Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

КУРС ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для университетов

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *А. З. Рывкин* Техн. редактор *М. С. Бондарев*

Подписано к печати 25/VII 1947 г. 04475 Печ. л. 29. Авт. л. 29,6. Уч.-изд. л. 30,75. Тип. зн. в печ. л. 43 000. Тираж 15 000 экз. Цена 11 руб. Переплёт 1 руб. Зак. № 6999.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР, Москва, Валовая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Теория деформации.

ГЛАВА II.

Анализ напряжённого состояния.

ГЛАВА III.

Связь между напряжённым состоянием и деформацией.

ГЛАВА IV.

Уравнения упругого равновесия и движения.

ГЛАВА V.

Уравнения упругого равновесия и движения в криволинейных координатах.

ГЛАВА VI.

Упругое равновесие шара.

ГЛАВА VII.

Проблемы Буссинеска и Герца.

ГЛАВА VIII.

Плоская задача и осесимметричная деформация.

ГЛАВА IX.

Кручение.

ГЛАВА X.

Изгиб призматических стержней.

ГЛАВА XI.

Общие теоремы теории упругости.

ГЛАВА XII.

Температурные напряжения.

ГЛАВА XIII.

Теория изгиба пластинок.

ГЛАВА XIV.

Уравнения пластической деформации.

ГЛАВА XV.

Упругие волны.

ГЛАВА XVI.

Приближённые методы решения, основанные на вариационных уравнениях.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемый вниманию читателей «краткий курс теории упругости» составлен на основе лекций, читанных мною в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. Эти лекции имеют своею целью сообщить студентам только основные сведения по теории упругости, так как более глубокое изучение отдельных вопросов является задачей специальных курсов, читаемых на последующих семестрах. Поэтому такие вопросы, как теория оболочек, теория пластинок и тонких стержней, теория пластичности и нелинейная теория упругости не затронуты в настоящем курсе совсем, а о плоской задаче и об упругих волнах даны только общие представления. Желающих подробнее ознакомиться с этими вопросами мы отсылаем к капитальному курсу А. Лява, Математическая теория упругости (перевод с английского, ОНТИ, Москва, 1935), а также к работам Г. В. Колосова, Комплексная переменная и её приложение к плоской задаче теории упругости (ОНТИ, Ленинград, 1936) и академика Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи теории упругости (изд. Ак. Наук СССР, Москва, 1938).

В настоящее время тензорный метод изложения получил в механике и математической физике широкое распространение. Однако, чтобы сделать изложение доступным для возможно более широких кругов читателей, мы сочли возможным отказаться от пользования этим методом в настоящем курсе. С приложением этого метода к теории упругости можно ознакомиться в упомянутой выше книге академика Н. И. Мусхелишвили.

За помощь при издании книги автор приносит благодарность своим ученикам: Н. В. Зволинскому (написавшему § 16 главы VIII), А. А. Пылакиной и Т. А. Тарасовой.

Автор сознаёт, что в его изложении возможны многие дефекты и обращается к читателям с просьбой направлять ему свои отзывы и замечания.

Л. С. Лейбензон

Москва, апрель, 1941 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

В настоящем издании добавлены три новые главы: глава XIII «Теория изгиба пластинок», глава XIV «Уравнения пластической деформации» и глава XVI «Приближённые методы решения, основанные на вариационных уравнениях». Кроме того, внесён ряд изменений и дополнений в некоторые другие главы. Нелинейная теория упругости не рассматривается в данном курсе, так как, по нашему мнению, все предложенные теории несостоятельны, и вопрос этот требует новых исследований. Желающих ознакомиться с вопросами конечных деформаций отсылаем к книге I. S. Sokolnikoff, «Mathematical Theory of elosticity», вышедшее в 1946 г. В связи с увеличением объёма книги несколько изменено её название.

Автор приносит глубокую благодарность своей ученице И. М. Краевской, оказавшей весьма ценную помощь при составлении новых глав и пересмотре текста.

Л. С. Лейбензон

Москва, июнь, 1946 г.

ГЛАВА I.

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ.

§ 1. Перемещение.

Под действием приложенных сил или при изменении теплового состояния изменяются расстояния между частицами твёрдого тела. Это явление составляет деформацию твёрдого тела. Отнесём его к прямоугольным осям x, y, z. Возьмём произвольную точку M тела, координаты которой до деформации обозначим через x, y, z. После деформации эта точка займёт положение M_1, и её новые координаты обозначим через x_1, y_1, z_1. Вектор MM_1 представляет перемещение точки M при деформации. Его проекции на оси x, y, z обозначим соответственно через u, v, w. Тогда имеем очевидные соотношения:

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w. \tag{1.1}$$

Если твёрдое тело совершает поступательное, или вращательное движение, или оба движения вместе так, что расстояния между его точками не изменяются, то твёрдое тело не подвергается деформации. В случае малого вращения мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u &= a + qz - ry, \\ v &= b + rx - pz, \\ w &= c + py - qx, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где a, b, c — составляющие поступательного перемещения p, q, r — составляющие малого вращения абсолютно твёрдого тела. В дальнейшем мы будем рассматривать такие перемещения твёрдого тела, при которых расстояния между частицами тела будут изменяться, причём составляющими этих перемещений будут величины u, v, w, введённые формулами (1.1). Перемещения u, v, w будут меняться при переходе от одной точки тела к другой и являются функциями координат точки:

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \tag{1.3}$$

Если деформируемое тело при деформации не получает разрывов, то эти функции будут непрерывными, и мы будем также предполагать непрерывность частных производных этих функций.

§ 2. Однородная деформация.

Для исследования происходящей в теле деформации возьмём весьма близкую к M точку N, координаты которой до деформации:

$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz, \tag{1.4}$$

так что расстояние между точками M и N до деформации равно:

$$r=MN=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \tag{1.5}$$

После деформации точка N переместится в положение N_1, и её новые координаты будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1+dx_1&=x+dx+u_1,\\ y_1+dy_1&=y+dy+v_1,\\ z_1+dz_1&=z+dz+w_1, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где u_1, v_1, w_1 суть смещения точки N. Они будут функциями её координат (1.4). Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} u_1&=u\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz),\\ v_1&=v\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz),\\ w_1&=w\,(x+dx,\ y+dy,\ z+dz). \end{aligned}$$

Разлагая в ряд Тейлора и ограничиваясь малыми первого порядка относительно весьма малых приращений координат dx, dy, dz, имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_1&=u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\\ v_1&=v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\\ w_1&=w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Перемещения точки N относительно M выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u&=u_1-u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\\ \Delta v&=v_1-v=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\\ \Delta w&=w_1-w=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

В этих формулах dx, dy, dz являются относительными координатами N, если точка M принята за начало отсчёта; также Δu, Δv, Δw будут относительными перемещениями точки N при той же системе отсчёта.

Из формул (1.8) мы видим, что относительные упругие смещения являются линейными функциями относительных координат. Такая деформация называется *однородной* деформацией. Следовательно, деформацию малого элемента упругого тела можно рассматривать как однородную.

§ 3. Компоненты малой деформации.

При деформации изменяются расстояния между точками упругого тела, т. е. длины линейных элементов и углы между исходящими из одной точки линейными элементами. За меру удлинения линейного элемента MN принимают увеличение единицы длины его, т. е. отношение приращения длины элемента:

$$\Delta MN = M_1N_1 - MN \tag{1.9}$$

к первоначальной длине MN. Это *относительное* удлинение будем обозначать:

$$e = \frac{\Delta MN}{MN}. \tag{1.10}$$

Пусть первоначально элемент MN был расположен параллельно оси x (фиг. 1). В этом случае при вычислении по формулам (1.8) мы должны положить $dy = dz = 0$, что даёт:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx; \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx; \quad \Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx;$$

поэтому проекции вектора M_1N_1 на оси координат суть:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\,dx, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\,dx.$$

Следовательно имеем:

$$M_1N_1 = dx\,\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\,;$$

если ограничиться малыми смещениями, т. е. предположить, что длина рассматриваемого элемента не изменяется от перемещения его концов в направлении осей Oy, Oz, то, пренебрегая под радикалом вторым и третьим квадратами, получим:

$$M_1N_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx.$$

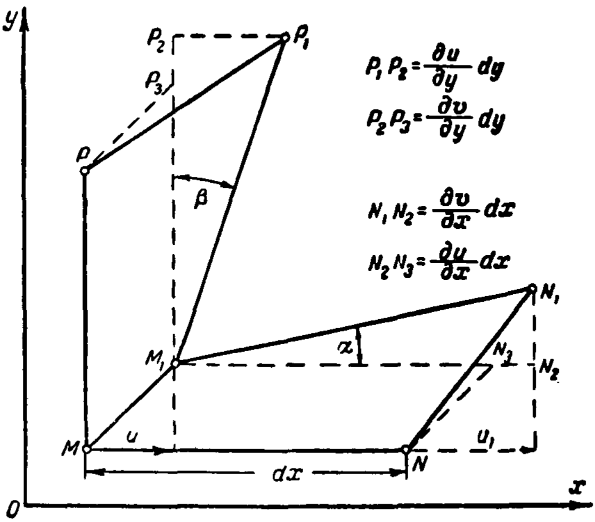
Внося это в (1.10) и вводя обычное обозначение, получим относительное удлинение линейного элемента, параллельного оси x:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

аналогично получим относительные удлинения линейных элементов, параллельных осям y и z:

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Определим теперь угол α, на который повернётся элемент MN, когда он перейдёт в положение M_1N_1. По приведённым



Фиг. 1.

выше соображениям на него не влияют перемещения в направлении осей x или z. Из фиг. 1 имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha = \frac{N_1N_2}{M_1N_2}.$$

Но при принятой точности имеем:

$$N_1N_2 = \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad M_1N_2 = dx;$$

отсюда получим:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если же элемент MN первоначально занимает положение MP, параллельное оси y, то угол его поворота β в положение M_1P_1 будет:

$$\operatorname{tg}\beta=\beta=\frac{P_1P_2}{M_1P_2}.$$

Но при принятой точности имеем:

$$P_1P_2=\frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad M_1P_2=dy;$$

отсюда:

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, прямой угол между линейными элементами MN и MP, параллельными до деформации осям x, y, после деформации уменьшается на сумму углов

$$\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Эту деформацию скошения прямого угла называют *сдвигом* и обозначают e_{xy}, так что имеем:

$$e_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Также имеем скошения прямых углов между осями x и z:

$$e_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},$$

между осями y и z:

$$e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Мы получили 6 основных величин, характеризующих деформацию:

1) три относительных удлинения линейных элементов, параллельных осям координат:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1.11}$$

2) три скошения прямых углов между координатными осями (сдвиги):

$$\left.\begin{aligned} e_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}, \\ e_{xz}&=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \\ e_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Величины e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} называются компонентами малой деформации.

§ 4. Компоненты конечной деформации.

Обозначим первоначальную длину элемента MN через ds, длину его после деформации через ds_1:

$$MN = ds, \quad M_1N_1 = ds_1. \tag{1.13}$$

Обозначим косинусы углов элемента MN с прямоугольными осями x, y, z через:

$$l = \frac{dx}{ds}, \quad m = \frac{dy}{ds}, \quad n = \frac{dz}{ds}, \tag{1.14}$$

а косинусы углов деформированного элемента M_1N_1 с теми же осями через:

$$l_1 = \frac{dx_1}{ds_1}, \quad m_1 = \frac{dy_1}{ds_1}, \quad n_1 = \frac{dz_1}{ds_1}. \tag{1.15}$$

Из формул (1.6), (1.1) и (1.8) имеем:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dy_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dz_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

При рассмотрении конечных деформаций важно различать, принимаем ли мы за независимые переменные координаты точки до или после деформации.

В этом параграфе за независимые переменные приняты координаты начального состояния. Внося (1.16) в (1.15) и применяя (1.14), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right] \frac{ds}{ds_1}, \\ m_1 &= \left[\frac{\partial v}{\partial x} l + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n\right] \frac{ds}{ds_1}, \\ n_1 &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) n\right] \frac{ds}{ds_1}. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Внося значения (1.17) в известное соотношение

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \tag{1.18}$$

мы получим:

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = (1 + 2\varepsilon_{xx})\, l^2 + (1 + 2\varepsilon_{yy})\, m^2 + (1 + 2\varepsilon_{zz})\, n^2 + \\ + 2\varepsilon_{xy} lm + 2\varepsilon_{xz} ln + 2\varepsilon_{yz} mn, \tag{1.19}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right],\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},\\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x},\\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

Равенство (1.19) можно на основании известной формулы $l^2+m^2+n^2=1$ представить в виде:

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + 2\left[\varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{xz}ln + \varepsilon_{yz}mn\right]. \quad (1.21)$$

Если e есть относительное удлинение линейного элемента $MN = ds$, то, согласно (1.10) и (1.13), имеем:

$$e = \frac{ds_1}{ds} - 1. \quad (1.22)$$

Из (1.22) и (1.21) имеем соотношение:

$$e(2+e) = 2f(l,\ m,\ n), \quad (1.23)$$

где:

$$f(l,\ m,\ n) = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{xz}ln + \varepsilon_{yz}mn. \quad (1.24)$$

Если линейный элемент MN параллелен оси x, то, очевидно:

$$l = 1, \quad m = n = 0,$$

и формула (1.24) примет вид:

$$f = \varepsilon_{xx}.$$

Подставляя полученное значение f в формулу (1.23), мы получим:

$$e^2 + 2e = 2\varepsilon_{xx},$$

откуда:

$$e = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1.$$

Следовательно, относительные удлинения линейных элементов, параллельных осям координат до деформации, даны формулами:

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}-1, \\ e_y &= \sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}-1, \\ e_z &= \sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}-1. \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

Из формулы (1.23) мы имеем:

$$e=\sqrt{1+2f}-1; \tag{1.26}$$

отсюда следует, что знание шести величин

$$\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{xz}, \quad \varepsilon_{yz}, \tag{1.27}$$

определяемых формулами (1.20), позволяет вычислить относительное удлинение любого линейного элемента, исходящего из данной точки, для которого должны быть заданы значения косинусов l, m, n. Поэтому шесть величин (1.27), данные формулами (1.20), являются компонентами конечной деформации.

В случае малой деформации частные производные упругих перемещений u, v, w по координатам суть малые величины, и, пренебрегая их квадратами и произведениями, мы получим из (1.20) в силу формул (1.11) и (1.12):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_{xx}, & \varepsilon_{yy} &= e_{yy}, & \varepsilon_{zz} &= e_{zz}, \\ \varepsilon_{xy} &= e_{xy}, & \varepsilon_{xz} &= e_{xz}, & \varepsilon_{yz} &= e_{yz}. \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

Шесть компонентов конечной деформации (1.27) в случае малой деформации совпадают с шестью компонентами малой деформации (1.11) и (1.12).

§ 5. Изменение угла между линейными элементами при деформации.

Пусть из точки M исходит элемент MN, определяемый косинусами l, m, n, и элемент MP, определяемый косинусами l', m', n'. Элемент MN получит относительное удлинение e, так что его новая длина будет:

$$M'N' = MN(1+e);$$

косинусы углов элемента $M'N'$ с прямоугольными осями x, y, z, согласно (1.17), будут иметь выражения:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right]\frac{1}{(1+e)}, \\ m_1 &= \left[\frac{\partial v}{\partial x} l + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \frac{\partial v}{\partial z} n\right]\frac{1}{(1+e)}, \\ n_1 &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) n\right]\frac{1}{(1+e)}. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Аналогично для косинусов углов элемента $M'P'$ с прямоугольными осями x, y, z получим выражения:

$$\left.\begin{aligned} l'_1 &= \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) l' + \frac{\partial u}{\partial y} m' + \frac{\partial u}{\partial z} n'\right] \frac{1}{(1+e')}, \\ m'_1 &= \left[\frac{\partial v}{\partial x} l' + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) m' + \frac{\partial v}{\partial z} n'\right] \frac{1}{(1+e')}, \\ n'_1 &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} l' + \frac{\partial w}{\partial y} m' + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) n'\right] \frac{1}{(1+e')}. \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

Угол θ между линейными элементами MN и MP будет дан формулой:

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn'. \tag{1.31}$$

Угол θ' между линейными элементами $M'N'$ и $M'P'$ будет дан формулой:

$$\cos\theta' = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1. \tag{1.32}$$

Внося (1.29) и (1.30) в (1.32) и используя формулы (1.20), мы получим вследствие (1.31):

$$\begin{aligned} \cos\theta' = \frac{1}{(1+e)(1+e')} [\cos\theta + 2(\varepsilon_{xx} ll' + \varepsilon_{yy} mm' + \varepsilon_{zz} nn') + \\ + \varepsilon_{yz}(mn' + m'n) + \varepsilon_{zx}(nl' + n'l) + \varepsilon_{xy}(lm' + l'm)]. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Если элемент MN параллелен оси x, то:

$$l=1, \quad m=0, \quad n=0, \quad e=\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}-1. \tag{1.34}$$

Если элемент MP параллелен оси y, то:

$$l'=0, \quad m'=1, \quad n'=0, \quad e'=\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}-1. \tag{1.35}$$

Внося (1.34) и (1.35) в формулу (1.33), мы получим для нового значения угла между элементами выражение ($\cos\theta=0$):

$$\cos\theta' \cdot \sqrt{(1+2\varepsilon_{xx})(1+2\varepsilon_{yy})} = \varepsilon_{xy}, \tag{1.36}$$

где θ' есть новый угол между элементами, проведёнными до деформации из точки M параллельно осям x и y; $\cos\theta'$ характеризует изменение прямого угла между этими осями.

Таким же способом получим:

$$\cos\theta'' \cdot \sqrt{(1+2\varepsilon_{xx})(1+2\varepsilon_{zz})} = \varepsilon_{xz}, \tag{1.37}$$

где θ'' есть новый угол между элементами, проведёнными до деформации из точки M параллельно осям x и z; $\cos\theta''$ характеризует изменение прямого угла между этими осями. Также получим:

$$\cos\theta''' \cdot \sqrt{(1+2\varepsilon_{yy})(1+2\varepsilon_{zz})} = \varepsilon_{yz}, \tag{1.38}$$

где θ''' есть новый угол между линейными элементами, проведёнными до деформации из точки M параллельно осям y и z; $\cos\theta'''$ характеризует изменение прямого угла между этими осями.

Формулы (1.36), (1.37) и (1.38) дают геометрическую интерпретацию трёх компонентов деформации ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}.

В случае малой деформации в силу (1.28) мы получим (пренебрегая величинами 2-го порядка):

$$\cos\theta' = e_{xy}; \quad \cos\theta'' = e_{xz}; \quad \cos\theta''' = e_{yz}.$$

Определим теперь углы поворота тех линейных элементов, которые до деформации были параллельны осям координат. Если линейный элемент до деформации был параллелен оси x, то для него, очевидно, имеем:

$$l=1, \quad m=0, \quad n=0.$$

После деформации этот линейный элемент dx уже не будет более параллелен оси x, и косинусы углов его с осями x, y, z обозначим через l', m', n'. При деформации этот линейный элемент изменит свою длину, его относительное удлинение будет e_x, определяемое по (1.25). Тогда, обозначая новую длину рассматриваемого элемента через ds_x, имеем:

$$ds_x = (1+e_x)\,dx.$$

Из формул (1.29) будем иметь:

$$l' = \frac{1+\frac{\partial u}{\partial x}}{1+e_x}, \quad m' = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+e_x}, \quad n' = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1+e_x}. \tag{1.39}$$

Параллельный оси y линейный элемент dy после деформации преобразуется в линейный элемент ds_y, причём:

$$ds_y = (1+e_y)\,dy;$$

здесь e_y определяется по формуле (1.25). Косинусы l'', m'', n'' его углов с осями x, y, z будут определяться по формулам (1.29), в которых надо положить:

$$l=0, \quad m=1, \quad n=0, \quad e=e_y,$$

что даёт:

$$l'' = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1+e_y}, \quad m'' = \frac{1+\frac{\partial v}{\partial y}}{1+e_y}, \quad n'' = \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1+e_y}. \tag{1.40}$$

Наконец, параллельный оси z линейный элемент dz после деформации преобразуется в линейный элемент ds_z, причём косинусы l''', m''', n''' его углов с осями x, y, z вычисляются подобным образом и будут иметь следующие выражения:

$$l''' = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1+e_z}, \quad m''' = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{1+e_z}, \quad n''' = \frac{1+\frac{\partial w}{\partial z}}{1+e_z}. \tag{1.41}$$

В случае малой деформации надо в формулах (1.39)—(1.41) положить:

$$e_x = e_y = e_z = 0.$$

Три деформированных элемента ds_x, ds_y, ds_z образуют неортогональную систему, для которой косинусы углов с прямоугольными осями x, y, z даны на прилагаемой схеме 1.

Схема 1

	x	y	z
x'	l'	m'	n'
y'	l''	m''	n''
z'	l'''	m'''	n'''

§ 6. Поверхность деформаций.

В случае малой деформации вследствие формул (1.28) мы можем представить функцию f, определённую формулой (1.24), в виде:

$$f(l, m, n) = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{xy}lm + e_{xz}ln + e_{yz}mn. \tag{1.42}$$

Так как величина относительного удлинения e есть величина малая, то, пренебрегая e^2 в формуле (1.23), мы получим важную формулу

$$e = f(l, m, n) \tag{1.43}$$

для относительного удлинения любого линейного отрезка, исходящего из точки M. Знание шести компонентов деформации

$$e_{xx}, \; e_{yy}, \; e_{zz}, \; e_{xy}, \; e_{xz}, \; e_{yz}, \tag{1.44}$$

данных формулами (1.11) и (1.12), позволяет вычислить удлинение любого элемента, исходящего из данной точки.

Шесть величин компонентов деформации (1.44) для данной точки M суть данные числа, но они меняются от одной точки деформированного тела к другой и являются функциями координат x, y, z. Пользуясь формулой (1.43), легко дать геометрическую картину для изменения относительного удлинения e в зависимости от направления.

Будем откладывать из точки M, которую примем за начало координат, по направлению каждого линейного элемента MN отрезок r, длина которого обратно пропорциональна корню квадратному из абсолютного значения соответствующего относительного удлинения e; тогда:

$$r=\frac{k}{\sqrt{|e|}} \tag{1.45}$$

(k — константа). Координаты конца этого отрезка будут:

$$x=lr, \quad y=mr, \quad z=nr. \tag{1.46}$$

Возводя (1.45) в квадрат, имеем:

$$er^2=\pm k^2. \tag{1.47}$$

Внося сюда e по формуле (1.43), мы получим:

$$r^2f(l, m, n)=\pm k^2;$$

подставляя теперь f по формуле (1.42), мы получим на основании (1.46):

$$f(x, y, z)=e_{xx}x^2+e_{yy}y^2+e_{zz}z^2+ \\ +e_{xy}xy+e_{xz}xz+e_{yz}yz=\pm k^2. \tag{1.48}$$

Таким образом, концы всех откладываемых нами отрезков расположатся на поверхности второго порядка, определяемой уравнением (1.48). Эта поверхность называется *поверхностью деформации*. Поверхность эта есть центральная поверхность второго порядка. Если она — эллипсоид, то все линейные элементы испытывают растяжение. Если же она есть гиперболоид, то мы будем иметь одни линейные элементы растянутыми, между тем как другие, соответствующие сопряжённому гиперболоиду, будут сжатыми. Отделяющий обе сопряжённые поверхности асимптотический конус соответствует тем линейным элементам, для которых относительное удлинение равно нулю, т. е. которые сохраняют свою первоначальную длину.

Как известно, мы можем всегда выбрать такое направление осей координат, чтобы члены уравнения (1.48), заключающие произведения координат, исчезли. Для такого направления осей:

$$e_{xy}=e_{xz}=e_{yz}=0, \tag{1.49}$$

т. е. углы между этими осями при деформации не меняются.

Направления, соответствующие этим осям, называются *главными направлениями деформации*, а соответствующие им относительные удлинения называются *главными относительными удлинениями.* Обозначим их через e_1, e_2, e_3 и примем главные направления деформации за координатные оси; тогда поверхность деформации определится уравнением:

$$e_1x^2+e_2y^2+e_3z^2=\pm k^2. \qquad (1.50)$$

Из построения следует, что главные относительные удлинения обратно пропорциональны квадратам полуосей поверхности второго порядка. Эти же оси обладают экстремальными свойствами. Поэтому для определения величин главных относительных удлинений из формулы (1.43) надо искать экстремум функции $f(l, m, n)$, причём l, m, n связаны известным соотношением:

$$l^2+m^2+n^2-1=0. \qquad (1.51)$$

Если λ есть неопределённый множитель Лагранжа, то мы должны искать экстремум функции:

$$F=f(l, m, n)-\lambda(l^2+m^2+n^2),$$

что приводит к трём однородным линейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l}&=2(e_{xx}-\lambda)l+e_{xy}m+e_{xz}n=0,\\ \frac{\partial F}{\partial m}&=e_{xy}l+2(e_{yy}-\lambda)m+e_{yz}n=0,\\ \frac{\partial F}{\partial n}&=e_{xz}l+e_{yz}m+2(e_{zz}-\lambda)n=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.52)$$

Эта система имеет решения, отличные от нуля, только при условии:

$$\begin{vmatrix} 2(e_{xx}-\lambda) & e_{xy} & e_{xz}\\ e_{xy} & 2(e_{yy}-\lambda) & e_{yz}\\ e_{xz} & e_{yz} & 2(e_{zz}-\lambda) \end{vmatrix}=0. \qquad (1.53)$$

Корни этого уравнения третьей степени относительно λ действительны и представляют собой главные удлинения. Обозначив их через λ_1, λ_2, λ_3, мы подставим их поочерёдно в (1.52) и найдём соответствующие значения косинусов, определяющих направления главных деформаций в данной точке:

$$l_1,\ m_1,\ n_1;\ l_2,\ m_2,\ n_2;\ l_3,\ m_3,\ n_3.$$

Если уравнения (1.52) помножим последовательно на l, m, n, а затем сложим, то получим вследствие (1.51):

$$2[e_{xx}l^2+e_{yy}m^2+e_{zz}n^2+e_{xy}lm+e_{xz}ln+e_{yz}mn]=\\ =2\lambda(l^2+m^2+n^2)=2\lambda.$$

Поэтому для тех значений l, m, n, которые определяются из уравнений (1.52) и (1.51), мы имеем, сравнивая с (1.43):

$$\lambda = e.$$

§ 7. Взаимный эллипсоид деформаций.

Из формул (1.19) и (1.22) мы имеем:

$$(1+e)^2 = (1+2\varepsilon_{xx})\,l^2 + (1+2\varepsilon_{yy})\,m^2 + \\ + (1+2\varepsilon_{zz})\,n^2 + 2\varepsilon_{xy}lm + 2\varepsilon_{xz}ln + 2\varepsilon_{yz}mn. \quad (1.54)$$

Из данной точки M, как из начала, будем откладывать по направлению каждого линейного элемента MN отрезок r, длина которого обратно пропорциональна отношению $\frac{ds_1}{ds} = 1 + e$; тогда имеем:

$$r = \frac{k}{1+e} \quad (1.55)$$

(k — константа). Координаты конца этого отрезка будут:

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr. \quad (1.56)$$

Возводя (1.55) в квадрат, мы получим:

$$r^2 (1+e)^2 = k^2;$$

отсюда, согласно формулам (1.54) и (1.56), имеем:

$$F_1(x, y, z) = (1+2\varepsilon_{xx})\,x^2 + (1+2\varepsilon_{yy})\,y^2 + \\ + (1+2\varepsilon_{zz})\,z^2 + 2\varepsilon_{xy}xy + 2\varepsilon_{xz}xz + 2\varepsilon_{yz}yz = k^2. \quad (1.57)$$

Таким образом, концы всех откладываемых нами отрезков лежат на поверхности второго порядка, данной уравнением (1.57). Эта поверхность, очевидно, есть *эллипсоид*, называемый *взаимным эллипсоидом деформаций*. Его главные оси оказываются главными осями деформаций. Это следует из того, что уравнение (1.57) можно представить в виде:

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2f(x, y, z),$$

где $f(x, y, z)$ дано уравнением (1.48). Очевидно, что одним и тем же преобразованием осей можно уничтожить члены с произведением координат в обеих поверхностях:

$$F_1 = 0 \quad \text{и} \quad f = 0.$$

Следовательно, оси обеих поверхностей $F_1 = 0$ и $f = 0$ будут совпадать по направлению.

§ 8. Эллипсоид деформаций.

Решая систему (1.29) относительно l, m, n, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{l}{(1+e)}&=a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1,\\ \frac{m}{(1+e)}&=a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1,\\ \frac{n}{(1+e)}&=a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1,\end{aligned}\right\} \qquad (1.58)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, ..., a_{33} зависят только от

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Используя известное соотношение $l^2+m^2+n^2=1$, мы имеем из (1.58):

$$\frac{1}{(1+e)^2}=(a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1)^2+\\ +(a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1)^2+(a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1)^2. \qquad (1.59)$$

Из данной точки M, как из начала, будем откладывать по направлению каждого линейного элемента MN отрезок r, длина которого прямо пропорциональна отношению:

$$\frac{ds_1}{ds}=1+e;$$

тогда имеем:

$$r=k(1+e) \qquad (1.60)$$

(k — константа). Координаты конца этого отрезка будут:

$$x=l_1r;\ y=m_1r;\ z=n_1r. \qquad (1.61)$$

Возведя (1.60) в квадрат и используя (1.59) и (1.61), мы получим:

$$F_2(x,\ y,\ z)=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2+\\ +(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2=k^2. \qquad (1.62)$$

Таким образом, концы всех откладываемых нами отрезков лежат на поверхности второго порядка, данной уравнением (1.62). Эта поверхность есть эллипсоид, называемый *эллипсоидом деформаций.*

Длина главных осей эллипсоида деформаций и взаимного эллипсоида деформаций обратны друг другу, так что в отношении формы эти эллипсоиды являются взаимными, но *направления их главных осей не совпадают друг с другом.*

§ 9. Чистая деформация и элементарное вращение.

При исследовании деформации элементарного объёма примем M в его центре и воспользуемся формулами (1.8) для величин относительных перемещений точки $N(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta,\\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta,\\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{1.63}$$

Кроме введённых ранее обозначений (1.11) и (1.12) вводим новые:

$$\left.\begin{aligned}2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

Тогда (1.63) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \omega_y\zeta - \omega_z\eta + e_{xx}\xi + \frac{1}{2}e_{xy}\eta + \frac{1}{2}e_{xz}\zeta,\\ \Delta v &= \omega_z\xi - \omega_x\zeta + \frac{1}{2}e_{xy}\xi + e_{yy}\eta + \frac{1}{2}e_{yz}\zeta,\\ \Delta w &= \omega_x\eta - \omega_y\xi + \frac{1}{2}e_{xz}\xi + \frac{1}{2}e_{yz}\eta + e_{zz}\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

Если ввести функцию $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, определяемую уравнением

$$2\varphi(\xi, \eta, \zeta) = e_{xx}\xi^2 + e_{yy}\eta^2 + e_{zz}\zeta^2 + e_{xy}\xi\eta + e_{xz}\xi\zeta + e_{yz}\eta\zeta, \tag{1.66}$$

то формулы (1.65) можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \omega_y\zeta - \omega_z\eta,\\ \Delta v &= \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \omega_z\xi - \omega_x\zeta,\\ \Delta w &= \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \omega_x\eta - \omega_y\xi.\end{aligned}\right\} \tag{1.67}$$

Следовательно, относительное перемещение точки N около M есть результат сложения:

1) Перемещения с компонентами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta},$$

называемого чистой деформацией. Это перемещение происходит по направлению нормали к поверхности:

$$\varphi = \text{const}. \tag{1.68}$$

[из сравнения (1.66) с (1.48) следует, что это есть поверхность деформаций].

2) Перемещения с компонентами

$$\omega_y\zeta - \omega_z\eta, \quad \omega_z\xi - \omega_x\zeta, \quad \omega_x\eta - \omega_y\xi,$$

представляющего перемещение при вращении рассматриваемого элементарного объёма как абсолютно твёрдого тела, причём ω_x, ω_y, ω_z суть составляющие элементарного вращения.

Если элементарные вращения отсутствуют, т. е. всюду в рассматриваемом упругом теле имеются соотношения:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.69}$$

то рассматриваемая деформация будет потенциальной деформацией в том смысле, что компоненты упругого перемещения u, v, w будут частными производными одной функции координат $\Phi(x, y, z)$:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{1.70}$$

§ 10. Формулы преобразования компонентов деформации к новым осям координат.

Зная шесть компонентов деформации относительно одной системы прямоугольных осей координат, легко вычислить их для другой прямоугольной системы координат.

Положение новой системы x', y', z' определяется относительно старой с помощью 9 косинусов по известной схеме 2:

Схема 2

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Компоненты смещения относительно новых осей обозначим через u', v', w'.

1) Разберём сначала случай малых деформаций. Компоненты деформации относительно новых осей будут даны формулами:

$$e_{x'x'}=\frac{\partial u'}{\partial x'};\qquad e_{y'z'}=\frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'};$$
$$e_{y'y'}=\frac{\partial v'}{\partial y'};\qquad e_{z'x'}=\frac{\partial u'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial x'};$$
$$e_{z'z'}=\frac{\partial w'}{\partial z'};\qquad e_{x'y'}=\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial y'}.$$

Прежде всего имеем соотношения:

$$\left.\begin{aligned} u'&=ul_1+vm_1+wn_1,\\ v'&=ul_2+vm_2+wn_2,\\ w'&=ul_3+vm_3+wn_3.\end{aligned}\right\}\tag{1.71}$$

Далее, применяем известную формулу для дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\quad)=\frac{\partial}{\partial x}(\quad)\cos(s,\ x)+\frac{\partial}{\partial y}(\quad)\cos(s,\ y)+\\ +\frac{\partial}{\partial z}(\quad)\cos(s,\ z).\tag{1.72}$$

Поэтому имеем:

$$e_{x'x'}=\frac{\partial u'}{\partial x'}=\left(l_1\frac{\partial}{\partial x}+m_1\frac{\partial}{\partial y}+n_1\frac{\partial}{\partial z}\right)(l_1u+m_1v+n_1w)=\\ =l_1^2\frac{\partial u}{\partial x}+m_1^2\frac{\partial v}{\partial y}+n_1^2\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)m_1n_1+\\ +\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)n_1l_1+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)l_1m_1.$$

Отсюда на основании (1.11) и (1.12) получим важные формулы:

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'}&=l_1^2e_{xx}+m_1^2e_{yy}+n_1^2e_{zz}+m_1n_1e_{yz}+n_1l_1e_{zx}+l_1m_1e_{xy},\\ e_{y'y'}&=l_2^2e_{xx}+m_2^2e_{yy}+n_2^2e_{zz}+m_2n_2e_{yz}+n_2l_2e_{zx}+l_2m_2e_{xy},\\ e_{z'z'}&=l_3^2e_{xx}+m_3^2e_{yy}+n_3^2e_{zz}+m_3n_3e_{yz}+n_3l_3e_{zx}+l_3m_3e_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1.73}$$

(вторая и третья написаны по аналогии с первой). Далее, получаем:

$$e_{y'z'}=\frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'}=\left(l_2\frac{\partial}{\partial x}+m_2\frac{\partial}{\partial y}+n_2\frac{\partial}{\partial z}\right)(l_3u+m_3v+n_3w)+\\ +\left(l_3\frac{\partial}{\partial x}+m_3\frac{\partial}{\partial y}+n_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(l_2u+m_2v+n_2w)=\\ =2l_2l_3\frac{\partial u}{\partial x}+2m_2m_3\frac{\partial v}{\partial y}+2n_2n_3\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)(m_2n_3+m_3n_2)+\\ +\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)(n_2l_3+n_3l_2)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)(l_2m_3+l_3m_2).$$

Внося сюда выражения шести компонентов деформации, определяемые формулами (1.11) и (1.12), получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} e_{y'z'} &= 2[l_2 l_3 e_{xx} + m_2 m_3 e_{yy} + n_2 n_3 e_{zz}] + e_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \\ &\quad + e_{zx}(n_2 l_3 + n_3 l_2) + e_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2), \\ e_{z'x'} &= 2[l_1 l_3 e_{xx} + m_1 m_3 e_{yy} + n_1 n_3 e_{zz}] + e_{yz}(m_3 n_1 + m_1 n_3) + \\ &\quad + e_{zx}(n_3 l_1 + n_1 l_3) + e_{xy}(l_3 m_1 + l_1 m_3), \\ e_{x'y'} &= 2[l_1 l_2 e_{xx} + m_1 m_2 e_{yy} + n_1 n_2 e_{zz}] + e_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \\ &\quad + e_{zx}(n_1 l_2 + n_2 l_1) + e_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1); \end{aligned}\right\} \quad (1.74)$$

последние две формулы написаны по аналогии.

Складывая формулы (1.73), мы получим:

$$\begin{aligned} e_{x'x'} + e_{y'y'} + e_{z'z'} &= e_{xx}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + e_{yy}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + \\ &+ e_{zz}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + e_{yz}(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + \\ &+ e_{zx}(n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3) + e_{xy}(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3), \end{aligned}$$

что в силу известных нам соотношений

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1, & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, & n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, & m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 &= 0 \end{aligned}$$

даёт важную формулу:

$$e_{x'x'} + e_{y'y'} + e_{z'z'} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \quad (1.75)$$

Последнее равенство показывает, что сумма трёх относительных удлинений есть инвариант при преобразовании осей координат. Два других инварианта указанного преобразования суть:

$$e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx} + e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2),$$

$$e_{xx} e_{yy} e_{zz} + \frac{1}{4}[e_{yz} e_{zx} e_{xy} - e_{xx} e_{yz}^2 - e_{yy} e_{zx}^2 - e_{zz} e_{xy}^2].$$

2) Разберём теперь случай конечных деформаций. Уравнение (1.57) взаимного эллипсоида деформаций для новых осей x', y', z' имеет вид:

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon_{x'x'}) x'^2 + (1 + 2\varepsilon_{y'y'}) y'^2 + (1 + 2\varepsilon_{z'z'}) z'^2 + \\ + 2\varepsilon_{x'y'} x'y' + 2\varepsilon_{x'z'} x'z' + 2\varepsilon_{y'z'} y'z' = k^2. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Чтобы от уравнения (1.57) перейти к уравнению (1.76), надо сделать преобразование координат:

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \end{aligned}$$

что даёт:

$$(1+2\varepsilon_{xx})[l_1^2x'^2+l_2^2y'^2+l_3^2z'^2+2l_1l_2x'y'+2l_1l_3x'z'+2l_2l_3y'z']+\\+\ldots+2\varepsilon_{xy}[l_1m_1x'^2+l_2m_2y'^2+l_3m_3z'^2+(l_1m_2+l_2m_1)x'y'+\\+(l_1m_3+l_3m_1)x'z'+(l_2m_3+l_3m_2)y'z']+\ldots=k^2.$$

Сделав приведение, получим:

$$x'^2[(1+2\varepsilon_{xx})l_1^2+(1+2\varepsilon_{yy})m_1^2+(1+2\varepsilon_{zz})n_1^2+\\+2\varepsilon_{xy}l_1m_1+2\varepsilon_{xz}l_1n_1+2\varepsilon_{yz}m_1n_1]+\ldots+\\+2x'y'[(1+2\varepsilon_{xx})l_1l_2+(1+2\varepsilon_{yy})m_1m_2+\\+(1+2\varepsilon_{zz})n_1n_2+(l_1m_2+l_2m_1)\varepsilon_{xy}+(n_1l_2+n_2l_1)\varepsilon_{xz}+\\+(m_1n_2+m_2n_1)\varepsilon_{yz}]+\ldots=k^2.$$

Сравнивая это с (1.76) и принимая во внимание соотношения

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \text{ и т. д.},$$
$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \text{ и т. д.},$$

мы получим систему формул:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{x'x'}&=l_1^2\varepsilon_{xx}+m_1^2\varepsilon_{yy}+n_1^2\varepsilon_{zz}+m_1n_1\varepsilon_{yz}+n_1l_1\varepsilon_{zx}+l_1m_1\varepsilon_{xy},\\
\varepsilon_{y'y'}&=l_2^2\varepsilon_{xx}+m_2^2\varepsilon_{yy}+n_2^2\varepsilon_{zz}+m_2n_2\varepsilon_{yz}+n_2l_2\varepsilon_{zx}+l_2m_2\varepsilon_{xy},\\
\varepsilon_{z'z'}&=l_3^2\varepsilon_{xx}+m_3^2\varepsilon_{yy}+n_3^2\varepsilon_{zz}+m_3n_3\varepsilon_{yz}+n_3l_3\varepsilon_{zx}+l_3m_3\varepsilon_{xy},\\
\varepsilon_{y'z'}&=2[l_2l_3\varepsilon_{xx}+m_2m_3\varepsilon_{yy}+n_2n_3\varepsilon_{zz}]+\varepsilon_{yz}(m_2n_3+m_3n_2)+\\
&\qquad+\varepsilon_{zx}(n_2l_3+n_3l_2)+\varepsilon_{xy}(l_2m_3+l_3m_2),\\
\varepsilon_{z'x'}&=2[l_1l_3\varepsilon_{xx}+m_1m_3\varepsilon_{yy}+n_1n_3\varepsilon_{zz}]+\varepsilon_{yz}(m_3n_1+m_1n_3)+\\
&\qquad+\varepsilon_{zx}(n_3l_1+n_1l_3)+\varepsilon_{xy}(l_3m_1+l_1m_3),\\
\varepsilon_{x'y'}&=2[l_1l_2\varepsilon_{xx}+m_1m_2\varepsilon_{yy}+n_1n_2\varepsilon_{zz}]+\varepsilon_{yz}(m_1n_2+m_2n_1)+\\
&\qquad+\varepsilon_{zx}(n_1l_2+n_2l_1)+\varepsilon_{xy}(l_1m_2+l_2m_1).
\end{aligned}\right\} \quad (1.77)$$

Легко видеть, что в случае очень малой деформации вследствие формул (1.28) формулы (1.77) переходят в формулы (1.73) и (1.74), которые и прямо могли бы быть получены таким же приёмом.

При плоской деформации все перемещения происходят параллельно некоторой плоскости, которую примем за плоскость Oxy. Имеем:

$$u=u(x, y, t);\quad v=v(x, y, t);\quad w=0. \qquad (1.78)$$

Внося (1.78) в формулы (1.11) и (1.12), получим:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (1.79)$$

$$e_{zz}=e_{yz}=e_{xz}=0. \qquad (1.80)$$

Выражения компонентов деформации $e_{x'x'}$, $e_{y'y'}$, $e_{x'y'}$ относительно новых осей x', y' через компоненты деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} относительно старых осей x, y получаются при помощи формул (1.73) и (1.74). Обозначим угол между осями x и x' через α; тогда будем иметь:

$$\angle xx' = \alpha, \quad \angle x'y = 90^\circ - \alpha, \quad \angle xy' = 90^\circ + \alpha, \quad \angle yy' = \alpha$$

и значения девяти косинусов будут соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} &l_1 = \cos\alpha, && l_2 = -\sin\alpha, && l_3 = 0, \\ &m_1 = \sin\alpha, && m_2 = \cos\alpha, && m_3 = 0, \\ &n_1 = 0, && n_2 = 0, && n_3 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

Внося (1.79), (1.80) и (1.81) в формулы (1.73) и (1.74), мы получим *формулы преобразования для плоской деформации:*

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx}\cos^2\alpha + e_{yy}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}e_{xy}\sin 2\alpha, \\ e_{y'y'} &= e_{xx}\sin^2\alpha + e_{yy}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}e_{xy}\sin 2\alpha, \\ e_{x'y'} &= (e_{yy} - e_{xx})\sin 2\alpha + e_{xy}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.82}$$

§ 11. Относительное объёмное расширение при деформации.

На основании (1.75) мы имеем:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_1 + e_2 + e_3, \tag{1.83}$$

где e_1, e_2, e_3 суть главные относительные удлинения. Так как главные направления деформации суть три взаимно перпендикулярные оси, которые остаются при деформации взаимно перпендикулярными, то, выделив из рассматриваемого тела элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz, параллельными главным направлениям в данной точке M, мы получим после деформации снова прямоугольный параллелепипед с рёбрами:

$$(1 + e_1)\,dx, \quad (1 + e_2)\,dy, \quad (1 + e_3)\,dz.$$

Поэтому относительное приращение объёма в точке M будет:

$$\Delta = \frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau}, \tag{1.84}$$

где

$$\left.\begin{aligned} d\tau_1 &= (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3)\,dx\,dy\,dz, \\ d\tau &= dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{1.85}$$

Внося (1.85) в (1.84), получим:

$$\Delta = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) - 1; \tag{1.86}$$

так как e_1, e_2, e_3 суть малые величины, то с точностью до малых первого порядка мы имеем:

$$\Delta = e_1 + e_2 + e_3. \tag{1.87}$$

Сравнивая (1.83) и (1.87), мы получим *величину относительного объёмного расширения материала при малой деформации*:

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.88}$$

В случае конечной деформации выделим бесконечно малый элемент объёма $d\tau$, окружающий точку M, который при деформации преобразуется в элемент объёма $d\tau_1$, окружающий точку M_1. Пусть плотность до деформации в точке M была ρ, а после деформации она будет ρ_1. Так как масса элемента при деформации не меняется, то имеем:

$$\rho\, d\tau = \rho_1 d\tau_1. \tag{1.89}$$

Относительное объёмное расширение будет дано формулой (1.84). Из (1.84) и (1.89) получим:

$$\Delta = \frac{\rho}{\rho_1} - 1. \tag{1.90}$$

Но если V есть некоторый объём, окружающий точку M, то масса этого объёма будет:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho\, dx\, dy\, dz. \tag{1.91}$$

После деформации этот объём преобразуется в объём V_1, окружающий точку M_1, масса его сохранится и будет:

$$m = \iiint\limits_{(V_1)} \rho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \tag{1.92}$$

причём переход от координат x, y, z к координатам x_1, y_1, z_1 дан формулами (1.1). Если сделать переход от координат x_1, y_1, z_1 к координатам x, y, z, то получим:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho_1 D\, dx\, dy\, dz, \tag{1.93}$$

где:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{1.94}$$

Из (1.93) и (1.91) получим:

$$\iiint\limits_{(V)} (\rho_1 D - \rho)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

причём объёмный интеграл распространён на первоначальный объём V. Этот интеграл должен быть равен нулю, каков бы ни был объём V, а следовательно, имеем:

$$\rho_1 D - \rho = 0. \tag{1.95}$$

Из (1.90) и (1.95) получим:

$$\Delta = D - 1; \tag{1.96}$$

это и есть *относительное объёмное расширение материала при конечной деформации.*

При $u = v = w = 0$ имеем:

$$D = 1.$$

В случае очень малых деформаций, развёртывая детерминант D и ограничиваясь членами первого порядка, найдём:

$$D = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.97}$$

В этом случае, как следует из (1.96), имеем прежнюю формулу:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.98}$$

Относительное объёмное расширение характеризует всестороннюю объёмную деформацию. Ему соответствует среднее относительное удлинение, определяемое формулой:

$$e = \frac{1}{3}\Delta = \frac{1}{3}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}). \tag{1.99}$$

Деформацию, определяемую шестью компонентами:

$$\left.\begin{array}{lll} e_{xx} - e; & e_{yy} - e; & e_{zz} - e; \\ \frac{1}{2} e_{yz}; & \frac{1}{2} e_{xz}; & \frac{1}{2} e_{xy}, \end{array}\right\} \tag{1.100}$$

назовём *приведённой деформацией.*

§ 12. Дифференциальные зависимости Сен-Венана между компонентами деформации (тождества Сен-Венана).

В случае малой деформации мы имеем шесть основных формул Коши:

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.101}$$

$$e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1.102}$$

$$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1.103}$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.104}$$

$$e_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{1.105}$$

$$e_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1.106}$$

Из этого следует, что шесть компонентов малой деформации определяются через частные производные только трёх функций u, v, w от координат x, y, z. Поэтому шесть компонентов деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} не являются независимыми функциями от координат x, y, z, но между ними существуют дифференциальные зависимости, открытые Сен-Венаном. Один из простейших способов их получения есть способ последовательного исключения u, v, w.

Дифференцирование (1.104) по x и по y даёт:

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right);$$

отсюда на основании (1.101) и (1.102) получим:

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}.$$

Соответственно дифференцирование (1.105) по x и по z, а (1.106) по y и по z даёт:

$$\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial z}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial z^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\,\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}.$$

Таким образом, мы получили три дифференциальные зависимости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial e_{zz}}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z},\\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x\,\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1.107}$$

Чтобы получить вторую группу дифференциальных зависимостей, можно поступать аналогично. Дифференцируя (1.101) по y и по z, получим:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}.\tag{1.108}$$

Для выражения правой части (1.108) через производные компонентов деформации дифференцируем (1.104) по z, (1.105) по y, (1.106) по x:

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y},$$

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x},$$

отсюда получим:

$$-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}.\tag{1.109}$$

Сравнивая (1.108) и (1.109), получим:

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right],\\ 2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right],\\ 2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right],\end{aligned}\right\}\tag{1.110}$$

причём последние два соотношения выписаны по аналогии. Таким образом, мы получили шесть дифференциальных зависимостей (1.107) и (1.110) между компонентами малой деформации. Эти зависимости часто называют *тождествами Сен-Венана*. В том, что число их должно быть не более шести и что они именно такой формы, мы убедимся из § 13.

§ 13. Определение компонентов перемещения по заданным шести компонентам малой деформации.

Если заданы шесть компонентов малой деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}, то с помощью их можно определить три компонента элементарного вращения ω_x, ω_y, ω_z. Действительно, из трёх уравнений (1.64) и шести уравнений (1.101) — (1.106) мы можем получить следующую систему уравнений для девяти частных производных u, v, w по координатам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}e_{xy}-\omega_z;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}e_{zx}+\omega_y, \tag{1.111}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}e_{xy}+\omega_z;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy};\quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}e_{zy}-\omega_x, \tag{1.112}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2}e_{zx}-\omega_y;\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2}e_{zy}+\omega_x,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=e_{zz}. \tag{1.113}$$

Кроме того, мы имеем из (1.64) тождественное соотношение:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=0. \tag{1.114}$$

Вследствие того, что должны выполняться соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

мы получим для (1.111) следующие условия интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial \omega_z}{\partial x};\quad \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial x};\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \omega_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.115}$$

Это последнее сводится вследствие (1.114) к условию:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \omega_z}{\partial z}-\frac{\partial \omega_y}{\partial y}=\frac{\partial \omega_x}{\partial x}. \tag{1.116}$$

Аналогично из трёх уравнений (1.112) мы имеем как условия их интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \omega_z}{\partial y},\quad \frac{\partial e_{yy}}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial y}-\frac{\partial \omega_x}{\partial y},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.117}$$

Это последнее соотношение даёт вследствие (1.114):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \omega_x}{\partial x}-\frac{\partial \omega_z}{\partial z}=\frac{\partial \omega_y}{\partial y}, \tag{1.118}$$

а из трёх уравнений (1.113) мы имеем как условия их интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial e_{zz}}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.119}$$

Это последнее соотношение вследствие (1.114) даёт:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial z}. \tag{1.120}$$

В соотношениях (1.115), (1.117) и (1.119) мы должны заменить каждое последнее соотношение на (1.116), (1.118) и (1.120) и из полученных таким образом девяти соотношений мы получим выражения Бельтрами для девяти частных производных трёх компонентов элементарного вращения по координатам x, y, z, служащие для определения их по известным компонентам малой деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xz}, e_{yz}, e_{xy}:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yy}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} &= \frac{\partial e_{zz}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zy}}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{1.121}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zy}}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{1.122}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.123}$$

Следуя Бельтрами, определим условия интегрируемости этих трёх систем. Условия интегрируемости системы (1.121).

очевидно, будут:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y\,\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial z\,\partial x},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial z\,\partial y},$$

что можно привести к виду:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y\,\partial x}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial y\,\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.124)$$

Условия интегрируемости системы (1.122), очевидно, будут:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y},$$

что можно привести к виду:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z\,\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x},\\
2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.125)$$

Условия интегрируемости системы (1.123), очевидно, будут:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial e_{xy}}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right),$$

что можно привести к виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y},\\ 2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\ 2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.126}$$

Между девятью соотношениями (1.124), (1.125), (1.126) только шесть различных, и они совпадают с (1.107) и (1.110). Таким образом, выполнение дифференциальных зависимостей Сен-Венана обеспечивает возможность определения трёх компонентов смещения u, v, w по шести заданным компонентам малой деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}.

§ 14. Формулы Стокса для разложения произвольной малой деформации.

Стокс впервые показал, что три компонента смещения u, v, w можно представить в форме:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z},\\ v&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\\ w&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{1.127}$$

причём F, G, H удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0. \tag{1.128}$$

Прежде всего вычислим объёмное расширение Δ по (1.88):

$$\Delta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi, \tag{1.129}$$

где введено обычное обозначение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad)=\nabla^2(\quad). \tag{1.130}$$

Также найдём при том же обозначении:

$$2\omega_x=-\nabla^2 F,\quad 2\omega_y=-\nabla^2 G,\quad 2\omega_z=-\nabla^2 H. \tag{1.131}$$

Система уравнений (1.131) и (1.129) может быть решена с помощью теории потенциала при наличии некоторых весьма общих предположений.

ГЛАВА II.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ.

§ 15. Внешние силы.

Различают два вида внешних сил, действующих на деформируемое тело.

1) *Внешние силы, действующие на элементы объёма тела.* Пусть $d\tau$ будет элемент объёма тела, dm — его масса, тогда

$$\rho = \frac{dm}{d\tau} \tag{2.1}$$

есть плотность материи в рассматриваемом элементе $d\tau$. Очевидно, внешняя сила, действующая на этот элемент $d\tau$, будет порядка величины этого элемента. Обозначим её через

$$\boldsymbol{F}\, dm,$$

где $\boldsymbol{F}$ есть внешняя сила, отнесённая к единице массы. Компоненты такой массовой силы по осям координат будут:

$$X\, dm, \quad Y\, dm, \quad Z\, dm.$$

В случае применения прямоугольных осей координат x, y, z имеем:

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz, \tag{2.2}$$

и следовательно, компоненты внешней массовой силы будут:

$$X\rho\, dx\, dy\, dz, \quad Y\rho\, dx\, dy\, dz, \quad Z\rho\, dx\, dy\, dz.$$

Классическим примером этого рода сил является сила тяжести. Если её направление образует с осями координат углы α, β, γ, то компоненты силы тяжести будут:

$$X = g\cos\alpha; \qquad Y = g\cos\beta; \qquad Z = g\cos\gamma,$$

где g — напряжение силы тяжести.

Сосредоточенные внешние силы, приложенные в отдельных точках тела, можно рассматривать как предельный случай массовых сил, действующих на малый объём, окружающий точку приложения силы.

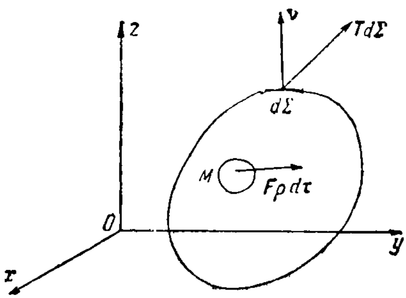
2) *Внешние силы, приложенные к поверхности деформируемого тела.* Такими силами являются все силы давления, производимого на данное тело другими телами.

Поверхностные силы могут быть распределены по всей поверхности тела или же только по части её.

Если $d\Sigma$ есть элемент поверхности тела, то внешняя сила, приложенная к этому элементу, будет порядка этого элемента. Обозначим её через

$$T\,d\Sigma,$$

где T есть поверхностная сила, отнесённая к единице площади элемента $d\Sigma$, которая обычно называется *напряжением.* За положительное принимают то направление силы $T\,d\Sigma$, при котором она направлена во внешнее пространство по отношению к телу. Вообще направление этой силы не совпадает с направлением внешней нормали к элементу $d\Sigma$ и образует с ней некоторый угол (фиг. 2).



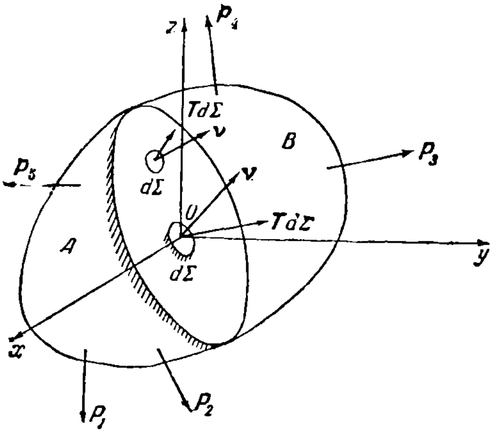
Фиг. 2.

Проекции силы $T\,d\Sigma$ на оси координат обозначают $T_x d\Sigma$, $T_y d\Sigma$, $T_z d\Sigma$. Классическим примером поверхностных сил является сила гидростатического давления жидкости на погружённое в неё тело. Но сила гидростатического давления p направлена нормально к поверхности тела всегда внутрь тела, а следовательно, в этом случае имеем $T = -p$.

Сосредоточенные внешние силы, приложенные в отдельных точках поверхности тела, можно рассматривать как предельный случай поверхностных сил, распределённых на малой части поверхности тела. В эту категорию сил входят так называемые опорные реакции.

§ 16. Внутренние напряжения.

Для исследования напряжённого состояния применяют известный метод сечений. Пусть (фиг. 3) мы имеем деформируемое тело AB, находящееся в равновесии под действием заданной системы сил P_1, $P_2, \ldots, P_5$. Разрежем его произвольной поверхностью CD, проходящей через заданную точку O на две части A и B. Мы можем отбросить затем часть тела B, но при этом должны приложить к каждому элементу $d\Sigma$ поверхности разреза CD поверхностные силы $T\,d\Sigma$, причём напряжённость их T должна быть выбрана так, чтобы оставшаяся часть тела A была в равновесии под действием всех оставшихся поверхностных сил $\boldsymbol{P}$ и приложенных вновь сил $T\,d\Sigma$. Но *силы* $T\,d\Sigma$ *суть внутренние взаимодействия,* являющиеся результатом того воздействия, которое производила отброшенная часть тела B на оставшуюся часть тела A при равновесии под действием всей приложенной системы сил $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_5$.



Фиг. 3.

Величина внутренней силы взаимодействия $\boldsymbol{T}$, приходящаяся на единицу площади какого-либо элемента $d\Sigma$ поверхности разреза CD, *есть напряжение сил на рассматриваемом элементе поверхности разреза* $d\Sigma$.

Рассмотрим, в частности, элемент $d\Sigma$, проходящий через точку O поверхности разреза. Направление $\boldsymbol{\nu}$ нормали к этому элементу $d\Sigma$ мы будем считать положительным, когда она направлена наружу из этой части тела A в часть B.

Направление напряжения $\boldsymbol{T}$ на этом элементе $d\Sigma$ вообще не совпадает с направлением нормали к элементу $d\Sigma$. Если нормальная слагающая напряжения $\boldsymbol{T}_\nu$ положительна, то она стремится вызвать растяжение материала; если же она отрицательная, то она вызывает сжатие.

Касательная слагающая напряжения $\boldsymbol{T}_\tau$ стремится произвести сдвиг или срез по площадке $d\Sigma$. Поэтому её называют иногда сдвигающим или срезающим напряжением.

Напряжение $\boldsymbol{T}$ можно разложить на три компоненты T_x, T_y, T_z по осям x, y, z. Однако, в теории упругости чаще применяют другое обозначение. Именно, компоненты по осям x, y, z напряжения на элементарной площадке $d\Sigma$, нормалью к которой служит вектор $\boldsymbol{\nu}$, обозначают X_ν, Y_ν, Z_ν, так что:

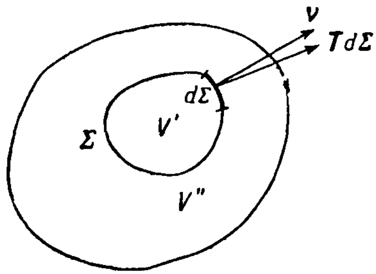
$$T_x = X_\nu; \quad T_y = Y_\nu; \quad T_z = Z_\nu. \tag{2.3}$$

При таких обозначениях нормальная слагающая напряжения будет:

$$T_\nu = X_\nu \cos(\nu, x) + Y_\nu \cos(\nu, y) + Z_\nu \cos(\nu, z). \tag{2.4}$$

Мы можем приложить тот же метод исследования внутренних напряжений в случае движения тела. Тогда ко всем внешним силам (поверхностным и массовым), действующим на тело, необходимо, согласно началу Даламбера, приложить все силы инерции, определяемые полными ускорениями в рассматриваемый момент времени.

Если внутри рассматриваемого деформируемого тела выделить при помощи замкнутой поверхности Σ некоторый объём V' (фиг. 4), то необходимо к каждому элементу $d\Sigma$ поверхности выделенной части V' приложить силы $Td\Sigma$ воздействия остальной части V'' на часть V'. Сверх того, на каждый элемент объёма части V' будут действовать внешние массовые силы, компоненты которых будут даны формулами:



Фиг. 4.

$$X\rho\, d\tau, \quad Y\rho\, d\tau, \quad Z\rho\, d\tau.$$

($d\tau$ — элемент объёма в части тела V'). Наконец, по началу Даламбера к каждому элементу объёма $d\tau$ надо приложить силы инерции, компоненты которых равны:

$$-j_x\rho\, d\tau, \quad -j_y\rho\, d\tau, \quad -j_z\rho\, d\tau,$$

где j_x, j_y, j_z суть проекции полного ускорения центра тяжести элемента $d\tau$ по осям координат.

По закону равенства действия и противодействия каждый элемент $d\Sigma$ поверхности части V' тела будет производить на соответствующий элемент поверхности части V'' тела равную и противоположную силу $-Td\Sigma$.

§ 17. Исследование напряжённого состояния в данной точке тела.

Величина напряжения на площадке $d\Sigma$ будет зависеть от того, как проведено сечение CD, и будет изменяться с изменением сечения. Мы можем определить каждую элементарную площадку $d\Sigma$, проходящую через данную точку O, тремя косинусами l, m, n углов, которые проведённая в определённом направлении нормаль к этой элементарной площадке образует с осями координат x, y, z, так что:

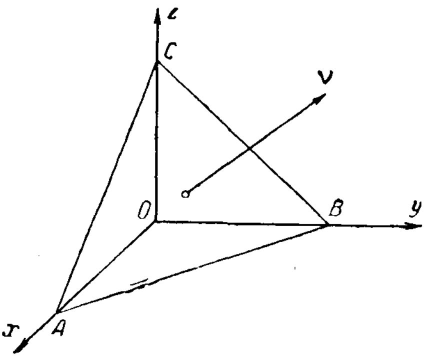
$$l = \cos(\nu, x), \quad m = \cos(\nu, y), \quad n = \cos(\nu, z). \qquad (2.5)$$

Очевидно, что упругое напряжение T на этой площадке будет являться функцией от l, m, n. Можно показать, что напряжение на любой площадке, проходящей через данную точку, может быть определено, если известны напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через ту же точку. Примем нормали к этим трём площадкам за прямоугольные координатные оси x, y, z.

Компоненты напряжения на проходящей через данную точку O (фиг. 5) элементарной площадке, перпендикулярной к оси x, вследствие принятых выше обозначений (2.3), очевидно, будут: X_x, Y_x, Z_x, ибо нормалью к рассматриваемой площадке служит положительная ось x. На проходящих через O элементарных площадках, нормалями которых служат оси y и z, действуют напряжения, компоненты которых соответственно будут:

$$X_y,\ Y_y,\ Z_y,\ X_z,\ Y_z,\ Z_z.$$

Пусть произвольная элементарная площадка, проходящая через точку O, характеризуется нормалью ν, косинусы углов которой с осями x, y, z суть l, m, n. Проведём очень близко от начала параллельно ей (фиг. 5) плоскость, которая пересекает оси координат в точках A, B, C. Тогда получится тетраэдр $OABC$, высота h которого, опущенная из начала O на грань ABC, — очень малая величина. Площадь грани ABC обозначим через S, нормалью же к ней служит нормаль ν к выбранному элементу $d\Sigma$ (вследствие параллельности S и $d\Sigma$). Легко определить площади остальных трёх граней тетраэдра:



Фиг. 5.

$$\text{площадь } OCB = Sl,$$
$$\text{»} \quad OAC = Sm,$$
$$\text{»} \quad OAB = Sn.$$

Мы можем выделить, согласно сказанному в § 16, элементарный тетраэдр $OABC$ из тела, но приложить к его поверхности силы, которые вызываются действием отброшенной части тела на рассматриваемый тетраэдр. Ввиду малых размеров граней нашего тетраэдра мы можем принять, что поверхностные силы на них распределены *равномерно*. На грани ABC действует сила, компоненты которой равны $X_\nu S$, $Y_\nu S$, $Z_\nu S$.

При вычислении компонентов силы, действующей на грани OCB, надо принять во внимание, что нормалью к ней служит отрицательная ось x, а потому компоненты силы будут:

$$-X_x Sl, \quad -Y_x Sl, \quad -Z_x Sl.$$

Для компонентов силы, действующей на грани OAC, имеем:

$$-X_y Sm, \quad -Y_y Sm, \quad -Z_y Sm$$

и на грани OAB:

$$-X_z Sn, \quad -Y_z Sn, \quad -Z_z Sn.$$

Сверх того, на тетраэдр действуют: внешняя сила, компоненты которой суть:

$$X\rho\, d\tau, \quad Y\rho\, d\tau, \quad Z\rho\, d\tau,$$

и силы инерции:

$$-j_x\rho\, d\tau, \quad -j_y\rho\, d\tau, \quad -j_z\rho\, d\tau.$$

Здесь $d\tau$ есть объём тетраэдра, вычисляемый по формуле

$$d\tau = \frac{1}{3} hS, \tag{2.6}$$

где h есть длина перпендикуляра, опущенного из вершины O на основание ABC тетраэдра, т. е. высота его. По известному началу механики, называемому принципом отвердевания, мы получим необходимое условие его равновесия, проектируя все приложенные к тетраэдру силы на оси координат, а именно:

$$\begin{aligned}
X_\nu S - (X_x l + X_y m + X_z n) S + (X - j_x)\rho\, d\tau = 0,\\
Y_\nu S - (Y_x l + Y_y m + Y_z n) S + (Y - j_y)\rho\, d\tau = 0,\\
Z_\nu S - (Z_x l + Z_y m + Z_z n) S + (Z - j_z)\rho\, d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Сокращая на S и принимая во внимание, что согласно (2.6):

$$\frac{d\tau}{S} = \frac{1}{3} h, \tag{2.7}$$

мы получим, переходя к пределу при h, стремящемся к нулю, три фундаментальных соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu = X_x l + X_y m + X_z n,\\
Y_\nu = Y_x l + Y_y m + Y_z n,\\
Z_\nu = Z_x l + Z_y m + Z_z n.
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

В пределе, когда h приблизится к нулю, грань ABC совпадает с рассматриваемой элементарной площадкой $d\Sigma$, так как у них общая нормаль ν.

В формулах (2.8) мы имеем девять компонентов напряжённого состояния

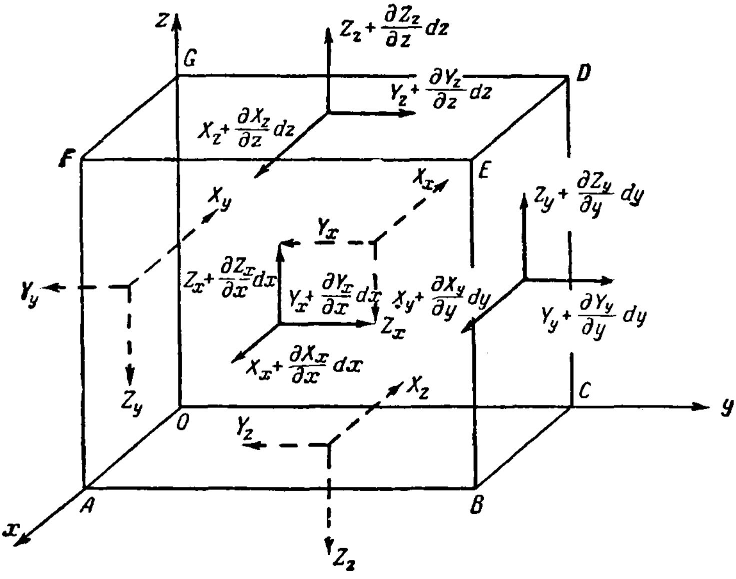
$$X_x,\ X_y,\ X_z,\ Y_x,\ Y_y,\ Y_z,\ Z_x,\ Z_y,\ Z_z, \tag{2.9}$$

которые для каждой данной точки суть постоянные величины. Но они меняются от одной точки тела к другой и являются, следовательно, функциями координат x, y, z и времени t (компоненты напряжённого состояния мы будем для краткости называть компонентами напряжения или просто напряжением).

Знание девяти компонентов напряжений (2.9) позволяет определить компоненты поверхностной силы на любой площадке $d\Sigma$, нормаль к которой дана своими косинусами l, m, n. Три компонента напряжения X_x, Y_y, Z_z являются нормальными напряжениями для тех площадок, на которых они действуют; остальные шесть являются касательными напряжениями. Но между ними только три независимые.

§ 18. Условия равновесия поверхностных сил, приложенных к граням вырезанного параллелепипеда.

Вырежем у заданной точки O из деформируемого тела элементарный прямоугольный параллелепипед (фиг. 6), грани которого параллельны координатным плоскостям, с рёбра-

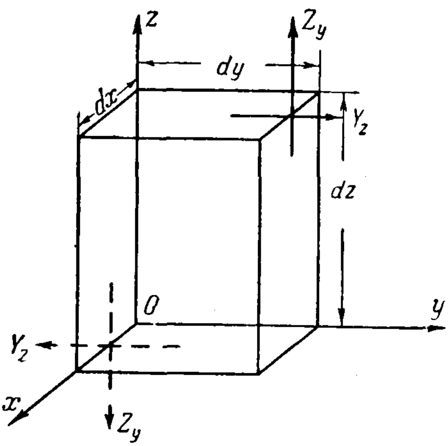


Фиг. 6.

ми dx, dy, dz и приложим к его граням соответствующие поверхностные силы, выражающие действие отброшенной части тела.

Ввиду малости граней распределение напряжений по плоскостям граней мы можем считать равномерным. Но напряжения на каждой паре параллельных граней будут различаться на бесконечно малую первого порядка. Так как площади граней будут малыми второго порядка, то поверхностные силы, действующие на каждой паре параллельных граней, будут различаться на малые третьего порядка. Кроме того, на параллелепипед будут действовать внешние силы и силы инерции, которые тоже — малые третьего порядка. Так как рёбра параллелепипеда суть малые первого порядка, то при вычислении моментов всех сил относительно осей силы внешние, силы инерции и разности между поверхностными силами, действующими на каждую пару противоположных граней, дают величины четвёртого порядка малости, и их можно отбросить, сохраняя только малые третьего порядка. Напротив, при проектировании на оси координат всех сил, действующих на параллелепипед, останутся только эти разности поверхностных сил, действующих на каждую пару противоположных граней, а также внешние силы и силы инерции. Все эти величины будут малыми одного и того же третьего порядка.

Поэтому нам придётся при составлении моментов принять, что поверхностные силы, действующие на каждую пару противоположных граней, равны и противоположны. Силы внешние и силы инерции при таком порядке приближения, как было указано выше, моментов не дают. На фиг. 7 стрелками указаны те напряжения, которые должны быть учтены при составлении момента относительно оси x всех сил, приложенных к параллелепипеду. Согласно принципу отвердевания мы можем написать три необходимых условия равновесия вырезанного параллелепипеда, приравняв нулю моменты всех сил относительно трёх координатных осей.



Фиг. 7.

Для оси x получим уравнение:

$$Z_y\,dx\,dy\,dz - Y_z\,dx\,dy\,dz = 0,$$

откуда имеем:

$$Z_y = Y_z.$$

Такие же уравнения можно составить для моментов относительно осей y и z. Это даёт *три фундаментальных соотношения*:

$$Y_z = Z_y, \quad Y_x = X_y, \quad Z_x = X_z, \tag{2.10}$$

т. е. компоненты касательных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны между собою.

Следовательно, *напряжённое состояние в любой точке деформированного тела определяется шестью компонентами: тремя нормальными компонентами* X_x, Y_y, Z_z *и тремя различными тангенциальными компонентами* X_y, X_z, Y_z, удовлетворяющими соотношениям (2.10).

