-\alpha) + y_1\sin(-\alpha) = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha;$$

$$\text{пр}_{OY}\overrightarrow{OM} = y = x_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y_1\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y &= x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$



Черт. 67.

§ 51. Общие формулы преобразования прямоугольных координат. Пусть новая система координат $O_1X_1Y_1$ отличается от первоначальной OXY как началом координат, так и направлением осей (черт. 67). Обозначим координаты нового начала O_1 (в старой системе) через (a, b), угол поворота осей координат через α, координаты точки M в старой системе через (x, y), а в новой системе через (x_1, y_1).

Введем в рассмотрение еще одну систему координат с началом в точке O_1 и осями O_1X' и O_1Y' того же направления, как и оси OX и OY. Обозначим координаты точки M в этой системе через (x', y'). Тогда по формулам (4) и (5) § 49 имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a; \\ y &= y' + b. \end{aligned}\right\} \quad (4') \qquad \left.\begin{aligned} x' &= x - a; \\ y' &= y - b. \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

По формулам (6) и (7) § 50:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha; \\ y' &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha; \\ y_1 &= - x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

Внеся x' и y' из (6') в (4') и из (5') в (7'), получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + a; \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y_1 &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

§ 52. Алгебраические линии. Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в прямоугольных координатах может быть приведено к виду $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — целый многочлен относительно x и y. Например, уравнения (10) и (11) определяют алгебраические линии:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + H = 0, \qquad (10)$$

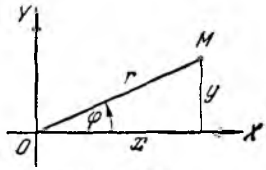
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (11)$$

Если линия определяется алгебраическим уравнением n-й степени, то она называется алгебраической линией n-го порядка. Так, линия (10) — алгебраическая линия второго порядка (если A, B, C не равны одновременно нулю), линия (11) — третьего порядка.

Существенно, что порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат (прямоугольной). В самом деле, пусть линия C имеет в некоторой системе координат алгебраическое уравнение n-й степени. Чтобы найти уравнение линии C в какой-либо другой системе координат $O_1X_1Y_1$, надо в уравнение линии C на место x и y подставить их выражения через новые координаты x_1 и y_1 из формул (8) § 51. Так как равенства (8) — первой степени относительно x_1 и y_1, то после раскрытия всех скобок получим уравнение, степень которого будет не выше степени n первоначального уравнения. Но степень нового уравнения не может быть и меньше n, так как в противном случае при обратном переходе от полученного уравнения к первоначальному степень уравнения повысилась бы, что, как мы видели, невозможно. Следовательно, порядок линии C как в системе OXY, так и в системе $O_1X_1Y_1$ равен одному и тому же числу n.

Мы видели, что уравнения эллипса, гиперболы и параболы в некоторых, определенным образом выбранных прямоугольных системах координат является уравнением второй степени (§§ 31, 32, 35). Доказанное свойство алгебраической линии позволяет, следовательно, утверждать, что и во всех других прямоугольных системах координат эти кривые будут также иметь уравнения второй степени [но, конечно, не те же самые уравнения (14), (24), (38), которые мы имели в §§ 31, 32, 35].

§ 53. Преобразование прямоугольных координат в полярные и обратно. Будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом системы, а положительная полуось OX совпадает с полярной осью (черт. 68). Пусть координаты точки M в прямоугольной системе координат равны (x, y), а в полярной (r, φ), $[r \geqslant 0]$. При любом положении точки M на плоскости, на основании определения косинуса и синуса, имеем:



Черт. 68.

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi; \\ y=r\sin\varphi. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

По формулам (12), зная полярные координаты r и φ точки M, находим ее прямоугольные координаты x и y. Для обратного преобразования находим из формул (12)

$$r=+\sqrt{x^2+y^2}; \qquad (13)$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}; \quad \sin\varphi=\frac{y}{r}. \qquad (14)$$

Используя обе формулы (14), найдем в пределах от 0 до 2π одно значение угла φ.

Формулы (12), (13), (14) в соединении с формулами (8) и (9) решают задачу преобразования прямоугольных координат в полярные (и обратно) и в общем случае любого расположения полярной оси относительно прямоугольных осей координат.

Пример. Дана в прямоугольной системе координат точка $M(3; -3)$. Найти ее полярные координаты, если начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а полярная ось совмещена с осью OX.

Решение. По формулам (13) и (14) имеем:

$$r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}; \quad \cos\varphi=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\varphi=-\frac{3}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi=\frac{7\pi}{4}; \quad M\left(3\sqrt{2}; \ \frac{7\pi}{4}\right).$$

(Постройте чертеж.)

§ 54. Гипербола $xy=a$. Обратно пропорциональные переменные x и y, если они одного знака, связаны зависимостью $y=\frac{m^2}{x}$ или $xy=m^2$, где m^2 — некоторое постоянное (положительное) число.

Выясним, какую кривую определяет это уравнение. С этой целью повернем оси координат на угол $\alpha=45^\circ$. По формулам (6) § 50 получим:

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha=x_1\frac{\sqrt{2}}{2}-y_1\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1);$$

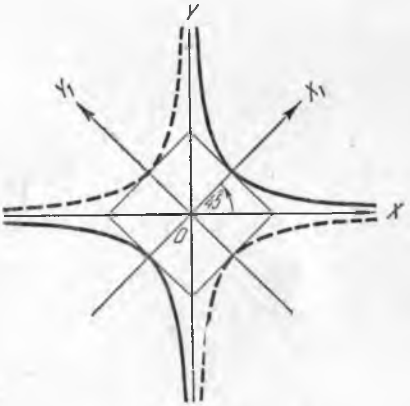
$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha=x_1\frac{\sqrt{2}}{2}+y_1\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1).$$

Подставив x и y из этих равенств в уравнение $xy=m^2$, найдем уравнение, связывающее x_1 и y_1, т. е. уравнение кривой в системе OX_1Y_1:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)=m^2;\quad \frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2)=m^2;$$

$$\frac{x_1^2}{2m^2}-\frac{y_1^2}{2m^2}=1.$$

Это есть уравнение гиперболы с полуосями $a=b=m\sqrt{2}$. Гипербола с равными полуосями называется *равносторонней*. Асимптоты ее, расположенные по диагоналям квадрата, составляют между собой прямой угол, а с осями симметрии угол 45°. Из предыдущего следует, что первоначальные оси координат OX и OY являются асимптотами рассматриваемой гиперболы (черт. 69).



Черт. 69.

Итак, уравнение $xy=m^2$ определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой совпадают с осями координат.

Если взять уравнение $xy=-m^2$, то, заменив x на $-x$, получим уравнение $xy=m^2$. Это показывает, что кривая $xy=-m^2$ есть гипербола, симметричная гиперболе $xy=m^2$ относительно оси OY (ее ветви лежат во второй и четвертой четвертях) *). Таким образом, *уравнение $xy=a$ определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой совпадают с осями координат.*

Полученный вывод можно формулировать еще так: график обратной пропорциональности есть равносторонняя гипербола, для которой оси координат служат асимптотами.

§ 55. Некоторые виды уравнения параболы. Уравнение $y^2=2px$ ($p>0$) определяет параболу, расположенную относительно координат-

---

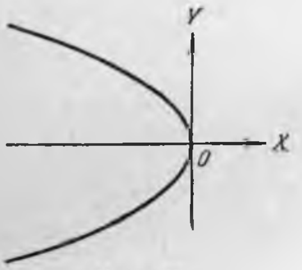
*) На черт. 69 гипербола $xy=m^2$ изображена сплошными линиями, а гипербола $xy=-m^2$ — пунктирными.

ных осей, как на черт. 49. При $p<0$, очевидно, парабола расположена, как на черт. 70. На черт. 71 построены параболы $x^2=2py$ при $p>0$ (верхняя) и при $p<0$ (нижняя). Обозначив $\frac{1}{2p}=a$, запишем уравнения этих парабол в виде $y=ax^2$ (для верхней $a>0$, для нижней $a<0$).

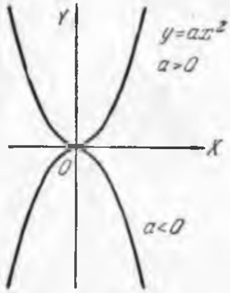
Рассмотрим еще уравнение кривой

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0). \tag{15}$$

Перенесем начало в некоторую точку $O_1(\alpha, \beta)$, не изменяя направления



Черт. 70.



Черт. 71.

осей координат. По формулам (4) § 49 имеем $x=x_1+\alpha$; $y=y_1+\beta$. Подставив в уравнение кривой (15), получим:

$$y_1+\beta=a(x_1+\alpha)^2+b(x_1+\alpha)+c=ax_1^2+(2a\alpha+b)x_1+ \\ +a\alpha^2+b\alpha+c,$$

откуда

$$y_1=ax_1^2+(2a\alpha+b)x_1+a\alpha^2+b\alpha+c-\beta. \tag{16}$$

Выберем теперь такое новое начало координат $O_1(\alpha, \beta)$, чтобы в уравнении (16) коэффициент при x_1 и свободный член обратились в нуль, т. е. чтобы были выполнены равенства:

$$2a\alpha+b=0, \tag{17}$$

$$a\alpha^2+b\alpha+c-\beta=0. \tag{18}$$

Так как по условию $a\neq 0$, то из уравнений (17) и (18) всегда можно найти α и β:

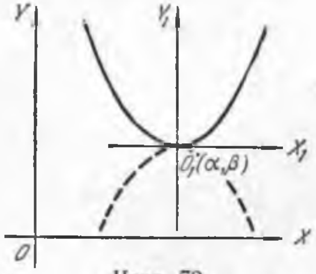
$$\alpha=-\frac{b}{2a}, \tag{19}$$

$$\beta=a\alpha^2+b\alpha+c. \tag{20}$$

Таким образом, всегда можно выбрать такое новое начало координат $O_1(\alpha, \beta)$ (черт. 72), чтобы были выполнены равенства (17) и (18). Уравнение кривой (16) примет тогда вид:

$$y_1=ax_1^2.$$

Это есть уравнение параболы. На черт. 71 показано расположение параболы $y = ax^2$ в системе OXY. Следовательно, парабола $y_1 = ax_1^2$ точно так же расположена в системе OX_1Y_1 (при $a > 0$ — вершиной вниз, при $a < 0$ — вершиной вверх, черт. 72). Из доказанного следует (черт. 72): *уравнение* $y = ax^2 + bx + c$ *определяет параболу, ось симметрии которой параллельна оси* OY. При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз, при $a < 0$ — вершиной вверх. Координаты (α, β) вершины O_1 параболы можно найти из уравнений (19) и (20).



Черт. 72.

Замечание. В вершине O_1 параболы $y = ax^2 + bx + c$ касательная к параболе параллельна оси OX и ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = 0$. Поэтому для нахождения вершины O_1 можно найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y = ax^2 + bx + c$ и приравнять ее к нулю: $\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0$; отсюда снова находим

$$x = -\frac{b}{2a} = \alpha. \tag{21}$$

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 56. Общее уравнение линии второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка записывается в виде (§ 29)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+H=0. \qquad (1)$$

Таким образом, буквы B, D, E обозначают *половины* коэффициентов при xy, x и y.

Пример. В уравнении

$$x^2-4xy+5y^2+x-8y+6=0$$

$$A=1;\quad 2B=-4;\quad C=5;\quad 2D=1;\quad 2E=-8;\quad H=6;$$

следовательно,

$$B=-2;\quad D=\frac{1}{2};\quad E=-4.$$

В уравнении (1) коэффициенты A, $2B$, C мы будем называть *старшими*, коэффициенты $2D$ и $2E$ — *средними*, H — *младшим* коэффициентом.

Задачу об исследовании геометрического значения общего уравнения второй степени будем решать следующим путем: надлежащим выбором системы прямоугольных координат добьемся упрощения уравнения, а затем уже будем исследовать геометрическое значение полученного упрощенного уравнения.

§ 57. Преобразование общего уравнения линии второго порядка при помощи переноса начала координат. Пусть дано уравнение (1) линии второго порядка. Перенесем начало координат в точку $O_1(x_0, y_0)$, не меняя направления осей. По формулам (4) § 49 старые координаты (x, y) точки связаны с новыми координатами (x_1, y_1) равенствами $x=x_1+x_0$; $y=y_1+y_0$. Подставив эти выражения для x и y в уравнение (1), найдем уравнение, связывающее новые координаты x_1 и y_1 каждой точки кривой, т. е. найдем уравнение кривой в новой системе координат $O_1X_1Y_1$:

$$A(x_1+x_0)^2+2B(x_1+x_0)(y_1+y_0)+C(y_1+y_0)^2+2D(x_1+x_0)+$$
$$+2E(y_1+y_0)+H=0.$$

Раскрыв все скобки и располагая многочлен по степеням x_1 и y_1, получим уравнение:

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+(2Ax_0+2By_0+2D)\,x_1+(2Bx_0+$$
$$+2Cy_0+2E)\,y_1+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+H=0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) заключаем: при переносе начала координат в точку $O_1(x_0, y_0)$

1) старшие коэффициенты в уравнении линии второго порядка не изменяются;

2) новые средние коэффициенты (которые мы обозначим $2D_1$ и $2E_1$) вычисляются по формулам:

$$2D_1=2Ax_0+2By_0+2D, \quad (3)$$
$$2E_1=2Bx_0+2Cy_0+2E; \quad (4)$$

3) новый младший коэффициент (который мы обозначим H_1) равен результату подстановки в левую часть первоначального уравнения кривой координат нового начала на место текущих координат:

$$H_1=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+H. \quad (5)$$

Уравнение (2) при введенных обозначениях коэффициентов запишется в виде

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+H_1=0. \quad (6)$$

Пример. Преобразовать уравнение

$$2x^2-2xy+3y^2-5x+6y+1=0$$

к новому началу $O_1(1;\ -1)$.

Решение. $x_0=1;\ y_0=-1$.

$$2D_1=2Ax_0+2By_0+2D=4x_0-2y_0-5=4+2-5=1;$$
$$2E_1=2Bx_0+2Cy_0+2E=-2x_0+6y_0+6=-2-6+6=-2;$$
$$H_1=2\cdot 1^2-2\cdot 1\,(-1)+3\,(-1)^2-5\cdot 1+6\,(-1)+1=-3.$$

Уравнение кривой в новых координатах:

$$2x_1^2-2x_1y_1+3y_1^2+x_1-2y_1-3=0.$$

§ 58. Центр линии второго порядка. После переноса начала координат уравнение кривой (1) в новой системе координат принимает вид (2) (§ 57). Подберем новое начало $O_1(x_0,\ y_0)$ так, чтобы в уравнении (2) средние коэффициенты $2D_1$ и $2E_1$ при x_1 и y_1 обратились в 0:

$$\left.\begin{aligned}2D_1=2Ax_0+2By_0+2D=0,\\ 2E_1=2Bx_0+2Cy_0+2E=0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Этим мы достигнем упрощения уравнения. Чтобы найти координаты $(x_0,\ y_0)$ этого начала, надо решить совместно уравнения (7). Сократим уравнения (7) на 2. Если определитель системы $\delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2\neq 0$, то система (7) имеет решение, и притом единственное:

$$x_0=\frac{BE-CD}{AC-B^2}=\frac{\begin{vmatrix} B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}\,;\ y_0=\frac{DB-AE}{AC-B^2}=\frac{\begin{vmatrix} D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ B & C\end{vmatrix}}\,. \qquad (8)$$

Число $\delta=AC-B^2$ называется *дискриминантом старших членов уравнения* (1).

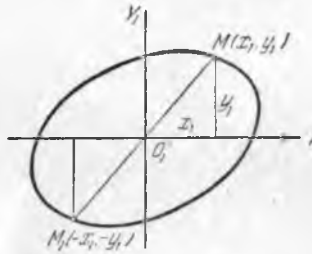
Предположим $\delta=AC-B^2\neq 0$. После переноса начала в точку $O_1(x_0, y_0)$, определенную из уравнений (7), уравнение кривой примет вид [см. уравнение (6)]

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+H_1=0, \qquad (9)$$

так как $2D_1=0$, $2E_1=0$.

Покажем, что найденная точка $O_1(x_0, y_0)$ есть центр симметрии рассматриваемой линии. Если в уравнении (9) заменить (x_1, y_1) на $(-x_1, -y_1)$, то уравнение не изменится. Это означает (черт. 73), что если $M(x_1, y_1)$ *какая угодно* точка, лежащая на кривой, то и симметричная ей относительно O_1 точка $M_1(-x_1 -y_1)$ также лежит на этой кривой. Отсюда следует, что точка O_1 есть *центр симметрии* кривой. Короче, эту точку называют *центром* кривой.

Мы приходим к выводу, что если $AC-B^2\neq 0$, то кривая имеет центр, и притом единственный. Линия второго порядка, имеющая центр, и притом единственный, называется *центральной*.



Черт. 73.

§ 59. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка.

Находим центр $O_1(x_0, y_0)$, решив систему уравнений (7) § 58. Переносим начало координат в центр.

В уравнении кривой в новой системе координат $O_1X_1Y_1$ старшие коэффициенты будут те же, что в заданном первоначальном уравнении (1) [§ 56], средние коэффициенты уничтожаются, и практически придется вычислить один лишь новый младший коэффициент H_1 по правилу, данному в § 57 [формула (5)]. Уравнение примет вид (9) § 58.

Можно дать более простую формулу для H_1:

$$H_1=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+H=Ax_0^2+Bx_0y_0+Dx_0+$$
$$+Bx_0y_0+Cy_0^2+Ey_0+Dx_0+Ey_0+H=x_0(Ax_0+By_0+D)+$$
$$+y_0(Bx_0+Cy_0+E)+Dx_0+Ey_0+H.$$

Так как (x_0, y_0) — координаты центра, то выражения в скобках равны нулю [формулы (7)]. Таким образом,

$$H_1=Dx_0+Ey_0+H. \qquad (10)$$

Для упрощения полученного уравнения кривой

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+H_1=0 \tag{9}$$

делаем второе преобразование координатной системы — поворот осей. Обозначим координаты точки M в новой координатной системе $O_1X'Y'$ через (x', y'). По формулам (6) § 50 имеем: $x_1=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$; $y_1=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. Подставив эти выражения для x_1 и y_1 в уравнение (9), получим:

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)\times$$
$$\times(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+H_1=0. \tag{11}$$

Раскрыв скобки и собрав члены с x'^2, $x'y'$ и y'^2, найдем:

$$(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)x'^2+$$
$$+(-2A\sin\alpha\cos\alpha+2B\cos^2\alpha-2B\sin^2\alpha+2C\sin\alpha\cos\alpha)x'y'+$$
$$+(A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)y'^2+H_1=0. \tag{12}$$

Мы видим, что *при повороте осей младший коэффициент не изменяется*. Обозначим новые коэффициенты при x'^2, $x'y'$, y'^2 через A', $2B'$, C':

$$A'=A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha, \tag{13}$$
$$2B'=-2A\sin\alpha\cos\alpha+2B\cos^2\alpha-2B\sin^2\alpha+2C\sin\alpha\cos\alpha, \tag{14}$$
$$C'=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha. \tag{15}$$

Уравнение (12) при этих обозначениях можно записать в виде

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+H_1=0. \tag{16}$$

Подберем теперь такой угол поворота осей α, чтобы обратился в нуль коэффициент $2B'$. Для этого надо в равенстве (14) положить $2B'=0$ и решить полученное уравнение, которое запишем так:

$$(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha=0. \tag{17}$$

Мы можем полагать, что $2B\neq 0$ [если $2B=0$, то уравнение (19) уже имеет тот вид, который мы хотим получить, и поворот осей не нужен]. Отсюда следует, что $\sin 2\alpha\neq 0$, так как если $\sin 2\alpha=0$, то $\cos 2\alpha=\pm 1$, и равенство (17) невозможно $(2B\neq 0)$.

Разделив уравнение (17) на $2B\sin 2\alpha\neq 0$, получим:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{A-C}{2B}. \tag{18}$$

Из этого равенства следует, что *всегда существует такой угол поворота осей α, при котором* $2B'=0$, и, следовательно, уравнение (16) принимает вид:

$$A'x'^2+C'y'^2+H_1=0. \tag{19}$$

Вычислив угол α из уравнения (18), найдем A' и C' из (13) и (15). Уравнение (19) и есть простейшее уравнение центральной линии второго порядка.

Ниже мы даем два варианта вывода более простых и удобных в практическом применении формул для вычисления коэффициентов A' и C' (при $2B'=0$) и соответствующего угла поворота осей координат α.

Первый вариант. Взамен формулы (18) составим формулу для нахождения тангенса искомого угла α. Для этого положим в равенстве (14) $2B'=0$ и разделим обе части его на $\cos^2\alpha \neq 0$. Получим уравнение для вычисления $\operatorname{tg}\alpha$:

$$B\operatorname{tg}^2\alpha + (A-C)\operatorname{tg}\alpha - B = 0. \tag{20}$$

Чтобы вывести простые формулы для вычисления A' и C', сложим прежде всего равенства (13) и (15):

$$A'+C' = A(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha),$$

$$A'+C' = A+C. \tag{21}$$

Таким же образом можно, пользуясь формулами (13), (14) и (15), проверить, что

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2. \tag{22}$$

При $2B'=0$ из формулы (22) получаем:

$$A'C' = AC - B^2. \tag{22$'$}$$

Теперь нам известны из формул (21) и (22′) сумма и произведение искомых коэффициентов A' и C', следовательно, их можно найти, решив квадратное уравнение

$$z^2 - (A+C)z + AC - B^2 = 0. \tag{23}$$

Один из корней этого уравнения равен A', другой C'. Можно доказать, что, если угол поворота осей α выбрать острым [решая уравнение (20), взять *положительное* значение $\operatorname{tg}\alpha$], то при $2B>0$ надо взять $A'>C'$, а при $2B<0$ взять $A'<C'$.

В самом деле, вычтя из равенства (13) равенство (15), получим после элементарных преобразований:

$$A'-C' = (A-C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha. \tag{24}$$

Из формулы (17) найдем теперь $\cos 2\alpha$ и подставим в (24):

$$A'-C' = \frac{\sin 2\alpha}{2B}\left[(A-C)^2 + 4B^2\right]. \tag{25}$$

Если выбрать угол поворота осей α острым, то $\sin 2\alpha > 0$ и из равенства (25) следует: если $2B>0$, то $A'>C'$, если $2B<0$, то $A'<C'$. Например, если $2B>0$ и корни уравнения (23) равны $z_1=2$ и $z_2=-5$, то $A'=2$, $C'=-5$.

Второй вариант*). Умножим равенство (13) на $\sin\alpha$, а равенство (14) (в котором положим $2B'=0$) на $\cos\alpha$ и сложим полученные

---

*) В этом варианте все необходимые формулы даны с полным доказательством.

равенства [при этом равенство (13) удобнее записать в виде $A' = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha$]:

$$\begin{array}{rcccc|l} A' = & A\cos^2\alpha & + C\sin^2\alpha & + B\sin\alpha\cos\alpha & + B\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 = & -A\sin\alpha\cos\alpha & + C\sin\alpha\cos\alpha & + B\cos^2\alpha & - B\sin^2\alpha & \cos\alpha \\ \hline A'\sin\alpha = & 0 & + C\sin\alpha & + B\cos\alpha & + \ 0 & \end{array}$$

(множитель $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ при втором и третьем слагаемых в последнем равенстве мы не выписываем). Отсюда

$$(A' - C)\sin\alpha = B\cos\alpha. \qquad (26)$$

Умножив теперь равенство (13) на $\cos\alpha$, а равенство (14) (при $2B' = 0$) на $-\sin\alpha$ и сложив полученные равенства, аналогично найдем:

$$\begin{array}{rcccc|r} A' = & A\cos^2\alpha & + C\sin^2\alpha & + B\sin\alpha\cos\alpha & + B\sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 = & -A\sin\alpha\cos\alpha & + C\sin\alpha\cos\alpha & + B\cos^2\alpha & - B\sin^2\alpha & -\sin\alpha \\ \hline A'\cos\alpha = & A\cos\alpha & + \ 0 & + \ 0 & + B\sin\alpha & \end{array}$$

(множитель $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ при первом и последнем слагаемых мы не выписываем). Следовательно,

$$(A' - A)\cos\alpha = B\sin\alpha. \qquad (27)$$

Как выше было доказано, $B \neq 0$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, следовательно, $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$ и из (26) мы видим, что $A' - C \neq 0$. Из уравнений (26) и (27) тогда находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A' - C}; \qquad (28)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A' - A}{B}, \qquad (29)$$

откуда следует:

$$\frac{B}{A' - C} = \frac{A' - A}{B}$$

или

$$A'^2 - (A + C)A' + AC - B^2 = 0. \qquad (30)$$

Из уравнения (30) найдем A'. Теперь из равенства (28) или (29) найдем тангенс угла поворота осей координат α, при котором $2B' = 0$ [эти формулы удобнее в применении, чем (18)].

Для нахождения коэффициента C' сложим равенства (13) и (15):

$$A' + C' = A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

$$A' + C' = A + C. \qquad (21)$$

Зная A', из этой формулы найдем C'.

Заметим, что A' является одним из корней уравнения

$$z^2 - (A + C)z + AC - B^2 = 0 \qquad (23)$$

[см. (30)] $z_1 = A'$. Второй корень z_2 этого уравнения можно найти из соотношения $z_1 + z_2 = A + C$, т. е. $A' + z_2 = A + C$. Из сравнения этого равенства с (21) следует: $z_2 = C'$.

Таким образом, *для нахождения коэффициентов* A' *и* C' в уравнении (19) *достаточно решить уравнение*

$$z^2 - (A + C)z + AC - B^2 = 0. \tag{23}$$

Один из корней этого уравнения (любой) *равен* A', *другой* C'.

По теореме о произведении корней квадратного уравнения находим из (23) важное для дальнейшего соотношение:

$$A'C' = AC - B^2. \tag{22'}$$

Напомним, что коэффициенты A' и C' найдены при условии $2B' = 0$. Поэтому равенство (22') справедливо, если $2B' = 0$.

Замечание. Младший коэффициент H_1 в упрощенном уравнении $A'x'^2 + C'y'^2 + H_1 = 0$ (19) можно также выразить через коэффициенты исходного уравнения (1) § 57. Для этого в формулу (10) § 59 подставим x_0 и y_0 из (8) (§ 58):

$$H_1 = D\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} + E\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} + H =$$

$$= \frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} - E\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} + H\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & H \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Обозначим:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & H \end{vmatrix} = \Delta. \tag{31}$$

Тогда

$$H_1 = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{32}$$

§ 60. Схема решения задачи на упрощение уравнения центральной линии ($AC - B^2 \neq 0$). Пусть дано уравнение линии второго порядка (1) (§ 57).

1) Вычисляем $AC - B^2$. Пусть $AC - B^2 \neq 0$.

2) Находим центр кривой $O_1(x_0, y_0)$ из уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2Ax + 2By + 2D = 0, \\ 2Bx + 2Cy + 2E = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

3) Пишем уравнение линии после переноса начала в центр O_1 (черт. 74, новая координатная система — $O_1X_1Y_1$):

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + H_1 = 0,$$

где H_1 вычисляется по формуле (5) или по формуле (10):

$$H_1 = Dx_0 + Ey_0 + H. \qquad (10)$$

4) Пишем упрощенное уравнение линии после поворота осей на соответствующий угол α (черт. 74):

$$A'x'^2 + C'y'^2 + H_1 = 0. \qquad (19)$$

Для вычисления A' и C' решаем уравнение:

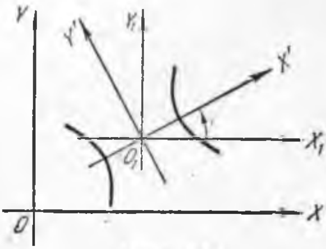
$$z^2 - (A + C)z + AC - B^2 = 0. \quad (23)$$

Корни этого уравнения равны A' и C'. При $2B > 0$ берем $A' > C'$, при $2B < 0$ берем $A' < C'$.

[Второй вариант. Один из корней уравнения (23) (*любой*) берем за A', другой за C'.]

5) Находим положительное значение $\operatorname{tg}\alpha$ из уравнения

$$B\operatorname{tg}^2\alpha + (A - C)\operatorname{tg}\alpha - B = 0. \qquad (20)$$



Черт. 74.

[Второй вариант. Находим $\operatorname{tg}\alpha$ по одной из формул (28) или (29).]

6) Строим ось O_1X' по точке $O_1(x_0, y_0)$ и найденному угловому коэффициенту $\operatorname{tg}\alpha$ (§ 16, пример 2) и проводим ось O_1Y'. Строим кривую по уравнению (19), приведя его к канонической форме.

Пример. Упростить уравнение линии

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0.$$

Решение.

1) $AC - B^2 = 5\cdot 2 - 2^2 = 6 > 0$. Кривая центральная.

2) Пишем систему (33) уравнений центра:

$$10x + 4y - 24 = 0, \qquad 4x + 4y - 12 = 0.$$

Решив эту систему, находим координаты центра $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

3) После переноса начала в центр уравнение линии примет вид:

$$5x_1^2 + 4x_1y_1 + 2y_1^2 + H_1 = 0,$$

где $H_1 = Dx_0 + Ey_0 + H = -12\cdot 2 - 6\cdot 1 + 18 = -12$, т. е.

$$5x_1^2 + 4x_1y_1 + 2y_1^2 - 12 = 0.$$

4) Пишем уравнение линии после поворота осей:

$$A'x'^2 + C'y'^2 - 12 = 0.$$

Находим A' и C', решив уравнение (23), в котором $A + C = 5 + 2 = 7$; $AC - B^2 = 6$:

$$z^2 - 7z + 6 = 0;$$
$$z_1 = 6;\ z_2 = 1.$$

Так как $2B=4>0$, то берем $A'=6$; $C'=1$.

[Второй вариант. Берем *любой* из корней $z_1=6$, $z_2=1$ за A', другой за C'. Примем $A'=6$; $C'=1$.]

Таким образом, уравнение линии после поворота осей будет

$$6x'^2+y'^2=12 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{12}=1.$$

Итак, заданная линия есть эллипс с большой полуосью $a=2\sqrt{3}$ и малой полуосью $b=\sqrt{2}$.

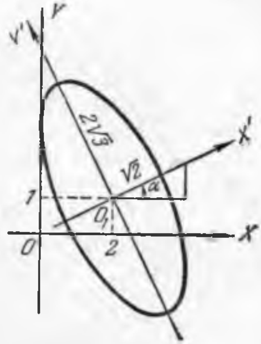
5) Находим положительное значение $\operatorname{tg}\alpha$ из уравнения (20) ($B=2$; $A-C=3$):

$$2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-2=0; \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

[Второй вариант. Находим $\operatorname{tg}\alpha$ по формуле (28) или (29):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A'-A}{B}=\frac{6-5}{2}=\frac{1}{2}.\ ]$$

6) Строим ось O_1X' по точке O_1 (2; 1) и угловому коэффициенту $k=\frac{1}{2}$ (см § 16, пример 2), проводим ось O_1Y' и строим эллипс (черт. 75).



Черт. 75.

§ 61. Исследование геометрического значения простейшего уравнения центральной линии второго порядка ($\delta=AC-B^2\neq 0$).

В упрощенном уравнении центральной линии (19) (§ 59) $A'\neq 0$, $C'\neq 0$, так как $A'C'=AC-B^2\neq 0$ [§ 59, формула (22')]. Исследуя геометрическое значение уравнения (19), рассмотрим два возможных случая: 1) $AC-B^2=A'C'>0$; 2) $AC-B^2=A'C'<0$. В первом случае A' и C' одного знака, во втором — разных знаков.

Штрихи у букв и индекс 1 в уравнении (19) мы в дальнейшем опустим, так как это ничего не изменяет в существе рассуждений:

$$Ax^2+Cy^2+H=0. \tag{34}$$

Мы можем считать A числом положительным (в противном случае можно умножить обе части уравнения (34) на -1, и A станет положительным).

1) Первый случай: A и C одного знака, следовательно $A>0$ и $C>0$. Коэффициент H может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

а) $H<0$. Уравнение (34) представим в виде

$$Ax^2+Cy^2=-H,$$

или

$$\frac{x^2}{-\frac{H}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{H}{C}}=1.$$

Так как $H<0$, $A>0$, $C>0$, то $-\frac{H}{A}>0$, $-\frac{H}{C}>0$ и можно обозначить $-\frac{H}{A}=a^2$, $-\frac{H}{C}=b^2$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

определяющее *эллипс*.

b) $H=0$. Тогда уравнение (34) примет вид

$$Ax^2+Cy^2=0.$$

Так как $A>0$, $C>0$, то уравнению удовлетворяет только пара чисел $x=0$; $y=0$. Следовательно, уравнение определяет *одну точку* (срв. § 13, пример 6а).

c) $H>0$. Уравнение (34) не определяет ***ни одной*** действительной ***точки***, так как в левой части уравнения — положительное число, а в правой нуль и равенство невозможно. Говорят также, что в этом случае уравнение определяет ***мнимое место точек*** (мнимый эллипс).

2) Второй случай. A и C разных знаков: $A>0$; $C<0$.

a) $H<0$. Уравнение (34) представим в виде

$$Ax^2+Cy^2=-H, \qquad \frac{x^2}{-\frac{H}{A}}-\frac{y^2}{\frac{H}{C}}=1.$$

Так как $A>0$, $C<0$, $H<0$, то $-\frac{H}{A}>0$, $\frac{H}{C}>0$ и мы можем обозначить $-\frac{H}{A}=a^2$; $\frac{H}{C}=b^2$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

определяющее *гиперболу* с действительной осью OX и мнимой осью OY.

b) $H>0$.

$$Ax^2+Cy^2=-H, \qquad \frac{y^2}{-\frac{H}{C}}-\frac{x^2}{\frac{H}{A}}=1.$$

Так как теперь $H>0$, $C<0$, $A>0$, то $-\frac{H}{C}>0$, $\frac{H}{A}>0$ и мы можем обозначить $-\frac{H}{C}=b^2$; $\frac{H}{A}=a^2$. Получим уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

определяющее *гиперболу* с действительной осью OY и мнимой OX*).

---

*) Эта гипербола называется сопряженной с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: у таких двух гипербол общие асимптоты и одинаковое расстояние между центром и фокусами.

c) $H=0$.

$$Ax^2+Cy^2=0;\quad Ax^2-(-C)y^2=0.$$

Так как $A>0$, $C<0$, то $\sqrt{A}$ и $\sqrt{-C}$—действительные числа, поэтому уравнение $Ax^2-(-C)y^2=0$ можно записать в виде

$$(\sqrt{A})^2x^2-(\sqrt{-C})^2y^2=0$$

или

$$(\sqrt{A}x-\sqrt{-C}y)(\sqrt{A}x+\sqrt{-C}y)=0.$$

Это уравнение определяет *совокупность двух прямых*, пересекающихся в начале координат:

$$\sqrt{A}x-\sqrt{-C}y=0,\quad \sqrt{A}x+\sqrt{-C}y=0.$$

Итак, *уравнение* (1) (§ 56) *линии второго порядка определяет при* $AC-B^2>0$ *либо эллипс, либо точку, либо мнимое место; при* $AC-B^2<0$ *гиперболу или пару пересекающихся прямых.*

§ 62. Упрощение и исследование уравнения нецентральной линии второго порядка (первый способ). Если $AC-B^2=0$, то линия либо не имеет центра, либо имеет бесконечное множество центров. Начнем упрощение уравнения линии с поворота осей координат. Если угол поворота осей равен α, то, используя формулы поворота осей [(6), § 50], получим следующее уравнение этой линии в новой системе $OX'Y'$:

$$\begin{aligned}A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+\\+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+2D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+\\+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+H=0.\end{aligned}\tag{35}$$

Если мы раскроем скобки в этом уравнении, то, очевидно, члены второй степени получатся только из суммы первых трех слагаемых уравнения (35), члены первой степени—только из слагаемых $2D(x'\cos\alpha-$ $-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)$, свободный член H останется тот же. Поэтому в уравнении кривой в новой системе координат

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+2D'x'+2E'y'+H=0\tag{36}$$

старшие коэффициенты определятся точно так же, как в § 59. Новые средние коэффициенты получим из суммы

$$\begin{aligned}(D2x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)=\\=(2D\cos\alpha+2E\sin\alpha)x'+(-2D\sin\alpha+2E\cos\alpha)y'.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$2D'=2D\cos\alpha+2E\sin\alpha,\tag{37}$$
$$2E'=-2D\sin\alpha+2E\cos\alpha.\tag{38}$$

Выберем теперь такой угол поворота α, чтобы $2B'=0$. Этот угол найдется из тех же уравнений (20), (28) или (29), как и в случае центральной кривой, так как формулы § 59 остаются в силе.

$\lambda_1 = x \cos \alpha - y$

Тогда новые коэффициенты A' и C' найдутся из формул (21) и (22'): $A'+C'=A+C$; $A'C'=AC-B^2$. По условию $AC-B^2=0$, следовательно, $A'C'=0$, и один из коэффициентов A' или C' равен нулю [оба они не могут быть равны 0, так как при $A'=0$, $C'=0$, $B'=0$ уравнение (36) было бы первой степени]. Примем $C'=0$. Тогда из формулы $A'+C'=A+C$ имеем $A'=A+C$. Коэффициенты $2D'$ и $2E'$ найдем по формулам (37) и (38). Для этого надо предварительно вычислить $\operatorname{tg}\alpha$ из (20), (28) или (29), а по $\operatorname{tg}\alpha$ найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Таким образом, после поворота осей координат на угол α, при котором $2B'=0$, уравнение (36) примет вид

$$A'x'^2+2D'x'+2E'y'+H=0. \tag{39}$$

Если $E'\neq 0$, то из уравнения (39) найдем

$$y'=-\frac{A'}{2E'}x'^2-\frac{2D'}{2E'}x'-\frac{H}{2E'}$$

и, обозначив $-\frac{A}{2E'}=a$, $-\frac{2D'}{2E'}=b$, $-\frac{H}{2E'}=c$, получим:

$$y'=ax'^2+bx'+c.$$

Это уравнение параболы. В § 55 было показано, как привести это уравнение к простейшей (канонической) форме.

Если же $E'=0$, то уравнение (39) примет вид

$$A'x'^2+2D'x'+H=0. \tag{39'}$$

Решив это квадратное уравнение, получим два значения для x':

$$1)\ x'=m; \qquad 2)\ x'=n.$$

Эти уравнения определяют совокупность двух прямых, параллельных оси OY и, следовательно, параллельных между собой. При $m=n$ эти прямые совпадут друг с другом, при мнимых m и n — прямые будут мнимыми.

Таким образом, *уравнение нецентральной линии второго порядка* ($AC-B^2=0$) *определяет либо параболу, либо пару параллельных прямых* (в частных случаях эти прямые могут быть слившимися или мнимыми).

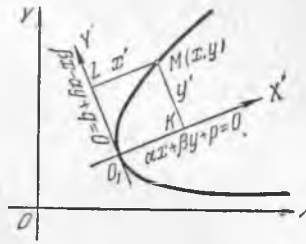
В следующем параграфе дается второй способ упрощения уравнения нецентральной линии второго порядка, более удобный в практическом применении.

§ 63. Упрощение и исследование уравнения нецентральной линии второго порядка (второй способ). Из равенства $AC-B^2=0$ следует $AC=B^2$. Если $B\neq 0$, то $AC>0$, следовательно, A и C одного знака. Можно предполагать $A>0$, $C>0$ (в противном случае достаточно умножить обе части уравнения линии на -1). Положим $A=\alpha^2$, $B=\alpha\beta$. Так как $C=\frac{B^2}{A}$, то $C=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2}=\beta^2$. Следовательно,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2=(\alpha x+\beta y)^2. \tag{40}$$

Если $B=0$, то $AC=B^2=0$; следовательно, один из коэффициентов A или C равен нулю [оба коэффициента A и C не могут быть равны нулю, так как при $A=0$, $C=0$, $B=0$ уравнение (1) — первой степени]. Тогда в равенстве (40) одно из чисел α или β равно нулю.

Таким образом, *в уравнении* (1) (§ 56) ***нецентральной линии второго порядка*** ($AC-B^2=0$) *сумма старших членов представляет собой квадрат суммы* $\alpha x+\beta y$.



Черт. 76.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+H=0. \tag{41}$$

Возможны два случая:

1) В уравнении (41) коэффициенты $2D$ и $2E$ пропорциональны α и β (обозначим коэффициент пропорциональности через $2m$):

$$2D=2m\alpha;\ 2E=2m\beta, \text{ откуда } D\beta=E\alpha, \text{ или } D\beta-E\alpha=0. \tag{42}$$

2) $2D$ и $2E$ не пропорциональны α и β:

$$D\beta-E\alpha\neq 0. \tag{43}$$

В первом случае $2D=2m\alpha$, $2E=2m\beta$ и уравнение (41) принимает вид

$$(\alpha x+\beta y)^2+2m(\alpha x+\beta y)+H=0. \tag{44}$$

Решив уравнение (44) относительно $\alpha x+\beta y$, получим:

$$\alpha x+\beta y=-m\pm\sqrt{m^2-H}.$$

Это уравнение определяет *совокупность двух параллельных прямых* $\alpha x+\beta y=p_1$; $\alpha x+\beta y=p_2$, где $p_1=-m+\sqrt{m^2-H}$; $p_2=-m-\sqrt{m^2-H}$. При $m^2-H=0$ эти прямые будут *сливающимися*, при $m^2-H<0$ — *мнимыми*.

Во втором случае, когда $D\beta-E\alpha\neq 0$, ищем уравнения осей координат такой системы $O_1X'Y'$ (черт. 76), в которой уравнение линии — простейшее. Уравнение оси O_1X' (в старой системе координат OXY) ищем в виде

$$\alpha x+\beta y+p=0. \tag{45}$$

Тогда уравнение оси O_1Y' (вследствие ее перпендикулярности оси O_1X') будет

$$\beta x-\alpha y+q=0. \tag{46}$$

Координаты $x'=\overline{O_1K}=\overline{LM}$ и $y'=\overline{KM}$ точки $M(x, y)$ в системе координат $O_1X'Y'$ можно найти при помощи формулы расстояния от точки $M(x, y)$ до прямых (45) и (46) (§ 28):

$$x'=\frac{\beta x-\alpha y+q}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tag{47}$$

$$y'=\frac{\alpha x+\beta y+p}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{48}$$

Выбрав знак $+$ у квадратного корня, мы тем самым выбрали направления осей O_1X' и O_1Y' (черт. 76): так, из формулы (47) следует, что $x'>0$ при $\beta x-\alpha y+q>0$, следовательно, *ось* O_1X' *направлена в ту полуплоскость, в которой* $\beta x-\alpha y+q>0$ (§ 28, Замечание).

Уравнение (41) надо преобразовать так, чтобы представить в виде равенства, связывающего выражения

$$\frac{\beta x - \alpha y + q}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha x + \beta y + p}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Тогда мы найдем уравнение, связывающее x' и y' [см. (47) и (48)], т. е. уравнение линии в системе координат $O_1X'Y'$.

С этой целью представим уравнение (41) в виде

$$(\alpha x + \beta y + p)^2 - 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0 \tag{49}$$

($m \neq 0$). Неизвестные числа p, q, m найдем сравнением коэффициентов при x и y в первой степени и свободных коэффициентов в уравнениях (41) и (49). Разделив обе части уравнения (49) на $\alpha^2+\beta^2$, запишем это уравнение в виде

$$\left(\frac{\alpha x + \beta y + p}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 - \frac{2m}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \frac{\beta x - \alpha y + q}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 0,$$

или, в силу равенств (47) и (48),

$$y'^2 - \frac{2m}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x' = 0, \text{ т. е. } y'^2 = \frac{2m}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x' \tag{50}$$

$m \neq 0$). Это уравнение параболы в канонической форме.

Уравнения (45) и (46) определяют ось симметрии O_1X' параболы: $\alpha x + \beta y + p = 0$, и касательную O_1Y' в вершине: $\beta x - \alpha y + q = 0$. Координаты вершины параболы найдем, решив совместно эти уравнения. Таким образом, задача упрощения уравнения (41) решена.

Для полного исследования вопроса надо еще доказать, что во втором случае ($D\beta - E\alpha \neq 0$) уравнение (41) всегда можно привести к виду (49), т. е. всегда можно найти числа $m \neq 0$, p, q. Из сравнения коэффициентов при x и y в первой степени и свободных коэффициентов в уравнениях (41) и (49) находим:

$$\left.\begin{matrix} 2\alpha p - 2\beta m = 2D \\ 2\beta p + 2\alpha m = 2E \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \alpha p - \beta m = D, \\ \beta p + \alpha m = E, \end{matrix}\right\} \tag{51}$$

$$p^2 - 2mq = H. \tag{52}$$

Из системы (51) всегда найдутся (и притом единственные) числа p и m, так как определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ [α и β не могут быть одновременно равны нулю (см. выше)]. При этом $m = \frac{\Delta_m}{\Delta} \neq 0$, ибо $\Delta_m = \begin{vmatrix} \alpha & D \\ \beta & E \end{vmatrix} = E\alpha - D\beta \neq 0$ по условию. Так как $m \neq 0$, то из уравнения (52) всегда найдется q. Следовательно, уравнение (41) всегда можно преобразовать к виду (49).

Из всего сказанного следует, что *в случае* $D\beta - E\alpha = 0$ уравнение (41) всегда изображает *пару прямых* (действительных или мнимых), и *только* пару прямых. В случае $D\beta - E\alpha \neq 0$ уравнение (41) всегда изображает *параболу*, и *только* параболу.

Итак, *уравнение* (1) (§ 56) *нецентральной линии второго порядка* ($AC - B^2 = 0$) [или уравнение (41)] *определяет либо параболу, либо пару параллельных прямых* (которые в частных случаях могут быть сливающимися или мнимыми).

Пример. Упростить уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$.

Решение.

$$AC - B^2 = 4 - 4 = 0.$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$(x+2y)^2-20x+10y-50=0. \tag{53}$$

Здесь $\alpha=1$; $\beta=2$; $\frac{2D}{\alpha}\neq\frac{2E}{\beta}$, так как $-\frac{20}{1}\neq\frac{10}{2}$ (случай параболы).

Представим уравнение (53) в виде

$$(x+2y+p)^2-2m(2x-y+q)=0. \tag{54}$$

Сравнив коэффициенты при x и y в первой степени и свободные коэффициенты уравнений (53) и (54), находим:

$$2p-4m=-20;\quad 4p+2m=10;\quad p^2-2mq=-50.$$

Решив эти уравнения, найдем $p=0$; $m=5$; $q=5$.

Простейшее уравнение параболы найдем, подставив $m=5$; $\alpha=1$; $\beta=2$ в уравнение $y'^2=\frac{2m}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}x'$ [см. (50)]:

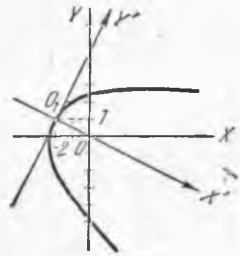
$$y'^2=2\sqrt{5}\,x'. \tag{55}$$

Уравнение оси симметрии параболы найдем по формуле (45) ($\alpha=1$; $\beta=2$; $p=0$):

$$x+2y=0. \tag{56}$$

Уравнение касательной в вершине [по формуле (46) $q=5$]:

$$2x-y+5=0. \tag{57}$$



Черт. 77.

Совместно решив уравнения (56) и (57), найдем координаты вершины параболы $O_1(-2;\ 1)$. Еще по одной точке каждой оси O_1X' и O_1Y' найдем из их уравнений (56) и (57). Ось O_1X' направляем в ту полуплоскость по отношению к оси O_1Y', в которой находится начало координат O первоначальной системы [так как при $x=0, y=0$ левая часть уравнения (57) оси O_1Y' положительна (см. выше)]. В той же полуплоскости располагаем параболу, так как в уравнении (55) коэффициент $2\sqrt{5}>0$ (черт. 77).

§ 64. Классификация линий второго порядка при помощи определителей δ и Δ. Можно, не упрощая уравнения линии второго порядка, по определителям $\delta=AC-B^2$ и Δ (§ 59) узнать вид линии.

Если $\delta=AC-B^2\neq 0$, то уравнение (1) определяет пару прямых или точку в том и только в том случае, когда в уравнении (19) $H_1=0$ (§ 61). Но $H_1=\frac{\Delta}{\delta}$ (§ 59), и условие $H_1=0$ равносильно условию $\Delta=0$.

Если $\delta=AC-B^2=0$, то можно положить $A=\alpha^2$, $B=\alpha\beta$, $C=\beta^2$ (см. начало § 63), так что

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & H\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & D\\ \alpha\beta & \beta^2 & E\\ D & E & H\end{vmatrix}=D\begin{vmatrix} \alpha\beta & D\\ \beta^2 & E\end{vmatrix}-E\begin{vmatrix} \alpha^2 & D\\ \alpha\beta & E\end{vmatrix}+H\cdot 0=$$

$$=D\beta(E\alpha-D\beta)-E\alpha(E\alpha-D\beta)$$

или

$$\Delta=-(D\beta-E\alpha)^2. \tag{58}$$

По доказанному в § 63 уравнение (1), или, что то же, уравнение (41), определяет при $\delta=AC-B^2=0$ пару прямых в том и *только* в том случае, когда $D\beta-E\alpha=0$, следовательно, когда $\Delta=0$, как это видно из равенства (58).

Итак, уравнение (1) (§ 56) линии второго порядка определяет пару прямых или точку тогда, и *только* тогда, когда $\Delta = 0$. При этом, если $\delta = AC - B^2 > 0$, то уравнение (1) определяет точку; если $\delta < 0$ — пару пересекающихся прямых (§ 61); если $\delta = 0$ — пару параллельных прямых, которые, в частности, могут быть слившимися или мнимыми [§ 62 и 63].

Из всего изложенного следует, что если $\Delta \neq 0$, то при $\delta > 0$ уравнение (1) определяет эллипс (или мнимое место точек), при $\delta < 0$ — гиперболу (§ 61) и при $\delta = 0$ — параболу (§ 62).

В нижеследующей таблице дана сводка результатов исследования геометрического значения уравнения (1) линии второго порядка [$\delta = AC - B^2$; Δ см. (31) § 59]:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (или мнимое место точек)	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых (различных, сливающихся или мнимых)

Черт. 78.

§ 65. Конические сечения. Не приводя здесь доказательства, укажем, что эллипс, гипербола и парабола могут быть получены при пересечении круглого конуса плоскостями *); поэтому их называют *коническими сечениями*. Проведем через точку M образующей OA круглого конуса плоскость, перпендикулярную к его оси C_1OC (черт. 78). В сечении получим окружность MN. Будем вращать (по часовой стрелке) эту плоскость вокруг перпендикуляра в точке M к плоскости осевого сечения конуса AOB. Пока плоскость будет еще пересекать образующую OB, в сечениях будут получаться *эллипсы* MN_1. Как только плоскость станет параллельна OB, в сечении получится *парабола* MN_2. При дальнейшем вращении плоскость станет пересекать обе полости конуса и в сечениях будут получаться *гиперболы*, состоящие из двух ветвей MN_3 и $M'N_3'$. Древнегреческие математики III—II вв. до н. э. (Евклид, Архимед, Аполлоний и другие) изучили свойства эллипса, гиперболы и параболы чисто геометрически, рассматривая эти кривые именно как сечения круглого конуса.