Если ввести функцию

$$\varphi(l, m, n) = \frac{1}{2}(X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2Z_y mn + 2Z_x nl + 2X_y ml), \tag{2.11}$$

то согласно (2.8) получим:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \frac{\partial\varphi}{\partial l}; \\ Y_\nu &= \frac{\partial\varphi}{\partial m}; \\ Z_\nu &= \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Напишем теперь три остальных необходимых условия равновесия вырезанного параллелепипеда, выражающие равенство нулю суммы проекций на координатные оси всех сил, приложенных к параллелепипеду. Учитывая изменение упругих сил при переходе от одной грани к противоположной и равномерность распределения по граням, имеем для проекции на ось x:

$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz - X_x\,dy\,dz + \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right)dx\,dz - X_y\,dx\,dz + \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z}dz\right)dx\,dy - X_z\,dx\,dy + (X - j_x)\rho\,dx\,dy\,dz = 0.$$

После приведения и сокращения на $dx\,dy\,dz$ получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho(X - j_x) &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho(Y - j_y) &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho(Z - j_z) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

причём второе и третье уравнения получены проектированием сил на оси y и z. Уравнения (2.13) и (2.10) были получены впервые знаменитым учёным Коши (Cauchy) и играют важную роль в теории упругости.

Если упругое тело находится в равновесии под действием заданных сил, то

$$j_x = j_y = j_z = 0$$

и уравнения (2.13) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

причём имеют место соотношения (2.10). Следует заметить, что в формулах (2.8) и (2.13) x, y, z суть координаты после деформации. В случае очень малых деформаций, которые обычно рассматриваются, их можно принять за начальные координаты.

Проекции полного ускорения определяются легко при помощи формул (1.1). Действительно, при движении деформируемого тела координаты x_1, y_1, z_1 точки, координаты которой до начала движения и связанной с ним деформации были x, y, z, будут:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u(x, y, z, t); \\ y_1 &= y + v(x, y, z, t); \\ z_1 &= z + w(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$j_x = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad j_y = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad j_z = \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.15}$$

и эти значения надо внести в (2.13).

§ 19. Взаимность нормальных слагающих.

Возьмём два элемента $d\Sigma$ и $d\Sigma'$, проходящих через данную точку O упругого тела. Нормаль ν к элементу $d\Sigma$ определена косинусами l, m, n, и на этом элементе действует напряжение T. Нормаль ν' к элементу $d\Sigma'$ определена косинусами l', m', n', и на этом элементе действует упругое напряжение T'.

Очевидно, проекция напряжения T на нормаль ν' будет:

$$T_{\nu'} = X_\nu l' + Y_\nu m' + Z_\nu n',$$

или, на основании (2.12):

$$T_{\nu'}=\frac{\partial\varphi}{\partial l}l'+\frac{\partial\varphi}{\partial m}m'+\frac{\partial\varphi}{\partial n}n', \tag{2.16}$$

Аналогично для проекции напряжения T' на нормаль ν получим:

$$T'_{\nu}=X'_{\nu}l+Y'_{\nu}m+Z'_{\nu}n,$$

или, на основании (2.12):

$$T'_{\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial l'}l+\frac{\partial\varphi}{\partial m'}m+\frac{\partial\varphi}{\partial n'}n. \tag{2.17}$$

Из формулы (2.11) следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}l'+\frac{\partial\varphi}{\partial m}m'+\frac{\partial\varphi}{\partial n}n'=\frac{\partial\varphi}{\partial l'}l+\frac{\partial\varphi}{\partial m'}m+\frac{\partial\varphi}{\partial n'}n,$$

или

$$T_{\nu'}=T'_{\nu}. \tag{2.18}$$

Следовательно, если мы имеем две пересекающиеся элементарные площадки, то проекция напряжения на первой площадке на нормаль ко второй равна проекции напряжения на второй площадке на нормаль к первой.

Формулы (2.10) суть частные случаи этой общей теоремы.

§ 20. Преобразование компонентов напряжённого состояния к новым осям.

Напряжённое состояние в какой-либо точке тела вполне определяется при данном выборе прямоугольных осей x, y, z шестью компонентами напряжения на трёх взаимно перпендикулярных элементарных площадках, проходящих через эту точку нормально к этим осям. Если через ту же точку провести новые прямоугольные оси x', y', z', то то же самое напряжённое состояние будет определяться шестью компонентами напряжения на трёх взаимно перпендикулярных элементарных площадках, проходящих через данную точку нормально к этим новым осям, именно компонентами:

$$X'_{x'},\quad Y'_{y'},\quad Z'_{z'},\quad X'_{y'}(=Y'_{x'}),\quad X'_{z'}(=Z'_{x'}),\quad Y'_{z'}(=Z'_{y'}). \tag{2.19}$$

Очевидно, что эти шесть новых компонентов напряжённого состояния должны выражаться через шесть прежних

$$X_x,\quad Y_y,\quad Z_z,\quad X_y(=Y_x),\quad X_z(=Z_x),\quad Y_z(=Z_y). \tag{2.20}$$

Пусть ориентировка осей x', y', z' относительно осей x, y, z дана схемой 2 § 10. Проекции напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к оси x', на старые оси x, y, z вычисляются по формулам (2.8), в которых надо положить:

$$l = l_1, \quad m = m_1, \quad n = n_1,$$

что даёт:

$$\left.\begin{aligned} X_{x'} &= X_x l_1 + X_y m_1 + X_z n_1, \\ Y_{x'} &= Y_x l_1 + Y_y m_1 + Y_z n_1, \\ Z_{x'} &= Z_x l_1 + Z_y m_1 + Z_z n_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

Аналогично вычисляются проекции на старые оси x, y, z напряжений на элементарных площадках, перпендикулярных к осям y' и z':

$$\left.\begin{aligned} X_{y'} &= X_x l_2 + X_y m_2 + X_z n_2, \\ Y_{y'} &= Y_x l_2 + Y_y m_2 + Y_z n_2, \\ Z_{y'} &= Z_x l_2 + Z_y m_2 + Z_z n_2; \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

$$\left.\begin{aligned} X_{z'} &= X_x l_3 + X_y m_3 + X_z n_3, \\ Y_{z'} &= Y_x l_3 + Y_y m_3 + Y_z n_3, \\ Z_{z'} &= Z_x l_3 + Z_y m_3 + Z_z n_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Чтобы получить проекции напряжений, действующих на площадках, перпендикулярных к осям x', y', z', на *новые* оси x', y', z', пользуемся тем, что проекция равнодействующей на какую-либо ось равна сумме проекций компонентов на ту же ось.

Поэтому, проектируя напряжение на элементарной площадке, перпендикулярной к оси x', на *новые* оси x', y', z', имеем:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= X_{x'} l_1 + Y_{x'} m_1 + Z_{x'} n_1, \\ Y'_{x'} &= X_{x'} l_2 + Y_{x'} m_2 + Z_{x'} n_2, \\ Z'_{x'} &= X_{x'} l_3 + Y_{x'} m_3 + Z_{x'} n_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Внося (2.21) в (2.24) и принимая во внимание основные соотношения (2.10), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z + 2m_1 n_1 Z_y + 2n_1 l_1 Z_x + 2m_1 l_1 X_y, \\ Y'_{x'} &= l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) Y_z + \\ &\qquad + (n_1 l_2 + n_2 l_1) Z_x + (l_1 m_2 + l_2 m_1) X_y, \\ Z'_{x'} &= l_1 l_3 X_x + m_1 m_3 Y_y + n_1 n_3 Z_z + (m_1 n_3 + m_3 n_1) Y_z + \\ &\qquad + (n_1 l_3 + n_3 l_1) Z_x + (l_3 m_1 + l_1 m_3) X_y. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Проектируя теперь напряжения на элементарных площадках, перпендикулярных к осям y' и z' на новые оси x', y', z', найдём ещё шесть соотношений, из которых только три будут отличны от (2.25):

$$\left.\begin{aligned} Y'_{y'} &= l_2^2 X_x + m_2^2 Y_y + n_2^2 Z_z + 2m_2 n_2 Z_y + 2n_2 l_2 Z_x + 2m_2 l_2 X_y, \\ Z'_{z'} &= l_3^2 X_x + m_3^2 Y_y + n_3^2 Z_z + 2m_3 n_3 Z_y + 2n_3 l_3 Z_x + 2m_3 l_3 X_y, \\ Y'_{z'} &= l_2 l_3 X_x + m_2 m_3 Y_y + n_2 n_3 Z_z + (m_2 n_3 + m_3 n_2) Y_z + \\ &\quad + (n_2 l_3 + n_3 l_2) Z_x + (l_3 m_2 + l_2 m_3) X_y. \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

Мы видим, что три новых нормальных напряжения $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $Z'_{z'}$ выражаются одинаково построенными формулами через шесть компонентов напряжения для старых осей

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y,\ X_z,\ Y_z.$$

Три новых тангенциальных напряжения

$$X'_{y'} = Y'_{x'}, \quad X'_{z'} = Z'_{x'}, \quad Y'_{z'} = Z'_{y'}$$

также выражаются одинаково построенными формулами через шесть компонентов напряжения для старых осей.

§ 21. Поверхность напряжений Коши.

Из формул (2.25) и (2.26) следует, что если l, m, n суть косинусы углов с осями x, y, z, произвольной оси, проведённой из данной точки, то нормальный компонент напряжения на элементарной площадке, проведённой через данную точку перпендикулярно к этой оси, будет дан формулой

$$\sigma = l^2 X_x + m^2 Y_y + n^2 Z_z + 2mnY_z + 2nlZ_x + 2mlX_y. \quad (2.27)$$

Отложим теперь от данной точки на взятой оси отрезок r, длина которого обратно пропорциональна квадратному корню из абсолютной величины упомянутого нормального напряжения σ, именно

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma|}}, \quad (2.28)$$

где k — постоянная величина. Координаты конца этого отрезка, очевидно, будут:

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr. \quad (2.29)$$

Возведя (2.28) в квадрат, получим:

$$\sigma r^2 = \pm k^2. \quad (2.30)$$

Если внести в (2.30) значение σ из (2.27) и использовать формулы (2.29), то получим:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = (X_x)\,x^2 + (Y_y)\,y^2 + (Z_z)\,z^2 + 2\,(Y_z)\,yz + \\ + 2\,(Z_x)\,zx + 2\,(Y_x)\,yx = \pm k^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если взять всевозможные направления проведённой нами оси, то l, m, n, а следовательно, и координаты x, y, z отложенного нами отрезка r будут величинами переменными, и концы всех отрезков r будут лежать на поверхности, данной уравнением (2.31). Эта поверхность называется *поверхностью напряжений Коши* и является центральной поверхностью второго порядка. Следовательно, если сделать поворот осей x, y, z в новое положение так, чтобы в уравнении (2.31) исчезли члены с произведением координат, то оно примет вид:

$$(X'_{x'})\,x'^2+(Y'_{y'})\,y'^2+(Z'_{z'})\,z'^2=\pm k^2. \tag{2.32}$$

Очевидно, при таком выборе осей члены $X'_{y'}$, $X'_{z'}$, $Y'_{z'}$ исчезают, а следовательно, касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к этим новым осям, исчезают, и на них будут существовать только нормальные напряжения. Определённые таким образом оси координат x', y', z' называются *главными осями напряжённого состояния в данной точке*, а соответствующие перпендикулярным к ним элементарным площадкам нормальные напряжения называются *главными напряжениями* в данной точке тела.

Обозначая их через σ_1, σ_2, σ_3, получим:

$$X'_{x'}=\sigma_1,\quad Y'_{y'}=\sigma_2,\quad Z'_{z'}=\sigma_3, \tag{2.33}$$

и уравнение (2.32) примет вид:

$$\sigma_1 x^2+\sigma_2 y^2+\sigma_3 z^2=\pm k^2. \tag{2.34}$$

Складывая первое уравнение системы (2.25) с первым и вторым уравнениями системы (2.26), мы получим:

$$\begin{aligned}X'_{x'}+Y'_{y'}+Z'_{z'}&=X_x\,(l_1^2+l_2^2+l_3^2)+Y_y\,(m_1^2+m_2^2+m_3^2)+\\&+Z_z\,(n_1^2+n_2^2+n_3^2)+2Z_y\,(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)+\\&+2Z_x\,(n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3)+2X_y\,(m_1l_1+m_2l_2+m_3l_3).\end{aligned} \tag{2.35}$$

На основании известных соотношений

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \quad \text{и т. д.}$$
$$m_1l_1+m_2l_2+m_3l_3=0 \quad \text{и т. д.},$$

мы получим из (2.35) и (2.33) важное соотношение:

$$X'_{x'}+Y'_{y'}+Z'_{z'}=X_x+Y_y+Z_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3. \tag{2.36}$$

Следовательно, сумма нормальных напряжений на любых трёх взаимно перпендикулярных элементарных площадках, проведённых через заданную точку, есть величина постоянная, т. е. это есть инвариант уравнения (2.31) при повороте осей.

Для определения направления главных осей напряжённого состояния можно воспользоваться тем, что на элементарной площадке, перпендикулярной к этим осям, существуют только нормальные напряжения. Пусть l, m, n — косинусы углов одной из главных осей с осями x, y, z. Тогда на элементарной площадке, перпендикулярной к этой оси, действует только нормальное напряжение σ, и его проекции на оси x, y, z, очевидно, будут:

$$X_\nu = \sigma l, \quad Y_\nu = \sigma m, \quad Z_\nu = \sigma n. \tag{2.37}$$

С другой стороны, при известных шести компонентах напряжённого состояния X_x, Y_y, Z_z, X_y, X_z, Y_z эти проекции выражаются формулами (2.8). Поэтому из (2.8) и (2.37) имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} X_x l + X_y m + X_z n &= \sigma l,\\ X_y l + Y_y m + Y_z n &= \sigma m,\\ X_z l + Y_z m + Z_z n &= \sigma n. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

По отношению к неизвестным l, m, n эта система имеет решение, отличное от нуля, если определитель этой системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} X_x - \sigma & X_y & X_z \\ X_y & Y_y - \sigma & Y_z \\ X_z & Y_z & Z_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{2.39}$$

В развёрнутом виде это уравнение примет вид:

$$\sigma^3 - g_1\sigma^2 + g_2\sigma - g_3 = 0, \tag{2.40}$$

где g_1, g_2, g_3 — известные величины, данные формулами:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= X_x + Y_y + Z_z,\\ g_2 &= X_x Y_y + X_x Z_z + Z_z Y_y - X_y^2 - X_z^2 - Y_z^2,\\ g_3 &= X_x Y_y Z_z + 2X_y X_z Y_z - X_x Y_z^2 - Y_y X_z^2 - Z_z X_y^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

Уравнение (2.40) имеет три корня, которые и дают значения главных напряжений в данной точке. Вставляя каждый корень в уравнения (2.38) и используя известное соотношение

$$l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0, \tag{2.42}$$

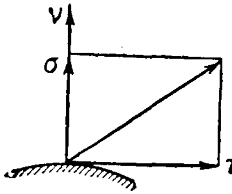
мы получим соответствующие значения l, m, n, определяющие направления так называемых главных осей. На элементарных площадках, перпендикулярных к этим главным осям, действуют только нормальные напряжения. Очевидно, таких осей будет три.

Так как уравнение (2.40) не зависит от выбора координатных осей, то его коэффициенты g_1, g_2, g_3 должны сохранять постоянное значение при преобразовании осей, т. е. они суть инварианты.

§ 22. Определение наибольших касательных напряжений.

После того как для данной точки определены главные оси напряжённого состояния, мы примем их за оси x, y, z. Возьмём произвольную элементарную площадку $d\Sigma$, нормаль к которой образует с осями x, y, z углы, косинусы которых l, m, n удовлетворяют соотношению

$$l^2+m^2+n^2=1. \tag{2.43}$$



Фиг. 8.

Пусть напряжение на этой площадке есть T, нормальная слагающая которого равна σ, а касательная слагающая равна τ (фиг. 8). Тогда имеем:

$$\sigma^2+\tau^2=T^2. \tag{2.44}$$

При сделанном выборе осей координат имеем следующие равенства:

$$X_x=\sigma_1,\quad Y_y=\sigma_2,\quad Z_z=\sigma_3,\quad X_y=Y_z=Z_x=0. \tag{2.45}$$

Проекции напряжения T на оси x, y, z определяются по формулам (2.8), в которые надо внести (2.45), что даёт:

$$T_x=X_\nu=\sigma_1 l,\quad T_y=Y_\nu=\sigma_2 m,\quad T_z=Z_\nu=\sigma_3 n; \tag{2.46}$$

отсюда получим:

$$T^2=(\sigma_1 l)^2+(\sigma_2 m)^2+(\sigma_3 n)^2. \tag{2.47}$$

С другой стороны, внося (2.45) в формулу (2.27), мы имеем:

$$\sigma=\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2. \tag{2.48}$$

Внося (2.47) и (2.48) в (2.44), мы получим:

$$\tau^2=\sigma_1^2 l^2+\sigma_2^2 m^2+\sigma_3^2 n^2-(\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2)^2. \tag{2.49}$$

Величина касательного напряжения, данная этой формулой, зависит от переменных l, m, n, связанных уравнением (2.43). Поэтому τ^2 есть функция двух переменных. Исключая n^2, мы получим:

$$\tau^2=(\sigma_1^2-\sigma_3^2)\,l^2+(\sigma_2^2-\sigma_3^2)\,m^2+\sigma_3^2-$$
$$-\left[(\sigma_1-\sigma_3)\,l^2+(\sigma_2-\sigma_3)\,m^2+\sigma_3\right]^2. \tag{2.50}$$

Для нахождения максимума и минимума τ^2, как функции двух переменных l, m, мы должны приравнять нулю частные производные τ^2 по l и m, что даёт:

$$l\left\{\sigma_1^2-\sigma_3^2-2\left[(\sigma_1-\sigma_3)\,l^2+(\sigma_2-\sigma_3)\,m^2+\sigma_3\right](\sigma_1-\sigma_3)\right\}=0,$$
$$m\left\{\sigma_2^2-\sigma_3^2-2\left[(\sigma_1-\sigma_3)\,l^2+(\sigma_2-\sigma_3)\,m^2+\sigma_3\right](\sigma_2-\sigma_3)\right\}=0.$$

Предполагая $\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$, последние уравнения можно сократить на $(\sigma_1-\sigma_3)$ и $(\sigma_2-\sigma_3)$; сделав приведение, мы получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} l\left\{\sigma_1-\sigma_3-2\left[(\sigma_1-\sigma_3)\,l^2+(\sigma_2-\sigma_3)\,m^2\right]\right\}&=0,\\ m\left\{\sigma_2-\sigma_3-2\left[(\sigma_1-\sigma_3)\,l^2+(\sigma_2-\sigma_3)\,m^2\right]\right\}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

к которым присоединим уравнение

$$l^2+m^2+n^2=1.$$

Эта система уравнений имеет следующие шесть систем решений, данных в приложенной таблице:

l	m	n
0	0	± 1
0	± 1	0
± 1	0	0
0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Значения l, m, n из первых трёх строчек этой таблицы дают площадки, соответствующие главным осям, причём, согласно (2.49), на них имеем:

$$\tau=0,$$

что и должно быть.

Остальные три строчки определяют площадки, проходящие через одну из главных осей и делящие пополам угол между двумя другими главными осями.

Для площадки, определяемой значениями l, m, n из четвёртой строчки таблицы, мы получим из (2.49)

$$\tau_1^2 = \frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2} - \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2.$$

Аналогично, для двух площадок, определяемых значениями l, m, n, из последних двух строк таблицы мы будем иметь:

$$\tau_2^2 = \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2, \quad \tau_3^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2.$$

Выбираем при извлечении корня знаки так, чтобы главные касательные напряжения удовлетворяли соотношению

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3=0. \tag{2.52}$$

Это даёт:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}. \tag{2.53}$$

Предполагая, что $\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$, мы заключаем, что наибольшее касательное напряжение равно полуразности между наибольшим и наименьшим главными нормальными напряжениями и действует на площадке, проходящей через среднее по величине главное нормальное напряжение и делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим главными нормальными напряжениями. Легко видеть, что на площадках, на которых действуют главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3, имеются также и нормальные напряжения σ', σ'', σ'''. Они вычисляются последовательно по формуле (2.48), если внести в неё значения l, m, n из четвёртой, пятой и шестой строчек вышеприведённой таблицы. Это даёт:

$$\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3), \quad \sigma'' = \frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1), \quad \sigma''' = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2). \tag{2.54}$$

В случаях, исключённых при рассмотрении, например при $\sigma_3=\sigma_2$, уравнения (2.51) допускают бесконечное множество площадок, по которым касательное напряжение будет наибольшим. Все эти площадки огибают круглый конус, ось которого совпадает с осью x, причём угол раствора равен $\frac{\pi}{4}$. Касательное напряжение на этих площадках также будет выражаться:

$$\tau = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}.$$

§ 23. Эллипсоид напряжений Ламе.

Формулы (2.46) дают возможность получить геометрическое представление об изменении величины напряжения T на элементарной площадке $d\Sigma$, когда она поворачивается около точки O. Координаты точки, лежащей на конце вектора T, согласно формулам (2.46), суть:

$$x = X_\nu = \sigma_1 l, \quad y = Y_\nu = \sigma_2 m, \quad z = Z_\nu = \sigma_3 n \tag{2.55}$$

при условии:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{2.56}$$

Определяя l, m, n из (2.55) и внося в (2.56), мы получим:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1; \tag{2.57}$$

это есть уравнение эллипсоида с полуосями σ_1, σ_2, σ_3.

Так как одна из полуосей эллипсоида представляет наибольший радиус-вектор, а другая — наименьший, то, следовательно, одно из главных напряжений представляет наибольшее напряжение в данной точке, а другое — наименьшее. Если два главных напряжения равны между собой, то эллипсоид напряжений делается эллипсоидом вращения. Если равные по величине главные напряжения одинакового знака, то напряжения по всем элементарным площадкам, проходящим через ось вращения, будут одинаковы и нормальны к этим площадкам. Если все три главных напряжения равны между собой, то эллипсоид напряжений превращается в шар, и всякие три взаимно перпендикулярных направления могут быть приняты за главные. Если одно из главных напряжений обращается в нуль, то одна из осей эллипсоида обращается в нуль, вследствие чего поверхность эллипсоида превращается в площадь эллипса. В этом случае напряжения на всех элементарных площадках, проведённых через рассматриваемую точку, будут лежать в одной плоскости. Такое напряжённое состояние называют плоским напряжённым состоянием.

Если два главных напряжения обращаются в нуль, то эллипсоид превращается в отрезок прямой, и мы будем иметь линейное напряжённое состояние.

Таков случай растяжения и сжатия призматических брусков осевыми силами.

§ 24. Направляющая поверхность напряжений.

Каждый радиус-вектор эллипсоида напряжений представляет собой по величине и направлению напряжение на одной из элементарных площадок, проходящих через центр эллипсоида. Направление же этой площадки может быть найдено с помощью особой поверхности второго порядка, называемой *направляющей поверхностью напряжений*. Если оси x, y, z суть главные оси напряжённого состояния в данной точке, то эллипсоид напряжений даётся уравнением (2.57), а *направляющая поверхность напряжений* даётся в тех же осях уравнением

$$\frac{x^2}{\sigma_1}+\frac{y^2}{\sigma_2}+\frac{z^2}{\sigma_3}=1. \qquad (2.58)$$

Пусть радиус-вектор r_0 пересекает направляющую поверхность в точке x_0, y_0, z_0. Уравнение касательной плоскости к направляющей поверхности в этой точке имеет вид:

$$\frac{xx_0}{\sigma_1}+\frac{yy_0}{\sigma_2}+\frac{zz_0}{\sigma_3}=1. \qquad (2.59)$$

Пусть h есть длина перпендикуляра, опущенного из начала на рассматриваемую касательную плоскость, а косинусы углов, образуемых этим перпендикуляром с выбранными осями (т. е. главными осями), суть l, m, n. Тогда уравнение той же касательной плоскости будет:

$$lx+my+nz=p. \qquad (2.60)$$

Сравнивая (2.59) и (2.60), мы получим:

$$\frac{x_0}{\sigma_1}=\frac{l}{p}; \quad \frac{y_0}{\sigma_2}=\frac{m}{p}; \quad \frac{z_0}{\sigma_3}=\frac{n}{p}, \qquad (2.61)$$

откуда:

$$l=\frac{px_0}{\sigma_1}, \; m=\frac{py_0}{\sigma_2}, \; n=\frac{pz_0}{\sigma_3}. \qquad (2.62)$$

Внося (2.62) в формулы (2.46), мы получим следующие компоненты для упругого напряжения T:

$$X_\nu=px_0, \; Y_\nu=py_0, \; Z_\nu=pz_0. \qquad (2.63)$$

Следовательно, компоненты напряжения на элементарной площадке, нормаль к которой имеет косинусы l, m, n, будут пропорциональны координатам точки касания x_0, y_0, z_0. Поэтому радиус-вектор, представляющий напряжение на рассматриваемой элементарной площадке, действительно проходит через точку касания x_0, y_0, z_0.

Таким образом, только с помощью *направляющей поверхности напряжений* можно определить те элементарные площадки, на которых действует напряжение, даваемое радиусом-вектором эллипсоида напряжений.

§ 25. Круги Мора.

Сохраняя оси x, y, z, как главные оси напряжённого состояния, и принимая, что нормаль к элементарной площадке $d\Sigma$ определяется косинусами l, m, n, мы получим для нормального компонента σ напряжения T, действующего на этой площадке, формулу (2.48):

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \tag{2.64}$$

Для определения касательного компонента τ этого напряжения T мы имеем уравнения (2.44) и (2.47), из которых получим:

$$\sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \tag{2.65}$$

Кроме того, l, m, n, связаны уравнением

$$1 = l^2 + m^2 + n^2. \tag{2.66}$$

Умножив уравнение (2.64) на $\sigma_2 + \sigma_3$, вычтем результат из уравнения (2.65) и прибавим сюда уравнение (2.66), умноженное на $\sigma_2\sigma_3$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \\ - (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) + \sigma_2\sigma_3(l^2 + m^2 + n^2).\end{aligned} \tag{2.67}$$

Но, выполняя небольшие преобразования, найдём:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3), \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) + \\ + \sigma_2\sigma_3(l^2 + m^2 + n^2) = l^2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \\ = l^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2).\end{aligned} \tag{2.69}$$

Внося (2.68) и (2.69) в (2.67), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ m^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ n^2 &= \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

Здесь вторая и третья формулы получены приёмом, аналогичным применённому для первой.

Для того чтобы l, m, n были действительными, необходимо, чтобы правые части формул (2.70) были положительными. Примем, что

$$\sigma_3 \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_1; \tag{2.71}$$

тогда

$$\sigma_1 - \sigma_2 > 0, \quad \sigma_1 - \sigma_3 > 0,$$

и, для того чтобы l^2 было положительно, необходимо, чтобы

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geqslant 0. \tag{2.72}$$

Если принять σ за абсциссу, τ за ординату, то в системе координат (σ, τ) (фиг. 9) уравнение

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \tag{2.73}$$

представляет окружность, центр которой лежит на оси абсцисс и которая проходит через две точки этой оси:

$$\sigma = \sigma_2, \quad \tau = 0;$$
$$\sigma = \sigma_3, \quad \tau = 0.$$

Условие (2.72) определяет точки плоскости (σ, τ), лежащие вне окружности (2.73) или на ней.

Далее, имеем:

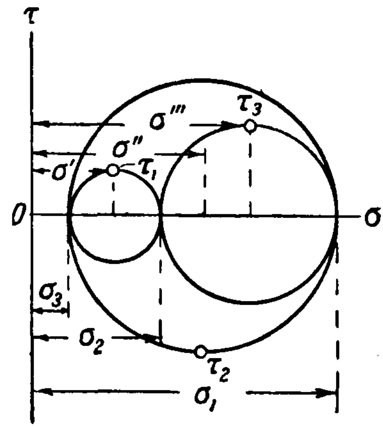
$$\sigma_2 - \sigma_3 > 0, \quad \sigma_2 - \sigma_1 < 0;$$

поэтому, для того чтобы m^2 было положительно, необходимо, чтобы

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) \leqslant 0; \tag{2.74}$$

но уравнение

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) = 0 \tag{2.75}$$



Фиг. 9.

представляет окружность, центр которой лежит на оси абсцисс (фиг. 9) и которая проходит через точки:

$$\sigma = \sigma_1, \quad \tau = 0; \quad \sigma = \sigma_3, \quad \tau = 0.$$

Условие (2.74) определяет точки плоскости (σ, τ), лежащие внутри этой окружности или на ней.

Наконец, имеем:

$$\sigma_3 - \sigma_1 < 0, \quad \sigma_3 - \sigma_2 < 0;$$

поэтому, для того чтобы n^2 было положительным, необходимо, чтобы

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geqslant 0; \tag{2.76}$$

но уравнение

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = 0 \tag{2.77}$$

представляет окружность, центр которой лежит на оси абсцисс (фиг. 9) и которая проходит через точки:

$$\sigma = \sigma_1, \ \tau = 0; \quad \sigma = \sigma_2, \ \tau = 0.$$

Условие (2.76) определяет те точки плоскости (σ, τ), которые лежат вне этой окружности или на ней.

Таким образом, для площадок, пересекающих все три главные оси, напряжённое состояние представляется точками M

(координаты σ, τ), лежащими в области, ограниченной тремя кругами Мора, радиусы которых соответственно равны τ_1, τ_2, τ_3, а центры лежат на оси абсцисс соответственно в точках ($\sigma=\sigma'$, $\tau=0$), ($\sigma=\sigma''$, $\tau=0$), ($\sigma=\sigma'''$; $\tau=0$).

Из приведённой диаграммы Мора следует, что наибольшее нормальное напряжение есть σ_1, а наименьшее есть σ_3. Далее, из неё же следует, что наибольшее касательное напряжение равно полуразности между наибольшим σ_1 и наименьшим σ_3 нормальными напряжениями, что уже получено иным путём.

§ 26. Поверхность касательных напряжений Г. В. Колосова.

На нормали к произвольной элементарной площадке, проходящей через данную точку, откладывают от этой точки отрезок r, пропорциональный касательному напряжению на этой площадке:

$$r=\frac{\tau}{k}, \tag{2.78}$$

где k — постоянная величина. Координаты конца этого отрезка, очевидно, будут:

$$x=lr,\quad y=mr,\quad z=nr. \tag{2.79}$$

Если главные оси суть оси координат, то имеем для τ по формуле (2.49):

$$\tau^2=(\sigma_1^2l^2+\sigma_2^2m^2+\sigma_3^2n^2)(l^2+m^2+n^2)-$$
$$-(\sigma_1l^2+\sigma_2m^2+\sigma_3n^2)^2, \tag{2.80}$$

так как $l^2+m^2+n^2=1$. Но из формул (2.78) и (2.79) имеем:

$$l=\frac{kx}{\tau},\quad m=\frac{ky}{\tau},\quad n=\frac{kz}{\tau}; \tag{2.81}$$

внеся их в (2.80), получим:

$$\tau^6=k^4[(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2+\sigma_3^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-(\sigma_1x^2+\sigma_2y^2+\sigma_3z^2)^2]=$$
$$=k^4[(\sigma_1-\sigma_2)^2x^2y^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2y^2z^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2x^2z^2]. \tag{2.82}$$

Из (2.78) имеем:

$$\tau^2=k^2r^2=k^2(x^2+y^2+z^2). \tag{2.83}$$

Вносся (2.83) в (2.82), мы получим:

$$(x^2+y^2+z^2)^3=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{k}\right)^2x^2y^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{k}\right)^2y^2z^2+$$
$$+\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{k}\right)^2z^2x^2. \tag{2.84}$$

Это уравнение было получено впервые Г. В. Колосовым, построившим модели этой поверхности шестого порядка.

ГЛАВА III.

СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЁННЫМ СОСТОЯНИЕМ И ДЕФОРМАЦИЕЙ.

§ 27. Приложение первого и второго законов термодинамики к процессу деформации упругого тела.

Анализ деформаций и напряжённого состояния, изложенный в первых главах нашего курса, справедлив для любых деформируемых тел. Ближайшей нашей задачей является установление связи между деформациями и напряжениями. При этом мы будем рассматривать лишь упругие тела, т. е. такие тела, которые обладают способностью восстанавливать свою форму, если напряжения, вызвавшие деформации, обращаются в нуль.

Подвергаясь деформации, упругое тело накопляет энергию, которая по окончании её, по крайней мере частично, возвращается обратно. Во время процесса деформации может меняться температура отдельных элементов упругого тела, и в результате может происходить получение или отдача тепла упругим телом. Поэтому, по идее Виллиама Томсона, к изучению процесса деформации упругого тела прилагают первый и второй законы термодинамики.

Пусть K есть кинетическая энергия, а U есть внутренняя энергия упругого тела. Изменение полной энергии упругого тела за малый элемент времени δt будет поэтому $\delta K + \delta U$. Так как проекции абсолютной скорости элемента $d\tau$ на оси x, y, z равны

$$\frac{dx_1}{at} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

то, очевидно, имеем:

$$K = \frac{1}{2}\iiint \rho \, d\tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]. \qquad (3.1)$$

Но мы имеем:

$$\delta K = \frac{\partial K}{\partial t}\delta t,$$

и так как

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t,\quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial t}\delta t,\quad \delta w = \frac{\partial w}{\partial t}\delta t,$$

то получим:

$$\delta K = \iiint \rho\, d\tau \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right]. \tag{3.2}$$

Так как δu, δv, δw суть приращения упругих перемещений u, v, w за элемент времени δt, то работа внешних сил, действующих на упругое тело за этот элемент времени, будет:

$$\delta L = \delta L' + \delta L'', \tag{3.3}$$

где

$$\delta L' = \iiint [X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w]\,\rho\, d\tau \tag{3.4}$$

есть работа внешних сил, действующих на элемент объёма упругого тела, а

$$\delta L'' = \iint [X_\nu \delta u + Y_\nu \delta v + Z_\nu \delta w]\, d\Sigma \tag{3.5}$$

есть работа внешних поверхностных сил $X_\nu d\Sigma$, $Y_\nu d\Sigma$, $Z_\nu d\Sigma$, действующих на каждый элемент $d\Sigma$ поверхности упругого тела.

Формулы (2.8) имеют место по всему объёму упругого тела, включая элементы объёма, граничащие с его поверхностью. Если поэтому l, m, n суть косинусы углов внешней нормали к поверхности упругого тела с прямоугольными осями x, y, z, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n,\\ Y_\nu &= Y_x l + Y_y m + Y_z n,\\ Z_\nu &= Z_x l + Z_y m + Z_z n,\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

причём

$$X_y = Y_x,\quad X_z = Z_x,\quad Y_z = Z_y. \tag{3.7}$$

Внося (3.6) в (3.5), мы получим:

$$\delta L'' = \iint [(X_x \delta u + Y_x \delta v + Z_x \delta w)\, l + (X_y \delta u + Y_y \delta v + Z_y \delta w)\, m + \\ + (X_z \delta u + Y_z \delta v + Z_z \delta w)\, n]\, d\Sigma.$$

Применяя формулу Грина для преобразования поверхностного интеграла в объёмный

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) d\tau = \iint (Al + Bm + Cn)\, d\Sigma, \tag{3.8}$$

мы получим, используя (3.7),

$$\delta L''=\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta u+\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\delta w\right]d\tau+$$
$$+\iiint\left[X_x\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial\,\delta v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial\,\delta w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+Z_x\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial z}\right)+X_y\left(\frac{\partial\,\delta v}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}\right)\right]d\tau.$$

Вследствие уравнений (2.13) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}&=-\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),\\
\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}&=-\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right),\\
\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}&=-\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

По формулам (1.11) и (1.12) имеем также:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}&=\delta\frac{\partial u}{\partial x}=\delta e_{xx},\\
\frac{\partial\,\delta v}{\partial y}&=\delta\frac{\partial v}{\partial y}=\delta e_{yy},\\
\frac{\partial\,\delta w}{\partial z}&=\delta\frac{\partial w}{\partial z}=\delta e_{zz},\\
\frac{\partial\,\delta w}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial z}&=\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\delta e_{yz},\\
\frac{\partial\,\delta w}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial z}&=\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\delta e_{zx},\\
\frac{\partial\,\delta v}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}&=\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\delta e_{xy}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

Применяя формулы (3.9) и (3.10), мы получим:

$$\delta L''=-\iiint\left[\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u+\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\right]\rho\,d\tau+$$
$$+\iiint[X_x\delta e_{xx}+Y_y\delta e_{yy}+Z_z\delta e_{zz}+Y_z\delta e_{yz}+$$
$$+Z_x\delta e_{zx}+X_y\delta e_{xy}]\,d\tau. \tag{3.11}$$

Внося (3.4) и (3.11) в (3.3), мы получим на основании (3.2):

$$\delta L=\delta K+\iiint\delta W d\tau, \tag{3.12}$$

где введено обозначение

$$\delta W = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}. \quad (3.13)$$

Обозначая через δQ механический эквивалент тепловой энергии, сообщаемой упругому телу за элемент времени δt, мы имеем по первому закону термодинамики

$$\delta K + \delta U = \delta Q + \delta L. \quad (3.14)$$

Внося сюда (3.12), мы получим *основное уравнение*

$$\delta U = \delta Q + \iiint \delta W d\tau. \quad (3.15)$$

Если процесс деформации упругого тела совершается адиабатически (например, при упругих колебаниях), то

$$\delta Q = 0. \quad (3.16)$$

В этом случае *основное уравнение* даёт:

$$\delta U = \iiint \delta W d\tau, \quad (3.17)$$

а следовательно, δW в этом случае есть *точный дифференциал* *). Мы можем написать:

$$dW = X_x de_{xx} + Y_y de_{yy} + Z_z de_{zz} + \\ + Z_y de_{zy} + Z_x de_{zx} + X_y de_{xy}; \quad (3.18)$$

рассматривая поэтому W как функцию шести независимых переменных e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}, мы будем иметь соотношения:

$$\left.\begin{aligned} X_x = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \quad Y_y = \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, \quad Z_z = \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}, \\ Z_y = \frac{\partial W}{\partial e_{zy}}, \quad Z_x = \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, \quad X_y = \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}; \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

эти формулы выведены впервые Грином. Функция W называется *упругим потенциалом*.

Если процесс деформации совершается изотермически, то δQ не будет нулём, но для всего кругового процесса (это может иметь место только в пределах упругости) имеем:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \oint \delta Q = 0,$$

*) Очевидно, приращение внутренней энергии δU данного объёма можно выразить через приращение плотности энергии $\delta U'$ следующим образом: $\delta U = \iiint \delta U' \delta\tau$ (интеграция по τ), тогда из последнего уравнения и (3.17) следует $\delta U' = \delta W$. Но как известно из термодинамики (см., например, Клеменс и Шефер, Теория теплоты, ч. 1, ГТТИ, стр. 83, 1933), $\delta U'$ есть полный дифференциал; следовательно, δW должно быть также полным дифференциалом.

где T — абсолютная температура. Так как в этом случае

$$\oint \delta U = 0,$$

то из основного уравнения (3.15) следует, что:

$$\oint\iiint \delta W d\tau = 0;$$

но это возможно только, если δW есть точный дифференциал от шести переменных e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}. В таком случае снова имеют место формулы (3.19), но упругий потенциал, в этом случае изотермического процесса, отличен от того упругого потенциала, который соответствует адиабатическому процессу.

Поэтому постоянные, входящие в формулы, связывающие напряжения и деформации при обоих процессах, хотя и незначительно, но будут различаться между собой.

§ 28. Энергия деформации.

Если из деформированного тела вырезать элементарный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям и рёбра соответственно равны δx, δy, δz, то на его шести гранях будут действовать упругие силы, указанные на фиг. 6. Легко подсчитать работу этих упругих сил при изменении деформации δu, δv, δw.

Для этого предположим, что все компоненты напряжения кроме X_x обращаются в нуль, вследствие чего на выделенный элемент будут действовать упругие силы только на гранях, нормальных к оси x. Это будут растягивающие силы величиной $X_x \delta y \delta z$; соответствующее удлинение параллелепипеда будет $e_{xx}\delta x$.

При увеличении растягивающих сил на $\delta X_x \delta y \delta z$ удлинение параллелепипеда получит приращение $\delta e_{xx}\delta x$. Отбрасывая малые высшего порядка, мы получим следующее выражение для величины работы сил, растягивающих элемент:

$$X_x \delta y \delta z \cdot \delta e_{xx} \delta x = X_x \delta e_{xx} \delta x \delta y \delta z.$$

Точно так же, если бы по граням элемента действовали упругие силы, соответствующие касательным напряжениям X_y, то работа, соответствующая приращению δX_y, была бы равна:

$$X_y \delta e_{xy} \delta x \delta y \delta z.$$

В общем случае, когда все компоненты напряжения отличны от нуля, работа всех приложенных к граням параллелепипеда упругих сил получится как сумма всех перечисленных элементарных работ и выразится формулой

$$\delta L_i = [X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz}]\, \delta x\, \delta y\, \delta z;$$

следовательно, элементарная работа упругих сил, отнесённая к единице объёма, будет:

$$\frac{\delta L_i}{\delta x\, \delta y\, \delta z} = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz}. \quad (3.20)$$

Это есть *удельная элементарная работа деформации.*

Сравнивая (3.20) и (3.13), мы видим, что δW представляет сумму элементарных работ упругих сил, рассчитанную на единицу объёма.

Элементарная работа деформации для всего упругого тела выражается интегралом, распространённым на весь объём тела

$$\delta V = \iiint \delta W dx\, dy\, dz. \quad (3.21)$$

§ 29. Общая связь между напряжённым состоянием и деформацией. Закон Гука.

Напряжённое состояние в каждой точке упругого тела вполне характеризуется шестью компонентами X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, и одновременно состояние упругой деформации около той же точки вполне характеризуется шестью компонентами деформации: e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}. Поэтому мы должны предположить, что между ними существует связь, аналитически выраженная формулами:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= f_1(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}),\\
Y_y &= f_2(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}),\\
Z_z &= f_3(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}),\\
Z_y &= f_4(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}),\\
Z_x &= f_5(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}),\\
X_y &= f_6(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{zy}, e_{zx}, e_{xy}).
\end{aligned}\right\} \quad (3.22)$$

Если предположить, что в естественном недеформированном состоянии отсутствуют упругие напряжения, т. е. предположить, что функции

$$f_i(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0, \quad [i = 1, 2, \ldots, 6],$$

то, допуская возможность разложения функций f_i в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка, получим:

$$\left.\begin{array}{l} X_x = c_{11}e_{xx} + c_{12}e_{yy} + c_{13}e_{zz} + c_{14}e_{yz} + c_{15}e_{zx} + c_{16}e_{xy}, \\ Y_y = c_{21}e_{xx} + c_{22}e_{yy} + c_{23}e_{zz} + c_{24}e_{yz} + c_{25}e_{zx} + c_{26}e_{xy}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_z = c_{41}e_{xx} + c_{42}e_{yy} + c_{43}e_{zz} + c_{44}e_{yz} + c_{45}e_{zx} + c_{46}e_{xy}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_y = c_{61}e_{xx} + c_{62}e_{yy} + c_{63}e_{zz} + c_{64}e_{yz} + c_{65}e_{zx} + c_{66}e_{xy}. \end{array}\right\} \quad (3.23)$$

Возможность представления компонент напряжений линейными формулами (3.23) через компоненты деформации подтверждается опытными данными и выражает закон Гука.

В эти формулы входит 36 *упругих постоянных* $c_{11}, c_{12}, \ldots$ $\ldots, c_{66}$, и поскольку существует упругий потенциал, то только 21 из них будут различными (см. ниже § 30).

Компоненты деформации суть вообще величины малые — порядка одной-двух тысячных. Действительно, в сопротивлении материалов для материалов типа железа закон Гука для растяжения тонкого бруса имеет вид:

$$X_x = Ee_{xx}, \quad (3.24)$$

где E — модуль Юнга. Средняя допустимая величина напряжения X_x — около 2000 *кг/см²*, а средняя величина E — около 2 000 000 *кг/см²*. Поэтому получим из (3.24) *среднее допустимое значение* e_{xx} *около одной тысячной*. Но даже принимая как крайний возможный предел для X_x — около 10 000 *кг/см²*, мы получим максимальное возможное значение e_{xx} около пяти тысячных. То же имеет место и для других компонентов деформации. Формулы (3.23) для больших значений компонентов деформации оправдываются опытом для большинства тел.

Упругие константы $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{66}$ суть вообще большие величины, имеющие размерность компонентов напряжения (ибо коэффициенты деформации $e_{xx}, \ldots, e_{xy}$ суть безразмерные величины), т. е. размерность силы, делённой на площадь.

Теория упругости, основанная на применении формул (3.23), т. е. на применении закона Гука, носит теперь название *линейной теории упругости*. Напротив в *нелинейной теории упругости* применяются формулы (3.22).

§ 30. Общее выражение упругого потенциала W в случае закона Гука.

Из формулы (3.18) мы получим с точностью до произвольного постоянного:

$$W = \int [X_x de_{xx} + Y_y de_{yy} + Z_z de_{zz} + Z_y de_{zy} + \\ + Z_x de_{zx} + X_y de_{xy}]. \quad (3.25)$$

Подставляя сюда компоненты напряжения по формулам (3.23), мы увидим, что интегрирование возможно только, если между упругими постоянными существуют соотношения вида

$$c_{rs}=c_{sr}. \tag{3.26}$$

В таком случае получим:

$$\begin{aligned}
W=&\frac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2+c_{12}e_{xx}e_{yy}+c_{13}e_{xx}e_{zz}+c_{14}e_{xx}e_{yz}+c_{15}e_{xx}e_{zx}+c_{16}e_{xx}e_{xy}+\\
&+\frac{1}{2}c_{22}e_{yy}^2+c_{23}e_{yy}e_{zz}+c_{24}e_{yy}e_{zy}+c_{25}e_{yy}e_{zx}+e_{26}e_{yy}e_{xy}+\\
&+\frac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2+c_{34}e_{zz}e_{zy}+c_{35}e_{zz}e_{zx}+c_{36}e_{zz}e_{xy}+\\
&+\frac{1}{2}c_{44}e_{zy}^2+c_{45}e_{zy}e_{zx}+c_{46}e_{zy}e_{xy}+\\
&+\frac{1}{2}c_{55}e_{zx}^2+c_{56}e_{zx}e_{xy}+\\
&+\frac{1}{2}c_{66}e_{xy}^2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Таким образом, число различных упругих постоянных есть 21. В зависимости от свойств материала число различных упругих постоянных может уменьшаться. Наименьшее число упругих постоянных будет два — для изотропного тела, обладающего тем свойством, что все направления, исходящие из любой данной точки, физически равноправны.

Формула (3.27) даёт нам самое общее выражение также и для так называемой энергии деформации. Мы видим, что *энергия деформации выражается через компоненты деформации как однородная функция второй степени.*

§ 31. Формулы Кастилиано.

Из шести уравнений (3.23) мы можем выразить шесть компонентов деформации как линейные однородные функции шести компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{array}{l}
e_{xx}=b_{11}X_x+b_{12}Y_y+b_{13}Z_z+b_{14}Y_z+b_{15}Z_x+b_{16}X_y,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
e_{zy}=b_{41}X_x+b_{42}Y_y+b_{43}Z_z+b_{44}Y_z+b_{45}Z_x+b_{46}X_y,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \tag{3.28}$$

Если формулы (3.28) внести в (3.27), то мы получим W как *однородную функцию второй степени от шести компонентов* *напряжённого состояния:*

$$W=\frac{1}{2}b_{11}X_x^2+b_{12}X_xY_y+b_{13}X_xZ_z+\ldots+\frac{1}{2}b_{66}X_y^2, \tag{3.29}$$

причём имеет место соотношение

$$b_{ik}=b_{ki}.$$

Вычислим теперь частные производные упругого потенциала по компонентам напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y. \tag{3.30}$$

Сначала определим $\frac{\partial W}{\partial X_x}$. Так как W есть функция от компонентов деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}, которые связаны с компонентами напряжённого состояния (3.30) зависимостями (3.28), то получим:

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}=\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial e_{xx}}{\partial X_x}+\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\frac{\partial e_{yy}}{\partial X_x}+\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\frac{\partial e_{zz}}{\partial X_x}+$$
$$+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\frac{\partial e_{yz}}{\partial X_x}+\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial e_{zx}}{\partial X_x}+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial e_{xy}}{\partial X_x}. \tag{3.31}$$

Но из (3.28) имеем:

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial X_x}=b_{11},\quad \frac{\partial e_{yy}}{\partial X_x}=b_{21},\quad \frac{\partial e_{zz}}{\partial X_x}=b_{31},$$
$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial X_x}=b_{41},\quad \frac{\partial e_{zx}}{\partial X_x}=b_{51},\quad \frac{\partial e_{xy}}{\partial X_x}=b_{61};$$

внося это в (3.31) и используя формулы (3.19), мы получим:

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}=b_{11}X_x+b_{21}Y_y+b_{31}Z_z+b_{41}Y_z+b_{51}X_z+b_{61}X_y,$$

что в силу соотношения $b_{ik}=b_{ki}$ даёт:

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}=b_{11}X_x+b_{12}Y_y+b_{13}Z_z+b_{14}Y_z+b_{15}X_z+b_{16}X_y.$$

В силу первой формулы системы (3.28) мы получим отсюда:

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}=e_{xx}.$$

Поступая так же с производными W по Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y, мы получим группу формул:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial X_x}&=e_{xx}, & \frac{\partial W}{\partial Y_y}&=e_{yy}, & \frac{\partial W}{\partial Z_z}&=e_{zz},\\ \frac{\partial W}{\partial Y_z}&=e_{yz}, & \frac{\partial W}{\partial X_z}&=e_{xz}, & \frac{\partial W}{\partial X_y}&=e_{xy}.\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Эти шесть формул называются *формулами Кастилиано*, и они взаимны с шестью формулами Грина (3.19). Но формулы Грина не зависят от существования закона Гука, между тем как формулы Кастилиано имеют место только, если существует закон Гука.

§ 32. Формула Клапейрона.

Так как W есть однородная функция второй степени от компонентов деформации, то по теореме об однородных функциях имеем:

$$2W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} e_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} e_{zz} + \frac{\partial W}{\partial e_{zy}} e_{zy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} e_{zx} + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} e_{xy}. \tag{3.33}$$

Внося сюда формулы Грина (3.19), мы имеем:

$$2W = X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + Y_z e_{yz} + X_z e_{xz} + X_y e_{xy}; \tag{3.34}$$

эта формула может быть названа *формулой Клапейрона*.

С другой стороны, мы можем притти к тому же результату, рассматривая W, как однородную функцию второй степени от компонентов напряжения, и применяя формулы Кастилиано (3.32):

$$2W = \frac{\partial W}{\partial X_x} X_x + \frac{\partial W}{\partial Y_y} Y_y + \frac{\partial W}{\partial Z_z} Z_z + \frac{\partial W}{\partial Y_z} Y_z + \frac{\partial W}{\partial X_z} X_z + \frac{\partial W}{\partial X_y} X_y; \tag{3.35}$$

отсюда имеем:

$$2W = e_{xx} X_x + e_{yy} Y_y + e_{zz} Z_z + e_{zy} Y_z + e_{zx} X_z + e_{xy} X_y,$$

т. е. мы получили (3.34).

Заметим, что, сравнивая (3.34) и (3.35), мы снова приходим к формулам (3.32), т. е. формулам Кастилиано.

§ 33. Формула Бетти.

Для одного и того же упругого тела рассмотрим два различных напряжённых состояния, для которых шесть компонентов напряжения и шесть компонентов деформации имеют значения:

$$\begin{aligned} 1)\ & X'_x,\ Y'_y,\ Z'_z,\ Y'_z,\ X'_z,\ X'_y, \\ & e'_{xx},\ e'_{yy},\ e'_{zz},\ e'_{zy},\ e'_{zx},\ e'_{xy}, \\ 2)\ & X''_x,\ Y''_y,\ Z''_z,\ Y''_z,\ X''_z,\ X''_y, \\ & e''_{xx},\ e''_{yy},\ e''_{zz},\ e''_{zy},\ e''_{zx},\ e''_{xy}. \end{aligned}$$

В пределах упругости для одного и того же упругого тела упругие константы в законе Гука будут одинаковыми, а поэтому имеем:

$$\left.\begin{aligned} X'_x &= c_{11}e'_{xx} + c_{12}e'_{yy} + \ldots + c_{16}e'_{xy},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X'_y &= c_{61}e'_{xx} + c_{62}e'_{yy} + \ldots + c_{66}e'_{xy}, \end{aligned}\right\} \quad (3.36)$$

$$\left.\begin{aligned} X''_x &= c_{11}e''_{xx} + c_{12}e''_{yy} + \ldots + c_{16}e''_{xy},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X''_y &= c_{61}e''_{xx} + c_{62}e''_{yy} + \ldots + c_{66}e''_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (3.37)$$

Составим теперь сумму произведений всех компонентов напряжения первого напряжённого состояния на компоненты деформации второго напряжённого состояния. Получим:

$$S = X'_x e''_{xx} + Y'_y e''_{yy} + Z'_z e''_{zz} + Y'_z e''_{yz} + X'_z e''_{xz} + X'_y e''_{xy}, \quad (3.38)$$

что на основании (3.36) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} S = &(c_{11}e'_{xx} + c_{12}e'_{yy} + \ldots)\, e''_{xx} + \\ &+ (c_{21}e'_{xx} + c_{22}e'_{yy} + \ldots)\, e''_{yy} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (c_{61}e'_{xx} + c_{62}e'_{yy} + \ldots)\, e''_{xy}. \end{aligned}$$

Эту последнюю формулу мы преобразуем, собирая коэффициенты при e'_{xx}, e'_{yy}, e'_{zz}, что даёт вследствие (3.26):

$$\left.\begin{aligned} S = &(c_{11}e''_{xx} + c_{12}e''_{yy} + \ldots + c_{16}e''_{xy})\, e'_{xx} + \\ &+ (c_{21}e''_{xx} + c_{22}e''_{yy} + \ldots + c_{26}e_{xy})\, e'_{yy} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (c_{61}e''_{xx} + c_{62}e''_{yy} + \ldots + c_{66}e''_{xy})\, e'_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (3.39)$$

Вследствие (3.37) мы получим из (3.39):

$$S = X''_x e'_{xx} + Y''_y e'_{yy} + Z''_z e'_{zz} + Y''_z e'_{yz} + X''_z e'_{xz} + X''_y e'_{xy}. \quad (3.40)$$

Из (3.38) и (3.40) получаем *формулу Бетти*:

$$\begin{aligned} &X'_x e''_{xx} + Y'_y e''_{yy} + Z'_z e''_{zz} + Y'_z e''_{yz} + X'_z e''_{xz} + X'_y e''_{xy} = \\ &\quad = X''_x e'_{xx} + Y''_y e'_{yy} + Z''_z e'_{zz} + Y''_z e'_{yz} + X''_z e'_{xz} + X''_y e'_{xy}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

т. е. работа компонентов первого напряжённого состояния на компонентах деформации второго напряжённого состояния равна работе компонентов второго напряжённого состояния на компонентах деформации первого напряжённого состояния (для одного и того же тела).

§ 34. Приведение числа упругих постоянных при различных случаях симметрии.

Если строение упругого тела таково, что оно обладает в отношении упругих свойств одной плоскостью симметрии, которую примем за плоскость xy, то выражение (3.27) для упругого потенциала должно остаться без изменения, если направление оси z изменить на обратное. При этом надо менять знаки z и w, а следовательно, изменятся знаки компонентов деформации

$$e_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\quad e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Поэтому в формуле (3.27) должны исчезнуть члены, содержащие e_{zx} и e_{yz} в первой степени, но член, содержащий произведение $e_{zx}\,e_{yz}$, остаётся. Таким образом, получим:

$$c_{14}=c_{15}=c_{24}=c_{25}=c_{34}=c_{35}=c_{46}=c_{56}=0; \qquad (3.42)$$

число упругих постоянных уменьшается до 13.

Если тело имеет в каждой точке три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то, принимая эти плоскости за плоскости координат, приходим к выводу, что выражение (3.27) упругого потенциала не будет меняться, если каждой из трёх осей координат дадим противоположное направление.

Вследствие этого будут меняться знаки у e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} и, следовательно, члены в формуле для W, содержащие e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} в первой степени, должны исчезнуть. Вследствие этого к условиям (3.42) прибавится

$$c_{16}=c_{26}=c_{36}=c_{45}=0; \qquad (3.43)$$

число упругих постоянных сокращается до 9.

Упругий потенциал W с оставшимися девятью постоянными характерен для тех тел, которые кристаллизуются в форме прямоугольного параллелепипеда.

Если же упругие свойства тела одинаковы по отношению к каждой из трёх плоскостей симметрии, то выражение (3.27) для W не изменится, если ось x заменить на ось y, или ось y заменить на ось z, или ось x — на ось z. Следовательно, выражение (3.27) для W не меняется, если мы переменим между собой

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz} \quad \text{или} \quad e_{xy},\ e_{xz},\ e_{yz}.$$

Это требует в добавление к (3.42) и (3.43) новых условий:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}&=c_{22}=c_{33},\\ c_{44}&=c_{55}=c_{66},\\ c_{23}&=c_{12}=c_{13}. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Таким образом, получим:

$$W=\frac{c_{11}}{2}(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)+c_{12}(e_{yy}e_{zz}+e_{zz}e_{xx}+e_{xx}e_{yy})+\\ +\frac{c_{44}}{2}(e_{yz}^2+e_{zx}^2+e_{xy}^2). \tag{3.45}$$

Примером таких тел служат кристаллы кубической системы.

В случае изотропного материала выражение упругого потенциала W должно быть одно и то же при любом повороте осей координат.

Если мы повернём нашу систему координат около оси z на малый угол ω, то получим новые оси x', y', z'; причём по схеме 2 (стр. 27) имеем:

$$\begin{aligned} &l_1=1, && m_1=\omega, && n_1=0,\\ &l_2=-\omega, && m_2=1, && n_2=0,\\ &l_3=0, && m_3=0, && n_3=1. \end{aligned}$$

Поэтому, на основании формул (1.73) и (1.74), отбрасывая члены с ω^2, мы получим компоненты деформации для новых осей:

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'}&=e_{xx}+\omega e_{xy},\\ e_{y'y'}&=e_{yy}-\omega e_{xy},\\ e_{z'z'}&=e_{zz},\\ e_{y'z'}&=e_{yz}-\omega e_{zx},\\ e_{z'x'}&=e_{zx}+\omega e_{yz},\\ e_{x'y'}&=e_{xy}+2\omega(e_{yy}-e_{xx}). \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Внося (3.46) в формулу (3.45) и сохраняя члены первой степени относительно малой величины ω, мы получим:

$$W'=W+\omega(e_{yy}-e_{xx})(2c_{44}+c_{12}-c_{11})e_{xy}. \tag{3.47}$$

Поэтому, для того чтобы выражение W не менялось, необходимо, чтобы

$$2c_{44}+c_{12}-c_{11}=0; \tag{3.48}$$

найдя отсюда $c_{11}=c_{12}+2c_{44}$ и подставляя это в (3.45), мы получим:

$$2W=c_{12}(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})^2+2c_{44}(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)+\\ +c_{44}(e_{yz}^2+e_{zx}^2+e_{xy}^2); \tag{3.49}$$

это и есть выражение упругого потенциала для изотропного тела. Обычно упругие постоянные обозначают по методу Ламе:

$$c_{44} = \mu, \quad c_{12} = \lambda; \tag{3.50}$$

тогда, вводя объёмное расширение Δ, получим следующее выражение для упругого потенциала:

$$2W = \lambda\Delta^2 + 2\mu\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2\right) + \mu\left(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2\right). \tag{3.51}$$

По формулам Грина (3.19) мы получим следующие выражения компонентов напряжённого состояния в изотропном теле через компоненты деформации:

$$\left.\begin{array}{ll} X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, & Y_z = \mu e_{yz}, \\ Y_y = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}, & X_z = \mu e_{xz}, \\ Z_z = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}, & X_y = \mu e_{xy}, \\ \Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. & \end{array}\right\} \tag{3.52}$$

§ 35. Изотропное тело.

Если оси x, y, z суть главные направления деформации в данной точке тела, то

$$e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0, \tag{3.53}$$

а следовательно, согласно (3.52),

$$Y_z = Z_x = X_y = 0. \tag{3.54}$$

Из этого следует, что в изотропном теле в каждой точке главные направления деформации совпадают с главными осями напряжённого состояния.

Можно поступать обратно, как это сделал Коши, и принять это следствие за определение изотропии.

Итак, предположим, что в каждой точке изотропного тела направления главных осей напряжённого состояния совпадают с главными направлениями деформации, и следовательно, угол между двумя взаимно перпендикулярными элементарными площадками скашивается только, если есть соответствующее касательное напряжение. Выделим из тела плоскостями, нормальными к главным осям напряжённого состояния, бесконечно малый прямоугольный параллелепипед.

В силу сделанного допущения углы параллелепипеда при деформации не искажаются (оси x, y, z направлены по главным осям напряжённого состояния в рассматриваемой точке тела), и вся деформация этого параллелепипеда сводится к трём относительным удлинениям e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}. Силы упругости, действующие на гранях выделенного параллелепипеда, равны X_x, Y_y, Z_z. Согласно закону Гука, имеем поэтому

$$X_x = ae_{xx} + be_{yy} + ce_{zz},$$

но в силу изотропии относительные удлинения в направлениях, нормальных к оси x, будут равноправны, что даёт

$$b = c,$$

и следовательно,

$$X_x = ae_{xx} + b(e_{yy} + e_{zz}),$$

а так как все три оси координат равноправны, то мы имеем:

$$Y_y = ae_{yy} + b(e_{xx} + e_{zz}),$$
$$Z_z = ae_{zz} + b(e_{xx} + e_{yy}).$$

Положив теперь

$$b = \mu, \quad a = \lambda + 2\mu,$$

мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}, \\ Z_z &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.55}$$

Возьмём теперь новую систему осей координат x', y', z', положение которой относительно главных осей x, y, z определяется схемой 2 (стр. 27).

Так как имеют место соотношения (3.53), то формулы (1.73) и (1.74) дают:

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'} &= l_1^2 e_{xx} + m_1^2 e_{yy} + n_1^2 e_{zz}, \\ e_{y'y'} &= l_2^2 e_{xx} + m_2^2 e_{yy} + n_2^2 e_{zz}, \\ e_{z'z'} &= l_3^2 e_{xx} + m_3^2 e_{yy} + n_3^2 e_{zz}, \\ e_{y'z'} &= 2(l_2 l_3 e_{xx} + m_2 m_3 e_{yy} + n_2 n_3 e_{zz}), \\ e_{z'x'} &= 2(l_1 l_3 e_{xx} + m_1 m_3 e_{yy} + n_1 n_3 e_{zz}), \\ e_{x'y'} &= 2(l_1 l_2 e_{xx} + m_1 m_2 e_{yy} + n_1 n_2 e_{zz}). \end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

С другой стороны, в силу соотношений (3.54) формулы (2.25) и (2.26) дают нам:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z, \\ Y'_{y'} &= l_2^2 X_x + m_2^2 Y_y + n_2^2 Z_z, \\ Z'_{z'} &= l_3^2 X_x + m_3^2 Y_y + n_3^2 Z_z, \\ Y'_{z'} &= l_2 l_3 X_x + m_2 m_3 Y_y + n_2 n_3 Z_z, \\ X'_{z'} &= l_1 l_3 X_x + m_1 m_3 Y_y + n_1 n_3 Z_z, \\ X'_{y'} &= l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

Внося теперь (3.55) в (3.57) и делая приведение подобных членов, мы получим:

$$
\begin{aligned}
X'_{x'} &= \lambda\Delta(l_1^2+m_1^2+n_1^2)+2\mu(l_1^2e_{xx}+m_1^2e_{yy}+n_1^2e_{zz}),\\
Y'_{y'} &= \lambda\Delta(l_2^2+m_2^2+n_2^2)+2\mu(l_2^2e_{xx}+m_2^2e_{yy}+n_2^2e_{zz}),\\
Z'_{z'} &= \lambda\Delta(l_3^2+m_3^2+n_3^2)+2\mu(l_3^2e_{xx}+m_3^2e_{yy}+n_3^2e_{zz}),\\
Y'_{z'} &= \lambda\Delta(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)+2\mu(l_2l_3e_{xx}+m_2m_3e_{yy}+n_2n_3e_{zz}),\\
X'_{z'} &= \lambda\Delta(l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3)+2\mu(l_1l_3e_{xx}+m_1m_3e_{yy}+n_1n_3e_{zz}),\\
X'_{y'} &= \lambda\Delta(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)+2\mu(l_1l_2e_{xx}+m_1m_2e_{yy}+n_1n_2e_{zz}).
\end{aligned}
$$

В силу известных соотношений

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \quad \text{и т. д.}$$

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \quad \text{и т. д.}$$

и, используя формулы (3.56), мы получим отсюда:

$$
\left.
\begin{aligned}
X'_{x'} &= \lambda\Delta+2\mu e_{x'x'}, & Y'_{z'} &= \mu e_{y'z'},\\
Y'_{y'} &= \lambda\Delta+2\mu e_{y'y'}, & X'_{z'} &= \mu e_{x'z'},\\
Z'_{z'} &= \lambda\Delta+2\mu e_{z'z'}, & X'_{y'} &= \mu e_{x'y'}.
\end{aligned}
\right\} \tag{3.58}
$$

Таким образом, мы доказали *справедливость формул* (3.52) *для любой системы координат.*

§ 36. Модули упругости изотропного тела.

Рассмотрим случай, когда изотропное тело испытывает растяжение по оси x. Пусть напряжённое состояние в каждой точке тела дано формулами

$$X_x \neq 0, \quad Y_y = Z_z = Y_z = X_z = X_y = 0. \tag{3.59}$$

Внося это в (3.52), получим уравнения

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda\Delta+2\mu e_{xx} &= X_x,\\
\lambda\Delta+2\mu e_{yy} &= 0,\\
\lambda\Delta+2\mu e_{zz} &= 0;
\end{aligned}
\right\} \tag{3.60}
$$

$$\Delta = e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}; \tag{3.61}$$

складывая (3.60) и принимая во внимание (3.61), мы получим:

$$\Delta = \frac{1}{3\lambda+2\mu}X_x. \tag{3.62}$$

Внося (3.62) в первое уравнение (3.60), мы получим:

$$X_x = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{xx}. \tag{3.63}$$

Сравнивая это с (3.24), найдём:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \tag{3.64}$$

Остальные два уравнения (3.60) дают:

$$e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu}\Delta = -\frac{\lambda X_x}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

внося сюда X_x из (3.63), получим:

$$e_{yy} = e_{zz} = -\sigma e_{xx}, \tag{3.65}$$

где обозначено:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{3.66}$$

Полученные равенства (3.65) выражают закон Пуассона о поперечном сжатии при продольном удлинении, причём σ есть так называемый *коэффициент Пуассона.*

В случае всестороннего сжатия напряжённое состояние тела дано формулами

$$\left.\begin{aligned} X_x &= Y_y = Z_z = -p, \\ X_y &= X_z = Y_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

Внося (3.67) в (3.52), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} &= -p, \\ \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} &= -p, \\ \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} &= -p; \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

складывая, получим на основании (3.61):

$$(3\lambda + 2\mu)\Delta = -3p.$$

Отсюда имеем основную формулу:

$$p = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(-\Delta). \tag{3.69}$$

Если K есть модуль объёмного сжатия, то

$$p = K(-\Delta); \tag{3.70}$$

сравнивая (3.70) и (3.69), мы получим

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{3.71}$$

Из (3.64) и (3.66) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\sigma)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Внося (3.72) в (3.71), мы получим:

$$K=\frac{E}{1-2\sigma}. \tag{3.73}$$

В процессе деформации тело всегда накапливает упругую энергию за счёт которой оно возвращается в естественное состояние после того, как силы, вызвавшие деформацию, исчезают. Поэтому W должно быть положительным. Из (3.51) следует, что для этого λ и μ должны быть положительными. На основании (3.72) отсюда следует, что

$$\frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}>0, \quad \frac{E}{1+\sigma}>0.$$

Из этих двух неравенств следует, что так как

$$E>0,$$

то имеем:

$$1+\sigma\geqslant 0, \quad 1-2\sigma\geqslant 0.$$

Поэтому имеем границы для σ:

$$-1\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}.$$

§ 37. Связь между напряжениями и деформациями в изотропном теле.

Итак, мы доказали в § 35 всеобщую применимость формул (3.52):

$$X_x=\lambda\Delta+2\mu e_{xx}, \quad Y_y=\lambda\Delta+2\mu e_{yy}, \quad Z_z=\lambda\Delta+2\mu e_{zz}, \tag{3.74}$$

$$Y_z=\mu e_{yz}, \quad X_z=\mu e_{xz}, \quad X_y=\mu e_{xy}, \tag{3.75}$$

которые выражают закон Гука для упругого изотропного тела и были установлены Коши.

Константы λ и μ, входящие в эти формулы, суть константы Ламе. Константа μ есть модуль сдвига (в технической литературе обозначается через G), а константа λ связана с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ следующими соотношениями, доказанными в § 36:

$$\left.\begin{aligned} \lambda&=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}; & \mu&=\frac{E}{2(1+\sigma)}; \\ E&=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}; & \sigma&=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

Модуль объёмного сжатия K выражается формулой:

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu=\frac{E}{1-2\sigma}. \tag{3.77}$$

Среднее удлинение e определяется формулой:

$$e=\frac{1}{3}\Delta=\frac{1}{3}(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}), \tag{3.78}$$

а среднее растягивающее напряжение P — инвариантным соотношением:

$$P=\frac{1}{3}(X_x+Y_y+Z_z)=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3). \tag{3.79}$$

Складывая три соотношения (3.74), мы получим вследствие соотношений (3.78) и (3.79):

$$3P=(3\lambda+2\mu)\Delta=3\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\Delta.$$

Отсюда, вследствие соотношения (3.77), имеем:

$$P=K\Delta. \tag{3.80}$$

Внося (3.80) в (3.74), мы получим:

$$X_x=\frac{\lambda P}{K}+2\mu e_{xx};\quad Y_y=\frac{\lambda P}{K}+2\mu e_{yy};\quad Z_z=\frac{\lambda P}{K}+2\mu e_{zz}. \tag{3.81}$$

Но вследствие (3.77), (3.78) и (3.80) имеем:

$$\frac{\lambda P}{K}=P+\frac{\lambda-K}{K}P=P-\frac{2\mu}{3}\frac{P}{K}=P-\frac{2}{3}\mu\Delta=P-2\mu e.$$

Внося это значение в (3.81), мы получим выражения нормальных компонентов напряжённого состояния в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} S_{xx}&=X_x-P=2\mu(e_{xx}-e),\\ S_{yy}&=Y_y-P=2\mu(e_{yy}-e),\\ S_{zz}&=Z_z-P=2\mu(e_{zz}-e). \end{aligned}\right\} \tag{3.82}$$

Далее перепишем формулы (3.75), придав им вид:

$$\left.\begin{aligned} S_{yz}&=Y_z=2\mu\left(\frac{1}{2}e_{yz}\right),\\ S_{zx}&=X_z=2\mu\left(\frac{1}{2}e_{xz}\right),\\ S_{xy}&=X_y=2\mu\left(\frac{1}{2}e_{xy}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.83}$$

Напряжённое состояние, определяемое шестью компонентами

$$S_{xx},\quad S_{yy},\quad S_{zz},\quad S_{yz},\quad S_{zx},\quad S_{xy},$$

назовём *приведённым напряжённым состоянием.* Деформацию, определяемую шестью компонентами

$$e_{xx}-e,\quad e_{yy}-e,\quad e_{zz}-e,\quad \frac{1}{2}e_{yz},\quad \frac{1}{2}e_{zx},\quad \frac{1}{2}e_{xy},$$

мы назвали ранее *приведённой деформацией.*

При этих определениях формулы (3.82) и (3.83) позволяют формулировать закон Гука в следующей форме: *компоненты приведённого напряжённого состояния равны соответственным компонентам приведённой деформации, умноженным на двойной модуль сдвига.*

Выражая λ по формуле (3.77), имеем:

$$\frac{\lambda}{K}=1-\frac{2\mu}{3K}.$$

Внося это значение в (3.81) и подставляя P из (3.80), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x&=2\mu e_{xx}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\Delta,\\ Y_y&=2\mu e_{yy}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\Delta,\\ Z_z&=2\mu e_{zz}+\left(K-\frac{2}{3}\mu\right)\Delta.\end{aligned}\right\}\tag{3.84}$$

Решая уравнения (3.74) относительно e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} и пользуясь обозначениями (3.76), мы получим известные формулы:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}&=\frac{1}{E}\left[X_x-\sigma\left(Y_y+Z_z\right)\right],\\ e_{yy}&=\frac{1}{E}\left[Y_y-\sigma\left(Z_z+X_x\right)\right],\\ e_{zz}&=\frac{1}{E}\left[Z_z-\sigma\left(X_x+Y_y\right)\right],\end{aligned}\right\}\tag{3.85}$$

которые могут быть представлены также в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}&=\frac{1}{2\mu}\left[X_x-\left(1-\frac{2\mu}{3K}\right)P\right],\\ e_{yy}&=\frac{1}{2\mu}\left[Y_y-\left(1-\frac{2\mu}{3K}\right)P\right],\\ e_{zz}&=\frac{1}{2\mu}\left[Z_z-\left(1-\frac{2\mu}{3K}\right)P\right].\end{aligned}\right\}\tag{3.86}$$

Внося (3.85) и (3.75) в (3.51), мы получим важную формулу:

$$W=\frac{1}{2E}\left[X_x^2+Y_y^2+Z_z^2-2\sigma\left(X_xY_y+X_xZ_z+Y_yZ_z\right)+\right.$$
$$\left.+2(1+\sigma)\left(X_y^2+Y_z^2+X_z^2\right)\right].\tag{3.87}$$

§ 38. Работа деформации для изотропного тела.

На основании формулы (3.20) мы имеем следующее выражение для удельной элементарной работы деформации:

$$\delta A=X_x\delta e_{xx}+Y_y\delta e_{yy}+Z_z\delta e_{zz}+Y_z\delta e_{yz}+X_z\delta e_{xz}+X_y\delta e_{xy}.\tag{3.88}$$

Внося сюда X_x, $Y_y, \ldots, X_y$ из формул (3.52) и интегрируя, мы получим известную формулу:

$$2A = \lambda\Delta^2 + \mu\left[2\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2\right) + e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2\right]. \tag{3.89}$$

Обозначим удельную *работу деформации объёма* через A_v, удельную работу деформации формы — через A_g. Тогда имеем очевидное соотношение:

$$A = A_v + A_g. \tag{3.90}$$

Величина A_v вычисляется по формуле:

$$dA_v = P\,d\Delta.$$

Внося сюда P из (3.80), мы получим:

$$A_v = \frac{1}{2}K\Delta^2. \tag{3.91}$$

Подставляя (3.89) и (3.91) в (3.90), мы найдём:

$$A_g = \frac{1}{2}(\lambda - K)\Delta^2 + \frac{1}{2}\mu\left[2\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2\right) + e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2\right]. \tag{3.92}$$

Далее, подставляя сюда из (3.77)

$$\lambda - K = -\frac{2}{3}\mu$$

и используя соотношение (3.76), мы найдём:

$$A_g = \frac{\mu}{3}\left[(e_{zz} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{xx})^2 + (e_{xx} - e_{zz})^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\left(e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2\right)\right], \tag{3.93}$$

или, введя обозначение:

$$\Omega_1 = e_{yz}^2 + e_{xz}^2 + e_{xy}^2 + \frac{2}{3}\left[(e_{zz} - e_{yy})^2 + \right.$$
$$\left. + (e_{yy} - e_{xx})^2 + (e_{xx} - e_{zz})^2\right], \tag{3.94}$$

мы получим окончательно:

$$A_g = \frac{\mu}{2}\Omega_1. \tag{3.95}$$

Из соотношений (3.52) мы имеем:

$$e_{zz} - e_{yy} = \frac{1}{2\mu}(Z_z - Y_y), \quad e_{yz} = \frac{1}{\mu}Y_z,$$
$$e_{yy} - e_{xx} = \frac{1}{2\mu}(Y_y - X_x), \quad e_{zx} = \frac{1}{\mu}X_z,$$
$$e_{xx} - e_{zz} = \frac{1}{2\mu}(X_x - Z_z), \quad e_{xy} = \frac{1}{\mu}X_y.$$

Внося эти значения в (3.93) и введя обозначение:

$$\Omega_2 = Y_z^2 + X_z^2 + X_y^2 + \frac{1}{6}[(Z_z - Y_y)^2 + (Y_y - X_x)^2 + (X_x - Z_z)^2], \tag{3.96}$$

мы получим соотношение:

$$A_g = \frac{1}{2\mu}\Omega_2. \tag{3.97}$$

Величины Ω_1 и Ω_2 суть *инварианты*, не изменяющиеся при преобразовании осей координат. Если мы возьмём за оси координат главные оси деформации, то будем иметь:

$$X_x = \sigma_1,\ Y_y = \sigma_2,\ Z_z = \sigma_3,\ Y_z = X_z = X_y = 0; \tag{3.98}$$

$$e_{xx} = e_1,\ e_{yy} = e_2,\ e_{zz} = e_3,\ e_{yz} = e_{xz} = e_{xy} = 0. \tag{3.99}$$

Внося (3.98) в (3.96) и (3.99) в (3.94), мы получим:

$$\Omega_2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{6}, \tag{3.100}$$

$$\Omega_1 = \frac{2}{3}[(e_3 - e_2)^2 + (e_2 - e_1)^2 + (e_1 - e_3)^2]. \tag{3.101}$$

Далее, внося (2.53) в (3.100), мы получим:

$$\Omega_2 = \frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2). \tag{3.102}$$

На трёх площадках, на которых действуют *главные касательные напряжения* τ_1, τ_2, τ_3, существуют три *главные деформации сдвига* γ_1, γ_2, γ_3, связанные с главными удлинениями соотношениями

$$\gamma_1 = e_2 - e_3,\quad \gamma_2 = e_3 - e_1,\quad \gamma_3 = e_1 - e_2, \tag{3.103}$$

а между собою — соотношением

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \tag{3.104}$$

Внося (3.103) в (3.101), мы получим:

$$\Omega_1 = \frac{2}{3}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2). \tag{3.105}$$

Введём специальные обозначения

$$T = \sqrt{\Omega_2}, \tag{3.106}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\Omega_1}. \tag{3.107}$$

Величину T, выраженную через главные касательные напряжения, Генрих Генки назвал *интенсивностью напряжений сдвига*. Величину ε, выраженную через главные деформации сдвига, Генки назвал *интенсивностью деформации сдвига*.

Внося (3.106) в (3.97) и (3.107) в (3.95), мы получим:

$$A_g=\frac{T^2}{2\mu}, \tag{3.108}$$

$$A_g=\frac{\mu}{2}\varepsilon^2. \tag{3.109}$$

Эти формулы аналогичны известным формулам теории сопротивления материалов для удельной работы деформации сдвига. Из (3.108) и (3.109) имеем соотношение:

$$T=\mu\varepsilon, \tag{3.110}$$

выражающее закон Гука.

Из (3.109) имеем:

$$dA_g=\mu\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Внося сюда ε из (3.110), мы получим важное соотношение:

$$dA_g=T d\varepsilon, \tag{3.111}$$

аналогичное известному выражению удельной элементарной работы деформации сдвига. Формулы (3.108), (3.109), (3.110) и (3.111) достаточно ясно показывают важное значение величин T и ε, введённых впервые Генки. Внося (3.91) и (3.109) в (3.90), мы получим:

$$A=\frac{1}{2}K\Delta^2+\frac{1}{2}\mu\varepsilon^2, \tag{3.112}$$

что, вследствие (3.80) и (3.110), можно представить в виде:

$$A=\frac{P^2}{2K}+\frac{T^2}{2\mu}. \tag{3.113}$$

Полученные нами выражения (3.112) и (3.113) для удельной работы деформации представляют замечательную аналогию с тем выражением удельной работы деформации, которое мы имеем в теории сопротивления материалов.

ГЛАВА IV.

УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ.

§ 39. Необходимые условия равновесия упругого тела.

В теоретической механике доказывается, что необходимым условием равновесия всякой механической системы является удовлетворение условий равновесия системы, как если бы она отвердела.

На каждый элемент объёма упругого тела действуют внешние силы, компоненты которых суть:

$$X\rho\,dx\,dy\,dz, \quad Y\rho\,dx\,dy\,dz, \quad Z\rho\,dx\,dy\,dz.$$

На каждый элемент поверхности тела $d\Sigma$ действует внешняя сила, компоненты которой суть:

$$X_\nu d\Sigma, \quad Y_\nu d\Sigma, \quad Z_\nu d\Sigma.$$

Для равновесия рассматриваемого упругого тела в случае его отвердевания необходимо, чтобы были выполнены условия равновесия абсолютно твёрдого тела. Отсюда имеем шесть *необходимых* условий равновесия упругого тела:

$$\left.\begin{aligned}
\iiint \rho X d\tau + \iint X_\nu d\Sigma &= 0, \\
\iiint \rho Y d\tau + \iint Y_\nu d\Sigma &= 0, \\
\iiint \rho Z d\tau + \iint Z_\nu d\Sigma &= 0, \\
\iiint \rho (Zy - Yz)\, d\tau + \iint (yZ_\nu - zY_\nu)\, d\Sigma &= 0, \\
\iiint \rho (Xz - Zx)\, d\tau + \iint (zX_\nu - xZ_\nu)\, d\Sigma &= 0, \\
\iiint \rho (Yx - Xy)\, d\tau + \iint (xY_\nu - yX_\nu)\, d\Sigma &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если будут удовлетворены по всему упругому телу уравнения (2.14) и на поверхности упругого тела уравнения (3.6). Действительно, внесём в первое из уравнений системы (4.1) значение:

$$-\rho X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z};$$

применяя формулу Грина, получим:

$$-\iiint \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) d\tau + \iint X_\nu d\Sigma =$$
$$= -\iint \{X_x l + X_y m + X_z n\}\, d\Sigma + \iint X_\nu d\Sigma.$$

Это выражение обращается в нуль в силу первого уравнения системы (3.6). То же относится ко второму и третьему уравнениям системы (4.1).

Внося ρZ и ρY из уравнений (2.14) в четвёртое уравнение системы (4.1), мы получим, прилагая формулу Грина:

$$-\iiint \left[y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\right] d\tau +$$
$$+ \iint [yZ_\nu - zY_\nu]\, d\Sigma = -\iint y (Z_x l + Z_y m + Z_z n)\, d\Sigma +$$
$$+ \iint z (Y_x l + Y_y m + Y_z n)\, d\Sigma + \iiint (Z_y - Y_z)\, d\tau +$$
$$+ \iint [yZ_\nu - zY_\nu]\, d\Sigma,$$

а это обращается в нуль вследствие условий (3.6) и условия $Z_y = Y_z$.

То же относится к пятому и шестому уравнениям системы (4.1). В случае движения упругого тела уравнения (4.1) остаются в силе, но к действующим на упругое тело внешним силам надо по началу Даламбера прибавить силы инерции, что даёт:

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint \rho (X - j_x)\, d\tau + \iint X_\nu d\Sigma = 0,\\
&\iiint \rho (Y - j_y)\, d\tau + \iint Y_\nu d\Sigma = 0,\\
&\iiint \rho (Z - j_z)\, d\tau + \iint Z_\nu d\Sigma = 0,\\
&\iiint \rho [y (Z - j_z) - z (Y - j_y)]\, d\tau +\\
&\qquad + \iint (yZ_\nu - zY_\nu)\, d\Sigma = 0,\\
&\iiint \rho [z (X - j_x) - x (Z - j_z)]\, d\tau +\\
&\qquad + \iint (zX_\nu - xZ_\nu)\, d\Sigma = 0,\\
&\iiint \rho [x (Y - j_y) - y (X - j_x)]\, d\tau +\\
&\qquad + \iint (xY_\nu - yX_\nu)\, d\Sigma = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если по всему объёму упругого тела удовлетворены уравнения (2.13) и на поверхности упругого тела уравнения (3.6).

§ 40. Новый вывод уравнений упругого равновесия и движения.

Уравнения (4.1) и уравнения (4.2) остаются справедливыми, если из упругого тела выделить какой-либо замкнутой поверхностью Σ некоторый объём V' (фиг. 4, стр. 43). Но в этом случае X_ν, Y_ν, Z_ν будут компонентами упругих напряжений, обусловленными воздействием остальной части V'' упругого тела на выделенный из него объём V'. В формулах (4.1) и (4.2) объёмные интегралы будут распространены на объём V', а поверхностные будут взяты по замкнутой поверхности Σ, ограничивающей объём V'. Отсюда следует, что X_ν, Y_ν, Z_ν вычисляются по формулам (2.8):

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n, \\ Y_\nu &= Y_x l + Y_y m + Y_z n, \\ Z_\nu &= Z_x l + Z_y m + Z_z n, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где l, m, n — косинусы углов нормали, внешней для объёма V' в точках поверхности Σ.

Прилагая формулу Грина, мы имеем:

$$\iint X_\nu d\Sigma = \iint [X_x l + X_y m + X_z n]\, d\Sigma = \\ = \iiint \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Поэтому первое уравнение системы (4.2) даёт:

$$\iiint \left[(X - j_x)\rho + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] d\tau = 0. \tag{4.4}$$

Так же получим из 2-го и 3-го уравнений системы (4.2):

$$\iiint \left[(Y - j_y)\rho + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right] d\tau = 0, \tag{4.5}$$

$$\iiint \left[(Z - j_z)\rho + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right] d\tau = 0. \tag{4.6}$$

Так как уравнения (4.4), (4.5) и (4.6) должны иметь место, какова бы ни была величина объёма V' и его место внутри упругого тела, то необходимо, чтобы подинтегральные выражения обращались в нуль. Это даёт уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho(X-j_x)=0,\\ &\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho(Y-j_y)=0,\\ &\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho(Z-j_z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Здесь x, y, z суть координаты, определяющие положение частицы упругого тела в данный момент времени. В случае равновесия это будут координаты после деформации. Поскольку рассматриваются малые деформации, вместо x, y, z для данного момента принимают их начальные значения. Эта система уравнений совпадает с системой уравнений (2.13).

Поверхностный интеграл четвёртого уравнения системы (4.2) преобразуем, пользуясь формулой Грина:

$$\begin{aligned} &\iint (yZ_\nu - zY_\nu)\, d\Sigma = \\ &= \iint [y(Z_x l + Z_y m + Z_z n) - z(Y_x l + Y_y m + Y_z n)]\, d\Sigma = \\ &= \iint [(yZ_x - zY_x)\, l + (yZ_y - zY_y)\, m + (yZ_z - zY_z)\, n]\, d\Sigma = \\ &= \iiint \left[\frac{\partial (yZ_x - zY_x)}{\partial x} + \frac{\partial (yZ_y - zY_y)}{\partial y} + \frac{\partial (yZ_z - zY_z)}{\partial z}\right] d\tau = \\ &= \iiint \left[y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - \right.\\ &\qquad\qquad \left. - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) + Z_y - Y_z\right] d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому четвёртое уравнение системы (4.2) даёт:

$$\begin{aligned} \iiint \Big\{ y\left[(Z-j_z)\rho + \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right] - \\ - \left[(Y-j_y)\rho + \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right] + Z_y - Y_z \Big\}\, d\tau = 0. \end{aligned}$$

Но в силу уже доказанных уравнений (4.7) это последнее уравнение даёт:

$$\iiint (Z_y - Y_z)\, d\tau = 0, \tag{4.8}$$

и так же получим из 5-го и 6-го уравнений системы (4.2):

$$\left.\begin{aligned} &\iiint (Z_x - X_z)\, d\tau = 0,\\ &\iiint (Y_x - X_y)\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Так как уравнения (4.8) и (4.9) относятся к любому объёму V' и любому его положению, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} Y_z &= Z_y, \\ Z_x &= X_z, \\ Y_x &= X_y. \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Фундаментальные в теории упругости уравнения (4.7), (4.10) и (4.3) были открыты Коши.

§ 41. Уравнения упругого равновесия и движения в перемещениях.

В уравнения Коши (4.7) мы должны внести формулы (2.15):

$$j_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad j_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad j_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (4.11)$$

По формулам (3.22) шесть компонентов напряжённого состояния

$$X_x, \ Y_y, \ Z_z, \ Y_z, \ Z_x, \ X_y \qquad (4.12)$$

являются известными функциями девяти частных производных от перемещений u, v, w:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{matrix}\right\} \qquad (4.13)$$

Поэтому частные производные от компонентов напряжённого состояния (4.12) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xx}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{yy}}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{zz}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x} + \\ + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{zy}}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{zx}}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\right) + \\ + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xy}}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right) \end{aligned} \qquad (4.14)$$

и ещё пять аналогичных соотношений.

Коэффициенты при вторых производных от u, v, w суть функции девяти первых производных от u, v, w. Мы должны внести шесть выражений вида (4.14) в уравнения (4.7); в результате получим систему трёх нелинейных уравнений с частными производными второго порядка для трёх неизвестных функций u, v, w от четырёх независимых переменных — координат x, y, z и времени t.

В частном случае, когда имеет место закон Гука, частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial e_{xx}}, \ldots, \frac{\partial f_6}{\partial e_{xy}}$ будут просто упругими постоянными $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{66}$, и следовательно, уравнения (4.7) представят систему трёх линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами для трёх неизвестных функций u, v, w от четырёх переменных x, y, z, t. Здесь x, y, z — начальные координаты, так как рассматривается случай очень малой деформации. В частном случае изотропного тела, применяя формулы (3.52), мы получим:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}=\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial Y_y}{\partial y}=\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial y}+2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial Z_z}{\partial z}=\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial z}+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial X_y}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right),\quad \frac{\partial X_y}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),$$
$$\frac{\partial X_z}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial X_z}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial Y_z}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}\right),\quad \frac{\partial Y_z}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Внесём эти формулы в уравнения (4.7). Для первого уравнения имеем:

$$\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0.$$

Но это можно представить в виде:

$$\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$

а так как имеем:

$$\Delta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4.15}$$

то получим окончательно:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0. \tag{4.16}$$

Преобразуя аналогично второе и третье уравнения системы (4.7), мы получим ещё два уравнения для изотропного тела:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad(4.17)$$

Введя уже принятое обозначение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad)=\nabla^2(\quad),$$

мы приведём систему уравнений (4.16) и (4.17) к окончательному виду:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0,\end{aligned}\right\}\quad(4.18)$$

причём Δ дано формулой (4.15). Эти уравнения упругости в перемещениях даны Ламе и носят его имя. По аналогии уравнения (4.7), в которые внесены выражения вида (4.14), можно называть *обобщёнными уравнениями Ламе.*

Так как трёх совместных дифференциальных уравнений достаточно для определения трёх неизвестных упругих перемещений u, v, w, то решение задачи упругости будет вполне определённым *), если будут удовлетворены:

1) условия на поверхности упругого тела — так называемые *граничные условия*;

2) условия в начале движения — так называемые *начальные условия.*

§ 42. Граничные условия.

На поверхности упругого тела возможны различного рода условия. Во-первых, могут быть заданы значения упругих перемещений по всей поверхности Σ упругого тела:

$$\left.\begin{aligned}u=\varphi_1(x, y, z, t),\\v=\varphi_2(x, y, z, t),\\w=\varphi_3(x, y, z, t).\end{aligned}\right\}\text{ на поверхности }\Sigma.\quad(4.19)$$

Эти условия носят *кинематический характер.*

*) См. в § 118 теорему Кирхгофа о единственности решения.

Так как уравнения (4.7) имеют место по всему объёму упругого тела вплоть до его поверхности, то значения u, v, w, полученные интегрированием уравнений (4.7), имеют место по всему объёму упругого тела вплоть до его поверхности Σ. На поверхности Σ эти значения должны совпадать с теми, которые даны *граничными условиями* (4.19). Следовательно, интегралы уравнений (4.7) надо подобрать так, чтобы были удовлетворены условия (4.19).

Во-вторых, могут быть заданы по всей поверхности Σ упругого тела значения внешних сил, приложенных ко всем элементам этой поверхности:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \chi_1(x, y, z, t), \\ Y_\nu &= \chi_2(x, y, z, t), \\ Z_\nu &= \chi_3(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \text{ на поверхности } \Sigma. \tag{4.20}$$

Внося значения u, v, w, полученные интегрированием уравнений (4.7), в формулы (3.22), мы найдём значения

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y,$$

пригодные по всему объёму упругого тела вплоть до его поверхности Σ. Но формулы (4.3) пригодны по всему объёму упругого тела вплоть до его поверхности Σ и на самой этой поверхности. Поэтому, внося в них вычисленные выше значения

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y,$$

мы получим значения X_ν, Y_ν, Z_ν, годные на самой поверхности Σ. Таким образом, мы получим условия для u, v, w на поверхности Σ:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n = \chi_1, \\ Y_\nu &= Y_x l + Y_y m + Y_z n = \chi_2, \\ Z_\nu &= Z_x l + Z_y m + Z_z n = \chi_3. \end{aligned}\right\} \text{ на поверхности } \Sigma. \tag{4.21}$$

Эти условия носят *динамический характер*.

В-третьих, возможна на поверхности упругого тела комбинация этих условий. На одной части поверхности Σ могут быть заданы значения упругих перемещений. На остальной части этой поверхности могут быть заданы внешние силы. Так, в отдельных точках поверхности Σ могут быть заданы перемещения (в частности, отдельные точки могут быть закреплены), тогда как остальная часть поверхности Σ может быть нагружена поверхностными силами, или остальная часть поверхности Σ может быть свободна от усилий, но на тело будут действовать массовые силы, например, силы тяжести. Также встречаются условия, накладываемые на компоненты деформации или компоненты элементарного вращения в отдельных местах поверхности тела.

Наконец, возможны и иного рода условия кинематического или динамического характера.

§ 43. Начальные условия.

В начале движения в момент $t=0$ могут быть заданы значения упругих перемещений u, v, w и их производные по времени t:

$$\left.\begin{aligned} u&=f_1(x, y, z),\\ v&=f_2(x, y, z),\\ w&=f_3(x, y, z); \end{aligned}\right\} \text{ для } t=0 \tag{4.22}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}&=\varphi_1(x, y, z),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=\varphi_2(x, y, z),\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=\varphi_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \text{ для } t=0 \tag{4.23}$$

Интегралы уравнений (4.7) должны быть подобраны так, чтобы условия (4.22) и (4.23) были удовлетворены.

При удовлетворении начальных условий существенную роль играет начальное состояние тела. Предполагаем, что в естественном состоянии, когда ещё нет деформации, нет напряжённого состояния. В противном случае уравнения (4.14) должны быть изменены.

На основании теоремы Кирхгофа о единственности решения задачи теории упругости, доказанной в § 118, мы можем считать, что раз мы нашли решение уравнений упругости, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, то это решение будет единственным, и никакого другого решения найти нельзя. Это относится ко всем проблемам, которые будут рассматриваться в этой книге. Исключение составляют только задачи о равновесии длинных тонких прутьев или тонких пластинок и тонких оболочек, где возможно несколько решений.

§ 44. Уравнения упругого равновесия Коши.

В случае упругого равновесия $j_x = j_y = j_z = 0$, и уравнения (4.7) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Эти уравнения Коши имеют очень большое практическое значение. Шесть неизвестных компонентов напряжённого состояния

$$X_x, \; Y_y, \; Z_z, \; Y_z, \; X_z, \; X_y \tag{4.25}$$

связаны только тремя уравнениями. Поэтому, если не рассматривать одновременно упругую деформацию, то задача отыскания величин (4.25) не имеет определённого решения.

Так как шесть компонентов напряжённого состояния (4.25), согласно формулам (3.22), являются известными функциями от шести компонентов деформации, а следовательно, от производных только трёх неизвестных функций u, v, w от x, y, z, то уравнения (4.24) всегда представляют систему трёх уравнений в частных производных второго порядка относительно трёх неизвестных функций u, v, w. Таким образом, они всегда достаточны для отыскания u, v, w на основании знания граничных условий, указанных в § 42.

Однако в некоторых задачах выгодно считать, что шесть компонентов (4.25) не связаны между собой никакими соотношениями кроме уравнений (4.24), тогда три из этих величин могут быть взяты произвольно.

§ 45. Формулы Максвелла и Морера.

В случае отсутствия массовых сил

$$X = Y = Z = 0,$$

уравнения (4.24) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Максвелл указал следующее решение этих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}, & Y_z &= -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\,\partial z}, \\ Y_y &= \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}, & X_z &= -\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\,\partial x}, \\ Z_z &= \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}, & X_y &= -\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Эти решения проверяются подстановкой в уравнения (4.26). Морера указал на другую систему решений системы уравнений (4.26), также проверяемую подстановкой:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\,\partial z}, & Y_z &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right), \\ Y_y &= \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z\,\partial x}, & X_z &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right), \\ Z_z &= \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y}, & X_y &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

Р. О. Кузьмин показал, что формулы Максвелла дают общее решение уравнений Коши, способное представить любую систему функций, удовлетворяющих этим уравнениям и интегрируемых, как и их производные. То же он показал относительно формул Морера, если только компоненты напряжения удовлетворяют некоторым условиям интегрируемости.

§ 46. Некоторые свойства уравнений упругого равновесия при отсутствии массовых сил.

В случае отсутствия массовых сил $X = Y = Z = 0$ на тело действуют силы, приложенные только к его поверхности. Этот случай имеет большое значение в технических приложениях. В рассматриваемом случае уравнения (4.18) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Продифференцируем первое уравнение по x, второе — по y, третье — по z и полученные результаты сложим. Это даст нам:

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right) + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \tag{4.30}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u = \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Вследствие (4.15) мы получим из (4.30):

$$(\lambda+\mu)\nabla^2\Delta + \mu\nabla^2\Delta = (\lambda+2\mu)\nabla^2\Delta = 0,$$

откуда следует, что

$$\nabla^2\Delta = 0, \tag{4.31}$$

т. е. объёмное расширение Δ есть гармоническая функция.

Сделав теперь операцию $\nabla^2(\quad)$ над каждым из уравнений (4.29), получим:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Delta + \mu\nabla^4 u &= 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Delta + \mu\nabla^4 v &= 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Delta + \mu\nabla^4 w &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

где обозначено

$$\nabla^4(\quad) = \nabla^2[\nabla^2(\quad)]. \tag{4.33}$$

Вследствие (4.31) уравнения (4.32) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^4 u &= 0,\\ \nabla^4 v &= 0,\\ \nabla^4 w &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

т. е. компоненты упругого перемещения суть бигармонические функции.

Сложим теперь три первых уравнения (3.52). Вводя обозначение:

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z, \tag{4.35}$$

мы получим важное соотношение:

$$\Theta = 3\lambda\Delta + 2\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = (3\lambda+2\mu)\Delta. \tag{4.36}$$

Здесь Θ есть сумма нормальных напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках в данной точке, представляющая инвариантную величину при любом выборе этих площадок. Следовательно, Θ есть характерная величина в каждой точке упругого тела.

Из (4.36) имеем вследствие (4.31):

$$\nabla^2\Theta = (3\lambda+2\mu)\nabla^2\Delta = 0, \tag{4.37}$$

т. е. Θ есть гармоническая функция.

Проделаем теперь *бигармоническую операцию* над обеими частями шести формул (3.52). Это даёт:

$$\begin{aligned}
\nabla^4 X_x &= \lambda\nabla^4\Delta + 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\nabla^4 u,\\
\nabla^4 Y_y &= \lambda\nabla^4\Delta + 2\mu\frac{\partial}{\partial y}\nabla^4 v,\\
\nabla^4 Z_z &= \lambda\nabla^4\Delta + 2\mu\frac{\partial}{\partial z}\nabla^4 w,\\
\nabla^4 Y_z &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\nabla^4 w + \frac{\partial}{\partial z}\nabla^4 v\right],\\
\nabla^4 X_z &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^4 w + \frac{\partial}{\partial z}\nabla^4 u\right],\\
\nabla^4 X_y &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^4 v + \frac{\partial}{\partial y}\nabla^4 u\right];
\end{aligned}$$

отсюда вследствие (4.31) и (4.34) получим:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^4 X_x = 0, \quad \nabla^4 Y_y = 0, \quad \nabla^4 Z_z = 0,\\
\nabla^4 Y_z = 0, \quad \nabla^4 X_z = 0, \quad \nabla^4 X_y = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

т. е. компоненты напряжённого состояния суть бигармонические функции.

§ 47. Тождества Бельтрами.

В главе I было показано, что шесть компонентов упругой деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} не являются произвольными функциями координат: их частные производные второго порядка связаны шестью соотношениями (1.107) и (1.110). Так как эти шесть компонентов деформации являются, как мы видели в главе III, вполне определёнными функциями от шести компонентов напряжённого состояния

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad X_z, \quad X_y,$$

то очевидно, что и частные производные второго порядка шести компонентов напряжённого состояния также связаны шестью соотношениями, вообще нелинейными.

Но если для упругого тела применим закон Гука, то частные производные второго порядка от X_x, Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y будут связаны шестью линейными соотношениями с постоянными коэффициентами. В случае *изотропного тела* эти соотношения особенно упрощаются, и для частного случая отсутствия массовых сил они были получены Бельтрами.

В этом случае e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} выражаются очень просто через X_x, Y_y, Z_z формулами (3.85). Вводя θ по формуле (4.35), мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}[X_x(1+\sigma)-\sigma\theta], \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}[Y_y(1+\sigma)-\sigma\theta], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}[Z_z(1+\sigma)-\sigma\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Из формул (3.75) найдём:

$$e_{yz}=\frac{1}{\mu}Y_z, \quad e_{zx}=\frac{1}{\mu}X_z, \quad e_{xy}=\frac{1}{\mu}X_y, \tag{4.40}$$

причём μ определяется по формуле (3.72):

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{4.41}$$

Внося (4.39) и (4.40) в первое из соотношений системы (1.107), мы получим:

$$\frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}\right)-\frac{\sigma}{E}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y},$$

что вследствие (4.41) приводится к виду:

$$(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y}\right)-\sigma\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)=0. \tag{4.42}$$

Продифференцировав первое уравнение системы (4.24) по x, второе по y, сложим их и затем вычтем производную по z третьего уравнения этой системы. Это даёт:

$$-2\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}+\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Внося это в (4.42), мы получим:

$$(1+\sigma)\left[\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}\right]-$$
$$-\sigma\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)=\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right). \tag{4.43}$$

Из определения оператора $\nabla^2(\ \ )$ следует, что

$$\nabla^2(X_x+Y_y)-\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial y^2}. \tag{4.44}$$

Используя (4.35) и (4.44), мы имеем:

$$\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(X_x+Y_y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}=\nabla^2\theta-\nabla^2 Z_z-\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}. \tag{4.45}$$

Внося теперь (4.45) в (4.43) и замечая, что

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\nabla^2\theta-\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},$$

мы получим:

$$\begin{aligned}(1+\sigma)\left[\nabla^2\theta-\nabla^2 Z_z-\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right]-\sigma\nabla^2\theta+\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}&=\\=\nabla^2\theta-(1+\sigma)\nabla^2 Z_z-\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}&=(1+\sigma)\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial z}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}\right)\end{aligned}\tag{4.46}$$

и также получим ещё два подобных соотношения из второго и третьего уравнений системы (1.107):

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\theta-(1+\sigma)\nabla^2 X_x-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}&=(1+\sigma)\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\ \nabla^2\theta-(1+\sigma)\nabla^2 Y_y-\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}&=(1+\sigma)\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.47}$$

Складывая (4.46) и (4.47) и применяя (4.35), мы получим:

$$3\nabla^2\theta-(1+\sigma)\nabla^2\theta-\nabla^2\theta=-\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

откуда имеем:

$$\nabla^2\theta=-\rho\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Внося это в (4.46) и (4.47), мы получим после приведения:

$$\left.\begin{aligned}&(1+\sigma)\nabla^2 X_x+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\\&\quad=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial X}{\partial x}-\rho\frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\&(1+\sigma)\nabla^2 Y_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\\&\quad=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial Y}{\partial y}-\rho\frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\&(1+\sigma)\nabla^2 Z_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\\&\quad=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial Z}{\partial z}-\rho\frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.48}$$

Это составляет первую группу условий Бельтрами. Внося теперь (4.39) и (4.40) в первое соотношение системы (1.110), получим, применяя (4.41):

$$\frac{2(1+\sigma)}{E}\left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial z}\right]-\frac{2\sigma}{E}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z}=0.\tag{4.49}$$

Из второго и третьего уравнений системы (4.24) мы получим, дифференцируя:

$$\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\,\partial z} - \rho\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Внося это в (4.49), найдём:

$$(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2}\right) + (1+\sigma)\frac{\partial^2 (X_x + Y_y + Z_z)}{\partial z\,\partial y} +$$
$$+ \rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

что, вследствие (4.35), даёт:

$$(1+\sigma)\nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} + \rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = 0.$$

Проведя аналогичные преобразования со вторым и третьим соотношениями системы (1.110), мы получим в результате вторую систему условий Бельтрами:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\sigma)\nabla^2 X_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = -\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right),\\
&(1+\sigma)\nabla^2 X_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial z} = -\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right),\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} = -\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.50)$$

В итоге имеем шесть соотношений Бельтрами (4.48) и (4.50), которые в случае отсутствия массовых сил принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\sigma)\nabla^2 X_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 X_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = 0,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 X_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial z} = 0,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

где

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z.$$

В этом частном случае соотношения и были впервые получены Бельтрами. Формулы Бельтрами пригодны только в случае упругого равновесия.

То обстоятельство, что соотношения (4.51) применимы только при отсутствии объёмных сил, не уменьшает их практического значения, так как в технических приложениях обычно можно рассматривать только поверхностную нагрузку. Сверх того, для случая силы тяжести X, Y, Z суть постоянные по всему объёму тела, и их производные по координатам — нули. Поэтому правые части формул (4.48) и (4.50) обратятся в нули, и снова получатся формулы (4.51). Итак, шесть компонентов напряжённого состояния однородного изотропного тела не могут быть выбраны произвольно, но должны удовлетворять шести соотношениям (4.48) и (4.50), а в случае отсутствия массовых сил — шести соотношениям (4.51). Их называют *шестью тождествами Бельтрами.*

§ 48. Простейшие примеры, когда напряжённое состояние постоянно или линейно изменяется.

Рассмотрим некоторые простые случаи, интересные в дальнейшем.

а) Равномерное всестороннее давление.

Предположим, что сплошное упругое тело сжимается со всех сторон постоянным внешним давлением p. Будем искать решения уравнений упругого равновесия Коши (4.24) при отсутствии массовых сил ($X = Y = Z = 0$) в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = -p, \\ Y_z = X_z = X_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

Здесь имеем:

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z = -3p, \tag{4.53}$$

и легко видеть, что шесть тождественных соотношений (4.51) будут выполнены.

На внешней границе имеем:

$$X_\nu = -pl, \quad Y_\nu = -pm, \quad Z_\nu = -pn,$$

т. е. внешняя поверхностная сила должна быть давлением p, что и имеет место в действительности.

Эллипсоид напряжений обращается здесь в шар. Касательные напряжения отсутствуют, и любые три взаимно-перпендикулярные площадки суть главные плоскости. Из (4.52) имеем:

$$\left.\begin{aligned} e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0, \\ e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p(1-2\sigma)}{E}. \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

Для определения компонентов упругого перемещения u, v, w имеем уравнения Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}, \\ &\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

Интегрируя уравнения (4.55), мы получим перемещения в виде:

$$u=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}x-c_1z-c_4y+c_6,$$
$$v=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}y-c_2z+c_4x+c_5,$$
$$w=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}z-c_1x+c_2y+c_3.$$

Для выделения в этих выражениях упругого перемещения, нам нужно устранить перемещение тела, как абсолютно твёрдого. Поэтому закрепим одну из его точек (пусть это будет точка, совпадающая с началом координат) и для уничтожения вращения закрепим два элемента, выходящих из этой точки, например, элемент по оси z и элемент по оси y.

Тогда шесть произвольных постоянных мы определим из условий:

$$\left.\begin{aligned} &u=v=w=0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \text{ при } x=y=z=0, \tag{4.56}$$

и мы получим окончательно следующие выражения для упругих перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}x, \\ v&=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}y, \\ w&=-\frac{p(1-2\sigma)}{E}z. \end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

Следовательно, перемещения точек тела суть чисто радиальные, пропорциональные расстоянию от начала координат и симметричные относительно него.

b) Простое растяжение призматического бруса. Направим ось z по оси бруса. Так как массовых сил нет, то решение уравнений (4.24) берём в форме

$$\left.\begin{aligned} &X_x=Y_y=X_y=X_z=Y_z=0, \\ &Z_z=+p. \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

Условия (4.51) будут удовлетворены.

Так как брус призматический, то на боковой поверхности бруса имеем:

$$n = \cos(\nu, z) = 0.$$

В этом случае граничные условия дают:

$$\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n = 0, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m + Y_z n = 0, \\ Z_\nu &= X_z l + Y_z m + Z_z n = 0, \end{aligned}$$

т. е. боковая поверхность должна быть свободна от поверхностных сил, что и имеет место, так как нагрузка только *осевая*. На плоскостях основания призмы, нормальных к оси z, имеем:

$$l = m = 0, \quad n = \pm 1.$$

В этом случае получим:

$$\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n = 0, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m + Y_z n = 0, \\ Z_\nu &= X_z l + Y_z m + Z_z n = \pm p. \end{aligned}$$

Следовательно, на обоих основаниях мы получим *равномерно распределённую растягивающую нагрузку* p. Её равнодействующая приложена в центре тяжести основания и направлена по оси бруса. Выбирая начало координат на конце бруса, поставим граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &u = v = w = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{ для } x = y = z = 0$$

тогда получим:

$$u = -\frac{\sigma p x}{E}, \quad v = -\frac{\sigma p y}{E}, \quad w = -\frac{pz}{E}. \tag{4.59}$$

§ 49. Принцип Сен-Венана и смягчение граничных условий.

Выше мы имели специальные законы распределения поверхностных усилий на границах бруса. Но Сен-Венан указал, что вовсе нет необходимости, чтобы усилия на границах бруса были в точности распределены по найденным нами законам. *Принцип Сен-Венана* состоит в том, что если усилия, действующие на небольшую часть упругого тела, заменить другой, статически эквивалентной системой усилий, действующей на ту же часть поверхности тела, то это перераспределение поверхностных усилий вызовет существенное изменение компонентов напряжённого состояния только вблизи места приложения указанных поверхностных усилий (это и будут так называемые *местные напряжения*). Но в точках упругого тела, удалённых от места приложения упомянутых усилий на расстояния, достаточно большие по сравнению с линейными размерами той поверхности, на которой они приложены, влияние перераспределения усилий будет ничтожно. Поэтому, если длина призматического бруса велика по сравнению с размерами его поперечного сечения, то напряжения и деформации, произведённые внутри бруса осевой растягивающей силой, приложенной на конце бруса, или же изгиб бруса парами, приложенными по его концам, — практически не зависят от распределения поверхностных усилий, статически эквивалентных упомянутой осевой силе или упомянутым концевым парам. Отклонения напряжённого состояния от вычисленного будут иметь место только в небольших областях около концов бруса.

Трудности, связанные с интегрированием уравнений упругого равновесия при заданных граничных условиях, оказались столь значительными, что их не смогли преодолеть для упомянутых основных задач теории упругости (растяжение, кручение, изгиб) даже такие великие математики, как Коши и Пуассон. Только Сен-Венан смог найти практически пригодное решение задач растяжения, кручения и изгиба призматических брусьев. Но это удалось ему потому, что он отказался от точного удовлетворения граничных условий в тех концах брусьев, где приложена действующая на брус нагрузка. Эти граничные условия удовлетворяются у Сен-Венана *приближённо*, на основании вышеупомянутого принципа, только для равнодействующей силы и момента равнодействующей пары заданной системы нагрузок.

Такое *интегральное удовлетворение граничных условий* в тех концах бруса, где приложена к нему нагрузка, есть не что иное, как *смягчение граничных условий на концах бруса*.

§ 50. Труба бесконечной длины, находящаяся под действием равномерного внутреннего и внешнего давления (задача Ламе).

Пусть мы имеем трубу произвольной толщины стенок, длину которой мы можем считать такой большой, что можно не обращать внимания на явления, происходящие у концов трубы. Труба находится под действием равномерного внутреннего давления p_1 и равномерного внешнего давления p_0. Обозначим внешний радиус трубы через a, а внутренний радиус трубы через b. Ось z направим по оси трубы.

Ввиду большой длины трубы и равномерного распределения давления, мы можем рассматривать задачу Ламе как двухразмерную задачу. Ввиду отсутствия массовых сил уравнения (4.18) примут для упругого равновесия вид:

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0,\\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0,\\ &\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\\ &\nabla^2(\;\;)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\;\;)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\;\;). \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

Ввиду того что распределение внешних сил симметрично относительно оси трубы, явление деформации её будет тоже симметрично относительно оси трубы. Поэтому упругое перемещение трубы будет зависеть только от расстояния r от оси трубы. Мы можем поэтому искать решение уравнений (4.60) в форме:

$$\left.\begin{aligned} &u=\varphi(r)\,x, \quad v=\varphi(r)\,y,\\ &r^2=x^2+y^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

Внося (4.61) в (4.60), мы получим:

$$\Delta=2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}, \tag{4.62}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2(x\varphi)&=\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)x,\\ \nabla^2(y\varphi)&=\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)y,\\ \frac{\partial\Delta}{\partial x}&=\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)x,\\ \frac{\partial\Delta}{\partial y}&=\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)y. \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

Поэтому имеем окончательно уравнения:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)x=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)y=0.$$

Следовательно, $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}=0. \tag{4.64}$$

Решение (4.64) берём в форме

$$\varphi=A+\frac{B}{r^2}, \tag{4.65}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Из (4.65) получим, внося в (4.62):

$$\Delta = 2A. \tag{4.66}$$

Радиальная слагающая упругого перемещения определяется по формуле

$$U = u\frac{x}{r} + v\frac{y}{r} = r\varphi(r). \tag{4.67}$$

Внося сюда $\varphi(r)$ из (4.65), получим:

$$U = Ar + \frac{B}{r}. \tag{4.68}$$

Для написания граничных условий составим сначала выражения для X_x, Y_y, X_y. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2}{r}\right), \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2}{r}\right), \\ X_y &= \frac{2\mu xy}{r}\frac{d\varphi}{dr}. \end{aligned}\right\} \tag{4.69}$$

На поверхности цилиндра имеем:

$$l = \pm\frac{x}{r}, \quad m = \pm\frac{y}{r}, \quad n = 0,$$

причём знак плюс относится к внешней нормали, а знак минус — к внутренней.

Теперь легко получить напряжение на внешней и внутренней поверхностях трубы:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m = \pm\left[\lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]\frac{x}{r}, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m = \pm\left[\lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right]\frac{y}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.70}$$

Внося сюда (4.65) и (4.66), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \pm\left[2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}\right]\frac{x}{r}, \\ Y_\nu &= \pm\left[2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}\right]\frac{y}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.71}$$

В выражениях (4.70) и (4.71) x, y, r для знака плюс берутся на внешней поверхности, а для знака минус — на внутренней.

Граничные условия на внешней поверхности трубы, очевидно, будут:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= -p_0\frac{x}{r}, \\ Y_\nu &= -p_0\frac{y}{r}. \end{aligned}\right\} \text{ для } r = a. \tag{4.72}$$

Граничные условия на внутренней поверхности трубы также будут:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= +p_1 \frac{x}{r}, \\ Y_\nu &= +p_1 \frac{y}{r} \end{aligned}\right\} \quad \text{для } r=b. \tag{4.73}$$

Внося (4.71) в (4.72) и (4.73), мы получим:

$$2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{a^2} = -p_0,$$

$$2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{b^2} = -p_1,$$

что даёт:

$$A = \frac{p_1 b^2 - p_0 a^2}{2(\lambda+\mu)(a^2-b^2)}, \quad B = \frac{(p_1-p_0)a^2 b^2}{2\mu(a^2-b^2)}. \tag{4.74}$$

Очевидно, что нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной к радиусу r, будет:

$$p = X_\nu \frac{x}{r} + Y_\nu \frac{y}{r} = 2(\lambda+\mu)A - \frac{2\mu B}{r^2} \tag{4.75}$$

Внося сюда A и B, найдём:

$$p = \frac{p_1 b^2 - p_0 a^2}{a^2-b^2} - \frac{(p_1-p_0)a^2 b^2}{(a^2-b^2)r^2}. \tag{4.76}$$

Найдём теперь нормальное напряжение τ на площадке, плоскость которой проходит через ось трубы.

Очевидно, нормаль к этой площадке образует с осями координат углы, косинусы которых будут:

$$l = -\frac{y}{r}, \quad m = \frac{x}{r}. \tag{4.77}$$

Тогда для этой площадки имеем компоненты напряжений

$$X_\nu = X_x l + X_y m, \quad Y_\nu = X_y l + Y_y m,$$

а следовательно, нормальный к этой площадке компонент напряжения будет:

$$\tau = X_\nu l + Y_\nu m = X_x l^2 + Y_y m^2 + 2X_y lm. \tag{4.78}$$

Внося (4.69) и (4.77) в (4.78), мы получим после приведения:

$$\tau = \lambda\Delta + 2\mu\varphi. \tag{4.79}$$

Подставляя сюда (4.65) и (4.66), мы найдём:

$$\tau = 2(\lambda+\mu)A + \frac{2\mu B}{r^2}.$$

Внося сюда A и B из (4.74), мы получим:

$$\tau = \frac{p_1 b^2 - p_0 a^2}{a^2 - b^2} + \frac{(p_1 - p_0)\, a^2 b^2}{(a^2 - b^2)\, r^2}. \tag{4.80}$$

Если мы имеем трубу с малой толщиной стенок

$$\delta = a - b$$

под действием внутреннего давления p_1, то, положив $p_0 = 0$, получим:

$$\tau = \frac{p_1 b^2}{(a+b)\,\delta}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right); \tag{4.81}$$

максимальное значение τ будет на внутренней стороне трубы. Для тонкостенной трубы получим приближённую формулу

$$\tau = \frac{p_1 a}{\delta}, \tag{4.82}$$

что представляет известную формулу Мариотта.

§ 51. Труба, быстро вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω около своей оси.

Пусть оси Oxy вращаются вместе с трубой; тогда мы должны ввести массовые силы

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y,$$

вследствие чего уравнения (4.18) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho\omega^2 x &= 0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho\omega^2 y &= 0,\\ \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}&. \end{aligned}\right\} \tag{4.83}$$

Решение их берём в форме:

$$u = x\varphi(r), \quad v = y\varphi(r), \tag{4.84}$$

и тогда легко найти, что $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению:

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) + \rho\omega^2 = 0, \tag{4.85}$$

интеграл которого берём в виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A + \frac{B}{r^2} + Cr^2,\\ C &= -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.86}$$

Вычислим нормальные напряжения на площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r:

$$p = X_\nu \frac{x}{r} + Y_\nu \frac{y}{r};$$

подставляя сюда (4.70), получим:

$$p = \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Внося сюда Δ из (4.62), получим окончательно:

$$p = 2(\lambda+\mu)\varphi + (\lambda+2\mu) r\frac{d\varphi}{dr}, \tag{4.87}$$

что на основании (4.86) приводится к виду:

$$p = 2(\lambda+\mu) A - \frac{2\mu B}{r^2} + 2(2\lambda+3\mu) C r^2. \tag{4.88}$$

Если на внутренней и внешней поверхностях трубы не приложены внешние силы, то имеем граничные условия

$$p = 0 \text{ для } r = a \text{ и } r = b, \tag{4.89}$$

что даёт два уравнения для определения неизвестных A и B:

$$2(\lambda+\mu) A - \frac{2\mu B}{a^2} = -2(2\lambda+3\mu) C a^2,$$
$$2(\lambda+\mu) A - \frac{2\mu B}{b^2} = -2(2\lambda+3\mu) C b^2;$$

решая их и внося значение С, получим:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(2\lambda+3\mu)(a^2+b^2)\rho\omega^2}{8(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}, \\ B &= \frac{(2\lambda+3\mu)a^2b^2\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{4.90}$$

Для вычисления нормального напряжения p на площадке, нормальной к радиусу, и нормального напряжения τ на площадке, проходящей через ось вращения, имеем формулы (4.88) и (4.79), в которые надо внести $\varphi(r)$ из (4.86).

§ 52. Сферическая оболочка, находящаяся под действием равномерного внутреннего и внешнего давления (задача Ламе).

Ввиду отсутствия массовых сил уравнения (4.18) для упругого равновесия примут вид ($X=Y=Z=0$):

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w&=0,\\\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&+\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{4.91}$$

Поскольку деформация оболочки будет симметрична относительно центра сферической оболочки, в котором мы примем начало координат x, y, z, мы ищем решение (4.91) в форме:

$$\left.\begin{aligned}u&=\varphi(r)\,x,\\v&=\varphi(r)\,y,\\w&=\varphi(r)\,z.\end{aligned}\right\}\tag{4.92}$$

Внося (4.92) в (4.91), мы найдём, что $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{d\varphi}{dr}=0,\tag{4.93}$$

общий интеграл которого будет:

$$\varphi(r)=A+\frac{B}{r^3};\tag{4.94}$$

легко также получить

$$\Delta=3\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}=3A.\tag{4.95}$$

Обозначая через $p(r)$ нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной к радиусу r, мы найдём:

$$p(r)=\lambda\Delta+2\mu\frac{d}{dr}\left(\frac{ux+vy+wz}{r}\right)=(3\lambda+2\mu)A-\frac{4B\mu}{r^3}.\tag{4.96}$$

Пусть оболочка ограничена снаружи сферой радиуса $r=a$, и на ней имеется равномерное давление p_0, а внутри также ограничена сферой радиуса $r=b$, и на ней имеется равномерное давление p_1. Граничные условия поэтому будут:

$$\left.\begin{aligned}p&=-p_0\ \text{для}\ r=a,\\p&=-p_1\ \text{для}\ r=b;\end{aligned}\right\}\tag{4.97}$$

отсюда получим два уравнения, которые позволяют определить A и B в форме:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p_1 b^3 - p_0 a^3}{(3\lambda+2\mu)(a^3-b^3)}, \\ B &= \frac{a^3 b^3 (p_1 - p_0)}{4\mu (a^3 - b^3)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.98}$$

Внося это в (4.96), получим:

$$p(r) = \frac{p_1 b^3 - p_0 a^3}{a^3 - b^3} - \left(\frac{a^3 b^3}{r^3}\right) \frac{p_1 - p_0}{a^3 - b^3}. \tag{4.99}$$

Найдём теперь нормальное напряжение на любой площадке, плоскость которой проходит через центр сферической оболочки. Обозначим его через τ.

Очевидно, радиус r, проведённый из центра сферической оболочки, образует с осями x, y, z (начало в центре сферической оболочки) углы, косинусы которых суть:

$$l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \quad n = \frac{z}{r}. \tag{4.100}$$

Пусть нормаль к упомянутой площадке образует с осями углы, косинусы которых суть l', m', n'; тогда, очевидно,

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

или, внося (4.100), получим условие

$$l'x + m'y + n'z = 0. \tag{4.101}$$

Для величины τ имеем формулу [это есть первая формула системы (2.25)]:

$$\tau = X_x l'^2 + Y_y m'^2 + Z_z n'^2 + 2Y_z m'n' + 2X_z l'n' + 2X_y l'm'. \tag{4.102}$$

Но по основным формулам (3.52) получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}x^2\right), \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}y^2\right), \\ Z_z &= \lambda\Delta + 2\mu\left(\varphi + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}z^2\right), \\ Y_z &= 2\mu\frac{yz}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \\ X_z &= 2\mu\frac{xz}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \\ X_y &= 2\mu\frac{xy}{r}\frac{d\varphi}{dr}. \end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

Внося это в (4.102), найдём:

$$\begin{aligned}\tau=(\lambda\Delta+2\mu\varphi)(l'^2+m'^2+n'^2)+\frac{2\mu}{r}\frac{d\varphi}{dr}(x^2l'^2+y^2m'^2+z^2n'^2)+\\+\frac{4\mu}{r}\frac{d\varphi}{dr}(xyl'm'+xzl'n'+yzm'n')=\\=(\lambda\Delta+2\mu\varphi)(l'^2+m'^2+n'^2)+\frac{2\mu}{r}\frac{d\varphi}{dr}(l'x+m'y+n'z)^2;\end{aligned}$$

в силу (4.101) и известного соотношения $l'^2+m'^2+n'^2=1$, получим:

$$\tau=\lambda\Delta+2\mu\varphi=(3\lambda+2\mu)A+\frac{2\mu B}{r^3}.$$

Внося сюда A и B, получим:

$$\tau=\frac{p_1b^3-p_0a^3}{a^3-b^3}+\left(\frac{a^3b^3}{2r^3}\right)\frac{p_1-p_0}{a^3-b^3}. \tag{4.104}$$

В случае тонкой оболочки толщиною δ, находящейся под внутренним давлением p_1, имеем приближённо:

$$\tau=\frac{p_1a}{2}. \tag{4.105}$$

Это есть известная формула из теории сопротивления материалов.

§ 53. Некоторые формы решений уравнений равновесия упругого однородного изотропного тела.

Для равновесия однородного изотропного упругого тела, как мы видели в § 41, Ламе предложил очень простую форму уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2u+\rho X=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2v+\rho Y=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2w+\rho Z=0,\\\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{4.106}$$

Вопрос об интегрировании уравнений упругого равновесия при заданных граничных условиях привлекал внимание великих математиков, начиная с Коши и Пуассона, но не получил у них решения. Впоследствии этим вопросом занимались многие выдающиеся учёные; ими были предложены различные формы выражений, в которых могут быть представлены решения уравнений упругого равновесия. Эти формы решений и методы их нахождения, на наш взгляд, представляют большой интерес, но по существу переносят трудности от одной системы уравнений к другой, повидимому, более простой.

Рассмотрим два метода решения уравнений равновесия (4.106).

а) Метод Буссинеска-Галёркина и Нейбера-Папковича.

В § 14 даны формулы Стокса для разложения, при весьма общих условиях, вектора упругого смещения на два составляющих вектора: первый, связанный с изменением объёма, есть градиент скалярного потенциала; второй, представляет ротацию некоторого соленоидального вектора.

Обозначив, для удобства, скалярный потенциал через $A\varphi(x, y, z)$, где A — постоянная, подлежащая определению, перепишем формулы Стокса (1.127) и (1.128) в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= A\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= A\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0. \tag{4.108}$$

Уравнения Ламе (4.106) при отсутствии массовых сил ($X=Y=Z=0$) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v &= 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.109}$$

причём

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4.110}$$

Внося (4.107) в (4.109), мы получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2\left[A\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right] &= 0, \\ \nabla^2\left[A\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right] &= 0, \\ \nabla^2\left[A\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Выбирая произвольную постоянную A в виде:

$$A=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \tag{4.111}$$

мы получим окончательно систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right]&=0,\\ \nabla^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right]&=0,\\ \nabla^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right]&=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.112}$$

Для решения этих уравнений мы составим из них три единственно возможные комбинации.

Для получения первой комбинации возьмём сначала первое и второе уравнения системы (4.112). Мы удовлетворим первому из них, положив:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial x},\tag{4.113}$$

где $f_1(x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2 f_1=0.\tag{4.114}$$

Мы удовлетворим уравнению (4.113), положив:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=f_1+\frac{\partial\Phi_3}{\partial z},\\ H&=\frac{\partial\Omega_3}{\partial z},\\ G&=\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_3}{\partial y}+\xi_1(x, y),\end{aligned}\right\}\tag{4.115}$$

где $\Phi_3(x, y, z)$, $\Omega_3(x, y, z)$, $\xi_1(x, y)$ суть пока произвольные функции. Внося (4.115) во второе уравнение системы (4.112), мы получим, вследствие (4.114), уравнение:

$$\nabla^2\left[\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial z\,\partial x}\right]=0.\tag{4.116}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, приняв

$$F=-\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}+\frac{\partial\Omega_3}{\partial x}+\psi_1,\tag{4.117}$$

где $\psi_1(x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2\psi_1=0.\tag{4.118}$$

Внося (4.115) и (4.117) в третье уравнение системы (4.112), мы получим, вследствие (4.114) и (4.118), уравнение

$$\nabla^2\left(\nabla^2\Phi_3+\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)=0.\tag{4.119}$$

Наложив на произвольную функцию $\xi_1(x, y)$ условие

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0, \tag{4.120}$$

мы приведём уравнение (4.119) к виду:

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_3 = \nabla^4\Phi_3 = 0. \tag{4.121}$$

Следовательно, Φ_3 есть *бигармоническая* функция трёх переменных x, y, z. Внесём (4.115) и (4.117) в формулы (4.107); используя условие (4.120), делая приведение и замечая, что ξ_1 не зависит от z, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u_{12} &= B\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\,\partial z} + A\frac{\partial f_1}{\partial x},\\ v_{12} &= B\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\,\partial z} + A\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z},\\ w_{12} &= B\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2} + \nabla^2\Phi_3 + A\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{4.122}$$

где вследствие (4.111)

$$B = A - 1 = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}. \tag{4.123}$$

Рассмотрим вторую комбинацию уравнений (4.112). Возьмём сначала второе и третье уравнения этой системы. Мы удовлетворим второму уравнению системы (4.112), положив:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \tag{4.124}$$

где $f_2(x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2 f_2 = 0. \tag{4.125}$$

Мы удовлетворим уравнению (4.124), положив:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= f_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x},\\ F &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x},\\ H &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \xi_2(y, z), \end{aligned}\right\} \tag{4.126}$$

где $\Phi_1(x, y, z)$, $\Omega_1(x, y, z)$, $\xi_2(y, z)$ суть пока произвольные функции. Внося (4.126) в третье уравнение системы (4.112), мы получим вследствие (4.125):

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x\,\partial y}\right) = 0. \tag{4.127}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, приняв

$$G = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \psi_2, \tag{4.128}$$

где $\psi_2\ (x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \psi_2 = 0. \tag{4.129}$$

Внося (4.126) и (4.128) в первое уравнение системы (4.112), мы получим, вследствие (4.125) и (4.129), уравнение

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = 0. \tag{4.130}$$

Наложив на произвольную функцию $\xi_2 (y, z)$ условие

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0, \tag{4.131}$$

мы приведём уравнение (4.130) к виду:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_1 = \nabla^4 \Phi_1 = 0. \tag{4.132}$$

Следовательно, Φ_1 есть *бигармоническая* функция трёх переменных x, y, z независимая от Φ_3.

Внесём теперь (4.126) и (4.128) в формулы (4.107); используя (4.131), делая приведение и замечая, что ξ_2 не зависит от x, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u_{23} &= B\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \nabla^2 \Phi_1 + A\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, \\ v_{23} &= B\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y\, \partial x} + A\frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ w_{23} &= B\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x\, \partial z} + A\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.133}$$

Составим, наконец, третью и последнюю возможную комбинацию уравнений (4.112). Рассмотрим сначала третье и первое уравнения системы (4.112). Мы удовлетворим третьему уравнению системы (4.112), положив:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \tag{4.134}$$

где $f_3 (x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 f_3 = 0. \tag{4.135}$$

Мы удовлетворим уравнению (4.134), положив:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= f_3 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \\ G &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \\ F &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} + \xi_3 (x, z), \end{aligned}\right\} \tag{4.136}$$

где $\Phi_2(x, y, z)$, $\Omega_2(x, y, z)$, $\xi_3(x, z)$ суть пока произвольные функции.

Внося (4.136) в первое уравнение системы (4.112), мы получим, вследствие (4.135):

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial y\,\partial z}\right)=0. \tag{4.137}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, приняв

$$H=-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}+\psi_3, \tag{4.138}$$

где $\psi_3(x, y, z)$ есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2\psi_3=0. \tag{4.139}$$

Внося (4.136) и (4.138) во второе уравнение системы (4.112), мы получим, вследствие (4.135) и (4.139), уравнение

$$\nabla^2\left(\nabla^2\Phi_2+\frac{\partial\xi_3}{\partial z}\right)=0. \tag{4.140}$$

Наложив на произвольную функцию $\xi_3(x, z)$ условие

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial z}=0, \tag{4.141}$$

мы приведём уравнение (4.140) к виду:

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_2=\nabla^4\Phi_2=0. \tag{4.142}$$

Следовательно, Φ_2 есть *бигармоническая* функция трёх переменных x, y, z независимая от функций Φ_3 и Φ_1. Используя (4.141), делая приведение и замечая, что ξ_3 не зависит от y, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
u_{31}&=B\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\,\partial y}+A\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y},\\
v_{31}&=B\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\nabla^2\Phi_2+A\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x},\\
w_{31}&=B\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y\,\partial z}+A\frac{\partial f_3}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.143}$$

Вследствие линейности уравнений (4.109) мы получим общее решение, складывая решения (4.122), (4.133) и (4.143):

$$\left.\begin{aligned}
u&=u_{12}+u_{23}+u_{31},\\
v&=v_{12}+v_{23}+v_{31},\\
w&=w_{12}+w_{23}+w_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.144}$$

Обозначим

$$f_0=A(f_1+f_2+f_3), \tag{4.145}$$

причём, вследствие (4.114), (4.125) и (4.135), будем иметь:

$$\nabla^2 f_0 = 0. \tag{4.146}$$

Далее обозначим

$$\omega = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}. \tag{4.147}$$

Внося (4.122), (4.133) и (4.143) в (4.144), мы получим, вследствие (4.145) и (4.147), после приведения следующую систему решений уравнений (4.109):

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + B\frac{\partial \omega}{\partial x} + \nabla^2\Phi_1, \\ v &= \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + B\frac{\partial \omega}{\partial y} + \nabla^2\Phi_2, \\ w &= \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + B\frac{\partial \omega}{\partial z} + \nabla^2\Phi_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.148}$$

Здесь Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть произвольные бигармонические функции, а f_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — произвольные гармонические функции.

Решение (4.148) найдено нами, исходя из общего выражения (4.107) для упругого смещения, сложением трёх решений уравнений (4.112), полученных путём трёх единственно возможных их комбинаций. Поэтому мы можем рассматривать его как общее решение уравнений Ламе (4.109) при отсутствии массовых сил. Решение, которое получится, если в (4.148) положить

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0,$$

есть хорошо известное решение уравнений (4.109). Оно не даёт ничего нового. Но если в формулах (4.148) положить

$$f_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0, \tag{4.149}$$

то получится решение уравнений (4.109) в форме, впервые данной в 1931 г. Б. Г. Галёркиным:

$$\left.\begin{aligned} u &= B\frac{\partial \omega}{\partial x} + \nabla^2\Phi_1, \\ v &= B\frac{\partial \omega}{\partial y} + \nabla^2\Phi_2, \\ w &= B\frac{\partial \omega}{\partial z} + \nabla^2\Phi_3, \end{aligned}\right\} \tag{4.150}$$

причём

$$\omega = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z},$$

$$B = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Это решение очень важно, так как раскрывает бигармоническую природу решения уравнений (4.109) (т. е. уравнений упругого равновесия Ламе при отсутствии массовых сил).

Введём теперь три функции $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$ и $\zeta(x, y, z)$ при помощи соотношений

$$\xi = \nabla^2\Phi_1, \quad \eta = \nabla^2\Phi_2, \quad \zeta = \nabla^2\Phi_3. \tag{4.151}$$

Очевидно, вследствие (4.121), (4.132) и (4.142), мы будем иметь:

$$\nabla^2\xi = \nabla^2\eta = \nabla^2\zeta = 0. \tag{4.152}$$

Так как Φ_1, Φ_2, Φ_3 независимы между собой, то ξ, η, ζ суть *независимые* гармонические функции.

Подвергая обе части уравнения (4.147) операции ∇^2, будем иметь:

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\Phi_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\Phi_3).$$

Внося сюда (4.151), мы получим уравнение

$$\nabla^2\omega = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}, \tag{4.153}$$

общее решение которого имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(\xi x + \eta y + \zeta z), \tag{4.154}$$

где ω_0 есть произвольная гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2\omega_0 = 0. \tag{4.155}$$

Действительно, из (4.154) имеем:

$$\nabla^2\omega = \nabla^2\omega_0 + \frac{1}{2}x\nabla^2\xi + \frac{1}{2}y\nabla^2\eta + \frac{1}{2}z\nabla^2\zeta + \\ + \frac{1}{2}\xi\nabla^2 x + \frac{1}{2}\eta\nabla^2 y + \frac{1}{2}\zeta\nabla^2 z + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

что вследствие

$$\nabla^2 x = \nabla^2 y = \nabla^2 z = 0$$

и соотношений (4.152) и (4.155) приводится к уравнению (4.153).

Из соотношений (4.151) и (4.150) мы получим решение уравнений (4.109) в виде:

$$u = B\frac{\partial\omega}{\partial x} + \xi, \quad v = B\frac{\partial\omega}{\partial y} + \eta, \quad w = B\frac{\partial\omega}{\partial z} + \zeta, \tag{4.156}$$

причём

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(\xi x + \eta y + \zeta z),$$
$$B = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Это решение было дано в 1934 г. Нейбером и Папковичем независимо друг от друга. Очень важно, что ξ, η, ζ, ω_0 суть *четыре независимые гармонические функции.*

Функция ω, заданная формулой (4.154), есть бигармоническая. Действительно, из (4.153), на основании (4.152) имеем:

$$\nabla^4\omega = \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\xi + \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\eta + \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\zeta = 0,$$

откуда следует важное уравнение

$$\nabla^4\omega = \nabla^2\nabla^2\omega = 0. \tag{4.157}$$

Если бы мы прямо внесли (4.156) в уравнение (4.109), то пришли бы к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} B\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\nabla^2\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2\xi = 0,\\ B\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\nabla^2\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2\eta = 0,\\ B\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\nabla^2\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2\zeta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.158}$$

где

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

а величины B, ξ, η, ζ можно считать произвольными. Здесь возможны два способа упрощения системы (4.158):

1) Мы можем считать, что ξ, η, ζ суть произвольные гармонические функции, т. е. удовлетворяющие уравнениям (4.152). Для упрощения вычислений можно принять

$$B\cdot\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} = -1,$$

что даёт для B значение (4.123). В этом случае мы приведём систему (4.158) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\omega - \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\omega - \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\omega - \theta) = 0.$$

Мы удовлетворим этой системе, положив

$$\nabla^2\omega = \theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

а это есть прежнее уравнение (4.153), и мы получим для ω выражение (4.154), которое мы уже имели.

2) Мы можем принять

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0,$$

но это значит, что вектор (ξ, η, ζ) есть соленоидальный и может быть рассматриваем как ротация некоторого вектора $\boldsymbol{F}$ (тоже соленоидального). Это приводит формулы (4.156) к формулам Стокса (4.107), т. е. к случаю, нами уже рассмотренному.

b) Метод Ламе.

В случае отсутствия массовых сил, имеем:

$$X = Y = Z = 0; \tag{4.159}$$

ищем решения уравнения(4.106) при условии (4.159) в форме:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Omega_1 + A\left(\frac{\partial\chi_3}{\partial y} - \frac{\partial\chi_2}{\partial z}\right), \\ v_1 &= \Omega_2 + A\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial z} - \frac{\partial\chi_3}{\partial x}\right), \\ w_1 &= \Omega_3 + A\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x} - \frac{\partial\chi_1}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.160}$$

Составляем сначала величину Δ:

$$\Delta = \frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\Omega_3}{\partial z}, \tag{4.161}$$

затем вносим (4.160) и (4.161) в (4.106), что даёт:

$$\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\Omega_3}{\partial z}\right) + A\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\chi_3}{\partial y} - \frac{\partial\chi_2}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2\Omega_1 = 0, \\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\Omega_3}{\partial z}\right) + A\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial z} - \frac{\partial\chi_3}{\partial x}\right) + \mu\nabla^2\Omega_2 = 0, \\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\Omega_3}{\partial z}\right) + A\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x} - \frac{\partial\chi_1}{\partial y}\right) + \mu\nabla^2\Omega_3 = 0. \end{aligned}$$

Выберем сначала

$$\nabla^2\Omega_1 = 0, \quad \nabla^2\Omega_2 = 0, \quad \nabla^2\Omega_3 = 0, \tag{4.162}$$

т. е. Ω_1, Ω_2, Ω_3 суть *гармонические* функции; тогда оставшиеся уравнения будут удовлетворены, если χ_1, χ_2, χ_3 удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\chi_1 &= \frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{\partial\Omega_3}{\partial y}, \\ \nabla^2\chi_2 &= \frac{\partial\Omega_3}{\partial x} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial z}, \\ \nabla^2\chi_3 &= \frac{\partial\Omega_1}{\partial y} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{4.163}$$

и постоянная A определяется из условия

$$A = \frac{\lambda+\mu}{\mu}. \tag{4.164}$$

Если u_0, v_0, w_0 суть частные решения системы (4.106), то:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_1, \\ v &= v_0 + v_1, \\ w &= w_0 + w_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.165)$$

есть решение системы (4.106).

§ 54. Формулы Б. Г. Галёркина для решения уравнений упругого равновесия однородного изотропного тела в напряжениях.

Формулы (4.150), как заметил П. Ф. Папкович, были даны знаменитым французским учёным Буссинеском, который вывел их для других целей и не обратил внимания на их значение в теории упругости.

Б. Г. Галёркин получил их первоначально как решение уравнений Коши (4.24) в форме:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi_1 - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \sigma\nabla^2\omega\right)\right], \\ Y_y &= 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi_2 - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \sigma\nabla^2\omega\right)\right], \\ Z_z &= 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\varphi_3 - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} - \sigma\nabla^2\omega\right)\right], \\ Y_z &= \mu\left[\nabla^2\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right) - \frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z}\right], \\ X_z &= \mu\left[\nabla^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right) - \frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z}\right], \\ X_y &= \mu\left[\nabla^2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right], \\ \omega &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.166)$$

причём φ_1, φ_2, φ_3, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \mu\nabla^4\varphi_1 + \rho X &= 0, \\ \mu\nabla^4\varphi_2 + \rho Y &= 0, \\ \mu\nabla^4\varphi_3 + \rho Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.167)$$

В случае отсутствия массовых сил φ_1, φ_2, φ_3 суть три независимых решения бигармонического уравнения. То же имеет место в случае силы тяжести.

Так как во многих случаях более удобно задаваться компонентами напряжённого состояния, то здесь метод Б. Г. Галёркина даёт удобный способ решения.

§ 55. О бигармонических функциях.

Введённые нами в § 53 бигармонические функции имеют важное значение в теории упругости. Мы определили как бигармоническую, такую функцию $\Phi(x, y, z)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2\nabla^2\Phi = 0, \tag{4.168}$$

где обозначено

$$\nabla^2(\quad) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\quad) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\quad) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad). \tag{4.169}$$

Так как каждая гармоническая функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 f = 0, \tag{4.170}$$

то она удовлетворяет также уравнению

$$\nabla^2\nabla^2 f = 0,$$

а следовательно, есть бигармоническая функция.

Покажем, что если $f(x, y, z)$ есть гармоническая функция, то функция

$$\Phi = [Ax + By + Cz + D(x^2 + y^2 + z^2)] f(x, y, z), \tag{4.171}$$

где A, B, C, D — постоянные, есть бигармоническая функция. Итак, дано

$$\nabla^2 f = 0.$$

Составим тогда

$$\nabla^2\Phi = [Ax + By + Cz + D(x^2 + y^2 + z^2)]\nabla^2 f + \\ + 2A\frac{\partial f}{\partial x} + 2B\frac{\partial f}{\partial y} + 2C\frac{\partial f}{\partial z} + 4D\left[\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial z}z + f\right].$$

Далее имеем:

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 2A\nabla^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2B\nabla^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2C\nabla^2\frac{\partial f}{\partial z} + \\ + 4D\left[x\nabla^2\frac{\partial f}{\partial x} + y\nabla^2\frac{\partial f}{\partial y} + z\nabla^2\frac{\partial f}{\partial z} + 2\nabla^2 f\right] = 0,$$

ибо, вследствие (4.170),

$$\nabla^2\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Итак, функция $\Phi(x, y, z)$, определённая формулой (4.171), есть *бигармоническая функция.*

ГЛАВА V.

УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ.

§ 56. Криволинейные координаты в пространстве.