*) Доказательство дано в § 118.

ЧАСТЬ II

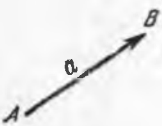
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА VI

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 66. Скаляры и векторы. Определения. I. Величина, вполне определяемая своим численным значением, называется *скалярной* величиной (от латинского слова scala — шкала). Например: длина, объем, масса, температура — величины *скалярные*. Любое вещественное число называется *скаляром*.

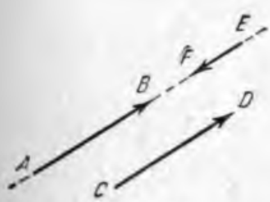
II. Величина, определяемая не только числом, не еще и направлением в пространстве, называется *векторной* величиной (от латинского слова veho — ташу). Например: сила, перемещение точки, скорость, ускорение — величины *векторные*. Векторные величины в математике изображаются векторами (см. § 1). Вектор, у которого начало есть точка A, а конец — точка B (черт. 79) обозначается, как уже указывалось (§ 1), символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор обозначается также одной буквой полужирного шрифта ($\boldsymbol{a}$), а в письме — одной буквой с черточкой наверху ($\bar{a}$). Длина вектора $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ называется его *модулем* и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, или $|\boldsymbol{a}|$, или AB, или a.



Черт. 79.

Раздел математики, определяющий и изучающий действия над векторами, называется *векторной алгеброй*.

§ 67. Коллинеарные векторы. Равные векторы. Определения. I. Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы или параллельны, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (черт. 80), или лежат на одной прямой, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ (черт. 80). Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то записывают $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.



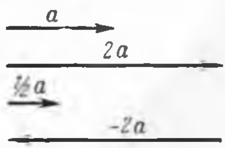
Черт. 80.

II. Два вектора называются *равными*, если они: 1) *имеют равные модули*, 2) *коллинеарны*, 3) *направлены в одну сторону*. На черт. 80 изображены равные векторы:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

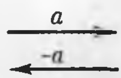
Из данного определения равенства векторов следует, что, не изменяя вектора, можно переносить его параллельно ему самому, приняв за начало вектора любую точку пространства. Из определения равенства векторов следует, что вектор вполне определяется *модулем* и *направлением*.

§ 68. Умножение вектора на скаляр. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ (черт. 81) изображает перемещение точки. Тогда под вектором $2\boldsymbol{a}$ естественно подразумевать вдвое бо́льшее перемещение точки в том же направлении, под вектором $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ вдвое меньшее перемещение в том же направлении, под вектором $-2\boldsymbol{a}$ вдвое большее перемещение точки, но в противоположном направлении, и т. п. Такие соображения дают основание к следующему определению.



Черт. 81.

Определение. Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр (число) m называется новый вектор $\boldsymbol{b}$, который 1) имеет модуль, равный модулю вектора $\boldsymbol{a}$, умноженному на абсолютное значение числа m, 2) коллинеарен с вектором $\boldsymbol{a}$, 3) направлен в одну сторону с вектором $\boldsymbol{a}$ при $m > 0$ и в противоположную сторону при $m < 0$. Результат умножения вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр m записывается векторным равенством:



Черт. 82

$$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

В частном случае вектор $-1\boldsymbol{a}$ называется *противоположным* вектору $\boldsymbol{a}$ и обозначается $-\boldsymbol{a}$ (черт. 82): $-1 \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

Из определения умножения вектора на скаляр следует, что если $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$, то векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. Обратно, если векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны, то $\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a}$. В самом деле, если обозначим отношение длин $\frac{b}{a}$ векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ через k, то по определению умножения вектора на скаляр $\boldsymbol{b} = \pm k\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}$, где $m = +k$ (если векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ направлены в одну сторону) или $m = -k$ (если векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ направлены в противоположные стороны).

§ 69. Единичный вектор. Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным*. Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ можно выразить через единичный вектор того же направления. В самом деле, разделим вектор $\boldsymbol{a}$ на его длину a $\left(\text{т. е. умножим на } \frac{1}{a}\right)$. Получим единичный вектор $\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{a}$ того же направления, что и вектор $\boldsymbol{a}$. Умножив вектор $\boldsymbol{a}^0$ на a, получим снова вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.

Черт. 83.

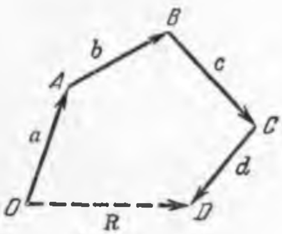
$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0. \tag{2}$$

Иногда единичным вектором $\boldsymbol{i}$ задают единицу масштаба и направление координатной оси OX (черт. 83). Пусть $M(x)$ — произвольная точка на этой оси. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i}, \tag{2'}$$

так как векторы $\overrightarrow{OM}$ и $x\boldsymbol{i}$ 1) имеют равные модули $[|\overrightarrow{OM}| = |x|$ и $|x\boldsymbol{i}| = |x|]$, 2) коллинеарны, 3) направлены в одну сторону.

§ 70. Сложение векторов. Пусть движущаяся точка прошла сначала путь $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ (черт. 84), затем $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, затем $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}$ и, наконец, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{d}$. В результате она переместилась из O в D и вектор $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{R}$ естественно назвать суммой всех данных перемещений. Это соображение дает основание для следующего определения.



Черт. 84.

Определение. Суммой векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, ..., $\boldsymbol{l}$ называется новый вектор $\boldsymbol{R}$, замыкающий ломаную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого из последующих векторов совмещается с концом предыдущего. При этом замыкающий вектор $\boldsymbol{R}$ направлен от начала первого вектора к концу последнего. Для суммы векторов принята запись

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \ldots + \boldsymbol{l}.$$

По такому правилу складываются в механике не только перемещения, но и силы, скорости и другие векторные величины.

На черт. 84 построена векторная сумма $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

Длина отрезка OD меньше длины ломаной $OABCD$ (или равна длине $OABCD$ в частном случае, когда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ направлены по одной прямой и в одну сторону). Поэтому

$$OD \leqslant OA + AB + BC + CD$$

или

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{d}|, \tag{3}$$

т. е. *модуль векторной суммы меньше суммы модулей слагаемых векторов* (или равен ей).

Особый случай получается при сложении векторов, когда конец D построенной из них ломаной совпадает с ее началом O. Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0},$$

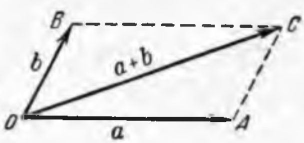
где через $\boldsymbol{0}$ обозначен *нуль-вектор*, как такой особый вектор, который выродился в точку и имеет модуль, равный 0, а направления не имеет.

Приведем еще *правило параллелограмма* для сложения двух векторов и *правило параллелепипеда* для сложения трех векторов (эти правила вытекают из определения суммы векторов).

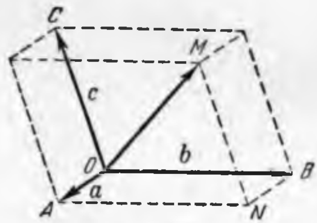
I. *Сумма двух векторов* $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, приведенных к общему началу O (черт. 85), есть *вектор-диагональ* $\overrightarrow{OC}$ *параллелограмма* $OACB$, построенного на данных векторах, так как

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

II. *Сумма трех векторов* $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, приведенных к общему началу O (черт. 86) и не лежащих в одной плоскости,



Черт. 85.



Черт. 86.

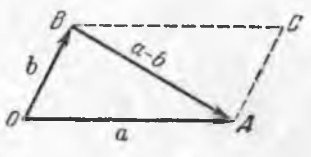
есть *вектор-диагональ* $\overrightarrow{OM}$ *параллелепипеда*, построенного на данных векторах, так как:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

§ 71. Вычитание векторов. *Разностью* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ двух векторов называется такой вектор $\boldsymbol{c}$, который нужно сложить с вектором $\boldsymbol{b}$, чтобы получить вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \text{ если } \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}.$$

Чтобы построить разность $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, приведем векторы $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ к общему началу O (черт. 87) и затем соединим прямой их концы A и B. Вектор $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, так как $\boldsymbol{b} + \overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a}$. Заметим, что в параллелограмме $OACB$ (черт. 85 и 87), построенном на векторах $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, одна вектор-диагональ, $\overrightarrow{OC}$, есть сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, а другая, $\overrightarrow{BA}$, есть разность $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ данных векторов.



Черт. 87.

Теорема. *Чтобы вычесть вектор* $\boldsymbol{b}$, *достаточно прибавить противоположный вектор* $-\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Из черт. 87 найдем:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}). \tag{4}$$

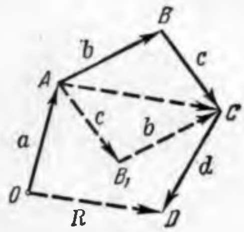
Из доказанной теоремы следует, что всякое выражение, в котором векторы складываются и вычитаются, можно рассматривать как векторную сумму, например:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{c}),$$
$$5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+(-2\boldsymbol{b})+3\boldsymbol{c}.$$

§ 72. Свойства векторной суммы.

I. Переместительное свойство: от перестановки слагаемых векторная сумма не меняется. Построим, например, на звеньях AB и BC ломаной $OABCD$ (черт. 88) параллелограмм $ABCB_1$. Тогда вектор $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}$ будет замыкающим как ломаной $OABCD$, так и ломаной OAB_1CD, т. е.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}.$$



Черт. 88.

Построив параллелограмм на отрезках OA и BB_1, переставим слагаемые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ и т. д.

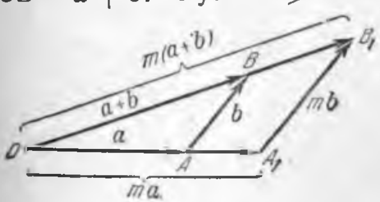
II. Сочетательное свойство: в векторной сумме каждые два (или несколько) слагаемых можно заменить их суммой. Например, соединив прямой точки A и C на черт. 88, получим:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}.$$

III. Распределительное свойство умножения вектора на сумму скаляров и скаляра на сумму векторов:

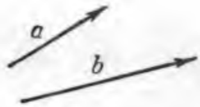
$$(m+n)\,\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}, \qquad (5)$$
$$m\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}. \qquad (6)$$

Равенство (5) можно считать очевидным. Для доказательства равенства (6) построим $\triangle AOB$ (черт. 89), в котором $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Пусть $m>0$. Построим $\overrightarrow{OA_1}=m\cdot\overrightarrow{OA}=m\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB_1}=m\cdot\overrightarrow{OB}=m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и соединим прямой точки A_1 и B_1. Получим $\triangle A_1OB_1$, подобный $\triangle AOB$. Из подобия треугольников следует, что прямые A_1B_1 и AB параллельны и $A_1B_1=m\cdot AB$. Следовательно, по определению умножения вектора на скаляр $\overrightarrow{A_1B_1}=m\cdot\overrightarrow{AB}=m\boldsymbol{b}$. А так как $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$, то $m\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$. Повернем теперь $\triangle OA_1B_1$ в его плоскости вокруг точки O на 180°. Получим $\triangle OA_2B_2$, из которого найдем, что $-m\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$, т. е. равенство (6) справедливо и при отрицательном скалярном множителе.



Черт. 89.

Замечание. Из рассмотренных свойств следует, что векторную сумму $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}+\ldots$ можно преобразовывать по тем же правилам, что и обыкновенную алгебраическую сумму, а именно: выносить за скобки общий множитель, приводить подобные члены, приводить к общему (скалярному) знаменателю, раскрывать скобки и т. п.



Черт. 90.

Пример. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (черт. 90). Построить векторную сумму $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

Решение. Можно для решения задачи построить векторы $3\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{b}$ и т. д., затем построить разность векторов $3\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$, далее построить сумму полученного вектора и вектора $5\boldsymbol{b}$ и т. д. Но лучше, используя свойства векторной суммы, предварительно преобразовать данную сумму, а потом ее построить:

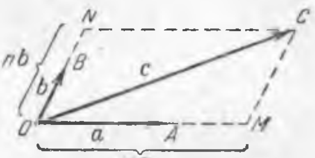
$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

Итак, заданная векторная сумма равна вектору $\boldsymbol{a}$. Для построения этой суммы достаточно построить вектор $\boldsymbol{a}$ (который задан).

§ 73. Компланарные векторы. Разложение вектора по двум векторам. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. Компланарные векторы можно перенести в одну плоскость. Всякие два вектора, очевидно, компланарны, в чем легко убедиться, приведя их к общему началу. Три (и более) произвольных вектора могут быть и некомпланарны*).

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны* и векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Перенесем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в одну плоскость и приведем их к общему началу O (черт. 91). Из конца вектора $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ проведем прямые $CM \parallel \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ и $CN \parallel \overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ до пересечения их в точках M и N с прямыми OA и OB. Из построенного параллелограмма $OMCN$ найдем, что $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ или

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}. \qquad (7)$$



Черт. 91.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ представлен в форме (7), где хотя бы одно из чисел m и n не равно нулю, то говорят, что вектор $\boldsymbol{c}$ разложен по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Геометрически такое разложение вектора $\boldsymbol{c}$ выполняется построением параллелограмма $OMCN$ (черт. 91) по данной его диагонали $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ и направлениям сторон, заданных векторами $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.

§ 74. Проекция вектора на ось. Угол вектора с осью. Пусть даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось OX (черт. 92 и 93). Проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные к оси OX. Получим на оси OX

---

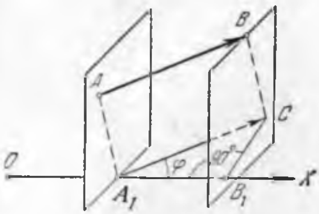
*) Мы предполагаем, что среди рассматриваемых здесь векторов нет *нуль-векторов*, которые не имеют определенного направления (§ 70).

точки A_1 и B_1. Величина $\overline{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на оси называется (ортогональной) *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX:

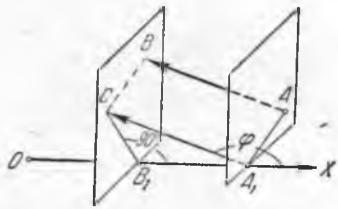
$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} = \overline{A_1B_1}.$$

Углом вектора $\overrightarrow{AB}$ или равного ему вектора $\overrightarrow{A_1C}$ с осью Ox называется угол φ, на который нужно кратчайшим образом повернуть полуось A_1X (черт. 92 и 93) до совмещения ее с вектором $\overrightarrow{A_1C}$. Этот угол φ принимает значения в пределах $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Теорема I. *Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла φ между вектором и осью.*



Черт. 92.



Черт. 93.

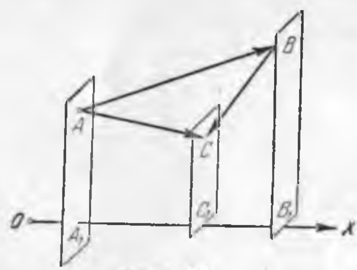
Доказательство. 1) Пусть φ — острый угол (черт. 92). Тогда из $\triangle A_1B_1C$ найдем:

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} = \overline{A_1B_1} = A_1B_1 = A_1C\cos\varphi = AB\cos\varphi.$$

2) Пусть φ — тупой угол (черт. 93). Тогда из $\triangle A_1B_1C$ найдем:

$$\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} = \overline{A_1B_1} = -A_1B_1 = -A_1C\cos(180° - \varphi) = AB\cos\varphi. \qquad (8)$$

Теорема II. *При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число m его проекция на ось умножается на то же число.*



Черт. 94.

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ составляет с осью OX угол φ и пусть число $m > 0$. Тогда вектор $m\boldsymbol{a}$ составляет с OX тот же угол φ, а вектор $(-m\boldsymbol{a})$ — угол $(180° - \varphi)$. По теореме (I) получим:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{пр}_{OX}(m\boldsymbol{a}) = m a\cos\varphi = m\cdot\text{пр}_{OX}\boldsymbol{a},\\ &2)\ \text{пр}_{OX}(-m\boldsymbol{a}) = m a\cos(180° - \varphi) = -m a\cos\varphi = -m\cdot\text{пр}_{OX}\boldsymbol{a}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Теорема III. *Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.*

Доказательство. На черт. 94 $\text{пр}_{OX}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \overline{A_1C_1}$, а $\text{пр}_{OX}\boldsymbol{a} + \text{пр}_{OX}\boldsymbol{b} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}$. Но при любом расположении точек A_1, B_1 и C_1 на оси OX (§ 2) имеем:

$$\overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}.$$

Поэтому

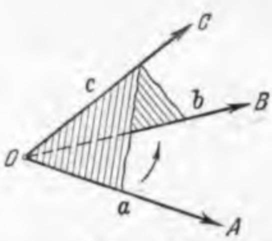
$$\text{пр}_{OX}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{пр}_{OX}\,\boldsymbol{a}+\text{пр}_{OX}\,\boldsymbol{b}. \tag{10}$$

Теорему можно обобщить и на случай суммы трех и более слагаемых

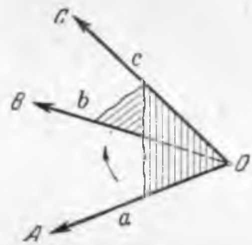
$$\text{пр}\,[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]=\text{пр}\,[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]+\text{пр}\,\boldsymbol{c}=\text{пр}\,\boldsymbol{a}+\text{пр}\,\boldsymbol{b}+\text{пр}\,\boldsymbol{c} \tag{11}$$

и т. д.

§ 75. Правая и левая связка трех некомпланарных векторов. Тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с общим началом O (черт. 95) называется *правой связкой*, если кратчайшее вращение вектора $\boldsymbol{a}$ к



Черт. 95.



Черт. 96.

вектору $\boldsymbol{b}$ мы наблюдаем с конца вектора $\boldsymbol{c}$ совершающимся против часовой стрелки. На черт. 96 изображена *левая связка* ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$), в которой кратчайшее вращение вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ наблюдается с конца вектора $\boldsymbol{c}$ совершающимся по часовой стрелке.

§ 76. Прямоугольная система координат в пространстве. Система трех взаимно перпендикулярных координатных осей OX, OY и OZ (черт. 97) с общим началом O и одинаковой единицей масштаба называется *прямоугольной системой координат* в пространстве. Направления осей OX, OY и OZ можно задать единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (черт. 97), которые называются *ортами* этих осей. Если орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют *правую* связку, то и система координат называется *правой*. Переставив на черт. 97 между собой буквы X и Y, получим *левую* систему. Мы будем в дальнейшем пользоваться *правой* системой координат. *Тройка ортов* ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) называется также *координатным базисом*.

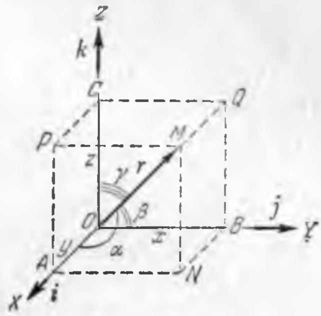
Черт. 97.

§ 77. Прямоугольные координаты точки и вектора в пространстве. Пусть дана прямоугольная система координат в пространстве и произвольная точка M пространства (черт. 98).

Определение. Проекции x, y, z радиуса-вектора точки M на оси координат называются (декартовыми) *прямоугольными координа-*

тами точки M. При этом проекция $\overline{OA}=x$ на ось OX по-прежнему называется *абсциссой* точки M, проекция $\overline{OB}=y$ на ось OY — *ординатой*, а проекция $\overline{OC}=z$ на ось OZ — *аппликатой* точки M (черт. 98).

По данной точке M мы, проведя через нее плоскости $MNAP$, $MNBQ$, $MPCQ$ (черт. 98), перпендикулярные к OX, OY и OZ, найдем координаты $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$, $\overline{OC}=z$ точки M. Обратно, по данным координатам x, y и z точки можно построить параллелепипед $OABCM$ и определить единственную точку M *).



Черт. 98.

Запись $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет абсциссу x, ординату y и аппликату z.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x, y, z)$ мы будем обозначать через $\boldsymbol{r}$.

Зная координаты x, y, z точки M, можно найти модуль r ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и углы его α, β, γ с осями координат. Действительно, по свойству диагонали OM прямоугольного параллелепипеда $OABCM$ (черт. 98) имеем:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{12}$$

А так как x, y, z — проекции вектора $\boldsymbol{r}$ на оси координат, то по свойству проекций (§ 74, теорема 1)

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \cos\beta=\frac{y}{r}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{r}. \tag{13}$$

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$ точки $M(x, y, z)$ является вектор-диагональю параллелепипеда $OABCM$ (черт. 98), построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, поэтому (§ 70, II)

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Но $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$ (§ 69), $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$, следовательно,

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

Векторное равенство (14) будет в дальнейшем часто применяться.

Пусть теперь дан произвольный вектор $\boldsymbol{u}$. Обозначим его проекции на оси координат через X, Y, Z. Так как начало каждого вектора можно перенести в начало координат, причем его модуль, углы с осями координат α, β, γ и проекции на оси координат не изменятся, то к

*) Для построения точки M по ее координатам необязательно строить параллелепипед $OABCM$. Достаточно, например, построить ломаную $OANM$ или же построить сначала параллелограмм $OABN$ (черт. 98) и затем из точки N восставить к плоскости OXY перпендикуляр $\overline{NM}=z$.

вектору $\boldsymbol{u}$ можно применить формулы (12), (13) и (14), заменив в них $\boldsymbol{r}$ через $\boldsymbol{u}$, а x, y, z через X, Y, Z:

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad (12')$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{u}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{u}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{u}, \qquad (13')$$

$$\boldsymbol{u} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \qquad (14')$$

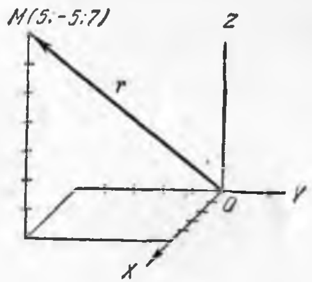
Проекции X, Y, Z вектора $\boldsymbol{u}$ на оси координат называются его *координатами*. Из формул (12′) и (13′) видим, что координаты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{u}$ вполне определяют его модуль и направление.

Запись $\boldsymbol{u}\{X, Y, Z\}$ означает, что вектор $\boldsymbol{u}$ имеет координаты X, Y, Z.

Из определения координат вектора следует, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки $M(x, y, z)$ имеет координаты $\{x, y, z\}$ (так как x, y, z — проекции радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки M на оси координат).

Формула (14) показывает, что вектор $\boldsymbol{u}$ есть сумма трех векторов: $X\boldsymbol{i}$, $Y\boldsymbol{j}$ и $Z\boldsymbol{k}$. Векторы $X\boldsymbol{i}$, $Y\boldsymbol{j}$ и $Z\boldsymbol{k}$ называются *компонентами* (или составляющими) вектора $\boldsymbol{u}$ по координатному базису*).

Косинусы углов вектора с осями координат OX, OY и OZ называются *направляющими косинусами* этого вектора. Между ними существует зависимость. В самом деле, из формул (13′) и (12′) найдем:



Черт. 99.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1,$$

или

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (15)$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.*

Пример 1. Построить точку $M(5, -5, 7)$, найти ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ и его углы с осями координат.

Решение. Построение показано на черт. 99 (см. сноску на стр. 99). Далее по формулам (14), (12) и (13): $\boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$; $r = \sqrt{25 + 25 + 49} \approx 10$; $\cos \approx \frac{1}{2}$, $\alpha \approx 60°$; $\cos\beta = \approx -\frac{1}{2}$, $\beta \approx 120°$; $\cos\gamma \approx 0{,}7$, $\gamma \approx 45°$.

Пример 2. Найти величину силы $\boldsymbol{F}\{4\,кГ;\ 4\,кГ;\ -2\,кГ\}$ и ее углы с осями координат.

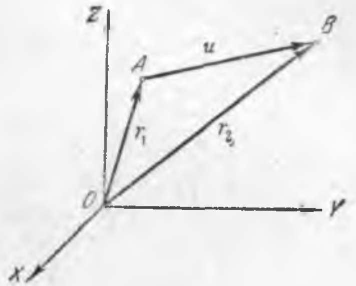
Решение. $F = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6\,кГ$; $\cos\alpha = \cos\beta \approx 0{,}667$, $\alpha = \beta \approx 48°11'$; $\cos\gamma \approx -0{,}333$, $\gamma \approx 109°28'$.

Пример 3. Вектор составляет с осями OX и OY углы, равные каждый 58°. Найти его угол с осью OZ.

*) Следует различать термины: 1) *координаты* (или проекции) вектора $\boldsymbol{u}$: X, Y, Z — это числа (*скаляры*); 2) *компоненты* вектора $\boldsymbol{u}$: $X\boldsymbol{i}, Y\boldsymbol{j}, Z\boldsymbol{k}$ — это *векторы*.

Решение. По формуле (15): $\cos^2 58° + \cos^2 58° + \cos^2\gamma = 1$; $\cos^2\gamma = 1 - 2\cos^2 58° = 1 - 2(0{,}530)^2 \approx 0{,}438$; $\cos\gamma = \pm\sqrt{0{,}438} \approx \pm 0{,}662$, $\gamma_1 \approx 48°{,}5$; $\gamma_2 \approx 131°{,}5$. Таким образом, имеются два вектора, которые составляют с осями OX и OY углы 58°. Из них один составляет с осью OZ острый угол γ_1, а другой — тупой, равный $180° - \gamma_1$.

§ 78. Вектор, заданный координатами его начала и конца. Расстояние между двумя точками. Пусть вектор $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$ задан точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (черт. 100). Обозначим через $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ радиусы-векторы точек A и B. Так как (из $\triangle AOB$) $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, то $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} = \text{пр}_{OX}\boldsymbol{r}_2 - \text{пр}_{OX}\boldsymbol{r}_1 = x_2 - x_1$. Аналогично найдем проекции $\overrightarrow{AB}$ на оси OY и OZ. Итак:



Черт. 100.

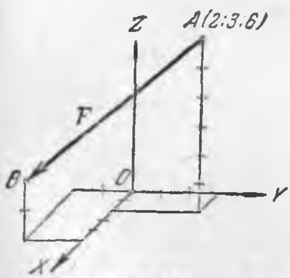
$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_{OX}\overrightarrow{AB} &= X = x_2 - x_1; \\ \text{пр}_{OY}\overrightarrow{AB} &= Y = y_2 - y_1; \\ \text{пр}_{OZ}\overrightarrow{AB} &= Z = z_2 - z_1. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

По формуле (12′) для модуля вектора $\boldsymbol{u}$ имеем $u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, откуда

$$AB = u = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (17)$$

Формула (17) выражает *расстояние между точками* $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Пример. Сила $\boldsymbol{F}$ приложена в точке $A(2; 3; 6)$ и имеет проекции на оси координат $X = 3\,кГ$, $Y = -5\,кГ$, $Z = -4\,кГ$. Определить компоненты вектора $\boldsymbol{F}$ на осях, координаты конца вектора $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{F}$, построить вектор $\overrightarrow{AB}$, найти величину силы и ее углы с осями координат.



Черт. 101.

Решение. Компоненты вектора $\boldsymbol{F}$ равны $X\boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}$, $Y\boldsymbol{j} = -5\boldsymbol{j}$, $Z\boldsymbol{k} = -4\boldsymbol{k}$. Далее по формулам (18) имеем:

$$\begin{aligned} 3 &= x_2 - 2; & x_2 &= 5; \\ -5 &= y_2 - 3; & y_2 &= -2; \\ -4 &= z_2 - 6, & z_2 &= 2, \end{aligned}$$

т. е. конец B вектора имеет координаты $(5; -2; 2)$.

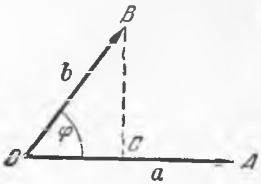
Построение вектора $\overrightarrow{AB}$ показано на черт. 101. Величину силы и ее углы с осями координат находим по формулам (12′) и (13′): $F = \sqrt{9 + 25 + 16} = 5\sqrt{2}\,кГ$; $\cos\alpha \approx 0{,}424$, $\alpha \approx 65°$; $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 135°$; $\cos\gamma \approx -0{,}566$, $\gamma \approx 124°{,}5$.

§ 79. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ и нужно найти на прямой AB точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении $\overline{AM} : \overline{MB} = \lambda$. Спроектировав точки A, B и M на каждую из осей координат, найдем так же, как и в § 10:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{18}$$

§ 80. Скалярное произведение двух векторов.

Определение I. Углом φ между двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется наименьший угол AOB (черт. 102) между этими векторами, приведенными к общему началу O. Из определения следует, что угол φ между векторами принимает значения в пределах $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.



Черт. 102.

Определение II. *Скалярным произведением* двух векторов называется *число*, равное произведению их модулей, умноженному на косинус угла между векторами. Для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ принято обозначение $\boldsymbol{ab}$ (или $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) Итак,

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi, \tag{19}$$

где φ есть угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Спроектировав вектор $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ на вектор $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a}$ (черт. 102), получим: $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = \overline{OC} = b\cos\varphi$. Поэтому $\boldsymbol{ab} = a(b\cos\varphi) = a\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}$, т. е.

$$\boldsymbol{ab} = a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}. \tag{20}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{ab} = b\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}. \tag{20'}$$

Итак, *скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию второго вектора на первый.*

§ 81. Свойства скалярного произведения.

I. Переместительное свойство:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}. \tag{21}$$

Это следует из формулы (19).

II. Распределительное свойство:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}. \tag{22}$$

Доказательство. По формуле (20) и теореме III § 74 получим:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = a\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} + a\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

III. Сочетательное свойство скалярного произведения, содержащего числовые множители:

$$(m\boldsymbol{a})(n\boldsymbol{b}) = mn\,(\boldsymbol{ab}). \tag{23}$$

Доказательство. Применив формулу (20) и теорему о проекции вектора, умноженного на число (§ 74, теорема II), будем иметь:

$$(m\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = b\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}(m\boldsymbol{a}) = bm\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = mb\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = m\,(\boldsymbol{ab}). \tag{23'}$$

В силу переместительного свойства скалярного произведения отсюда вытекает:

$$\boldsymbol{a}(n\boldsymbol{b}) = n(\boldsymbol{ab}). \qquad (23'')$$

Из (23′) и (23″) следует доказываемое свойство:

$$(m\boldsymbol{a})(n\boldsymbol{b}) = mn(\boldsymbol{ab}). \qquad (23)$$

IV. По определению $\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi$. Если векторы коллинеарны, то $\varphi = 0°$ или $180°$, $\cos\varphi = \pm 1$ и $\boldsymbol{ab} = \pm ab$. В частности, $\boldsymbol{aa} = a \cdot a \cos 0° = a^2$. Выражение $\boldsymbol{aa}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\boldsymbol{a}^2$. Следовательно,

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2, \qquad (24)$$

т. е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля*. Отсюда следует также, что

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \qquad (25)$$

V. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны, то $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, $ab\cos\varphi = 0$ и $\boldsymbol{ab} = 0$. Обратно, если $\boldsymbol{ab} = 0$, то $ab\cos\varphi = 0$, следовательно или $\boldsymbol{a} = 0$, или $\boldsymbol{b} = 0$, или $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90°$, т. е. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

VI. Скалярные произведения ортов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Так как $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы, то по формуле (24)

$$\boldsymbol{i}^2 = 1, \quad \boldsymbol{j}^2 = 1, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1.$$

А так как они попарно перпендикулярны, то по свойству V

$$\boldsymbol{ij} = 0, \quad \boldsymbol{ik} = 0, \quad \boldsymbol{jk} = 0,$$

т. е. скалярное произведение «разноименных» ортов равно нулю.

Пример 1. Вычислить выражение $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, если $a = 4$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 120°$, $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}}) = 45°$.

Решение. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 4\cdot 3\cdot\cos 120° + \sqrt{2}\cdot 3\cos 45° = -3$.

Пример 2. Упростить выражение $2\boldsymbol{i}(3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} - 5\boldsymbol{i})$.

Решение. $2\boldsymbol{i}(3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} - 5\boldsymbol{i}) = 6\boldsymbol{ij} - 8\boldsymbol{ik} - 10\boldsymbol{i}^2 = -10$.

Пример 3. Найти модуль вектора $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, составляющие угол 60°.

Решение. По формуле (24)

$$a^2 = \boldsymbol{a}^2 = (2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n})^2.$$

В силу распределительного свойства скалярного произведения здесь можно применить обычную алгебраическую формулу квадрата разности. Получим:

$$a^2 = \boldsymbol{a}^2 = 4\boldsymbol{m}^2 - 12\boldsymbol{mn} + 9\boldsymbol{n}^2 = 4 - 12\cos 60° + 9 = 7;$$

отсюда $a = \sqrt{7}$.

§ 82. Скалярное произведение векторов, заданных координатами. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$; $\boldsymbol{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$. Тогда $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$.

Умножим одну векторную сумму на другую по правилам обыкновенной алгебры (на основании распределительного свойства II и сочетательного свойства III (§ 81)). Получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} = (X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k})(X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}) = \\ = X_1X_2\boldsymbol{i}^2 + Y_1X_2\boldsymbol{ji} + Z_1X_2\boldsymbol{ki} + \\ + X_1Y_2\boldsymbol{ij} + Y_1Y_2\boldsymbol{j}^2 + Z_1Y_2\boldsymbol{kj} + \\ + X_1Z_2\boldsymbol{ik} + Y_1Z_2\boldsymbol{jk} + Z_1Z_2\boldsymbol{k}^2. \end{aligned}$$

Но $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$, а все скалярные произведения разноименных ортов равны нулю (§ 81, VI). Следовательно,

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{26}$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.*

Пример. Вычислить $\boldsymbol{ab}$, если $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$.

Решение. По формуле (26)

$$\boldsymbol{ab} = 2\cdot 4 + (-3)\cdot(-5) + 4\cdot(-6) = -1.$$

§ 83. Приложения скалярного произведения к геометрии и механике.

I. Проекция вектора на вектор. Из формулы $\boldsymbol{ab} = a\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ (§ 80) следует, что

$$\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{ab}}{a}. \tag{27}$$

II. Угол между векторами. Из формулы $\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi$ следует, что

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab}. \tag{28}$$

Если векторы даны своими координатами: $\boldsymbol{a}\,\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$, $\boldsymbol{b}\,\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то формулу (28) нужно выразить через эти координаты. Используя формулы (26) § 82 и (12') § 77, находим:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{28'}$$

Формула (28') определяет угол между двумя векторами *в координатной форме.*

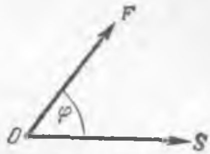
III. Условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из свойства V скалярного произведения векторов (§ 81) следует, что равенство $\boldsymbol{ab} = 0$ есть *необходимое и достаточное условие перпендикулярности* отличных от $\boldsymbol{0}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. В координатной форме это условие запишется в виде [см. формулу (26), § 82]

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{29}$$

IV. Работа силы. Пусть вектор $\boldsymbol{S}$ изображает перемещение материальной точки M под действием постоянной силы F (черт. 103). При этом перемещении, как известно из механики, сила $\boldsymbol{F}$ совершит работу

$$w = FS\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}, \tag{30}$$

т. е. *работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.*



Черт. 103.

Пример 1. Найти угол A треугольника с вершинами $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(3;\ 5;\ -2)$ и $C(3;\ 3;\ -1)$.

Решение. По формуле (28)

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}.$$

По формулам (16) § 78 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют координаты $\overrightarrow{AB}\{4;2;-4\}$ и $\overrightarrow{AC}\{4;\ 0;\ -3\}$. Поэтому

$$\cos A = \frac{4\cdot 4 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot(-3)}{\sqrt{16+4+16}\sqrt{16+0+9}} = \frac{28}{30} \approx 0{,}933;\quad A \approx 20°50'.$$

Пример 2. Дан вектор $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, составляющие угол 120°. Найти угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$:

Решение. $$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{an}}{a\cdot 1} = \frac{(4\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}}{\sqrt{(4\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})^2}} = \frac{4\boldsymbol{mn}-3\boldsymbol{n}^2}{\sqrt{16\boldsymbol{m}^2-24\boldsymbol{mn}+9\boldsymbol{n}^2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 1\cdot 1\cos 120° - 3}{\sqrt{16 - 24\cdot 1\cdot 1\cos 120° + 9}} = \frac{-5}{\sqrt{37}};$$

$$\cos\varphi \approx -0{,}822;\quad \varphi \approx 180° - 34°40' = 145°20'.$$

Пример 3. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}\{3\ кГ;\ 6\ кГ;\ 6\ кГ\}$, зная, что перемещение ее точки приложения изображается вектором $\boldsymbol{S}\{2\ м;\ -1\ м;\ 2\ м\}$.

Решение. $w = \boldsymbol{FS} = 3\cdot 2 + 6(-1) + 6\cdot 2 = 12\ кГм$.

Пример 4. Найти угол φ между биссектрисами углов OXY и OXZ (черт. 97, проведите на чертеже эти биссектрисы).

Решение. Возьмем на первой биссектрисе единичный радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1^0$, на второй $\boldsymbol{r}_2^0$. Вектор $\boldsymbol{r}_1^0$ составляет с осями координат OX, OY, OZ углы 45°, 45°, 90°, и его проекции на оси координат равны $\{1\cdot\cos 45°,\ 1\cdot\cos 45°,\ 1\cdot\cos 90°\}$, вектор $\boldsymbol{r}_2^0$ составляет с осями координат углы 45°, 90°, 45° и его проекции на оси координат равны $\{\cos 45°;\ \cos 90°;\ \cos 45°\}$. На основании определения скалярного произведения и по формуле (26) имеем:

$$\boldsymbol{r}_1^0\,\boldsymbol{r}_2^0 = 1\cdot 1\cdot\cos\varphi = \cos 45°\cdot\cos 45° + \cos 45°\cdot\cos 90° + \cos 90°\cdot 45° = \frac{1}{2};$$

$$\varphi = 60°.$$

§ 84. Векторное произведение двух векторов. Определение. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется такой *вектор* $\boldsymbol{c}$ (черт. 104), который

1) имеет модуль, равный $ab\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

2) перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

3) направлен так, чтобы связка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ была правой (см. § 75).

Для векторного произведения принято обозначение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Итак, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, если

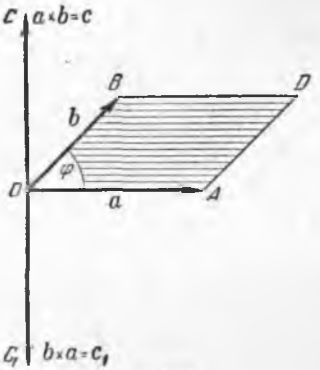
1) $c=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin\varphi$;

2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$;

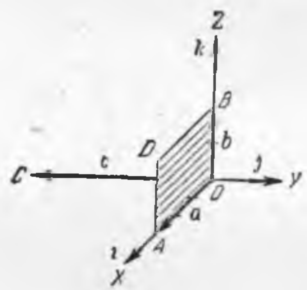
3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — правая связка векторов.

Модуль векторного произведения $c=ab\sin\varphi$ численно равен площади параллелограмма $OADB$ (черт. 104), построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Построим теперь вектор $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}_1$. Он имеет тот же модуль $c_1=ab\sin\varphi$, что и вектор $\boldsymbol{c}$, и тоже перпендикулярен к плоскости



Черт. 104



Черт. 105.

$OADB$ (черт. 104), но направлен в сторону, противоположную $\boldsymbol{c}$, для того чтобы связка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_1)$ была правой. Итак,

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

т. е. от перестановки сомножителей векторное произведение умножается на -1 (другими словами, меняет направление на противоположное, сохраняя модуль).

Пример. Построить векторы $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{k}$ и их векторное произведение $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Решение (черт. 105). $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{k}=\overrightarrow{OB}$; 1) $|\boldsymbol{c}|=6$, ибо пл. $OADB=6$ кв. ед., 2) $\boldsymbol{c}$ направлен по оси OY, ибо $\boldsymbol{c}\perp\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{c}\perp\overrightarrow{OB}$; 3) $\boldsymbol{c}$ направлен влево, чтобы связка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ была правой. Следовательно, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=-6\boldsymbol{j}$.

§ 85. Свойства векторного произведения

I. Переместительное свойство:

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{31}$$

доказано в § 84.

II. Сочетательное свойство векторного произведения, содержащего числовые множители m и n:

$$(m\boldsymbol{a})\times(n\boldsymbol{b})=mn\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{32}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала векторное произведение $\boldsymbol{c}_1=(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ и сравним его с векторным произведением $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

При $m > 0$ направление вектора $\boldsymbol{ma}$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, следовательно, и направления векторов $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}$ также совпадают. Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{ma}$ и $\boldsymbol{b}$, равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, умноженной на m, то $|\boldsymbol{c}_1| = m|\boldsymbol{c}|$. По определению умножения вектора на скаляр (§ 68) из сказанного следует, что $\boldsymbol{c}_1 = m\boldsymbol{c}$ или

$$(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{32'}$$

Так же доказывается формула (32') при $m < 0$, с тем различием, что в этом случае векторы $\boldsymbol{c}_1 = (m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$ и $m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ оба имеют направление, противоположное направлению вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, и формула (32') остается в силе.

Аналогично

$$\boldsymbol{a} \times (n\boldsymbol{b}) = n(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{32''}$$

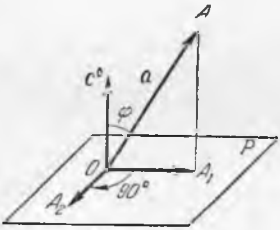
Наконец, из (32') и (32'') следует:

$$(m\boldsymbol{a}) \times (n\boldsymbol{b}) = mn(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{32}$$

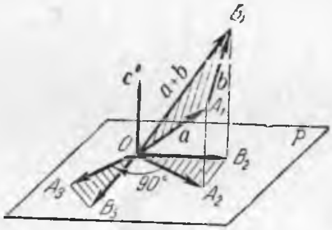
III. Распределительное свойство:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть даны единичный вектор $\boldsymbol{c}^0$, перпендикулярный плоскости P (черт. 106), и вектор $\boldsymbol{a}$. Спроектируем вектор $\boldsymbol{a}$



Черт. 106.



Черт. 107.

на плоскость P и полученный при проектировании вектор $\overrightarrow{OA_1}$ повернем в плоскости P вокруг точки O по часовой стрелке на $90°$ (если смотреть на плоскость с конца вектора $\boldsymbol{c}^0$). Докажем, что полученный вектор $\overrightarrow{OA_2}$ равен $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0$. В самом деле,

а) $OA_2 = OA_1 = a\cos(90° - \varphi) = a \cdot \sin\varphi$,

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}^0$;

б) вектор $\overrightarrow{OA_2}$ перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}^0$;

в) вектор $\overrightarrow{OA_2}$ направлен в ту сторону, откуда кратчайшее вращение от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{c}^0$ видно совершающимся против часовой стрелки, т. е. связка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}^0, \overrightarrow{AO_2})$ — правая.

Пусть теперь даны единичный вектор $\boldsymbol{c}^0$, перпендикулярный к плоскости P, и треугольник OA_1B_1 (черт. 107), в котором $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Спроектируем $\triangle OA_1B_1$ на плоскость P и повернем проекцию OA_2B_2 в плоскости P по часовой стрелке на 90°. Получим $\triangle OA_3B_3$, в котором по доказанному

$$\overrightarrow{OB_3}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{c}^0;\ \overrightarrow{OA_3}=\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{c}^0;\ \overrightarrow{A_3B_3}=\boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}^0.$$

Так как

$$\overrightarrow{OB_3}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3B_3},$$

то

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}^0.$$

Умножим теперь обе части последнего равенства на c. Применив свойство II сочетательности векторного произведения относительно числовых множителей и распределительный закон умножения векторной суммы на скаляр (§ 72), получим:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\, c\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times c\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times c\boldsymbol{c}^0.$$

Но $c\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{c}$. Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}.$$

Распределительное свойство (33) доказано.

IV. Условие коллинеарности (параллельности) векторов. Обозначим угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через φ. Тогда $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$ $=ab\sin\varphi$. Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то $\sin\varphi=0$, следовательно, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$. Обратно, если $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отличны от $\boldsymbol{0}$, то $ab\sin\varphi=0$, следовательно, $\sin\varphi=0$ и $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

Итак, *равенство* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ *есть необходимое и достаточное условие коллинеарности* (*параллельности*) *векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. В координатной форме условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ (при $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$) запишется в виде

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \tag{34}$$

Это следует из равенства $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$, связывающего коллинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (§ 68), откуда (§ 74, теорема II)

$$X_1=mX_2;\ Y_1=mY_2;\ Z_1=mZ_2. \tag{34'}$$

Таким образом, *если векторы коллинеарны* (*параллельны*), *то их одноименные координаты пропорциональны* (и обратно).

Замечание. Если одна из координат вектора $\boldsymbol{b}$, например X_2, равна нулю, то из равенств (34′) следует, что и $X_1=0$. Равенство (34) в этом случае теряет смысл. Условились, однако, сохранять такую запись, понимая ее следующим образом: если знаменатель одной из дробей (34) равен нулю, то и числитель этой дроби также равен нулю. Аналогично понимается равенство (34) и в случае, когда две из координат вектора $\boldsymbol{b}$ равны нулю.

V. Векторное произведение ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

По свойству коллинеарных векторов (стр. 108)

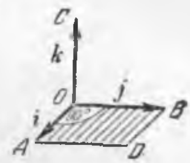
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$

Рассмотрим теперь произведение $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$. Параллелограмм, построенный на $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, есть квадрат $OADB$ (черт. 108), площадь которого равна $1\cdot 1=1$. Вектор $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ и образует с ними правую связку. Следовательно, произведение $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ есть единичный вектор, направленный по оси OZ, т. е. $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$. Аналогично найдем $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}. \qquad (35)$$

Переставив множители, на основании переместительного свойства I получим:

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}. \qquad (36)$$



Черт. 108.

Из формул (35) и (36) следует, что векторное произведение двух любых смежных векторов в последовательности $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ дает следующий вектор со знаком плюс, а в обратной последовательности — со знаком минус. Это можно изобразить схемой

$$\overrightarrow{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}.}^{\,+}$$
$$\underleftarrow{\phantom{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}.}}_{-}$$

Примеры

1) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})=2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

§ 86. Векторное произведение векторов, заданных координатами. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$; $\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$. Тогда

$$\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}.$$

Перемножим векторно $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и, используя распределительный закон, а также сочетательное свойство векторного произведения, содержащего скалярные множители, раскроем скобки по правилам умножения многочленов:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})=\\&=X_1X_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+Y_1X_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+Z_1X_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\\&+X_1Y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+Y_1Y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+Z_1Y_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+\\&+X_1Z_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+Y_1Z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+Z_1Z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся таблицей векторного произведения ортов (§ 85, свойство V):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=0-Y_1X_2\boldsymbol{k}+Z_1X_2\boldsymbol{j}+X_1Y_2\boldsymbol{k}+0-Z_1Y_2\boldsymbol{i}-X_1Z_2\boldsymbol{j}+\\&+Y_1Z_2\boldsymbol{i}+0=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\,\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-X_1Z_2)\,\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\boldsymbol{k}. \qquad (37)\end{aligned}$$

Полученную формулу можно представить в виде определителя (разлагаемого по элементам первой строки):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Пример. Найти векторное произведение векторов

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

Решение:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=11\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

Обозначим координаты векторного произведения $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ через $\{X, Y, Z\}$, тогда из формулы (37) или (38) следует:

$$X=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \quad Y=-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}; \quad Z=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

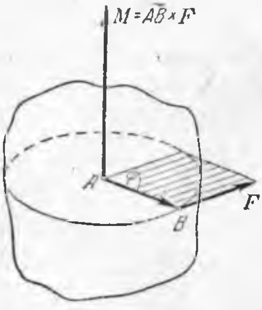
§ 87. Приложения векторного произведения к геометрии и механике.

I. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, как это следует из определения их векторного произведения, равна

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|. \tag{40}$$

Площадь треугольника, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right|. \tag{41}$$



Черт. 109.

II. Момент силы. Пусть точка A твердого тела неподвижно закреплена, а в точке его B (черт. 109) приложена сила $\boldsymbol{F}$. При этом возникает вращательный момент, численно равный $AB\cdot F\sin\varphi$, т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{F}$. В механике принято этот момент определять вектором

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{F}. \tag{42}$$

Пример 1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Решение: 1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

2) $S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ кв. ед.

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 1;\ 4)$ и $C(0;\ -3;\ 4)$.

Решение. Треугольник построен на векторах $\overrightarrow{AB}\{3; -1; 1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{1; -5; 1\}$ [см. формулы (16) § 78].

1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}=4i-2j-14k;$

2) $S_\triangle=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+196}=3\sqrt{6}$ кв. ед.

Пример 3. Точка $A(4; -1; 3)$ твердого тела закреплена. В точке его $B(0; 3; 5)$ приложена сила $F\{2; 0; 1\}$.

Найти момент силы F относительно точки A.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{-4; 4; 2\}$ [см. (16) § 78]. Вращательный момент

$$M=\overrightarrow{AB}\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4i+8j-8k.$$

Величина момента

$$M=\sqrt{16+64+64}=12.$$

§ 88. Смешанное произведение трех векторов и выражение его через координаты сомножителей. Составим векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и вектор $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ умножим затем скалярно на третий вектор $\boldsymbol{c}$. Полученное произведение

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$$

называется *смешанным* или *скалярно-векторным* произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ заданы своими координатами:

$$\boldsymbol{a}\{X_1, Y_1, Z_1\};\quad \boldsymbol{b}\{X_2, Y_2, Z_2\};\quad \boldsymbol{c}\{X_3, Y_3, Z_3\}.$$

Вычислим при помощи этих данных смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$. Положим $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}$ и обозначим координаты вектора $\boldsymbol{u}$ через $\{X, Y, Z\}$. Тогда по формуле для скалярного произведения двух векторов, заданных координатами [§ 82 (26)], имеем:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{c}=XX_3+YY_3+ZZ_3. \tag{43}$$

Но координаты векторного произведения $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ по формулам (39) § 86 равны:

$$X=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad Y=-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad Z=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Подставив (44) в (43), получим:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}-Y_3\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}+Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

или

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{45}$$

Свойства смешанного произведения.

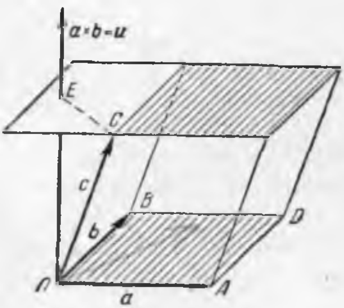
I. От перестановки двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, сохраняя абсолютную величину, так как при этом две строки определителя (45) меняются местами.

II. Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно поменять местами, так как по предыдущему

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

Поэтому смешанное произведение записывают короче в виде $\boldsymbol{abc}$, опустив знаки действий и скобки, поскольку безразлично, какие два из рядом стоящих векторов перемножаются векторно.