Мы будем обозначать через α, β, γ параметры трёх независимых семейств поверхностей, которые будут даны уравнениями:

$$f_1(x, y, z)=\alpha; \quad f_2(x, y, z)=\beta; \quad f_3(x, y, z)=\gamma. \tag{5.1}$$

Если через каждую точку пространства проходит одна поверхность из каждого семейства, то положение точки может быть определено значениями параметров α, β, γ, характеризующими три поверхности, проходящие через неё. Для избежания многозначности надо должным образом ограничить рассматриваемую часть пространства. Например, в случае эллиптических координат следует взять один октант, ограниченный главными плоскостями. Соседняя точка будет определяться значениями параметров

$$\alpha+d\alpha, \quad \beta+d\beta, \quad \gamma+d\gamma.$$

Величины α, β, γ называются *криволинейными координатами* точки.

Если теперь в точке пересечения поверхностей мы проведём к каждой поверхности нормаль, то косинусы углов этих нормалей с прямоугольными осями координат x, y, z будут даны следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
l_1&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & m_1&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & n_1&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial z},\\
l_2&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\beta}{\partial x}, & m_2&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\beta}{\partial y}, & n_2&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\beta}{\partial z},\\
l_3&=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\gamma}{\partial x}, & m_3&=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\gamma}{\partial y}, & n_3&=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\gamma}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2,\\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2,\\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемые нами три семейства поверхностей повсюду пересекаются между собой под прямыми углами. Но известно, что угол, под которым пересекаются в данной точке две поверхности, равен углу между нормалями к поверхностям в этой точке. Поэтому так как три поверхности пересекаются в точке под прямыми углами, то *три нормали к этим поверхностям в рассматриваемой точке взаимно перпендикулярны.*

Следовательно, имеем три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2 &= 0,\\ l_1 l_3+m_1 m_3+n_1 n_3 &= 0,\\ l_2 l_3+m_2 m_3+n_2 n_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Внося сюда (5.2), мы получим следующие условия ортогональности:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z} &= 0,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= 0,\\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Пусть точка P лежит на пересечении трёх поверхностей α, β, γ, а смежная с ней точка Q лежит на пересечении смежных поверхностей $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$. Проведём в точке P три взаимно перпендикулярные нормали к поверхностям α, β, γ, для которых косинусы даны формулами (5.2). Проекцию отрезка PQ на нормаль к поверхности α обозначим через dn_1, проекцию PQ на нормаль к поверхности β обозначим через dn_2, проекцию PQ на нормаль к поверхности γ обозначим через dn_3.

Если координаты точки P суть x, y, z, а координаты точки Q суть $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, то, очевидно, имеем:

$$dn_1 = l_1\,dx+m_1\,dy+n_1 dz.$$

Внося сюда l_1, m_1, n_1 из (5.2), мы получим:

$$dn_1=\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx+\frac{\partial\alpha}{\partial y}dy+\frac{\partial\alpha}{\partial z}dz\right)=\frac{d\alpha}{h_1}.$$

Так же получим:

$$dn_2 = l_2\,dx + m_2\,dy + n_2\,dz = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}dz\right) = \frac{d\beta}{h_2},$$

$$dn_3 = l_3\,dx + m_3\,dy + n_3\,dz = \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}dx + \frac{\partial\gamma}{\partial y}dy + \frac{\partial\gamma}{\partial z}dz\right) = \frac{d\gamma}{h_3}.$$

Таким образом, мы имеем три взаимно ортогональных отрезка нормалей в данной точке:

$$dn_1 = \frac{d\alpha}{h_1}, \quad dn_2 = \frac{d\beta}{h_2}, \quad dn_3 = \frac{d\gamma}{h_3}. \tag{5.6}$$

Обозначая расстояние PQ через ds, получим:

$$ds^2 = (dn_1)^2 + (dn_2)^2 + (dn_3)^2. \tag{5.7}$$

Внося сюда (5.6), будем иметь важную формулу

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}. \tag{5.8}$$

Здесь h_1, h_2, h_3 являются функциями α, β, γ.

До сих пор мы рассматривали α, β, γ, как функции x, y, z. Обратно, можно рассматривать x, y, z, как функции α, β, γ. Поэтому получим, дифференцируя α, β, γ по правилу сложных функций, следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} &= 1, \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Для удобства вычисления введём обозначения отношений

$$A = \frac{\partial y}{\partial\alpha} : \frac{\partial x}{\partial\alpha}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial\alpha} : \frac{\partial x}{\partial\alpha}. \tag{5.10}$$

Тогда второе и третье уравнения системы (5.9) дают уравнения:

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}A + \frac{\partial\beta}{\partial z}B = -\frac{\partial\beta}{\partial x}; \quad \frac{\partial\gamma}{\partial y}A + \frac{\partial\gamma}{\partial z}B = -\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Решая их относительно A и B, получим:

$$A = \frac{\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\dfrac{\partial\beta}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} - \dfrac{\partial\beta}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}}, \quad B = \frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}}{\dfrac{\partial\beta}{\partial y}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} - \dfrac{\partial\beta}{\partial z}\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}}.$$

Отсюда, вследствие (5.10), мы получим:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial y}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial x}}. \qquad (5.11)$$

Поступая, таким же образом, получим из первого и второго уравнений системы (5.5) уравнения:

$$A_1\frac{\partial \beta}{\partial y}+B_1\frac{\partial \beta}{\partial z}=-\frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad A_1\frac{\partial \gamma}{\partial y}+B_1\frac{\partial \gamma}{\partial z}=-\frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

где введены обозначения отношений:

$$A_1=\frac{\partial \alpha}{\partial y}:\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad B_1=\frac{\partial \alpha}{\partial z}:\frac{\partial \alpha}{\partial x}. \qquad (5.12)$$

Решая уравнения относительно A_1 и B_1 и используя соотношения (5.12), мы получим:

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial y}-\frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial z}}{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial x}}. \qquad (5.13)$$

Сравнивая (5.11) и (5.13), мы получим:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial z}}=\theta. \qquad (5.14)$$

Обозначая через θ величину этих отношений, мы получим отсюда:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}=\theta\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}=\theta\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}=\theta\frac{\partial \alpha}{\partial z}. \qquad (5.15)$$

Внося (5.15) в первое соотношение системы (5.9), мы получим:

$$\theta\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right]=1,$$

что в силу обозначений (5.3) даёт:

$$\theta h_1^2=1. \qquad (5.16)$$

Внося (5.16) в (5.14), мы получим соотношения:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \alpha}{\partial z}}=\frac{1}{h_1^2}. \qquad (5.17)$$

Подобным образом мы получим ещё два соотношения той же группы:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \beta}}{\frac{\partial \beta}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \beta}}{\frac{\partial \beta}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \beta}}{\frac{\partial \beta}{\partial z}} = \frac{1}{h_2^2}, \tag{5.18}$$

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \gamma}}{\frac{\partial \gamma}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \gamma}}{\frac{\partial \gamma}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \gamma}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}} = \frac{1}{h_3^2}. \tag{5.19}$$

Внося формулы (5.17), (5.18) и (5.19) в формулы (5.5), мы получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} &= 0,\\
\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \gamma} &= 0,\\
\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \gamma} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Введём теперь величины H_1, H_2, H_3 при помощи формул:

$$\left.\begin{aligned}
H_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2,\\
H_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2,\\
H_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

Тогда, вследствие (5.17), (5.18) и (5.19), мы получим:

$$H_1^2 = \frac{1}{h_1^4}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$H_2^2 = \frac{1}{h_2^4}\left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$H_3^2 = \frac{1}{h_3^4}\left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2\right].$$

Но вследствие обозначения (5.3) мы получим отсюда:

$$H_1^2 = \frac{1}{h_1^2}, \quad H_2^2 = \frac{1}{h_2^2}, \quad H_3^2 = \frac{1}{h_3^2}. \tag{5.22}$$

Из соотношений (5.17), (5.18) и (5.19) мы имеем:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = h_1^2\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = h_1^2\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = h_1^2\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = h_2^2\frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = h_2^2\frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = h_2^2\frac{\partial z}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = h_3^2\frac{\partial x}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = h_3^2\frac{\partial y}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = h_3^2\frac{\partial z}{\partial \gamma}.$$

Внося эти формулы в (5.2), мы получим формулы для косинусов:

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= h_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}, & m_1 &= h_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}, & n_1 &= h_1\frac{\partial z}{\partial\alpha},\\
l_2 &= h_2\frac{\partial x}{\partial\beta}, & m_2 &= h_2\frac{\partial y}{\partial\beta}, & n_2 &= h_2\frac{\partial z}{\partial\beta},\\
l_3 &= h_3\frac{\partial x}{\partial\gamma}, & m_3 &= h_3\frac{\partial y}{\partial\gamma}, & n_3 &= h_3\frac{\partial z}{\partial\gamma}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

§ 57. Соотношения Ламе для H_1, H_2, H_3.

Ламе показал, что H_1, H_2, H_3, рассматриваемые как функции α, β, γ, удовлетворяют шести соотношениям. Три из них имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}=0,\\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}=0,\\
\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=0;
\end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

три остальных имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial\beta\,\partial\gamma}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}=0,\\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial\gamma\,\partial\alpha}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}=0,\\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Доказательство этих формул даётся в курсах дифференциальной геометрии.

§ 58. Компоненты деформации в ортогональных криволинейных координатах.

Возьмём две смежные точки

$$P(\alpha,\ \beta,\ \gamma), \qquad Q(\alpha+a,\ \beta+b,\ \gamma+c)$$

на малом расстоянии $r = PQ$ друг от друга. В точке P построим три взаимно ортогональные нормали к трём взаимно ортогональным поверхностям, проходящим через точку P. Отрезок PQ будет составлять с этими тремя нормалями углы, косинусы которых мы обозначим через l, m, n. Для проекций отрезка PQ на упомянутые три взаимно ортогональные нормали имеем формулы (5.6), в которые надо внести:

$$d\alpha = a, \quad d\beta = b, \quad d\gamma = c. \tag{5.26}$$

Также имеем проекции отрезка PQ на три нормали в точке P:

$$dn_1 = lr, \quad dn_2 = mr, \quad dn_3 = nr. \tag{5.27}$$

Внося (5.26) и (5.27) в (5.6), мы получим:

$$lr = \frac{a}{h_1}, \quad mr = \frac{b}{h_2}, \quad nr = \frac{c}{h_3}.$$

Отсюда имеем (приближённые) соотношения:

$$a = h_1 lr, \quad b = h_2 mr, \quad c = h_3 nr. \tag{5.28}$$

Пусть вследствие деформации точка P перемещается в $P_1(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta)$, а точка Q перемещается в Q_1. Отрезок PQ перемещается в положение P_1Q_1. Пусть новая длина этого отрезка есть r_1, тогда $P_1Q_1 = r_1$.

Обозначим через u_α, u_β, u_γ проекции смещения PP_1 на три взаимно ортогональные нормали dn_1, dn_2, dn_3. Для малых смещений мы можем принять, что ξ, η, ζ и u_α, u_β, u_γ суть малые величины одного порядка. Применим формулы (5.6), внеся в них:

$$dn_1 = u_\alpha, \quad dn_2 = u_\beta, \quad dn_3 = u_\gamma,$$
$$d\alpha = \xi, \quad d\beta = \eta, \quad d\gamma = \zeta,$$

что даёт:

$$u_\alpha = \frac{\xi}{h_1}, \quad u_\beta = \frac{\eta}{h_2}, \quad u_\gamma = \frac{\zeta}{h_3}. \tag{5.29}$$

Криволинейные координаты точки Q_1 приближённо будут:

$$\alpha + a + \xi + a\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + c\frac{\partial \xi}{\partial \gamma},$$
$$\beta + b + \eta + a\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \eta}{\partial \beta} + c\frac{\partial \eta}{\partial \gamma},$$
$$\gamma + c + \zeta + a\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} + c\frac{\partial \zeta}{\partial \gamma}.$$

Разности значений криволинейных координат точек Q_1 и P_1 поэтому будут:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right) + b\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + c\frac{\partial \xi}{\partial \gamma}, \\ \eta_1 &= a\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + b\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right) + c\frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \\ \zeta_1 &= a\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} + c\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Значения $h_1'^{-1}$, $h_2'^{-1}$, $h_3'^{-1}$ в точке P_1 с принятой точностью определяются формулами:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{h_1'}&=\frac{1}{h_1}+\xi\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_1}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right),\\
\frac{1}{h_2'}&=\frac{1}{h_2}+\xi\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_2}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right),\\
\frac{1}{h_3'}&=\frac{1}{h_3}+\xi\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_3}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_3}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{5.31}
$$

Проведём в точке P_1 к трём проходящим через неё ортогональным поверхностям нормали, образующие ортогональный трёхгранник. Проекции отрезка P_1Q_1 на эти три взаимно ортогональные нормали могут быть вычислены по формулам вида (5.29):

$$
(r_1)_\alpha=\frac{\xi_1}{h_1'},\quad (r_1)_\beta=\frac{\eta_1}{h_2'},\quad (r_1)_\gamma=\frac{\zeta_1}{h_3'}.\tag{5.32}
$$

В этих формулах следует отбросить все члены выше первого порядка относительно ξ, η, ζ и их производных, что даёт:

$$
(r_1)_\alpha=\frac{a}{h_1}\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right)+\frac{b}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+\frac{c}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}+a\xi\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\alpha}+a\eta\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\beta}+a\zeta\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\gamma}.
$$

Внося сюда a, b, c по формулам (5.28) и ξ, η, ζ по формулам (5.29):

$$
\xi=h_1u_\alpha,\quad \eta=h_2u_\beta,\quad \zeta=h_3u_\gamma,
$$

мы получим:

$$
\begin{aligned}
(r_1)_\alpha=r\Bigl\{l\Bigl[1+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+h_1\xi\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\alpha}+h_1\eta\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\beta}+h_1\zeta\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\gamma}\Bigr]&+\\
+m\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+n\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\Bigr\}&=\\
=r\Bigl\{l\Bigl[1+h_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+u_\alpha\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}-h_1^2u_\alpha\frac{\partial h_1}{\partial\alpha}h_1^{-2}+u_\beta h_1h_2\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\beta}&+\\
+u_\gamma h_1h_3\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\gamma}\Bigr]+m\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1u_\alpha)+n\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1u_\alpha)\Bigr\}&;
\end{aligned}
$$

окончательно получим:

$$
\begin{aligned}
(r_1)_\alpha=r\Bigl\{l\Bigl[1+h_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+h_1h_2u_\beta\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\beta}+h_1h_3u_\gamma\frac{\partial h_1^{-1}}{\partial\gamma}\Bigr]&+\\
+m\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1u_\alpha)+n\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1u_\alpha)\Bigr\}&.
\end{aligned}\tag{5.33}
$$

Аналогично напишем два других равенства:

$$
\left.
\begin{aligned}
(r_1)_\beta = r \Big\{ m \Big[1 + h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_2 h_3 u_\gamma \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial \gamma} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial \alpha} \Big] + \\
+ n \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 u_\beta) + l \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2 u_\beta) \Big\}, \\
(r_1)_\gamma = r \Big\{ n \Big[1 + h_3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + h_1 h_3 u_\alpha \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \alpha} + h_2 h_3 u_\beta \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \beta} \Big] + \\
+ l \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_3 u_\gamma) + m \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_3 u_\gamma) \Big\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (5.34)
$$

Если e есть относительное удлинение линейного элемента PQ, то имеем:

$$
r_1^2 = r^2 (1 + e)^2 = (r_1)_\alpha^2 + (r_1)_\beta^2 + (r_1)_\gamma^2. \quad (5.35)
$$

Внося сюда (5.33), (5.34) и пренебрегая квадратами и произведениями u_α, u_β, u_γ, мы получим:

$$
\begin{aligned}
(1 + e)^2 = l^2 + m^2 + n^2 + 2l^2 e_{\alpha\alpha} + 2m^2 e_{\beta\beta} + \\
+ 2n^2 e_{\gamma\gamma} + 2mn e_{\beta\gamma} + 2nl e_{\alpha\gamma} + 2lm e_{\alpha\beta}, \quad (5.36)
\end{aligned}
$$

где обозначено:

$$
\left.
\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \beta} + h_1 h_3 u_\gamma \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \gamma}, \\
e_{\beta\beta} &= h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_2 h_3 u_\gamma \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial \gamma} + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial \alpha}, \\
e_{\gamma\gamma} &= h_3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + h_1 h_3 u_\alpha \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \alpha} + h_2 h_3 u_\beta \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \beta}, \\
e_{\beta\gamma} &= \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_3 u_\gamma) + \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 u_\beta), \\
e_{\gamma\alpha} &= \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u_\alpha) + \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_3 u_\gamma), \\
e_{\alpha\beta} &= \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2 u_\beta) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1 u_\alpha).
\end{aligned}
\right\} \quad (5.37)
$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то из (5.36) мы получим, приближённо извлекая корень:

$$
e = e_{\alpha\alpha} l^2 + e_{\beta\beta} m^2 + e_{\gamma\gamma} n^2 + e_{\beta\gamma} mn + e_{\gamma\alpha} nl + e_{\alpha\beta} ml. \quad (5.38)
$$

Очевидно, что, положив $l = 1$, $m = n = 0$, мы имеем $e = e_{\alpha\alpha}$, т. е. $e_{\alpha\alpha}$ есть относительное удлинение линейного элемента, который до деформации направлен по нормали к поверхности α. Также $e_{\beta\gamma}$ есть косинус угла между двумя линейными элементами, которые до деформации направлены по нормалям к поверхности β и γ. Величины

$$e_{\alpha\alpha},\ e_{\beta\beta},\ e_{\gamma\gamma},\ e_{\beta\gamma},\ e_{\gamma\alpha},\ e_{\alpha\beta} \tag{5.39}$$

суть шесть компонентов деформации в ортогональных криволинейных координатах α, β, γ. Формулы (5.37) были даны впервые Ламе.

§ 59. Формулы для объёмного расширения и элементарного вращения в ортогональных криволинейных координатах.

Известно, что если u, v, w суть компоненты упругого смещения, то имеем по формуле Грина:

$$\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint (lu+mv+nw)\,d\Sigma, \tag{5.40}$$

где l, m, n — косинусы угла внешней нормали с осями координат, $d\Sigma$ — элемент поверхности тела. Вводя объёмное расширение

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

и проекцию упругого смещения на внешнюю нормаль к поверхности тела

$$V_n = lu+mv+nw,$$

мы представим (5.40) в виде:

$$\iiint \Delta\,d\tau = \iint V_n d\Sigma, \tag{5.41}$$

где $d\tau$ — элемент объёма.

Приложим формулу (5.41) к элементу объёма в виде криволинейного параллелепипеда, образованного тремя парами смежных поверхностей

$$\alpha \text{ и } \alpha+d\alpha,\quad \beta \text{ и } \beta+d\beta,\quad \gamma \text{ и } \gamma+d\gamma.$$

Слагаемые поверхностного интеграла правой части формулы (5.41) будут:

по грани α:

$$-u_\alpha dn_2 dn_3 = -u_\alpha \frac{d\beta d\gamma}{h_2 h_3};$$

по грани $\alpha+d\alpha$:

$$u_\alpha \frac{d\beta d\gamma}{h_2 h_3}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[u_\alpha \frac{d\beta}{h_2}\frac{d\gamma}{h_3}\right] d\alpha;$$

по грани β:

$$-u_\beta \frac{d\gamma}{h_3}\frac{d\alpha}{h_1};$$

по грани $\beta+d\beta$:

$$u_\beta \frac{d\gamma}{h_3}\frac{d\alpha}{h_1}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[u_\beta \frac{d\gamma}{h_3}\frac{d\alpha}{h_1}\right] d\beta;$$

по грани γ:

$$-u_\gamma \frac{d\alpha}{h_1}\frac{d\beta}{h_2};$$

по грани $\gamma+d\gamma$:

$$u_\gamma \frac{d\alpha}{h_1}\frac{d\beta}{h_2}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[u_\gamma \frac{d\alpha}{h_1}\frac{d\beta}{h_2}\right] d\gamma.$$

В результате получим следующее выражение для поверхностного интеграла:

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1h_2}\right)\right]. \tag{5.42}$$

Элемент объёма в криволинейных координатах выразится:

$$d\tau=\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{h_1h_2h_3}.$$

Поэтому уравнение (5.41) даёт

$$\Delta\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{h_1h_2h_3}=d\alpha\, d\beta\, d\gamma \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1h_2}\right)\right].$$

Отсюда получим выражение для Δ:

$$\Delta=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1h_2}\right)\right]. \tag{5.43}$$

Это выражение также получено Ламе.

Обозначая через

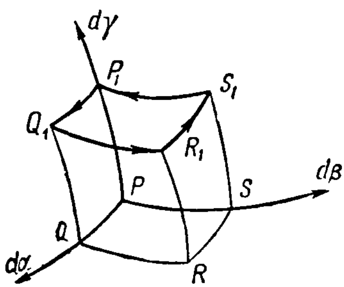
$$V_t=u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}+w\frac{dz}{ds}$$

тангенциальную слагающую упругого перемещения по касательной к замкнутому контуру, а также через

$$\Omega_n=\omega_x l+\omega_y m+\omega_z n$$

слагающую элементарного вращения, нормальную к поверхности Σ, ограниченной замкнутым контуром L, мы имеем по формуле Стокса:

$$\oint\limits_L V_t ds=\iint\limits_\Sigma \Omega_n d\Sigma. \tag{5.44}$$



Фиг. 10.

Применим эту формулу к замкнутому контуру (фиг. 10) $P_1Q_1R_1S_1P_1$ по грани $\gamma+d\gamma$. Слагаемые, соответствующие четырём частям этого контура, могут быть написаны следующим образом:

по дуге P_1Q_1:

$$u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1};$$

по дуге R_1S_1:

$$-u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left[u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1}\right] d\beta;$$

по дуге S_1P_1:

$$-u_\beta \frac{d\beta}{h_2};$$

по дуге Q_1R_1:

$$u_\beta \frac{d\beta}{h_2} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[u_\beta \frac{d\beta}{h_2}\right] d\alpha.$$

Складывая эти слагаемые, имеем следующее выражение для интеграла в левой части (5.44):

$$d\alpha\, d\beta \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right]. \tag{5.45}$$

С другой стороны, для элемента площади $P_1Q_1R_1S_1$, ограниченной рассмотренным контуром, имеем:

$$d\Sigma = \frac{d\alpha\, d\beta}{h_1h_2}, \quad \Omega_n = \omega_\gamma.$$

Поэтому правую часть (5.44) можно записать в виде:

$$\omega_\gamma \frac{d\alpha\, d\beta}{h_1h_2}. \tag{5.46}$$

Внося (5.45) и (5.46) в формулу (5.44), мы имеем:

$$\frac{2\omega_\gamma}{h_1h_2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right).$$

Таким образом, можно получить следующие формулы для компонентов элементарного вращения:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_\alpha &= h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)\right], \\ 2\omega_\beta &= h_3h_1\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)\right], \\ 2\omega_\gamma &= h_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

Эти формулы также были даны Ламе.

§ 60. Преобразование уравнений Ламе движения упругого тела к криволинейным ортогональным координатам.

Если ввести компоненты элементарного вращения

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

то имеем следующие тождества:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right),$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial \Delta}{\partial y} - 2\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right),$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right).$$

На основании этих тождеств уравнения Ламе (4.18)

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0,$$

примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right) + \rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &= 0, \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} - 2\mu\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right) + \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) &= 0, \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2\mu\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right) + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}$ представляют компоненты $\operatorname{grad}\Delta$, а выражения

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}$$

представляют компоненты $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$, мы можем записать уравнения (5.49) в форме:

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\Delta - 2\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} + \rho(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{j}) = 0, \tag{5.50}$$

где $\boldsymbol{F}$ — массовая сила на единицу массы, а $\boldsymbol{j}$ — полное ускорение.

Градиент от Δ есть вектор, проекция которого на любое направление равна приращению Δ на единицу длины, взятой в этом направлении. Поэтому проекции этого вектора на нормали к трём взаимно ортогональным поверхностям α, β, γ будут равны

$$h_1\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha},\quad h_2\frac{\partial\Delta}{\partial\beta},\quad h_3\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}.$$

На основании формул (5.47) мы получим для проекции $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ следующие выражения:

$$h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)\right],$$
$$h_1h_3\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)\right],$$
$$h_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)\right].$$

Векторное уравнение (5.50) равносильно поэтому трём уравнениям

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\,h_1\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}-2\mu h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)\right]+\\
&\qquad\qquad+\rho F_\alpha=\rho\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)\,h_2\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}-2\mu h_1h_3\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\gamma}{h_3}\right)\right]+\\
&\qquad\qquad+\rho F_\beta=\rho\frac{\partial^2u_\beta}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2\mu)\,h_3\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}-2\mu h_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega_\beta}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega_\alpha}{h_1}\right)\right]+\\
&\qquad\qquad+\rho F_\gamma=\rho\frac{\partial^2u_\gamma}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\}\tag{5.51}$$

где F_α, F_β, F_γ суть отнесённые к единице массы проекции массовой силы на нормали к трём поверхностям α, β, γ.

§ 61. Выражение закона Гука в криволинейных координатах.

Напряжённое состояние при применении криволинейных ортогональных координат описывается таким же образом, как при применении прямоугольных координат x, y, z. Вводят шесть компонентов

$$\widehat{\alpha\alpha},\ \widehat{\beta\beta},\ \widehat{\gamma\gamma},\ \widehat{\beta\gamma},\ \widehat{\gamma\alpha},\ \widehat{\alpha\beta}.\tag{5.52}$$

Здесь $\widehat{\alpha\alpha}$ есть нормальный компонент напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к нормали к поверхности α. Также $\widehat{\alpha\beta}$ есть касательный компонент напряжения на той же элементарной площадке, параллельный нормали к поверхности β. $\widehat{\alpha\gamma}$ есть компонент напряжения на той же элементарной площадке, параллельный нормали к поверхности γ, и т. д.

Связь между шестью компонентами напряжённого состояния (5.52) и шестью компонентами деформации (5.39) даётся обобщённым законом Гука:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{\alpha\alpha}, & \widehat{\beta\gamma} &= \mu e_{\beta\gamma}, \\ \widehat{\beta\beta} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{\beta\beta}, & \widehat{\gamma\alpha} &= \mu e_{\alpha\gamma}, \\ \widehat{\gamma\gamma} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{\gamma\gamma}, & \widehat{\alpha\beta} &= \mu e_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

где λ, μ — постоянные Ламе для однородного изотропного тела. Упругий потенциал W есть функция от шести компонентов деформации (5.39), причём имеют место формулы Грина:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}} &= \widehat{\alpha\alpha}; & \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\gamma}} &= \widehat{\beta\gamma}; \\ \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}} &= \widehat{\beta\beta}; & \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\gamma}} &= \widehat{\alpha\gamma}; \\ \frac{\partial W}{\partial e_{\gamma\gamma}} &= \widehat{\gamma\gamma}; & \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}} &= \alpha\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Поэтому имеем формулу:

$$\begin{aligned} 2W = (\lambda + 2\mu)\Delta^2 + \\ + \mu\left(e_{\beta\gamma}^2 + e_{\alpha\gamma}^2 + e_{\alpha\beta}^2 - 4e_{\beta\beta}e_{\gamma\gamma} - 4e_{\gamma\gamma}e_{\alpha\alpha} - 4e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}\right), \end{aligned} \tag{5.55}$$

годную для однородного изотропного тела.

ГЛАВА VI.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ШАРА.

§ 62. Равновесие шара под действием поверхностных сил или заданных перемещений его поверхности.

Если на поверхность шара действуют силы, удовлетворяющие условиям равновесия шара как абсолютно твёрдого тела, то, предполагая их развёртывающимися в ряд сферических функций, получим, что задача о деформации шара может быть решена точно. Решение принадлежит Виллиаму Томсону, применившему метод решения в сферических функциях.

Если $\varphi(x, y, z)$ есть *пространственная* сферическая функция степени n, то она обладает следующими свойствами:

1) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0; \tag{6.1}$$

2) по теореме об однородных функциях удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z = n\varphi, \tag{6.2}$$

следовательно,

$$\nabla^2 (x\varphi) = x\nabla^2 \varphi + 2\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

таким образом, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 (x\varphi) &= 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \nabla^2 (y\varphi) &= 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \nabla^2 (z\varphi) &= 2\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

следовательно,

$$\nabla^2 (r^2\varphi) = r^2\nabla^2\varphi + 4\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z\right) + 6\varphi,$$

откуда имеем:

$$\nabla^2 (r^2\varphi) = 2(2n+3)\varphi. \tag{6.4}$$

Уравнения Ламе имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w&=0.\end{aligned}\right\}\tag{6.5}$$

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.\tag{6.6}$$

Пусть начало координат взято в центре шара. Будем искать частное решение (6.5) в виде:

$$\left.\begin{aligned}u&=\varphi+Dr^2\frac{\partial\omega}{\partial x},\\v&=\psi+Dr^2\frac{\partial\omega}{\partial y},\\w&=\chi+Dr^2\frac{\partial\omega}{\partial z},\\\omega&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z},\end{aligned}\right\}\tag{6.7}$$

где φ, ψ, χ — пространственные сферические функции степени n, следовательно, удовлетворяющие условиям

$$\nabla^2\varphi=0,\ \nabla^2\psi=0,\ \nabla^2\chi=0,\tag{6.8}$$

а D — постоянная, подлежащая определению.

Так как производные сферических функций остаются сферическими функциями, то ω есть сферическая функция степени $n-1$; следовательно, имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\omega=0,\\&\frac{\partial\omega}{\partial x}x+\frac{\partial\omega}{\partial y}y+\frac{\partial\omega}{\partial z}z=(n-1)\,\omega,\\&\nabla^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\nabla^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=\nabla^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0,\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)z=(n-2)\frac{\partial\omega}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{6.9}$$

и два аналогичных равенства для $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial z}$. Сначала внесём (6.7) в (6.6), что даёт:

$$\Delta=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}+D\left[r^2\nabla^2\omega+2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}x+\frac{\partial\omega}{\partial y}y+\frac{\partial\omega}{\partial z}z\right)\right];$$

отсюда на основании (6.9) получим:

$$\Delta=[1+2(n-1)D]\,\omega.\tag{6.10}$$

При составлении $\nabla^2 u$ мы должны учесть, что $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ есть сферическая функция степени $n-2$. Поэтому, применяя формулу (6.4), получим:

$$\nabla^2 u = \nabla^2\varphi + D\nabla^2\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = D\cdot 2\left[2(n-2)+3\right]\frac{\partial\omega}{\partial x},$$

откуда получим (две остальные формулы пишем по аналогии):

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= 2(2n-1)D\frac{\partial\omega}{\partial x}, \\ \nabla^2 v &= 2(2n-1)D\frac{\partial\omega}{\partial y}, \\ \nabla^2 w &= 2(2n-1)D\frac{\partial\omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Внося (6.7) в (6.5), получим на основании (6.10) и (6.11):

$$\{(\lambda+\mu)[1+2(n-1)D]+2(2n-1)\mu D\}\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,$$
$$\{(\lambda+\mu)[1+2(n-1)D]+2(2n-1)\mu D\}\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,$$
$$\{(\lambda+\mu)[1+2(n-1)D]+2(2n-1)\mu D\}\frac{\partial\omega}{\partial z}=0.$$

Отсюда имеем уравнение для определения D:

$$(\lambda+\mu)[2(n-1)D+1]+2(2n-1)\mu D=0;$$

решая, получим:

$$D = -\frac{\lambda+\mu}{2[\lambda(n-1)+\mu(3n-2)]}. \tag{6.12}$$

Общее решение уравнений (6.5) для рассматриваемой проблемы получим, складывая частные решения вида (6.7):

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum\varphi_n + r^2\sum D_n\frac{\partial\omega_n}{\partial x}, \\ v &= \sum\psi_n + r^2\sum D_n\frac{\partial\omega_n}{\partial y}, \\ w &= \sum\chi_n + r^2\sum D_n\frac{\partial\omega_n}{\partial z}, \\ \omega_n &= \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y}+\frac{\partial\chi_n}{\partial z}, \\ D_n &= -\frac{\lambda+\mu}{2[\lambda(n-1)+\mu(3n-2)]}, \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

§ 63. Случай, когда на поверхности шара заданы смещения.

Обозначим радиус шара через a. Если на поверхности шара ($r=a$) даны смещения, то мы можем всегда считать, что эти смещения разлагаются в ряды *поверхностных* сферических функций

$$\left.\begin{aligned} u&=\sum A_n,\\ v&=\sum B_n,\\ w&=\sum C_n. \end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{на поверхности}\\ \text{шара, т. е.}\\ \text{при } r=a.\end{array} \tag{6.14}$$

Ясно, что $A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n$, $B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n$, $C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n$ будут *пространственными* сферическими функциями степени n.

Внося (6.13) в *граничные условия* (6.14), мы будем сравнивать те члены, которые на поверхности $r=a$ представляют *поверхностные* сферические функции *одинаковой степени*, что даёт:

$$\left.\begin{aligned} A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n&=\varphi_n+D_{n+2}a^2\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial x},\\ B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n&=\psi_n+D_{n+2}a^2\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial y},\\ C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n&=\chi_n+D_{n+2}a^2\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Эти соотношения имеют место на поверхности сферы $r=a$, а следовательно, они имеют место и внутри этой сферы. Дифференцируя их по x, y, z соответственно и складывая, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]=$$
$$=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y}+\frac{\partial\chi_n}{\partial z}+a^2D_{n+2}\nabla^2\omega_{n+2},$$

но мы имеем:

$$\nabla^2\omega_{n+2}=0,$$
$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y}+\frac{\partial\chi_n}{\partial z}=\omega_n,$$

а следовательно, мы получим выражение для ω_n через A_n, B_n, C_n в виде:

$$\omega_n=\frac{\partial}{\partial x}\left[A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\right]; \tag{6.16}$$

после этого φ_n, ψ_n, χ_n определяются из (6.15). Внося эти выражения в (6.13), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u&=\sum A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n+(r^2-a^2)\sum D_{n+2}\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial x},\\ v&=\sum B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n+(r^2-a^2)\sum D_{n+2}\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial y},\\ w&=\sum C_n\left(\frac{r}{a}\right)^n+(r^2-a^2)\sum D_{n+2}\frac{\partial\omega_{n+2}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.17)$$

Эти замечательные формулы даны Виллиамом Томсоном.

Если на поверхности шара даны внешние силы, то мы можем предположить, что они развёртываются в ряды по поверхностным сферическим функциям:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=\sum X_n,\\ Y_\nu&=\sum Y_n,\\ Z_\nu&=\sum Z_n\end{aligned}\right\}\text{ на поверхности } r=a.\qquad(6.18)$$

Затем составляем из (6.13) компоненты напряжения на элементе поверхности сферы радиуса r по формулам

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=X_xl+X_ym+X_zn,\\ Y_\nu&=X_yl+Y_ym+Y_zn,\\ Z_\nu&=X_zl+Y_zm+Z_zn,\\ l&=\frac{x}{r},\quad m=\frac{y}{r},\quad n=\frac{z}{r}\end{aligned}\right\}\qquad(6.19)$$

и вносим в формулы (6.18). Таким образом, задача может быть решена.

§ 64. Случай сферической полости в упругом теле.

В этом случае к решению (6.13) надо добавить следующее частное решение:

$$\left.\begin{aligned} u&=\bar\varphi_nr^{-2n-1}-K_nr^2\frac{\partial\Omega_n}{\partial x},\\ v&=\bar\psi_nr^{-2n-1}-K_nr^2\frac{\partial\Omega_n}{\partial y},\\ w&=\bar\chi_nr^{-2n-1}-K_nr^2\frac{\partial\Omega_n}{\partial z},\\ \Omega_n&=\frac{\partial}{\partial x}(\bar\varphi_nr^{-2n-1})+\frac{\partial}{\partial y}(\bar\psi_nr^{-2n-1})+\frac{\partial}{\partial z}(\bar\chi_nr^{-2n-1}).\end{aligned}\right\}\qquad(6.20)$$

где $\overline{\varphi}_n$, $\overline{\Phi}_n$, $\overline{\chi}_n$ суть пространственные сферические функции степени n,

$$K_n = -\frac{\lambda+\mu}{2[(n+2)\lambda+(3n+5)\mu]}. \qquad (6.21)$$

В случае необходимости берётся сумма таких частных решений. Если упругое тело бесконечно велико, то остаются только решения типа (6.20).

§ 65. Случай упругого шара, деформированного массовыми силами, потенциал которых разлагается по сферическим функциям.

Пусть

$$X = \frac{\partial \omega_n}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \omega_n}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \omega_n}{\partial z}, \qquad (6.22)$$

где ω_n есть пространственная сферическая функция степени n. Напишем уравнение Ламе

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho\frac{\partial \omega_n}{\partial y} = 0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho\frac{\partial \omega_n}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.23)$$

Ищем частное решение вида:

$$u = Cr^2\frac{\partial \omega_n}{\partial x}, \quad v = Cr^2\frac{\partial \omega_n}{\partial y}, \quad w = Cr^2\frac{\partial \omega_n}{\partial z}. \qquad (6.24)$$

Внося (6.24) в (6.23), получим после простых выкладок:

$$C = -\frac{\rho}{2[\lambda n+\mu(3n+1)]}. \qquad (6.25)$$

К частному решению (6.24) надо прибавить решение системы уравнений (6.5).

Решение этих уравнений берём в форме, данной А. Лявом:

$$\left.\begin{aligned} u = F(r)\frac{\partial \omega}{\partial x} + G(r)\,\omega x, \\ v = F(r)\frac{\partial \omega}{\partial y} + G(r)\,\omega y, \\ w = F(r)\frac{\partial \omega}{\partial z} + G(r)\,\omega z, \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

где ω есть пространственная сферическая функция степени n; $F(r)$ и $G(r)$ подлежат определению.

На основании (6.1) и (6.2) имеем:

$$\Delta = F(r)\nabla^2\omega + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}x + \frac{\partial\omega}{\partial y}y + \frac{\partial\omega}{\partial z}z\right) +$$
$$+ G\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}x + \frac{\partial\omega}{\partial y}y + \frac{\partial\omega}{\partial z}z\right) + \frac{dG}{dr}\omega\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r}\right) + 3G\omega =$$
$$= \left[\frac{n}{r}\frac{dF}{dr} + (n+3)G + r\frac{dG}{dr}\right]\omega,$$

откуда получим:

$$\Delta = f(r)\omega, \tag{6.27}$$

где

$$f(r) = \frac{n}{r}\frac{dF}{dr} + (n+3)G + r\frac{dG}{dr}. \tag{6.28}$$

Вычислим теперь выражения $\nabla^2 u$, $\nabla^2 v$, $\nabla^2 w$, $\frac{\partial\Delta}{\partial x}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial y}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial z}$. После простых преобразований найдём:

$$\nabla^2 u = \left(\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2n}{r}\frac{dF}{dr} + 2G\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \left[\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{2(n+2)}{r}\frac{dG}{dr}\right]\omega x \tag{6.29}$$

и два подобных выражения для $\nabla^2 v$, $\nabla^2 w$.

Далее имеем:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = f\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\omega x \tag{6.30}$$

и два аналогичных для $\frac{\partial\Delta}{\partial y}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial z}$. Поэтому при внесении (6.26) в (6.5) мы получим:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\omega}{\partial x} + B\omega x = 0,\\ A\frac{\partial\omega}{\partial y} + B\omega y = 0,\\ A\frac{\partial\omega}{\partial z} + B\omega z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned} A &= (\lambda+\mu)f + \mu\left[\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2n}{r}\frac{dF}{dr} + 2G\right],\\ B &= (\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \mu\left[\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{2(n+2)}{r}\frac{dG}{dr}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Так как ω есть любая сферическая функция, то из (6.31) мы получим два совместных дифференциальных уравнения для определения F и G [причём f определяется по формуле (6.28)]:

$$A = 0, \quad B = 0. \tag{6.33}$$

Общий интеграл этих уравнений будет:

$$\left.\begin{aligned} F&=C_4 r^{-2n-1}+C_3+\frac{\lambda(2-n)+\mu(4-n)}{2(2n-1)(\lambda+2\mu)}C_2 r^{-2n+1}-\\ &\qquad-\frac{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}{2(2n+3)(\lambda+2\mu)}C_1 r^2,\\ G&=-(2n+1)C_4 r^{-2n-3}+\frac{n(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)}C_2 r^{-2n-1}+\\ &\qquad+\frac{n\lambda+\mu(3n+1)}{(2n+3)(\lambda+2\mu)}C_1. \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. На основании (6.28) получим:

$$f=\frac{(n+1)\mu}{\lambda+2\mu}C_1-\frac{n\mu}{\lambda+2\mu}C_2 r^{-2n-1}. \tag{6.35}$$

Вычислим теперь выражение

$$ux+vy+wz=\mathfrak{Z}(r)\,\omega, \tag{6.36}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(r)&=nF+r^2G=-(n+1)C_4 r^{-2n-1}+nC_3-\\ -\frac{(n+1)[n\lambda+\mu(n-2)]}{2(2n+3)(\lambda+2\mu)}C_1 r^2&+\frac{n[(n+1)\lambda+(n+3)\mu]}{2(2n-1)(\lambda+2\mu)}C_2 r^{-2n+1}. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Формулы (6.19) после внесения в них значений $X_x, Y_y, \ldots, X_y$ из формул (3.52) дают после простых преобразований:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=\lambda\Delta\frac{x}{r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right],\\ Y_\nu&=\lambda\Delta\frac{y}{r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right],\\ Z_\nu&=\lambda\Delta\frac{z}{r}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

Но имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}&=(nF+r^2G)\frac{\partial\omega}{\partial x}+\left(\frac{n}{r}\frac{dF}{dr}+r\frac{dG}{dr}+2G\right)\omega x,\\ \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y}&=(nF+r^2G)\frac{\partial\omega}{\partial y}+\left(\frac{n}{r}\frac{dF}{dr}+r\frac{dG}{dr}+2G\right)\omega y,\\ \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}&=(nF+r^2G)\frac{\partial\omega}{\partial z}+\left(\frac{n}{r}\frac{dF}{dr}+r\frac{dG}{dr}+2G\right)\omega z,\\ \frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}&=\left(\frac{dF}{dr}+\frac{n-2}{r}F\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}+\left(r\frac{dG}{dr}+nG\right)\left(\frac{\omega x}{r}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}&=\left(\frac{dF}{dr}+\frac{n-2}{r}F\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}+\left(r\frac{dG}{dr}+nG\right)\left(\frac{\omega y}{r}\right),\\ \frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}&=\left(\frac{dF}{dr}+\frac{n-2}{r}F\right)\frac{\partial\omega}{\partial z}+\left(r\frac{dG}{dr}+nG\right)\left(\frac{\omega z}{r}\right). \end{aligned}$$

Внося это в (6.38), мы найдём после приведения:

$$\left.\begin{aligned} X'_\nu &= \mu P(r)\frac{\partial\omega}{\partial x} + Q(r)\left(\frac{\omega x}{r}\right), \\ Y'_\nu &= \mu P(r)\frac{\partial\omega}{\partial y} + Q(r)\left(\frac{\omega y}{r}\right), \\ Z'_\nu &= \mu P(r)\frac{\partial\omega}{\partial z} + Q(r)\left(\frac{\omega z}{r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned} P(r) &= \frac{dF}{dr} + \frac{2(n-1)}{r}F + rG, \\ Q(r) &= \lambda f + \mu\left[\frac{n}{r}\frac{dF}{dr} + 2r\frac{dG}{dr} + (n+2)G\right]; \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

штрихи поставлены для того, чтобы указать, что X_ν, Y_ν, Z_ν вычислены для решения (6.26).

В случае сплошного шара имеем:

$$C_2 = C_4 = 0. \tag{6.41}$$

Но в выражениях для компонентов напряжения на поверхности сферы радиуса r надо учесть ещё те слагающие, которые даны частным решением (6.24). Для этой цели можно применить формулы (6.39), но внести туда

$$\left.\begin{aligned} F(r) &= Cr^2, \\ G(r) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

Подставляя (6.42) в (6.40), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} P'' &= 2nCr, \\ Q'' &= 2n(\lambda+\mu)C, \\ f &= 2nC. \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

Внося (6.43) в (6.39), найдём

$$\left.\begin{aligned} X''_\nu &= 2nC\left[\mu r\frac{\partial\omega}{\partial x} + (\lambda+\mu)\frac{\omega x}{r}\right], \\ Y''_\nu &= 2nC\left[\mu r\frac{\partial\omega}{\partial y} + (\lambda+\mu)\frac{\omega y}{r}\right], \\ Z''_\nu &= 2nC\left[\mu r\frac{\partial\omega}{\partial z} + (\lambda+\mu)\frac{\omega z}{r}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Следовательно, на поверхности сферы радиуса r мы будем иметь выражение компонентов упругого напряжения

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X'_\nu + X''_\nu, \\ Y_\nu &= Y'_\nu + Y''_\nu, \\ Z_\nu &= Z'_\nu + Z''_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

На поверхности сферы должны быть даны граничные условия. В частности, она может быть свободна от напряжений. Тогда получим граничные условия

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = 0. \tag{6.46}$$

Решение поставленной здесь задачи имеет важные приложения в геодинамике.

Обозначим через R_r нормальный компонент напряжения на поверхности сферы радиуса r, а через T_r — тангенциальный компонент того же напряжения. Очевидно, что для нормального компонента будем иметь формулу:

$$R_r = X_r\left(\frac{x}{r}\right) + Y_r\left(\frac{y}{r}\right) + Z_r\left(\frac{z}{r}\right). \tag{6.47}$$

Внося (6.39) в (6.47), мы получим:

$$R_r = \frac{\mu}{r} P(r)\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}x + \frac{\partial\omega}{\partial y}y + \frac{\partial\omega}{\partial z}z\right] + Q(r)\,\omega\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2},$$

что вследствие условия (6.2) и равенства

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

примет вид:

$$R_r = \left[Q(r) + \frac{\mu n}{r} P(r)\right]\omega. \tag{6.48}$$

Для получения компонентов тангенциального напряжения T_r надо вычесть компоненты нормального напряжения R_r из X_r, Y_r, Z_r, что даёт:

$$\left.\begin{aligned} (T_r)_x &= X_r - R_r\left(\frac{x}{r}\right), \\ (T_r)_y &= Y_r - R_r\left(\frac{y}{r}\right), \\ (T_r)_z &= Z_r - R_r\left(\frac{z}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

Внося (6.39) и (6.48) в (6.49), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} (T_r)_x &= \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{n\omega x}{r^2}\right)P(r), \\ (T_r)_y &= \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{n\omega y}{r^2}\right)P(r), \\ (T_r)_z &= \mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{n\omega z}{r^2}\right)P(r). \end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

ГЛАВА VII.

ПРОБЛЕМЫ БУССИНЕСКА И ГЕРЦА.

§ 66. Элементарное решение первого типа.

Уравнения упругого равновесия Ламе

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=0\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

допускают следующее решение, которое Буссинеск назвал элементарным решением первого типа*):

$$\left.\begin{aligned}u&=A\frac{zx}{r^3}=-Ax\varphi,\\ v&=A\frac{zy}{r^3}=-Ay\varphi,\\ w&=A\left[\frac{z^2}{r^3}+\frac{\lambda+3\mu}{(\lambda+\mu)r}\right],\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

где обозначено

$$\varphi=-\frac{z}{r^3}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{7.3}$$

причём A — некоторая постоянная. Как известно, $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция, т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0. \tag{7.4}$$

Отсюда следует, что частные производные от $\frac{1}{r}$ первого и высших порядков суть также функции гармонические. Поэтому функция φ, введённая формулой (7.3), есть функция гармони-

---

*) Это решение обращается в бесконечность в начале координат и, следовательно, пригодно всюду, кроме сферы очень малого радиуса, окружающей начало координат.

ческая степени (-2), поэтому имеем:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}z &= -2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

На основании (7.5) для Δ получим:

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=$$
$$=-A\left[3\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}z-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=$$
$$=-A\left[3\varphi-2\varphi-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right]=\frac{2\mu A}{\lambda+\mu}\varphi.$$

Следовательно, имеем:

$$\Delta=\frac{2A\mu}{\lambda+\mu}\varphi. \tag{7.6}$$

Пользуясь соотношениями (7.2), найдём:

$$\nabla^2 u=-A\left[x\nabla^2\varphi+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],$$
$$\nabla^2 v=-A\left[y\nabla^2\varphi+2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right],$$
$$\nabla^2 w=-A\left[z\nabla^2\varphi+2\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

что вследствие (7.4) и (7.5) даёт:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2A\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \nabla^2 v &= -2A\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \nabla^2 w &= -2A\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Внося теперь (7.6) и (7.7) в уравнения (7.1), мы увидим, что они обращаются в тождество

$$\frac{2(\lambda+\mu)\mu A}{\lambda+\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2A\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv 0 \quad \text{и т. д.}$$

Составим теперь шесть компонентов напряжённого состояния. По известным формулам имеем:

$$X_x=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=2\mu A\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-1\right)\varphi-x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=$$
$$=-2\mu A\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right],$$

но вследствие (7.3) имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{3zx}{r^5}=-\frac{3x}{r^2}\varphi,$$

поэтому получим:

$$X_x=2\mu A\varphi\left[3\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]=-\frac{2\mu Az}{r^3}\left[3\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right].$$

Так же вычисляется Y_y. Далее, имеем:

$$Z_z=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=-2\mu A\left[z\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)\right]=$$
$$=-2\mu A\left[z\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\varphi\right],$$

но из (7.3) имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};$$

поэтому получим:

$$Z_z=2\mu A\varphi\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]=-\frac{2\mu Az}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right].$$

Вычисляем далее:

$$X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-A\mu\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}+y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

но вследствие (7.3) имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{3zx}{r^5},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{3zy}{r^5},$$

поэтому получим:

$$X_y=-\frac{6\mu Axyz}{r^5}.$$

Также имеем:

$$X_z=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-A\mu\left[z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+x\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right].$$

Внося сюда $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x}{r^3}$, получим после приведения:

$$X_z=-\frac{2\mu Ax}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right],$$

и аналогично:

$$Y_z=-\frac{2\mu Ay}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right].$$

Таким образом, имеем следующее выражение для шести компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{2\mu Az}{r^3}\left[3\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right], \\ Y_y &= -\frac{2\mu Az}{r^3}\left[3\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right], \\ Z_z &= -\frac{2\mu Az}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right], \\ Y_z &= -\frac{2\mu Ay}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right], \\ X_z &= -\frac{2\mu Ax}{r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right], \\ X_y &= -\frac{6\mu Axyz}{r^5}. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Для компонентов напряжения на элементарной площадке, нормальной к радиусу-вектору r, имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m + Y_z n, \\ Z_\nu &= X_z l + Y_z m + Z_z n, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

внося сюда $l=\frac{x}{r}$, $m=\frac{y}{r}$, $n=\frac{z}{r}$ и пользуясь соотношением $r^2=x^2+y^2+z^2$, получим по приведении:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= -\frac{6\mu Azx}{r^4}, \\ Y_\nu &= -\frac{6\mu Azy}{r^4}, \\ Z_\nu &= -\frac{6\mu Az^2}{r^4} - \frac{2A\mu^2}{(\lambda+\mu)\,r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Опишем из начала координат сферу малого радиуса r и рассмотрим её часть, расположенную в области $z>0$.

Вычислим компоненты равнодействующей всех упругих сил, приложенных к элементам поверхности рассматриваемой полусферы. По формулам (7.10) получим:

$$R_x = \iint X_\nu d\Sigma = -\frac{6\mu A}{r^4}\iint zx\,d\Sigma,$$

$$R_y = \iint Y_\nu d\Sigma = -\frac{6\mu A}{r^4}\iint zy\,d\Sigma,$$

$$R_z = \iint Z_\nu d\Sigma = -\frac{6\mu A}{r^4}\iint z^2 d\Sigma - \frac{2A\mu^2}{(\lambda+\mu)\,r^2}\iint d\Sigma.$$

Вследствие симметрии относительно положительной оси z имеем:

$$\iint zx\,d\Sigma = \iint zy\,d\Sigma = 0.$$

Также, вводя полярный угол θ, имеем:

$$\iint z^2 d\Sigma = 2\pi r^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{3} r^4, \quad \iint d\Sigma = 2\pi r^2.$$

Поэтому получим окончательно:

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\frac{4\pi A\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

Следовательно, равнодействующая будет направлена по оси z и иметь величину

$$R_z' = -\frac{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} A. \tag{7.11}$$

§ 67. Элементарное решение второго типа.

Так названо Буссинеском решение уравнений (7.1) следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} u &= B\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Bx}{r(r+z)}, \\ v &= B\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{By}{r(r+z)}, \\ w &= B\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{B}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

где

$$\phi = \ln(r+z), \tag{7.13}$$

а B — некоторая постоянная.

Из (7.12) имеем:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = B\nabla^2\phi =$$
$$= B\left[\frac{2}{r(r+z)} - \frac{x^2+y^2}{r^3(r+z)} - \frac{x^2+y^2}{r^2(r+z)^2} - \frac{z}{r^3}\right] = 0.$$

Следовательно, ϕ есть функция гармоническая и её производные тоже гармонические функции. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= B\nabla^2\phi = 0, \\ \nabla^2 u &= B\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \\ \nabla^2 v &= B\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \\ \nabla^2 w &= B\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система (7.12) представляет решение уравнений (7.1).

Пользуясь системой (7.12), а также тем, что $\Delta=0$, компоненты напряжённого состояния легко рассчитать по известным формулам; в результате имеем:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= 2\mu B\left[\frac{y^2+z^2}{r^3(r+z)}-\frac{x^2}{r^2(r+z)^2}\right],\\
Y_y &= 2\mu B\left[\frac{x^2+z^2}{r^3(r+z)}-\frac{y^2}{r^2(r+z)^2}\right],\\
Z_z &= -2\mu B\frac{z}{r^3},\\
Y_z &= -2\mu B\frac{y}{r^3},\\
X_z &= -2\mu B\frac{x}{r^3},\\
X_y &= -2\mu B\frac{xy(z+2r)}{r^3(r+z)^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{7.14}$$

Компоненты напряжения на поверхности полусферы, описанной из начала координат радиусом r, рассчитаем по формулам (7.9), в которых вместо l, m, n нужно соответственно положить $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, а значения X_x, Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y взять из выражений (7.14). Выполнив элементарные приведения подобных членов, окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu &= -2\mu B\frac{x}{r^2(r+z)},\\
Y_\nu &= -2\mu B\frac{y}{r^2(r+z)},\\
Z_\nu &= -2\mu B\frac{1}{r^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{7.15}$$

Опишем из начала координат сферу малого радиуса r и рассмотрим её часть, расположенную в области $z>0$. Вычислим компоненты равнодействующей всех упругих сил, приложенных к элементам поверхности рассматриваемой полусферы. По формулам (7.15) получим:

$$\left.\begin{aligned}
R_x &= \iint X_\nu d\Sigma = -\frac{2\mu B}{r^2}\iint\frac{x}{r+z}d\Sigma,\\
R_y &= \iint Y_\nu d\Sigma = -\frac{2\mu B}{r^2}\iint\frac{y}{r+z}d\Sigma,\\
R_z &= \iint Z_\nu d\Sigma = -\frac{2\mu B}{r^2}\iint d\Sigma.
\end{aligned}\right\}\tag{7.16}$$

Вследствие симметрии относительно положительной оси z имеем:

$$\left.\begin{aligned} \iint \frac{x}{z+r}\, d\Sigma = 0, \\ \iint \frac{y}{z+r}\, d\Sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Также имеем:

$$\iint d\Sigma = 2\pi r^2. \tag{7.18}$$

Внося (7.17) и (7.18) в (7.16), получим:

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -4\mu\pi B.$$

Следовательно, равнодействующая будет направлена по оси z и иметь величину

$$R_z'' = -4\pi\mu B. \tag{7.19}$$

§ 68. Сила, приложенная к точке плоской граничной поверхности.

Пусть упругое тело занимает всё полупространство $z > 0$, так что плоскость Oxy есть граница этого упругого тела. Положительная ось z идёт внутрь упругого тела. Пусть сила P приложена нормально к плоской границе. Примем начало координат в точке приложения этой силы, направленной по оси z в положительном направлении. Так как вблизи точки приложения сосредоточенной силы P деформации очень велики, то эту область мы исключаем, описав около точки приложения силы O полусферу малого радиуса r, и будем считать, что пространство, занятое упругим телом, ограничено этой полусферой и плоскостью Oxy.

Рассмотрим решение уравнений (7.1), представляющее сумму решений (7.2) и (7.12):

$$\left.\begin{aligned} u &= A\,\frac{zx}{r^3} + \frac{Bx}{r(r+z)}, \\ v &= A\,\frac{zy}{r^3} + \frac{By}{r(r+z)}, \\ w &= A\left[\frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{(\lambda+\mu)r}\right] + \frac{B}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

Равнодействующая всех упругих сил на поверхности нашей полусферы со стороны упругого тела будет направлена по положительному направлению оси z и будет иметь величину, равную сумме силы R_z', данной формулой (7.11), и R_z'', данной формулой (7.19). Очевидно, что равнодействующая всех упругих сил, действующих на элементах внутренней поверхности построенной полусферы, будет противоположна по знаку и имеет величину:

$$R = -(R'_z + R''_z) = \frac{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}A + 4\pi\mu B.$$

Приняв равнодействующую силу $\boldsymbol{R}$ равной данной силе $\boldsymbol{P}$, мы будем иметь соотношение:

$$\frac{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}A + 4\pi\mu B = P. \tag{7.21}$$

На граничной плоскости Oxy мы получим компоненты упругих напряжений по формулам (7.8) и (7.14), положив в них $z=0$

$$\left.\begin{aligned} X_z &= -\frac{2\mu x}{r^3}\left[\frac{A\mu}{\lambda+\mu}+B\right],\\ Y_z &= -\frac{2\mu y}{r^3}\left[\frac{A\mu}{\lambda+\mu}+B\right],\\ Z_z &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

Так как на этой границе, т. е. на плоскости Oxy, не приложено никаких сил, то всюду на ней

$$X_z = Y_z = Z_z = 0. \tag{7.23}$$

Тогда из (7.22) получим:

$$\frac{A\mu}{\lambda+\mu} + B = 0. \tag{7.24}$$

Таким образом, мы получили два уравнения (7.21) и (7.24) для определения A и B, из которых находим:

$$A = \frac{P}{4\pi\mu}, \quad B = -\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}. \tag{7.25}$$

Внося эти значения A и B в (7.20), мы получим формулы Буссинеска:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{zx}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r(z+r)},\\ v &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{zy}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{y}{r(z+r)},\\ w &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{z^2}{r^3} + \frac{P(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)r}. \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

Эти смещения будут вызываться системой сил, приложенных к внутренней стороне полусферы малого радиуса r, описанной из начала координат. Эта система сил статически эквивалентна одной равнодействующей силе $\boldsymbol{P}$, приложенной в начале и направленной по положительной оси z; вся же остальная граница упругого тела будет свободна от каких бы то ни было приложенных сил.

В бесконечном удалении от начала при бесконечном возрастании радиуса-вектора r упругие перемещения u, v, w, данные формулами (7.26), будут стремиться к нулю. Таким образом, решения (7.26) во всех точках упругого тела, не лежащих слишком близко к началу координат, дают упругое смещение, которое получается при действии в начале координат давления $\boldsymbol{P}$.

Возможность замены указанной выше системы сил на внутренней поверхности полусферы их равнодействующей обусловлена возможностью приложения в рассматриваемой задаче *принципа Сен-Венана*.

На граничной поверхности $z=0$ имеем для компонентов упругого смещения по формулам (7.26) (положив там $z=0$):

$$u_0=-\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r^2},$$

$$v_0=-\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{y}{r^2},$$

$$w_0=+\frac{P(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)r}.$$

Рассматривая u_0, v_0 как компоненты смещения U_0, направленного по граничной поверхности, имеем:

$$u_0=U_0\frac{x}{r},\quad v_0=U_0\frac{y}{r}.$$

Отсюда получим окончательно:

$$U_0=-\frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)r}. \tag{7.27}$$

Также вводя обозначение

$$\theta=\frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}, \tag{7.28}$$

получим:

$$w_0=\theta\frac{P}{r}. \tag{7.29}$$

Результаты, полученные для одной сосредоточенной силы, можно применить к более общему случаю, когда имеется ряд сосредоточенных сил или непрерывная нагрузка. При определении упругих напряжений на какой-либо элементарной площадке необходимо суммировать напряжения от отдельных сил. Для вычислений их надо воспользоваться формулами (7.8) и (7.14), внося в них A и B по формулам (7.25) и суммируя напряжения. В результате получим:

$$X_x=-\frac{Pz}{2\pi r^3}\left[3\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]-\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\left[\frac{y^2+z^2}{r^3(r+z)}-\frac{x^2}{r^2(r+z)^2}\right],$$

$$Y_y=-\frac{Pz}{2\pi r^3}\left[3\left(\frac{y}{r}\right)^2-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]-\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\left[\frac{x^2+z^2}{r^3(r+z)}-\frac{y^2}{r^2(r+z)^2}\right],$$
$$Z_z=-\frac{Pz}{2\pi r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]+\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{z}{r^3},$$
$$Y_z=-\frac{Py}{2\pi r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]+\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{y}{r^3},$$
$$X_z=-\frac{Px}{2\pi r^3}\left[3\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]+\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r^3},$$
$$X_y=-\frac{3Pxyz}{2\pi r^5}+\frac{\mu P}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{xy(z+2r)}{r^3(r+z)^2}.$$

Аналогичным образом вычисляются перемещения путём суммирования отдельных перемещений, данных формулами (7.26).

Пусть $q'(x', y')$ есть интенсивность сплошной нагрузки давления на граничной плоскости Oxy. Тогда на элементарной площадке $d\Sigma$ будет действовать *сосредоточенная сила давления*

$$P=q'd\Sigma,$$

и перемещение по оси z любой точки *граничной поверхности* Oxy будет, согласно (7.29), дано формулой:

$$\overline{w}=\theta\iint\frac{q'd\Sigma}{r}, \tag{7.30}$$

причём двойной интеграл распространён на всю площадь, занятую нагрузкой q'.

Входящая в формулу (7.30) величина r представляет расстояние любой точки площади нагрузки (x', y') до той точки (x, y) граничной плоскости Oxy, для которой вычисляется $\overline{w}$, причём точка эта может лежать и на самой площади нагрузки. Если же точка (x, y, z) взята внутри тела, то имеем:

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}. \tag{7.31}$$

Введём обозначения Лява:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\iint\frac{q'\,dx'\,dy'}{r},\\ \psi&=\iint q'r\,dx'\,dy'\\ \chi&=\iint q'\ln(z+r)\,dx'\,dy';\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

тогда, очевидно, вследствие (7.4), имеем:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\varphi&=\iint\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right)q'\,dx'\,dy'=0,\\ \nabla^2\chi&=\iint[\nabla^2\ln(z+r)]\,q'\,dx'\,dy'=0,\end{aligned}\right\} \tag{7.33}$$

так как $\ln(z+r)$ есть функция гармоническая.

Далее, имеем из (7.32):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\chi}{\partial z} &= \iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r} = \varphi, \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= \iint q'\,\frac{z}{r}\,dx'\,dy' = z\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r} = z\varphi, \\ \nabla^2\psi &= \iint q'\,(\nabla^2 r)\,dx'\,dy' = 2\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r} = 2\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

так как

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r}.$$

Полагая в формулах (7.26) $P = q'\,dx'\,dy'$ и суммируя значения u, v, w для всей площади нагрузки, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{xz}{4\pi\mu}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r^3} - \frac{x}{4\pi(\lambda+\mu)}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r(r+z)}, \\ v &= \frac{yz}{4\pi\mu}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r^3} - \frac{y}{4\pi(\lambda+\mu)}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r(r+z)}, \\ w &= \frac{z^2}{4\pi\mu}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r^3} + \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

Используя обозначения (7.32), получим формулы Лява:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}, \\ v &= -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}, \\ w &= -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\nabla^2\psi. \end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

Выражения для u, v, w на основании (7.34) могут быть записаны также в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ w &= +\frac{\lambda+2\mu}{4\pi(\lambda+\mu)\mu}\varphi - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

где функция φ дана формулой (7.32):

$$\varphi = \iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r}.$$

Эта функция φ есть потенциал простого слоя с плотностью $q'(x', y')$.

Предполагая, что $z > 0$, мы имеем u, v, w конечными и вполне определёнными для всех значений x, y, z. Когда точка

(x, y, z) приближается к точке $(x', y', 0)$, то эти значения u, v, w стремятся к конечным пределам $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, представляющим смещения на граничной поверхности тела, вызванные распределённой нагрузкой $q'(x', y')$. На основании (7.35) и (7.32) или из (7.36) имеем для $z=0$ [вследствие (7.28)]:

$$\bar{w} = \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\varphi_0 = \theta\varphi_0, \tag{7.38}$$

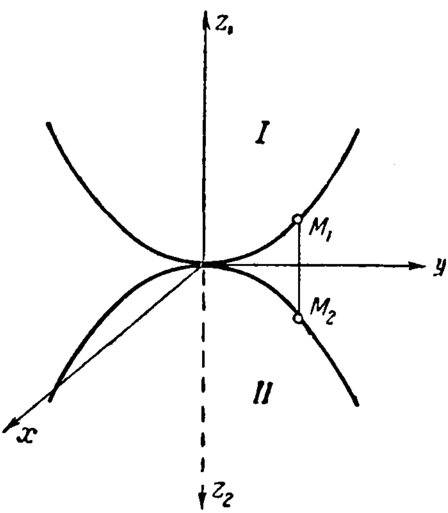
где φ_0 есть значение φ при $z=0$.

Сравнивая с (7.30), мы видим, что

$$\varphi_0 = \iint \frac{q'\,d\Sigma}{r}. \tag{7.39}$$

Формулы (7.35) дают решение первой основной задачи Буссинеска: по заданным на внешней границе упругого полупространства силам *давления* q' найти выражения компонентов упругого перемещения u, v, w во всём этом полупространстве. Случай более общего задания напряжений на внешней границе упругого полупространства рассмотрен как в работах самого Буссинеска, так и у других авторов (см. Ляв, Математическая теория упругости, глава VIII).

§ 69. Геометрические соотношения при соприкосновении двух тел.



Фиг. 11.

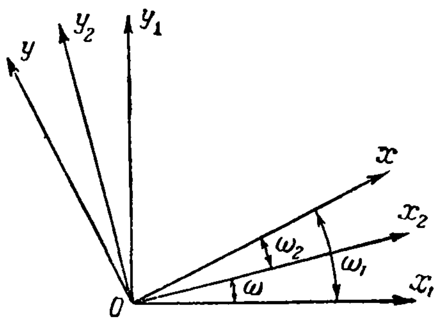
Пусть два однородных изотропных тела I и II (фиг. 11) соприкасаются в точке, которую примем за начало прямоугольных координат x, y, z.

В точке касания оба тела имеют общую нормаль и общую касательную плоскость. Для каждого тела положительную ось z направим по внутренней его нормали, но оси x, y могут быть разные, лежащие в общей касательной плоскости. Все величины, относящиеся к первому телу, будем снабжать индексом 1, а все величины, относящиеся ко второму телу, будем снабжать индексом 2. Пусть известно взаимное расположение осей (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (фиг. 12), и пусть ω — угол между осями x_1 и x_2.

Для первого тела примем за координатные оси x_1, y_1 линии пересечения касательной плоскости в точке O с плоскостями главных нормальных сечений этой поверхности.

Если вторые производные $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}$ конечны и отличны от нуля в начале координат, то, ограничиваясь малой областью вблизи начала координат, мы можем представить уравнение поверхности в виде:

$$2z_1 = K_{11}x_1^2 + K_{12}y_1^2, \tag{7.40}$$



Фиг. 12.

где K_{11}, K_{12} суть кривизны главных нормальных сечений первой поверхности, которые мы считаем положительными, если соответствующий центр кривизны лежит внутри тела.

Если K_{21}, K_{22} суть кривизны главных нормальных сечений для второго тела, конечные и отличные от нуля, то, выбирая за координатные оси x_2, y_2 линии пересечения касательной плоскости с плоскостями главных нормальных сечений второго тела, мы получим для малой области вблизи начала уравнение второй поверхности в виде:

$$2z_2 = K_{21}x_2^2 + K_{22}y_2^2. \tag{7.41}$$

Введём теперь новые оси координат Oxy, причём пусть угол между осью x и осью x_1 есть ω_1, а между осью x и осью x_2 есть ω_2, тогда, как видно из чертежа, имеем:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \tag{7.42}$$

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 обеих соприкасающихся поверхностей, *лежащими на одной прямой, параллельной нормали*, даётся, согласно (7.40) и (7.41), формулой

$$2(z_1 + z_2) = K_{11}x_1^2 + K_{12}y_1^2 + K_{21}x_2^2 + K_{22}y_2^2. \tag{7.43}$$

Перейдём теперь к новым осям x, y при помощи известных формул

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\omega_1 - y\sin\omega_1, \\ y_1 &= x\sin\omega_1 + y\cos\omega_1, \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x\cos\omega_2 - y\sin\omega_2, \\ y_2 &= x\sin\omega_2 + y\cos\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

Внося (7.44) и (7.45) в (7.43), получим:

$$\begin{aligned}2(z_1+z_2)=x^2[K_{11}\cos^2\omega_1+K_{12}\sin^2\omega_1+K_{21}\cos^2\omega_2+K_{22}\sin^2\omega_2]+\\+y^2[K_{11}\sin^2\omega_1+K_{12}\cos^2\omega_1+K_{21}\sin^2\omega_2+K_{22}\cos^2\omega_2]-\\-xy[(K_{11}-K_{12})\sin 2\omega_1+(K_{21}-K_{22})\sin 2\omega_2].\quad(7.46)\end{aligned}$$

Выберем теперь угол ω_1 так, чтобы уничтожился член с произведением координат xy

$$(K_{11}-K_{12})\sin 2\omega_1+(K_{21}-K_{22})\sin 2\omega_2=0. \qquad (7.47)$$

Затем введём новые постоянные A и B из условий:

$$\left.\begin{aligned}2A=K_{11}\cos^2\omega_1+K_{12}\sin^2\omega_1+K_{21}\cos^2\omega_2+K_{22}\sin^2\omega_2,\\2B=K_{11}\sin^2\omega_1+K_{12}\cos^2\omega_1+K_{21}\sin^2\omega_2+K_{22}\cos^2\omega_2.\end{aligned}\right\}\qquad(7.48)$$

Тогда уравнение (7.46) примет вид:

$$z_1+z_2=Ax^2+By^2. \qquad (7.49)$$

Из (7.48) имеем, складывая и вычитая:

$$\left.\begin{aligned}2(A+B)=K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22},\\2(A-B)=(K_{11}-K_{12})\cos 2\omega_1+(K_{21}-K_{22})\cos 2\omega_2.\end{aligned}\right\}\qquad(7.50)$$

Внося (7.42) в (7.47), мы получим:

$$\operatorname{tg} 2\omega_1=\frac{(K_{21}-K_{22})\sin 2\omega}{K_{11}-K_{12}+(K_{21}-K_{22})\cos 2\omega}. \qquad (7.51)$$

Так как угол ω, а также K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} известны, то мы можем вычислить ω_1 из (7.51), а затем получить из (7.42):

$$\omega_2=\omega_1-\omega.$$

Внося ω_1, ω_2, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} в (7.48), мы получим A и B.

Если ввести вспомогательную величину τ по формуле

$$\cos\tau=\frac{B-A}{B+A}, \qquad (7.52)$$

то будем иметь:

$$B=A\operatorname{ctg}^2\frac{\tau}{2}. \qquad (7.53)$$

Отсюда

$$A+B=\frac{A}{\sin^2\frac{\tau}{2}};$$

следовательно, первая из формул (7.50) даёт:

$$\left.\begin{aligned}2A=(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22})\sin^2\frac{\tau}{2},\\2B=(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22})\cos^2\frac{\tau}{2},\end{aligned}\right\}\qquad(7.54)$$

причём последняя формула получается из (7.53). Из этой последней формулы видно, что A и B имеют *одинаковый* знак. Поэтому кривые равных расстояний между точками обоих соприкасающихся тел, данные уравнением

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 = \text{const.}, \tag{7.55}$$

будут концентрическими эллипсами.

Следует заметить, что вид кривой, данной уравнением (7.55), будет зависеть только от угла τ.

§ 70. Простейший случай сжатия соприкасающихся тел.