§ 89. Геометрическое значение смешанного произведения. Пусть векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ (черт. 110) не компланарны и составляют правую связку. Тогда вектор $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ будет направлен в ту же сторону от плоскости $OADB$, что и вектор $\boldsymbol{c}$. Определим объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:



Черт. 110.

$$V=\text{пл. } OADB\cdot H; \qquad (46)$$

но

$$\text{пл. } OADB=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{u}|=u; \qquad (47)$$

$$H=OE=\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{c}. \qquad (48)$$

Подставив (47) и (48) в (46), получим:

$$V=u\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}.$$

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ составят левую связку (например, если на черт. 110 вектор $\boldsymbol{c}$ будет направлен в противоположную сторону), то все рассуждения останутся теми же, но $\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{c}$ будет отрицательной, так что формула (48) примет вид $H=-\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{c}$. Итак,

$$V=\pm\,\boldsymbol{abc}$$

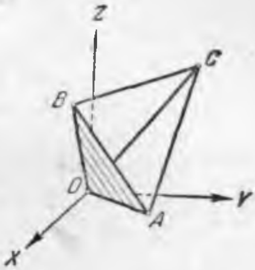
(плюс, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют правую связку, и минус, если левую), т. е. *объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения.*

Пример. Найти объем пирамиды с вершинами $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 3;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 4)$ и $C(0;\ 4;\ 5)$ (черт. 111).

Решение. Объем пирамиды $OABC$ втрое меньше объема треугольной призмы с основанием OAB и боковым ребром OC, а объем этой призмы вдвое меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Поэтому

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\,\overrightarrow{OC}\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2&3&0\\3&0&4\\0&4&5\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-77)\right|=\frac{1}{6}\cdot 77=12\frac{5}{6}\text{ куб. ед.}$$

Смешанное произведение $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\,\overrightarrow{OC}$ оказалось отрицательным (-77). Это значит, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ образуют левую связку, как это видно и из чертежа 111.



Черт. 111.

§ 90. Условие компланарности трех векторов. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Это значит, что или 1) два вектора коллинеарны, например $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, и тогда $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$; или 2) вектор $\boldsymbol{c}$ лежит на плоскости $OADB$ (черт. 110) двух других и тогда $\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{c}=0$. Но $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{u}$ (§ 80). Следовательно, в обоих случаях $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. Обратно, если $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{c}=0$, то или 1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ и $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$; или 2) $\text{пр}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{c}=0$ и вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в плоскости $OADB$. В обоих случаях векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — *компланарны*.

Можно сказать, что при этом объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, равен 0 потому, что один из линейных его размеров равен 0.

Итак, ***необходимым и достаточным условием компланарности трех неравных* 0 *векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$** и $\boldsymbol{c}$ является равенство

$$\boldsymbol{abc}=0 \quad\text{или}\quad \begin{vmatrix}X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\\X_3&Y_3&Z_3\end{vmatrix}=0. \qquad \text{(I)}$$

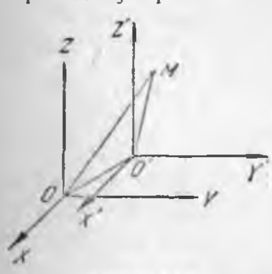
Напомним здесь для сравнения необходимые и достаточные условия перпендикулярности и параллельности (коллинеарности) двух неравных 0 векторов $\boldsymbol{a}\,\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{X_2, Y_2, Z_2\}$:

1) условие перпендикулярности (§ 83):

$$\boldsymbol{ab}=0 \text{ или } X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0; \qquad \text{(II)}$$

2) условие параллельности (коллинеарности) (§ 85):

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \text{ или } \frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \qquad \text{(III)}$$



Черт. 112.

§ 91. Преобразования декартовых координат в пространстве. I. Параллельный сдвиг осей. Пусть дана система прямоугольных декартовых координат OX, OY, OZ (черт. 112) и точка O', имеющая в этой системе координаты (a, b, c). Перенесем начало координат в точку O', сохранив направления осей. Пусть точка M имеет координаты (x, y, z) в данной системе и (x', y', z') в новой системе. Проектируя обе части векторного равенства $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$ на ось OX, получим $\text{пр}_{OX}\overrightarrow{OM}=\text{пр}_{OX}\overrightarrow{OO'}+\text{пр}_{OX}\overrightarrow{O'M}=\text{пр}_{OX}\overrightarrow{OO'}+\text{пр}_{OX'}\overrightarrow{O'M}$, т. е. $x=a+x'$.

Аналогично определяются y и z; итак,

$$x=a+x', \quad y=b+y', \quad z=c+z'. \tag{49}$$

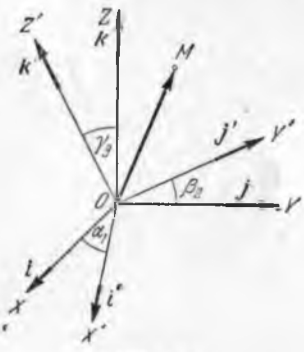
II. Поворот осей. Рассмотрим теперь две прямоугольные системы координат OX, OY, OZ и OX', OY', OZ' с общим началом O (черт. 113). Вторая система получается из первой некоторым поворотом осей координат. Обозначим орты осей первой системы через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а второй — через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$. Они образуют друг с другом девять углов, которые запишем в виде таблицы

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

(50)

Пусть точка M имеет координаты (x, y, z) в первой системе и (x', y', z') — во второй. Сравнив разложение вектора $\overrightarrow{OM}$ по ортам той и другой системы, получим:

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'. \tag{51}$$



Черт. 113.

Умножив обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{i}$, найдем:

$$x\boldsymbol{i}^2+y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=x'\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{i}+z'\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}$$

или

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3.$$

Аналогично определяем y и z.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Заметим, что векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ имеют в первоначальной системе следующие координаты:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i}' \ \{1\cdot\cos\alpha_1,\ 1\cdot\cos\beta_1,\ 1\cdot\cos\gamma_1\};\\ &\boldsymbol{j}' \ \{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\};\\ &\boldsymbol{k}' \ \{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\}.\end{aligned}$$

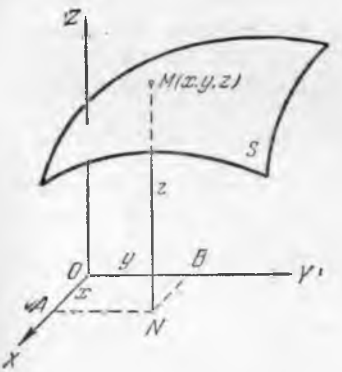
Вследствие ортогональности обеих систем координат девять углов таблицы (50) связаны тремя зависимостями вида $\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$ [§ 90, (II)]. Кроме того, они связаны тремя зависимостями вида $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$. Следовательно, из девяти углов таблицы (50) только три произвольны.

ГЛАВА VII

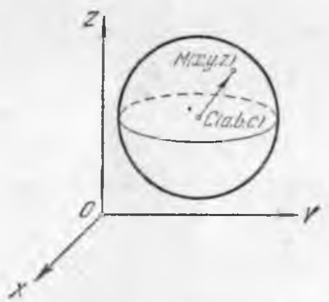
ПЛОСКОСТЬ

§ 92. Уравнение поверхности. Пусть дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Каждая тройка чисел x, y, z, удовлетворяющая этому уравнению, называется, как известно, его решением. Для получения решений этого уравнения достаточно двум из трех букв x, y, z задавать произвольные численные значения, тогда соответствующие значения третьей буквы определятся из уравнения.

Будем рассматривать x, y, z как координаты точки. Тогда каждое решение x, y, z уравнения $F(x, y, z) = 0$ определит точку пространства, а множество всех решений определит некоторое геометри-



Черт. 114.



Черт. 115.

ческое место точек (поверхность) S (черт. 114). Мы скажем, что поверхность S имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

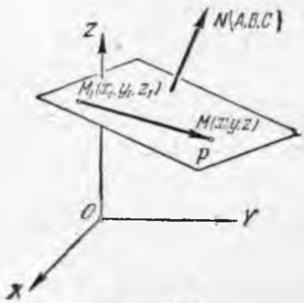
Определение. Уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты *всех* точек поверхности S (и *только* этих точек) называется *уравнением поверхности* S.

Пример. Составить уравнение сферической (шаровой) поверхности с центром в точке C (a, b, c) и радиусом R (черт. 115).

Так как требуется найти уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек сферической поверхности, то исходим из общего свойства всех ее точек. Все точки этой поверхности (и только они) обладают тем общим свойством, что расстояние любой из них от центра C сферы равно R. Поэтому, для того чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала на сфере, необходимо и достаточно, чтобы $|\overrightarrow{CM}| = CM = R$. Отсюда $CM^2 = R^2$ или [см. формулу (17) § 78]

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{2}$$

Уравнение (2) и есть уравнение сферической поверхности.



Черт. 116.

§ 93. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данному вектору. Пусть дана система прямоугольных координат и задана плоскость P, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярная к вектору $N\{A, B, C\}$ (черт. 116). Вектор, перпендикулярный к плоскости, называется *нормальным* вектором плоскости. Так как через точку всегда можно провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и притом только одну, то задание точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ плоскости и нормального вектора плоскости $N\{A, B, C\}$ вполне определяют положение плоскости в данной системе координат.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка. Она лежит на плоскости P (черт. 116) в том и только в том случае, когда

$$\overrightarrow{M_1M} \perp N,$$

а для этого необходимо и достаточно (§ 83, III), чтобы выполнялось условие

$$N \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0. \tag{3}$$

Так как вектор $\overrightarrow{M_1M}$ имеет координаты $\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, а вектор N — координаты $\{A, B, C\}$, то условие (3) в координатной форме напишется так [см. (29) § 83]:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) и есть уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной к вектору $N\{A, B, C\}$.

При всевозможных A, B, C уравнение (4) определит совокупность всех плоскостей, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и поэтому называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через данную точку M_1.

Мы видим, что уравнение (4) — первой степени относительно x, y и z. А так как на любой данной плоскости можно взять какую-нибудь точку M_1 и выбрать какой-нибудь ее нормальный вектор $\mathbf{N}$, то *всякая плоскость* (в декартовых координатах) *определяется уравнением первой степени.*

Пример. Даны точки M_1 (2; —1; 3) и M_2 (4; 5; 8). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1, будет

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости $N=\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\{2; 6; 5\}$ [§ 78, (16)]. Подставив их на место A, B и C в уравнение связки, получим:

$$2(x-2)+6(y+1)+5(z-3)=0 \quad \text{или} \quad 2x+6y+5z-13=0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

§ 94. Общее уравнение плоскости. Исследование его особых случаев. В предыдущем параграфе мы показали, что всякая плоскость определяется уравнением первой степени. Покажем теперь, что и, обратно, *всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

(в декартовых координатах) *определяет плоскость.*

В самом деле, в равенстве (5) по крайней мере один из коэффициентов A, B и C отличен от 0, иначе равенство (5) не будет уравнением. Пусть $C\neq 0$. Тогда уравнение (5) можно написать в виде

$$A(x-0)+B(y-0)+C\left[z-\left(-\frac{D}{C}\right)\right]=0. \tag{6}$$

Согласно предыдущему параграфу уравнение (6), а следовательно и уравнение (5), определяет плоскость, проходящую через точку $\left(0;\ 0;\ -\frac{D}{C}\right)$ и перпендикулярную к вектору $\mathbf{N}\ \{A,\ B,\ C\}$ и эта плоскость единственна.

Уравнение (5) называется *общим уравнением плоскости*. Рассмотрим следующие его особые случаи.

I. Пусть $D=0$. Тогда уравнение (5) имеет вид

$$Ax+By+Cz=0 \tag{7}$$

и определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки (0; 0; 0) обращают уравнение (7) в тождество $A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0\equiv 0$.

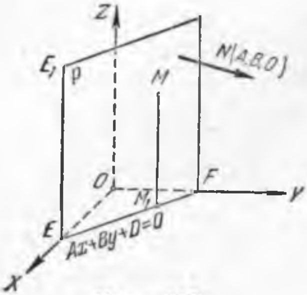
II. Пусть $C=0$. Уравнение (5) имеет тогда вид

$$Ax+By+D=0. \tag{8}$$

Нормальный вектор этой плоскости $\mathbf{N}\ \{A,\ B,\ C\}$ имеет проекцию C на ось OZ, равную 0. Поэтому $\mathbf{N}\perp OZ$, а плоскость параллельна оси OZ.

Пусть прямая EF есть след плоскости P на плоскости OXY (черт. 117). Так как прямая EF лежит на плоскости P, то координаты x и y любой ее точки удовлетворяют уравнению (8). Следовательно, уравнение (8) есть также уравнение прямой EF в плоскости OXY.

Итак, *уравнение* $Ax+By+D=0$, *не содержащее* z, *определяет в пространстве плоскость, параллельную оси* OZ, след которой на плоскости OXY имеет в этой плоскости то же уравнение $Ax+By+D=0$.



Черт. 117.

III. Пусть $C=0$ и $D=0$. Тогда уравнение (5) имеет вид

$$Ax+By=0. \tag{9}$$

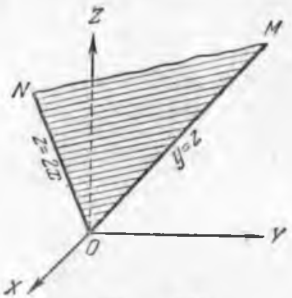
По предыдущему эта плоскость должна быть параллельна OZ и в то же время проходить через точку O этой оси. Следовательно, она проходит через ось OZ.

IV. Пусть $B=0$ и $C=0$. Уравнение (5) имеет вид

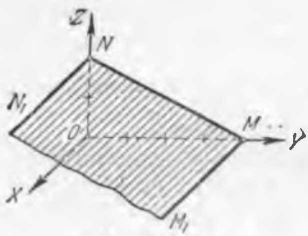
$$Ax+D=0, \text{ или } x=-\frac{D}{A}=a$$

и определяет плоскость, параллельную и оси OZ и оси OY, т. е. параллельную плоскости OYZ.

Все остальные особые случаи обращения в 0 одного или двух коэффициентов уравнения (5) будут аналогичны уже рассмотренным. Так, например, при $A=0$ уравнение $By+Cz+D=0$ определит плоскость, параллельную оси OX, аналогично рассмотренному случаю II.



Черт. 118.



Черт. 119.

V. Пусть теперь в уравнении (5) три коэффициента — или B, C, D, или A, C, D, или A, B, D — равны 0. Получим уравнения координатных плоскостей:

$Ax=0$, или $x=0$ — уравнение плоскости OYZ;
$By=0$, или $y=0$ — уравнение плоскости OXZ;
$Cz=0$, или $z=0$ — уравнение плоскости OXY.

Случай $A=B=C=0$ геометрического смысла не имеет.

Примеры. Построить плоскости:

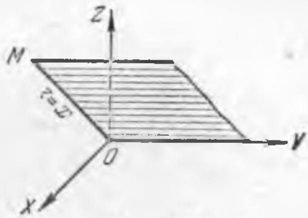
1) $2x+y-z=0$. Плоскость проходит через начало координат. Для построения плоскости найдем уравнения ее следов на двух координатных плоскостях:

след на плоскости OYZ ($x=0$): $y=z$ — биссектриса OM угла OYZ (в уравнении плоскости полагаем $x=0$);

след на плоскости OXZ ($y=0$): $z=2x$ — прямая ON (черт. 118).

2) $y+2z-4=0$. Плоскость параллельна оси OX. Ее след MN (черт. 119) на плоскости OYZ имеет то же уравнение $y+2z-4=0$. Точку M оси OY найдем, положив в этом уравнении $z=0$, что даст $y=OM=4$; для точки N, положив $y=0$, находим $z=ON=2$. Затем проводим прямые MN, $MM_1 \parallel OX$ и $NN_1 \parallel OX$ — следы данной плоскости на координатных плоскостях.

3) $z=x$ — плоскость проходит через ось OY. След ее OM на плоскости OXZ: $z=x$ — биссектриса координатного угла OXZ (черт. 120).



Черт. 120.

Замечание. В уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ коэффициенты A, B, C, как мы видели, являются координатами *нормального* к плоскости вектора $N\{A, B, C\}$, а x, y, z — *текущими* координатами произвольной точки $M(x, y, z)$ плоскости, или координатами радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}\ \{x, y, z\}$. Выражение $Ax+By+Cz$ можно рассматривать как скалярное произведение этих векторов: $N\cdot\boldsymbol{r}$ [см. (26) § 82]. Тогда уравнение (5) плоскости в *векторной* форме перепишется в виде

$$N\cdot\boldsymbol{r}+D=0. \tag{5'}$$

§ 95. Уравнение плоскости в отрезках. Пусть плоскость не параллельна ни одной из осей координат (черт. 121) и отсекает на осях не равные нулю отрезки

Черт. 121.

$$\overline{OM}=a,\quad \overline{ON}=b \text{ и } \overline{OP}=c.$$

Уравнение этой плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{10}$$

в котором ни один из коэффициентов A, B, C и D не равен 0. Так как точки $M(a, 0, 0)$, $N(0, b, 0)$ и $P(0, 0, c)$ лежат на плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению (10) этой плоскости:

$$\left.\begin{aligned} A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0,\\ A\cdot 0+B\cdot b+C\cdot 0+D=0,\\ A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot c+D=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Из равенств (11) определим коэффициенты A, B и C:

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}$$

и подставим найденные их выражения в уравнение (10):

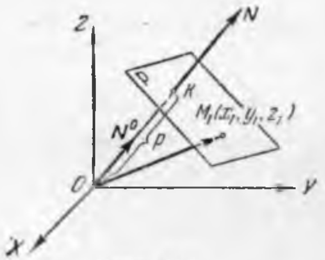
$$-\frac{Dx}{a}-\frac{Dy}{b}-\frac{Dz}{c}+D=0 \qquad (12)$$

Сократив члены уравнения (12) на $-D\neq 0$ и перенеся свободный член направо, получим уравнение плоскости в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (13)$$

Уравнение (13) и называется *уравнением плоскости в отрезках.*

Пример. Привести уравнение плоскости $2x-3y+4z-8=0$ к виду уравнения в отрезках.



Черт. 122.

Решение. Найдем величины a, b и c отрезков, отсекаемых плоскостью на осях:

при $y=0$, $z=0$ имеем $x=a=4$,

при $x=0$, $z=0$ имеем $y=b=-\frac{8}{3}$,

при $x=0$, $y=0$ имеем $z=c=2$.

Уравнение в отрезках будет

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-\frac{8}{3}}+\frac{z}{2}=1.$$

По найденным отрезкам, отсекаемым на осях плоскостью, можно ее легко построить.

§ 96. Нормальное уравнение плоскости. Пусть дано расстояние p плоскости P от начала координат и углы α, β, γ, составляемые с осями координат нормальным вектором $\boldsymbol{N}$ плоскости, направленным от начала координат к плоскости (черт. 122). Составим уравнение плоскости по этим данным.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — какая-нибудь точка плоскости P, а $\boldsymbol{N}^0$ — единичный вектор направления $\boldsymbol{N}$. Тогда нормальный вектор $\boldsymbol{N}^0$ имеет координаты $\{1\cdot\cos\alpha,\ 1\cdot\cos\beta,\ 1\cdot\cos\gamma\}$ и можно написать уравнение плоскости P в виде (§ 93)

$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0,$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma)=0. \qquad (14)$$

Сумма $x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma$ выражает скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OM_1}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{N}^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ через их координаты (§ 82):

$$\overrightarrow{OM_1}\cdot\boldsymbol{N}^0=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma.$$

Но $\overrightarrow{OM_1}\cdot\boldsymbol{N}^0=\boldsymbol{N}^0\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{N}^0}\overrightarrow{OM_1}=1\cdot\overline{OK}=p$, следовательно,

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=p.$$

Уравнение (14) принимает вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (15)$$

Уравнение (15) называется *нормальным уравнением* плоскости. Напомним, что p — это расстояние от начала координат до плоскости, α, β, γ — углы, составляемые с осями координат нормальным вектором плоскости, направленным от начала координат к плоскости (если плоскость проходит через начало координат, то нормальный вектор можно направить в ту или другую сторону от плоскости); при этом всегда $p \geqslant 0$ (как расстояние).

Нормальный вектор плоскости, заданной нормальным уравнением,— единичный, а нормальный вектор плоскости, заданной общим уравнением, имеет длину, равную $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Поэтому для преобразования общего уравнения плоскости в нормальное надо разделить обе части уравнения на $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (или, иначе говоря, умножить на обратную дробь — «нормирующий множитель» $M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$), выбрав знак у корня так, чтобы свободный член в полученном уравнении был отрицательным (так как $-p<0$).

Пример. Привести уравнение $2x-2y+z+15=0$ к нормальной форме.

Решение. $M=-\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}=-\frac{1}{3}$; нормальное уравнение заданной плоскости $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-5=0$.

§ 97. Угол между двумя плоскостями. Условия их параллельности и перпендикулярности. Пусть даны две непараллельные плоскости:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Линейный угол φ двугранного угла, образованного этими плоскостями, имеет стороны, перпендикулярные к нормальным векторам плоскостей $\boldsymbol{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Следовательно, угол φ или равен углу между векторами $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, или дополняет последний до 180°. Поэтому

$$\cos\varphi=\pm\frac{\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2}{N_1N_2}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{16}$$

Если плоскости параллельны, то и векторы $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ параллельны (коллинеарны), а следовательно, их одноименные координаты пропорциональны (§ 85, IV):

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{17}$$

Обратное утверждение также справедливо. Поэтому равенство (17) есть *необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей*.

Если плоскости перпендикулярны, то и векторы $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ перпендикулярны, а их скалярное произведение равно 0 (§ 83, III):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{18}$$

Верно и обратное утверждение. В силу этого равенство (18) есть *необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.*

Пример. Найти угол между плоскостями

$$2x-3y-z+4=0 \text{ и } x-2y+3z+7=0.$$

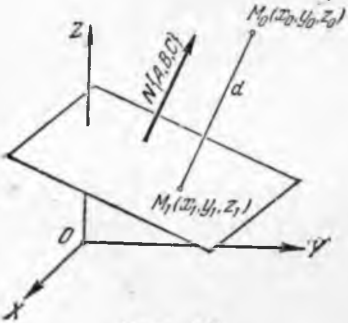
Решение.

$$\cos\varphi=\pm\frac{2+6-3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+4+9}}=\pm\frac{5}{14}\approx\pm 0{,}357;$$

$$\varphi_1\approx 69^\circ 5', \quad \varphi_2\approx 110^\circ 55'.$$

§ 98. Расстояние точки от плоскости. Пусть требуется найти расстояние точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (19)$$



Черт. 123.

Опустим из точки M_0 перпендикуляр M_0M_1 (черт. 123) на плоскость. Искомое расстояние $d=M_1M_0$ есть модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. Так как нормальный вектор $N\{A, B, C\}$ плоскости и вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ параллельны, то по свойству скалярного произведения (§ 81, свойство IV)

$$N\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=\pm N\cdot d. \qquad (20)$$

Обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты точки M_1; тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ будет иметь координаты $\{x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1\}$ и равенство (20) в координатной форме напишется так:

$$A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=\pm N\cdot d.$$

В левой части полученного равенства раскроем скобки и прибавим и вычтем D. Получим:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=\pm Nd. \qquad (21)$$

Но точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на плоскости (19) и поэтому $Ax_1+By_1+Cz_1+D\equiv 0$. Равенство (21) принимает вид

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=\pm N\cdot d.$$

Отсюда искомое расстояние d точки от плоскости равно

$$d=\pm\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{N}. \qquad (22)$$

Так как N — длина вектора $N\{A, B, C\}$, то $N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

Формулу (22) можно писать и без двойного знака, при помощи знака абсолютной величины:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (22')$$

Замечание. Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ делит пространство на две части. Из свойства скалярного произведения следует, что в формулах (20) и (22) нужно брать знак $+$ тогда, когда N и $\overrightarrow{M_1M_0}$ одинаково направлены, т. е. когда M_0 находится в той части пространства, в которую направлен от плоскости нормальный вектор N (черт. 123). Следовательно, в точках этой части пространства $Ax+By+Cz+D>0$, а в точках другой части $Ax+By+Cz+D<0$.

Пример. Найти расстояния точек $M_1(2;\ 0;\ 8)$, $M_2(2;\ 0;\ 2)$ и $O(0;\ 0;\ 0)$ от плоскости $2x-2y+z-6=0$.

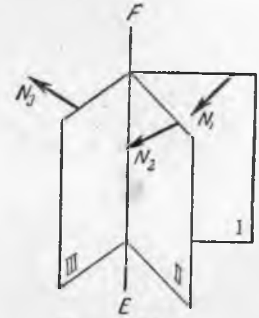
Решение: $d_1=\dfrac{|2\cdot 2-0+1\cdot 8-6|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|+6|}{3}=2,$

$$d_2=\frac{|2\cdot 2-0+1\cdot 2-6|}{3}=0,\quad d_3=\frac{|-6|}{3}=2.$$

Точка M_1 лежит в той части пространства, в которую направлен от плоскости вектор $N\{2;\ -2;\ 1\}$ (так как $2\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 8-6=6>0$), точка O лежит в противоположной части пространства, а точка M_2 — на самой плоскости.

§ 99. Точка пересечения трех плоскостей.

Чтобы найти точку пересечения трех плоскостей, нужно решить совместно систему трех уравнений этих плоскостей:



Черт. 124.

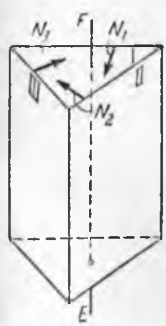
$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Пусть определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Тогда, как известно из теории определителей (§ 121), найдется единственная точка пересечения плоскостей (23) по формулам

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$



Черт. 125.