Если оба тела прижаты друг к другу силой P, направленной по их общей нормали, то в них возникает упругая деформация, и они станут соприкасаться по некоторой поверхности, называемой *поверхностью давления*, а контур этой поверхности соприкосновения называется *контуром давления*. Упругие смещения в первом теле относительно осей x, y, z обозначим через u_1, v_1, w_1. Упругие смещения во втором теле относительно осей x, y, z обозначим через u_2, v_2, w_2.

Если точка (x_1, y_1, z_1) первого тела и точка (x_2, y_2, z_2) второго тела совпадут после деформации, то мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + \bar{u}_1 = x_2 + \bar{u}_2;\\ &y_1 + \bar{v}_1 = y_2 + \bar{v}_2;\\ &z_1 + \bar{w}_1 + z_2 + \bar{w}_2 = a;\\ &\delta(x, y) = z_1 + z_2; \end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

чёрточка обозначает, что это относится к поверхностям тел, a есть сближение обоих тел и, очевидно, это есть значение $w_1 + w_2$ в начале координат. Если принять

$$x_1 = x_2 = x,$$
$$y_1 = y_2 = y,$$

то всюду на поверхности давления мы будем иметь вследствие (7.49)

$$\delta(x, y) = z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2, \tag{7.57}$$

а следовательно, на поверхности давления, т. е. внутри контура давления, имеет место соотношение

$$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = a - Ax^2 - By^2, \tag{7.58}$$

вне контура давления, очевидно,

$$z_1 + \bar{w}_1 + z_2 + \bar{w}_2 > a,$$

а следовательно, имеем:

$$\overline{w}_1+\overline{w}_2>a-Ax^2-By^2. \tag{7.59}$$

Если принимать в расчёт действительную геометрическую форму упругих тел, то вычисление упругих перемещений и напряжений в области контакта обоих тел является невозможным. Поэтому, ввиду малости площади контакта, по сравнению с размерами окружающих областей соприкасающихся тел, при вычислении заменяют упругие соприкасающиеся тела двумя упругими полупространствами. Силы же, возникающие в каждом элементе площади контакта, считают приложенными к каждому из упругих полупространств.

Обозначим для первого упругого тела упругие постоянные Ламе через λ_1, μ_1, а для второго — через λ_2, μ_2. Тогда, согласно (7.28), для *первого* и *второго* тела получим соответственно:

$$\theta_1=\frac{\lambda_1+2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1+\mu_1)}, \quad \theta_2=\frac{\lambda_2+2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}. \tag{7.60}$$

Если q' есть величина давления между телами на единицу площади поверхности соприкосновения, то, согласно (7.30), мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\overline{w}_1&=\theta_1\iint\frac{q'\,d\Sigma}{r}=\theta_1\varphi_0,\\ \overline{w}_2&=\theta_2\iint\frac{q'\,d\Sigma}{r}=\theta_2\varphi_0.\end{aligned}\right\} \tag{7.61}$$

Внося (7.61) в (7.58), получим:

$$(\theta_1+\theta_2)\,\varphi_0=a-Ax^2-By^2; \tag{7.62}$$

в этом уравнении A и B суть известные величины, определяемые по геометрическим формам обоих соприкасающихся тел.

Вся трудность дальнейшего решения заключается в определении величины q'. Эта задача была разрешена великим физиком Генрихом Герцом, который показал, что контур давления можно принять за эллипс, полуоси которого по направлению совпадают с полуосями эллипса (7.55), будучи вообще отличными от них по величине. Далее, он показал, что величина q' даётся ординатами трёхосного эллипсоида.

Если q' есть плотность простого слоя, расположенного на поверхности соприкосновения, то функция φ_0, определяемая по формуле

$$\varphi_0=\iint\frac{q'\,d\Sigma}{r}, \tag{7.63}$$

есть потенциал этого простого слоя.

На основании (7.62), мы имеем:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}(\alpha - Ax^2 - By^2). \tag{7.64}$$

Так как потенциал однородного эллипсоида во внутренней точке есть квадратичная функция координат, то из (7.64) следует, что φ_0 можно принять за потенциал однородного эллипсоида очень малой толщины, поверхность которого совпадает с поверхностью давления. Давление q' получится при переходе к пределу, когда одна из осей эллипсоида стремится к нулю, но масса эллипсоида остаётся постоянной. Если a и b суть полуоси эллипса, который представляет контур давления, то его уравнение относительно принятых уже направлений осей x, y будет:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.65}$$

Если c есть та ось эллипсоида, которая убывает при переходе к пределу, то уравнение нашего эллипсоида возьмём в форме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7.66}$$

Обозначая через ρ плотность эллипсоида, мы примем его массу равной давлению P:

$$P = \frac{4}{3}\pi abc\rho. \tag{7.67}$$

Та часть массы этого эллипсоида, которая заключена в призме с поперечным сечением $d\Sigma$ и высотой

$$2c\sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2},$$

будет давать в пределе давление $q'\,d\Sigma$, откуда

$$q' = \lim 2c\rho\sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2}. \tag{7.68}$$

Потенциал эллипсоида (7.66) во внутренних точках будет *):

$$\varphi_0 = \pi abc\rho \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi} - \frac{z^2}{c^2+\xi}\right)d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}}. \tag{7.69}$$

---

*) Подробные сведения о потенциале эллипсоида можно найти в книге: П. Аппель, Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, ОНТИ, 1936, стр. 25—32.

Примем, что при безграничном убывании c одновременно безгранично возрастает ρ, так что произведение $c\rho$ остаётся постоянным, и, согласно (7.67), будем иметь:

$$\lim c\rho = \frac{3P}{4\pi ab}. \tag{7.70}$$

На поверхности давления имеем $z=0$, так что при переходе к пределу, когда c стремится к нулю, получим, внося $c\rho$:

$$\varphi_0 = \frac{3P}{4}\int_0^\infty \frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}, \tag{7.71}$$

$$q' = \frac{3P}{2\pi ab}\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2}. \tag{7.72}$$

Уравнение (7.72) даёт закон распределения давления q' по поверхности соприкосновения обоих тел. Мы видим, что давление q' есть ордината трёхосного эллипсоида с полуосями a, b, c_0, где

$$c_0 = \frac{3P}{2\pi ab}; \tag{7.73}$$

уравнение этого эллипсоида будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c_0^2}=1. \tag{7.74}$$

Внося φ_0 из (7.71) в (7.64), получим:

$$\alpha - Ax^2 - By^2 = \frac{3(\theta_1+\theta_2)P}{4}\int_0^\infty \frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}. \tag{7.75}$$

Так как это уравнение должно иметь место при всех значениях x, y внутри контура давления, то должны иметь место равенства:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3(\theta_1+\theta_2)P}{4}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}},\\
A &= \frac{3(\theta_1+\theta_2)P}{4}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi(b^2+\xi)}},\\
B &= \frac{3(\theta_1+\theta_2)P}{4}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2+\xi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi(a^2+\xi)}}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.76}$$

Второе и третье уравнения определяют a и b, а затем, когда они определены, из первого уравнения вычисляем величину сближения α.

Вне поверхности соприкосновения мы имеем для каждого тела свои упругие смещения. Для первого тела имеем из (7.37):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\frac{\partial\chi_1}{\partial x} - \frac{z}{4\pi\mu_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \\ v_1 &= -\frac{1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)}\frac{\partial\chi_1}{\partial y} - \frac{z}{4\pi\mu_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \\ w_1 &= +\frac{\lambda_1+2\mu_1}{4\pi(\lambda_1+\mu_1)\mu_1}\varphi_1 - \frac{z}{4\pi\mu_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7.77}$$

Для второго тела упругие смещения u_2, v_2, w_2 вычисляются аналогично и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{4\pi(\lambda_2+\mu_2)}\frac{\partial\chi_2}{\partial x} - \frac{z}{4\pi\mu_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \\ v_2 &= -\frac{1}{4\pi(\lambda_2+\mu_2)}\frac{\partial\chi_2}{\partial y} - \frac{z}{4\pi\mu_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \\ w_2 &= +\frac{\lambda_2+2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}\varphi_2 - \frac{z}{4\pi\mu_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.78}$$

причём, согласно первой формуле (7.34), имеем:

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial z} = \varphi_2, \quad \chi_2 = \int\limits_{\infty}^{z} \varphi_2\,dz;$$

на самой границе $z=0$ имеем из формул (7.77) и (7.78):

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0.$$

Значения u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 должны обращаться в нуль в бесконечно удалённых областях обоих тел. Вне поверхности соприкосновения мы имеем для каждого тела свои различные функции φ_1, ψ_1, χ_1 для первого тела, φ_2, ψ_2, χ_2 для второго тела. Но на самой поверхности соприкосновения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0.$$

Поэтому φ_1 и φ_2 представляют собой значения потенциала по обе стороны плоскости Oxy вне рассмотренного однородного эллипсоида. Если ν есть положительный корень кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{\nu} = 1, \tag{7.79}$$

то внешний потенциал эллипсоида будет:

$$\varphi=\frac{3P}{4}\int_{\nu}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}-\frac{z^2}{\xi}\right)d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}, \tag{7.80}$$

причём для внутренней точки надо взять $\nu=0$, $z=0$, как это дано в формуле (7.71), и тогда φ переходит в φ_0. На граничной плоскости $z=0$ вне контура давления, но достаточно близко от него мы можем принять, согласно (7.80), значение внешнего потенциала

$$\overline{\varphi}_0=\frac{3}{4}P\int_{\nu}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}, \tag{7.81}$$

где, согласно (7.79), ν есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}=1, \tag{7.82}$$

а следовательно, имеем из (7.61):

$$\overline{w}_1+\overline{w}_2=(\theta_1+\theta_2)\overline{\varphi}_0. \tag{7.83}$$

Из (7.83), (7.64) и (7.75) имеем:

$$\overline{w}_1+\overline{w}_2-(\alpha-Ax^2-By^2)=$$

$$=-\frac{3(\theta_1+\theta_2)P}{4}\int_{0}^{\nu}\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\right)d\xi}{\sqrt{\xi(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}. \tag{7.84}$$

Если ξ лежит в интервале

$$0<\xi<\nu,$$

то точка (x, y), лежащая на эллипсе (7.82), будет внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}=1.$$

Поэтому правая часть (7.84) больше нуля, что и даёт условие (7.59):

$$\overline{w}_1+\overline{w}_2-(\alpha-Ax^2-By^2)>0.$$

Допущение, что поверхность давления ограничена эллипсом (7.65), где a и b определяются из (7.76), и что давление q' по поверхности давления определяется (7.72), как оказывается, удовлетворяет всем условиям задачи, и мы можем считать её решённой.

§ 71. Вычисление величин a, b, α *).

Принимая $b > a$, обозначим:

$$k = \frac{b}{a}. \tag{7.85}$$

Преобразуем интеграл для A (7.76), введя новое переменное

$$\xi = b^2 z^2,$$

что даёт

$$A = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{2a^3} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1 + k^2 z^2)^3 (1 + z^2)}}; \tag{7.86}$$

так же, вводя новое переменное,

$$\xi = a^2 z^2,$$

получим следующее выражение для B:

$$B = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{2b^3} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)\left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right)^3}}. \tag{7.87}$$

Из формул (7.54) путём деления имеем:

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}. \tag{7.88}$$

Деля (7.86) на (7.87) и принимая во внимание (7.85) и (7.88), мы имеем уравнение

$$\frac{k^3 \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1 + k^2 z^2)^3 (1 + z^2)}}}{\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)\left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right)^3}}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}, \tag{7.89}$$

служащее для определения k.

После того как k найдено, мы вычисляем a^3 из (7.86), внося туда A из (7.54), также b^3 из (7.87), внося туда B из (7.54), что даёт:

$$\left.\begin{aligned} a^3 &= \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) \sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1 + k^2 z^2)^3 (1 + z^2)}}, \\ b^3 &= \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) \cos^2 \frac{\tau}{2}} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right)^3 (1 + z^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.90}$$

*) См. по этому поводу работы Н. М. Беляева и А. Н. Динника.

Интегралы, входящие в формулы (7.89) и (7.90), удобно выразить с помощью полных эллиптических интегралов первого и второго вида Лежандра.

Предполагая, что k и k_1 связаны соотношением

$$k^2+k_1^2=1, \tag{7.91}$$

введём обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, & F_1(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}},\\ E(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, & E_1(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7.92}$$

Вводя новое переменное $z=\operatorname{tg}\varphi$, мы имеем преобразование эллиптического интеграла:

$$\int_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\varphi}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}=F_1(k). \tag{7.93}$$

Взяв производную от (7.93) по k, получим:

$$\frac{dF_1}{dk}=-k\int_0^\infty\frac{z^2dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}.$$

Умножая обе части последнего уравнения на k, получим:

$$k\frac{dF_1}{dk}=-\int_0^\infty\frac{(1+k^2z^2-1)\,dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}=\int_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}-$$

$$-\int_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}=\int_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}-F_1.$$

Отсюда имеем:

$$\int_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}=F_1+k\frac{dF_1}{dk}. \tag{7.94}$$

На основании доказываемой в теории эллиптических интегралов формулы

$$\frac{dF_1}{dk}=\frac{1}{k_1^2}\left[kF_1-\frac{1}{k}E_1\right], \tag{7.95}$$

получим из (7.94) окончательно:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}}=\frac{F_1-E_1}{k_1^2}. \tag{7.96}$$

Аналогично имеем:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)^3}}=-\frac{k}{k_1^2}\left[k_1^2F_1-E_1\right]. \tag{7.97}$$

Внося теперь (7.96) и (7.97) в (7.89), мы получим уравнение для определения k:

$$\frac{F_1(k)-E_1(k)}{F_1(k)-\frac{1}{k^2}E_1(k)}=-\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}; \tag{7.98}$$

выражая $\sin^2\frac{\tau}{2}$ и $\cos^2\frac{\tau}{2}$ через $F_1(k)$ и $E_1(k)$ и внося их, а также (7.96) и (7.97) в (7.90), мы получим после упрощений:

$$\left.\begin{aligned} a^3&=\frac{3P(\theta_1+\theta_2)}{(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22})}\frac{E_1(k)}{k^2},\\ b^3&=\frac{3P(\theta_1+\theta_2)}{(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22})}k_1E_1(k). \end{aligned}\right\} \tag{7.99}$$

Если заданы поверхности соприкасающихся тел, то нам известны величины:

$$\omega,\ K_{11},\ K_{12},\ K_{21},\ K_{22}.$$

Поэтому сначала по формуле (7.51) находим ω_1, затем по формуле (7.42) находим ω_2. После того по формулам (7.50) находим A и B, по формуле (7.52) находим затем τ. Зная τ, мы решаем уравнение (7.98) относительно k.

Зная k, найдём из (7.99) значения a и b. По формулам (7.28) и (3.72) имеем:

$$\theta_1=\frac{1-\sigma_1^2}{\pi E_1},\quad \theta_2=\frac{1-\sigma_2^2}{\pi E_2}, \tag{7.100}$$

где σ_1 и σ_2 — коэффициенты Пуассона, а E_1 и E_2 суть модули Юнга для обоих тел. Остаётся проверить, что величина P, введённая по формуле (7.67), есть действительно давление между обоими соприкасающимися телами.

На основании выражения (7.72) для нагрузки q' на единицу площади поверхности соприкосновения имеем величину полного давления:

$$R=\iint q'dx\,dy=\frac{3P}{2\pi ab}\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

где двойной интеграл распространён по площади эллипса (7.65). Лёгкое вычисление даёт:

$$\iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\frac{3\pi ab}{2},$$

и следовательно, имеем:

$$R=P,$$

что и следовало доказать.

Остаётся преобразовать интеграл для α, данный в (7.76). Вводим новое переменное

$$\xi=b^2z^2,$$

что даёт:

$$\alpha=\frac{3P(\theta_1+\theta_2)}{2a}\int\limits_0^\infty\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}},$$

что, вследствие (7.93), даёт:

$$\alpha=\frac{3P(\theta_1+\theta_2)}{2a}F_1(k). \tag{7.101}$$

Внося сюда a из (7.99), мы получим:

$$\alpha=C(k)\sqrt[3]{P^2}, \tag{7.102}$$

где введено обозначение

$$C(k)=C_k=1{,}5F_1(k)\sqrt[3]{\frac{k^2(\theta_1+\theta_2)^2}{3E_1(k)}(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22})}. \tag{7.103}$$

Следовательно, сближение упругих тел пропорционально давлению в степени $\frac{2}{3}$, а не давлению в первой степени.

Для облегчения решения уравнения (7.98) Герц составил таблицу (стр. 174), связывающую τ и k.

τ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
k	0	0,048	0,108	0,181	0,265	0,365	0,483	0,625	0,792	1,000
$F_1(k)$	∞	4,460	3,626	3,106	2,748	2,447	2,189	1,960	1,760	1,571
$E_1(k)$	1,000	1,004	1,016	1,043	1,079	1,130	1,200	1,293	1,412	1,571

§ 72. Случай, когда оба тела — шары.

Пусть первое тело есть шар радиуса R_1, а второе тело — шар радиуса R_2. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned} K_{11}=K_{12}=\frac{1}{R_1}, \\ K_{21}=K_{22}=\frac{1}{R_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.104)$$

Выражение (7.51) даёт:

$$\omega_1=0;$$

также можно принять $\omega=0$, и следовательно, $\omega_2=0$. Далее, имеем из (7.50):

$$A=B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (7.105)$$

затем из (7.52) получим:

$$\cos\tau=0, \quad \tau=\frac{\pi}{2}. \qquad (7.106)$$

В случае кругового контура давления формулы (7.85), (7.91) и (7.92) дадут нам:

$$k=1,\ k_1=0,\ F_1=E_1=\frac{\pi}{2}.$$

Формула (7.99) в этом случае примет вид:

$$a^3=\frac{3P(\theta_1+\theta_2)\pi}{4\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)},$$

откуда имеем:

$$a=\sqrt[3]{\frac{3(\theta_1+\theta_2)\pi P}{4\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}}, \qquad (7.107)$$

т. е. радиус круга давления пропорционален корню кубическому из давления.

Для сближения шаров a имеем из (7.103):

$$C(1)=C_1=\sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}(\theta_1+\theta_2)^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}. \tag{7.108}$$

В случае двух равных шаров из одинакового материала имеем:

$$R_1=R_2=R, \quad \theta_1=\theta_2=\theta,$$

что даёт

$$a=\sqrt[3]{\frac{3P\theta R\pi}{4}}, \quad C_1=\sqrt[3]{\frac{9\pi^2\theta^2}{2R}}. \tag{7.109}$$

Вводя модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ, имеем из (7.100) и (7.109):

$$a=\sqrt[3]{\frac{3(1-\sigma^2)PR}{4E}}, \quad C_1=\sqrt[3]{\frac{9(1-\sigma^2)^2}{2RE^2}}. \tag{7.110}$$

Если же R_2 стремится к бесконечности, то второе тело обращается в полубесконечное тело. В этом случае, полагая $R_2\to\infty$, имеем из (7.107) и (7.108):

$$\left.\begin{aligned} a&=\sqrt[3]{\frac{3(\theta_1+\theta_2)PR_1\pi}{4}}, \\ C_1&=\sqrt[3]{\frac{9\pi^2(\theta_1+\theta_2)^2}{16R_1}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.111}$$

Если плоскость, на которую нажимает шар, есть абсолютно жёсткая, то для неё

$$\theta_2=0,$$

и следовательно, при нажатии упругого шара на абсолютно жёсткую плоскость имеем:

$$a=\sqrt[3]{\frac{3\theta PR\pi}{4}}, \quad C_1=\sqrt[3]{\frac{9\pi^2\theta^2}{16R}}. \tag{7.112}$$

§ 73. Размеры полуосей контурного эллипса *).

В общем случае полуоси эллипса b и a не равны между собой. Из ряда вычислительных работ были построены формулы, которыми удобно пользоваться для приближённых расчётов:

$$\left.\begin{aligned} a&=m\sqrt[3]{\frac{3\pi P(\theta_1+\theta_2)}{4(A+B)}}, \\ b&=n\sqrt[3]{\frac{3\pi P(\theta_1+\theta_2)}{4(A+B)}}, \end{aligned}\right\} \tag{7.113}$$

*) По вопросу о напряжениях при контакте см. Тимошенко С. П., Теория упругости, § 108.

где, согласно (7.50):

$$2(A+B)=K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22}, \tag{7.114}$$

а m и n суть функции τ:

$$m=m(\tau), \quad n=n(\tau),$$

которые вычисляются для разных τ из следующей таблицы Виттенмора и Петренко.

τ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
m	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
n	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

При увеличении отношения $\frac{a}{b}$ мы будем получать всё более узкие контурные эллипсы и в пределе при $\frac{a}{b} \to \infty$ придём к случаю касания двух цилиндров с параллельными осями. Поверхность соприкосновения в этом случае — узкий прямоугольник. Распределение давления параллельно малой стороне прямоугольника представится полуэллипсом. Если ось Ox направить параллельно осям цилиндров, то из уравнения (7.74) будем иметь:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c_0^2}=1, \tag{7.115}$$

где b есть половина ширины полосы касания.

Легко получается в этом случае q' — единичная нагрузка давления:

$$q'=\sqrt{\frac{4(\theta_1+\theta_2)R_1R_2P}{R_1+R_2}}, \tag{7.116}$$

где P — нагрузка на единицу длины по оси цилиндров, R_1 и R_2 — радиусы цилиндров.

Также имеем из (7.115):

$$P=2\int_0^b c_0\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{\pi b c_0}{2};$$

отсюда имеем:

$$c_0=\frac{2P}{\pi b}. \tag{7.117}$$

Очевидно, c_0 есть максимальная единичная нагрузка давления, получаемая в центре полосы соприкосновения.

§ 74. Обобщение теории Герца сжатия упругих соприкасающихся тел.

Мы ограничились в § 69 случаем, когда вторые производные z_1 и z_2 отличны от нуля в начале координат. В этом случае, согласно формуле (7.57), мы имели:

$$\delta(x, y) = z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \tag{7.118}$$

и получили изложенное в предыдущих параграфах решение. Для его вывода мы использовали формулу для потенциала однородного эллипсоида. Можно поставить вопрос о решении проблемы в общем случае, т. е. о решении уравнения

$$(\theta_1 + \theta_2) \iint \frac{q' dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = f(x,y). \tag{7.119}$$

Эта проблема, связанная с более общей задачей о решении интегральных уравнений, была выдвинута И. Я. Штаерманом в его статьях. *)

Мы ограничимся здесь простейшим случаем поставленной им контактной задачи, когда оба соприкасающихся тела суть тела вращения и, следовательно, поверхность давления есть круг.

В этом случае, сохраняя обозначения § 70, мы примем:

$$\delta(x, y) = Ar^{2n}, \tag{7.120}$$

где A и n — постоянные, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7.121}$$

Тогда уравнение (7.62) примет вид:

$$(\theta_1 + \theta_2)\varphi_0 = a - Ar^{2n}. \tag{7.122}$$

Согласно формуле (7.63) для φ_0, мы имеем следующее выражение:

$$\varphi_0 = \iint \frac{q' dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \tag{7.123}$$

Внося (7.123) в (7.122), мы получим:

$$(\theta_1 + \theta_2) \iint \frac{q' dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 (y-y')^2}} = a - Ar^{2n}. \tag{7.124}$$

Полагая $x = y = 0$, имеем из (7.121) $r = 0$, поэтому из (7.124) получаем для a следующее выражение:

$$a = (\theta_1 + \theta_2) \iint \frac{q' dx' dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \tag{7.125}$$

---

*) Доклады Академии Наук СССР 1939, т. XXV, № 5, 1940, т. XXIX, № 3, 1941, т. XXXI, № 8, 1943, т. XXXVIII, № 7.

Внося α в уравнение (7.124), мы получим внутри контура давления:

$$(\theta_1+\theta_2)\iint\left[\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right]q'dx'dy'= \\ = Ar^{2n}. \quad (7.126)$$

Переходя к полярным координатам φ', r' с полюсом в точке O, мы приведём уравнение (7.126) к виду:

$$(\theta_1+\theta_2)\int_0^{2\pi}\int_0^a q'\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\varphi'+r'^2}}\right)r'dr'd\varphi'=Ar^{2n}, \quad (7.127)$$

причём $r\leqslant a$, где a — радиус круга давления.

Если P — сжимающая сила, то имеем условие равновесия

$$2\pi\int_0^a q'r'dr'=P. \quad (7.128)$$

Вне контура давления, т. е. при $r>a$, равенство (7.127) заменяется следующим неравенством:

$$(\theta_1+\theta_2)\int_0^{2\pi}\int_0^a q'\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\varphi'+r'^2}}\right)r'dr'd\varphi'<Ar^{2n}. \quad (7.129)$$

Уравнение (7.127) является интегральным уравнением. Оно было впервые получено И. Я. Штаерманом. Его решение имеет вид:

$$q'(r')=\frac{Aa^{2n-1}}{\pi^2(\theta_1+\theta_2)}\left[\frac{2\cdot4\ldots2n}{1\cdot3\ldots(2n-1)}\right]^2P_n\left(\frac{r'}{a}\right), \quad (7.130)$$

где

$$P_n(t)=\left[t^{2n-2}+\frac{1}{2}t^{2n-4}+\ldots+\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2\cdot4\ldots(2n-2)}\right]\sqrt{1-t^2}.$$

То, что выражение (7.130) является решением уравнения (7.127), можно убедиться непосредственной подстановкой. Подставляя функцию $q'(r')$ из (7.130) в (7.129), убеждаемся, что неравенство удовлетворяется.

Подставляя (7.130) в (7.128), находим радиус поверхности давления a:

$$a=\sqrt[2n+1]{\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\,\frac{\pi(\theta_1+\theta_2)\cdot P}{2A}}. \quad (7.131)$$

Из формулы (7.125) находим сближение α тел при сжатии:

$$\alpha=2\pi(\theta_1+\theta_2)\int_0^a q'(r')\,dr'=\frac{2\cdot4\ldots2n}{1\cdot3\ldots(2n-1)}Aa^{2n}. \quad (7.132)$$

§ 75. Задача о жёстком штампе.

Жёстким штампом мы будем называть абсолютно твёрдое тело произвольной формы, которое вдавливается в поверхность упругого полупространства.

Впервые задача о жёстком штампе была решена Буссинеском для случая круглого цилиндрического штампа, ось которого нормальна к поверхности полупространства.

Безвременно погибший В. М. Абрамов распространил решение Буссинеска на случай круглого жёсткого штампа, перемещение которого направлено под углом к плоской границе полупространства.

В работах И. Я. Штаермана и А. И. Лурье эта проблема получила дальнейшее развитие*).

Мы следуем в дальнейшем изложении работе А. И. Лурье.

Направим, как в § 68, ось z внутрь упругого полупространства, а плоскую границу примем за плоскость Oxy, так что граница упругого полупространства дана уравнением:

$$z=0.$$

Свяжем со штампом систему осей ξ, η, ζ. Уравнение поверхности S штампа в этой системе осей пусть задаётся в виде:

$$\zeta=\varphi(\xi, \eta). \tag{7.133}$$

Начало этой системы осей примем в некоторой точке поверхности S штампа, а ось ζ направим внутрь штампа по нормали к поверхности S в этой точке. Выбирая надлежащим образом оси ξ, η, мы, подобно § 69, можем представить уравнение поверхности S вблизи начала координат в форме:

$$2\zeta=\frac{\xi^2}{R_1}+\frac{\eta^2}{R_2}+\ldots, \tag{7.134}$$

где

$$\frac{1}{R_1}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)_{\xi=\eta=0}, \quad \frac{1}{R_2}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)_{\xi=\eta=0}. \tag{7.135}$$

Формула (7.134) содержит в себе как частный случай формулу (7.40). R_1 и R_2 суть главные радиусы кривизны поверхности S в начале координат, которые мы будем считать положительными.

В случае плоского штампа

$$\varphi(\xi, \eta)=0. \tag{7.136}$$

Пусть в начальном положении, которое мы обозначим инде-

---

*) «Прикладная математика и механика», т. V, вып. 3, 1941.

ксом нуль, оси ξ и η совпадают с осями x и y, а ось ζ направлена противоположно z, т. е.

$$\xi_0 = x, \quad \eta_0 = y, \quad \zeta_0 = -z. \tag{7.137}$$

Зададим штампу весьма малое перемещение α и поворот β. Таблица косинусов между начальным направлением осей ξ_0, η_0, ζ_0 и весьма близким ξ, η, ζ будет:

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ	1	β_{ζ_0}	$-\beta_{\eta_0}$
η	$-\beta_{\zeta_0}$	1	β_{ξ_0}
ζ	β_{η_0}	$-\beta_{\xi_0}$	1

где β_{ξ_0}, β_{η_0}, β_{ζ_0} суть проекции вектора поворота β на направления осей ξ_0, η_0, ζ_0. Следовательно, формулы перехода от координат ξ, η, ζ к координатам ξ_0, η_0, ζ_0 будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= a_{\xi_0} + \xi - \beta_{\zeta_0}\eta + \beta_{\eta_0}\zeta, \\ \eta_0 &= a_{\eta_0} + \eta - \beta_{\xi_0}\zeta + \beta_{\zeta_0}\xi, \\ \zeta_0 &= a_{\zeta_0} + \zeta - \beta_{\eta_0}\xi + \beta_{\xi_0}\eta, \end{aligned}\right\} \tag{7.138}$$

где a_{ξ_0}, a_{η_0}, a_{ζ_0} суть проекции поступательного перемещения штампа α на оси ξ_0, η_0, ζ_0. Так как системы осей координат x, y, z и ξ_0, η_0, ζ_0 разноимённые (оси z и ζ_0 направлены противоположно), то мы имеем:

$$\beta_x = -\beta_{\xi_0}, \quad \beta_y = -\beta_{\eta_0}, \quad \beta_z = \beta_{\zeta_0}. \tag{7.139}$$

Координаты точек поверхности штампа S после смещения по отношению к неподвижным осям x, y, z определяются по формулам (7.137)

$$x_S = \xi_0, \quad y_S = \eta_0, \quad z_S = -\zeta_0.$$

Внося сюда ξ_0, η_0, ζ_0 по формулам (7.138) и принимая во внимание (7.139), мы получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} x_S &= a_x + \xi - \beta_z\eta - \beta_y\varphi(\xi, \eta), \\ y_S &= a_y + \eta + \beta_x\varphi(\xi, \eta) + \beta_z\xi, \\ z_S &= a_z - \varphi(\xi, \eta) - \beta_y\xi + \beta_x\eta, \end{aligned}\right\} \tag{7.140}$$

где a_x, a_y, a_z суть проекции перемещения α на оси x, y, z.

Если u, v, w суть упругие смещения точки упругого полупространства $(x, y, 0)$, то после деформации координаты этой точки относительно тех же осей будут:

$$x' = x + u;\ y' = y + v;\ z' = w. \tag{7.141}$$

Пусть частицы поверхности упругого полупространства, которые после перемещения штампа расположатся на смещённой поверхности S, были расположены до деформации в некоторой области Ω плоскости $z = 0$.

Для этих частиц

$$x' = x_S,\ y' = y_S,\ z' = z_S,$$

и, согласно (7.140) и (7.141):

$$\left.\begin{aligned} x + u &= \alpha_x + \xi - \beta_z\eta - \beta_y\varphi(\xi, \eta), \\ y + v &= \alpha_y + \eta + \beta_z\xi + \beta_x\varphi(\xi, \eta), \\ w &= \alpha_z - \varphi(\xi, \eta) - \beta_y\xi + \beta_x\eta. \end{aligned}\right\} \tag{7.142}$$

Рассмотрим случай перемещения штампа по направлению нормали к плоскости Oxy при отсутствии поворота вокруг оси z.

В этом случае

$$\alpha_x = \alpha_y = \beta_z = 0.$$

Примем, что

$$\varphi(\xi, \eta),\ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta},\ \alpha_z,\ \beta_x,\ \beta_y \tag{7.143}$$

суть малые того же порядка, что и u, v, w.

Тогда из (7.142) получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + u, \\ \eta &= y + v. \end{aligned}\right\} \tag{7.144}$$

Так как имеем:

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi(x + u,\ y + v) = \varphi(x, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi}{\partial y}v + \ldots,$$

то, отбрасывая члены, начиная со второго порядка малости мы получим приближённо:

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi(x, y). \tag{7.145}$$

Далее имеем вследствие (7.144):

$$\left.\begin{aligned} \xi\beta_y &= x\beta_y + u\beta_y \approx x\beta_y, \\ \eta\beta_x &\approx y\beta_x. \end{aligned}\right\} \tag{7.146}$$

Внося (7.145) и (7.146) в третью формулу (7.142), получим окончательно:

$$w = \alpha_z - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y). \tag{7.147}$$

Эта формула Штаермана-Лурье играет важную роль в теории жёсткого штампа.

В случае плоского штампа

$$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$

а, следовательно, $\varphi(x, y) = 0$, и мы имеем:

$$w = \alpha_z - \beta_y x + \beta_x y, \tag{7.148}$$

причём область Ω определяется формою сечения штампа. Это уравнение было установлено ещё В. М. Абрамовым.

Для неплоского штампа контур области Ω определяется из уравнения

$$\varphi(\xi, \eta) = \Delta = \text{const.}, \tag{7.149}$$

или при нашем порядке приближения

$$\varphi(x, y) = \Delta = \text{const.} \tag{7.150}$$

Следовательно, точкам плоскости $z = 0$, находившимся внутри области Ω, сообщаются перемещения w, определяемые по формуле (7.148); в образующуюся «впадину» затем вставляется штамп, который её заполняет; объём впадины равен объёму, ограниченному поверхностью S и плоскостью $\zeta = \Delta$. Чтобы сохранить при этом равновесие, штамп нужно прижать силой P, параллельной оси z и проходящей через точку x_0, y_0, причём, согласно условиям равновесия, имеем:

$$\left.\begin{aligned} P &= \iint\limits_{(\Omega)} q(x, y)\,dx\,dy, \\ x_0 P &= \iint\limits_{(\Omega)} xq(x, y)\,dx\,dy, \\ y_0 P &= \iint\limits_{(\Omega)} yq(x, y)\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{7.151}$$

В обозначениях § 68, согласно формуле (7.30), имеем следующее выражение для упругого перемещения w на поверхности полупространства:

$$\overline{w} = \theta \iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r}. \tag{7.152}$$

Внося сюда w из (7.148), получим:

$$\theta \iint \frac{q'\,dx'\,dy'}{r} = \alpha_z - \beta_y x + \beta_x y. \tag{7.153}$$

Это есть основное уравнение в теории жёсткого штампа, из которого надо определить $q'(x', y')$ при заданных α_z, β_y, β_x. В простейшем случае круглого штампа, прижимаемого нормально к плоской границе полупространства, имеем:

$$\beta_x = \beta_y = 0,$$

и уравнение (7.153) принимает вид:

$$\theta \iint \frac{q'\, dx'\, dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} = \alpha_z = \text{const.}; \tag{7.154}$$

решение этого уравнения, данное Буссинеском, имеет вид:

$$q' = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \tag{7.155}$$

и углубление штампа:

$$w = \frac{P\pi}{2a}\theta = \text{const.} \tag{7.156}$$

Из формулы (7.155) следует, что распределение давления очень неравномерно: наименьшее его значение будет в центре штампа ($r = 0$)

$$q'_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2},$$

при приближении к контуру штампа ($r = a$) давление беспредельно возрастает. Вследствие этого на контуре штампа имеет место явление текучести материала, которое носит местный характер и не оказывает существенного влияния на распределение давления под штампом [данное формулой (7.155)] в точках, находящихся на некотором расстоянии от окружности основания штампа.

§ 76. Случай, когда на границе упругого полупространства заданы перемещения.

Буссинеск исследовал вторую основную задачу: по заданным на внешней границе упругого полупространства перемещениям найти упругие перемещения во всём полупространстве.

В случае упругого равновесия при отсутствии массовых сил было доказано в § 46, что три компонента упругого перемещения u, v, w удовлетворяют уравнениям (4.34), т. е.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^4 u &= 0, \\ \nabla^4 v &= 0, \\ \nabla^4 w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.157}$$

На основании доказанного в § 55, мы можем выбрать решение уравнений (7.157) в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.158}$$

где $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ суть гармонические функции, т. е. удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\varphi_1 &= 0, \\ \nabla^2\varphi_2 &= 0, \\ \nabla^2\varphi_3 &= 0, \\ \nabla^2\psi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.159}$$

Внося (7.158) в (7.1), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\Omega) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(\Omega) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}(\Omega) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.160}$$

где

$$\Omega = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial\psi}{\partial z}; \tag{7.161}$$

при этом принято во внимание, что функции φ_1, φ_2, φ_3 и ψ удовлетворяют уравнениям (7.159), а также, что имеет место соотношение:

$$\nabla^2(ab) = a\nabla^2 b + b\nabla^2 a + 2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial z}\right). \tag{7.162}$$

Мы удовлетворим уравнениям (7.160), положив

$$\Omega = \text{const}.$$

Мы можем положить

$$\Omega = 0, \tag{7.163}$$

включая этим самым константу в функцию $\psi(x, y, z)$.

Внося в (7.163) выражение для Ω, мы получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right). \tag{7.164}$$

Таким образом, в решении Буссинеска (7.158) только три гармонические функции φ_1, φ_2, φ_3, суть произвольные, а гармоническая функция ψ выражается через них по формуле (7.164).

Выбирая оси координат, как в § 68, мы будем иметь вдоль границы упругого полупространства:

$$z=0,$$

а следовательно, на границе упругого полупространства имеем из решения Буссинеска:

$$\left.\begin{aligned} u&=\varphi_1(x, y, 0),\\ v&=\varphi_2(x, y, 0),\\ w&=\varphi_3(x, y, 0). \end{aligned}\right\} \tag{7.165}$$

Если на границе полупространства $z=0$ заданы упругие перемещения, как функции текущих координат x, y в виде:

$$\left.\begin{aligned} u&=U(x, y),\\ v&=V(x, y),\\ w&=W(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{7.166}$$

то сравнивая решение (7.165) с (7.166), мы будем иметь при $z=0$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1&=U(x, y),\\ \varphi_2&=V(x, y),\\ \varphi_3&=W(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7.167}$$

Таким образом, нам нужно найти три функции φ_1, φ_2, φ_3, гармонические внутри упругого полупространства и принимающие заданные значения (7.167) на его границе, принятой за плоскость $z=0$.

Один из методов решения этой задачи основан на применении интегралов Фурье.

Примем, например,

$$\varphi_1(x, y, z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int g_1(\alpha, \beta)\, e^{\gamma z+i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta; \tag{7.168}$$

так как функция φ_1 должна быть гармонической, то имеем:

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2. \tag{7.169}$$

При решении упругой задачи мы примем, следуя Буссинеску, что перемещения u, v, w уничтожаются в бесконечном удалении от граничной плоскости, т. е. для $z\to\infty$.

Поэтому мы должны принять, как решение уравнения (7.169),

$$\gamma=-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \tag{7.170}$$

Так как при $z=0$

$$\varphi_1=U(x, y),$$

то, согласно теореме Фурье, имеем:

$$g_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int U(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{7.171}$$

Если внести (7.171) в (7.168), то получим при $z=0$:

$$\varphi_1(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int d\alpha\, d\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int U(\xi, \eta)\, e^{i\alpha(x-\xi)+i\beta(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{7.172}$$

Но, согласно формуле Фурье, это как раз равно $U(x, y)$.

Также найдём:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int g_2(\alpha, \beta)\, e^{\gamma z+i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ \varphi_3(x, y, z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int g_3(\alpha, \beta)\, e^{\gamma z+i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}\right\} \tag{7.173}$$

причём

$$\left.\begin{aligned} g_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int V(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ g_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int W(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{7.174}$$

Согласно (7.164), определяем ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \{\gamma g_3 + i(\alpha g_1 + \beta g_2)\}\, e^{\gamma z+i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta;$$

отсюда, интегрируя по z, получим:

$$\psi = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\{\gamma g_3 + i(\alpha g_1 + \beta g_2)\}}{\gamma}\, e^{\gamma z+i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta. \tag{7.175}$$

Внося полученные значения φ_1, φ_2, φ_3 и ψ в формулы (7.158), мы получим окончательно выражения упругих перемещений в виде:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \Big\{g_1(\alpha, \beta) - \\
&\quad - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \frac{i\alpha}{\gamma}\left[\gamma g_3 + i(\alpha g_1 + \beta g_2)\right]\Big\} e^{\gamma z + i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\
v &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \Big\{g_2(\alpha, \beta) - \\
&\quad - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \frac{i\beta}{\gamma}\left[\gamma g_3 + i(\alpha g_1 + \beta g_2)\right]\Big\} e^{\gamma z + i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\
w &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \Big\{g_3(\alpha, \beta) - \\
&\quad - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \left[\gamma g_3 + i(\alpha g_1 + \beta g_2)\right]\Big\} e^{\gamma z + i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta.
\end{aligned}\right\} \tag{7.176}$$

Мы получили, таким образом, решение второй основной задачи Буссинеска при помощи определённых интегралов.

ГЛАВА VIII.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ.

§ 77. Плоская деформация.

Мы имеем *плоскую деформацию,* параллельную данной плоскости (например, Oxy), если имеют место только упругие перемещения, параллельные этой плоскости. Поэтому имеем:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{8.2}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ 2\omega_z &= 2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

$$\left.\begin{aligned} e_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Далее, имеем соотношения

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ Z_z &= \lambda\Delta = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right); \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_z &= X_z = 0, \\ X_y &= \mu e_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Следовательно, компонент напряжённого состояния Z_z не исчезает, и только благодаря его наличию обеспечивается состояние плоской деформации. Складывая первые два соотношения (8.5), имеем:

$$X_x+Y_y=2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=2(\lambda+\mu)\Delta,$$

откуда

$$\Delta=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y). \tag{8.7}$$

Внося (8.7) в третье соотношение (8.5), имеем:

$$Z_z=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x+Y_y), \tag{8.8}$$

а так как

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

то имеем также

$$Z_z=\sigma(X_x+Y_y). \tag{8.9}$$

Если мы имеем длинное цилиндрическое тело, по оси которого направлена ось Oz, то на концевых сечениях тела должны действовать некоторые нормальные напряжения, обеспечивающие неизменяемость продольных волокон его.

Уравнения упругого равновесия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\rho X=0,\\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\rho Y=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Здесь X, Y не зависят от z.

Внося (8.5) и (8.6) в (8.10), мы получим уравнения Ламе в виде:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}+\mu\nabla_1^2 u+\rho X=0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}+\mu\nabla_1^2 v+\rho Y=0,\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

а в случае отсутствия массовых сил имеем:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}+\mu\nabla_1^2 u=0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}+\mu\nabla_1^2 v=0,\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

где

$$\Delta_1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{8.13}$$

Здесь обозначено:

$$\nabla_1^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \nabla_1^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{8.14}$$

В случае плоской деформации формулы преобразования компонентов напряжённого состояния (2.25) и (2.26) значительно упрощаются. В самом деле, обозначая через α угол между осями x и x', мы будем иметь:

$$\angle xx' = \alpha, \quad \angle x'y = 90^\circ - \alpha, \quad \angle xy' = 90^\circ + \alpha, \quad \angle yy' = \alpha.$$

Значения девяти косинусов будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} &l_1 = \cos\alpha, && l_2 = -\sin\alpha, && l_3 = 0, \\ &m_1 = \sin\alpha, && m_2 = \cos\alpha, && m_3 = 0, \\ &n_1 = 0, && n_2 = 0, && n_3 = 1. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения косинусов в формулы (2.25) и (2.26) и принимая во внимание (8.6), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= X_x \cos^2\alpha + Y_y \sin^2\alpha + X_y \sin 2\alpha, \\ Y'_{y'} &= X_x \sin^2\alpha + Y_y \cos^2\alpha - X_y \sin 2\alpha, \\ X'_{y'} &= \frac{1}{2}(Y_y - X_x)\sin 2\alpha + X_y \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

Пусть теперь за оси координат у нас взяты главные оси напряжённого состояния, тогда

$$X_x = \sigma_1, \quad Y_y = \sigma_2, \quad X_y = 0,$$

и, отбрасывая штрихи в левых частях формул (8.15), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha, \\ Y_y &= \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha, \\ X_y &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

§ 78. Плоское напряжённое состояние.

Если все три компонента напряжённого состояния, параллельные данной плоскости по всему объёму упругого тела, суть нули, то имеет место плоское напряжённое состояние. Если принять указанную плоскость за плоскость Oxy, то имеем соотношения:

$$X_z = Y_z = Z_z = 0. \tag{8.17}$$

Отсюда имеем для изотропного тела уравнение:

$$Z_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

которое даёт:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{8.18}$$

На основании (8.18) мы получим:

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{8.19}$$

а следовательно, будем иметь следующие формулы для двух остальных нормальных компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\ Y_y&=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

Если ввести обозначение:

$$\lambda'=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}, \tag{8.21}$$

то окончательно получим для плоского напряжённого состояния изотропного тела:

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\lambda'\Delta_1+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\ Y_y&=\lambda'\Delta_1+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\\ Z_z&=0,\\ X_y&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\ Y_z&=X_z=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Здесь u, v, w вообще зависят от z.

Для плоского напряжённого состояния в случае отсутствия массовых сил уравнения Коши примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

В случае упругого равновесия изотропного тела мы должны внести сюда (8.21), что даёт:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda'+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}+\mu\nabla_1^2 u=0,\\(\lambda'+\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}+\mu\nabla_1^2 v=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8.24)$$

Эти уравнения отличаются от (8.12) только тем, что вместо λ стоит λ'.

§ 79. Обобщённое плоское напряжённое состояние.

Пластинкой называется цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами его оснований. Если пластинка имеет очень малую толщину (т. е. высоту цилиндра), то, взяв плоскость Oxy параллельной основаниям цилиндра, можно, в случае сил, действующих параллельно Oxy, с достаточной точностью принять, что нормальное напряжение Z_z равно нулю по всему объёму цилиндра, но что касательные напряжения X_z и Y_z вообще не равны нулю, но обращаются в нуль только на основаниях пластинки. Такое напряжённое состояние называется *обобщённым* плоским напряжённым состоянием.

Пусть $2h$ есть толщина пластинки (т. е. высота цилиндра) и плоскость Oxy делит пополам расстояние между обоими основаниями, будучи параллельна им. В этом случае полезно ввести средние по толщине пластинки значения компонентов упругого смещения, деформации и напряжённого состояния по формулам вида

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}u\,dz,\ \bar{v}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}v\,dz,\quad \bar{w}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}w\,dz,\\&\bar{e}_{xx}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}e_{xx}\,dz,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д.}\\&\bar{e}_{yz}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}e_{yz}\,dz,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д.}\\&\bar{X}_x=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}X_x\,dz,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д.}\\&\bar{Y}_z=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}Y_z\,dz,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т. д.}\end{aligned}\right\}\qquad(8.25)$$

Уравнения упругого равновесия Коши (4.24) мы умножаем на dz и интегрируем затем в пределах от $(-h)$ до $(+h)$, причём предполагается отсутствие массовых сил. Мы должны принять во внимание, что:

$$Z_z = 0 \qquad \text{по всему объёму,}$$
$$Y_z = X_z = 0 \qquad \text{для } z = \pm h.$$

Поэтому мы получим следующие *осреднённые* уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{X}_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \overline{X}_y}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Y}_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

Так как Z_z равно нулю, то имеет место соотношение (8.19), вследствие чего, пользуясь (8.25), получим:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_x &= \lambda'\overline{\Delta} + 2\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}, \\ \overline{Y}_y &= \lambda'\overline{\Delta} + 2\mu \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}, \\ \overline{X}_y &= \mu \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

где

$$\overline{\Delta} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}; \tag{8.28}$$

внося (8.27) в (8.26), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda' + \mu) \frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \overline{u} = 0, \\ (\lambda' + \mu) \frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \overline{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

§ 80. Функция напряжений Эри.

В случае отсутствия массовых сил уравнения (8.10) примут вид:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \tag{8.30}$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \tag{8.31}$$

Уравнение (8.30) показывает, что выражение

$$X_x dy - X_y dx = dA(x, y)$$

есть точный дифференциал функции $A(x, y)$, а следовательно,

$$X_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad X_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{8.32}$$

Уравнение (8.31) показывает, что выражение

$$X_y dy - Y_y dx = dB(x, y)$$

есть точный дифференциал функции $B(x, y)$, а следовательно,

$$X_y = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad Y_y = -\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{8.33}$$

Сравнивая оба выражения для X_y, получим:

$$-\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y},$$

что показывает, что выражение

$$A\,dy - B\,dx = d\Phi(x, y)$$

есть точный дифференциал функции $\Phi(x, y)$, а следовательно,

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Внося A и B в (8.32) и (8.33), мы получим:

$$X_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}. \tag{8.34}$$

Внося (8.34) в (8.30) и (8.31), мы увидим, что уравнения эти тождественно удовлетворены, какова бы ни была функция $\Phi(x, y)$. В этом виде решение (8.34) было дано Эри.

Однако, функция $\Phi(x, y)$ не может быть взята произвольно, так как должны быть удовлетворены тождественные соотношения Сен-Венана (1.107) и (1.110). Для однородного изотропного тела их выгодно применять в виде формул (4.51), данных Бельтрами. Из формул (8.5) имеем:

$$X_x + Y_y = 2(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2(\lambda + \mu)\Delta_1. \tag{8.35}$$

Кроме того из (8.8) получим:

$$Z_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(X_x + Y_y) = \sigma(X_x + Y_y). \tag{8.36}$$

Но, согласно (8.34):

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \nabla_1^2 \Phi. \tag{8.37}$$

Сравнивая (8.37) и (8.35), получим:

$$2(\lambda + \mu)\Delta_1 = \nabla_1^2 \Phi. \tag{8.38}$$

Также из (8.36) и (8.37) имеем:

$$Z_z = \sigma \nabla_1^2 \Phi. \tag{8.39}$$

Из формул (8.35) и (8.36) мы получим:

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z = (1+\sigma)(X_x + Y_y); \tag{8.40}$$

а из формул (8.36) и (8.37):

$$\theta = X_x + Y_y + Z_z = (1+\sigma)\nabla_1^2 \Phi. \tag{8.41}$$

Внося (8.6), (8.34) и (8.38) в формулы (4.51), мы окончательно получим:

$$\begin{aligned}
(1+\sigma)\left[\nabla_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nabla_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right] &= (1+\sigma)\nabla_1^4\Phi = 0,\\
(1+\sigma)\left[\nabla_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nabla_1^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right] &= (1+\sigma)\nabla_1^4\Phi = 0,\\
\sigma(1+\sigma)\nabla_1^4\Phi &= 0,\\
(1+\sigma)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\nabla_1^2\Phi &= 0,\\
(1+\sigma)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\nabla_1^2\Phi &= 0.
\end{aligned}$$

Четвёртое уравнение системы (4.51) обращается в тождество. Так как компоненты напряжённого состояния, а следовательно Φ, не зависят от координаты z, то четвёртое и пятое уравнения из полученных нами уравнений будут удовлетворены. Первые три уравнения будут удовлетворены только, если

$$\nabla_1^4\Phi = \nabla_1^2(\nabla_1^2\Phi) = 0. \tag{8.42}$$

Это и есть уравнение Максвелла, которому должна удовлетворять функция $\Phi(x, y)$, называемая *функцией напряжений Эри*. Уравнение (8.42) называется бигармоническим, а функции, ему удовлетворяющие, называются бигармоническими. Если $\psi(x, y)$ есть гармоническая функция, то функция

$$\Phi = [Ax + By + C(x^2 + y^2)]\psi, \tag{8.43}$$

где A, B, C — произвольные постоянные, есть бигармоническая функция, удовлетворяющая уравнению (8.42). Это следует из формулы (4.171) § 55.

§ 81. Решение плоской задачи по методам Лява и Галёркина.

1) Метод Лява.

Для случая плоской деформации однородного изотропного тела уравнения (8.12) могут быть преобразованы к новой форме, если ввести элементарное вращение ω,

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (8.44)$$

Мы имеем:

$$\nabla_1^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-2\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_1}{\partial x},$$

$$\nabla_1^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}.$$

Внося это в (8.12), мы получим:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial x}-2\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta_1}{\partial y}+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial x}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.45)$$

Отсюда следует, что $(\lambda+2\mu)\Delta_1$ и $2\mu\omega$ удовлетворяют известным соотношениям Коши-Римана в теории функций комплексного переменного, а следовательно, выражение

$$(\lambda+2\mu)\Delta_1+2\mu\omega i=F(z) \qquad (8.46)$$

есть функция комплексного переменного*)

$$z=x+iy, \quad \text{где} \quad i=\sqrt{-1}. \qquad (8.47)$$

Ляв ввёл вторую функцию комплексного переменного в виде:

$$\xi+i\eta=\int[(\lambda+2\mu)\Delta_1+2\mu\omega i]\,dz; \qquad (8.48)$$

тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=(\lambda+2\mu)\Delta_1,\\ -\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=2\mu\omega.\end{aligned}\right\} \qquad (8.49)$$

Сверх того, мы имеем соотношение (8.38):

$$\nabla_1^2\Phi=2(\lambda+\mu)\Delta_1,$$

откуда получим:

$$\Delta_1=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2\Phi. \qquad (8.50)$$

---

*) Первое удачное приложение теории функций комплексного переменного к плоской задаче принадлежит Г. В. Колосову. См., например, работы: «Об одном приложении функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругостей», Юрьев, 1909. Дальнейшее развитие метод получил в трудах Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. Академии Наук СССР, Ленинград, 1933.

Для определения перемещений u, v при заданной функции напряжений $\Phi(x, y)$ имеем:

$$X_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \lambda\Delta_1 + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$Y_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \lambda\Delta_1 + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y};$$

вставляя сюда Δ_1 по формуле (8.50), мы находим:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2\Phi, \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{8.51}$$

Для дальнейшего преобразования заметим, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \nabla_1^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \nabla_1^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}.$$

Подставив эти значения в соотношения (8.51), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2\Phi, \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\nabla_1^2\Phi. \end{aligned}\right\} \tag{8.52}$$

Вследствие (8.49) и (8.50) соотношения (8.52) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \xi\right), \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \eta\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.53}$$

Далее, имеем из (8.34) и (8.6) соотношение:

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Кроме того, имеем:

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\omega\mu.$$

Решая их, имеем, согласно (8.49):

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - 2\mu\omega = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \xi\right),$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + 2\mu\omega = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \eta\right).$$

Следовательно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \xi\right), \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \eta\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.54}$$

Из (8.53) и (8.54) получим формулы Лява

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \xi, \\ 2\mu v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \eta. \end{aligned}\right\} \tag{8.55}$$

Отсюда следует, что если известна функция Эри $\Phi(x, y)$, то сначала мы находим Δ_1 по (8.50), а затем уже ω. После того, на основании (8.48), мы находим ξ, η. Тогда формулы (8.55) дадут упругие смещения u, v.

Если же известны Δ_1 и ω, то из (8.48) находим ξ, η. Затем имеем из (8.49):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \Delta_1 = \frac{1}{(\lambda+2\mu)} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\omega = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

Решение этой системы уравнений Ляв берёт в форме:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\xi}{2\mu}\right] + u', \\ v &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y\xi}{2\mu}\right] + v', \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

где u' и v' даны формулами

$$u' = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8.58}$$

Сама же функция $f(x, y)$ есть гармоническая, т. е.

$$\nabla_1^2 f = 0. \tag{8.59}$$

Очевидно, что u', v' суть компоненты упругого смещения в случае, если

$$\Delta_1 = 0, \quad \omega = 0, \tag{8.60}$$

а это есть деформация чистого сдвига.

Из (8.57) мы имеем:

$$u = \frac{y}{2(\lambda+2\mu)} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{y}{2\mu} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\xi}{2\mu} + u',$$

$$v = \frac{y}{2(\lambda+2\mu)} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{y}{2\mu} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v'.$$

Внося сюда из (8.49)

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

и используя (8.58), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\xi}{2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ v &= \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} y \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

Сравнивая (8.61) и (8.55), мы имеем:

$$\Phi = -2\mu f + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} y\eta. \tag{8.62}$$

Решение уравнений (8.56) мы можем взять также в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu}\left[\xi - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right], \\ v &= \frac{1}{2\mu}\left[\eta - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right], \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(\xi x + \eta y) - 2\mu f; \tag{8.64}$$

здесь $f(x, y)$ произвольная гармоническая функция, а ξ и η суть попрежнему сопряжённые гармонические функции.

Решение (8.63) проверяется простой подстановкой в формулы (8.56). Следует заметить, что функции Φ и Φ_1 содержат в себе бигармонические функции ξx и ηy.

2) Метод Галёркина

В случае плоской задачи уравнения (8.12) имеют решение, данное Б. Г. Галёркиным:

$$\left.\begin{aligned} u &= B\frac{\partial \omega}{\partial x} + \nabla^2\Phi_1, \\ v &= B\frac{\partial \omega}{\partial y} + \nabla^2\Phi_2, \end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

где

$$\omega = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad B = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Это решение получается из формул (4.150). Внося (8.65) в известные соотношения:

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda(B+1)\nabla^2\omega + 2\mu\left(B\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \nabla^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right), \\ Y_y &= \lambda(B+1)\nabla^2\omega + 2\mu\left(B\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \nabla^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.66}$$

$$X_y = \mu\left[2B\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + \nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)\right]. \tag{8.67}$$

Вводя обозначения

$$F = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right), \tag{8.68}$$

$$\varphi = \mu\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right), \tag{8.69}$$

$$\psi = -\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right), \tag{8.70}$$

мы приведём (8.66) и (8.67) к виду:

$$X_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \varphi, \quad Y_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \varphi, \quad X_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - \psi. \tag{8.71}$$

Так как бигармонические функции Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^4\Phi_1 = 0, \quad \nabla^4\Phi_2 = 0, \tag{8.72}$$

то из (8.68) следует, что

$$\nabla^4 F = 0, \tag{8.73}$$

а следовательно, $F(x, y)$ есть бигармоническая функция. Из (8.69) и (8.70) мы имеем соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8.74}$$

Если на бигармонические функции будет наложено дополнительное условие, что $\nabla^2\Phi_1$ и $\nabla^2\Phi_2$ суть сопряжённые гармонические функции, т. е. удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right) = 0, \quad \nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right) = 0, \tag{8.75}$$

то мы получим из (8.69) и (8.70):

$$\varphi = \psi = 0, \tag{8.76}$$

и в этом случае функция $F(x, y)$, определяемая формулой (8.68), есть функция напряжений Эри. Это имеет место, если Φ_1 и Φ_2 могут быть представлены в виде:

$$\Phi_1 = A + \xi x + \eta y, \quad \Phi_2 = B - \xi y + \eta x, \tag{8.77}$$

где A и B суть произвольные гармонические функции, а ξ и η — сопряжённые гармонические функции (удовлетворяющие соотношениям Коши-Римана).

Если Φ_1 и Φ_2 суть произвольные бигармонические функции, то и в этом случае можно построить функцию напряжений Эри. Введём новую функцию $\chi(x, y)$ при помощи соотношений

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=\varphi, \tag{8.78}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=-\varphi, \tag{8.79}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}=\psi. \tag{8.80}$$

Из (8.78) и (8.80) мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)=\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)=\psi,$$

отсюда получим:

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}=B_0+\int(\varphi\,dy+\psi\,dx), \tag{8.81}$$

где B_0 есть произвольная постоянная.

Далее получим из (8.79) и (8.80):

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=A_0+\int(\psi\,dy-\varphi\,dx), \tag{8.82}$$

где A_0 есть произвольная постоянная. Введя обозначения

$$\nabla^2\Phi_1=\xi, \quad \nabla^2\Phi_2=\eta, \tag{8.83}$$

и внося (8.69) и (8.70) в (8.81) и (8.82), получим:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=A_0-\mu n(x, y), \quad \frac{\partial\chi}{\partial y}=B_0+\mu m(x, y), \tag{8.84}$$

где

$$\left.\begin{aligned} m(x, y)&=\int\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)dx\right], \\ n(x, y)&=\int\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)dy+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dx\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.85}$$

Вследствие соотношений (8.74) под знаками интегралов стоят точные дифференциалы.

Из (8.84) имеем:

$$\chi(x, y)=A_0x+B_0y+C_0+\mu\int[m(x, y)\,dy-n(x, y)\,dx], \tag{8.86}$$

где C_0 есть произвольная постоянная. Так как из (8.85) следует, что

$$\frac{\partial m}{\partial x}=-\frac{\partial n}{\partial y}, \tag{8.87}$$

то под знаком интеграла в формуле (8.86) стоит точный дифференциал.

Вносся (8.78), (8.79), и (8.80) в (8.71), мы получим следующие соотношения:

$$X_x=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2},\quad Y_y=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2},\quad X_y=-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y}, \tag{8.88}$$

где

$$\Phi_0(x, y)=F(x, y)+\chi(x, y). \tag{8.89}$$

Следовательно, $\Phi_0(x, y)$ и есть функция напряжений Эри. Из (8.78) и (8.79) имеем:

$$\nabla^2\chi=0, \tag{8.90}$$

а потому из (8.73) и (8.90) мы получим:

$$\nabla^4\Phi_0=\nabla^4F+\nabla^4\chi=0, \tag{8.91}$$

т. е. Φ_0 есть бигармоническая функция.

В случае решения Нейбера-Папковича имеем:

$$\left.\begin{aligned}
u&=B\frac{\partial\omega}{\partial x}+\xi,\\
v&=B\frac{\partial\omega}{\partial y}+\eta,\\
\omega&=\omega_0-\frac{1}{2}(\xi x+\eta y),\\
B&=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu},\\
\nabla^2\xi&=\nabla^2\eta=\nabla^2\omega_0=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.92}$$

Напряжённое состояние определяется формулами (8.88), где Φ_0 дано формулой (8.89) а $\chi(x, y)$ дано формулой (8.86). Функция $F(x, y)$ определяется формулой

$$F=-2\mu B\omega=-2\mu B\omega_0+\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(\xi x+\eta y), \tag{8.93}$$

причём ξ и η суть произвольные гармонические функции. Если же ξ и η суть сопряжённые гармонические функции, удовлетворяющие соотношениям Коши-Римана:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

то имеем:

$$\varphi=\mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0,$$

$$\psi=-\mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0.$$

В этом случае функцией напряжений будет

$$\Phi_0=F(x, y),$$

и решение Нейбера-Папковича совпадает с решением Лява

$$2\mu u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \xi,$$
$$2\mu v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \eta,$$
$$\Phi = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}(\xi x + \eta y) - 2\mu f,$$

где f есть произвольная гармоническая функция, а ξ и η суть сопряжённые гармонические функции.

Из сказанного следует, что как решение Б. Г. Галёркина, так и решение Нейбера-Папковича суть общие решения плоской задачи теории упругости. Простота решения Лява по сравнению с решением Нейбера-Папковича происходит от того, что метод комплексного переменного, естественно, приводит к двум сопряжённым гармоническим функциям $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ вместо произвольных гармонических функций $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$.

§ 82. Сосредоточенная сила в бесконечной плоскости.

Как пример теории Лява возьмём $F(z)$ в виде:

$$F(z) = \frac{A}{z} = \frac{A}{x + yi}, \tag{8.94}$$

где A — произвольная постоянная. Внося (8.94) в (8.48), мы получим:

$$\xi + i\eta = A\int \frac{dz}{z} = A \ln z. \tag{8.95}$$

Вводя полярные координаты

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{8.96}$$

мы получим:

$$\xi + i\eta = A(\ln r + i\varphi),$$

откуда имеем:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A\ln r, \\ \eta &= A\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Внося (8.97) в (8.61), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{A}{2\mu}\ln r + \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{y^2}{r^2}\right) + u', \\ v &= \frac{A\varphi}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{xy}{r^2}\right) + v'. \end{aligned}\right\} \tag{8.98}$$

Из формулы (8.98) для v следует, что эта функция многозначная. Поэтому, чтобы упругие смещения были однозначными, надо произвести надлежащий выбор дополнительных смещений u', v'.

Поэтому примем

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\ln r, \\ v' &= -\frac{A\varphi}{2(\lambda+2\mu)}, \end{aligned}\right\} \tag{8.99}$$

ибо это даёт:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{Ax}{2(\lambda+2\mu)r^2}, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{Ay}{2(\lambda+2\mu)r^2},$$
$$\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{Ay}{2(\lambda+2\mu)r^2},$$
$$\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\left(\frac{x}{r^2}\right).$$

Следовательно, u' и v' удовлетворяют известным соотношениям Коши-Римана и поэтому удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_1^2 u' = \nabla_1^2 v' = 0.$$

Внося (8.99) в (8.98), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{(\lambda+3\mu)A}{2\mu(\lambda+2\mu)}\ln r + \frac{(\lambda+\mu)A}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\frac{y^2}{r^2}\right), \\ v &= -\frac{(\lambda+\mu)A}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\frac{xy}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.100}$$

Внося (8.100) в (8.5) и (8.6), мы получим следующие выражения компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= A\left[\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\right]\left(\frac{x}{r^2}\right), \\ Y_y &= A\left[-\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\right]\left(\frac{y}{r^2}\right), \\ X_y &= A\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{x^2}{r^2}\right)\right]\left(\frac{y}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.101}$$

При приближении к началу координат, когда r стремится к нулю, компоненты напряжённого состояния X_x, Y_y, X_y безгранично возрастают. Поэтому вырежем из упругого тела полость в виде круглого цилиндра, ось которого будет осью координат z. Вычислим равнодействующую силу и равнодействующий момент всех упругих сил:

$$X_x ds, \quad Y_y ds, \quad X_y ds, \tag{8.102}$$

действующих на элементарных площадках

$$d\Sigma = 1 \cdot ds = r\,d\varphi$$

на внутренней стороне цилиндра, считая на единицу длины по оси Oz. Имеем компоненты равнодействующей упомянутых упругих сил:

$$R_x = -\oint X_\nu ds = -\int_0^{2\pi} \left(X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} \right) r\,d\varphi,$$

$$R_y = -\oint Y_\nu ds = -\int_0^{2\pi} \left(X_y \frac{x}{r} + Y_y \frac{y}{r} \right) r\,d\varphi.$$

Внося сюда (8.101) и совершая переход к полярным координатам по формулам (8.96), мы легко найдём после интегрирования

$$R_x = -2A\pi, \quad R_y = 0. \tag{8.103}$$

Для вычисления равнодействующего момента имеем:

$$M = -\oint [xY_\nu - yX_\nu]\, ds.$$

Внося сюда (8.101), мы получим:

$$M = 0. \tag{8.104}$$

Формулы (8.103) и (8.104) показывают, что упругие силы, действующие на внутренней стороне нашего цилиндра, дают на единицу длины только равнодействующую силу

$$F = 2A\pi, \tag{8.105}$$

направленную по оси Ox в отрицательную сторону (при A положительном). По принципу Сен-Венана мы можем поэтому рассматривать решение (8.100) как решение задачи о действии силы

$$F = 2A\pi,$$

направленной по отрицательной оси Ox по всей плоскости Oxy, кроме весьма малой области около начала координат, где приложена эта сила.

§ 83. Сила, приложенная к границе полуплоскости.

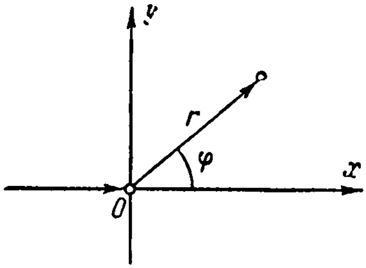
Примем ось Oy за границу полуплоскости и направим ось Ox внутрь упругого тела (фиг. 13). В этом случае нет многозначности в формуле для v решения (8.98). Положив

$$u' = v' = 0, \tag{8.106}$$

мы получим решение:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{A}{2\mu}\ln r+\frac{(\lambda+\mu)A}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\frac{y^2}{r^2}\right),\\ v&=\frac{A\varphi}{2(\lambda+2\mu)}-\frac{(\lambda+\mu)A}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left(\frac{xy}{r^2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{8.107}$$

Внося (8.107) в формулы (8.5) и (8.6), мы получим:



Фиг. 13.

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}\left(\frac{x^3}{r^4}\right),\\ Y_y&=\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}\left(\frac{xy^2}{r^4}\right),\\ X_y&=\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}\left(\frac{x^2y}{r^4}\right).\end{aligned}\right\} \tag{8.108}$$

При приближении к началу координат X_x, Y_y, X_y беспрерывно растут. Поэтому, применяя приём предыдущего параграфа, мы вычислим равнодействующую силу и равнодействующий момент элементарных сил (8.102), действующих на внутренней поверхности полуцилиндра, описанного около оси Oz. Имеем:

$$R_x=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X_r r\,d\varphi=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(X_x\cos\varphi+X_y\sin\varphi)\,r\,d\varphi,$$

$$R_y=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_r r\,d\varphi=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(X_y\cos\varphi+Y_y\sin\varphi)\,r\,d\varphi.$$

Внося сюда (8.108), получим:

$$R_x=-\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=-\frac{\pi(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu},$$

$$R_y=-\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0.$$

Так же найдём:

$$M = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (xY_\nu - yX_\nu)\, r\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Итак, равнодействующая элементарных упругих сил (8.102) есть сила F, направленная по оси Ox в отрицательную сторону, имеющая величину

$$F = \frac{\pi(\lambda+\mu)A}{\lambda+2\mu}. \tag{8.109}$$

Определяя отсюда A и внося его в формулы (8.107), мы получим выражения компонентов упругого перемещения для случая действия силы F, приложенной вначале и направленной по положительной оси Ox в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{(\lambda+2\mu)F}{2\mu(\lambda+\mu)\pi}\ln r - \frac{F}{2\pi\mu}\left(\frac{y}{r}\right)^2, \\ v &= -\frac{F\varphi}{2\pi(\lambda+\mu)} + \frac{F}{2\pi\mu}\left(\frac{xy}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.110}$$

Им соответствуют компоненты напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{2F}{\pi}\left(\frac{x^3}{r^4}\right), \\ Y_y &= -\frac{2F}{\pi}\left(\frac{xy^2}{r^4}\right), \\ X_y &= -\frac{2F}{\pi}\left(\frac{x^2y}{r^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.111}$$

Вводя модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ, получим из (8.110) формулы для перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{2F(1-\sigma^2)}{\pi E}\ln r - \frac{F(1+\sigma)}{\pi E}\left(\frac{y}{r}\right)^2, \\ v &= -\frac{F(1+\sigma)(1-2\sigma)\varphi}{\pi E} + \frac{F(1+\sigma)}{\pi E}\left(\frac{xy}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.112}$$

Для элементарной площадки, нормальной к радиусу-вектору, мы вычислим нормальный и тангенциальный компоненты напряжённого состояния по формулам (2.25).

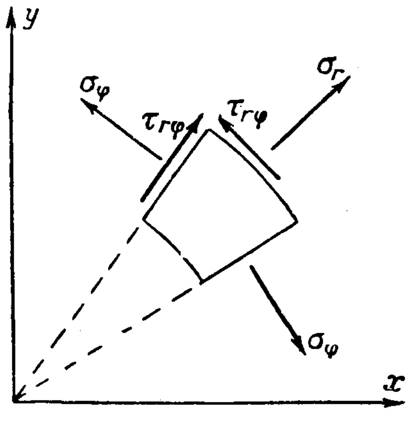
В рассматриваемом случае имеем:

$$
\begin{aligned}
&X_z = Y_z = 0,\\
&l_1 = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad l_2 = -\frac{y}{r} = -\sin\varphi,\\
&m_1 = \frac{y}{r} = \sin\varphi, \quad m_2 = \frac{x}{r} = \cos\varphi,\\
&n_1 = 0, \qquad n_2 = 0;
\end{aligned}
$$

поэтому получим:

$$
\begin{aligned}
X'_{x'} &= X_x l_1^2 + Y_y m_1^2 + 2 l_1 m_1 X_y =\\
&= -\frac{2Fx}{\pi r^6}(x^2+y^2)^2 = -\frac{2Fx}{\pi r^2} = -\frac{2F\cos\varphi}{\pi r},\\
X'_{y'} &= l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + (l_1 m_2 + l_2 m_1) X_y =\\
&= -\frac{2F}{\pi r^6}[-x^4 y + x^2 y^3 + x^2 y (x^2 - y^2)] = 0.
\end{aligned}
$$

На элементарной площадке, проходящей через ось Oz, получим по формуле (2.26) нормальный компонент напряжения:



Фиг. 14.

$$
\begin{aligned}
Y'_{y'} &= l_2^2 X_x + m_2^2 Y_y + 2 l_2 m_2 X_y =\\
&= -\frac{2F}{\pi r^6}[x^3y^2 + x^3y^2 - 2x^3y^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Вводя обозначения (фиг. 14):

$$
\sigma_r = X'_{x'}, \quad \tau_{r\varphi} = X'_{y'} = Y'_{x'}, \quad \sigma_\varphi = Y'_{y'},
$$

мы получим важные формулы:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{2F\cos\varphi}{\pi r}\\
\tau_{r\varphi} &= \sigma_\varphi = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (8.113)
$$

Эта форма напряжённого состояния называется *элементарным радиальным распределением.*

§ 84. Круглый диск Герца.

Рассмотрим только случай круглого диска, сжатого двумя равными и прямо противоположными силами F, действующими по концам диаметра AB. Направим (фиг. 15) ось Ox по диаметру AB, а ось Oy по касательной в точке A.

Допустим, что каждая сила вызывает элементарное радиальное распределение, данное формулами (8.113), и вычислим суммарные напряжения в точках окружности диска. В точке M на окружности мы имеем напряжения сжатия в направлениях r_1 и r_2, равные

$$\sigma_r' = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_1}{r_1},$$

$$\sigma_r'' = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_2}{r_2}.$$

Так как радиусы-векторы r_1 и r_2 суть катеты прямоугольного треугольника AMB, то, обозначая $AB = D$, имеем:

$$r_1 = D\cos\varphi_1, \quad r_2 = D\cos\varphi_2.$$

Поэтому получим:

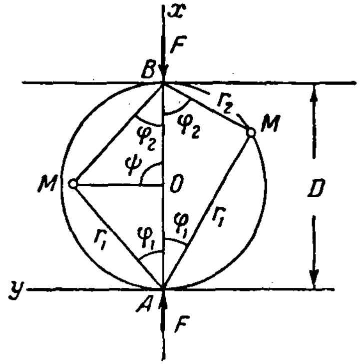
$$\sigma_r'' = \sigma_r' = -\frac{2F}{\pi D}. \tag{8.114}$$

Следовательно, на двух взаимно перпендикулярных площадках в точке M окружности действуют только нормальные напряжения сжатия, равные между собою и они, очевидно, будут главными напряжениями в точке M.

Поэтому в точке M напряжённое состояние есть всестороннее сжатие, равное

$$\frac{2F}{\pi D},$$

а следовательно, такое же сжимающее напряжение имеет место на любой элементарной площадке, проходящей через точку M и нормальной к плоскости диска, в том числе и на элементарной площадке, касательной к окружности диска в точке M.



Фиг. 15.

Если наложить по окружности диска нормальные растягивающие напряжения, равные $\frac{2F}{\pi D}$, то окружность диска будет свободна от внешних усилий. Таким образом, система сил, действующих на диск, свелась к двум диаметрально противоположным силам F и равномерному растяжению в плоскости диска величиной $\frac{2F}{\pi D}$.

§ 85. Теорема Мориса Леви.

В случае плоской деформации при отсутствии объёмных сил решение уравнения упругого равновесия Коши

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \tag{8.115}$$

даётся формулами Эри

$$X_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \tag{8.116}$$

где $\Phi(x, y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \Phi = 0 \tag{8.117}$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m. \end{aligned} \right\} \tag{8.118}$$

Но мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(\nu, x) = \cos(s, y) = \frac{\partial y}{\partial s}, \\ m &= \cos(\nu, y) = -\cos(s, x) = -\frac{\partial x}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \tag{8.119}$$

Внося (8.119) в (8.118), получим:

$$X_\nu = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right),$$

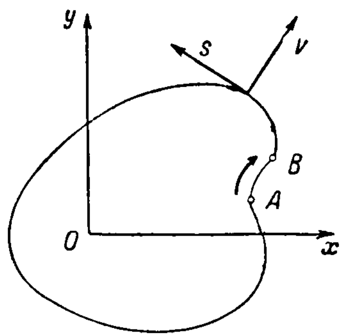
$$Y_\nu = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right).$$

Итак, имеем важные формулы:

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right), \quad Y_\nu = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right). \tag{8.120}$$

Выбрав на рассматриваемом контуре произвольно точку N, зададим в ней:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = B. \tag{8.121}$$



Фиг. 16.

Тогда, интегрируя (8.120), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= A - \int_N^M Y_\nu ds, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= B + \int_N^M X_\nu ds, \end{aligned} \right\} \tag{8.122}$$

где M означает точку контура с координатами (x, y). Вычислим теперь касательную и нормальную производные функции Φ (фиг. 16):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \tag{8.123}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \nu}. \tag{8.124}$$

Интегрируя (8.123) по s, мы найдём:

$$\Phi = C + \int_N^M \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right] ds, \tag{8.125}$$

где C — произвольная величина.

Внося сюда (8.122), мы получим:

$$\Phi(x, y) = C + Ax + By + \int_N^M \left[-\frac{\partial x}{\partial s}\int_N^{M_1} Y_\nu ds_1 + \frac{\partial y}{\partial s}\int_N^{M_1} X_\nu ds_1\right] ds, \tag{8.126}$$

где M_1 означает переменную точку во внешнем криволинейном интеграле. Из (8.126) следует, что с точностью до произвольного слагаемого

$$C + Ax + By$$

можно определить значение $\Phi(x, y)$ по заданным X_ν, Y_ν. Внося (8.122) в (8.124); мы получим формулу

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \left[A - \int_N^M Y_\nu ds\right]\frac{\partial x}{\partial\nu} + \left[B + \int_N^M X_\nu ds\right]\frac{\partial y}{\partial\nu}, \tag{8.127}$$

из которой определяется значение нормальной производной $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ по заданным X_ν, Y_ν. Таким образом, если на граничном контуре тела задана нагрузка X_ν, Y_ν, то можно вычислить значения Φ и $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ на контуре, а следовательно, решение задачи упругости сводится к нахождению бигармонической функции по заданным на контуре значениям как её самой, так и её нормальной производной.

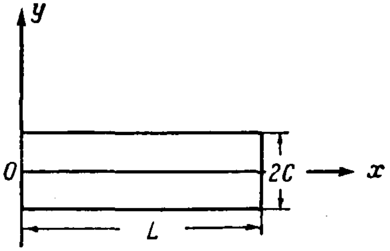
При этом, конечно, предполагается, что система сил

$$X_\nu ds, \quad Y_\nu ds,$$

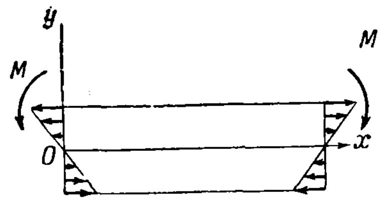
приложенных на каждом граничном контуре тела, уравновешивается. Так как в вышеприведённые уравнения нигде не входят упругие постоянные, то мы заключаем, что при заданных на границе упругого тела усилиях функция Эри не зависит от упругих свойств материала тела. Это и составляет теорему Мориса Леви, лежащую в основе оптического метода нахождения распределения напряжений, так как эта теорема позволяет заменить изучение напряжений в изотропных металлических и других непрозрачных телах изучением напряжений в прозрачных изотропных телах, оптически чувствительных к возникающим в них напряжениям.

§ 86. Чистый изгиб прямоугольной полосы.

Возьмём начало координат на оси полосы на левом конце её (фиг. 17) и направим ось Ox по оси полосы, а ось Oy — вверх.



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Длину полосы примем равной L, высоту её примем равной $2C$. Тогда верхняя и нижняя стороны полосы даны уравнениями

$$y = \pm C.$$

Выберем функцию Эри в виде полинома третьей степени

$$\Phi = \frac{1}{6} A_3 x^3 + \frac{1}{2} B_3 x^2 y + \frac{1}{2} C_3 x y^2 + \frac{1}{6} D_3 y^3. \tag{8.128}$$

Очевидно, эта функция есть интеграл бигармонического уравнения

$$\nabla^4 \Phi = 0. \tag{8.129}$$

По формулам Эри имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C_3 x + D_3 y, \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = A_3 x + B_3 y, \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = -(B_3 x + C_3 y). \end{aligned}\right\} \tag{8.130}$$

Рассмотрим сначала частный случай функции Эри:

$$\Phi = \frac{1}{6} D_3 y^3, \tag{8.131}$$

тогда имеем:

$$X_x = D_3 y, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0; \tag{8.132}$$

такое напряжённое состояние соответствует чистому изгибу полосы силами $X_x\, d\Sigma = D_3 y\, d\Sigma$, распределёнными по линейному закону на обоих концах полосы $x = 0$, $x = L$. Момент этих сил, очевидно, будет:

$$M = \int_{-C}^{C} y X_x\, dy = \frac{2}{3} D_3 C^3.$$

По принципу Сен-Венана полученное решение может быть применено при изгибе полосы парами с моментом M (фиг. 18), причём вблизи места приложения пар, т. е. концов полосы, напряжённое состояние будет несколько уклоняться от (8.132), но эти уклонения быстро убывают по мере приближения к центральной части полосы, и это будет тем точнее, чем меньше высота полосы по сравнению с её длиной.

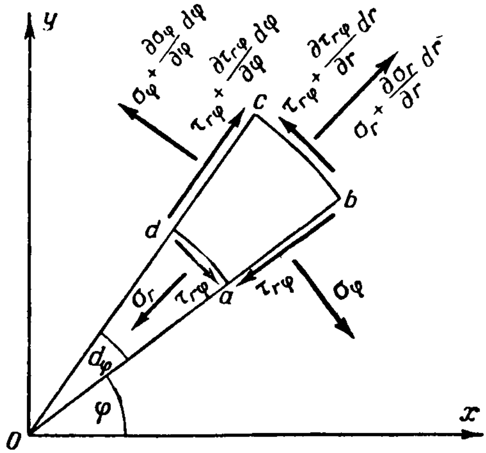
Если взять отличными от нуля B_3 или C_3, то получим не только нормальные, но и касательные напряжения, действующие по сторонам полосы. Если взять отличным от нуля только A_3, то получим чистый изгиб с нормальными напряжениями, приложенными по сторонам полосы $y = \pm C$.

Полином четвёртой степени и выше может быть интегралом бигармонического уравнения только при некоторых соотношениях между коэффициентами при переменных (x, y).

В главе второй «Теории упругости» С. П. Тимошенко разобраны многочисленные примеры решения плоской задачи, в частности случай изгиба консоли поперечной силой как для прямолинейного, так и для криволинейного бруса.

§ 87. Компоненты плоской деформации в полярных координатах.

Вырежем из упругого тела малый элемент $abcd$ (фиг. 19) двумя радиальными сечениями Ob и Oc, перпендикулярными к плоскости деформации, и двумя нормальными к ней цилиндрическими поверхностями ad и bc, радиусы которых r и $r + dr$. Обозначим радиальный компонент упругого перемещения через u, а касательный, т. е. нормальный к радиусу-вектору, через v.



Фиг. 19.

Если u есть радиальное перемещение стороны ad элемента $abcd$, то радиальное перемещение стороны bc будет $u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$; тогда относительное удлинение элемента $abcd$ в радиальном направлении будет:

$$e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{8.133}$$

Если бы точки a, d элемента $abcd$ имели одно лишь радиальное перемещение u, то новая длина стороны ad была бы равна $(r+u)\,d\varphi$, и, следовательно, касательное относительное удлинение было бы

$$e'_{\varphi\varphi}=\frac{(r+u)\,d\varphi-r\,d\varphi}{r\,d\varphi}=\frac{u}{r}. \tag{8.134}$$

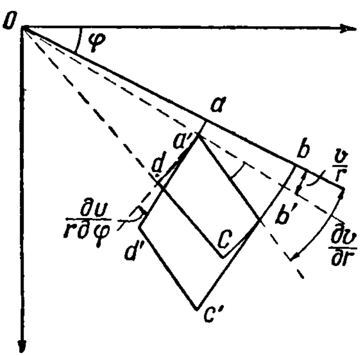
Разность касательных перемещений сторон ab и cd элемента $abcd$ будет $\frac{\partial v}{\partial\varphi}d\varphi$, отсюда относительное касательное удлинение благодаря упругому перемещению v будет:

$$e''_{\varphi\varphi}=\frac{\partial v}{\partial\varphi}d\varphi : r\,d\varphi=\frac{\partial v}{r\,\partial\varphi}. \tag{8.135}$$

Полное касательное удлинение $e_{\varphi\varphi}$ мы получим, складывая $e'_{\varphi\varphi}$ и $e''_{\varphi\varphi}$, что даёт:

$$e_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}. \tag{8.136}$$

Пусть $a'b'c'd'$ (фиг. 20) есть положение элемента $abcd$ после деформации. Угол между направлениями ad и $a'd'$ вызывается разностью радиальных перемещений du точек a и d на длине ad, равной $r d\varphi$, а следовательно, будет $\frac{\partial u}{r\partial\varphi}$. Угол между ab и $a'b'$ вызывается разностью касательных перемещений dv точек a и b на длине ab, равной dr, а следовательно, он будет $\frac{\partial v}{\partial r}$. Отсюда следует вычесть угловое перемещение $\frac{v}{r}$, получаемое от того, что элемент $abcd$ поворачивается как абсолютно твёрдое тело около оси, проходящей через O нормально к плоскости чертежа. Полное изменение прямого угла dab, представляющее деформацию сдвига, очевидно, будет:



Фиг. 20.

$$e_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}. \tag{8.137}$$

Два относительных удлинения e_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$ и сдвиг $e_{r\varphi}$ вполне характеризуют плоскую деформацию в полярных координатах.

§ 88. Компоненты напряжённого состояния в полярных координатах.

На площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r, нормальный компонент напряжённого состояния обозначим через σ_r, а касательный через $\tau_{r\varphi}$. На площадке, нормальной к плоскости деформаций и проходящей через ось Oz, обозначим нормальный компонент напряжённого состояния через σ_φ, тогда как касательный компонент будет $\tau_{r\varphi}$. Тогда на стороне ad вырезанного элемента действует нормальная сила

$$\sigma_r r\,d\varphi$$

(считая на единицу длины в направлении оси Oz). Нормальная сила, действующая на стороне bc, очевидно, будет:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\,dr\right)(r+dr)\,d\varphi.$$

Нормальные силы на сторонах ab и cd, очевидно, будут:

$$\sigma_\varphi dr \quad \text{и} \quad \left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)dr.$$

Их равнодействующая в радиальном направлении, пренебрегая малой третьего порядка, будет $\sigma_\varphi dr\,d\varphi$. Касательные силы, действующие на сторонах ab и cd, будут:

$$\tau_{r\varphi} dr, \qquad \left(\tau_{r\varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)dr.$$

Их равнодействующая в радиальном направлении будет:

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}\,dr\,d\varphi.$$

Если R есть отнесённый к единице массы компонент внешних сил в радиальном направлении, то, взяв проекцию всех сил на направление радиуса-вектора r, имеем:

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\,dr\right)(r+dr)\,d\varphi - \sigma_r r\,d\varphi - \sigma_\varphi dr\,d\varphi + \\ + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}\,dr\,d\varphi + Rr\,d\varphi\,dr = 0.$$

Сокращая на $dr\,d\varphi$, получим, упрощая:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + R = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.138)$$

причём второе уравнение получено проектированием сил, действующих на сторонах элемента $abcd$ на направление нормали к радиусу-вектору. Предполагая отсутствие массовых сил, примем $R=0$ и внесём по методу Эри в уравнения (8.138):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.139}$$

Тогда уравнения (8.138) будут удовлетворены, какова бы ни была функция $\Phi(r, \varphi)$, называемая *функцией напряжений.* Преобразуем теперь к полярным координатам бигармоническое уравнение

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2\nabla^2\Phi = 0.$$

Вводя полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

получим:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

Поэтому бигармоническое уравнение примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right) = 0, \tag{8.140}$$

между тем, как уравнение Лапласа в полярных координатах для некоторой функции $F(r, \varphi)$ будет:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{8.141}$$

Интеграл уравнения (8.140), зависящий только от r, очевидно, будет

$$\Phi = A + Br^2 + C\ln r + Dr^2\ln r. \tag{8.142}$$

Если принять, в частности,

$$\Phi = Br^2 + C\ln r, \tag{8.143}$$

то имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2B + \frac{C}{r^2}, \\ \sigma_\varphi &= 2B - \frac{C}{r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.144}$$

Это позволяет найти решение проблемы Ламе, уже рассмотренной в § 50. Постоянные B и C находятся из граничных условий:

$$\sigma_r = -p_0 \text{ для } r=a, \qquad \sigma_r = -p_1 \text{ для } r=b.$$

§ 89. Чистый изгиб кругового бруса.

Примем

$$\Phi = Br^2 + C \ln r + Dr^2 \ln r, \tag{8.145}$$

причём постоянные B, C, D определяются из граничных условий (фиг. 21). На дуге AD имеем:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0 \text{ для } r=b, \tag{8.146}$$

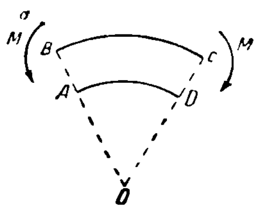
на дуге BC имеем:

$$\sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0 \text{ для } r=a. \tag{8.147}$$

На сторонах AB и CD мы берём граничные условия по принципу Сен-Венана

$$\int_a^b \sigma_\varphi \, dr = 0, \tag{8.148}$$

$$\int_a^b r\sigma_\varphi \, dr = -M, \tag{8.149}$$



Фиг. 21.

где M — момент изгибающей пары.

Так как Φ здесь есть функция только от r, то имеем из (8.139):

$$\left.\begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= 0, \\ \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2B + \frac{C}{r^2} + D(1 + 2\ln r), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 2B - \frac{C}{r^2} + D(3 + 2\ln r). \end{aligned}\right\} \tag{8.150}$$

Для удовлетворения условий (8.146) и (8.147) имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2B + \frac{C}{b^2} + D[1 + 2\ln b] &= 0, \\ 2B + \frac{G}{a^2} + D[1 + 2\ln a] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.151}$$

Условие (8.148) даёт:

$$\int_a^b \sigma_\varphi \, dr = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=b} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \tag{8.152}$$

Но, как видно из (8.150) и (8.151), мы уже имели:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0 \text{ для } r = a, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0 \text{ для } r = b, \end{aligned}\right\} \tag{8.153}$$

а следовательно, условие (8.152) удовлетворено. Из (8.149) имеем:

$$M = -\int_a^b r\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}dr = a\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} - b\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=b} - \Phi(a) + \Phi(b),$$

что вследствие (8.153) даёт:

$$M = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{8.154}$$

Внося (8.145) в (8.154), получим:

$$B(b^2 - a^2) + C\ln\frac{b}{a} + D(b^2\ln b - a^2\ln a) = M. \tag{8.155}$$

Таким образом, мы получим три уравнения (8.151) и (8.155) для определения трёх неизвестных постоянных B, C, D. Определив их, найдём:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4M}{R}\left[\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r}\right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{4M}{R}\left[-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right], \\ \tau_{r\varphi} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.156}$$

где

$$R = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2. \tag{8.157}$$

Решение (8.156) принадлежит советскому учёному, Х. Ф. Головину, и опубликовано им в 1881 г. задолго до решений Рибьера и Прандтля. Оно достаточно хорошо подтверждает теорию Гразгофа для кривого бруса.

§ 90. Решения Рибьера и Файлона для прямоугольной полосы.

Направим оси x и y параллельно сторонам полосы и обозначим длину большей из них через L, а меньшей через $2C$. Возьмём начало на середине одной из меньших сторон (фиг. 22).

Решение Рибьера имеет вид:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{8.158}$$

Внося это выражение Φ в бигармоническое уравнение

$$\nabla^4\Phi = 0, \tag{8.159}$$

мы получим:

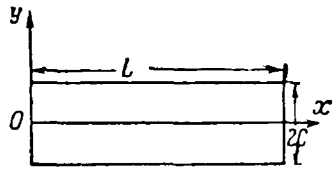
$$\frac{d^4 f_n}{dy^4} - 2\alpha_n^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + \alpha_n^4 f_n = 0, \tag{8.160}$$

где

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}. \tag{8.161}$$

Интеграл уравнения (8.160) известен и имеет следующий вид:

$$f_n(y) = C_1^{(n)} e^{\alpha_n y} + C_2^{(n)} e^{-\alpha_n y} + y\left[C_3^{(n)} e^{\alpha_n y} + C_4^{(n)} e^{-\alpha_n y}\right]. \tag{8.162}$$



Фиг. 22.

Решение Файлона имеет вид:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{8.163}$$

и очевидно, что функция $f_n(y)$ определяется формулой (8.162). Более общее решение уравнения (8.159) имеет вид:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)\cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\cos\frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{8.164}$$

где $b = 2C$.

Внося это в (8.159), мы получим, что $f_n(y)$ и $\varphi_n(y)$ удовлетворяют уравнению (8.160), а $F_n(x)$ и $\psi_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 F_n}{dx^4} - 2\beta_n^2 \frac{d^2 F_n}{\partial x^2} + \beta_n^4 F_n = 0, \tag{8.165}$$

где

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Для общности решения сюда можно наложить добавочное решение в виде бигармонических полиномов.

§ 91. Решение для очень длинной полосы.

Направим ось Ox по средней линии полосы и примем начало в середине её. Если α есть произвольный параметр, то решение Рибьера и Файлона можно представить в виде

$$\Phi = f_n(y)\sin\alpha x + \varphi_n(y)\cos\alpha x, \tag{8.166}$$

где $f_n(y)$ и $\varphi_n(y)$ удовлетворяют уравнению вида (8.160), именно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4f_n}{dy^4}-2a^2\frac{d^2f_n}{dy^2}+a^4f_n=0,\\ &\frac{d^4\varphi_n}{dy^4}-2a^2\frac{d^2\varphi_n}{dy^2}+a^4\varphi_n=0. \end{aligned}\right\} \tag{8.167}$$

Очевидно, $f_n(y)$ и $\varphi_n(y)$ суть функции произвольного параметра a, который входит в виде произведения ay в аргумент функции, и самое общее решение мы получим, суммируя частные решения (8.166), что даёт:

$$\Phi=\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(ay)\sin ax\,da+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(ay)\cos ax\,da. \tag{8.168}$$

Отсюда, на основании формул (8.34), получим:

$$\left.\begin{aligned} X_x&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2f_n(ay)}{dy^2}\sin ax\,da+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\varphi_n(ay)}{dy^2}\cos ax\,da,\\ Y_y&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=-\int_{-\infty}^{\infty}f_n(ay)\,a^2\sin ax\,da-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(ay)\,a^2\cos ax\,da,\\ X_y&=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df_n(ay)}{dy}a\cos ax\,da+\\ &\qquad+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi_n(ay)}{dy}a\sin ax\,da. \end{aligned}\right\} \tag{8.169}$$

Если длинные стороны полосы даны уравнениями:

$$y=\pm b,$$

то граничные условия на них можно дать в форме:

$$\left.\begin{aligned} Y_y&=q_1(x),\\ X_y&=s_1(x); \end{aligned}\right\}\text{ при } y=+b \tag{8.170}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_y&=q_2(x),\\ X_y&=s_2(x). \end{aligned}\right\}\text{ при } y=-b. \tag{8.171}$$

Внося сюда (8.169), мы получим условия для определения $f_n(ay)$ и $\varphi_n(ay)$ в виде (в дальнейшем индекс n у функций f и φ опустим):

$$\left.\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty} f(ab)\,a^2\sin ax\,da-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(ab)\,a^2\cos ax\,da=q_1(x),\\
&-\int_{-\infty}^{\infty} f_y'(ab)\,a\cos ax\,da+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_y'(ab)\,a\sin ax\,da=s_1(x),\\
&-\int_{-\infty}^{\infty} f(-ab)\,a^2\sin ax\,da-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(-ab)\,a^2\cos ax\,da=q_2(x),\\
&-\int_{-\infty}^{\infty} f'(-ab)\,a\cos ax\,da+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(-ab)\,a\sin ax\,da=s_2(x).
\end{aligned}\right\}\quad(8.172)$$

Для решения полученных уравнений применяется интеграл Фурье:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}da\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\cos a(\lambda-x)\,d\lambda=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos ax\,da\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda+\\
&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin ax\,da\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda.
\end{aligned}\quad(8.173)$$

Сравнивая (8.173) и (8.172), получим:

$$\left.\begin{aligned}
f(ab)&=-\frac{1}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{\infty}q_1(\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda,\\
\varphi(ab)&=-\frac{1}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{\infty}q_1(\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda,\\
f(-ab)&=-\frac{1}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{\infty}q_2(\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda,\\
\varphi(-ab)&=-\frac{1}{2\pi a^2}\int_{-\infty}^{\infty}q_2(\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda,\\
f_y'(ab)&=-\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}s_1(\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda,
\end{aligned}\right\}\quad(8.174)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'_y(ab) &= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda,\\
f'_v(-ab) &= -\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_2(\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda,\\
\varphi'_v(-ab) &= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_2(\lambda)\sin a\lambda\, d\lambda.
\end{aligned}\right\} \tag{8.174}$$

Так как $q_1(x)$, $q_2(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ даны, то правые части (8.174) известны, а в левые части надо внести для $f(ay)$ и $\varphi(ay)$ общие интегралы уравнений (8.167), которые содержат линейно по четыре произвольных постоянных. Их можно написать разным образом.

Например, можно принять:

$$\left.\begin{aligned}
f(ay) &= A_1 \operatorname{sh} ay + B_1 \operatorname{ch} ay + y[C_1 \operatorname{sh} ay + D_1 \operatorname{ch} ay],\\
\varphi(ay) &= A_2 \operatorname{sh} ay + B_2 \operatorname{ch} ay + y[C_2 \operatorname{sh} ay + D_2 \operatorname{ch} ay].
\end{aligned}\right\} \tag{8.175}$$

Внося (8.175) в (8.174), мы определим все восемь произвольных постоянных:

$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2.$$

Первое удачное приложение интеграла Фурье к задаче упругого полупространства принадлежит Веберу и дано в его издании «Уравнений математической физики» Римана. Дальнейшие приложения этого метода принадлежат Ламбу и Карману. Вышеприведённое изложение заимствовано нами из «Курса теории упругости» П. Ф. Папковича, глава X, § 13.

§ 92 *). Применение теории функций комплексного переменного к исследованию плоской задачи теории упругости.

Мы видели выше, что как в случае плоской деформации, так и в случае плоского напряжённого состояния при отсутствии массовых сил, решение задачи сводится к краевой задаче для бигармонического уравнения, которому удовлетворяет функция напряжений. При интегрировании бигармонического уравнения в двумерной области с успехом может быть использована теория функций комплексного переменного. Первое удачное применение теории аналитических функций к плоской

*) Этот параграф написан Н. В. Зволинским.

задаче теории упругости было сделано Г. В. Колосовым*). Дальнейшее систематическое развитие теории в этом направлении принадлежит Н. И. Мусхелишвили, который получил здесь основные результаты и дал современное и строгое изложение предмета**). В настоящем параграфе, опираясь на цитированную книгу Н. И. Мусхелишвили, мы дадим краткий очерк лишь главнейших результатов, относящихся к решению при помощи функций комплексного переменного плоской задачи теории упругости для односвязной конечной области.

Основой этого применения является возможность выразить интеграл бигармонического уравнения через функции комплексного аргумента, а также возможность комплексного представления граничных условий как при данных на границе напряжениях, так и при данных смещениях. Начнём с последнего вопроса. Для этого нужно выразить смещения через функцию напряжений.

С напряжениями эта функция $\Phi(x, y)$ связана следующим образом:

$$X_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \tag{8.176}$$

Для определения смещений u и v в случае плоской деформации послужат следующие уравнения, выражающие закон Гука

$$\left.\begin{aligned} \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \\ \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{8.177}$$

Решая первые два уравнения относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, обозначая $\nabla_1^2 \Phi$ через P, получим:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P, \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} P. \end{aligned}\right\} \tag{8.178}$$

Очевидно, что $P(x, y)$ — гармоническая функция; обозначая сопряжённую с ней функцию через $Q(x, y)$, найдём:

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

---

*) Колосов, Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости.

**) Мусхелишвили, Н. И. Некоторые задачи теории упругости, АН СССР, 1935.

Мы получим удобные формулы для смещений, если введём ещё две гармонические функции p и q следующим образом:

$$\varphi(z)=p+iq=\frac{1}{4}\int f(z)\,dz.$$

Тогда

$$\varphi'(z)=\frac{1}{4}(P+iQ)=\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial q}{\partial x},$$

и вследствие условий Коши-Римана можно записать уравнения (8.178) в виде:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial p}{\partial x},\\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial q}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{8.179}$$

Интегрируя эти соотношения, получим:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p+f_1(y),\\ 2\mu v&=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q+f_2(x).\end{aligned}\right\}\tag{8.180}$$

Третье уравнение системы (8.177) налагает на функции f_1 и f_2 условие:

$$f_1'(y)+f_2'(x)=0,$$

откуда следует, что функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_1&=2\mu(-\gamma y+\alpha),\\ f_2&=2\mu(\gamma x+\beta)\end{aligned}$$

и представляют малое смещение недеформируемого тела. Эти формулы (8.180) показывают, что всякой гармонической функции отвечает некоторая деформация, которая приводит к смещениям, однозначным в односвязной области.

Покажем теперь, что всякая бигармоническая функция может быть выражена при помощи двух функций комплексного переменного. Для этого, пользуясь введёнными выше функциями p и q, рассмотрим выражение

$$\Phi-px-qy.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что это выражение представляет собой гармоническую функцию. Обозначая через $\chi(z)$ аналитическую функцию, вещественной частью которой является $\Phi-px-qy$, мы можем написать, пользуясь общепринятыми обозначениями (R — действительная часть функции комплексного переменного):

$$\Phi = R[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)],$$

что можно записать иначе:

$$2\Phi = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \tag{8.181}$$

где через $\bar{\varphi}(\bar{z})$ обозначена величина, сопряжённая с $\varphi(z)$. Нам, очевидно, потребуются производные функции Φ. Оказывается, более удобно представить в комплексной форме линейную комбинацию $\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Из (8.181) получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}), \tag{8.182}$$

где положено для краткости:

$$\psi(z) = \frac{d\chi}{dz}.$$

Теперь у нас есть все данные, чтобы выразить в комплексной форме смещения упругого тела. Пренебрегая функциями $f_1(y)$ и $f_2(x)$, не имеющими существенного значения, на основании формул (8.180) получим следующее представление линейной комплексной комбинации компонент смещений:

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}). \tag{8.183}$$

Величина $\varkappa$ для плоской деформации, о которой всё время идёт речь, имеет значение:

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

В случае обобщённого плоского напряжённого состояния эта константа имеет следующее значение:

$$\varkappa = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}.$$

Нам остаётся выразить через функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ компоненты напряжений X_x, X_y, Y_y.

Рассмотрим произвольную дугу AB в области, занятой упругим телом; пусть s — длина дуги, отсчитываемая в положительном направлении от A к B. Выбрав положительное направление нормали к этой дуге вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся от A к B, и обозначая компоненты усилия, действующего на элемент дуги со стороны внешней нормали, через $X_n ds$, $Y_n ds$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cos(n, x) - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\cos(n, y), \\ Y_n &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cos(n, y) - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\cos(n, x). \end{aligned}\right\} \tag{8.184}$$

Эти соотношения могут быть записаны более компактно в следующем виде:

$$X_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),$$

$$Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right).$$

Образуя линейную комбинацию, получим:

$$\begin{aligned} (X_n + iY_n)\,ds &= -id\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \\ &= -id[\varphi(z) + z\overline{\varphi'}(\bar z) + \overline{\psi}(\bar z)]. \end{aligned} \tag{8.185}$$

Дуга AB была нами выбрана произвольно. Если теперь выбрать её так, чтобы элемент ds был параллелен оси Oy, то будем иметь:

$$X_x + iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar z) - z\overline{\varphi''}(\bar z) - \overline{\psi'}(\bar z).$$

Выбирая же ds параллельно оси Ox, получим:

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\bar z) + z\overline{\varphi''}(\bar z) + \overline{\psi'}(\bar z).$$

Вводя обозначения $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\Psi(z) = \psi'(z)$, можем переписать две последние формулы в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x + iX_y &= \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar z) - z\overline{\Phi'}(\bar z) - \overline{\Psi}(\bar z), \\ Y_y - iX_y &= \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar z) + z\overline{\Phi'}(\bar z) + \overline{\Psi}(\bar z). \end{aligned}\right\} \tag{8.186}$$

Эти формулы дают представление напряжений через две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного.

Мы видим, таким образом, что решение плоской задачи теории упругости сводится к отысканию двух функций комплексного переменного, аналитических внутри области S, занятой упругим телом. Эти функции должны удовлетворять на контуре L области S определённым граничным условиям, которыми они и определяются. Эти условия будут различны, смотря по тому, заданы ли на границе смещения или напряжения.

Пусть на контуре L заданы компоненты u и v смещения как функции дуги s:

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s).$$

Тогда на этом контуре функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны удовлетворять соотношению:

$$\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(\bar{z})} = 2\mu(g_1 + ig_2). \qquad (8.187)$$

Если на контуре L заданы компоненты X_n, Y_n напряжения, то воспользуемся формулой (8.185), которая даёт:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds + \text{const.},$$

или, вводя обозначение

$$i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds = f_1(s) + if_2(s),$$

и принимая во внимание (8.182), получим:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(\bar{z})} + \overline{\psi(\bar{z})} = f_1 + if_2 + \text{const.} \qquad (8.188)$$

Это граничное условие служит для определения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в том случае, когда заданы напряжения на границе. Выбор постоянной в первой части (8.188) не влияет на напряжённое состояние упругого тела и может быть сделан произвольно. Полученные здесь основные соотношения (8.187) и (8.188) позволяют легко получить решение плоской задачи для внутренности круга. Если же нам задана односвязная область S, отличная от круга, то для решения подобной задачи можно воспользоваться конформным отображением области S на круг.

Пусть односвязная область S в плоскости комплексного переменного z отображается на круг γ в плоскости ζ; связь между переменным z и ζ осуществляется аналитической функцией

$$z = \omega(\zeta).$$

Если отображение взаимно однозначно, то $\omega'(\zeta)$ не может обращаться в нуль в области круга γ. Во всём дальнейшем мы будем рассматривать такие области S, координаты точек контура которых имеют непрерывные производные по дуге вплоть до третьего порядка.

Для того чтобы использовать конформное отображение при решении плоской задачи, нужно преобразовать граничные условия этой последней к новому переменному ζ. Изменим наши обозначения, называя

$$\varphi_1(z),\ \psi_1(z),\ \Phi_1(z),\ \Psi_1(z)$$

те функции, которые были обозначены выше через

$$\varphi(z),\ \psi(z),\ \Phi(z),\ \Psi(z).$$

Введём также новые обозначения:

$$\varphi(\zeta)=\varphi_1(z)=\varphi_1[\omega(\zeta)],\qquad \psi(\zeta)=\psi_1(z)=\psi_1[\omega(\zeta)],$$
$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(z)=\frac{d\varphi_1}{dz}=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\ \Psi(\zeta)=\Psi_1(z)=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

При этих обозначениях мы получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\varphi(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\zeta)}\overline{\varphi}'(\bar\zeta)+\overline{\psi}(\bar\zeta).$$

Граничное условие при смещениях, данных на контуре, выраженное формулой (8.187), примет теперь вид:

$$\varkappa\varphi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar\sigma)}\overline{\varphi}'(\bar\sigma)-\overline{\psi}(\bar\sigma)=2\mu(g_1+ig_2), \tag{8.189}$$

где $\sigma=e^{i\theta}$ обозначает произвольную точку контура γ.

Функции $g_1(s)$ и $g_2(s)$ суть заданные функции дуги s контура L; эта последняя длина дуги есть функция параметра дуги ϑ контура γ, вследствие чего в формуле (8.189) можно также рассматривать g_1 и g_2, как известные функции ϑ. При заданных на границе напряжениях условие (8.188) заменяется, очевидно, следующим:

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar\sigma)}\overline{\varphi}'(\bar\sigma)+\overline{\psi}(\sigma)=f_1+if_2+\text{const}. \tag{8.190}$$

Здесь f_1 и f_2 также можно рассматривать как известные функции ϑ. Заметим, что в краевой задаче, определяемой условиями (8.188) и (8.190), мы имеем ещё некоторый произвол, несущественный для искомого решения.

Именно, не изменяя решения задачи, мы можем произвольно зафиксировать аддитивную постоянную в правой части (8.188) и (8.190) и, кроме того, задать произвольные значения $\varphi_1(0)$ и $\varphi_1'(0)$.

В задаче, характеризуемой условиями (8.187) и (8.189), мы, не изменяя решения, вправе произвольно выбрать значение $\varphi(0)$.

Применение конформного отображения и преобразования краевых условий к виду (8.189) и (8.190), которые выражают эти условия на окружности круга, позволяет применить для отыскания неизвестных функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ разложение их в степенные ряды. Эти функции суть аналитические внутри круга. Естественно пытаться искать их в виде бесконечных рядов

$$\varphi(\zeta)=\sum_0^\infty a_k\zeta^k, \quad \psi(\zeta)=\sum_0^\infty a'_k\zeta^k.$$

Подстановка этих рядов в граничные условия даёт последовательность рекуррентных соотношений, из которых определяются коэффициенты a_k и a'_k. Особенно просто решается задача в тех случаях, когда отображающая функция $\omega(\zeta)$ есть полином. В этом случае система совместных уравнений, которую приходится решать, оказывается конечной. Важность этого случая для практических приложений заключается в том, что заданную область S можно апроксимировать с произвольной точностью областью S_n, отображаемой на круг при помощи полинома достаточно высокой степени n. На этом может быть построен метод приближённого решения задачи. Ограничившись здесь только этими общими замечаниями, мы займёмся изложением другого метода решения поставленных краевых задач, именно сведением их к некоторым функциональным уравнениям. Этот приём основан на приложении интегралов типа Коши.

Если мы имеем замкнутый контур Г, то интеграл

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(s)\,d\sigma}{\sigma-\zeta},$$

где $f(s)$ — функция точки контура Г, ζ — точка, не лежащая на Г, σ — переменное интегрирования, называется интегралом типа Коши. В частности, если $f(s)$ представляет собой граничные значения функции $F_1(\zeta)$, аналитической внутри области, ограниченной кривой Г, то $F(\zeta)=F_1(\zeta)$ в этой области, и $F(\zeta)=0$ вне контура Г. В дальнейшем мы будем ограничиваться теми случаями, когда контур Г есть окружность γ единичного радиуса с центром в начале координат. Относительно функции $f(s)$, которую будем теперь рассматривать, как функцию полярного угла ϑ, т. е. $f(\vartheta)$, будем предполагать, что она не только непрерывна, но удовлетворяет на γ так называемому условию Hölder'а, именно, что

$$|f(\vartheta'')-f(\vartheta')|\leqslant A|\vartheta'-\vartheta''|^\alpha, \quad A>0, \quad \alpha>0,$$

если ϑ' и ϑ'' — два произвольных значения ζ промежутка $(0, 2\pi)$.

Относительно интегралов типа Коши существует следующее важное предложение, называемое теоремой Harnack'а. Пусть $f(\vartheta)$ — вещественная функция от ϑ, непрерывная на γ. Если для всякой точки ζ, лежащей *внутри* γ, имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=0,$$

то $f(\vartheta)=0$. Если же указанное равенство имеет место для всякой точки ζ вне γ, то $f(\vartheta)=C$, где C — постоянная.

Пусть теперь нам нужно решить краевую задачу при заданных напряжениях для конечной области S, ограниченной простым замкнутым контуром. Отобразим S на круг $|\zeta|\leqslant 1$ плоскости ζ при помощи соотношения $z=\omega(\zeta)$. Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ будут голоморфны внутри γ; мы будем искать такие решения, когда $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ непрерывны вплоть до контура.

Используя имеющийся произвол, мы можем положить $\varphi(0)=0$ и можем фиксировать мнимую часть величины $\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}$. Контурное условие (8.190) мы напишем двояко:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})}\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})+\overline{\psi}(\overline{\sigma})&=f_1+if_2,\\ \overline{\varphi}(\overline{\sigma})+\frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)&=f_1-if_2.\end{aligned}\right\}\qquad(8.191)$$

Умножим обе части этих равенств на $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, где ζ — точка, внутренняя к γ, и проинтегрируем по γ. Мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})}\,\frac{\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\psi}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}&=A(\zeta),\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\,\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}&=B(\zeta).\end{aligned}\right\}\qquad(8.192)$$

Теорема Harnack'а обеспечивает эквивалентность уравнений (8.191) и (8.192). Для сокращения здесь положено:

$$A(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1+if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma,\quad B(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1-if_2}{\sigma-\zeta}\,d\sigma.$$

На основании свойств интегралов Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\varphi(\zeta),\qquad\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\psi(\zeta).$$

Кроме того, для круга радиуса единица вычисление даёт:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\psi}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{\psi}(0)=\alpha-i\beta,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\varphi}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\overline{\varphi}(0)=0.$$

Уравнения (8.192) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})}\frac{\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\alpha-i\beta=A(\zeta),\\ \psi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}=B(\zeta).\end{aligned}\right\}\qquad(8.193)$$

Эта система функциональных уравнений решает поставленную задачу. Первое из этих уравнений, соединённое с условием $\varphi(0)=0$, определяет $\varphi(\zeta)$, а затем из второго уравнения может быть найдена $\psi(\zeta)$. Однако, первое из уравнений (8.193) есть интегро-дифференциальное: оно может быть сведено путём несложного преобразования к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Перепишем его в следующем виде:

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})(\sigma-\zeta)}\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})\,d\sigma+k\omega(\zeta)+\alpha-i\beta=A(\zeta),$$

где

$$k=\frac{\overline{\varphi'}(0)}{\overline{\omega'}(0)}.$$

Продифференцируем это соотношение по ζ:

$$\varphi'(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta)}{\sigma-\zeta}\right\}\frac{\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})}\,d\sigma+k\omega'(\zeta)=A'(\zeta).$$

Заставляя ζ стремиться к точке σ_0 контура, ссылаясь на известные определённые свойства интегралов типа Коши, получим следующее интегральное уравнение:

$$\varphi'(\sigma_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\left\{\frac{\omega(\sigma)-\omega(\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right\}\frac{\overline{\varphi'}(\overline{\sigma})}{\overline{\omega'}(\overline{\sigma})}\,d\sigma+k\omega'(\sigma_0)=A'(\sigma_0).\quad(8.194)$$

Опираясь на предположения, сделанные относительно контура области S, можно доказать, что функция

$$K(\zeta, \sigma) = \frac{1}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\omega(\sigma) - \omega(\zeta)}{\sigma - \zeta} \right\}$$

непрерывна, когда σ и ζ находятся внутри γ или на γ.

Введением новой неизвестной функции $\varphi_0(\zeta)$ по формуле

$$\varphi(\zeta) = -k\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta)$$

можно избавиться от слагаемого $k\omega'(\sigma_0)$ в уравнении (8.194) и привести его к виду:

$$\varphi_0'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma K(\sigma_0, \sigma) \overline{\varphi_0'(\overline{\sigma})}\, d\sigma = A'(\sigma_0), \tag{8.195}$$

т. е. к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Не останавливаясь на подробностях, укажем, что может быть доказано существование решения этого уравнения. Доказательство построено на том, что показывается для однородного уравнения

$$\varphi_0'(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma K(\sigma_0, \sigma) \overline{\varphi_0'(\overline{\sigma})}\, d\sigma = 0,$$

что всякое решение, удовлетворяющее ему, есть тождественный нуль. Противное предположение приводит к выводу, что при отсутствии внешних усилий ($f_1 = f_2 = 0$) упругое тело может иметь во внутренних точках напряжения, отличные от нуля (хотя массовые силы равны нулю).

Мы ограничились здесь изложением решения только для задачи с данными на границе напряжениями. Точно таким же путём приводится к интегральному уравнению и задача с заданными смещениями.

Описанный метод функциональных уравнений даёт возможность получать и решение конкретных задач. Интегральное уравнение может всегда быть решено численным путём. Кроме того, для широкого класса областей, конформно отображающихся на круг при помощи рациональной функции, этот метод даёт возможность элементарным путём получать точное решение.

Мы ограничиваемся здесь только этими общими и крайне неполными сведениями из области приложения теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. Для более полного ознакомления с предметом мы отсылаем читателя прежде всего к цитированной выше книге Н. И. Мусхелишвили, а также к позднейшим работам, многие из которых в последнем издании (1935 г.) этой книги помещены в списке литературы.

§ 93. Симметричная деформация в теле вращения.

Пусть мы имеем упругое тело, представляющее собою тело вращения около оси Oz.

Определим положение любого элемента в плоскости сечения, перпендикулярного к оси вращения, при помощи полярных координат r, θ.

Согласно обозначениям § 61, мы будем иметь следующие шесть компонентов напряжённого состояния:

1) Нормальный компонент напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r:

$$\sigma_r = \widehat{rr}.$$

2) Нормальный компонент напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к оси Oz:

$$\sigma_z = \widehat{zz}.$$

3) Нормальный компонент напряжения на элементарной площадке, лежащей в плоскости, проходящей через ось вращения:

$$\sigma_\theta = \widehat{\theta\theta}.$$

4) Касательные компоненты напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r:

$$\tau_{rz} = \widehat{rz}, \quad \tau_{r\theta} = \widehat{r\theta}.$$

5) Касательные компоненты напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к оси Oz:

$$\tau_{z\theta} = \widehat{z\theta}, \quad \tau_{zr} = \widehat{zr}.$$

6) Касательные компоненты напряжения на элементарной площадке, лежащей в плоскости, проходящей через ось вращения:

$$\tau_{\theta r} = \widehat{\theta r}, \quad \tau_{\theta z} = \widehat{\theta z}.$$

Они связаны известными соотношениями Коши:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}.$$

Составляющие упругого перемещения в радиальном и тангенциальном направлениях обозначим через u, v, а составляющую в направлении оси Oz обозначим через w.

Шесть компонентов деформации будут даны формулами (см. § 87):

$$\left.\begin{aligned} e_{rr}&=\frac{\partial u}{\partial r}, & e_{r\theta}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r},\\ e_{\theta\theta}&=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, & e_{rz}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r},\\ e_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}, & e_{z\theta}&=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned}\right\}\tag{8.196}$$

В случае деформации, симметричной относительно оси вращения, т. е. оси Oz, деформация на любой плоскости, проходящей через ось Oz будет одна и та же, а следовательно, компоненты напряжённого состояния не будут зависеть от полярного угла θ, и все производные по θ обращаются в нуль.

Вследствие симметрии компоненты касательных напряжений $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ обращаются в нуль

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta z}=0,$$

а следовательно, остаётся единственный компонент касательного напряжения τ_{rz}.

Рассуждая как в § 88 и предполагая отсутствие массовых сил, мы получим следующие уравнения упругого равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}&=0,\\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}&=0. \end{aligned}\right\}\tag{8.197}$$

На основании сказанного, мы имеем из формул (8.196) следующие выражения для компонентов деформации:

$$\left.\begin{aligned} &e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{u}{r},\quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\\ &e_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r},\quad e_{r\theta}=e_{\theta z}=0. \end{aligned}\right\}\tag{8.198}$$

Аналогично § 88 введём функцию напряжений Φ при помощи соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),\\ \sigma_\theta&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2\Phi-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),\\ \sigma_z&=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],\\ \tau_{rz}&=\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]. \end{aligned}\right\}\tag{8.199}$$

Здесь введён оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2(\quad)=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\quad)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad). \tag{8.200}$$

Легко убедиться, внося (8.199) в (8.197), что эти уравнения упругого равновесия будут удовлетворены тождественно.

Следует заметить, что функция напряжений Φ не зависит от угла θ, и поэтому опущена вторая производная по θ в выражении (8.200).

Функция напряжений Φ, введённая нами при помощи выражений (8.199), может быть определена только на основании тождественных соотношений Сен-Венана. Для случая изотропного тела она удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nabla^4\Phi=\nabla^2\nabla^2\Phi=0. \tag{8.201}$$

Это уравнение принадлежит Ляву.

Английский учёный Митчел, ещё до Лява, ввёл иную функцию напряжений, которая тоже удовлетворяет уравнению в частных производных четвёртого порядка, но иного вида, чем уравнение (8.201). Вследствие симметрии мы имеем только два компонента упругого смещения, которые для изотропного тела имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z},\\ w&=\frac{1+\sigma}{E}\left\{(1-2\sigma)\nabla^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{8.202}$$

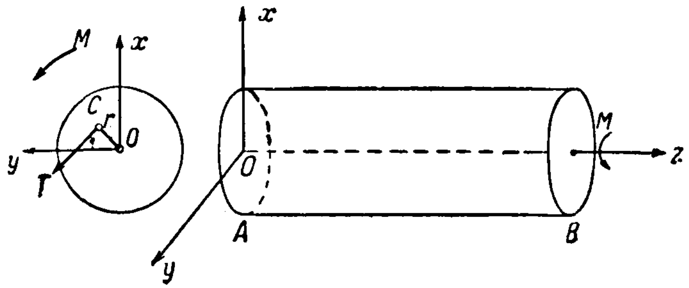
где σ — коэффициент Пуассона, а E — модуль Юнга.

ГЛАВА IX.

КРУЧЕНИЕ.

§ 94. Кручение круглого стержня постоянного сечения.

Решение этой задачи было дано Кулоном в конце XVIII в. и основано на предположении, что поперечные круговые сечения стержня при кручении сохраняют между собой первоначальные расстояния, остаются плоскими, и радиусы, проведённые в этих сечениях, не искривляются. Пусть (фиг. 23) A есть закреплённое сечение стержня, B — свободное сечение, нагруженное касательными усилиями, приводящимися к паре сил с моментом M. Из теории Кулона следует, что:



Фиг. 23.

1) Касательное напряжение T в какой-либо точке C поперечного сечения пропорционально радиусу-вектору $r = OC$ и нормально к нему; поэтому оно, очевидно, выражается формулой

$$T = \mu\tau r, \tag{9.1}$$

где τ — постоянный угол закручивания на единицу длины стержня.

2) Упругое перемещение V в точке C пропорционально радиусу-вектору r, нормально к нему и пропорционально расстоянию сечения от закреплённого конца стержня; оно выра-

жается очевидной формулой:

$$V = \tau z r. \tag{9.2}$$

3) Никаких упругих перемещений параллельно оси стержня нет. Из формулы (9.2) следует, что компоненты упругих перемещений будут даны формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tau z r\left(-\frac{y}{r}\right) = -\tau z y, \\ v &= \tau z r\left(\frac{x}{r}\right) = \tau z x, \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Из формулы (9.1) следует, что компоненты касательного напряжения в плоскости поперечного сечения стержня будут даны формулами:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= T\left(-\frac{y}{r}\right) = -\mu\tau y, \\ Y_z &= T\left(\frac{x}{r}\right) = \mu\tau x. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Из полученных нами выражений для компонентов упругих смещений

$$u = -\tau z y, \quad v = \tau z x, \quad w = 0, \tag{9.5}$$

очевидно, имеем:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{9.6}$$

т. е. объёмное расширение материала равно нулю. Далее, имеем:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0, \quad \nabla^2 w = 0. \tag{9.7}$$

Внося (9.6) и (9.7) в уравнения упругого равновесия Ламе:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho X = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho Y = 0, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

мы получим:

$$X = Y = Z = 0. \tag{9.9}$$

Следовательно, решение (9.5) задачи о кручении стержня, данное Кулоном, справедливо *только при отсутствии массовых сил.*

Из (9.5) имеем следующие компоненты напряжённого состояния стержня:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ Z_z &= \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \\ X_z &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\mu\tau y, \\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mu\tau x. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Отсюда следует, что все три нормальных компонента напряжённого состояния суть нули, и что существуют только два касательных компонента напряжённого состояния, действующих на элементарной площадке, нормальной к оси стержня.

На боковой поверхности стержня имеем для косинусов нормали к поверхности следующие выражения:

$$l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \quad n = 0. \tag{9.11}$$

Внося в известные формулы:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x l + X_y m + X_z n, \\ Y_\nu &= X_y l + Y_y m + Y_z n, \\ Z_\nu &= X_z l + Y_z m + Z_z n \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

значения l, m, n из (9.11), мы получим:

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \quad Z_\nu = 0, \tag{9.13}$$

т. е. решение (9.5) справедливо *только при отсутствии внешних сил на боковой поверхности стержня.*

На заделанном конце A стержня имеем условие

$$u = v = w = 0 \quad \text{для} \quad z = 0, \tag{9.14}$$

и оно, очевидно, будет удовлетворено решением (9.5). На свободном конце B стержня мы должны вычислить по формулам (9.12) внешние силы, необходимые для равновесия стержня при упругих перемещениях, данных формулами (9.5). Здесь имеем для косинусов углов нормали к плоскому концевому сечению B стержня следующие выражения:

$$l=0, \quad m=0, \quad n=1. \tag{9.15}$$

Внося (9.10) и (9.15) в (9.12), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_z = -\mu\tau y, \\ Y_\nu &= Y_z = \mu\tau x, \\ Z_\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

Следовательно, на свободном конце стержня мы имеем касательные усилия, распределённые по тому же закону, что и в любом поперечном сечении. Легко видеть, что для *кругового* сечения мы имеем вследствие симметрии:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_\nu &= \iint X_z\,dx\,dy = -\mu\tau \iint y\,dx\,dy = 0, \\ \sum Y_\nu &= \iint Y_z\,dx\,dy = \mu\tau \iint x\,dx\,dy = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

$$\sum (Y_\nu x - X_\nu y) = \iint (xY_z - yX_z)\,dx\,dy = \\ = \mu\tau \iint (x^2+y^2)\,dx\,dy = \mu\tau \iint r^2\,dx\,dy = M. \tag{9.18}$$

Следовательно, усилия на свободном конце стержня суть касательные усилия, сводящиеся к паре сил, момент которой M имеет величину

$$M = \mu\tau J_0, \tag{9.19}$$

где введена известная величина

$$J_0 = \iint r^2\,dx\,dy, \tag{9.20}$$

называемая *полярным моментом инерции* поперечного сечения.

Таким образом, решение Кулона справедливо только при специальном законе распределения касательных напряжений, приложенных извне, на свободном конце стержня. По принципу Сен-Венана (§ 49), мы можем принять, что для круглого цилиндра, длина которого в значительное число раз превосходит его диаметр, решение Кулона справедливо и при иной системе сил, приложенных к свободному концу цилиндра, лишь бы она была статически эквивалентна паре сил, момент которой дан формулой (9.19). На заделанном конце цилиндра ($z=0$) имеем из формул (9.3)

$$u = v = w = 0,$$

что и должно быть.

§ 95. Кручение призматического стержня произвольного постоянного поперечного сечения.

Сен-Венан обобщил решение Кулона (9.5) на случай призматического стержня произвольного постоянного поперечного сечения, приняв следующие выражения для компонентов упругих перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau z y, \\ v &= \tau z x, \\ w &= \tau \varphi(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

Здесь $\varphi(x, y)$ есть функция, подлежащая определению, τ есть та же постоянная величина, называемая *степенью кручения*, которая введена была в формулах (9.5).

Принимая во внимание формулы (9.21), имеем следующие выражения для компонентов напряжённого состояния:

$$X_x = Y_y = Z_z = X_y = 0, \tag{9.22}$$

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \\ Y_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right), \end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

т. е. они носят тот же характер, что и в случае круглого сечения. Из формул (9.21) имеем:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0, \quad \nabla^2 w = \tau\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right).$$

Поэтому, предполагая отсутствие массовых сил, мы получим, внося (9.21) в уравнения упругого равновесия (9.8):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0; \tag{9.24}$$

это и есть уравнение, которому должна удовлетворять в каждой точке поперечного сечения стержня функция $\varphi(x, y)$, называемая *функцией кручения Сен-Венана*. Перейдём теперь к условиям на боковой поверхности стержня, где должны отсутствовать внешние поверхностные силы. Так как прямолинейные образующие этой боковой поверхности параллельны оси z, то нормаль к боковой поверхности перпендикулярна к оси z, а следовательно, косинус угла этой нормали с осью z есть нуль:

$$n = 0. \tag{9.25}$$

Внося (9.22) и (9.25) в формулы (9.12), мы имеем:

$$X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0, \tag{9.26}$$

$$Z_\nu = X_z l + Y_z m = 0; \tag{9.27}$$

подставляя (9.23) в (9.27), мы получим:

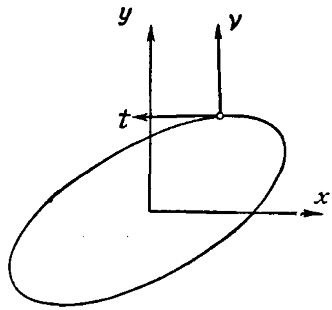
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) l + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) m = 0. \tag{9.28}$$

Так как l, m суть косинусы углов нормали к контуру поперечного сечения (фиг. 24), с осями x, y, то, вводя производную функции φ по нормали к контуру, имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} l + \frac{\partial\varphi}{\partial y} m. \tag{9.29}$$

Поэтому мы получим из (9.28):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = ly - mx. \tag{9.30}$$



Фиг. 24.

Это и есть окончательная форма граничного условия на контуре поперечного сечения стержня. Так как в формулы (9.22) и (9.23) координата z не входит, то напряжённое состояние одинаково во всех поперечных сечениях стержня. Легко видеть, что касательные напряжения в плоскости поперечного сечения сводятся к паре сил. Для функции $\varphi(x, y)$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\right] = \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y + x\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y,$$

так как функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет (9.24). Поэтому имеем, по формуле Грина:

$$\sum X = \iint X_z\,dx\,dy = \mu\tau \iint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) dx\,dy = \\ = \mu\tau \iint \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\right]\right\} dx\,dy = \\ = \mu\tau \oint x\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) l + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) m\right] ds,$$

где криволинейный интеграл взят по всему контуру поперечного сечения (ds — элемент дуги контура). Вследствие граничного условия (9.28) этот контурный интеграл равен нулю, а следовательно, имеем:

$$\iint X_z\,dx\,dy=0$$

и так же найдём:

$$\sum Y=\iint Y_z\,dx\,dy=0.$$

Поэтому касательные усилия в плоскости поперечного сечения сводятся к паре сил, момент которой будет:

$$M=\iint (xY_z-yX_z)\,dx\,dy. \tag{9.31}$$

Внося сюда (9.23), получим:

$$M=\mu\tau\iint\left[x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]dx\,dy. \tag{9.32}$$

Вводя обозначение

$$C=\mu\iint\left[x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]dx\,dy, \tag{9.33}$$

имеем для момента пары сил выражение:

$$M=C\tau; \tag{9.34}$$

M называется *моментом кручения*, C называется *жёсткостью при кручении.*

На закреплённом конце стержня $A\,(z=0)$ имеем:

$$u=0,\quad v=0, \tag{9.35}$$

но компоненты упругого смещения, параллельные оси стержня, не уничтожаются. Они имеют во всех сечениях одинаковые значения. Поэтому поперечное сечение некруглого стержня при кручении деформируется и перестаёт быть плоским.

Здесь мы имеем особый случай закрепления концевого сечения, называемый *закреплением Сен-Венана.* Если же мы потребуем, чтобы на закреплённом конце третий компонент упругого перемещения w равнялся бы нулю, то решение (9.21) более не имеет места и должно быть заменено другим. Приближённо такое решение было дано впервые в работе А. Феппля (смотри «Сила и деформация», том II, глава VI). На свободном конце стержня мы имеем только касательные усилия, данные формулой (9.23). Они эквивалентны паре сил, момент которой M дан формулой (9.34). По принципу Сен-Венана система внешних сил, приложенных к свободному концу стержня, должна быть статически эквивалентна вышеупомянутой паре сил.

Так как функция кручения $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (9.24), то она будет гармонической функцией, и ей соответствует сопряжённая гармоническая функция $\psi(x, y)$, так что:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{9.36}$$

Очевидно, что функция $\psi(x, y)$ всюду внутри контура поперечного сечения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{9.37}$$

Граничное условие, которому удовлетворяет эта функция $\psi(x, y)$, получится из (9.28), если внести туда (9.36) и заметить, что при принятом на фиг. 25 (см. ниже) направлении имеем:

$$l=\frac{dy}{ds}, \quad m=-\frac{dx}{ds}, \tag{9.38}$$

что даёт:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}-\left(y\frac{dy}{ds}+x\frac{dx}{ds}\right)=0.$$

Интегрируя по контуру поперечного сечения, имеем:

$$\psi=\frac{x^2+y^2}{2}+\text{const}. \tag{9.39}$$

Таким образом, задача приведена к отысканию функции $\psi(x, y)$, гармонической внутри контура поперечного сечения стержня, а на границе его удовлетворяющей контурному условию (9.39). Для компонентов касательных напряжений имеем из (9.23) выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_z&=\mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\right), \\ Y_z&=-\mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.40}$$

§ 96. Функция напряжений Прандтля.

Вводя новую функцию $F(x, y)$ по уравнению

$$F(x, y)=\mu\tau\left[\psi(x, y)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right], \tag{9.41}$$

мы получим из (9.40):

$$X_z=\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Y_z=-\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{9.42}$$

Эта функция F получила название *функции напряжений Прандтля* и удовлетворяет уравнению, которое получается, если над обеими частями (9.41) совершить операцию

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

что даёт

$$\nabla^2 F=\mu\tau\nabla^2\psi-\frac{\mu\tau}{2}\nabla^2(x^2+y^2).$$

Так как

$$\nabla^2(x^2+y^2)=4,$$

а функция ψ удовлетворяет уравнению (9.37), то получим окончательно уравнение Прандтля:

$$\nabla^2 F=-2\mu\tau. \tag{9.43}$$

На основании (9.39) и (9.41) мы имеем граничное условие для $F(x, y)$:

$$F(x, y)=\text{const. на контуре.} \tag{9.44}$$

Для крутящего момента имеем из (9.31) и (9.42):

$$M=-\iint\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y\right)dx\,dy. \tag{9.45}$$

Из этой формулы следует, что величина M не меняется, если к F прибавить какую-нибудь постоянную величину.

Интегрируя правую часть формулы (9.45) по частям, мы получим:

$$M=-\oint F(lx+my)\,ds+2\iint F\,dx\,dy. \tag{9.46}$$

Если контур односвязный, то граничное условие для функции $F(x, y)$ можно взять в форме:

$$F(x, y)=0,$$

так как изменение функции $F(x, y)$ на постоянную величину не отражается на решении задачи, как это легко видно из (9.42) и (9.45). Тогда криволинейный интеграл в выражении (9.46) обращается в нуль. Поэтому для крутящего момента в случае односвязного контура мы имеем окончательное выражение

$$M=2\iint F\,dx\,dy. \tag{9.47}$$

Эта важная формула принадлежит Прандтлю.

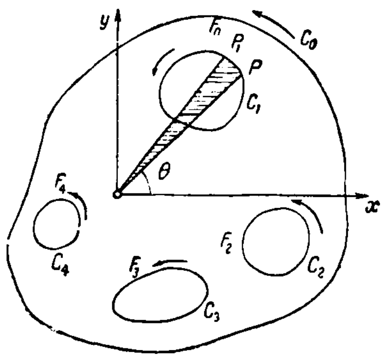
Если поперечное сечение многосвязное, то функция $F(x, y)$ получит на внешнем контуре сечения постоянное значение F_0, а на каждом внутреннем своё особое постоянное значение

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_n,$$

если число внутренних контуров равно n.

Обозначим внешний контур сечения через C_0, а внутренние контуры через $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots, C_n$ (фиг. 25). При контурной интеграции мы должны принять во внимание, что обход внутренних контуров будет совершаться в направлении, обратном обходу внешнего контура. В формуле (9.46) контурный интеграл представится суммой контурного интеграла—$\oint F_0 (lx + my)\, ds$, описанного в прямом направлении по внешнему контуру, и n контурных интегралов — по внутренним контурам, описанных в обратном направлении:

$$\sum \oint_{C_k} F_k (lx + my)\, ds = \\ = \sum F_k \oint_{C_k} (lx + my)\, ds.$$



Фиг. 25.

Здесь F_k есть значение функции напряжений на внутреннем контуре C_k.

Обозначая через Ω_k площадь, заключённую внутри замкнутого контура C_k, преобразуем криволинейный интеграл таким образом:

$$\oint_{C_k} (lx + my)\, ds = \oint_{C_k} (x\, dy - y\, dx).$$

Применим формулу Грина для преобразования криволинейного интеграла в поверхностный:

$$\int P\, dx + Q\, dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

в нашем случае $P = -y$, $Q = x$. Поэтому

$$\oint_{C_k} (x\, dy - y\, dx) = 2 \iint dx\, dy = 2\Omega_k. \tag{9.48}$$

На основании вышеизложенного мы имеем из формулы (9.46) следующее выражение для крутящего момента в случае многосвязного сечения:

$$M = -F_0 \oint (x\, dy - y\, dx) + \sum F_k \oint (x\, dy - y\, dx) + 2 \iint F\, dx\, dy.$$

На основании (9.48) предыдущая формула примет следующий вид:

$$M = -2F_0\Omega_0 + 2 \sum_k F_k\Omega_k + 2 \iint F\, dx\, dy. \tag{9.49}$$

Здесь Ω_0 есть полная площадь, ограниченная внешним контуром C_0.

В формулу (9.49) входит $n+1$ произвольных постоянных:

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n.$$

Но только одна из них может быть принята за нуль, например, мы можем положить

$$F_0=0,$$

а остальные постоянные определяются из теоремы Бредта.

Следует заметить, что в некоторых случаях удобно принять за нуль не F_0, а какую-нибудь другую постоянную.

§ 97. Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении.

В 1896 г. германский инженер Р. Бредт дал замечательную теорему о циркуляции касательного напряжения при кручении. Так называется контурный интеграл

$$J=\oint_C T_s ds, \tag{9.50}$$

взятый по какому-либо замкнутому контуру C внутри поперечного сечения. Здесь T_s есть проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура на направление касательной к этому контуру в рассматриваемой точке, вследствие чего

$$T_s=X_z\cos(t,\ x)+Y_z\cos(t,\ y), \tag{9.51}$$

но имеем:

$$\cos(t,\ x)=\frac{dx}{ds},\quad \cos(t,\ y)=\frac{dy}{ds}. \tag{9.52}$$

Внося (9.52) в (9.51), получим:

$$T_s=X_z\frac{dx}{ds}+Y_z\frac{dy}{ds}. \tag{9.53}$$

Подставляя (9.53) в (9.50), получим:

$$J=\oint(X_z dx+Y_z dy); \tag{9.54}$$

внося сюда X_z и Y_z из (9.42), мы получим:

$$J=\oint\left(\frac{\partial F}{\partial y}dx-\frac{\partial F}{\partial x}dy\right). \tag{9.55}$$

Если внести сюда из (9.38)

$$dx=-m\,ds,\quad dy=l\,ds,$$

то получим:

$$J = -\oint \left(\frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial x} l\right) ds,$$

или вводя нормальную производную

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = \frac{\partial F}{\partial x} l + \frac{\partial F}{\partial y} m,$$

получим для величины циркуляции:

$$J = -\oint \frac{\partial F}{\partial \nu} ds. \tag{9.56}$$

С другой стороны, мы должны внести в (9.54) формулы (9.23), что даёт:

$$J = \mu\tau \oint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dy\right] =$$
$$= \mu\tau \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right) + \mu\tau \oint (x\,dy - y\,dx) =$$
$$= \mu\tau \oint d\varphi + \mu\tau \oint (x\,dy - y\,dx).$$

Так как компоненты упругого перемещения u, v, w должны быть однозначными функциями координат, то из (9.21) следует, что функция кручения $\varphi(x, y)$ должна быть однозначной функцией, а тогда необходимо, чтобы интеграл от $d\varphi(x, y)$ по замкнутому контуру был равен нулю.

Поэтому из условия однозначности упругих перемещений получим:

$$J = \mu\tau \oint (x\,dy - y\,dx),$$

что согласно (9.48) даёт

$$J = 2\mu\tau\Omega, \tag{9.57}$$

где Ω есть величина площади, ограниченной замкнутым контуром, по которому вычисляется циркуляция. Формула (9.57) и составляет важную теорему Бредта.

Из (9.56) и (9.57) получим важное соотношение

$$-\oint \frac{\partial F}{\partial \nu} ds = 2\mu\tau\Omega, \tag{9.58}$$

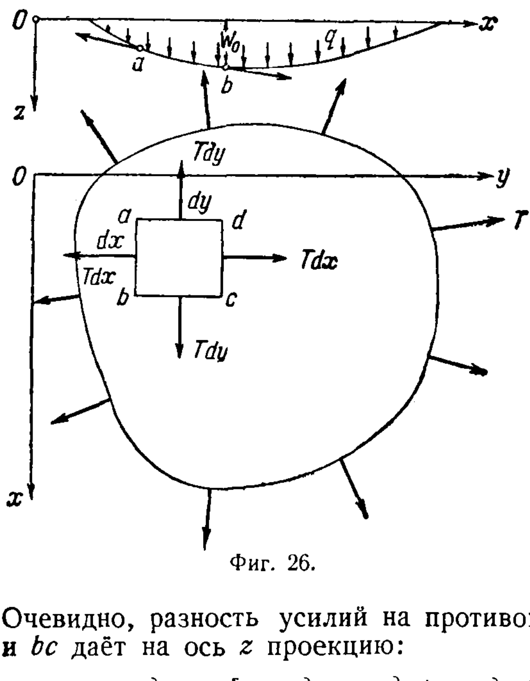
служащее для определения n неизвестных F_1, F_2, ..., F_n значений функции напряжений на n внутренних контурах $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Действительно, имеем n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{\partial F}{\partial \nu}\, ds &= -2\mu\tau\Omega_1, \\ \oint_{C_2} \frac{\partial F}{\partial \nu}\, ds &= -2\mu\tau\Omega_2, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \\ \oint_{C_n} \frac{\partial F}{\partial \nu}\, ds &= -2\mu\tau\Omega_n. \end{aligned}\right\} \tag{9.59}$$

Интегралы, стоящие в левой части, суть линейные функции от $F_1, F_2, \ldots, F_n$, а $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ суть площади, ограниченные замкнутыми контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е. величины известные.

§ 98. Мембранная аналогия Прандтля.

Пусть однородная мембрана постоянной толщины опёрта по контуру того же очертания, как и поперечное сечение скручиваемого стержня, и нагружена равномерной нагрузкой q, а по контуру подвергнута постоянному натяжению T (фиг. 26), которое будет передаваться по всей мембране.



Фиг. 26.

Пусть координатные оси Oxy лежат в плоскости контура мембраны, которая прогнётся под действием нагрузки q на величину w_0. Вырежем элемент $abcd$, стороны которого параллельны осям координат, и приложим к каждой стороне равномерно распределённые нормальные растягивающие напряжения T. Очевидно, разность усилий на противоположных сторонах ad и bc даёт на ось z проекцию:

$$-T dy \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left[T dy \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T dy \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) dx\right] = T \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\, dx\, dy,$$

ибо малый угол между осью Ox и касательной к сечению мембраны плоскостью, параллельной Oxz, будет $\frac{\partial w_0}{\partial x}$. Также разность усилий на противоположных сторонах ab и dc даёт на ось z проекцию

$$T\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}dx\,dy.$$

Условие равновесия всех сил, действующих на элемент $abcd$, даёт равенство нулю проекции всех сил на ось Oz:

$$T\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)dx\,dy+q\,dx\,dy=0,$$

ибо $q\,dx\,dy$ есть нагрузка, приложенная к площади элемента $abcd$. Отсюда имеем уравнение для прогиба w_0 равномерно нагруженной мембраны:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=-\frac{q}{T}. \tag{9.60}$$

На контуре мембраны прогиб w_0 равен нулю, отсюда контурное условие будет:

$$w_0=0. \tag{9.61}$$

Контурное условие (9.44) для функции F тождественно с (9.61). Дифференциальные уравнения (9.43) и (9.60) совпадают, если положить

$$2\mu\tau=\frac{q}{T}. \tag{9.62}$$

Следовательно, задача о кручении приводится к отысканию формы прогиба равномерно нагруженной мембраны.

§ 99. Кручение тонкостенных трубчатых валов.

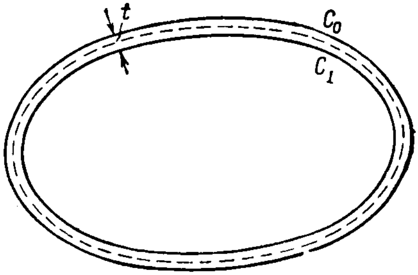
Пусть t есть малая переменная толщина стенки полого вала (фиг. 27). На основании формулы (9.49) имеем, полагая

$$F_0=0,$$

величину крутящего момента

$$M=2\left(\iint F\,dx\,dy+F_1\Omega_1\right), \tag{9.63}$$

где Ω_1 есть площадь, ограниченная внутренним контуром C_1, а F_1 есть постоянное значение функции напряжений на этом контуре. Ввиду малой толщины t стенки мы можем приближён-



Фиг. 27.