Пусть теперь определитель системы (23) равен нулю: $\Delta=0$. Геометрически это значит, что нормальные векторы плоскостей $N_1\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$, $N_2\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$ и $N_3\{A_3,\ B_3,\ C_3\}$ компланарны и поэтому перпендикулярны к одной прямой. Это возможно в двух случаях:

1) Плоскости проходят через одну прямую EF (черт. 124) (в частности, две или три плоскости сливаются). В этом случае существует бесчисленное множество точек пересечения плоскостей. Система (23) *неопределенна.*

2) Плоскости параллельны некоторой не лежащей на них прямой EF (черт. 125) (в частности, две или три плоскости параллельны между собой). В этом случае нет общей точки пересечения всех трех плоскостей. Система (23) *несовместна.*

К таким же заключениям о *неопределенности* или *несовместимости* системы (23) приводит и аналитическое исследование случая $\Delta=0$ в теории определителей (§ 121).

§ 100. Примеры на составление уравнения плоскости.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось OX и точку $M(3;\ 4;\ 5)$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид (§ 94, III)

$$By + Cz = 0.$$

Подставим сюда координаты точки M. Получим:

$$4B + 5C = 0;\quad C = -\frac{4}{5}B.$$

Уравнение плоскости примет вид $By - \frac{4}{5}Bz = 0$. Сократив на B и умножив на 5, получим: $5y - 4z = 0$.

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(4;\ 1;\ 5)$ и параллельной оси OX.

Решение. Уравнение связки плоскостей (§ 93), проходящих через точку M_1, будет

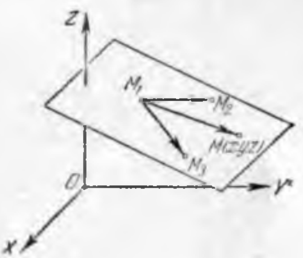
$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-3) = 0.$$

Так как искомая плоскость параллельна OX, то для нее $A = 0$ (§ 94, II) и ее уравнение имеет вид

$$B(y+1) + C(z-3) = 0.$$

Подставим сюда координаты второй данной точки $M_2(4;\ 1;\ 5)$. Получим: $2B + 2C = 0$, откуда $C = -B$ и уравнение искомой плоскости будет $y + 1 - (z-3) = 0$, или $y - z + 4 = 0$.

Пример 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$, $M_2(4;\ 1;\ 5)$ и $M_3(1;\ 2;\ -4)$.



Черт. 126.

Решение. Пусть произвольная точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на искомой плоскости (черт. 126). Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ были компланарны или чтобы [§ 90, (I)]:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим:

$$-20(x-2) + 12(y+1) + 8(z-3) = 0.$$

После упрощения искомое уравнение примет вид

$$5x - 3y - 2z - 7 = 0.$$

Результат можно проверить подстановкой в полученное уравнение координат каждой из данных точек M_1, M_2 и M_3.

Второе решение. Так как искомая плоскость проходит через точку $M_1(2;\ -1;\ 3)$, то записываем ее уравнение в виде

$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-3) = 0. \tag{24}$$

Точки $M_2(4;\ 1;\ 5)$ и $M_3(1;\ 2;\ -4)$ лежат на этой плоскости. Следовательно,

$$A(4-2) + B(1+1) + C(5-3) = 0;\quad A(1-2) + B(2+1) + C(-4-3) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ -A + 3B - 7C &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему по формуле (50) § 124, найдем:

$$A=k\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-10k;\quad B=k\begin{vmatrix}1 & 1\\ -7 & -1\end{vmatrix}=6k;\quad C=k\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4k,$$

откуда можно положить

$$A=5;\quad B=-3;\ C=-2.$$

Подставив эти значения A, B и C в уравнение (24), найдем уравнение искомой плоскости

$$5x-3y-2z-7=0.$$

Пример 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(4;\ 1;\ 5)$ и перпендикулярной к плоскости $x+2y+3z+4=0$.

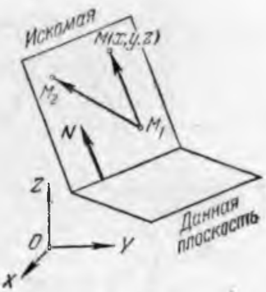
Решение. Нормальный вектор $\boldsymbol{N}(1;\ 2;\ 3)$ данной плоскости можно расположить в искомой плоскости (черт. 127). Пусть точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на искомой плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{N}$ были компланарны, т. е. выполнялось бы условие

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости будет

$$x-2y+z-7=0.$$

(Проверьте полученный ответ по условию задачи.)



Черт. 127.

Пример 5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и перпендикулярной к плоскостям $x+2y+3z=0$; $4x-y+2z-5=0$.

Решение. Нормальные векторы $\boldsymbol{N}_1\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\boldsymbol{N}_2\{4;\ -1;\ 2\}$ данных плоскостей можно расположить в искомой плоскости. Пусть точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на искомой плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ были компланарны или чтобы

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-3\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости будет

$$7x+10y-9z+23=0.$$

(Проверьте полученное уравнение плоскости по условию задачи.)

Второе решение. Напишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $M_1(2;\ -1;\ 3)$. Использовав условие перпендикулярности искомой плоскости к каждой данной плоскости [§ 97, (18)], вычислим коэффициенты A, B, C и найдем уравнение искомой плоскости (см. пример 3, второе решение).

ГЛАВА VIII

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 101. Уравнения линии в пространстве. Всякую линию L в пространстве будем рассматривать как геометрическое место точек пересечения некоторых поверхностей. Пусть эти поверхности заданы в прямоугольных координатах уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0; \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

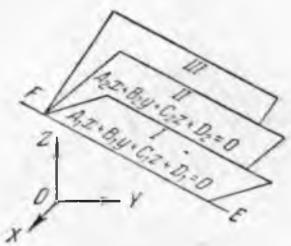
Произвольная точка $M(x, y, z)$ в том и только в том случае будет лежать на линии L пересечения этих поверхностей, если ее координаты будут удовлетворять каждому из уравнений (1). Уравнения (1) и называются поэтому уравнениями линии L.

Итак, линия в пространстве определяется в декартовых прямоугольных координатах системой двух уравнений с переменными x, y, z.

Пример. Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x + y + z &= a. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Первое из уравнений (2) определяет *сферу*, второе — *плоскость*, они пересекаются, так как, например, точки $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ лежат на обеих поверхностях (проверьте). Система уравнений (2) определит линию пересечения сферы и плоскости, т. е. *окружность*.



Черт. 128.

§ 102. Общие уравнения прямой. Пучок плоскостей. Система двух уравнений первой степени

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I})\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ &(\mathrm{II})\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в которых коэффициенты при x, y и z не пропорциональны, определяет некоторую прямую EF (черт. 128) как линию пересечения плоскостей (I) и (II). Уравнения (3) называются *общими уравнениями прямой.*

Умножим почленно первое из уравнений (3) на α, а второе — на β и сложим. Получим уравнение:

$$\text{(III)}\quad \alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

Уравнение (III) при любых α и β, не равных 0 одновременно, определит какую-то плоскость, ибо оно первой степени относительно x, y, z. Эта плоскость (III) проходит через прямую EF (черт. 128). В самом деле, подставив в уравнение (III) координаты любой точки $M(x_0, y_0, z_0)$ прямой EF, получим тождество:

$$\alpha\underbrace{(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)}_{0}+\beta\underbrace{(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)}_{0}=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0\equiv 0.$$

Обратно, всякая плоскость P, проходящая через прямую EF (черт. 128), определяется уравнением (III) при некотором отношении $\frac{\alpha}{\beta}$ $\left(\text{или } \frac{\beta}{\alpha}\right)$, которое найдем, подставив в уравнение (III) координаты какой-нибудь точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на плоскости P вне прямой EF. Получим:

$$\alpha(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)+\beta(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)=0.$$

В этом равенстве хотя бы один из коэффициентов при α и β не равен 0, так как точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не лежит на прямой EF. Поэтому из него мы найдем отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ $\left(\text{или } \frac{\beta}{\alpha}\right)$, при котором уравнение (III) определит плоскость, проходящую как через точку M_1, так и через прямую EF, т. е. плоскость P.

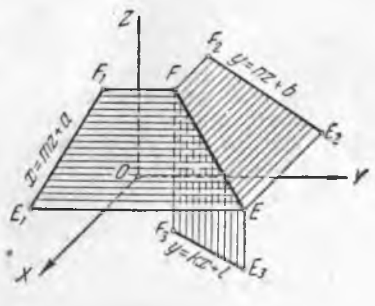
Уравнение (III) называется *уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую (3). Плоскости (I) и (II), определяющие прямую (3), могут быть заменены двумя любыми плоскостями из пучка (III).

§ 103. Уравнения прямой в проекциях. Пусть прямая EF (черт. 129) задана уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем среди отношений $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{B_1}{B_2}$, $\frac{C_1}{C_2}$ нет равных. Умножим первое из уравнений (3) на B_2, а второе на $-B_1$ и сложим почленно. Получим уравнение, не содержащее y. Запишем его в виде

$$x=mz+a. \tag{4}$$



Черт. 129.

Уравнение (4) определяет плоскость, параллельную OY. Так как уравнение (4) является следствием уравнений (3), то координаты всякой точки, удовлетворяющие уравнениям (3), удовлетворяют и уравнению (4) и, следовательно, всякая точка, лежащая на прямой (3), лежит также и на плоскости (4). Таким образом, прямая EF лежит на плоскости (4) (черт. 129). Плоскость эта (EFE_1F_1) проектирует прямую EF на плоскость $y=0$ (т. е. на плоскость OXZ).

Точно так же, исключив из уравнений (3) x или z, получим уравнения плоскостей EFE_2F_2 и EFE_3F_3,

$$y = nz + b, \tag{5}$$
$$y = kx + l, \tag{6}$$

проектирующих прямую EF на плоскости $x = 0$ и $z = 0$.

Уравнения самих проекций E_1F_1, E_2F_2 и E_3F_3 будут

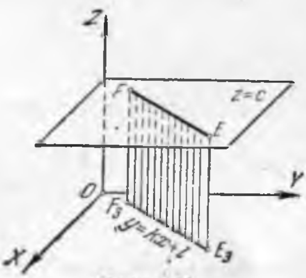
$$\left.\begin{matrix} x = mz + a; \\ y = 0; \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} y = nz + b; \\ x = 0; \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} y = kx + l; \\ z = 0. \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

Система уравнений двух любых проектирующих плоскостей (4), (5) и (6), например

$$\left.\begin{matrix} x = mz + a, \\ y = nz + b, \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

называется *уравнениями прямой в проекциях.*

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то, исключив y из уравнений (3), мы исключим из них одновременно и x. Получим уравнение $z = c$. Прямая расположена в горизонтальной плоскости $z = c$ (черт. 130). Исключив затем z из уравнений (3), найдем $y = kx + l$.



Черт. 130.

В этом случае уравнения прямой (3) в проекциях будут:

$$\left.\begin{matrix} z = c; \\ y = kx + l. \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

З а м е ч а н и е. Для построения прямой по ее уравнениям нужно найти *следы* ее на координатных плоскостях *), полагая в уравнениях прямой или $z = 0$, или $y = 0$, или $x = 0$. Например, из уравнений (8) найдем, что следом прямой EF на плоскости $z = 0$ является точка $(a, b, 0)$. Заметим вообще, что, *исключая* z из уравнений любой линии, мы находим *проекцию* линии на плоскость $z = 0$, а *полагая* в уравнениях линии $z = 0$ и решая затем систему относительно x и y, мы находим *след* линии на плоскости $z = 0$.

П р и м е р. Дана прямая

$$\left.\begin{matrix} 2x - 3y - 8z + 6 = 0; \\ x + y + z - 7 = 0. \end{matrix}\right\}$$

Написать ее уравнения в проекциях, найти следы прямой на координатных плоскостях и построить прямую.

Р е ш е н и е. Исключив из данных уравнений сначала y, потом x, получим

$$\left.\begin{matrix} x = z + 3; \\ y = -2z + 4. \end{matrix}\right\}$$

*) Т. е. точки пересечения ее с координатными плоскостями.

Положив в полученных уравнениях 1) $z=0$, 2) $y=0$, 3) $x=0$, составим таблицу:

x	y	z	Точка (x, y, z)
3	4	0	След E на пл. OXY;
5	0	2	След F на пл. OXZ;
0	10	-3	След K на пл. OYZ.

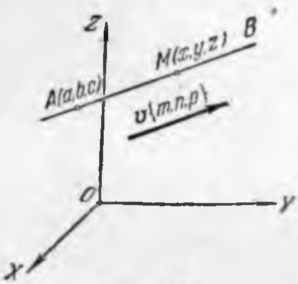
Предлагаем читателю самому построить прямую EF по ее следам E и F, а также построить все три проекции прямой EF на координатные плоскости.

§ 104. Канонические уравнения прямой. Направляющий вектор прямой. Пусть прямая AB проходит через точку A (a, b, c) и параллельна данному вектору $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$ (черт. 131). Произвольная точка M (x, y, z) в том и только в том случае окажется на этой прямой, когда $\overrightarrow{AM} \parallel \boldsymbol{v}$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы одноименные координаты векторов

$$\overrightarrow{AM}\ \{x-a,\ y-b,\ z-c\} \text{ и } \boldsymbol{v}\{m, n, p\}$$

были пропорциональны:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \qquad (10)$$



Черт. 131.

Уравнения (10) называются *каноническими* уравнениями прямой AB, проходящей через точку A (a, b, c) и параллельной вектору $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$. Вектор $\boldsymbol{v}$, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Обозначив каждое из равных отношений (10) через t, получим уравнения

$$x=a+mt, \quad y=b+nt, \quad z=c+pt, \qquad (11)$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой.*

В механике уравнения (11) определяют координаты точки M (x, y, z), равномерно движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$, через t секунд после ее выхода из точки A (a, b, c).

Замечание 1. Если одна из координат направляющего вектора $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$ равна нулю, например $m=0$, то уравнения (10) примут вид

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \qquad (12)$$

содержащий невозможное деление на 0. Обратившись к уравнениям (11), видим, Пример 2. Написать уравнения траектории точки $M(x, y, z)$, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}\{-2;\ 4;\ -3\}$ и вышедшей при $t=0$ из начала координат.

Решение. $x=-2t,\ y=4t,\ z=-3t$
или

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-3}.$$

Пример 3. Привести уравнения прямой

$$2x-3y+4z-1=0,$$
$$x+2y-z+3=0$$

к канонической форме.

Решение. $N_1\times N_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$

Найдем еще точку на прямой, положив в ее уравнениях $z=0$. Получим: $y=-1$, $x=-1$. Канонические уравнения прямой будут:

$$\frac{x+1}{-5}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-0}{7}.$$

Пример 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{1}$.

Решение. В искомой плоскости находятся точка $A(1;\ -1;\ 0)$ первой прямой, точка $A_1(0;\ 2;\ -2)$ второй прямой и вектор $\boldsymbol{v}\{2;\ 3;\ 1\}$. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на той же плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и $\boldsymbol{v}$ были компланарны или чтобы

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда получаем $3x-y-3z-4=0$ — уравнение искомой плоскости.

Замечание. Умножив почленно каждое из уравнений (11) соответственно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и сложив результаты почленно, получим:

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})+(m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}+p\boldsymbol{k})\,t$$

или — в *векторной* форме:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}t, \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой,
$\boldsymbol{r}_0\{a, b, c\}$ — радиус-вектор данной точки на прямой,
$\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$ — направляющий вектор прямой.

Уравнение (11′) называется *векторно-параметрическим* уравнением прямой.

§ 105. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть прямая проходит через данные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. За ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ можно принять вектор $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$. Канонические уравнения прямой (10) [§ 103] примут вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (14)$$

что первое из них при $m=0$ принимает вид $x=a$; это значит, что данная прямая лежит в плоскости $x=a$, или $x-a=0$. Следовательно, данная прямая определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x-a=0; \\ \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

Условились, однако, сохранять для рассматриваемой прямой уравнения (12), понимая под ними уравнения (12').

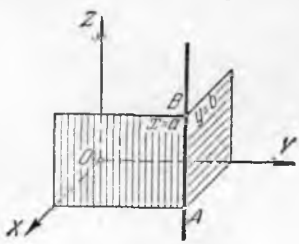
Аналогично уравнения $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{p}$ нужно понимать как систему уравнений

$$\begin{aligned} x-a=0, \\ y-b=0, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x=a, \\ y=b, \end{aligned}$$

которая определяет прямую $AB \parallel OZ$ (черт. 132). В частности, уравнения оси OZ будут $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

Замечание 2. Уравнение (8) прямой в проекциях (§ 103) $x=mz+a$, $y=nz+b$ можно привести к канонической форме, определив из каждого уравнения z и приравняв между собой результаты. Получим:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-0}{1}. \qquad (13)$$



Черт. 132.

Замечание 3. Пусть прямая EF задана общими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Тогда за ее направляющий вектор $\boldsymbol{v}$ можно принять векторное произведение $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2$ векторов $\boldsymbol{N}_1 \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{N}_2 \{A_2, B_2, C_2\}$, так как каждый из них перпендикулярен к EF и, следовательно, вектор $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2$ параллелен EF.

Если требуется преобразовать общие уравнения прямой к канонической форме, то сначала находим направляющий вектор $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$, как указано. Кроме того, нужно найти одну точку прямой. Для этого достаточно придать одной координате, например z, произвольное значение, а две другие, x и y, найти из уравнений прямой. Если найденная точка имеет координаты (a, b, c), то уравнения прямой будут $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ (см. ниже пример 3).

Пример 1. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; -1; 2)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{v}\{1; 0; -2\}$.

Решение. Уравнения (10) в данном случае имеют вид

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{-2},$$

что можно заменить системой

$$\begin{aligned} y+1=0, \\ \frac{x-3}{1}=\frac{z-2}{-2}. \end{aligned}$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ -1;\ 0)$ и $B(4;\ 1;\ -1)$.

Решение. Уравнение искомой прямой найдем по формулам (14):

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

§ 106. Угол между двумя прямыми. Угол φ между двумя данными прямыми $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ и $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$ по определению равен углу между их направляющими векторами $\boldsymbol{v}\ \{m,\ n,\ p\}$ и $\boldsymbol{v}_1\ \{m_1,\ n_1,\ p_1\}$. По формуле (28') § 83 находим:

$$\cos\varphi=\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}.$$

Условие параллельности. Две прямые параллельны в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{v}_1$, т. е. когда

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}.$$

Условие перпендикулярности. Две прямые взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}_1$, т. е. когда

$$mm_1+nn_1+pp_1=0.$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2;\ -3;\ 4)$ и перпендикулярной прямым $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+5}{2}$; $\frac{x-8}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

Решение. Уравнения искомой прямой $\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-4}{p}$, где $m,\ n,\ p$ найдем из условия перпендикулярности этой прямой к заданным прямым:

$$m-n+2p=0,\qquad 3m-2n+p=0.$$

Решив эту систему, получим (§ 124):

$$\frac{m}{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{n}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{p}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}\quad\text{или}\quad\frac{m}{3}=\frac{n}{5}=\frac{p}{1},\ \text{откуда}$$

$$m=3;\ n=5;\ p=1.$$

Уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{1}.$$

Второе решение. Данные прямые имеют направляющие векторы $\boldsymbol{v}\ \{1;\ -1;\ 2\}$ и $\boldsymbol{v}_1\ \{3;\ -2;\ 1\}$. Так как искомая прямая перпендикулярна данным прямым, то за ее направляющий вектор можно принять векторное произведение $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1$:

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

Отсюда следует, что координаты направляющего вектора искомой прямой равны: $m=3$, $n=5$, $p=1$.

Искомая прямая имеет уравнения $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{1}$.

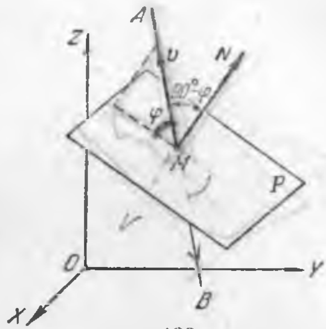
§ 107. Угол между прямой и плоскостью. Углом φ между прямой и плоскостью (черт. 133) называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть даны: прямая AB уравнениями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскость P уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и требуется найти угол φ между ними.



Черт. 133.

Приложим направляющий вектор $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$ данной прямой и нормальный вектор $\boldsymbol{N}\{A, B, C\}$ данной плоскости в точке M пересечения прямой AB с плоскостью P (черт. 133). Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{N}$ направлены в одну сторону от плоскости (как на нашем чертеже), то угол между ними равен $90°-\varphi$, если же $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{N}$ направлены в разные стороны от плоскости, то угол между ними равен $90°+\varphi$. Итак (см. § 83),

$$\cos(90°\pm\varphi)=\frac{\boldsymbol{vN}}{vN}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Отсюда

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (15)$$

Условие параллельности. Прямая и плоскость параллельны в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{v}$, т. е. когда

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (16)$$

Условие перпендикулярности. Прямая и плоскость перпендикулярны в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{N}\parallel\boldsymbol{v}$, т. е. когда

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (17)$$

Условие нахождения прямой в плоскости можно получить как совокупность двух условий: 1) прямая параллельна плоскости; 2) прямая имеет с плоскостью общую точку.

Пример 1. Найти угол между прямой $\begin{cases} y=2x-1, \\ z=5-3x \end{cases}$ и плоскостью $x-3y-2z+5=0$.

Решение. Перепишем уравнение прямой в канонической форме:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-3}.$$

Тогда по формуле (15)

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 1+(-3)2+(-2)(-3)|}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{7}\approx 0{,}143.$$

Так как φ находится в границах от 0 до 180°, то

$$\varphi\approx 8°13' \quad \text{или} \quad 171°47'.$$

Пример 2. Найти уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{5}$ на плоскость P, заданную уравнением $2x-5y+z-2=0$.

Решение. Проектирующая плоскость Q проходит через данную прямую и перпендикулярна к заданной плоскости P. Из уравнений прямой следует, что $M_1(1;\ 4;\ -2)$ — одна из точек прямой. Так как плоскость Q проходит через данную прямую, то она имеет с прямой общую точку $M_1(1;\ 4;\ -2)$ и параллельна этой прямой. Поэтому записываем уравнение плоскости Q в виде

$$A(x-1)+B(y-4)+C(z+2)=0 \qquad (*)$$

и по условию параллельности плоскости Q и данной прямой имеем:

$$2A-3B+5C=0. \qquad (**)$$

Так как $Q\perp P$, то

$$2A-5B+C=0. \qquad (***)$$

Решив систему уравнений (**) и (***) (§ 124), получим:

$$\frac{A}{\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -5 & 1\end{vmatrix}}=\frac{B}{\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{C}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -5\end{vmatrix}}; \qquad \frac{A}{22}=\frac{B}{8}=\frac{C}{-4}, \text{ откуда}$$

$$A=11, \quad B=4, \quad C=-2.$$

Подставив найденные A, B, C в уравнение (*), получим уравнение плоскости Q:

$$11(x-1)+4(y-4)-2(z+2)=0, \qquad 11x+4y-2z-31=0.$$

Проверка уравнения плоскости Q:

$$11\cdot 1+4\cdot 4-2(-2)-31=0; \quad 2\cdot 11-3\cdot 4+5(-2)=0;$$
$$2\cdot 11-5\cdot 4+(-2)=0.$$

Искомая проекция есть линия пересечения плоскостей P и Q, следовательно, ее уравнениями будут:

$$\left.\begin{aligned}2x-5y+z-2&=0;\\ 11x+4y-2z-31&=0.\end{aligned}\right\}$$

Второе решение. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка проектирующей плоскости Q. Точка $M_1(1;\ 4;\ -2)$ лежит на данной прямой. Тогда вектор $MM_1\{x-1;\ y-4;\ z+2\}$ лежит в плоскости Q, а направляющий вектор данной прямой $\boldsymbol{v}\{2;\ -3;\ 5\}$ и нормальный вектор $N\{2;\ -5;\ 1\}$ плоскости P можно также расположить в плоскости Q. Условие компланарности векторов $\overrightarrow{MM_1}$, $\boldsymbol{v}$ и N даст уравнение плоскости Q:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $11x+4y-2z-31=0$. Это уравнение в совокупности с уравнением $2x-5y+z-2=0$ плоскости P и определяют искомую проекцию.

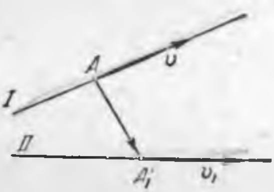
§ 108. Условие расположения двух прямых в одной плоскости. Пусть даны две прямые:

$$\text{(I)}\quad \frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p};$$

$$\text{(II)}\quad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

На прямой (I) лежит точка $A(a,\ b,\ c)$, а на прямой (II) — точка $A_1(a_1, b_1, c_1)$; $\boldsymbol{v}\{m, n, p\}$ — направляющий вектор прямой (I), $\boldsymbol{v}_1\ \{m_1, n_1, p_1\}$ — прямой (II) (черт. 134). Если векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_1$ компланарны, то прямые (I) и (II) лежат в одной плоскости и обратно. А для этого необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_1$ было равно нулю или, чтобы (§ 90)

$$\begin{vmatrix} a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$



Черт. 134.

Таким образом, если условие (18) выполнено, то прямые лежат в одной плоскости, т. е. или пересекаются, или параллельны. Если же условие (18) не выполнено, то прямые скрещиваются.

Пример. Пересекаются ли прямые

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{1}, \\ \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{4}? \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} -2-1 & 2+2 & 1+1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -89 \neq 0.$$

Следовательно, прямые скрещиваются (т. е. не пересекаются и не параллельны).

§ 109. Точка пересечения прямой с плоскостью. Пусть даны прямая

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (19)$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{20}$$

и требуется найти точку их пересечения. Для этого, очевидно, нужно решить совместно относительно x, y и z уравнения (19) и (20). Удобнее, однако, написать сначала параметрические уравнения прямой (19), обозначив каждое из равных отношений (19) через t:

$$x = mt + a, \quad y = nt + b, \quad z = pt + c. \tag{19'}$$

Подставив x, y и z из уравнений (19′) в уравнение (20), получим уравнение, из которого найдем t. Подставив найденное значение t в формулы (19′), получим координаты искомой точки пересечения прямой (19) и плоскости (20).