но принять, что значение F по нормали от C_1 к C изменяется по закону прямой от F_1 до нуля, и поэтому среднее значение F на этой нормали будет соответствовать середине длины нормали и равно $\frac{1}{2}F_1$. Поэтому приближённо имеем:

$$\iint F\,dx\,dy = \frac{1}{2}F_1 \oint_{C'_1} t\,ds, \tag{9.64}$$

где контур C'_1 проходит посредине между контурами C_0 и C_1. Внося (9.64) в (9.63), мы получим:

$$M = 2F_1\left(\Omega_1 + \frac{1}{2}\oint_{C'_1} t\,ds\right). \tag{9.65}$$

Но легко видеть, что площадь Ω'_1, ограниченная средним контуром C'_1, будет иметь величину

$$\Omega'_1 = \Omega_1 + \frac{1}{2}\oint_{C'_1} t\,ds.$$

Поэтому имеем из (9.65):

$$M = 2F_1\Omega'_1. \tag{9.66}$$

С другой стороны, при принятом прямолинейном падении значения F по нормали, мы имеем следующую величину тангенциальной слагающей касательного напряжения:

$$T_s = -\frac{\partial F}{\partial \nu} = \frac{F_1}{t}. \tag{9.67}$$

Поэтому, внося (9.67) в (9.58), мы получим уравнение циркуляции Бредта:

$$F_1 \oint_{C'_1} \frac{ds}{t} = 2\mu\tau\Omega'_1. \tag{9.68}$$

Исключая F_1 из (9.66) и (9.68), имеем:

$$M = \frac{4\mu\tau\,(\Omega'_1)^2}{\oint\limits_{C'_1} \frac{ds}{t}}; \tag{9.69}$$

эта формула дана Бредтом.

Из формул (9.66) и (9.67) имеем для величины тангенциальной слагающей напряжения:

$$T_s = \frac{M}{2\Omega_1' t}; \tag{9.70}$$

эта формула тоже принадлежит Бредту. Для тонкостенных труб можно рассматривать T_s как напряжение кручения.

§ 100. Гидродинамические аналогии при кручении.

1) Аналогия Буссинеска. Рассмотрим ламинарное движение жидкости по призматической трубе, поперечное сечение которой совпадает с поперечным сечением стержня, кручение которого исследуется. Принимая ось трубы за ось z и обозначая через $w(x, y)$ скорость жидкости, текущей элементарными струйками, параллельными стенкам трубы, имеем уравнение:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.}, \tag{9.71}$$

где $\frac{\partial p}{\partial z}$ есть постоянное падение гидродинамического давления по оси трубы, а μ_0 есть коэффициент абсолютной вязкости жидкости.

На стенках трубы мы имеем условие Рейнольдса:

$$w = 0. \tag{9.72}$$

Сравнивая (9.72) и (9.44), мы видим, что граничные условия одинаковы, а сравнивая (9.71) и (9.43), мы видим, что уравнения для w и F совпадают, если

$$-2\mu\tau = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{9.73}$$

Следует заметить, что правая часть этой формулы отрицательна, так как давление p падает по длине трубы.

2) Аналогия Гринхилла. Если принять $F(x, y)$ за функцию тока несжимаемой идеальной жидкости в рассмотренной выше трубе, то имеем для проекций скорости течения на оси x и y:

$$u = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{9.74}$$

Для компонента вращения частицы жидкости имеем известную формулу:

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9.75}$$

Внося сюда (9.74), получим:

$$2\omega_z = -\nabla^2 F. \tag{9.76}$$

Так как функция F удовлетворяет уравнению (9.43), то получим отсюда:

$$\omega_z = \mu\tau. \tag{9.77}$$

Таким образом, для рассматриваемого движения идеальной несжимаемой жидкости существует постоянная величина скорости вращения частиц жидкости, данная формулой (9.77).

Компонент скорости течения по нормали к стенке, очевидно, будет

$$V_\nu = ul + vm;$$

внося сюда l и m из (9.38), u и v из (9.74), получим:

$$V_\nu = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial F}{\partial s}. \tag{9.78}$$

Эта величина на неподвижной стенке равна нулю, что даёт:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0,$$

откуда имеем, интегрируя,

$$F = \text{const.},$$

и можно принять

$$F = 0. \tag{9.79}$$

Таким образом, граничное условие на стенке удовлетворено. Момент количества движения жидкости относительно оси z будет:

$$\overline{M}_z = \iint \rho\,(vx - uy)\,dx\,dy; \tag{9.80}$$

принимая $\rho = 1$ и внося сюда (9.74), мы получим:

$$\overline{M}_z = -\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y\right) dx\,dy; \tag{9.81}$$

это совпадает с (9.45), т. е. с величиной крутящего момента. Поэтому плотность жидкости равна единице.

3) Аналогия Томсона и Тета. Из гидродинамики известно, что если идеальная несжимаемая жидкость заключена в рассматриваемой трубе, которая вращается около своей оси (ось z) с постоянной угловой скоростью ω, то функция тока $\psi_1(x, y)$ для движения жидкости относительно осей x, y, прикреплённых к трубе и с ней вместе вращающихся, удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi_1 = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} = 0 \tag{9.82}$$

и граничному условию

$$\psi_1 = \frac{\omega r^2}{2} + \text{const}. \tag{9.83}$$

Сравнивая (9.82) и (9.39), мы находим, что функции ψ и ψ_1 совпадают, если

$$\omega = 1. \tag{9.84}$$

Очевидно, что функция кручения $\varphi(x, y)$ будет в этом случае служить потенциалом скоростей для рассматриваемого движения жидкости.

§ 101. Кручение стержня эллиптического поперечного сечения.

Если оси x, y суть главные оси эллипса, центр которого на оси стержня, то контур поперечного сечения дан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{9.85}$$

Так как функция напряжений $F(x, y)$ должна обращаться в нуль на контуре, данном уравнением (9.85), то выберем её в форме

$$F(x, y) = A\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{9.86}$$

и внесём это в уравнение (9.43), что даёт:

$$2A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = -2\mu\tau.$$

Отсюда находим A:

$$A = -\frac{\mu\tau a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \tag{9.87}$$

Для касательных компонентов напряжённого состояния имеем по формулам (9.42) и (9.86) следующие величины:

$$X_z = \frac{2Ay}{b^2}; \quad Y_z = -\frac{2Ax}{a^2}. \tag{9.88}$$

Полная величина касательного напряжения в плоскости поперечного сечения, очевидно, будет:

$$T = \sqrt{(X_z)^2 + (Y_z)^2} = 2A\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}; \tag{9.89}$$

она направлена по касательной к кривым семейства:

$$F(x, y) = \text{const}. \tag{9.90}$$

Если p есть длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипса (9.85) на касательную, то, как известно, имеем:

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}. \tag{9.91}$$

Внося (9.91) в (9.89), получим формулу:

$$T=\frac{2A}{p}, \tag{9.92}$$

из которой следует, что наибольшее напряжение будет в конце малой оси эллипса:

$$T_{\max}=\frac{2|A|}{b}=\frac{2\mu\tau a^2 b}{a^2+b^2}, \tag{9.93}$$

а наименьшее напряжение будет в конце большой оси эллипса:

$$T_{\min}=\frac{2|A|}{a}=\frac{2\mu\tau ab^2}{a^2+b^2}. \tag{9.94}$$

Момент кручения вычисляется по формулам (9.47) и (9.86)

$$M=2A\iint\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)dx\,dy, \tag{9.95}$$

где двойной интеграл распространён на всю площадь эллипса. Но легко получить величины интегралов:

$$\iint x^2\,dx\,dy=\frac{\pi a^3 b}{4},\quad \iint y^2\,dx\,dy=\frac{\pi ab^3}{4},\quad \iint dx\,dy=\pi ab,$$

и внося их в (9.95), получим:

$$M=-A\pi ab.$$

Подставляя A из (9.87), найдём:

$$M=\mu\tau\frac{a^3b^3\pi}{a^2+b^2}. \tag{9.96}$$

Эта важная формула была дана Сен-Венаном. Введём теперь полярный момент площади эллипса относительно его центра

$$J_0=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2) \tag{9.97}$$

и обозначим площадь эллипса через $\Omega=\pi ab$.

Выражение (9.96) для крутящего момента можно написать в виде:

$$M=\mu\tau\frac{(\pi ab)^4}{\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)\,4\pi^2},$$

что, вследствие (9.97) и выражения для Ω, примет вид:

$$M = \mu\tau \frac{\Omega^4}{4\pi^2 J_0}. \tag{9.98}$$

Эта формула также дана Сен-Венаном, который предложил применять её для вычисления крутящего момента любого плавно очерченного поперечного сечения стержня, внося туда соответственные значения Ω и J_0.

Для вычисления функции кручения $\varphi(x, y)$ имеем из (9.23) и (9.88) уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y &= \frac{2Ay}{\mu\tau b^2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x &= -\frac{2Ax}{\mu\tau a^2}; \end{aligned}\right\} \tag{9.99}$$

внося сюда A из (9.87), найдём:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x;$$

отсюда получим, интегрируя,

$$\varphi(x, y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \tag{9.100}$$

Соответственно имеем для функции $\psi(x, y)$ на основании формул (9.36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y; \end{aligned}$$

отсюда, интегрируя, имеем:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)(x^2 - y^2). \tag{9.101}$$

Легко получить теперь

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)[-2xy + i(x^2 - y^2)] = \frac{i}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)(x + iy)^2.$$

Итак, имеем:

$$\varphi + i\psi = \frac{i}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)(x + iy)^2, \tag{9.102}$$

где $i = \sqrt{-1}$, т. е. $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ есть простая функция комплексного переменного $z = x + iy$ вида:

$$\varphi + i\psi = Cz^2,$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

§ 102. Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения.

Проведём оси x, y параллельно сторонам прямоугольника, и начало координат возьмём в центре прямоугольника (на оси стержня). Обозначим сторону прямоугольника, параллельную оси x, через $2a$, а параллельную оси y, — через $2b$. Для решения применим метод мембранной аналогии Прандтля.

В рассматриваемом случае мембрана равномерно натянута по контуру прямоугольника и нагружена равномерной нагрузкой ($q=\text{const.}$). Мы должны интегрировать уравнение (9.60), в котором правая часть постоянная, при граничном условии (9.61).

Предполагая возможность разложения

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{2a} \tag{9.103}$$

в интервале $-a \leqslant x \leqslant a$, мы легко найдём, что

$$A_n=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n=1, 3, 5, 7, \ldots \tag{9.104}$$

Ввиду симметрии относительно оси y мы можем принять

$$w_0=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} f_n(y)\cos\frac{n\pi x}{2a}, \tag{9.105}$$

где $f_n(y)$ подлежит определению; вносим (9.105) в уравнение (9.60), что вследствие (9.103) даёт:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^2 f_n}{dy^2}-\frac{n^2\pi^2}{4a^2}f_n\right]\cos\frac{n\pi x}{2a}=-\frac{q}{T}\cdot\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{2a},$$

где $n=1, 3, 5, 7, \ldots$ Отсюда получим:

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 f_n(y)=-\frac{4q\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi T}. \tag{9.106}$$

Общий интеграл этого уравнения есть:

$$f_n(y)=C_1\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{2a}+C_2\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{2a}+C_3, \tag{9.107}$$

где

$$C_3=\frac{16qa^2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi^3 n^3 T}, \tag{9.108}$$

и введены обозначения sh и ch для гиперболических синуса и косинуса.

Граничное условие (9.61) будет выбором w_0 по формуле (9.105) само собою удовлетворено для обеих сторон прямоугольника

$$x = \pm a.$$

Остаётся удовлетворить условию (9.61) для двух других сторон

$$y = \pm b.$$

Но вследствие симметрии около оси Ox мы должны принять, что w_0 есть чётная функция относительно y, откуда имеем:

$$C_1 = 0. \tag{9.109}$$

Тогда получим:

$$f_n(y) = C_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + C_3 = 0$$

для $y = \pm b$. Это даёт:

$$C_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + C_3 = 0,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{C_3}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}. \tag{9.110}$$

Из (9.110), (9.109), (9.107) и (9.108) получим:

$$f_n(y) = \frac{16qa^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3 T}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}\right), \tag{9.111}$$

причём

$$n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

Внося (9.111) в (9.105), мы получим:

$$w_0 = \frac{16qa^2}{\pi^3 T} \sum_{n=1,3,5,7,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}\right] \cos \frac{n\pi x}{2a}, \tag{9.112}$$

причём контурное условие (9.61) и условия симметрии для прогиба мембраны удовлетворены. Используя формулу (9.62), мы получим из (9.112) следующее выражение для функции напряжений при кручении:

$$F(x, y) = \frac{32\mu\tau a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,7,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}\right] \cos \frac{n\pi x}{2a}. \tag{9.113}$$

При $b > a$ мы найдём, что наибольшее касательное напряжение будет на середине длинных сторон $x = \pm a$. Легко получить для

$$y = 0, \quad x = \pm a$$

следующее выражение для $T_{\max}$:

$$T_{\max} = k \cdot 2\mu\tau a, \tag{9.114}$$

где обозначено:

$$k = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, \ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\right]. \tag{9.115}$$

Используя известную формулу

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

мы приведём (9.115) к виду:

$$k = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}. \tag{9.116}$$

В формуле (9.114) k есть числовой коэффициент, зависящий от отношения сторон $\frac{b}{a}$, для которого по формуле (9.116) легко вычислить таблицу.

Для вычисления крутящего момента мы вносим (9.113) в формулу (9.47), что даёт:

$$M = 2\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} F\,dx\,dy = k_1\mu\tau(2a)^3(2b), \tag{9.117}$$

где k_1 есть числовой коэффициент, зависящий от отношения сторон $\frac{b}{a}$ и вычисляемый по формуле

$$k_1 = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\left(\frac{a}{b}\right) \sum_{n=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th}\frac{n\pi b}{2a}\right]. \tag{9.118}$$

Для значений k_1 составлена таблица.

Внося значение $\mu\tau$ из (9.117) в (9.114), мы получим:

$$T_{\max} = \frac{M}{k_2(2a)^2(2b)}, \tag{9.119}$$

где введён числовой коэффициент

$$k_2 = \frac{k_1}{k}, \tag{9.120}$$

для которого также составлена таблица.

Значения k, k_1, k_2 даны в нижеприводимой таблице в зависимости от отношения сторон $\frac{b}{a}$.

Таблица коэффициентов при кручении прямоугольного стержня.

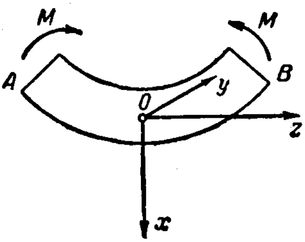
$b:a$	k	k_1	k_2	$b:a$	k	k_1	k_2
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	∞	1,000	0,333	0,333

ГЛАВА X.

ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ.

§ 103. Чистый изгиб стержня.

Будем рассматривать исключительно призматический стержень, ось которого есть геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений. Примем эту ось за ось z, а оси x, y направим по главным осям инерции через центр тяжести сечения (фиг. 28). Ось x направим вниз, а ось y проведём так, чтобы система $Oxyz$ была правого вращения. Пусть по концам A и B стержня действуют две равные по величине, но противоположно направленные пары, производящие так называемый *чистый* изгиб стержня в *главной плоскости* Oxz.



Фиг. 28.

Задача эта была решена ещё Кулоном при помощи простого метода, излагаемого в теории сопротивления материалов. Если обозначить через M момент каждой из пар, то напряжённое состояние, полученное Кулоном, будет следующее:

$$X_x = Y_y = X_y = X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = \frac{Ex}{R}, \tag{10.1}$$

где E — модуль упругости Юнга, а R — постоянная величина, представляющая собой радиус той окружности, в которую обратится прямолинейная ось стержня после изгиба, т. е. это есть радиус кривизны упругой линии.

Следовательно, в решении Кулона существует только один компонент напряжённого состояния, представляющий нормальное напряжение на элементарных площадках, перпендикулярных к оси стержня. Это нормальное напряжение пропорционально расстоянию от оси стержня.

Внесём (10.1) в уравнения упругого равновесия:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X=0,\\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=0,\\ \frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=0.\end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Это даёт:

$$X=Y=Z=0, \tag{10.3}$$

а следовательно, напряжённое состояние (10.1) имеет место только при отсутствии массовых сил. Сверх того, необходимо проверить, будут ли удовлетворены шесть тождественных соотношений Бельтрами-Сен-Венана (4.51). В этом легко убеждаемся простой подстановкой. Таким образом, напряжённое состояние (10.1) удовлетворяет условиям совместности и уравнениям упругого равновесия.

Выясним теперь граничные условия на боковой поверхности. Имеем, как известно:

$$\left.\begin{aligned}X_\nu=X_x l+X_y m+X_z n,\\ Y_\nu=X_y l+Y_y m+Y_z n,\\ Z_\nu=X_z l+Y_z m+Z_z n.\end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Сюда надо внести (10.1) и принять во внимание, что нормаль к боковой поверхности стержня образует прямой угол с осью z, а следовательно,

$$n=0. \tag{10.5}$$

Поэтому получим:

$$X_\nu=Y_\nu=Z_\nu=0, \tag{10.6}$$

т. е. боковая поверхность стержня должна быть свободна от поверхностных сил. Концевые сечения стержня параллельны плоскости Oxy и, следовательно, нормаль к ним параллельна оси z, откуда:

$$l=m=0,\quad n=\pm 1. \tag{10.7}$$

Внося (10.7) и (10.1) в (10.4), мы найдём:

$$X_\nu=Y_\nu=0, \tag{10.8}$$

$$Z_\nu=\pm\frac{Ex}{R}. \tag{10.9}$$

Следовательно, на обоих концевых сечениях стержня должны быть приложены *только нормальные усилия, распределённые по закону, данному формулой* (10.9).

Эти нормальные усилия будут растягивающими в области сечения ниже плоскости Oyz и сжимающими в области выше этой плоскости. Они сводятся поэтому к равным и параллельным оси стержня силам, одной растягивающей и одной сжимающей, и образуют пару сил, момент которой M будет параллелен оси y. Из этого следует, что равнодействующая всех нормальных усилий в плоскости сечения есть нуль.

Действительно, имеем (двойной интеграл берётся по всему сечению):

$$\iint Z_z\,dx\,dy=\frac{E}{R}\iint x\,dx\,dy=0 \tag{10.10}$$

(так как начало в центре тяжести).

Вычислим теперь момент:

$$M=\iint Z_z\cdot x\,dx\,dy=\frac{EJ}{R}, \tag{10.11}$$

где обозначено:

$$J=\iint x^2\,dx\,dy. \tag{10.12}$$

Очевидно, J есть осевой момент инерции поперечного сечения около оси y.

Таким образом, мы установили, что решение (10.1) справедливо только, если поверхностные силы, действующие на обоих концевых сечениях стержня, распределены по специальному закону (10.9), а массовые силы отсутствуют. Но по принципу Сен-Венана мы можем приложить решение (10.1) и в том случае, если на обоих концах стержня A и B приложены любые пары сил, которые составлены из усилий, распределённых по любому закону, но равнодействующий момент их всегда имеет одну и ту же величину M, данную формулой (10.11).

Необходимо, чтобы наибольший размер поперечного сечения стержня был мал по сравнению с его длиной AB. В небольших областях стержня вблизи A и B (порядка, примерно равного наибольшему размеру поперечного сечения) напряжённое состояние будет уклоняться от данного (10.1), но эти местные уклонения напряжения быстро уменьшаются по мере отхода от A и B к центру стержня.

Определим теперь упругие перемещения. Для этого в известные формулы

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{1}{E}[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)],\\
e_{yy}&=\frac{1}{E}[Y_y-\sigma(X_x+Z_z)],\\
e_{zz}&=\frac{1}{E}[Z_z-\sigma(X_x+Y_y)],\\
e_{xy}&=\frac{1}{\mu}X_y,\quad e_{xz}=\frac{1}{\mu}X_z,\quad e_{yz}=\frac{1}{\mu}Y_z
\end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

внесём (10.1), что даёт:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}=e_{yy}&=-\frac{\sigma}{E}Z_z=-\sigma\frac{x}{R}, \\ e_{zz}&=\frac{1}{E}Z_z=\frac{x}{R}, \\ e_{xy}=e_{xz}&=e_{yz}=0. \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

На основании известных формул Коши, связывающих деформации и перемещения, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\sigma x}{R}, \tag{10.15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{x}{R}, \tag{10.16}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}&=0, \\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

Интегрируя (10.16), имеем:

$$w=\frac{zx}{R}+w_0(x, y), \tag{10.18}$$

где $w_0(x, y)$ есть произвольная функция от x, y. Внося (10.18) в (10.17), мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{z}{R}-\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{z^2}{2R}-z\frac{\partial w_0}{\partial x}+u_0(x, y), \\ v&=-z\frac{\partial w_0}{\partial y}+v_0(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

где $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ суть две произвольные функции от x, y.

Подставляя (10.19) в (10.15), мы получим:

$$\begin{aligned} -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial u_0}{\partial x}&=-\frac{\sigma x}{R}, \\ -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{\partial v_0}{\partial y}&=-\frac{\sigma x}{R}. \end{aligned}$$

Так как эти уравнения должны быть удовлетворены при всяком z, то мы должны иметь:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=0, \tag{10.20}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{\sigma x}{R}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y}=-\frac{\sigma x}{R}. \tag{10.21}$$

Интегрируя (10.21), имеем:

$$\left.\begin{aligned} u_0&=-\frac{\sigma x^2}{2R}+f_1(y), \\ v_0&=-\frac{\sigma xy}{R}+f_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ суть произвольные функции. Внося (10.19) и (10.22) в первое из уравнений (10.17), мы найдём:

$$2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}-\frac{df_1}{dy}-\frac{df_2}{dx}+\frac{\sigma y}{R}=0.$$

Это уравнение должно быть удовлетворено, каково бы ни было z, а следовательно, мы получим:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}=0. \tag{10.23}$$

$$\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dx}-\frac{\sigma y}{R}=0. \tag{10.24}$$

Для определения $w_0(x, y)$ мы имеем три уравнения (10.20) и (10.23), из которых следует, что w_0 есть линейная функция x, y:

$$w_0=Ax+By+C, \tag{10.25}$$

где A, B, C — постоянные.

Из (10.24) имеем:

$$\frac{df_1(y)}{dy}-\frac{\sigma y}{R}=-\frac{df_2(x)}{dx}=\text{const.}=D,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\left.\begin{aligned} f_2(x)&=-Dx+D_1, \\ f_1(y)&=\frac{\sigma y^2}{2R}+Dy+D_2, \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

где D, D_1, D_2 суть постоянные.

Таким образом мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{z^2}{2R}-\sigma\frac{x^2-y^2}{2R}-Az+Dy+D_2, \\ v&=-\frac{\sigma xy}{R}-Bz-Dx+D_1, \\ w&=\frac{zx}{R}+Ax+By+C. \end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

В эти формулы входят шесть произвольных постоянных

$$A,\ B,\ C,\ D,\ D_1,\ D_2.$$

Примем начало координат в середине длины стержня; тогда из условий симметрии относительно среднего сечения имеем:

$$1)\ w=0 \text{ для } z=0, \tag{10.28}$$

что даёт:

$$A=B=C=0 \tag{10.29}$$

$$2)\ u=v=w=0 \text{ для } x=y=z=0, \tag{10.30}$$

что даёт:

$$D_1=D_2=0. \tag{10.31}$$

Линейный элемент, который до деформации совпадал в начале координат с осью Oy, будет сохранять своё первоначальное направление. Это выражается аналитически условием:

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ для } x=y=z=0, \tag{10.32}$$

что даёт:

$$D=0. \tag{10.33}$$

Таким образом, получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{1}{2R}[z^2+\sigma(x^2-y^2)],\\ v&=-\frac{\sigma xy}{R},\\ w&=\frac{zx}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{10.34}$$

Очевидно, что упругая линия будет отсюда получена, если положим:

$$x=y=0,$$

тогда имеем:

$$u=-\frac{z^2}{2R},\quad v=w=0. \tag{10.35}$$

Это совпадает с тем, что даёт теория сопротивления материалов.

Взяв сечение

$$z=k, \tag{10.36}$$

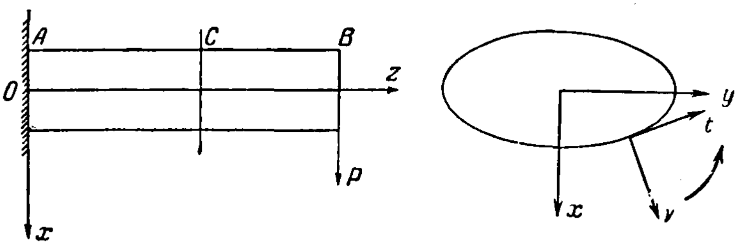
посмотрим, во что оно обратится при изгибе. Очевидно, что все точки, бывшие ранее в плоскости (10.36), после изгиба будут находиться на поверхности

$$z=k+w=k+\frac{kx}{R}=k\left(1+\frac{x}{R}\right),$$

которая есть плоскость, т. е. при чистом изгибе поперечные сечения остаются плоскими.

§ 104. Проблема Сен-Венана об изгибе консоли.

Начало координат выберем (фиг. 29) в центре тяжести закреплённого конца A стержня. Оси x, y направим по главным осям сечения, причём ось x направим вниз, ось z направим вправо по оси стержня, а ось y направим так, чтобы система xyz была правая. Пусть длина стержня AB есть l. Примем далее, что силы, действующие на свободном конце B, статически эквивалентны одной равнодействующей P, направ-



Фиг. 29.

ленной по оси x; предположим также, что на боковой поверхности стержня нет поверхностных сил и что массовые силы отсутствуют.

Сен-Венан показал, что в этом случае напряжённое состояние можно представить в виде:

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \tag{10.37}$$

$$Z_z = -\frac{P(l-z)x}{J}, \tag{10.38}$$

где J есть осевой момент инерции поперечного сечения стержня, данный формулой (10.12). Остальные два касательных компонента X_z, Y_z должны быть определены.

Внесём (10.37) и (10.38) в уравнения упругого равновесия (10.2), в которых мы должны положить

$$X = Y = Z = 0. \tag{10.39}$$

Это даёт:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \tag{10.40}$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Px}{J} = 0. \tag{10.41}$$

Эти уравнения служат для определения X_z и Y_z. На боковой поверхности стержня мы имеем, вследствие (10.4) и (10.5):

$$X_z l + Y_z m = 0, \tag{10.42}$$

где

$$l = \frac{dy}{ds}, \quad m = -\frac{dx}{ds}. \tag{10.43}$$

Условие (10.42) есть то статическое условие, которому должны удовлетворять неизвестные ещё X_z и Y_z. Но из (10.40) следует, что X_z и Y_z не зависят от координаты z, а суть функции только от x и y, которые удовлетворяют уравнению (10.41). Сверх того, так как нам задано напряжённое состояние, мы должны позаботиться, чтобы были удовлетворены шесть тождественных соотношений Сен-Венана.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z},\\
&\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z\,\partial x},\\
&\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y},\\
&2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
&2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
&2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{10.44}$$

Сначала внесём (10.37) и (10.38) в (10.13), что даёт:

$$\left.\begin{aligned}
&e_{xx}=e_{yy}=-\sigma e_{zz},\\
&e_{zz}=-\frac{P(l-z)\,x}{EJ},\\
&e_{xy}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{10.45}$$

Принимая во внимание (10.40), мы получим также соотношения:

$$\frac{\partial e_{zx}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial e_{yz}}{\partial z}=0.\tag{10.46}$$

Внося (10.45) в (10.44), мы увидим, что первое, второе, третье и шестое соотношения этой системы будут сами собой удовлетворены.

Четвёртое и пятое соотношения системы (10.44) дадут:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right)=-\frac{2P\sigma}{EJ}.
\end{aligned}\right\}\tag{10.47}$$

Интегрируя эту систему, мы получим:

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}=2\tau-\frac{2P\sigma y}{EJ},\tag{10.48}$$

где τ — произвольная постоянная. Мы удовлетворим этому уравнению, положив:

$$e_{yz}=\tau x+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}, \quad e_{zx}=-\tau y+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\sigma P}{EJ}y^2, \tag{10.49}$$

где φ_0 есть произвольная функция x, y.

Если в уравнение (10.41) внести

$$X_z=\mu e_{zx}, \quad Y_z=\mu e_{yz}, \tag{10.50}$$

то получим:

$$\frac{\partial e_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zy}}{\partial y}+\frac{Px}{\mu J}=0.$$

Внесём в это последние уравнения (10.49), что даёт:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}+\frac{2Px(1+\sigma)}{EJ}=0, \tag{10.51}$$

причём мы использовали соотношение:

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Если вместо X_z и Y_z внести их значения по формуле (10.50) в граничное условие (10.42), то получим:

$$le_{zx}+me_{zy}=0.$$

Подставляя сюда (10.49), мы получим:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial \nu}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}m=\tau(ly-mx)-\frac{\sigma Ply^2}{EJ}. \tag{10.52}$$

Следовательно, функция $\varphi_0(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию (10.52) и дифференциальному уравнению (10.51).

С целью упрощения Сен-Венан ввёл новую функцию, — так называемую *функцию изгиба* Сен-Венана, — $\chi(x, y)$ по уравнению:

$$\varphi_0=\tau\varphi-\frac{P}{EJ}\left[\chi(x, y)+\frac{\sigma x^3}{6}+\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)xy^2\right], \tag{10.53}$$

где $\varphi(x, y)$ есть известная функция кручения Сен-Венана, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{10.54}$$

внутри контура поперечного сечения и граничному условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}m=ly-mx \tag{10.55}$$

[см. § 95, формула (9.29)].

Подставив (10.53) в уравнение (10.51), мы увидим, что, вследствие условия (10.54), функция $\chi(x, y)$ должна внутри поперечного сечения удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=0. \tag{10.56}$$

Внося же (10.53) в (10.52) и принимая во внимание (10.55), мы получим для определения функции $\chi(x, y)$ новое граничное условие:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\nu}=\frac{\partial\chi}{\partial x}l+\frac{\partial\chi}{\partial y}m=-\left[\frac{\sigma x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]l-(2+\sigma)xym. \tag{10.57}$$

Если внести (10.49) в (10.50), то мы получим:

$$X_z=\mu\left(-\tau y+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{P\sigma y^2}{EJ}\right),$$

$$Y_z=\mu\left(\tau x+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right).$$

Подставляя сюда φ_0 из (10.53), мы получим:

$$X_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{P\mu}{EJ}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{\sigma x^2}{2}+\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)y^2\right]+$$

$$+\frac{P\mu\sigma y^2}{EJ}=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{P\mu}{EJ}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{\sigma x^2}{2}+\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)y^2\right],$$

$$Y_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-\frac{P\mu}{EJ}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}+xy(2+\sigma)\right].$$

Внося сюда соотношение:

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)},$$

придём окончательно к выражениям:

$$\left.\begin{aligned}X_z&=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\psi_1\right],\\ Y_z&=\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-\frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}+\psi_2\right],\end{aligned}\right\} \tag{10.58}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=\frac{1}{2}\sigma x^2+\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2,\\ \psi_2&=(2+\sigma)xy.\end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

Внося обозначения (10.59), мы приведём граничное условие (10.57) к более удобному виду:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\nu}+l\psi_1+m\psi_2=0. \tag{10.60}$$

Взяв момент около оси z всех касательных усилий, действующих на элемент поперечного сечения стержня, получим:

$$M = \iint [xY_z - yX_z]\, dx\, dy. \tag{10.61}$$

Внося сюда (10.58), мы найдём:

$$M = M' + M'', \tag{10.62}$$

где обозначено:

$$M' = \mu\tau \iint \left[x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] dx\, dy, \tag{10.63}$$

$$M'' = -\frac{P}{2(1+\sigma)J}\iint \left[y\frac{\partial\chi}{\partial x} - x\frac{\partial\chi}{\partial y} + x\psi_1 - y\psi_2\right] dx\, dy. \tag{10.64}$$

§ 105. Определение системы внешних сил, действующих на стержень, необходимых для существования решения Сен-Венана.

На концевом сечении бруса косинусы углов внешней нормали, очевидно, будут:

$$l = m = 0, \quad n = 1. \tag{10.65}$$

Внося (10.65) в (10.4), мы получим:

$$X_\nu = X_z, \quad Y_\nu = Y_z, \quad Z_\nu = Z_z. \tag{10.66}$$

Если в правые части этих формул внести (10.38) и (10.58), то мы получим значения компонентов внешних поверхностных сил, необходимых, для того чтобы решение Сен-Венана имело место в действительности. Эти силы должны быть приложены в концевом сечении B.

Вследствие принципа Сен-Венана, за исключением небольшой области вблизи конца B, можно систему поверхностных сил (10.66) заменить другой системой, статически ей эквивалентной и *сводящейся к одной силе P, приложенной в центре тяжести концевого сечения и направленной параллельно оси x.* Очевидно, в этом случае имеем следующие условия для *равнодействующей всех усилий $X_z\, dx\, dy$, $Y_z\, dx\, dy$,* приложенных к элементам $dx\, dy$ концевого сечения B:

$$\left.\begin{aligned} \iint X_z\, dx\, dy &= P, \\ \iint Y_z\, dx\, dy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.67}$$

Но на основании уравнения (10.41) имеем:

$$\iint X_z dx\, dy = \iint \left[X_z + x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Px}{J}\right)\right] dx\, dy.$$

Интеграция по частям даёт:

$$\iint x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint x\left(lX_z+mY_z\right)ds-\iint X_z\,dx\,dy.$$

Поэтому имеем:

$$\iint X_z\,dx\,dy=\oint x\left(X_z l+Y_z m\right)ds+\frac{P}{J}\iint x^2\,dx\,dy.$$

Вследствие граничного условия (10.42) криволинейный интеграл исчезает, и поэтому получим вследствие (10.12):

$$\iint X_z\,dx\,dy=\frac{P}{J}\cdot J=P,$$

чем оправдано первое из соотношений (10.67).

Также вследствие (10.41) имеем:

$$\iint Y_z\,dx\,dy=\iint\left[Y_z+y\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{Px}{J}\right)\right]dx\,dy.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\iint y\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint y\left(lX_z+mY_z\right)ds-\iint Y_z\,dx\,dy.$$

Поэтому имеем:

$$\iint Y_z\,dx\,dy=\oint y\left(lX_z+mY_z\right)ds+\frac{P}{J}\iint xy\,dx\,dy,$$

что вследствие граничного условия (10.42) даёт:

$$\iint Y_z\,dx\,dy=\frac{P}{J}\iint xy\,dx\,dy=0,$$

так как оси x, y суть главные оси поперечного сечения стержня, и следовательно, центробежный момент относительно их равен нулю.

Эти соотношения для касательных сил, приложенных к элементам поперечного сечения, справедливы, очевидно, и в любом поперечном сечении стержня. Для нормальных сил $Z_z\,dx\,dy$, приложенных к элементам любого поперечного сечения, мы имеем условие:

$$\iint Z_z dx\,dy=0. \tag{10.68}$$

Действительно, внося сюда Z_z из (10.38), мы получим:

$$\iint Z_z dx\,dy=-\frac{P(l-z)}{J}\iint x\,dx\,dy=0,$$

вследствие того, что центр тяжести лежит на оси z и, следовательно,

$$\iint x dx\, dy = 0.$$

Составим теперь суммы моментов всех касательных и нормальных сил

$$X_z dx\, dy, \quad Y_z dx\, dy, \quad Z_z dx\, dy,$$

приложенных к элементам любого поперечного сечения, находящегося на расстоянии z от закреплённого конца A стержня.

Оси, относительно которых возьмём моменты, проведём в плоскости данного сечения через его центр тяжести параллельно осям координат; тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} M_{x'} &= \iint y Z_z\, dx\, dy, \\ M_{y'} &= -\iint x Z_z\, dx\, dy, \\ M_z &= \iint (x Y_z - y X_z)\, dx\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{10.69}$$

Внося Z_z из (10.38), мы получим, используя известное соотношение

$$\iint xy\, dx\, dy = 0$$

и формулу (10.12), следующие формулы:

$$M_{x'} = -\frac{P(l-z)}{J} \iint xy\, dx\, dy = 0, \tag{10.70}$$

$$M_{y'} = \frac{P(l-z)}{J} \iint x^2\, dx\, dy = P(l-z). \tag{10.71}$$

Вследствие (10.61) и (10.62), мы имеем:

$$M_z = M = M' + M''. \tag{10.72}$$

Если мы потребуем, чтобы отрезок стержня, заключённый между свободным концом B и данным сечением C (фиг. 29), находился в равновесии, то должны быть удовлетворены следующие шесть условий:

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= -\iint X_z\, dx\, dy + P = 0, \\ \sum Y &= -\iint Y_z\, dx\, dy = 0, \\ \sum Z &= -\iint Z_z\, dx\, dy = 0; \end{aligned}\right\} \tag{10.73}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum (Zy - Yz) = -M_{x'} = 0, \\ &\sum (Xz - Zx) = -M_{y'} + P(l-z) = 0, \\ &\sum (Yx - Xy) = -M_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

Но условия (10.73) будут удовлетворены, вследствие (10.67) и (10.68). Первые два условия (10.74) будут удовлетворены вследствие (10.70) и (10.71). Третье из условий (10.74) даёт вследствие (10.72):

$$M=0. \tag{10.75}$$

Это — очень важное условие, так как оно позволяет, принимая во внимание (10.62), вычислить произвольное постоянное τ, которое до сих пор оставалось неопределённым.

Таким образом, решена задача об определении напряжённого состояния при изгибе консоли поперечной силой, приложенной на свободном конце консоли в одной из главных плоскостей стержня. Решение это может рассматриваться как точное, поскольку имеет место приложение принципа Сен-Венана. Главная трудность решения задачи об изгибе состоит в определении обоих касательных напряжений X_z и Y_z, возникающих при изгибе в поперечных сечениях стержня. Для этого необходимо интегрирование двух уравнений Лапласа (10.54) и (10.56) при граничных условиях (10.55) и (10.57). Задача эта очень трудна и может быть решена в некоторых частных случаях, имеющих практические приложения.

§ 106. Формулы для перемещений при изгибе.

Весьма замечательно, что формулы для компонентов упругих перемещений могут быть получены в общем виде. Действительно, из (10.45) имеем:

$$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{P(l-z)x}{EJ},$$

интеграция по z даёт нам:

$$w=-\frac{Plxz}{EJ}+\frac{Pxz^2}{2EJ}+\varphi'(x, y), \tag{10.76}$$

где $\varphi'(x, y)$ есть произвольная функция от x, y. Также из (10.45) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx}=-\sigma e_{zz}=\frac{\sigma Plx}{EJ}-\frac{\sigma Pzx}{EJ}. \tag{10.77}$$

Далее, вторая из формул (10.49) даёт:

$$e_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=-\tau y+\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}+\frac{P\sigma}{EJ}y^2;$$

внося сюда производную

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{Plz}{EJ}+\frac{Pz^2}{2EJ}+\frac{\partial \varphi'}{\partial x},$$

вычисленную по формуле (10.76), мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{Plz}{EJ}-\frac{Pz^2}{2EJ}-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}-\tau y+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{P\sigma}{EJ}y^2. \tag{10.78}$$

Принимая во внимание условие

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

мы имеем из (10.77) и (10.78):

$$-\frac{P\sigma x}{EJ}=-\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2},$$

что даёт уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi_0-\varphi')+\frac{P\sigma x}{EJ}=0. \tag{10.79}$$

Далее, мы имеем из (10.45):

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy}=-\sigma e_{zz}=\frac{\sigma Plx}{EJ}-\frac{\sigma Pzx}{EJ}. \tag{10.80}$$

Но по первой из формул (10.49) имеем:

$$e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\tau x+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y};$$

внося сюда производную

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

вычисленную по формуле (10.76), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\tau x+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-\frac{\partial\varphi'}{\partial y}. \tag{10.81}$$

Принимая во внимание условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

мы имеем из (10.80) и (10.81)

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}=-\frac{P\sigma x}{EJ}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varphi_0-\varphi')+\frac{P\sigma x}{EJ}=0. \tag{10.82}$$

Из последнего уравнения системы (10.45) мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Взяв производную по z, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.$$

Внося сюда $\frac{\partial u}{\partial z}$ из (10.78) и $\frac{\partial v}{\partial z}$ из (10.81), мы получим:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y\,\partial x}-\tau+\frac{2P\sigma y}{EJ}+\tau+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y\,\partial x}=0,$$

что даёт по приведении

$$\frac{\partial^2(\varphi_0-\varphi')}{\partial x\,\partial y}+\frac{P\sigma y}{EJ}=0. \tag{10.83}$$

Таким образом, для определения разности $\varphi_0-\varphi'$ мы имеем три уравнения: (10.79), (10.82) и (10.83).

Интегрируя (10.79) и (10.82), имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_0-\varphi')}{\partial x}&=-\frac{P\sigma x^2}{2EJ}+f_1(y),\\ \frac{\partial(\varphi_0-\varphi')}{\partial y}&=-\frac{P\sigma xy}{EJ}+f_2(x),\end{aligned}\right\} \tag{10.84}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции. Внося (10.84) в (10.83), мы получим:

$$-\frac{P\sigma y}{EJ}=\frac{df_1}{dy}=-\frac{P\sigma y}{EJ}+\frac{df_2}{dx}. \tag{10.85}$$

Отсюда имеем:

$$\frac{df_2}{dx}=0,\quad \frac{df_1}{dy}=-\frac{P\sigma y}{EJ}.$$

Интегрируя, получим:

$$\left.\begin{aligned}f_2&=-\alpha,\\ f_1&=\beta-\frac{P\sigma y^2}{2EJ},\end{aligned}\right\} \tag{10.86}$$

где α, β — произвольные постоянные.

Внося (10.86) в (10.84) и интегрируя, имеем:

$$\varphi_0-\varphi'=-\frac{P\sigma x^3}{6EJ}-\frac{P\sigma xy^2}{2EJ}+\beta x-\alpha y-\gamma', \tag{10.87}$$

где γ' — новая произвольная постоянная. Из (10.87) получим:

$$\varphi'=\varphi_0+\frac{P\sigma}{EJ}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{xy^2}{2}\right)-\beta x+\alpha y+\gamma'. \tag{10.88}$$

Внося сюда φ_0 из (10.53), мы получим:

$$\varphi'=\tau\varphi-\frac{P}{EJ}(\chi+xy^2)-\beta x+\alpha y+\gamma'. \tag{10.89}$$

Формулы (10.76) и (10.89) определяют величину смещения w:

$$w=\tau\varphi-\frac{P}{EJ}\chi-\frac{P}{EJ}\left[x\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)+xy^2\right]-\beta x+\alpha y+\gamma'. \tag{10.90}$$

Это — важная формула при определении упругих смещений. Внося теперь φ' из (10.88) в формулы (10.78) и (10.81), мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau y + \frac{P}{EJ}\left[lz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{\sigma}{2}(x^2 - y^2)\right] + \beta, \tag{10.91}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \tau x - \frac{P\sigma}{EJ}xy - \alpha. \tag{10.92}$$

Из (10.77) и (10.91) мы получим, интегрируя:

$$u = -\tau yz + \frac{P}{EJ}\left[\frac{l}{2}(z^2 + \sigma x^2) - \frac{\sigma z}{2}(x^2 - y^2) - \frac{z^3}{6}\right] + \beta z + F_1(y), \tag{10.93}$$

где $F_1(y)$ есть произвольная функция.

Также из (10.80) и (10.92) получим, интегрируя:

$$v = \tau zx + \frac{P\sigma}{EJ}(l - z)xy - \alpha z + F_2(x), \tag{10.94}$$

где $F_2(x)$ есть произвольная функция. Внося (10.93) и (10.94) в условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

мы получим:

$$\frac{dF_1}{dy} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{P\sigma l y}{EJ} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{dF_2}{dx} = \text{const.} = \gamma,$$

$$\frac{dF_1}{dy} + \gamma + \frac{P\sigma l y}{EJ} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \gamma x + \beta', \\ F_1 &= -\frac{P\sigma l y^2}{2EJ} - \gamma y + \alpha', \end{aligned}\right\} \tag{10.95}$$

где α', β' — произвольные постоянные.

Внося (10.95) в (10.93) и (10.94), мы получим окончательные формулы для смещений:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + \frac{P}{EJ}\left[\frac{\sigma}{2}(l - z)(x^2 - y^2) + \frac{l}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3\right] - \\ &\qquad - \gamma y + \beta z + \alpha', \\ v &= \tau zx + \frac{P\sigma}{EJ}(l - z)xy + \gamma x - \alpha z + \beta', \\ w &= \tau\varphi - \frac{P}{EJ}\chi - \frac{P}{EJ}\left[x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + xy^2\right] - \\ &\qquad - \beta x + \alpha y + \gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{10.96}$$

Эти замечательные формулы даны Сен-Венаном.

Очевидно, что выражения:

$$\alpha' + \beta z - \gamma y, \quad \beta' + \gamma x - \alpha z, \quad \gamma' + \alpha y - \beta x$$

представляют смещения, которые могут иметь место в абсолютно твёрдом теле при элементарном вращении, компоненты которого суть α, β, γ. Шесть произвольных постоянных α, β, γ, α', β', γ' определяются из условий закрепления конца A консоли.

Примем, что точка O закреплена; тогда имеем условие:

$$u = v = w = 0 \text{ для } x = y = z = 0. \tag{10.97}$$

Если принять, что обе функции $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ выбраны так, что они равны нулю при $x = y = 0$, то имеем из (10.96):

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0. \tag{10.98}$$

Далее, примем, что линейный элемент, исходящий из начала координат и первоначально совпадающий с осью y или z, будет совпадать с ней и после деформации. Это равносильно требованию:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ для } x = y = z = 0. \tag{10.99}$$

Это условие даёт:

$$\alpha = 0, \ \gamma = 0. \tag{10.100}$$

Как третье условие примем:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ для } x = y = z = 0; \tag{10.101}$$

это даёт:

$$\beta = 0. \tag{10.102}$$

Таким образом, будут определены все шесть произвольных постоянных интеграций. Но возможны и другие способы закрепления конца A.

Для точек, лежащих на оси стержня, имеем:

$$x = y = 0;$$

тогда формулы (10.96) дают:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{EJ}\left[\frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3\right], \\ v &= 0, \\ w &= \tau\varphi - \frac{P}{EJ}\chi. \end{aligned}\right\} \tag{10.103}$$

Первое из этих уравнений даёт общеизвестное уравнение упругой линии. Из него имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{P(l-z)}{EJ}.$$

Вносся сюда (10.71), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{M_y}{EJ}. \tag{10.104}$$

Здесь M_y, есть так называемый *изгибающий момент*, а $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ есть так называемая *кривизна упругой линии.*

§ 107. Метод функции напряжений при изгибе.

По предложению С. П. Тимошенко, для решения уравнения равновесия (10.41) примем:

$$\left.\begin{aligned} Y_z&=-\frac{\partial F}{\partial x},\\ X_z&=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{P}{2J}[x^2-f_1(y)], \end{aligned}\right\} \tag{10.105}$$

где $f_1(y)$ есть произвольная функция y.

Согласно (10.40), функция F зависит только от x, y. Сравнивая (10.105) с (10.58), мы найдём связь $F(x, y)$ с $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$. Действительно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{P}{2J}[x^2-f_1(y)]+\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{P}{2J(1+\sigma)}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}+\psi_1\right],\\ \frac{\partial F}{\partial x}&=-\mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)+\frac{P}{2J(1+\sigma)}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}+\psi_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.106}$$

Дифференцируя первое уравнение по y, второе по x и складывая, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\nabla^2 F=-\frac{P}{2J}f_1'(y)+\mu\tau\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-1\right)+$$
$$+\mu\tau\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-1\right)+\frac{P}{2J(1+\sigma)}\left[-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right].$$

Сюда надо внести функции ψ_1 и ψ_2, определённые по формулам (10.59):

$$-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=-2\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y+(2+\sigma)y=2\sigma y.$$

После приведения получим:

$$\nabla^2 F=-2\mu\tau+\frac{P\sigma y}{J(1+\sigma)}-\frac{P}{2J}f_1'(y); \tag{10.107}$$

это и есть уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений $F(x, y)$.

Составим теперь граничное условие для функции F. Для этого внесём в уравнение (10.42) формулы (10.43) и (10.105), что даёт:

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{P}{2J}\left[x^2-f_1(y)\right]\right\}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}=0.$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{P}{2J}\left[x^2-f_1(y)\right]\frac{dy}{ds}.$$

Таким образом, граничное условие для F имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{P}{2J}\left[x^2-f_1(y)\right]\frac{dy}{ds}. \qquad (10.108)$$

Формулы (10.105), (10.106) и (10.108) принадлежат С. П. Тимошенко и являются основой мембранной аналогии при изгибе. В частном случае, если правая часть (10.108) обращается в нуль, то получим:

$$\frac{\partial F}{\partial s}=0;$$

отсюда имеем на контуре:

$$F=\text{const}. \qquad (10.109)$$

В этом случае уравнение (10.107) можно рассматривать, как уравнение для прогиба равномерно натянутой мембраны, закреплённой по плоскому контуру, для которого правая часть (10.108) есть нуль. Нагрузка этой мембраны пропорциональна правой части уравнения (10.107).

§ 108. Изгиб стержня с эллиптическим поперечным сечением.

Пусть эллипс, которым ограничено поперечное сечение, дан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (10.110)$$

Выберем для рассматриваемого случая:

$$f_1(y)=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (10.111)$$

Внося (10.111) в (10.108), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{Pa^2}{2J}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right]\frac{dy}{ds}.$$

Правая часть, очевидно, обратится в нуль на контуре эллипса (10.110), следовательно, мы можем принять:

$$F=0. \tag{10.112}$$

Внеся значение f_1 из (10.111) в (10.107), получим:

$$\nabla^2 F=-2\mu\tau+\frac{Py}{J}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\right);$$

вследствие симметрии относительно обеих осей эллипса мы можем принять отсутствие скручивания, т. е. (см. ниже § 113)

$$\tau=0.$$

Окончательно получим уравнение

$$\nabla^2 F=\frac{Py}{J}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\right), \tag{10.113}$$

которое надо проинтегрировать при условии (10.112) на контуре (10.111). Поэтому примем:

$$F=Cy\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right), \tag{10.114}$$

где C — произвольная постоянная. Очевидно, что условие (10.112) будет удовлетворено.

Внося (10.114) в (10.113), получим:

$$C=\frac{Pa^2b^2}{2(3a^2+b^2)J}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sigma}{1+\sigma}\right). \tag{10.115}$$

Но раз найдена величина C, то задачу можно считать решённой.

Подставив (10.111) и (10.114) в (10.105), мы получим компоненты для касательных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_z&=\frac{2(1+\sigma)a^2+b^2}{2(1+\sigma)(3a^2+b^2)}\left[a^2-x^2-\frac{(1-2\sigma)a^2}{2(1+\sigma)a^2+b^2}y^2\right]\frac{P}{J},\\ Y_z&=-\frac{(1+\sigma)a^2+\sigma b^2}{(1+\sigma)(3a^2+b^2)}\left(\frac{Pxy}{J}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10.116}$$

Таким образом, мы получим точные выражения для так называемых напряжений сдвига при изгибе, точно вычислить которые невозможно в теории сопротивления материалов. В случае круглого сечения $a=b$, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_z&=\frac{(3+2\sigma)P}{8(1+\sigma)J}\left[a^2-x^2-\frac{1-2\sigma}{3+2\sigma}y^2\right],\\ Y_z&=-\frac{(1+2\sigma)Pxy}{4(1+\sigma)J}. \end{aligned}\right\} \tag{10.117}$$

На горизонтальном диаметре круга (сила P вертикальная) имеем:

$$x=0,$$

что даёт:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \frac{(3+2\sigma)P}{8(1+\sigma)J}\left(a^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma}y^2\right), \\ Y_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.118}$$

Наибольшее касательное напряжение получается в центре, т. е. при $x=y=0$, и равно

$$(X_z)^{\max} = \frac{(3+2\sigma)Pa^2}{8(1+\sigma)J}. \tag{10.119}$$

Касательное напряжение по концам горизонтального диаметра, т. е. при $x=0$, $y=\pm a$, имеет величину:

$$(X_z)_{x=0,\ y=\pm a} = \frac{(1+2\sigma)Pa^2}{4(1+\sigma)J}. \tag{10.120}$$

Внося сюда

$$J = \frac{\pi a^4}{4} = F_0\frac{a^2}{4}, \tag{10.121}$$

где F_0 — площадь поперечного сечения (т. е. круга), получим:

$$\left.\begin{aligned} (X_z)^{\max} &= \frac{(3+2\sigma)P}{2(1+\sigma)F_0}, \\ (X_z)^{\max}_{x=0,\ y=\pm a} &= \frac{(1+2\sigma)P}{(1+\sigma)F_0}. \end{aligned}\right\} \tag{10.122}$$

В теории сопротивления материалов из гипотезы равномерного распределения X_z по горизонтальному диаметру получаем:

$$X_z = \frac{4}{3}\frac{P}{F}. \tag{10.123}$$

Из формул (10.122) мы заключаем, что величины касательных напряжений зависят от значений коэффициента Пуассона σ. Для $\sigma=0{,}3$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} (X_z)^{\max} &= 1{,}38\frac{P}{F}, \\ (X_z)^{\max}_{x=0,\ y=\pm a} &= 1{,}23\frac{P}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{10.124}$$

Распределение напряжений X_z по горизонтальному диаметру будет приблизительно равномерным, и ошибка приближённого решения составит около 4%.

В случае эллиптического сечения имеем для горизонтальной оси ($x=0$):

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \frac{2(1+\sigma)a^2+b^2}{2(1+\sigma)(3a^2+b^2)}\left[1 - \frac{(1-2\sigma)y^2}{2(1+\sigma)a^2+b^2}\right]\frac{Pa^2}{J}, \\ Y_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.125}$$

Наибольшее напряжение будет в центре эллипса для $y=0$, что даёт:

$$(X_z)^{\max}=\frac{Pa^2}{2J}\left[1-\frac{a^2+\frac{\sigma}{1+\sigma}b^2}{3a^2+b^2}\right]. \qquad (10.126)$$

В случае сильно вытянутого эллипса отношение $\frac{b}{a}$ мало и, отбрасывая $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, мы получим, внося

$$J=\frac{\pi a^3 b}{4}, \qquad (10.127)$$

следующее значение наибольшего касательного напряжения:

$$(X_z)^{\max}=\frac{Pa^2}{3J}=\frac{4}{3}\frac{P}{F_0}. \qquad (10.128)$$

Здесь F_0 есть площадь поперечного сечения. Этот результат совпадает с (10.123).

В случае эллиптического сечения, для которого отношение $\frac{b}{a}$ велико, имеем в центре эллипса ($x=y=0$) из (10.126):

$$(X_z)^{\max}=\frac{2}{1+\sigma}\left(\frac{P}{F_0}\right). \qquad (10.129)$$

В точках на конце горизонтального диаметра $x=0$, $y=\pm b$ имеем из (10.125):

$$(X_z)^{\max}_{x=0,\,y=\pm b}=\frac{4\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{P}{F_0}\right). \qquad (10.130)$$

Следовательно, для $\sigma=0{,}3$ получим:

$$(X_z)^{\max}=1{,}54\frac{P}{F_0},\quad (X_z)^{\max}_{x=0,\,y=\pm b}=0{,}92\frac{P}{F_0}. \qquad (10.131)$$

Распределение напряжений сдвига по горизонтальному диаметру далеко от равномерного и приблизительно на 14% превосходит значение (10.123).

§ 109. Общий случай расположения изгибающей силы, нормальной к оси консоли.

Если изгибающая сила, нормальная к оси консоли, не лежит в одной из главных плоскостей стержня, но проходит через центр тяжести поперечного сечения, то мы разлагаем её на две слагающих: одну P, параллельную оси x, и другую P', параллельную оси y. Изгибы под действием каждой силы рассматриваем отдельно. Решение для случая силы P' получается аналогично случаю для силы P в следующей форме, данной Сен-Венаном:

1. Упругие перемещения:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + \frac{P'\sigma}{EJ'}(l-z)\,xy, \\ v &= \tau zx + \frac{P'}{EJ'}\left[\frac{\sigma}{2}(l-z)(y^2-x^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right], \\ w &= \tau\varphi - \frac{P'}{EJ'}\chi' - \frac{P'}{EJ'}\left[yx^2 + y\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (10.132)$$

2. Напряжённое состояние:

$$\begin{aligned} &X_x = Y_y = X_y = 0, \\ &Z_z = -\frac{P'(l-z)\,y}{J'}, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) - \frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial x} + \psi_1'\right], \\ Y_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - \frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial y} + \psi_2'\right], \end{aligned}\right\} \quad (10.133)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1' &= (2+\sigma)\,xy, \\ \psi_2' &= \frac{1}{2}\sigma y^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)x^2. \end{aligned}$$

Сверх того

$$J' = \iint y^2\,dx\,dy. \quad (10.134)$$

Функция изгиба $\chi'(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\chi' = 0 \quad (10.135)$$

и граничному условию:

$$\frac{\partial\chi'}{\partial\nu} + l\psi_1' + m\psi_2' = 0. \quad (10.136)$$

Отбросим смещения стержня, как абсолютно твёрдого тела, положив в формулах (10.96):

$$\alpha = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0.$$

Далее, примем для оси стержня

$$x = y = 0.$$

Тогда мы получим из формул (10.96) и (10.132) уравнение упругой линии в форме:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{EJ}\left(\frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right), \\ v &= \frac{P'}{EJ'}\left(\frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right). \end{aligned}\right\} \quad (10.137)$$

В дальнейшем введём текущие координаты $u=x$, $v=y$. Тогда уравнения (10.137) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{P}{EJ}\left(\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right),\\ y&=\frac{P'}{EJ'}\left(\frac{1}{2}lz^2-\frac{1}{6}z^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{10.138}$$

Отсюда следует, что упругая линия лежит в плоскости:

$$\frac{J}{P}x-\frac{J'}{P'}y=0. \tag{10.139}$$

Из формул (10.38) и (10.133) имеем:

$$Z_z=-\frac{P}{J}(l-z)x-\frac{P'}{J'}(l-z)y. \tag{10.140}$$

Так как нейтральная плоскость определяется из условия:

$$e_{zz}=0, \tag{10.141}$$

и в то же время имеем:

$$e_{zz}=\frac{1}{E}[Z_z-\sigma(X_x+Y_y)]=\frac{Z_z}{E},$$

то условие (10.141) даёт:

$$Z_z=0. \tag{10.142}$$

На основании (10.140) и (10.142) получим уравнение нейтральной плоскости в виде:

$$\frac{Px}{J}+\frac{P'y}{J'}=0. \tag{10.143}$$

Из (10.139) и (10.143) следует, что нейтральная плоскость и плоскость изгиба перпендикулярны.

Плоскость, в которой действует нагрузка, имеет уравнение:

$$\frac{x}{P}-\frac{y}{P'}=0. \tag{10.144}$$

Так как J и J' суть моменты инерции поперечного сечения относительно осей x и y, то уравнение эллипса инерции сечения имеет вид:

$$J'x^2+Jy^2=\text{const}. \tag{10.145}$$

Угловой коэффициент касательной к этому эллипсу имеет величину

$$k=\frac{dy}{dx}=-\frac{J'x}{Jy}.$$

Внося сюда из (10.144)

$$\frac{x}{y}=\frac{P}{P'},$$

мы получим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке пересечения с силовой линией (10.144):

$$k = -\frac{J'P}{JP'}. \qquad (10.146)$$

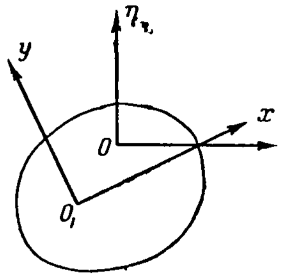
Сравнивая с этим угловой коэффициент

$$k' = \frac{dy}{dx} = -\frac{PJ'}{JP'}, \qquad (10.147)$$

определённый из (10.143), заключаем, что линии пересечения плоскости нагрузки и нейтральной плоскости с поперечным сечением совпадают с сопряжёнными диаметрами центрального эллипса инерции сечения. Это есть теорема Сен-Венана.

§ 110. Перенос осей координат.

В решении Сен-Венана, которое мы изложили, начало координат находится в центре тяжести поперечного сечения стержня, а оси координат совпадают с главными осями инерции.



Фиг. 30.

В дальнейшем систему координат, имеющую начало O в центре тяжести сечения (фиг. 30), а оси $O\xi$ и $O\eta$ направленными по главным осям инерции сечения, будем называть *сен-венановской системой координат.*

Введём новую систему координат O_1xy, начало которой O_1 есть произвольная точка в плоскости закреплённого сечения, и оси x, y направлены произвольно.

Пусть x_0 и y_0 — координаты центра тяжести O относительно системы координат O_1xy. Очевидно, связь между координатами x, y и сен-венановскими координатами ξ, η будет дана формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)\alpha_1 + (y - y_0)\beta_1, \\ \eta &= (x - x_0)\alpha_2 + (y - y_0)\beta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.148)$$

Обратно, из формул (10.148) мы можем выразить x и y через ξ и η в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \\ y &= y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta \end{aligned}\right\} \qquad (10.149)$$

Если θ есть угол, который ось $O\xi$ образует с осью O_1x, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=\cos\theta, & \alpha_2&=-\sin\theta, \\ \beta_1&=\sin\theta, & \beta_2&=\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10.150}$$

Пусть сила P направлена в положительном направлении оси $O\xi$, а сила P' направлена в положительном направлении оси $O\eta$.

Обозначим ещё

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{P}{J}\alpha_1+\frac{P'}{J'}\alpha_2, \\ B&=\frac{P}{J}\beta_1+\frac{P'}{J'}\beta_2. \end{aligned}\right\} \tag{10.151}$$

Уравнения упругого равновесия (10.2) при условии (10.3), т. е. при отсутствии массовых сил, имеют решение:

$$\left.\begin{aligned} &X_x=Y_y=X_y=0, \\ &Z_z=(z-l)[A(x-x_0)+B(y-y_0)], \end{aligned}\right\} \tag{10.152}$$

причём оба касательных напряжения X_z и Y_z определяются из уравнений

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z}=0, \tag{10.153}$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{10.153}$$

Тождества Сен-Венана-Бельтрами (глава IV) в отсутствии массовых сил имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &(1+\sigma)\nabla^2X_x+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0, \\ &(1+\sigma)\nabla^2Y_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0, \\ &(1+\sigma)\nabla^2Z_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0, \\ &(1+\sigma)\nabla^2X_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}=0, \\ &(1+\sigma)\nabla^2X_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial z}=0, \\ &(1+\sigma)\nabla^2Y_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial z}=0, \end{aligned}\right\} \tag{10.154}$$

где обозначено:

$$\theta=X_x+Y_y+Z_z.$$

По внесении в них (10.152), получим:

$$\nabla^2X_z=-\frac{A}{1+\sigma}, \quad \nabla^2Y_z=-\frac{B}{1+\sigma}; \tag{10.155}$$

причём вследствие первых двух уравнений (10.153) мы должны рассматривать X_z и Y_z, как функции только координат x, y. Решение уравнений (10.153) мы берём в форме:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{A}{2}[x^2 - 2x_0 x - f_1(y)], \\ Y_z &= -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{B}{2}[y^2 - 2y_0 y - f_2(x)], \end{aligned}\right\} \qquad (10.156)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ суть две произвольные функции. Введённая нами новая функция $F(x, y)$ есть функция напряжений при изгибе.

Внеся (10.156) в (10.155), мы получим:

$$\nabla^2 \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{A}{2}[2 - f_1''(y)] = -\frac{A}{1+\sigma},$$
$$-\nabla^2 \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{B}{2}[2 - f_2''(x)] = -\frac{B}{1+\sigma},$$

что можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F) = \frac{A\sigma}{1+\sigma} - \frac{A}{2} f_1''(y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) = -\frac{B\sigma}{1+\sigma} + \frac{B}{2} f_2''(x).$$

Умножив первое уравнение на dy, второе на dx, складываем и затем интегрируем, что даёт:

$$\nabla^2 F = A\left[\frac{\sigma}{1+\sigma} y - \frac{1}{2} f_1'(y)\right] - B\left[\frac{\sigma}{1+\sigma} x - \frac{1}{2} f_2'(x)\right] + C, \qquad (10.157)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Полученное уравнение (10.157) *есть основное уравнение всей теории изгиба.*

Внесём теперь в статическое граничное условие (10.42) формулы (10.156), тогда получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y} l - \frac{\partial F}{\partial x} m - \frac{A}{2}[x^2 - 2x_0 x - f_1(y)] l - \frac{B}{2}[y^2 - 2y_0 y - f_2(x)] m = 0.$$

Внося l, m из (10.43), мы найдём:

$$\frac{\partial F}{\partial s} - A\left[\frac{x^2}{2} - x_0 x - \frac{1}{2} f_1(y)\right]\frac{dy}{ds} + B\left[\frac{y^2}{2} - y_0 y - \frac{1}{2} f_2(x)\right]\frac{dx}{ds} = 0; \qquad (10.158)$$

это и есть *статическое граничное условие* для функции напряжений $F(x, y)$ *). Для случая параллельного переноса осей уравнения (10.157) и (10.158) были даны Б. Г. Галёркиным.

*) Общие уравнения (10.157) и (10.158) были получены автором в 1933 г. и опубликованы в «Технических заметках ЦАГИ», № 45.

В этом случае имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\theta=0,\ \alpha_1=\beta_2=1,\ \alpha_2=\beta_1=0,\\&A=\frac{P}{J},\ B=\frac{P'}{J'}.\end{aligned}\right\}\tag{10.159}$$

Произвольная постоянная C имеет простое механическое значение. Согласно формуле (1.64), вращение элементарной площадки поперечного сечения стержня определяется формулой

$$2\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.\tag{10.160}$$

Отсюда имеем:

$$2\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Вводя

$$e_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad e_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},$$

найдём:

$$2\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z)=\frac{\partial}{\partial x}(e_{yz})-\frac{\partial}{\partial y}(e_{zx}).\tag{10.161}$$

Умножая (10.161) на μ и имея в виду известные формулы $X_z=\mu e_{zx}$, $Y_z=\mu e_{yz}$, получим:

$$2\mu\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z)=\frac{\partial}{\partial x}(Y_z)-\frac{\partial}{\partial y}(X_z).\tag{10.162}$$

Внося (10.156) в (10.162), мы получим:

$$2\mu\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z)=-\nabla^2F+\frac{1}{2}Bf_2'(x)-\frac{1}{2}Af_1'(y).$$

Подставив сюда ∇^2F из (10.157), мы найдём:

$$2\mu\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z)=-A\frac{\sigma y}{1+\sigma}+B\frac{\sigma x}{1+\sigma}-C.\tag{10.163}$$

Отбрасывая перемещения тела как абсолютно твёрдого в формулах (10.96), мы имеем из (10.96) и (10.132):

$$\left.\begin{aligned}\bar u&=-\tau\eta z+\frac{P}{EJ}\left[\frac{\sigma}{2}(l-z)(\xi^2-\eta^2)+\frac{lz^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right]+\\&\qquad+\frac{P'\sigma}{EJ'}(l-z)\,\xi\eta,\\\bar v&=\tau z\xi+\frac{P\sigma}{EJ}(l-z)\,\xi\eta+\\&\qquad+\frac{P'}{EJ'}\left[\frac{\sigma}{2}(l-z)(\eta^2-\xi^2)+\frac{lz^2}{2}-\frac{z^3}{6}\right],\\\bar w&=\tau\varphi-\frac{P}{EJ}\chi-\frac{P'}{EJ'}\chi'-\frac{P}{EJ}\left[\xi\eta^2+\xi\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)\right]-\\&\qquad-\frac{P'}{EJ'}\left[\xi^2\eta+\eta\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\}\tag{10.164}$$

Внося отсюда $\bar{u}$, $\bar{v}$ в формулу (10.160), получим:

$$2\omega_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 2\tau z + \left(\frac{2P\sigma}{EJ}\eta - \frac{2P'\sigma}{EJ'}\xi\right)(l - z).$$

Взяв производную по z, найдём:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z) = \tau - \frac{P\sigma}{EJ}\eta + \frac{P'\sigma}{EJ'}\xi. \tag{10.165}$$

Здесь $O\xi\eta$ суть главные оси сечения, применённые Сен-Венаном. По формулам (10.148) мы переходим от этих осей к новым произвольным осям:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z) = \tau - \frac{P\sigma}{EJ}[(x - x_0)\alpha_2 + (y - y_0)\beta_2] +$$
$$+ \frac{P'\sigma}{EJ'}[(x - x_0)\alpha_1 + (y - y_0)\beta_1] =$$
$$= \tau + \frac{\sigma(x - x_0)}{E}\left[\frac{P'}{J'}\alpha_1 - \frac{P}{J}\alpha_2\right] + \frac{\sigma(y - y_0)}{E}\left[\frac{P'}{J'}\beta_1 - \frac{P}{J}\beta_2\right].$$

Вследствие (10.150) и (10.151) мы имеем:

$$\frac{P'}{J'}\alpha_1 - \frac{P}{J}\alpha_2 = \frac{P}{J}\sin\theta + \frac{P'}{J'}\cos\theta = \frac{P}{J}\beta_1 + \frac{P'}{J'}\beta_2 = B,$$
$$\frac{P'}{J'}\beta_1 - \frac{P}{J}\beta_2 = -\left(\frac{P}{J}\cos\theta - \frac{P'}{J'}\sin\theta\right) = -\left(\frac{P}{J}\alpha_1 + \frac{P'}{J'}\alpha_2\right) = -A.$$

Таким образом, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z) = \tau + \frac{B\sigma}{E}(x - x_0) - \frac{A\sigma}{E}(y - y_0). \tag{10.166}$$

Сравнивая (10.163) и (10.166), мы получим:

$$2\mu\left[\tau + \frac{B\sigma}{E}(x - x_0) - \frac{A\sigma}{E}(y - y_0)\right] = -\frac{A\sigma}{1+\sigma}y + \frac{B\sigma}{1+\sigma}x - C.$$

Так как

$$E = 2\mu(1 + \sigma),$$

то

$$2\mu\tau + \frac{B\sigma}{1+\sigma}(x - x_0) - \frac{A\sigma}{1+\sigma}(y - y_0) = -\frac{A\sigma}{1+\sigma}y + \frac{B\sigma}{1+\sigma}x - C.$$

Отсюда получается важная формула

$$C = -2\mu\tau - \frac{A\sigma y_0}{1+\sigma} + \frac{B\sigma x_0}{1+\sigma}. \tag{10.167}$$

Произвольная постоянная C определяется из условия равновесия всех сил в поперечном сечении стержня. Для этого возьмём момент сил, действующих в поперечном сечении относительно точки приложения силы, компонентами которой по осям ξ, η являются P и P'.

Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ суть координаты точки приложения силы по отношению к системе осей O_1xy.

Тогда правило моментов даёт:

$$\iint [(x-\bar{x})\,Y_z - (y-\bar{y})\,X_z]\,dx\,dy = 0$$

или

$$M - \bar{x}\,\bar{Y} + \bar{y}\,\bar{X} = 0, \tag{10.168}$$

где обозначено:

$$\left.\begin{aligned} M &= \iint [xY_z - yX_z]\,dx\,dy, \\ \bar{X} &= \iint X_z\,dx\,dy, \\ \bar{Y} &= \iint Y_z\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{10.169}$$

Если u, v, w — компоненты упругого смещения по новым осям O_1xyz, в то время как $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, данные формулами Сен-Венана (10.164), суть компоненты того же упругого смещения по отношению к осям Сен-Венана $O\xi\eta\zeta$, то они связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{v}, \\ v &= \beta_1\bar{u} + \beta_2\bar{v}, \\ w &= \bar{w}. \end{aligned}\right\} \tag{10.170}$$

Легко получить:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau z(y-y_0) + \frac{A}{E}\vartheta_3 + \frac{A_1}{E}\vartheta_1 - \frac{B_1}{E}\vartheta_2, \\ v &= \tau z(x-x_0) + \frac{B}{E}\vartheta_3 + \frac{B_1}{E}\vartheta_1 + \frac{A_1}{E}\vartheta_2. \end{aligned}\right\} \tag{10.171}$$

Здесь A, B даны уравнениями (10.151), а через A_1 и B_1 обозначены следующие выражения:

$$A_1 = \frac{P}{J}\alpha_1 + \frac{P'}{J'}\beta_1, \quad B_1 = \frac{P}{J}\beta_1 - \frac{P'}{J'}\alpha_1. \tag{10.172}$$

Кроме того, введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{\sigma}{2}(l-z)(\xi^2-\eta^2), \\ \vartheta_2 &= \sigma(l-z)\,\xi\eta, \\ \vartheta_3 &= \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3, \end{aligned}\right\} \tag{10.173}$$

а ξ и η выражаются через x, y при помощи (10.148).