Пример. Найти проекцию точки $A(4;\ -3;\ 2)$ на плоскость $x + 2y - 3z - 6 = 0$.

Решение. Опустим из точки A перпендикуляр AA_1 на данную плоскость. За направляющий вектор $\boldsymbol{v}$ этого перпендикуляра можно принять нормальный вектор $\boldsymbol{N}\{1;\ 2;\ -3\}$. Поэтому канонические уравнения проектирующего перпендикуляра будут $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3} = t$, откуда $x = t + 4$, $y = 2t - 3$, $z = -3t + 2$. Подставив эти выражения x, y и z в уравнение данной плоскости, получим $14t = 14$, $t = 1$. Отсюда координаты искомой проекции, т. е. точки пересечения перпендикуляра с плоскостью, будут: $x = 5$, $y = -1$, $z = -1$. Искомая проекция будет $A_1(5;\ -1;\ -1)$.

ГЛАВА IX

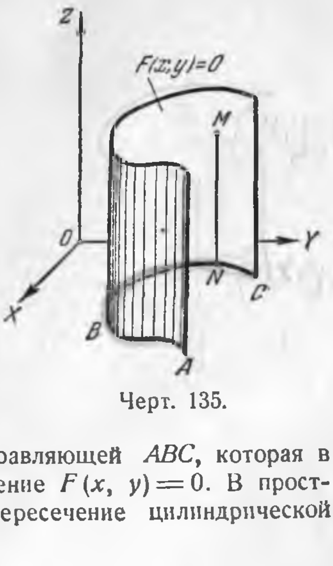
ПОВЕРХНОСТИ

§ 110. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными одной из осей координат. *Цилиндрической* поверхностью называется геометрическое место параллельных прямых, пересекающих данную линию. Эта линия называется *направляющей*, а параллельные прямые — *образующими*.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ, и направляющей ABC (черт. 135), лежащей *в плоскости* OXY. Мы знаем, что координаты x и y любой точки N линии ABC удовлетворяют некоторому уравнению

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Но в пространстве тому же уравнению (1) будут удовлетворять координаты и любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на одной вертикальной прямой NM с точкой $N(x, y, 0)$ линии ABC, так как точка M имеет такие же координаты x и y, как и точка N, а z в уравнение (1) не входит. Геометрическое место вертикальных прямых NM и есть данная *цилиндрическая* поверхность. Координаты каждой ее точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют, как мы показали, уравнению (1). Обратно, если координаты x и y точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (1), то точка M лежит на этой цилиндрической поверхности, так как она лежит на одной вертикали с некоторой точкой N направляющей ABC.



Черт. 135.

Итак, *уравнение* $F(x, y) = 0$, *не содержащее* z, *определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси* OZ и направляющей ABC, которая в плоскости OXY имеет то же самое уравнение $F(x, y) = 0$. В пространстве линия ABC определится как пересечение цилиндрической поверхности с плоскостью $z=0$, т. е. определится системой двух уравнений

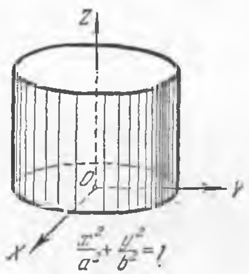
$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0, \\ z&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Аналогично уравнения, не содержащие y или x, определяют цилиндрические поверхности:

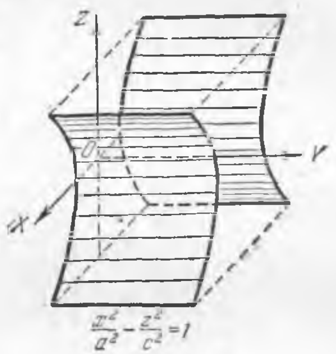
$F(x, z)=0$ — с образующими, параллельными оси OY,

$F(y, z)=0$ — с образующими, параллельными оси OX.

Примеры. 1) Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет в плоскости эллипс, а в пространстве — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ, и пересекающуюся



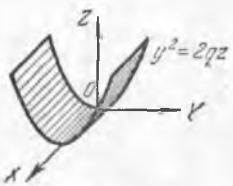
Черт. 136.



Черт. 137.

с плоскостью OXY по этому эллипсу. Такая поверхность называется *эллиптическим цилиндром* (черт. 136).

2) Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OY. Линия пересечения этой поверхности с плоскостью OXZ есть гипербола, которая в этой плоскости имеет то же уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Эта поверхность называется *гиперболическим цилиндром* (черт. 137).



Черт. 138.

3) Уравнение $y^2=2qz$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OX, пересекающуюся с плоскостью OYZ по параболе $y^2=2qz$. Поверхность эта называется *параболическим цилиндром* (черт. 138).

Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры имеют уравнения второй степени относительно текущих координат и в связи с этим называются *цилиндрами второго порядка.*

§ 111. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными данному вектору $v\{m, n, 1\}$. Примем за направляющую такого цилиндра некоторую кривую ABC (черт. 139) на плоскости OXY, заданную уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0, \\ z&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ и проведем через нее параллельно вектору $\boldsymbol{v}\{m, n, 1\}$ прямую MN, где $N(x_0, y_0, 0)$ — точка пересечения прямой MN с плоскостью OXY. По условию параллельности векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\boldsymbol{v}$ имеем:

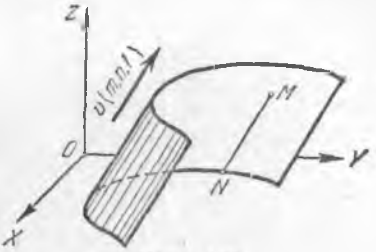
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-0}{1},$$

откуда

$$x_0=x-mz, \quad y_0=y-nz. \tag{3}$$

Чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на заданной цилиндрической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы точка $N(x_0, y_0, 0)$ лежала на направляющей ABC, т. е. чтобы координаты x_0, y_0 точки N удовлетворяли первому из уравнений (2). Подставив в первое из уравнений (2) вместо x и y выражения x_0 и y_0 из уравнений (3), получим:

$$F(x-mz, y-nz)=0. \tag{4}$$



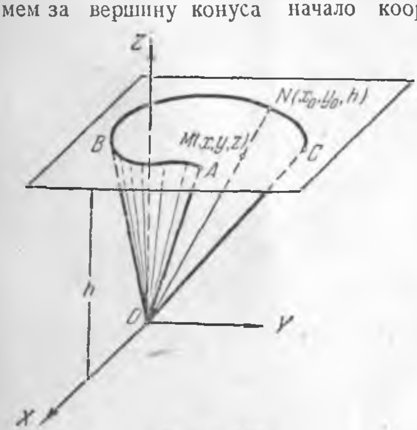
Черт. 139.

Это и есть уравнение цилиндрической поверхности, с образующими, параллельными вектору $\boldsymbol{v}\{m, n, 1\}$ и с направляющей, заданной на плоскости OXY уравнением $F(x, y)=0$.

При $m=n=0$ получим частный случай цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ.

Пример. Уравнение цилиндрической поверхности с направляющей $y^2=2px$, $z=0$ и образующими, параллельными вектору $\boldsymbol{v}\{m, n, 1\}$, будет $(y-nz)^2=2p(x-mz)$.

§ 112. Коническая поверхность. *Конической* поверхностью называется геометрическое место прямых (*образующих*), проходящих через данную точку (*вершину* конуса) и пересекающих данную кривую (*направляющую*). Примем за вершину конуса начало координат, а за направляющую — кривую на плоскости $z=h$ (черт. 140), заданную уравнениями



Черт. 140.

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0, \\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Возьмем на конической поверхности произвольную точку $M(x, y, z)$ и проведем через нее и начало координат прямую OMN, где $N(x_0, y_0, h)$ — точка пересечения прямой OMN с плоскостью $z=h$. По условию параллельности векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ имеем:

$$\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{h}{z},$$

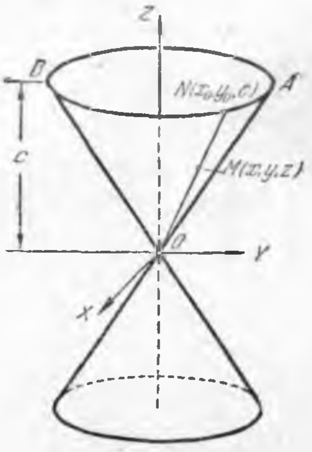
откуда

$$x_0=\frac{xh}{z}, \quad y_0=\frac{yh}{z}. \tag{6}$$

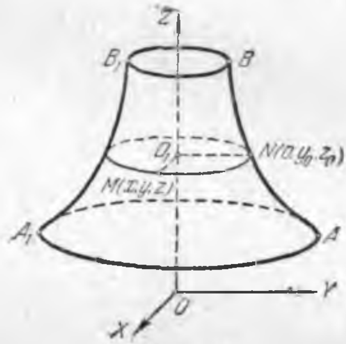
Чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на поверхности конуса, необходимо и достаточно, чтобы точка $N(x_0, y_0, h)$ лежала на направляющей, т. е. чтобы координаты x_0 и y_0 удовлетворяли первому из уравнений (5). Подставив в первое из уравнений (5) вместо x и y выражения x_0 и y_0 из уравнений (6), получим

$$F\left(\frac{xh}{z},\ \frac{yh}{z}\right)=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) и есть уравнение *конической* поверхности с вершиной в начале координат. Если уравнение (7) алгебраическое, то все его члены будут одинаковой степени относительно x, y, z, т. е. *уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат должно быть однородно относительно* x, y *и* z.



Черт. 141.



Черт. 142.

Пример. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$.

Решение. Пусть $M(x,\ y,\ z)$ — произвольная точка поверхности и $N(x_0, y_0,\ c)$ — соответствующая точка направляющей. Из условия параллельности векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ (черт. 141) находим:

$$\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{c}{z},\ \text{откуда}\ x_0=\frac{cx}{z},\quad y_0=\frac{cy}{z}.$$

Подставив эти выражения в первое из уравнений направляющей, получим

$$\frac{x^2c^2}{a^2z^2}+\frac{y^2c^2}{b^2z^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Эта поверхность называется конусом второго порядка.

§ 113. Поверхность вращения. Пусть кривая AB, лежащая на плоскости OYZ, задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F(y,\ z)&=0,\\ x&=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением кривой (8) вокруг оси OZ (черт. 142). Возьмем на поверхности произвольную точку

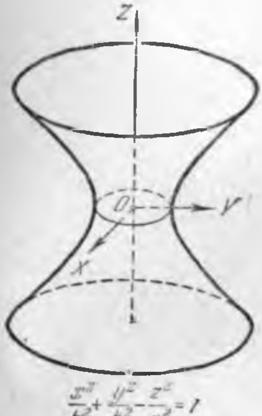
$M(x, y, z)$. Она лежит на горизонтальной окружности, образованной вращением некоторой точки $N(0, y_0, z_0)$ кривой (8) вокруг оси OZ. Сравнив координаты точек $N(0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$, найдем:

$$z_0 = z, \quad y_0 = O_1N = O_1M = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{9}$$

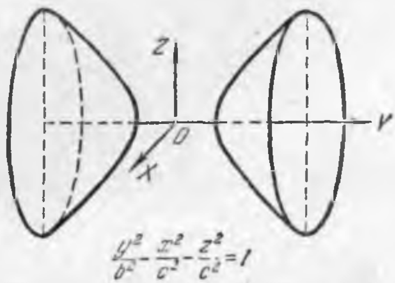
Так как точка $N(0, y_0, z_0)$ лежит на кривой (8), то ее координаты должны удовлетворять уравнениям (8). Подставив в первое из уравнений (8) вместо y и z выражения y_0 и z_0 из уравнений (9), получим уравнение искомой поверхности вращения:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z) = 0. \tag{10}$$

Аналогично, от вращения кривой (8) вокруг



Черт. 143.



Черт. 144.

оси OY получим поверхность, уравнение которой будет

$$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \tag{11}$$

Пример. Написать уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$: 1) вокруг оси OZ, 2) вокруг оси OY.

Решение. 1) По формуле (10) в уравнении гиперболы заменяем y через $\sqrt{x^2 + y^2}$. Получаем $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Эта поверхность называется *однополостным гиперболоидом* вращения (черт. 143).

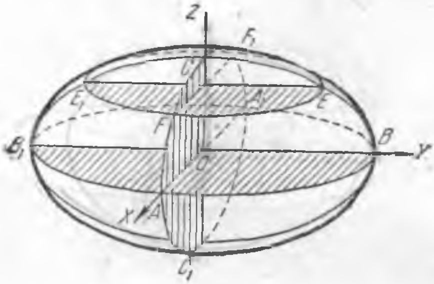
2) По формуле (11) в уравнении гиперболы заменяем z через $\sqrt{x^2 + z^2}$. Получаем $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Эта поверхность называется *двуполостным гиперболоидом* вращения (черт. 144).

§ 114. Эллипсоид. *Эллипсоидом* называется поверхность, простейшее (каноническое) уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{12}$$

Исследуем форму эллипсоида (12) по его сечениям плоскостями.

1) Полагая в уравнении эллипсоида (12) $z=0$, находим сечение его плоскостью OXY. Уравнениями этого сечения, следовательно,



Черт. 145.

будут: $z=0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это эллипс ABA_1B_1 (черт. 145) с полуосями $OA=a$ и $OB=b$.

Аналогично находим сечения эллипсоида:

2) плоскостью OYZ:

$$x=0, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

— эллипс BCB_1C_1 с полуосями $OB=b$ и $OC=c$;

3) плоскостью OXZ:

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

— эллипс CAC_1A_1;

4) плоскостью $z=h$:

$$z=h, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

или

$$z=h, \quad \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

— эллипс FEF_1E_1 с полуосями $O_1F=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $O_1E=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, действительными при $|h|\leqslant c$.

Отрезки $OA=a$, $OB=b$ и $OC=c$ называются *полуосями* эллипсоида.

Если $a=b\neq c$, то уравнение (12) определит эллипсоид вращения, в котором все горизонтальные сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости OXY (при $|h|\leqslant c$), будут окружности радиуса $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.

При $a=b=c$ уравнение (12) определит сферу радиуса a.

§ 115. Гиперболоиды. I. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, простейшее (каноническое) уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{13}$$

Аналогично предыдущему исследуем форму гиперболоида (13) по его сечениям плоскостями.

1) Сечение плоскостью OXY:

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это эллипс ABA_1B_1 (черт. 146) с полуосями $OA=a$ и $OB=b$.

2) Сечение плоскостями $z=\pm h$, параллельными плоскости OXY:

$$z=\pm h, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

— эллипсы DCD_1C_1 и FEF_1E_1 с полуосями $O_1D=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $O_1C=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, действительными при любом h.

3) Сечение плоскостью OYZ:

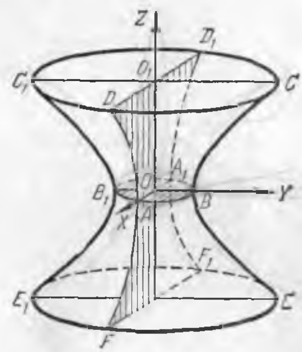
$$x=0, \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

— гипербола с ветвями EBC, $E_1B_1C_1$ и действительной полуосью $OB=b$.

4) Сечение плоскостью OXZ:

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

— гипербола с ветвями FAD, $F_1A_1D_1$ и действительной полуосью $OA=a$.



Черт. 146.

При $a=b$ уравнение (13) определит однополостный гиперболоид вращения, все горизонтальные сечения которого — окружности радиуса $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

II. *Двухполостным гиперболоидом* называется поверхность, простейшее (каноническое) уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{14}$$

Исследуем форму двухполостного гиперболоида (14) по его сечениям плоскостями.

1) Плоскостью OXY:

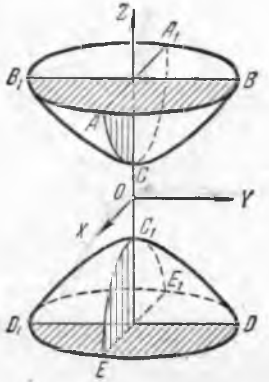
$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

— мнимый эллипс [плоскость OXY не пересекает поверхности (14)].

2) Плоскостями $z = \pm h$:

$$z = \pm h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

— эллипсы ABA_1B_1 и EDE_1D_1 (черт. 147) с полуосями $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ и $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, действительными при условии $|h| \geqslant c$, при котором секущая плоскость расположена не ниже точки $C(0;\ 0;\ c)$ или не выше точки $C_1(0;\ 0;\ -c)$.



Черт. 147.

3) Плоскостью OYZ:

$$x = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— гипербола с ветвями BCB_1, DC_1D_1; действительная полуось равна c, мнимая b.

4) Плоскостью OXZ:

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

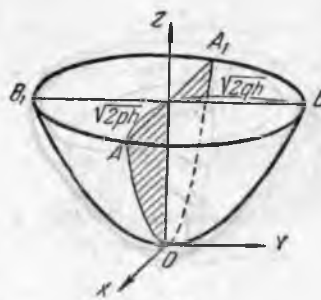
— гипербола с ветвями ACA_1, EC_1E_1; действительная полуось равна c, а мнимая a.

При $a = b$ уравнение (14) определит двухполостный гиперболоид вращения, горизонтальные сечения которого — окружности радиуса $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, действительного при $|h| \geqslant c$.

§ 116. Параболоиды. 1. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, простейшее (каноническое) уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (\text{при } pq > 0). \qquad (15)$$

Исследуем форму эллиптического параболоида (15) при $p > 0$ и $q > 0$ по его сечениям плоскостями (черт. 148).



Черт. 148.

1) Плоскостью OXY:

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$$

— точка $(0;\ 0;\ 0)$.

2) Плоскостью $z = h$:

$$z = h, \quad \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1$$

— эллипс ABA_1B_1 (черт. 148) с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$, действительными при $h > 0$.

3) Плоскостью OYZ:

$$x = 0, \quad y^2 = 2qz$$

— парабола BOB_1.

4) Плоскостью OXZ:

$$y=0,\ x^2=2pz$$

— парабола AOA_1 (черт. 148).

При $p=q$ уравнение (15) определяет параболоид вращения $x^2+y^2=2pz$, все горизонтальные сечения которого плоскостями $z=h>0$ — окружности радиуса $\sqrt{2ph}$ *).

II. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, простейшее (каноническое) уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (\text{при } pq>0). \tag{16}$$

Исследуем форму гиперболического параболоида (16) при $p>0$ и $q>0$ по его сечениям плоскостями.

1) Плоскостью OXZ:

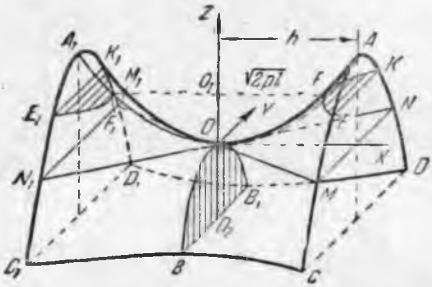
$$y=0, \quad x^2=2pz$$

— парабола AOA_1 (черт. 149).

2) Плоскостью OYZ:

$$x=0, \quad y^2=-2qz$$

— парабола BOB_1, обращенная ветвями вниз.



Черт. 149.

3) Плоскостями $x=\pm h$:

$$x=\pm h, \quad z=-\frac{y^2}{2q}+\frac{h^2}{2p}$$

— параболы CAD и $C_1A_1D_1$, такие же, как BOB_1, но с вершинами A и A_1, поднятыми вверх на $\frac{h^2}{2p}$ над осью OX.

4) Плоскостью OXY:

$$z=0, \quad \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \text{ или } y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$$

— пара прямых MOM_1 и NON_1.

5) Плоскостью $z=l>0$:

$$z=l, \quad \frac{x^2}{2pl}-\frac{y^2}{2ql}=1$$

— гипербола с ветвями EFK, $E_1F_1K_1$ и с действительной осью $O_1F=\sqrt{2pl}$.

---

*) Если в фокусе зеркала, имеющего форму параболоида вращения (параболическое зеркало), поместить источник света, то лучи, падающие на зеркало, отражаются от него по прямым, параллельным оси параболоида, следовательно, не рассеиваются и сохраняют яркость освещения. На этом основано устройство прожектора с отражающим зеркалом в форме параболоида вращения.

6) Плоскостью $z=-m<0$

$$z=-m, \quad \frac{y^2}{2qm}-\frac{x^2}{2pm}=1$$

— гипербола с ветвями CBC_1, DB_1D_1 и с действительной осью $O_2B=\sqrt{2qm}$.

В сечениях гиперболического параболоида нет эллипсов и потому эта поверхность не может быть поверхностью вращения.

§ 117. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. I. Уравнение однополостного гиперболоида

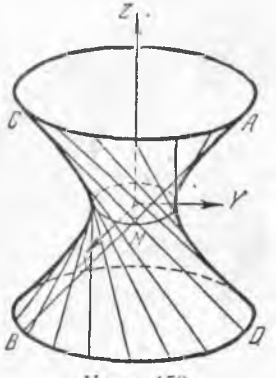
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17}$$

перепишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}.$$

Разложим левую и правую части последнего уравнения на множители:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{18}$$



Черт. 150.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так как уравнения (19) первой степени, то при заданных α и β эти уравнения определяют прямую, а при произвольных α и β — семейство прямых. Координаты любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой (19), удовлетворяют этим уравнениям, а следовательно, удовлетворяют и уравнению, полученному перемножением уравнений (19), т. е. уравнению (18) гиперболоида. Это показывает, что любая точка, лежащая на прямой (19), лежит на гиперболоиде (18) или (17), т. е. прямые линии (19) целиком лежат на гиперболоиде (17) (черт. 150).

Уравнению (18) можно удовлетворить и иначе, положив

$$\left.\begin{aligned}\gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\delta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\gamma\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Прямые (20) также лежат целиком на гиперболоиде (17) при любых γ и δ, не равных 0 одновременно. Можно доказать также, что через каждую точку M гиперболоида проходит единственная прямая AMB (черт. 150) из семейства

(19) и единственная прямая CMD из семейства (20). Прямые (19) и (20) называются *прямолинейными образующими* однополостного гиперболоида (17) *).

II. Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (\text{при } p>0 \text{ и } q>0) \tag{21}$$

перепишем в виде

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z. \tag{22}$$

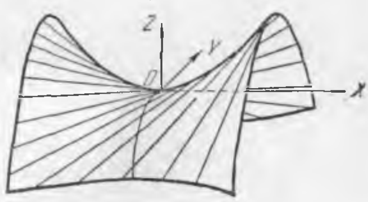
Уравнению (22) удовлетворим, положив

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2\beta, \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=\alpha z \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

или положив

$$\left.\begin{aligned} \gamma\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=\delta z, \\ \delta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)&=2\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Так же как для однополостного гиперболоида, докажем, что прямые (23) и (24) целиком лежат на гиперболическом параболоиде (21). Эти прямые называются *прямолинейными образующими* (черт. 151) гиперболического параболоида.



Черт. 151.

§ 118. Классификация поверхностей второго порядка.

Поверхность, определяемая уравнением второй степени относительно переменных x, y, z

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+ \\ +Fxz+Kx+Ly+Mz+H=0, \tag{25}$$

называется *поверхностью второго порядка.* Левая часть уравнения (25) при некоторых условиях может быть разложена на множители первой степени

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1)=0$$

и тогда уравнение (25) определяет пару плоскостей (которые, в частном случае, могут слиться в одну плоскость).

Иногда уравнение (25) определяет одну точку; например, уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$$

*) В. Г. Шухов (1853—1939), почетный член АН СССР, предложил весьма прочные конструкции мачт, башен и опор из металлических балок, расположенных по образующим однополостного гиперболоида. В Москве сооружена радиомачта такой конструкции.

определяет одну точку (a, b, c). Иногда же уравнение (25) не определяет ни одной точки; например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2=-1$$

не удовлетворяется ни при каких действительных значениях x, y, z.

Кроме этих трех случаев вырождения поверхности (25) в пару плоскостей, точку и мнимый геометрический образ, уравнение (25) путем преобразования координат (§ 91) приводится к одному из девяти следующих, уже рассмотренных нами канонических уравнений поверхностей второго порядка.

I. Центральные поверхности второго порядка

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — *эллипсоид* (черт. 140),

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — *однополостный гиперболоид* (черт. 141),

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — *двухполостный гиперболоид* (черт. 142),

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — *эллиптический цилиндр*,

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — *гиперболический цилиндр*,

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — *конус* второго порядка (черт. 136).

Уравнения этих шести центральных поверхностей второго порядка могут быть записаны в виде

$$Ax^2+By^2+Cz^2=F. \tag{26}$$

II. Поверхности второго порядка, не имеющие центра

7) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (при $pq>0$) — *эллиптический параболоид* (черт. 143),

8) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (при $pq>0$) — *гиперболический параболоид* (черт. 144),

9) $y^2=2qx$ — *параболический цилиндр.*

Уравнения этих трех поверхностей второго порядка, не имеющих центра, могут быть записаны в виде

$$Ax^2+By^2=2Dz \quad (\text{при } D\neq 0). \tag{27}$$

Линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью. Пусть какая-нибудь поверхность второго порядка S пересекается с плоскостью P по некоторой линии. В любой декартовой системе координат уравнение поверхности S — второй степени относительно текущих координат [это доказывается точно так же, как независимость степени алгебраического уравнения линии на плоскости от выбора прямоугольной системы координат (§ 52)]. Выберем систему координат $OXYZ$ так, чтобы плоскость OXY совпала с плоскостью P. Тогда, подставив $z=0$ в уравнение поверхности S, найдем уравнение в плоскости OXY линии пересечения S с плоскостью OXY (или P). После подстановки получится уравнение второй степени (или первой) относительно текущих координат x и y. Это доказывает, что *линия пересечения любой поверхности второго порядка с плоскостью есть линия второго порядка* (или прямая линия).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 119. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Определители второго порядка. Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Умножив первое уравнение на b_2, второе на $-b_1$ и сложив полученные уравнения, найдем

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad (2)$$

Умножив первое уравнение на $-a_2$, второе на a_1 и сложив полученные уравнения, найдем

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1. \qquad (3)$$

Выражение $a_1b_2-a_2b_1$ принято записывать в виде $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и *называть определителем второго порядка:*

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами* определителя (4). Диагональ, на которой расположены числа a_1 и b_2, называется *главной*, а диагональ, на которой расположены числа a_2 и b_1, — *побочной*. Чтобы вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, надо из произведения его элементов, расположенных на главной диагонали, вычесть произведение элементов, расположенных на побочной диагонали [см. формулу (4)]. Согласно введенному обозначению имеем:

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \qquad a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

и уравнения (2) и (3) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Обозначим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_x, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_y. \tag{9}$$

Определитель Δ составлен из коэффициентов при неизвестных системы уравнений (1) и называется *определителем системы* (1). Определитель Δ_x получается из определителя Δ путем замены коэффициентов a_1 и a_2 при неизвестной x соответствующими свободными членами c_1 и c_2. Определитель Δ_y получается из определителя Δ путем замены коэффициентов b_1 и b_2 при неизвестной y соответствующими свободными членами c_1 и c_2.

При помощи введенных обозначений можно уравнения (5) и (6) записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Возможны два случая:

I. $\Delta \neq 0$. В этом случае из уравнений (10) найдем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{11}$$

Так как система уравнений (10) выведена из первоначального уравнения (1), то всякое решение системы (1) является решением системы (10). Но нельзя утверждать, что, обратно, всякое решение выводной системы (10) является решением первоначальной системы (1). Поэтому найденное решение (11) системы (10) следует проверить подстановкой в уравнения (1). Получим

$$a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} = c_1; \quad a_2 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_2 \frac{\Delta_y}{\Delta} = c_2.$$

Подставив в эти равенства $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$; $\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1$; $\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1$, получим после несложных преобразований тождества $c_1 = c_1$; $c_2 = c_2$. Следовательно, решение (11) системы (10) является также решением первоначальной системы уравнений (1).

Итак, *в случае когда определитель системы* $\Delta \neq 0$, *система имеет единственное решение. Каждая неизвестная равна дроби, у которой знаменатель — определитель системы, а числитель получается из знаменателя путем замены коэффициентов этой неизвестной соответствующими свободными членами уравнений* [см. формулы (11)].

II. $\Delta = 0$, т. е. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. В этом случае $a_1b_2 = a_2b_1$. Полагая один из этих коэффициентов, например a_1, не равным нулю, введем обозначение $\frac{a_2}{a_1}=m$, $a_2=ma_1$. Тогда из равенства $a_1b_2=a_2b_1$ находим $b_2=mb_1$, следовательно, коэффициенты a_2 и b_2 левой части второго уравнения пропорциональны коэффициентам a_1 и b_1 левой части первого уравнения. Это означает, что левая часть второго уравнения может быть получена умножением левой части первого на число m:

$$a_2x+b_2y=ma_1x+mb_1y=m(a_1x+b_1y).$$

Но тогда и правая часть второго уравнения, *если только существует решение*, должна получиться из правой части первого умножением на то же число m, а это означает, что свободные члены уравнений должны быть пропорциональны коэффициентам при неизвестных. Отсюда следует, что, *когда $\Delta=0$, возможны два случая*:

1) *Свободные члены уравнений не пропорциональны коэффициентам при неизвестных* (или, что то же, хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y не равен нулю). В этом случае решений нет, *система несовместная.*

2) *Свободные члены уравнений пропорциональны коэффициентам при неизвестных* (или, что то же, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$). В этом случае одно из уравнений получается умножением обеих частей другого на некоторое число, т. е. система (1) приводится к одному уравнению, так как второе уравнение есть следствие первого (при $a_1\neq 0$). *Система неопределенная* и имеет бесконечное множество решений, так как одной неизвестной (y) можно задавать произвольные значения, а значения второй неизвестной (x) найдутся из уравнения

$$x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}.$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$2x-3y=7,$$
$$4x+5y=3.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=22;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}7 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=44;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-22,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{44}{22}=2;\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-22}{22}=-1.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$2x-3y=3,$$
$$4x-6y=5.$$

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=0$. Отсюда следует, что коэффициенты при неизвестных пропорциональны. Действительно, $\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}$. Но $\frac{3}{5}\neq\frac{2}{4}$, т. е. свободные члены непропорциональны коэффициентам при неизвестных, следовательно, система несовместна. К тому же выводу придем, найдя $\Delta_x=$ $=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-3\neq 0$. (Что система несовместна, можно проверить, умножив обе части первого уравнения на 2; получим уравнение $4x-6y=6$, которое противоречит второму уравнению системы $4x-6y=5$.)

Пример 3. Решить систему уравнений

$$2x-3y=3,$$
$$4x-6y=6.$$

Решение. В этой системе коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений пропорциональны. Система имеет бесконечное множество решений, одно из уравнений системы является следствием другого (действительно, сократив второе уравнение на 2, получим уравнение $2x-3y=3$, совпадающее с первым уравнением). К тем же выводам придем, найдя $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$. Из уравнения $2x-3y=3$ находим: $y=\frac{2x-3}{3}$, неизвестной x можно задавать произвольные значения.

§ 120. Определители третьего порядка. При решении системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными вводятся в рассмотрение определители *третьего* порядка. Определителем третьего порядка называется выражение, обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Формула (12) выражает определитель третьего порядка через определители второго порядка.

Назовем *минором* элемента определителя определитель, который получится, если вычеркнуть столбец и строку, содержащие этот элемент. Так, в частности, минором элемента a_1 определителя (*) является определитель

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ \cancel{a_2} & b_2 & c_2 \\ \cancel{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Формулу (12) можно тогда прочесть так: *определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов a_1, b_1, c_1 первой строки, взятых с чередующимися знаками, на их миноры* (элемент a_1 берется со знаком плюс). Формулу (12) называют *разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.*

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$=1\cdot 16-3\cdot(-11)-1\cdot 14=35.$$

Раскрыв определители второго порядка в правой части равенства (12), получим формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1. \quad (13)$$

Заметим, что каждое слагаемое суммы, стоящей в правой части этой формулы, содержит множителями по одному (и только одному) элементу из каждого столбца и из каждой строки определителя.

§ 121. Свойства определителей третьего порядка.

Свойство I. *При замене строк столбцами определитель не меняется*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Доказательство. Обозначим определитель, стоящий в левой части доказываемого равенства, через Δ, в правой — через Δ_1. Разложив определители Δ и Δ_1 по элементам первой строки, представим определитель Δ в виде суммы (13), а определитель Δ_1 в виде

$$\Delta_1 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (15)$$

или

$$\Delta_1 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \quad (16)$$

Эта сумма совпадает с суммой (13), следовательно, $\Delta = \Delta_1$, что и требовалось доказать.

Так как $\Delta_1 = \Delta$, то формула (15) дает *разложение определителя Δ по элементам первого столбца.*

Свойство I доказывает равноправность столбцов и строк определителя. Поэтому все свойства столбцов определителя присущи также и его строкам, и наоборот. Доказав какое-нибудь свойство для столбцов определителя, мы тем самым докажем это свойство и для строк.

Свойство II. *При перестановке двух столбцов (или строк) определитель изменяет знак, сохраняя абсолютное значение*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Для доказательства равенства (17) достаточно разложить каждый из определителей по элементам первой строки и затем раскрыть определители второго порядка.

Свойство III. *Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.*

Доказательство. Обозначим величину определителя с одинаковыми столбцами буквой Δ. Переставим одинаковые столбцы между собой. По свойству II определитель переменит знак на обратный и станет равным $-\Delta$. С другой стороны, от перестановки двух одинаковых столбцов определитель не изменится. Следовательно, $-\Delta=\Delta$, $2\Delta=0$, $\Delta=0$.

Свойство IV. *Определитель можно разложить по элементам любого столбца (или строки).*

Доказательство. Обозначим через Δ определитель (*) § 120. Формулы (12) и (15) дают разложения определителя Δ по элементам первой строки и первого столбца.

По свойству (II)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Разложив последний определитель по элементам первого столбца, получим:

$$\Delta=-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Заметим, что миноры элементов b_1, b_2, b_3 в обоих определителях (18) одинаковы. Формула (19) называется разложением первоначального определителя Δ по элементам второго столбца.

Переставим теперь в последнем определителе формулы (18) третий столбец с первым. При этом определитель вновь изменит знак и станет равным Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по элементам первого столбца, найдем:

$$\Delta=c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Эта формула дает разложение первоначального определителя Δ [(*) § 120] по элементам третьего столбца.

В нижеследующей схеме даны знаки, с которыми берутся элементы в разложении определителя по элементам любого столбца или любой строки:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Будем обозначать минор элемента соответствующей буквой греческого алфавита с тем же номером. Тогда разложение определителя Δ по элементам, например, первой и второй строки запишутся так:

$$\Delta=a_1\alpha_1-b_1\beta_1+c_1\gamma_1; \tag{21}$$

$$\Delta=-a_2\alpha_2+b_2\beta_2-c_2\gamma_2. \tag{22}$$

Разложения по элементам столбцов запишутся:

$$\Delta = a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, \tag{23}$$
$$\Delta = -b_1\beta_1 + b_2\beta_2 - b_3\beta_3, \tag{24}$$
$$\Delta = c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3. \tag{25}$$

Свойство V. *Общий множитель всех элементов столбца (или строки) можно вынести за знак определителя*:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим определитель, стоящий в левой части доказываемого равенства, через Δ, а в правой части — через Δ_1.

Разложив определитель Δ по элементам первого столбца (свойство IV) и замечая, что миноры соответствующих элементов первого столбца обоих определителей равны между собой, получим:

$$\Delta = ka_1\alpha_1 - ka_2\alpha_2 + ka_3\alpha_3 = k(a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3) = k\Delta_1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -50 \\ -3 & 4 & 75 \\ 8 & 15 & -200 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 8 & 15 & -8 \end{vmatrix} = -25 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -3 \\ 8 & 15 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= -25 \cdot 0 = 0.$$

Свойство VI. *Если каждый из элементов одного столбца (или строки) есть сумма двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей по следующей формуле*:

$$\begin{vmatrix} a_1 + m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Доказательство. Обозначим определитель, стоящий в левой части доказываемого равенства, буквой Δ, а определители в правой части — буквами Δ_1 и Δ_2. Разложив определитель Δ по элементам первого столбца и замечая, что миноры соответствующих элементов первого столбца всех трех определителей равны между собой, находим:

$$\Delta = (a_1 + m_1)\alpha_1 - (a_2 + m_2)\alpha_2 + (a_3 + m_3)\alpha_3 =$$
$$= (a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3) + (m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3) = \Delta_1 + \Delta_2,$$

что и требовалось доказать.

Свойство VII. *Определитель не изменится, если к элементам столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на одно и то же число*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Доказательство. На основе свойств VI, V и III находим:

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично доказывается это свойство для любых других столбцов (строк).

Свойство VII можно использовать для упрощения вычисления определителя: применяя это свойство, всегда можно добиться, чтобы два элемента одного столбца (строки) обратились в нуль, а затем разложить определитель по элементам этого столбца (строки).

Пример 3. Вычислим определитель примера 1. Прибавляем к элементам второго столбца соответствующие элементы первого, умноженные на -3; прибавляем к элементам третьего столбца соответствующие элементы первого. Затем разлагаем полученный определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 14 & -1 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 35.$$

§ 122. Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными. Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1; \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2; \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (30)$$

называется определителем системы (29). Для решения системы умножим Δ на произвольное число x. Для этого достаточно умножить на x элементы первого столбца (свойство V):

$$\Delta\cdot x = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ b_1x & b_2 & c_2 \\ c_1x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Умножим элементы второго столбца на произвольное число y, элементы третьего столбца на произвольное число z и прибавим к элементам первого столбца. От этого определитель не изменится (свойство VII):

$$\Delta\cdot x = \begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (31)$$

при любых x, y, z.

Предположим, что существует решение x, y, z системы (29). Тогда $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ и равенство (31) запишется в виде

$$\Delta\cdot x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta_x. \tag{32}$$

Определитель, обозначенный буквой Δ_x, получается из определителя системы Δ путем замены коэффициентов a_1, a_2, a_3 неизвестной x соответствующими свободными членами d_1, d_2, d_3. Итак,

$$\Delta\cdot x=\Delta_x. \tag{33}$$

Аналогично преобразуя $\Delta\cdot y$ и $\Delta\cdot z$, найдем:

$$\Delta\cdot y=\Delta_y, \tag{34}$$

$$\Delta\cdot z=\Delta_z, \tag{35}$$

где

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{36}$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Определитель Δ_y получается из определителя системы Δ путем замены коэффициентов b_1, b_2, b_3 при неизвестной y соответствующими свободными членами, а определитель Δ_z путем аналогичной замены коэффициентов c_1, c_2, c_3 при неизвестной z.

Итак, мы доказали, что если существует решение системы (29), то оно удовлетворяет уравнениям (33), (34), (35). Другими словами, всякое решение системы (29) удовлетворяет уравнениям (33), (34), (35).

Исследуем возможные случаи.

I. Пусть $\Delta\neq 0$. Тогда из уравнений (33), (34), (35) найдем:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{38}$$

Выше было доказано, что всякое решение системы (29) удовлетворяет уравнениям (33), (34), (35), но обратного утверждать нельзя. Поэтому полученное решение (38) следует проверить подстановкой в уравнения первоначальной системы (29). С этой целью напишем разложения определителей Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\begin{array}{ll} \Delta_x= \ \ d_1\alpha_1-d_2\alpha_2+d_3\alpha_3, & \Big| \ a_1 \\ \Delta_y=-d_1\beta_1+d_2\beta_2-d_3\beta_3, & \Big| \ b_1 \\ \Delta_z= \ \ d_1\gamma_1-d_2\gamma_2+d_3\gamma_3. & \Big| \ c_1 \end{array}$$

Нетрудно видеть, что миноры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ здесь те же, что и обозначенные нами ранее этими буквами миноры определителя Δ. Умножим первое равенство на a_1, второе на b_1, третье на c_1 и сложим полученные равенства:

$$a_1\Delta_x + b_1\Delta_y + c_1\Delta_z = d_1(a_1\alpha_1 - b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) + \\ + d_2(-a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 - c_1\gamma_2) + d_3(a_1\alpha_3 - b_1\beta_3 + c_1\gamma_3). \qquad (39)$$

По формуле (21) $a_1\alpha_1 - b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 = \Delta$. Так как, далее, $-a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 - c_2\gamma_2 = \Delta$ [формула (22)], то выражение $-a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 - c_1\gamma_2$ получится из определителя Δ путем замены a_2, b_2, c_2 числами a_1, b_1, c_1:

$$-a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 - c_1\gamma_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это определитель, у которого две строки одинаковы, равен нулю (свойство III). Следовательно, $-a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 - c_1\gamma_2 = 0$.

Аналогично $a_1\alpha_3 - b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 = 0$.

Тождество (39) принимает вид

$$a_1\Delta_x + b_1\Delta_y + c_1\Delta_z = d_1\Delta.$$

Разделив последнее равенство на $\Delta \neq 0$, получим тождество

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1\frac{\Delta_z}{\Delta} = d_1.$$

Следовательно, решение (38) удовлетворяет первому уравнению системы (29). Аналогично доказывается, что это решение удовлетворяет второму и третьему уравнениям системы.

Таким образом, *при* $\Delta \neq 0$ *система* (29) *имеет единственное решение* (38); правило нахождения неизвестных, данное для системы двух уравнений с двумя неизвестными при $\Delta \neq 0$ (§ 119), сохраняется, как мы доказали, и для системы трех уравнений с тремя неизвестными.

II. Пусть $\Delta = 0$ и хотя бы один из миноров определителя Δ отличен от нуля, например $\gamma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда $\Delta \cdot z = 0$ при любом z. Подобно тому как было получено равенство (31), находим:

$$\Delta \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3z \end{vmatrix}$$

при *любых* x, y, z. Разложив определитель по элементам третьего столбца и приняв во внимание, что $\Delta \cdot z = 0$, получим *тождество* относительно x, y, z:

$$\gamma_1(a_1x + b_1y + c_1z) - \gamma_2(a_2x + b_2y + c_2z) + \gamma_3(a_3x + b_3y + c_3z) = 0, \qquad (40)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — три числа (равные соответствующим минорам), причем

$\gamma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Таким образом, *если* $\Delta = 0$ (и $\gamma_3 \neq 0$), *то левые части уравнений связаны зависимостью* (40), которую называют *линейной.* Ее можно записать также в виде (поскольку $\gamma_3 \neq 0$)

$$a_3x + b_3y + c_3z = -\frac{\gamma_1}{\gamma_3}(a_1x + b_1y + c_1z) + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}(a_2x + b_2y + c_2z). \quad (41)$$

Чтобы существовало решение системы, *необходимо*, чтобы правые части уравнений находились в том же соотношении (40) [или (41)], как и левые:

$$d_1\gamma_1 - d_2\gamma_2 + d_3\gamma_3 = 0 \quad (42)$$

или

$$d_3 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_3}d_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_3}d_2. \quad (43)$$

Левая часть равенства (42) есть разложение определителя Δ_z, следовательно, *необходимое условие* (42) *существования решения* можно записать в виде

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (44)$$

Мы приходим к следующему выводу.

Если $\Delta = 0$ и один из миноров, например $\gamma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, не равен нулю, то составляем Δ_z. При этом возможны два случая:

а) $\Delta_z \neq 0$. Так как для существования решения необходимо выполнение условия $\Delta_z = 0$, то при $\Delta_z \neq 0$ решение не существует. Система несовместна.

б) $\Delta_z = 0$. Из равенств (41) и (43) следует, что в этом случае третье уравнение можно получить, умножив обе части первого и второго уравнений на некоторые числа $\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_3} \text{ и } \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right)$ и сложив полученные равенства. Поэтому третье уравнение является следствием первых двух и может быть отброшено. Следовательно, система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Одной неизвестной (например, при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ — неизвестной z) можно задавать произвольные значения, а две другие неизвестные найдутся из уравнений, причем их значения будут зависеть от z. *Система неопределенная*, она имеет бесконечное множество решений.

Из приведенного доказательства следует, что если $\Delta = 0$ и какой-либо из миноров определителя Δ не равен нулю, то надо из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z вычислить тот, который содержит указанный неравный нулю минор. Если вычисленный определитель не равен нулю — система несовместная, если равен нулю — неопределенная.

III. *Пусть $\Delta = 0$ и все миноры определителя Δ равны нулю* *) (причем хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю). Равенство нулю всех миноров определителя означает пропорциональность коэффициентов при неизвестных [ср. § 119, II]. Так же как показано в § 119, II, устанавливаем, что возможны два случая:

1) *Свободные члены хотя бы одной пары уравнений не пропорциональны коэффициентам при неизвестных.* В этом случае решений нет, *система несовместна.*

2) *Коэффициенты при неизвестных и свободные члены каждой пары уравнений пропорциональны.* В этом случае два уравнения являются следствием третьего. *Система неопределенная.* Решений бесконечное множество. Двум неизвестным можно давать произвольные значения, третья найдется из одного из уравнений.

В нижеследующих примерах применены полученные результаты. На этих примерах поясняется также изложенная теория решения системы уравнений (29).

Пример 1.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4, \\ x + 3y - z &= 7, \\ 3x - y - 4z &= 12. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -37 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -111;$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix} = -37; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 37$$
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-111}{-37} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-37}{-37} = 1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{37}{-37} = -1.$$

Пример 2.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4, \\ x + 3y - z &= 7, \\ 4x + 5y - z &= 3. \end{aligned}$$

Определитель $\Delta = 0$; $\gamma_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$; $\Delta_z = -105 \neq 0$. Система несовместна. (Так как в данном примере миноры $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ также не равны нулю, то можно было взамен Δ_z вычислить Δ_x или Δ_y.)

Так как $\Delta = 0$ и $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, то здесь левая часть третьего уравнения линейно зависит от левых частей первого и второго уравнений: действительно, если сложить левую часть первого уравнения с удвоенной левой частью второго уравнения, то получим левую часть третьего уравнения. Но правые части уравнений не связаны той же зависимостью: $4 + 2 \cdot 7 \neq 3$. Поэтому система несовместна.

Пример 3.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4, \\ x + 3y - z &= 7, \\ 4x + 5y - z &= 18. \end{aligned}$$

---

*) Легко видеть, что тогда также и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Определитель $\Delta = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$; $\Delta_z = 0$. Система неопределенная. Третье уравнение — следствие двух других и может быть отброшено (ср. с примером 2; $4 + 2 \cdot 7 = 18$). Решений бесконечное множество. Для их нахождения решаем первое и второе уравнения относительно x и y:

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y &= 4 - z, \\ x + 3y &= 7 + z. \end{aligned}$$

По формулам (11) § 119 находим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - z & -1 \\ 7 + z & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{19 - 2z}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 - z \\ 1 & 7 + z \end{vmatrix}}{7} = \frac{10 + 3z}{7},$$

где неизвестной z можно задавать произвольные значения.

Пример 4.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4; \\ 4x - 2y + 2z &= 8; \\ 6x - 3y + 3z &= 10. \end{aligned}$$

Определитель $\Delta = 0$; коэффициенты при неизвестных в каждой паре уравнений пропорциональны (все миноры определителя Δ равны нулю). Но если взять второе и третье уравнения, то можно заметить, что свободные члены в них не пропорциональны коэффициентам при неизвестных: $\frac{4}{6} = \frac{-2}{-3} \neq \frac{8}{10}$. Таким образом, эта система несовместна (второе и третье уравнения противоречат одно другому; чтобы проверить это, умножьте второе уравнение на $\frac{3}{2}$).

Пример 5.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4; \\ 4x - 2y + 2z &= 8; \\ 6x - 3y + 3z &= 12. \end{aligned}$$

$\Delta = 0$. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены каждой пары уравнений пропорциональны. Два из этих уравнений — следствия одного из них и могут быть отброшены (сократив второе из данных уравнений на 2, а третье на 3, получим одно и то же уравнение, совпадающее с первым). Система неопределенная, имеет бесконечное множество решений. Из первого уравнения находим:

$$x = \frac{4 + y - z}{2},$$

где y и z можно задавать произвольные значения.

§ 123. Однородная система уравнений. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0; \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

в которой свободные члены равны нулю, называется *однородной*. Так как числа $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ всегда удовлетворяют системе (45), то ***случай несовместности для однородной системы невозможен: всякая однородная система уравнений имеет решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$*** («нулевое» решение).

Опираясь на результаты предыдущего параграфа, рассмотрим все возможные случаи решения однородной системы.

I. Определитель системы $\Delta \neq 0$. В этом случае система имеет единственное решение [§ 122, I] $x=0$, $y=0$, $z=0$ (нулевое решение).

II. $\Delta = 0$, но хотя бы один из миноров определителя не равен нулю. В этом случае система неопределенная (несовместность системы невозможна!), одно из уравнений есть следствие двух других (если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то третье уравнение — следствие первого и второго) [§ 122, II б)].

III. $\Delta = 0$ и все миноры определителя Δ равны нулю. В этом случае два уравнения являются следствиями третьего [§ 121, III].

§ 124. Решение системы двух однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Перепишем уравнения в виде

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y = -c_1z; \\ a_2x + b_2y = -c_2z. \end{aligned}$$

Имеем по формулам (11) § 119

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{z\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \qquad (47)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z. \qquad (48)$$

Здесь z можно задавать произвольные значения.
Обозначим:

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = k. \qquad (49)$$

Тогда из равенств (47), (48), (49) находим:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \; y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \; z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (50)$$

В этих равенствах k можно придавать произвольные значения. Таким образом, x, y и z пропорциональны числам $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Заметим, что эти определители можно получить из таблицы коэффициентов заданных уравнений

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

поочередным вычеркиванием столбца коэффициентов определяемой неизвестной (причем при вычеркивании среднего столбца надо еще столбцы переставить).

Пример.
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0; \\ x + 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

$$x = k\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7k; \quad y = k\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot k; \quad z = k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5k.$$

Придавая букве k значения 1; 2; -1; 0,5, ... получим ряд решений:

x	7	14	-7	3,5
y	-1	-2	1	$-0,5$
z	5	10	-5	2,5

(Проверьте одно из этих решений подстановкой в заданные уравнения.)

§ 125. Понятие об определителях любого порядка. Кроме определителей второго и третьего порядка рассматривают также определители четвертого, пятого и т. д., вообще n-го порядка (эти определители применяются при решении систем уравнений с четырьмя и большим числом неизвестных). Определитель четвертого порядка можно определить как сумму произведений элементов первой строки, взятых с чередующимися знаками, на их миноры (первый элемент первой строки берется со знаком плюс). Вычисление определителя четвертого порядка сведется, таким образом, к вычислению определителей третьего порядка. Аналогично определяется определитель n-го порядка. Все доказанные свойства определителей третьего порядка имеют место и для определителей n-го порядка.

Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными (т. е. определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных) не равен нулю, то правило нахождения каждой неизвестной то же, что и при решении системы трех уравнений с тремя неизвестными [§ 121, формула (38)] и доказывается аналогично.

Гуревич Авигдор Беркович
(Виктор Борисович)
и Минорский Василий Павлович.
Учебник аналитической геометрии для втузов.

Редакторы: *Р. Я. Шостак* и *В. А. Солодков.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *Е. Б. Синцарева.*

*

Сдано в набор 5/IV 1958 г. Подписано к печати 1/VII 1958 г. Бумага $60 \times 92^1/_{16}$. Физ. печ. л. 10,25. Условн. печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 10,08. Тираж 35 000 экз. Т-03983. Цена книги 4 р. Заказ № 1746.

*

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

*

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.