§ 111. Функция перемещений при изгибе.

Вопрос об определении перемещений при решении задачи об изгибе при помощи функции напряжений $F(x, y)$ был разрешён Б. Г. Галёркиным путём введения особой функции, которую можно назвать *функцией перемещений при изгибе.*

Пусть начало координат — в центре тяжести, а оси Oxy — главные оси сечения, как это принято у Сен-Венана. При одновременном действии сил P и P' касательные напряжения определяются по формулам (10.58) и (10.133) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) - \frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x} + \psi_1\right] - \\ &\qquad - \frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial x} + \psi_1'\right], \\ Y_z &= \mu\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) - \frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y} + \psi_2\right] - \\ &\qquad - \frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial y} + \psi_2'\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.174}$$

Сравнивая эти выражения для X_z и Y_z с выражениями, данными формулами (10.156), мы найдём:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{F}{\mu} + \frac{\tau y^2}{2} + \frac{P(1+\sigma)}{EJ}\int f_1(y)\,dy + \frac{P'}{EJ'}\int \psi_1' dy + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{P}{EJ}\left[\int \psi_1 dy - (1+\sigma) y x^2\right]\right\}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{F}{\mu} + \frac{\tau x^2}{2} - \frac{P'(1+\sigma)}{EJ'}\int f_2(x)\,dx - \frac{P}{EJ}\int \psi_2\,dx + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{P'}{EJ'}(1+\sigma) x y^2 - \frac{P'}{EJ'}\int \psi_2' dx\right\}, \end{aligned}$$

причём введено обозначение

$$F_1(x, y) = \tau\varphi(x, y) - \frac{P}{EJ}\chi(x, y) - \frac{P'}{EJ'}\chi'(x, y). \tag{10.175}$$

Введём теперь новую функцию

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \frac{1}{\mu}F(x, y) + \frac{\tau}{2}(x^2 + y^2) + \frac{P(1+\sigma)}{EJ}\int f_1(y)\,dy - \\ &\quad - \frac{P'(1+\sigma)}{EJ'}\int f_2(x)\,dx + \frac{P}{EJ}\left[\left(\frac{2-\sigma}{6}\right)y^3 - \left(\frac{2+\sigma}{2}\right)x^2 y\right] - \\ &\quad - \frac{P'}{EJ'}\left[\left(\frac{2-\sigma}{6}\right)x^3 - \left(\frac{2+\sigma}{2}\right)y^2 x\right]. \end{aligned} \tag{10.176}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}. \tag{10.177}$$

Следовательно,

$$F_1(x, y)+i\Phi_1(x, y)$$

есть функция комплексного переменного

$$x+iy.$$

Зная $F(x, y)$, мы вычислим $\Phi_1(x, y)$ по формуле (10.176), а затем уже найдём $F_1(x, y)$.

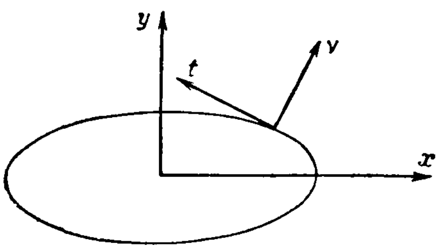
Очевидно, имеем для осевого компонента смещения

$$w=F_1(x, y)-\frac{P}{EJ}\left[x\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)+xy^2\right]-\\ -\frac{P'}{EJ'}\left[y\left(lz-\frac{z^2}{2}\right)+x^2y\right]. \quad (10.178)$$

Компоненты u, v определяются по формулам (10.164).

§ 112. Теорема о циркуляции касательного напряжения при изгибе консоли.

Эта теорема представляет аналогию с теоремой Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении (§ 80) и была впервые доказана автором в 1935 г. *).



Фиг. 31.

Автором было показано в этой работе важное практическое значение этой теоремы. Ряд приложений этой теоремы имеется в добавлении Г. Э. Проктора к русскому переводу II тома известного сочинения А. Феппля и Л. Феппля «Сила и деформация».

Пусть τ_s есть слагающая касательного напряжения при изгибе по направлению касательной к данному замкнутому контуру (фиг. 31), целиком укладывающемуся внутри поперечного сечения консоли. Поэтому имеем:

$$\tau_s=X_z\cos(t, x)+Y_z\cos(t, y), \quad (10.179)$$

где

$$\cos(t, x)=\frac{dx}{ds},\ \cos(t, y)=\frac{dy}{ds},$$

а X_z и Y_z даны формулами (10.58).

*) Лейбензон Л. С., О центре изгиба замкнутых тонкостенных профилей (Доклады Академии Наук СССР, т. III, № 5, стр. 205, 1935).

Умножая (10.179) на ds (элемент дуги), возьмём интеграл по всему контуру:

$$\oint \tau_s ds = \oint \left[X_z \frac{dx}{ds} + Y_z \frac{dy}{ds}\right] ds; \tag{10.180}$$

внося сюда (10.58), получим:

$$\oint \tau_s ds = \mu\tau \oint \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\frac{dy}{ds}\right] ds -$$
$$- \frac{P}{2(1+\sigma)J} \oint \left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x} + \psi_1\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y} + \psi_2\right)\frac{dy}{ds}\right] ds.$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial s},$$
$$\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial\chi}{\partial s},$$
$$2\mu(1+\sigma) = E,$$

то получим, сделав приведение:

$$\oint \tau_s ds = \mu \oint \frac{\partial}{\partial s}\left[\tau\varphi - \frac{P}{EJ}\chi\right] ds + \mu\tau \oint (x\,dy - y\,dx) -$$
$$- \frac{P}{2(1+\sigma)J} \oint [\psi_1 dx + \psi_2 dy]. \tag{10.181}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 даны формулами (10.59).

Так как компоненты упругого перемещения при изгибе u, v, w, данные формулами (10.96), должны быть однозначными функциями от координат x, y, z, то, согласно (10.96), следует, что выражение

$$\omega = \tau\varphi - \frac{P}{EJ}\chi \tag{10.182}$$

должно быть однозначной функцией координат x, y, z. Из этого следует, что

$$\oint \frac{\partial\omega}{\partial s} ds = 0, \tag{10.183}$$

ибо ω *есть однозначная функция.*

На основании (10.183) мы получим из (10.181):

$$\oint \tau_s ds = \mu\tau \oint (x\,dy - y\,dx) - \frac{P}{2(1+\sigma)J} \oint (\psi_1 dx + \psi_2 dy). \tag{10.184}$$

Это и есть искомая формула, которую легко преобразовать, заменив контурные интегралы поверхностными, при помощи формулы Грина:

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint (A\,dy - B\,dx). \tag{10.185}$$

Имеем поэтому:

$$\left.\begin{aligned} &\oint (x\,dy - y\,dx) = 2\iint dx\,dy, \\ &\oint (\psi_1 dx + \psi_2 dy) = \iint \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 2\sigma \iint y\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (10.186)$$

Внося (10.186) в (10.184), получим:

$$\oint \tau_s ds = 2\mu\tau \iint dx\,dy - \frac{P\sigma}{(1+\sigma) J} \iint y\,dx\,dy. \quad (10.187)$$

Если Ω есть площадь внутри рассматриваемого замкнутого контура, то имеем:

$$\iint dx\,dy = \Omega. \quad (10.188)$$

Если y_0 есть координата центра тяжести площади Ω внутри контура, то имеем:

$$\iint y\,dx\,dy = y_0 \Omega. \quad (10.189)$$

Внося (10.188) и (10.189) в (10.187), мы получим:

$$\oint \tau_s ds = \left(2\mu\tau - \frac{P\sigma y_0}{(1+\sigma) J}\right)\Omega; \quad (10.190)$$

это и есть окончательная формула для циркуляции по заданному замкнутому контуру касательного напряжения при изгибе.

Если в формулу (10.180) внести X_z и Y_z по формулам (10.105), то получим:

$$\oint \tau_s ds = \oint \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) ds - \frac{P}{2J}\oint [x^2 - f_1(y)]\frac{dx}{ds} ds. \quad (10.191)$$

На основании формул (10.43) имеем для производной F по нормали к контуру

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{ds}. \quad (10.192)$$

Внося это в (10.191), получим:

$$\oint \tau_s ds = -\oint \frac{\partial F}{\partial \nu} ds - \frac{P}{2J}\oint [x^2 - f_1(y)]\,dx. \quad (10.193)$$

На основании (10.185) имеем:

$$\oint [x^2 - f_1(y)]\,dx = -\iint [-f_1'(y)]\,dx\,dy.$$

Подставляя это выражение в (10.193), получаем:

$$\oint \tau_s ds = -\oint \frac{\partial F}{\partial \nu} ds - \frac{P}{2J}\iint f_1'(y)\,dx\,dy. \quad (10.194)$$

Из (10.190) и (10.194) находим важное соотношение:

$$\oint \frac{\partial F}{\partial \nu} ds + \frac{P}{2J}\iint f_1'(y)\, dx\, dy + \left(2\mu\tau - \frac{P\sigma y_0}{(1+\sigma) J}\right)\Omega = 0. \quad (10.195)$$

В случае многосвязного поперечного сечения консоли необходимо интегрировать уравнение (10.107) при граничном условии (10.108) на *каждом* внутреннем контуре внутри сечения и на внешнем контуре сечения. Соотношение (10.195) должно иметь место для каждого внутреннего контура внутри сечения, а равно и для внешнего контура сечения. Это вносит определённость в решение задачи и позволяет произвести определение произвольных постоянных интеграции.

§ 113. Центр изгиба.

Из рассмотрения формул (10.116) мы видим, что в случае эллиптического поперечного сечения, если сечение симметрично относительно оси, параллельно которой направлена изгибающая сила, появляющиеся при изгибе касательные напряжения, параллельные оси симметрии, распределены относительно этой оси симметрично и сводятся к одной равнодействующей, направленной по оси симметрии. Появляющиеся при изгибе касательные напряжения, перпендикулярные к оси симметрии, взаимно уравновешиваются. Поэтому момент обеих систем касательных напряжений относительно центра тяжести сечения, который лежит на оси симметрии и в котором взято начало координат, равен нулю:

$$\iint (xY_z - yX_z)\, dx\, dy = 0. \quad (10.196)$$

То обстоятельство, что изгибающая сила P проходит через центр тяжести поперечного сечения и расположена в главной плоскости стержня, недостаточно для того, чтобы имело место условие (10.196). Но раз условие (10.196) не имеет места, то появляется некоторая пара, момент которой

$$M = \iint (xY_z - yX_z)\, dx\, dy, \quad (10.197)$$

и она будет закручивать поперечное сечение. При опытах над изгибом швеллерных балок Карл Бах первый заметил, что хотя изгибающая сила была расположена в главной плоскости балки (проходящей через центр тяжести поперечного сечения), всё-таки наблюдалось закручивание балки. Только при некотором передвижении плоскости действия силы параллельно главной плоскости балки кручение исчезало.

Отсюда следует, что если поперечная изгибающая сила расположена в главной плоскости, не являющейся плоскостью симметрии стержня, то изгиб должен сопровождаться кручением. Только если изгибающая поперечная сила лежит в плоскости симметрии стержня, то изгиб происходит без кручения. Вообще, если поперечное сечение стержня имеет одну ось симметрии (на которой лежит центр тяжести), то изгиб происходит без кручения в том случае, когда изгибающая поперечная сила расположена в плоскости симметрии (являющейся здесь главной плоскостью). Если же изгибающая поперечная сила параллельна второй главной плоскости стержня, то плоскость её действия можно перенести параллельно упомянутой главной плоскости на такое расстояние, чтобы кручения не было. Та точка, в которой линия действия силы пересекает ось симметрии, называется *центром изгиба*.

Центр изгиба, подобно центру тяжести, всегда лежит на оси симметрии поперечного сечения стержня. Если же сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит в точке их пересечения, с которой совпадает центр тяжести. Поэтому только тогда, когда сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Вообще центром изгиба мы будем называть ту точку в плоскости поперечного сечения стержня, через которую надо провести изгибающую силу, перпендикулярную к оси стержня, чтобы произвести изгиб без закручивания. Это есть определённая точка в плоскости поперечного сечения, вообще не лежащая на главных осях сечения в центре тяжести его, притом могущая лежать и вне контура поперечного сечения стержня. Для определения положения центра изгиба надо предварительно решить задачу об изгибе, так как только тогда будут известны касательные напряжения при изгибе X_z и Y_z.

Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ суть координаты центра изгиба, через который проходит нормальная к оси стержня изгибающая сила. Тогда условие равновесия требует, чтобы сумма моментов всех касательных сил

$$X_z dx\,dy, \qquad Y_z dx\,dy$$

относительно этой точки, равнялась нулю:

$$\iint [(x-\bar{x})\,Y_z-(y-\bar{y})\,X_z]\,dx\,dy=0. \tag{10.198}$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}&=\iint X_z\,dx\,dy,\\ \bar{Y}&=\iint Y_z\,dx\,dy,\\ M&=\iint (xY_z-yX_z)\,dx\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{10.199}$$

мы представим (10.198) в виде:

$$M - \bar{x}\bar{Y} + \bar{y}\bar{X} = 0. \tag{10.200}$$

Здесь X_z и Y_z — те значения касательных напряжений, которые получаются при изгибе без кручения, следовательно, получаются по формулам (10.58), если положить

$$\tau = 0; \tag{10.201}$$

M есть момент относительно центра тяжести всех возникающих при этом касательных напряжений, а $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ суть компоненты поперечной изгибающей силы по главным осям инерции в центре тяжести поперечного сечения. Если изгибающая сила P параллельна оси x, то:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{X} = P = \iint X_z^{(1)} dx\,dy, \quad \bar{Y} = 0, \\ &M = M^{(1)} = \iint [xY_z^{(1)} - yX_z^{(1)}]\,dx\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{10.202}$$

где

$$\left.\begin{aligned} X_z^{(1)} &= -\frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x} + \psi_1\right], \\ Y_z^{(1)} &= -\frac{P}{2(1+\sigma)J}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y} + \psi_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.203}$$

Уравнение (10.200) примет вид

$$M^{(1)} + \bar{y}\bar{X} = 0. \tag{10.204}$$

Если изгибающая сила P' параллельна оси y, то вводится новая функция изгиба χ', аналогичная χ, причём касательные напряжения суть (§ 109):

$$\left.\begin{aligned} X_z^{(2)} &= -\frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial x} + \psi_1'\right], \\ Y_z^{(2)} &= -\frac{P'}{2(1+\sigma)J'}\left[\frac{\partial\chi'}{\partial y} + \psi_2'\right], \end{aligned}\right\} \tag{10.205}$$

где

$$\psi_1' = (2+\sigma)\,xy,$$

$$\psi_2' = \frac{\sigma}{2}\,y^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)x^2.$$

Тогда имеем:

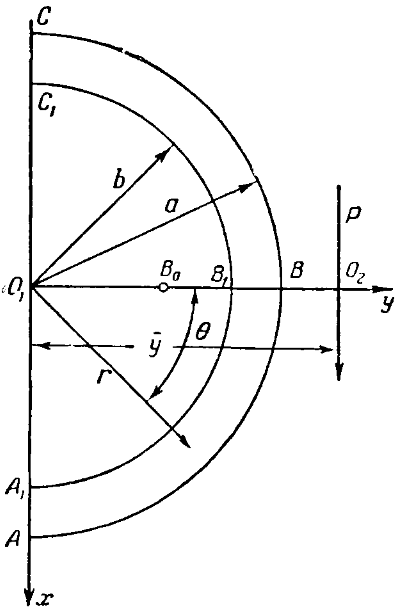
$$\left.\begin{aligned} &\bar{X} = 0, \quad \bar{Y} = P' = \iint Y_z^{(2)}\,dx\,dy, \\ &M = M^{(2)} = \iint [xY_z^{(2)} - yX_z^{(2)}]\,dx\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{10.206}$$

а уравнение (10.200) примет вид:

$$M^{(2)} - \bar{x}\bar{Y} = 0. \tag{10.207}$$

§ 114. Центр изгиба для стержня, поперечное сечение которого есть полукольцо.

Предположим, что поперечное сечение стержня есть полукольцо $ABCC_1B_1A_1A$ (фиг. 32), образованное двумя полуокружностями ABC и $A_1B_1C_1$ радиусов a и b и двумя отрезками AA_1 и CC_1 одного и того же диаметра.



Фиг. 32.

Выберем начало осей в общем центре окружностей, направим ось y горизонтально вправо, а ось x проведём вертикально вниз. Изгибающая сила P, параллельная оси x, проходит через точку O_2. Центр тяжести площади полукольца находится в B_0, причём, как известно,

$$y_0 = O_1B_0 = \frac{4(a^2+ab+b^2)}{3\pi(a+b)}. \quad (10.208)$$

Функция напряжений $F(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию (10.108). Выберем здесь:

$$f_1(y) = a^2 - y^2, \quad (10.209)$$

тогда граничное условие (10.108) даёт:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2J}(x^2+y^2-a^2)\frac{dy}{ds}$$

или, вводя,

$$x^2+y^2=r^2,$$

получим граничное условие в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2J}(r^2-a^2)\frac{dy}{ds}. \quad (10.210)$$

Для внешней окружности ABC имеем $r=a$, и тогда (10.210) даёт:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad F = \text{const.};$$

мы выберем поэтому

$$F = 0 \quad \text{для} \quad r = a\,(ABC). \quad (10.211)$$

На отрезках AA_1 и CC_1 оси x имеем $y=0$, а следовательно, уравнение (10.210) даёт:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0, \quad F = \text{const.},$$

и мы в силу непрерывности можем взять этот const. равным нулю. Поэтому

$$F=0 \quad \text{для} \quad y=0 \, (AA_1, CC_1). \tag{10.212}$$

Наконец, на внутренней окружности $A_1B_1C_1$ имеем $r=b$, поэтому получим из (10.210):

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{P}{2J}(b^2-a^2)\frac{dy}{ds}.$$

Отсюда имеем, интегрируя,

$$F=\frac{P(b^2-a^2)}{2J}y+\text{const}.$$

Но в силу непрерывности мы должны для $y=0$ иметь $F=0$. Поэтому выбираем const. равным нулю. Получим окончательно:

$$F=\frac{P(b^2-a^2)}{2J}y \quad \text{для} \quad r=b\,(A_1B_1C_1). \tag{10.213}$$

Таким образом, для $F(x, y)$ мы составили граничные условия (10.211), (10.212) и (10.213).

Так как начало координат O_1 в центре окружностей, а не в центре тяжести B_c, то функция F удовлетворяет уравнению (10.157), в котором надо положить:

$$A=\frac{P}{J}, \quad B=0, \quad f_2=0, \quad C=-2\mu\tau-\frac{P\sigma y_0}{(1+\sigma)J},$$

что даёт:

$$\nabla^2 F=-2\mu\tau+\frac{P\sigma(y-y_0)}{J(1+\sigma)}-\frac{P}{2J}f_1'(y). \tag{10.214}$$

Внося сюда $f_1(y)$ из (10.209), мы получим:

$$\nabla^2 F=-2\mu\tau+\frac{P\sigma}{J(1+\sigma)}(y-y_0)+\frac{P}{J}y. \tag{10.215}$$

Интеграл этого уравнения возьмём в форме:

$$\begin{aligned} F=y\left(C_1r^2+C_2+\frac{C_3}{r^2}\right)&+\\ +\frac{1}{4}C\,[r^2(1+\cos 2\theta)&+\\ +\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}(A_mr^m+B_mr^{-m})\cos m\theta]&. \end{aligned} \tag{10.216}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} C &= -2\mu\tau - \frac{P\sigma y_0}{J(1+\sigma)}, \\ C_1 &= \frac{P(1+2\sigma)}{8(1+\sigma)J}, \\ C_2 &= \frac{P}{8(1+\sigma)J}\left[b^2(3+2\sigma) - a^2(1+2\sigma)\right], \\ C_3 &= -\frac{P(3+2\sigma)a^2b^2}{8(1+\sigma)J}, \end{aligned}\right\} \tag{10.217}$$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{E_m}{a^{2m} - b^{2m}}\left(b^{m+2} - a^{m+2}\right), \\ B_m &= \frac{E_m a^{2m} b^{2m}}{a^{2m} - b^{2m}}\left(a^{-m+2} - b^{-m+2}\right), \\ E_m &= -\frac{16}{m\pi(m^2-4)}\sin\frac{m\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.218}$$

Угол θ отсчитывается от оси y к оси x. Очевидно, что для отрезков AA_1 и CC_1 имеем:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2},$$

и следовательно, здесь

$$\begin{gathered} y = r\cos\theta = 0, \\ 1 + \cos 2\theta = 0, \\ \cos m\theta = \cos\frac{m\pi}{2} = 0 \; (m = 1, 3, 5, \ldots). \end{gathered}$$

Поэтому функция F удовлетворяет граничному условию (10.212). Для $r = a$ имеем вследствие (10.217):

$$C_1 a^2 + C_2 + \frac{C_3}{a^2} = 0.$$

Для $r = b$ имеем вследствие (10.217):

$$C_1 b^2 + C_2 + \frac{C_3}{b^2} = \frac{P}{2J}(b^2 - a^2).$$

Поэтому для удовлетворения условий (10.211) и (10.213) получим:

$$r^2(1 + \cos 2\theta) + \sum_{m=1,3,5,\ldots}(A_m r^m + B_m r^{-m})\cos m\theta = 0, \tag{10.219}$$

для

$$r = b \text{ и } r = a, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{2}. \tag{10.220}$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, умножим (10.219) на $\cos m\theta\, d\theta$ и будем интегрировать в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

Это даёт:

$$a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\cos m\theta d\theta + (A_m a^m + B_m a^{-m}) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 m\theta d\theta = 0,$$

$$b^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\cos m\theta d\theta + (A_m b^m + B_m a^{-m}) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 m\theta d\theta = 0.$$

Но

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\cos m\theta d\theta = 2\sin\frac{m\pi}{2}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m-2}\right)\right] =$$

$$= 2\sin\frac{m\pi}{2}\left(-\frac{4}{m(m^2-4)}\right) = -\frac{8\sin\frac{m\pi}{2}}{m(m^2-4)},$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 m\theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому получим:

$$\left.\begin{aligned} (A_m a^m + B_m a^{-m})\frac{\pi}{2} &= \frac{8a^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{m(m^2-4)}, \\ (A_m b^m + B_m b^{-m})\frac{\pi}{2} &= \frac{8b^2 \sin\frac{m\pi}{2}}{m(m^2-4)}. \\ m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots& \end{aligned}\right\} \qquad (10.221)$$

При этом принято во внимание известное соотношение:

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0,\quad & m = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \\ & n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \\ & m \neq n. \end{aligned}\right\} \qquad (10.222)$$

Решая (10.221), получим формулы (10.218).

Таким образом, все граничные условия для $F(x, y)$ удовлетворены. В том, что это есть интеграл уравнения (10.215), мы убеждаемся простой подстановкой.

Следует заметить, что каждый член выражения

$$f_1 = C_2 y + C_3 \frac{y}{r^2} + \frac{1}{4} Cr^2 \cos 2\theta + \frac{C}{4} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos m\theta$$

есть функция гармоническая, удовлетворяющая уравнению Лапласа; следовательно,

$$\nabla^2 f_1 = 0.$$

Остаётся часть интеграла:

$$f_2 = C_1 r^2 y + \frac{1}{4} Cr^2 = C_1 (y^3 + x^2 y) + \frac{1}{4} C (x^2 + y^2).$$

Подставляя её в (10.215)

$$\nabla^2 F = -\left(2\mu\tau + \frac{P\sigma y_0}{J(1+\sigma)}\right) + \frac{P(1+2\sigma)}{J(1+\sigma)} y,$$

получим:

$$8C_1 y + C = -\left(2\mu\tau + \frac{P\sigma y_0}{J(1+\sigma)}\right) + \frac{P(1+2\sigma)}{J(1+\sigma)} y,$$

что удовлетворено вследствие (10.217).

Таким образом, все условия задачи удовлетворены. Если сила P проходит через центр изгиба O_1, то кручение отсутствует, а следовательно,

$$\tau = 0. \tag{10.223}$$

Взяв момент касательных сил $X_z dx\, dy$, $Y_z dx\, dy$ относительно точки O_1, получим:

$$P\bar{y} + M = 0, \tag{10.224}$$

где

$$M = \iint (xY_z - yX_z)\, dx\, dy. \tag{10.225}$$

Сюда надо внести X_z и Y_z из (10.105).

Применяя формулы Грина, получим отсюда:

$$M = -\oint F(x\,dy - y\,dx) + 2\iint F\,dx\,dy + \\ + \frac{P}{2J}\iint [x^2 - f_1(y)]\, y\,dx\,dy. \tag{10.226}$$

Для J имеем известную формулу

$$J = \frac{\pi}{8}(a^4 - b^4). \tag{10.227}$$

Произведя интегрирование, получим из (10.224):

$$\bar{y} = \frac{8(a-b)}{15\pi(1+\sigma)(a^4-b^4)} \psi(a, b) - \frac{8\sigma(a-b)^3(a^2+ab+b^2)}{9\pi(1+\sigma)(a^4-b^4)}, \tag{10.228}$$

где

$$\psi(a, b) = 3(a^4 + a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + b^4) + \\ + 4\sigma\left(a^4 + a^3b + \frac{7}{2}a^2b^2 + ab^3 + b^4\right); \quad (10.229)$$

причём вычисление интеграла, относящегося к бесконечному ряду формулы (10.216), сделано приближённо, так как при малой толщине полукольца $t = a - b$ ряд начинается с члена порядка t^3, даваемого мембранной аналогией Прандтля при кручении. Обозначая

$$\xi = \frac{t}{a}, \quad (10.230)$$

мы получим, отбрасывая члены, начиная с ξ^3,

$$\bar{y} = \frac{4a}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}\xi^2\right). \quad (10.231)$$

Замечательно, что центр изгиба O_1 оказывается вне контура сечения с выпуклой стороны. Это совпадает с опытами К. Баха над изгибом швеллеров. Если поперечное сечение есть полукруг, то надо положить в формулах (10.217) и (10.218) $b = 0$, что даёт:

$$\left.\begin{aligned} &C_3 = 0, \quad B_m = 0, \\ &C_2 = -\frac{P(1+2\sigma)a^2}{8(1+\sigma)J}, \\ &J = \frac{\pi a^4}{8}, \\ &A_m = -E_m a^{-m+2}. \end{aligned}\right\} \quad (10.232)$$

В рассматриваемом случае на контуре имеем везде $F = 0$, откуда получим из (10.226):

$$M = 2\iint F\,dx\,dy + \frac{P}{2J}\iint (r^2 - a^2)\,y\,dx\,dy. \quad (10.233)$$

Но имеем:

$$\iint (r^2 - a^2)\,y\,dx\,dy = -\frac{4}{15}a^5.$$

Далее, имеем:

$$\iint F\,dx\,dy = \iint (C_1 r^2 + C_2)\,y\,dx\,dy + \\ + \frac{1}{4}C\iint r^2(1 + \cos 2\theta)\,dx\,dy + \frac{1}{4}C\sum A_m \iint r^m \cos m\theta\,dx\,dy = \\ = \frac{2}{5}C_1 a^5 + \frac{2}{3}C_2 a^3 + \frac{\pi a^4}{16}C + \frac{Ca^{m+2}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m}{m(m+2)}\sin\frac{m\pi}{2}.$$

Внося вычисленные интегралы в (10.233), получим:

$$
\begin{aligned}
M = -\frac{16Pa}{15\pi} + \frac{4Pa(1+2\sigma)}{5(1+\sigma)\pi} - \frac{4Pa(1+2\sigma)}{3(1+\sigma)\pi} + {} \\
+ \frac{\pi a^4}{8}\left[2\mu\tau + \frac{32P\sigma a^{-3}}{3(1+\sigma)\pi^2}\right] + {} \\
+ \frac{16a^4}{\pi}\left[2\mu\tau + \frac{32P\sigma a^{-3}}{3(1+\sigma)\pi^2}\right] \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2(m+2)^2(m-2)}.
\end{aligned}
$$

Так как $\tau = 0$, то имеем:

$$
\begin{aligned}
M = -\frac{16Pa}{15a} - \frac{8Pa(1+2\sigma)}{15\pi(1+\sigma)} + \frac{4P\sigma a}{3\pi^2(1+\sigma)} + {} \\
+ \frac{16\cdot 32\,P\sigma a}{3(1+\sigma)\pi^3} \sum \frac{1}{m^2(m+2)^2(m-2)}. \qquad (10.234)
\end{aligned}
$$

Внося (10.234) в (10.224), мы получим:

$$
\frac{\pi}{a}\cdot\bar{y} = \frac{8(3+4\sigma)}{15(1+\sigma)} + \frac{4\sigma}{3(1+\sigma)}K, \tag{10.235}
$$

где

$$
K = -1 - \frac{128}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(m-2)\,m^2(m+2)^2}. \tag{10.236}
$$

Так как ряд сходится очень быстро, то можно ограничиться несколькими первыми членами для получения точного результата. Ограничиваясь четырьмя членами, имеем:

$$
K = -1 - \frac{128}{\pi^2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{3775} + \frac{1}{19\,845} + \ldots\right).
$$

Отсюда найдём:

$$
K = 0{,}379\ldots \tag{10.237}
$$

В книге С. П. Тимошенко «Теория упругости» для момента кручения полукруга дана формула

$$
\left.\begin{aligned}
M &= \mu\tau a^4\cdot k_0, \\
k_0 &= 0{,}296\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{10.238}
$$

Наша величина K связана с k_0 соотношением

$$
K = \frac{4}{\pi}k_0. \tag{10.239}
$$

Внося сюда k_0, получим:

$$
K = \frac{4}{\pi}\cdot 0{,}296\ldots = 0{,}3793\ldots,
$$

что согласуется с (10.237).

В курсе С. П. Тимошенко в формуле (10.235) отсутствует второй член правой части, что было исправлено в работе Д. Ю. Панова иным методом.

§ 115. Сравнение теории изгиба Сен-Венана с формулами изгиба в теории сопротивления материалов.

Проблема об изгибе консоли была поставлена впервые в начале XVII века великим Галилео Галилеем, когда перед ним встал важный вопрос о прочности длинных галер венецианского флота. Его простые соображения, представлявшие упрощённую модель изгиба, сделались основою всех дальнейших работ.

Та форма теории изгиба, которая излагается в теории сопротивления материалов, восходит к известному французскому учёному Кулону.

Главная трудность элементарной теории изгиба заключается в определении касательных напряжений, возникающих при изгибе. Упрощённые методы, применяемые в теории сопротивления материалов, вообще говоря, не дают точных результатов, за исключением случая высокого и узкого прямоугольного сечения.

Главная заслуга теории Сен-Венана заключается именно в том, что она позволяет точно определить касательные напряжения при изгибе, и это составляет сущность теории изгиба призматических стержней. Следует заметить, что напряжённое состояние изогнутого бруса, определяемое в теории сопротивления материалов, не удовлетворяет условиям совместности Сен-Венана, а следовательно, не может существовать в изотропном теле *).

Подробные исследования показывают, что для стержней, поперечное сечение которых не слишком вытянуто в направлении, перпендикулярном к линии действия силы, формулы теории сопротивлений материалов дают достаточную для практики точность.

*) Ляв, Математическая теория упругости, § 235.

ГЛАВА XI.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

§ 116. Теорема Клапейрона.

Если упругое тело находится в равновесии, то работа внешних сил на произведённых ими упругих перемещениях u, v, w будет иметь величину:

$$L=\iiint[Xu+Yv+Zw]\rho dx\,dy\,dz+$$
$$+\iint[X_\nu u+Y_\nu v+Z_\nu w]d\Sigma. \quad (11.1)$$

На основании известных формул:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=lX_x+mX_y+nX_z\,,\\ Y_\nu&=lX_y+mY_y+nY_z\,,\\ Z_\nu&=lX_z+mY_z+nZ_z \end{aligned}\right\} \quad (11.2)$$

имеем:

$$L_1=\iint[X_\nu u+Y_\nu v+Z_\nu w]\,d\Sigma=\iint[(X_xu+X_yv+X_zw)\,l+$$
$$+(X_yu+Y_yv+Y_zw)\,m+(X_zu+Y_zv+Z_zw)\,n]\,d\Sigma.$$

Применяя теперь формулу Грина:

$$\iint[Al+Bm+Cn]\,d\Sigma=\iiint\left[\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz,$$

мы получим:

$$L_1=\iiint\left[\frac{\partial}{\partial x}(X_xu+X_yv+X_zw)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(X_yu+Y_yv+Y_zw)+\frac{\partial}{\partial z}(X_zu+Y_zv+Z_zw)\right]dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)v+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)w\right]dx\,dy\,dz+$$
$$+\iiint\left[X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+X_z\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Подставляя это выражение L_1 в (11.1) и используя основные формулы (1.11) и (1.12), мы получим:

$$L=\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X\right)u+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y\right)v+$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z\right)w\right]dx\,dy\,dz+$$
$$+\iiint[X_xe_{xx}+Y_ye_{yy}+Z_ze_{zz}+Y_ze_{yz}+X_ze_{xz}+X_ye_{xy}]\,dx\,dy\,dz.$$

Вследствие уравнений упругого равновесия Коши (4.24) первый объёмный интеграл в выражении L исчезает, и остаётся один второй интеграл:

$$L=\iiint[X_xe_{xx}+Y_ye_{yy}+Z_ze_{zz}+Y_ze_{yz}+$$
$$+X_ze_{xz}+X_ye_{xy}]\,dx\,dy\,dz. \tag{11.3}$$

Но для тел, следующих закону Гука, мы имеем формулу (3.34), на основании которой получим:

$$L=2\iiint W\,dx\,dy\,dz. \tag{11.4}$$

Отсюда следует

$$\iiint W\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}L, \tag{11.5}$$

т. е. *работа деформации составляет половину работы внешних сил на произведённых ими упругих перемещениях.* Это и составляет теорему Клапейрона.

§ 117. Закон взаимности Бетти.

Пусть на упругое тело действуют две системы внешних сил, производящих упругие перемещения и деформации:

1) первая система

$$X',\ Y',\ Z',\ X'_\nu,\ Y'_\nu,\ Z'_\nu,$$

которой соответствуют компоненты напряжённого состояния

$$X'_x,\ Y'_y,\ Z'_z,\ X'_y,\ X'_z,\ Y'_z,$$

упругие смещения

$$u_1\ ,v_1\ ,w_1$$

и компоненты деформации

$$e'_{xx}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\qquad e'_{yy}=\frac{\partial v_1}{\partial y},\qquad e'_{zz}=\frac{\partial w_1}{\partial z},$$
$$e'_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x},\quad e'_{zx}=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x},\quad e'_{yz}=\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial z};$$

2) вторая система

$$X'', \; Y'', \; Z'', \; X''_\nu, \; Y''_\nu, \; Z''_\nu,$$

которой соответствуют компоненты напряжённого состояния

$$X''_x, \; Y''_y, \; Z''_z, \; X''_y, \; X''_z, \; Y''_z;$$

упругие смещения

$$u_2, \; v_2, \; w_2$$

и компоненты деформации

$$e''_{xx} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad e''_{yy} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \qquad e''_{zz} = \frac{\partial w_2}{\partial z},$$

$$e''_{xy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad e''_{zx} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad e''_{yz} = \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}.$$

Работа сил первой системы, включая и силы инерции, на упругих перемещениях второй будет:

$$L_{12} = \iiint \left[\left(X' - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) u_2 + \left(Y' - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) v_2 + \right.$$
$$\left. + \left(Z' - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) w_2 \right] \rho \, dx \, dy \, dz + \iint [X'_\nu u_2 + Y'_\nu v + Z'_\nu w_2] \, d\Sigma. \qquad (11.6)$$

Но поверхностный интеграл правой части преобразуется, как в § 116, и даёт:

$$\iint [X'_\nu u_2 + Y'_\nu v_2 + Z'_\nu w_2] \, d\Sigma = \iiint \left[\left(\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} \right) u_2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial X'_y}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} \right) v_2 + \left(\frac{\partial X'_z}{\partial x} + \frac{\partial Y'_z}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} \right) w_2 \right] dx \, dy \, dz +$$
$$+ \iiint \left[X'_x \frac{\partial u_2}{\partial x} + Y'_y \frac{\partial v_2}{\partial y} + Z'_z \frac{\partial w_2}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + Y'_z \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + X'_z \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + X'_y \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] dx \, dy \, dz.$$

На основании этого имеем:

$$L_{12} = \iiint \left\{ \left[\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \rho \left(X' - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) \right] u_2 + \right.$$
$$+ \left[\frac{\partial X'_y}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} + \rho \left(Y' - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) \right] v_2 +$$
$$\left. + \left[\frac{\partial X'_z}{\partial x} + \frac{\partial Y'_z}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} + \rho \left(Z' - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) \right] w_2 \right\} dx \, dy \, dz +$$
$$+ \iiint \left[X'_x \frac{\partial u_2}{\partial x} + Y'_y \frac{\partial v_2}{\partial y} + Z'_z \frac{\partial w_2}{\partial z} + Y'_z \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + X'_z \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + X'_y \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] dx \, dy \, dz,$$

что вследствие уравнений (4.7) даёт:

$$L_{12} = \iiint [X'_x e''_{xx} + Y'_y e''_{yy} + Z'_z e''_{zz} + Y'_z e''_{yz} + \\ + X'_z e''_{xz} + X'_y e''_{xy}]\, dx\, dy\, dz. \quad (11.7)$$

Аналогично работа сил второй системы, включая и силы инерции, на упругих перемещениях первой будет:

$$L_{21} = \iiint \left[\left(X'' - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right) u_1 + \left(Y'' - \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\right) v_1 + \\ + \left(Z'' - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\right) w_1\right] \rho\, dx\, dy\, dz + \iint [X''_\nu u_1 + Y''_\nu v_1 + Z''_\nu w_1]\, d\Sigma. \quad (11.8)$$

Поступая, как в первом случае, получим:

$$L_{21} = \iiint [X''_x e'_{xx} + Y''_y e'_{yy} + Z''_z e'_{zz} + Y''_z e'_{yz} + \\ + X''_z e'_{xz} + X''_y e'_{xy}]\, dx\, dy\, dz. \quad (11.9)$$

Вследствие формулы (3.41) имеем:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (11.10)$$

Это равенство и выражает закон взаимности Бетти.

§ 118. Теорема Кирхгофа о единственности решения задачи теории упругости.

Предположим, что для двух систем упругих перемещений u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 соответствующие напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0, \end{aligned}\right\} \quad (11.11)$$

при граничных условиях для напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x l + X_y m + X_z n = X_\nu, \\ X_y l + Y_y m + Y_z n = Y_\nu, \\ X_z l + Y_z m + Z_z n = Z_\nu, \end{aligned}\right\} \quad (11.12)$$

на тех участках поверхности тела, где заданы поверхностные силы, и при граничных условиях для перемещений:

$$u = f_1, \quad v = f_2, \quad w = f_3 \quad (11.13)$$

на тех участках поверхности тела, где заданы перемещения. Тогда составим систему упругих перемещений:

$$u = u_1 - u_2, \quad v = v_1 - v_2, \quad w = w_1 - w_2; \tag{11.14}$$

она будет удовлетворять внутри тела уравнениям равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

на одной части поверхности тела — граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} X_x l + X_y m + X_z n = 0, \\ X_y l + Y_y m + Y_z n = 0, \\ X_z l + Y_z m + Z_z n = 0; \end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

а на другой части поверхности — граничным условиям:

$$u = v = w = 0. \tag{11.17}$$

Умножив уравнения (11.15) поочерёдно на

$$u\,dx\,dy\,dz, \quad v\,dx\,dy\,dz, \quad w\,dx\,dy\,dz,$$

сложим их и возьмём интеграл по всему объёму тела, что даёт:

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)v + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) w\right] dx\,dy\,dz = 0. \tag{11.18}$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\iint[u(X_x l + X_y m + X_z n) + v(X_y l + Y_y m + Y_z n) + \\ + w(X_z l + Y_z m + Z_z n)]\,d\Sigma - \\ - \iiint\left[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + X_z\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + Y_z\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz = 0.$$

Но вследствие (11.16) и (11.17) поверхностный интеграл пропадает. Далее, вследствие формул (3.19) и формул (1.11) и (1.12) объёмный интеграл примет вид:

$$\iiint [X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + X_y e_{xy} + X_z e_{xz} + Y_z e_{yz}]\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint \left[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} e_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} e_{zz} + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} e_{xy} + \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} e_{xz} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} e_{yz}\right] dx\, dy\, dz = 2 \iiint W\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Но упругий потенциал W, как мы видели в главе III, есть однородная функция второй степени относительно шести компонентов деформации

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{xy},\ e_{zx},\ e_{yz},$$

причём функция существенно положительная и обращающаяся в нуль только, если все шесть компонентов деформации суть нули, т. е.

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0.$$

Но в этом случае упругое тело получает перемещение, как абсолютно твёрдое тело без деформации. Если на поверхности тела даны упругие перемещения, то вследствие (11.17) $u = v = w = 0$ по всему объёму тела.

Если же на поверхности тела даны только поверхностные силы, то обе системы перемещений могут различаться только на перемещение всего тела без деформации.

Отсюда следует, что *решение задачи об упругом равновесии будет единственным.*

Значение теоремы Кирхгофа заключается в том, что она гарантирует нам, за исключением особых случаев, что найденное нами решение уравнений упругости при заданных граничных и начальных условиях есть единственное возможное решение, и другого решения быть не может. Только в случае упругого равновесия длинных тонких прутьев, тонких пластинок и оболочек возможны несколько решений, вследствие чего равновесие может быть неустойчивым.

Эти вопросы, имеющие важное практическое значение, были предметом очень важных работ С. П. Тимошенко и других русских и иностранных учёных. Эти вопросы в этой книге не рассматриваются.

§ 119. Теорема о минимуме работы деформации при заданных на границе перемещениях и отсутствии массовых сил.

В случае отсутствия массовых сил имеем уравнения упругого равновесия (11.15) и условия на границе (11.13), которым будут удовлетворять *действительно существующие упругие перемещения u, v, w.*

Вообразим теперь ещё упругое перемещение, согласное со связями, наложенными на наше тело:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u + u_1, \\ v_2 &= v + v_1, \\ w_2 &= w + w_1, \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

которое будет удовлетворять тем же граничным условиям (11.13), т. е.

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= f_1, \\ v_2 &= f_2, \\ w_2 &= f_3, \end{aligned}\right\} \text{ на поверхности тела,} \tag{11.20}$$

но не удовлетворяет уравнениям равновесия. Тогда из (11.19) и (11.20) следует, что на поверхности тела $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. Но эти возможные добавочные перемещения u_1, v_1, w_1 не удовлетворяют уравнениям упругого равновесия. Для действительно существующих перемещений u, v, w мы имеем, согласно § 27, упругий потенциал

$$U = \iiint W\,dx\,dy\,dz, \tag{11.21}$$

где W есть однородная функция второй степени относительно шести компонентов деформации

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{xy},\ e_{xz},\ e_{yz},$$

которую обозначим

$$W = f(e_{xx}, e_{yy}, \ldots, e_{yz}). \tag{11.22}$$

Для воображаемых упругих перемещений u_2, v_2, w_2 мы будем иметь компоненты деформации:

$$e''_{xx} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \ \ldots, \ e''_{yz} = \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}, \tag{11.23}$$

которым соответствует упругий потенциал:

$$W_2 = f(e''_{xx}, e''_{yy}, \ldots, e''_{yz}). \tag{11.24}$$

Также для воображаемых упругих перемещений u_1, v_1, w_1 мы будем иметь компоненты деформации:

$$e'_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ e'_{yy} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \ \ldots, \ e'_{yz} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \tag{11.25}$$

которым соответствует упругий потенциал:

$$W_1 = f(e'_{xx}, e'_{yy}, \ldots, e'_{yz}). \tag{11.26}$$

Из (11.19), (11.23) и (11.25) следуют соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} e''_{xx}=e_{xx}+e'_{xx}, \\ e''_{yy}=e_{yy}+e'_{yy}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e''_{yz}=e_{yz}+e'_{yz}. \end{array}\right\} \tag{11.27}$$

Внося (11.27) в (11.24) и принимая во внимание, что W есть однородная функция второй степени относительно $e''_{xx}, \ldots, e''_{yz}$, мы имеем:

$$\begin{gathered} W_2=f(e_{xx}+e'_{xx},\ e_{yy}+e'_{yy},\ \ldots,\ e_{yz}+e'_{yz})= \\ =f(e_{xx},\ e_{yy},\ \ldots,\ e_{yz})+f(e'_{xx},\ e'_{yy},\ \ldots,\ e'_{yz})+ \\ +\frac{\partial f}{\partial e_{xx}}e'_{xx}+\frac{\partial f}{\partial e_{yy}}e'_{yy}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial e_{yz}}e'_{yz}. \end{gathered} \tag{11.28}$$

На основании (11.28) мы имеем величину упругого потенциала тела для возможных перемещений в виде:

$$U_2=\iiint W_2dx\,dy\,dz=\iiint W\,dx\,dy\,dz+\iiint W_1dx\,dy\,dz+\Omega, \tag{11.29}$$

где обозначено:

$$\begin{gathered} \Omega=\iiint\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}e'_{xx}+\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}e'_{yy}+\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}e'_{zz}+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}e'_{xy}+\right. \\ \left.+\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}e'_{xz}+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}e'_{yz}\right]dx\,dy\,dz, \end{gathered} \tag{11.30}$$

что можно представить в виде:

$$\begin{gathered} \Omega=\iiint\left[X_x\frac{\partial u_1}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v_1}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w_1}{\partial z}+X_y\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+\right. \\ \left.+X_z\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+Y_z\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz. \end{gathered}$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{gathered} \Omega=\iint[u_1(X_xl+X_ym+X_zn)+v_1(X_yl+Y_ym+Y_zn)+ \\ +w_1(X_zl+Y_zm+Z_zn)]\,d\Sigma- \\ -\iiint\left[u_1\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)+v_1\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)+\right. \\ \left.+w_1\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz. \end{gathered}$$

Вследствие (11.13), (11.19) и (11.20) обращается в нуль поверхностный интеграл, а вследствие (11.15) обращается в нуль объёмный интеграл, что даёт:

$$\Omega=0. \tag{11.31}$$

Внося (11.31) в (11.29), мы получим вследствие (11.21):

$$U_2=U+\iiint W_1\,dx\,dy\,dz, \tag{11.32}$$

а так как по определению $W_1>0$, то имеем из (11.32):

$$U_2>U, \tag{11.33}$$

что и доказывает следующую теорему:

Работа деформации в отсутствии массовых сил при заданных на поверхности упругого тела перемещениях есть минимум для действительно имеющего место упругого равновесия тела.

§ 120. Вариационное уравнение равновесия упругого тела.

Пусть δu, δv, δw суть *возможные упругие перемещения*, т. е. согласные с *геометрическими связями*, наложенными на упругую систему в случае равновесия, и с *кинематическими связями* — в случае движения; согласно началу возможных перемещений Лагранжа, мы будем иметь при упругом равновесии тела:

$$\iiint[X\delta u+Y\delta v+Z\delta w]\,\rho\,dx\,dy\,dz+\\
+\iint[X_\nu\delta u+Y_\nu\delta v+Z_\nu\delta w]\,d\Sigma-\delta U=0, \tag{11.34}$$

где $d\Sigma$ — элемент поверхности, а U дано формулой (11.21).

Объёмный интеграл взят по всему объёму упругого тела, а поверхностный — по всей его поверхности. Уравнение (11.34) представляет собой так называемое *вариационное уравнение Лагранжа для упругого равновесия.*

Уравнение (11.34) содержит в себе как три уравнения упругого равновесия (4.24), так и три граничных условия (11.2), если даны значения X_ν, Y_ν, Z_ν на поверхности упругого тела.

Действительно, из (11.21) мы имеем:

$$\delta U=\iiint \delta W\,dx\,dy\,dz. \tag{11.35}$$

Далее, вследствие определения W, имеем:

$$\delta W=\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\delta e_{xx}+\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\delta e_{yy}+\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\delta e_{zz}+\\
+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\delta e_{xy}+\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\delta e_{xz}+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\delta e_{yz}. \tag{11.36}$$

Но из формул (1.11) и (1.12) имеем:

$$\delta e_{xx}=\delta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\delta u \text{ и т. д.},$$

$$\delta e_{xy}=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\delta u+\frac{\partial}{\partial x}\delta v \text{ и т. д.} \qquad (11.37)$$

Подставляя (11.37) и (11.36) в (11.35), интегрируя по частям и учитывая формулу Грина, получим три соотношения вида:

$$\iiint\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\delta e_{xx}\,dx\,dy\,dz=\iint\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\cos(\nu, x)\,\delta u\,d\Sigma-$$
$$-\iiint\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)\delta u\,dx\,dy\,dz, \qquad (11.38)$$

и три соотношения вида:

$$\iiint\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\delta e_{xy}dx\,dy\,dz=\iint\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}(\delta v\cos(\nu, x)+\delta u\cos(\nu, y))\right]d\Sigma-$$
$$-\iiint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)\delta v+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)\delta u\right]dx\,dy\,dz. \qquad (11.39)$$

Внося шесть формул типа (11.38) и (11.39) в формулу (11.35), в которую уже внесено (11.36), мы получим:

$$\delta U=\iint\left\{\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\cos(\nu, x)+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\cos(\nu, y)+\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\cos(\nu, z)\right]\delta u+\right.$$
$$+\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\cos(\nu, x)+\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\cos(\nu, y)+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\cos(\nu, z)\right]\delta v+$$
$$\left.+\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\cos(\nu, x)+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\cos(\nu, y)+\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\cos(\nu, z)\right]\delta w\right\}d\Sigma-$$
$$-\iiint\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right)\right]\delta u+\right.$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)\right]\delta v+$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\right)\right]\delta w\right\}dx\,dy\,dz.$$

На основании формул (3.19) мы получим отсюда:

$$\delta U=\iint\{[X_x\cos(\nu, x)+X_y\cos(\nu, y)+X_z\cos(\nu, z)]\,\delta u+$$
$$+[X_y\cos(\nu, x)+Y_y\cos(\nu, y)+Y_z\cos(\nu, z)]\,\delta v+$$
$$+[X_z\cos(\nu, x)+Y_z\cos(\nu, y)+Z_z\cos(\nu, z)]\,\delta w\}\,d\Sigma-$$
$$-\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta u+\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\delta w\right]dx\,dy\,dz. \qquad (11.40)$$

Внося (11.40) в (11.34), мы получим:

$$\iiint\Big[\Big(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X\Big)\delta u+$$
$$+\Big(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y\Big)\delta v+$$
$$+\Big(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z\Big)\delta w\Big]\,dx\,dy\,dz-$$
$$-\iint[(X_x\cos(\nu,x)+X_y\cos(\nu,y)+X_z\cos(\nu,z)-X_\nu)\,\delta u+$$
$$+(X_y\cos(\nu,x)+Y_y\cos(\nu,y)+Y_z\cos(\nu,z)-Y_\nu)\,\delta v+$$
$$+(X_z\cos(\nu,x)+Y_z\cos(\nu,y)+Z_z\cos(\nu,z)-Z_\nu)\,\delta w]\,d\Sigma=0. \quad (11.41)$$

Так как возможные перемещения δu, δv, δw ничем между собой не связаны и совершенно произвольны, то мы должны приравнять нулю коэффициенты, стоящие при них в скобках. Таким образом, мы получим три уравнения упругого равновесия Коши:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X=0,\\
&\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=0,\\
&\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=0
\end{aligned}\right\} \quad (11.42)$$

и три граничных условия Коши в форме:

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu&=X_x\cos(\nu,x)+X_y\cos(\nu,y)+X_z\cos(\nu,z),\\
Y_\nu&=X_y\cos(\nu,x)+Y_y\cos(\nu,y)+Y_z\cos(\nu,z),\\
Z_\nu&=X_z\cos(\nu,x)+Y_z\cos(\nu,y)+Z_z\cos(\nu,z).
\end{aligned}\right\} \quad (11.43)$$

Таким образом, как уравнения (11.42), так и (11.43) являются следствиями вариационного уравнения (11.34). Следовательно, *при применении вариационного уравнения* (11.34) *нет надобности удовлетворять заранее статические граничные условия* (11.43), *так как они удовлетворяются как бы автоматически.*

При приложении вариационного уравнения (11.34) мы задаём себе выражения упругих смещений, согласных со связями, наложенными на упругое тело, и следовательно, шесть тождественных соотношений Сен-Венана будут выполнены. Но если мы зададим себе шесть компонентов напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y,$$

то в случае изотропного тела шесть тождественных соотношений Бельтрами (4.48) и (4.50) должны быть заранее удовлетворены.

Так как поверхностные и массовые силы нам заданы и, следовательно, не варьируются, то уравнение (11.34) можно переписать в форме:

$$\delta Э = 0, \tag{11.44}$$

где Э есть так называемая потенциальная энергия всей системы:

$$Э = \iiint W\,dx\,dy\,dz - \iiint (Xu + Yv + Zw)\,\rho\,dx\,dy\,dz - \\ - \iint (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w)\,d\Sigma. \tag{11.45}$$

Поэтому из уравнения (11.44) следует, что из всех возможных перемещений u, v, w, удовлетворяющих связям, наложенным на упругое тело, в действительности могут иметь место только те, при которых потенциальная энергия системы Э имеет стационарное значение. Взяв вторую вариацию Э, можно показать, что в рассматриваемом нами случае потенциальная энергия имеет минимальное значение. Это составляет принцип минимума для перемещений.

§ 121. Вариационная формула Кастилиано.

Пусть тело находится в состоянии упругого равновесия с деформациями, характеризуемыми упругими перемещениями u, v, w и шестью компонентами напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y,\ X_z,\ Y_z.$$

Эти компоненты действительно существующего напряжённого состояния удовлетворяют трём уравнениям равновесия (11.42) и трём граничным условиям, которые в случае заданных поверхностных сил имеют форму (11.43). Сверх того, компоненты напряжённого состояния в самом общем случае анизотропного тела удовлетворяют шести тождественным соотношениям Сен-Венана (1.107) и (1.110), а в частном случае изотропного тела они должны удовлетворять шести тождественным соотношениям Бельтрами (4.48) и (4.50).

Подвергнем это напряжённое состояние произвольной вариации, но такой, чтобы новое напряжённое состояние, характеризуемое шестью компонентами:

$$\left.\begin{array}{l} X_x + \delta X_x,\ Y_y + \delta Y_y,\ Z_z + \delta Z_z, \\ X_y + \delta X_y,\ X_z + \delta X_z,\ Y_z + \delta Y_z, \end{array}\right\} \tag{11.46}$$

было *статически возможным.* Следовательно, компоненты напряжённого состояния (11.46) должны удовлетворять уравнениям (11.42), что даёт:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(X_x+\delta X_x)+\frac{\partial}{\partial y}(X_y+\delta X_y)+\frac{\partial}{\partial z}(X_z+\delta X_z)+\rho X=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(X_y+\delta X_y)+\frac{\partial}{\partial y}(Y_y+\delta Y_y)+\frac{\partial}{\partial z}(Y_z+\delta Y_z)+\rho Y=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(X_z+\delta X_z)+\frac{\partial}{\partial y}(Y_z+\delta Y_z)+\frac{\partial}{\partial z}(Z_z+\delta Z_z)+\rho Z=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.47)$$

Но так как компоненты напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y,\ X_z,\ Y_z$$

удовлетворяют уравнениям равновесия (11.42), то, вычитая (11.42) из (11.47), мы получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\delta X_z)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_y)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\delta Y_z)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_z)+\frac{\partial}{\partial z}(\delta Z_z)=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (11.48)$$

которым должны удовлетворять *шесть вариаций*

$$\delta X_x,\ \delta Y_y,\ \delta Z_z,\ \delta X_y,\ \delta X_z,\ \delta Y_z$$

шести компонентов *действительно существующего* в упругом теле напряжённого состояния, чтобы они были *статически возможными.* Далее, для того, чтобы напряжённое состояние (11.46) было статически возможным, необходимо произвести изменение существующей системы внешних поверхностных сил, характеризуемой компонентами

$$X_\nu,\ Y_\nu,\ Z_\nu,$$

удовлетворяющими граничным условиям (11.43), в новую систему поверхностных сил:

$$X_\nu+\delta X_\nu,\ Y_\nu+\delta Y_\nu,\ Z_\nu+\delta Z_\nu. \qquad (11.49)$$

Эта система (11.49) должна удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned}
X_\nu+\delta X_\nu&=(X_x+\delta X_x)\,l+(X_y+\delta X_y)\,m+(X_z+\delta X_z)\,n,\\
Y_\nu+\delta Y_\nu&=(X_y+\delta X_y)\,l+(Y_y+\delta Y_y)\,m+(Y_z+\delta Y_z)\,n,\\
Z_\nu+\delta Z_\nu&=(X_z+\delta X_z)\,l+(Y_z+\delta Y_z)\,m+(Z_z+\delta Z_z)\,n,
\end{aligned}$$

где l, m, n суть косинусы углов внешней нормали с осями координат. Вычитая из этих уравнений уравнения (11.43), которые, как было указано выше, должны быть удовлетворены, мы получим формулы, которые *дают те вариации внешних сил* δX_ν, δY_ν, δZ_ν, *которые необходимо сделать, чтобы система напряжений* (11.46) *была статически возможной:*

$$\left.\begin{aligned} \delta X_\nu &= (\delta X_x)\, l + (\delta X_y)\, m + (\delta X_z)\, n, \\ \delta Y_\nu &= (\delta X_y)\, l + (\delta Y_y)\, m + (\delta Y_z)\, n, \\ \delta Z_\nu &= (\delta X_z)\, l + (\delta Y_z)\, m + (\delta Z_z)\, n. \end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

Очевидно, что все условия геометрических связей при этой вариации напряжённого состояния упругого тела, должны быть удовлетворены. Напряжённому состоянию, действительно существующему в упругом теле

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y,\ X_z,\ Y_z,$$

соответствует энергия деформации, определяемая известной формулой

$$U = \iiint W\, dx\, dy\, dz. \tag{11.51}$$

Статически возможному напряжённому состоянию (11.46) будет соответствовать энергия деформации

$$U_1 = \iiint W_1\, dx\, dy\, dz, \tag{11.52}$$

причём для тел, подчиняющихся обобщённому закону Гука, W_1 есть такая же однородная функция второй степени относительно шести компонентов статически возможного напряжённого состояния (11.46), как W относительно компонентов действительно существующего напряжённого состояния. Поэтому имеем:

$$W_1 = W(X_x + \delta X_x, \ldots, Y_z + \delta Y_z) = W + \delta W + \delta^2 W, \tag{11.53}$$

где

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial X_x}\delta X_x + \frac{\partial W}{\partial Y_y}\delta Y_y + \ldots + \frac{\partial W}{\partial Y_z}\delta Y_z, \tag{11.54}$$

$$\delta^2 W = W(\delta X_x,\ \delta Y_y,\ \delta Z_z,\ \delta X_y,\ \delta X_z,\ \delta Y_z), \tag{11.55}$$

а следовательно, $\delta^2 W$ можно рассматривать как энергию деформации при напряжённом состоянии

$$\delta X_x,\ \delta Y_y,\ \delta Z_z,\ \delta X_y,\ \delta X_z,\ \delta Y_z,$$

которая есть величина существенно положительная. Поэтому имеем:

$$\delta^2 W > 0. \tag{11.56}$$

На основании известных формул Кастилиано (3.32) мы имеем из (11.54):

$$\delta W = e_{xx}\delta X_x + e_{yy}\delta Y_y + e_{zz}\delta Z_z + e_{xy}\delta X_y + e_{xz}\delta X_z + e_{yz}\delta Y_z. \tag{11.57}$$

Внося (11.53) в (11.52), мы получим:

$$U_1 = U + \delta U + \delta^2 U, \tag{11.58}$$

где имеем на основании (11.56):

$$\delta^2 U = \iiint \delta^2 W \, dx\, dy\, dz > 0, \tag{11.59}$$

а на основании (11.57) имеем:

$$\delta U = \iiint [e_{xx}\delta X_x + e_{yy}\delta Y_y + e_{zz}\delta Z_z + e_{xy}\delta X_y + \\ + e_{xz}\delta X_z + e_{yz}\delta Y_z]\, dx\, dy\, dz, \tag{11.60}$$

причём объёмные интегралы берутся по всему объёму упругого тела.

Входящие в формулу (11.60) шесть компонентов упругой деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}, действительно существующей в рассматриваемом упругом теле, связаны с действительно имеющимися в рассматриваемом теле упругими перемещениями u, v, w шестью известными соотношениями Коши:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & e_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{11.61}$$

Внося их в (11.60), мы можем произвести в правой части интегрирование по частям и применить формулу Грина. Мы будем иметь:

1) три соотношения вида:

$$\iiint e_{xx}(\delta X_x)\, dx\, dy\, dz = \iiint \frac{\partial u}{\partial x}(\delta X_x)\, dx\, dy\, dz = \\ = \iint u(\delta X_x)\, l d\Sigma - \iiint u \frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x)\, dx\, dy\, dz,$$

2) и три соотношения вида:

$$\iiint e_{xy}(\delta X_y)\, dx\, dy\, dz = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(\delta X_y)\, dx\, dy\, dz = \\ = \iint (lv + mu)(\delta X_y)\, d\Sigma - \iiint \left[u \frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y) + v \frac{\partial}{\partial x}(\delta X_y)\right] dx\, dy\, dz,$$

причём поверхностные интегралы распространены на всю поверхность упругого тела, а объёмные интегралы — на весь его объём. Подстановка этих шести соотношений в (11.60) с последующим приведением даёт следующее выражение для вариации энергии деформации:

$$\delta U = \iint \{u[l(\delta X_x) + m(\delta X_y) + n(\delta X_z)] + \\ + v[l(\delta X_y) + m(\delta Y_y) + n(\delta Y_z)] + \\ + w[l(\delta X_z) + m(\delta Y_z) + n(\delta Z_z)]\}\, d\Sigma - \\ - \iiint \left\{u\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta X_z)\right] + \right. \\ + v\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Y_z)\right] + \\ \left. + w\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Z_z)\right]\right\} dx\,dy\,dz.$$

Вследствие (11.48) и (11.50) выражение δU приводится к виду:

$$\delta U = \iint [u(\delta X_\nu) + v(\delta Y_\nu) + w(\delta Z_\nu)]\, d\Sigma \tag{11.62}$$

(здесь интеграл в правой части взят по всей поверхности упругого тела). Полученную нами формулу (11.62) мы будем называть *вариационной формулой Кастилиано.*

В правую её часть входят упругие перемещения u, v, w, действительно существующие в упругом теле, и те вариации (11.50) внешних поверхностных сил, которые надо сделать, чтобы вариированное состояние напряжений (11.46) было статически возможным. Правая часть формулы (11.62), очевидно, представляет работу, произведённую требуемыми приращениями внешних поверхностных сил на действительных перемещениях. Отбрасывая бесконечно малые второго порядка (т. е. вторую вариацию $\delta^2 U$), заключаем, что *статически возможное приращение энергии δU действительно существующей деформации равно работе, производимой статически потребными приращениями внешних поверхностных сил на действительно существующих упругих перемещениях.* Так как в формуле (11.62) упругие перемещения u, v, w суть действительно существующие в рассматриваемом упругом теле, то они не могут подвергаться вариированию, а потому, вводя обозначение

$$Э_1 = U - \iint [uX_\nu + vY_\nu + wZ_\nu]\, d\Sigma, \tag{11.63}$$

мы можем представить (11.60) в виде:

$$\delta Э_1 = 0; \tag{11.64}$$

из этого уравнения заключаем: *между всеми статически возможными напряжёнными состояниями в действительности имеет место то, для которого величина $Э_1$ имеет стационарное значение.*

Если мы предположим, что внешние поверхностные силы не будут меняться, т. е.

$$\delta X_\nu = \delta Y_\nu = \delta Z_\nu = 0, \tag{11.65}$$

то имеем из (11.62):

$$\delta U = 0. \tag{11.66}$$

Между тем как из (11.58) мы получим вследствие (11.59) и (11.66):

$$U_1 - U = \delta^2 U > 0. \tag{11.67}$$

Отсюда заключаем, что *статически возможная вариация существующего в упругом теле, при данных силах и граничных условиях, напряжённого состояния производится без изменения внешних поверхностных сил, если вариация энергии деформации равна нулю, а сама энергия деформации упругого тела принимает минимальное значение.*

Это и есть известное начало Кастилиано, играющее большую роль в строительной механике.

§ 122. Вывод тождественных соотношений Сен-Венана из начала Кастилиано.

Уравнение (11.66) получено для действительно существующего в упругом теле состояния деформации в предположении, что удовлетворены шесть тождественных соотношений Сен-Венана. Однако мы не делали подобного предположения относительно варированного напряжённого состояния (11.46), вследствие чего вариации

$$\delta X_x,\ \delta Y_y,\ \delta Z_z,\ \delta X_y,\ \delta X_z,\ \delta Y_z$$

не связаны никакими соотношениями кроме (11.48) и (11.50). Поэтому естественно ожидать, что тождественные соотношения Сен-Венана получаются как следствие вариационного уравнения (11.66). Это показано Саутуэллом (Southwell) в 1936 г.

Будем предполагать, что поверхностные силы не меняются, вследствие чего мы имеем три уравнения для точек границы:

$$\left.\begin{aligned} l\delta X_x + m\delta X_y + n\delta X_z &= 0,\\ l\delta X_y + m\delta Y_y + n\delta Y_z &= 0,\\ l\delta X_z + m\delta Y_z + n\delta Z_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.68}$$

и три уравнения равновесия для точек внутри объёма упругого тела:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\delta X_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta X_y + \frac{\partial}{\partial z}\delta X_z &= 0,\\ \frac{\partial}{\partial x}\delta X_y + \frac{\partial}{\partial y}\delta Y_y + \frac{\partial}{\partial z}\delta Y_z &= 0,\\ \frac{\partial}{\partial x}\delta X_z + \frac{\partial}{\partial y}\delta Y_z + \frac{\partial}{\partial z}\delta Z_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.69}$$

При этих условиях имеет место вариационное уравнение Кастилиано:

$$\delta U = \iiint [e_{xx}\delta X_x + e_{yy}\delta Y_y + e_{zz}\delta Z_z + e_{yz}\delta Y_z + \\ + e_{zx}\delta X_z + e_{xy}\delta X_y]\, dx\, dy\, dz = 0. \quad (11.70)$$

Вместо шести компонентов действительной деформации

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{zy},\ e_{zx},\ e_{xy}$$

можно, следуя Саутуэллу, ввести шесть новых функций f_1, f_2, f_3, F_1, F_2, F_3, определяемых из шести условий:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e_{xx},\quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = e_{yy},\quad \frac{\partial f_3}{\partial z} = e_{zz}, \quad (11.71)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} - F_1 = e_{zy}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} - F_2 = e_{zx}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} - F_3 = e_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (11.72)$$

Внося (11.71) и (11.72) в (11.70), мы получим:

$$\iiint \left[(\delta X_x)\frac{\partial f_1}{\partial x} + (\delta Y_y)\frac{\partial f_2}{\partial y} + (\delta Z_z)\frac{\partial f_3}{\partial z} + (\delta Y_z)\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \\ + (\delta X_z)\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + (\delta X_y)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dz - \\ - \iiint [F_1(\delta Y_z) + F_2(\delta X_z) + F_3(\delta X_y)]\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Интегрируя первый объёмный интеграл по частям, мы получим (l, m, n — косинусы углов внешней нормали с осями):

$$\iint [(l\delta X_x + m\delta X_y + n\delta X_z) f_1 + (l\delta X_y + m\delta Y_y + n\delta Y_z) f_2 + \\ + (l\delta X_z + m\delta Y_z + n\delta Z_z) f_3]\, d\Sigma - \\ - \iiint \left\{ f_1\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta X_z)\right] + \\ + f_2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Y_z)\right] + \\ + f_3\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Z_z)\right]\right\} dx\, dy\, dz - \\ - \iiint [F_1(\delta Y_z) + F_2(\delta X_z) + F_3(\delta X_y)]\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Вследствие (11.68) и (11.69) первый и второй интегралы левой части уничтожаются, и остаётся уравнение

$$\delta U = -\iiint [F_1(\delta Y_z) + F_2(\delta X_z) + F_3(\delta X_y)]\, dx\, dy\, dz = 0 \quad (11.73)$$

(интеграл взят по всему объёму упругого тела).

Пусть теперь α, β, γ суть три произвольные функции x, y, z. Умножим первое уравнение системы (11.68) на α, второе — на β, а третье — на γ и затем сложим их. Полученную сумму умножим на $d\Sigma$ (элемент поверхности тела) и затем проинтегрируем по всей поверхности тела. Это даёт:

$$\iint [(l\delta X_x + m\delta X_y + n\delta X_z)\alpha + (l\delta X_y + m\delta Y_y + n\delta Y_z)\beta + \\ + (l\delta X_z + m\delta Y_z + n\delta Z_z)\gamma]\, d\Sigma = 0.$$

Представим этот интеграл в виде:

$$\iint [l(\alpha\delta X_x + \beta\delta X_y + \gamma\delta X_z) + m(\alpha\delta X_y + \beta\delta Y_y + \gamma\delta Y_z) + \\ + n(\alpha\delta X_z + \beta\delta Y_z + \gamma\delta Z_z)]\, d\Sigma = 0. \quad (11.74)$$

Здесь l, m, n суть косинусы углов внешней нормали с осями координат. Мы можем приложить сюда известную формулу Грина:

$$\iiint \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz = \iint (ul + vm + wn)\, d\Sigma,$$

откуда следует уравнение:

$$\iiint \left[\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\delta X_x + \beta\delta X_y + \gamma\delta X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\delta X_y + \beta\delta Y_y + \gamma\delta Y_z) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\delta X_z + \beta\delta Y_z + \gamma\delta Z_z)\right] dx\, dy\, dz = 0.$$

Выполняя дифференцирование, имеем:

$$\iiint \left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta X_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta X_y + \frac{\partial}{\partial z}\delta X_z\right) + \\ + \beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta X_y + \frac{\partial}{\partial y}\delta Y_y + \frac{\partial}{\partial z}\delta Y_z\right) + \\ + \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta X_z + \frac{\partial}{\partial y}\delta Y_z + \frac{\partial}{\partial z}\delta Z_z\right)\right] dx\, dy\, dz + \\ + \iiint \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\delta X_x + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\delta Y_y + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\delta Z_z + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\delta Y_z + \\ + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\delta X_z + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\delta X_y\right] dx\, dy\, dz = 0.$$

Вследствие условий (11.69) первый объёмный интеграл здесь пропадает. Затем, ввиду того, что α, β, γ до сих пор произвольны, мы потребуем, чтобы

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0. \quad (11.75)$$

Поэтому останется только уравнение:

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\delta Y_z+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\delta X_z+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\delta X_y\right]dx\,dy\,dz=0 \quad (11.76)$$

(интеграл взят по всему объёму упругого тела).

В уравнениях (11.76) и (11.73) объёмные интегралы распространены на один и тот же объём упругого тела. Поэтому по известному приёму вариационного исчисления мы получим соотношения:

$$F_1=k\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right),\ F_2=k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right),\ F_3=k\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right). \quad (11.77)$$

Из (11.77) имеем вследствие (11.75):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\,\partial z}&=k\left(\frac{\partial^3\beta}{\partial z^2\partial y}+\frac{\partial^3\gamma}{\partial z\,\partial y^2}\right)=0,\\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial z}&=k\left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^2\partial z}+\frac{\partial^3\alpha}{\partial z^2\partial x}\right)=0,\\
\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y}&=k\left(\frac{\partial^3\beta}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\alpha}{\partial y^2\partial x}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \quad (11.78)$$

Также вследствие (11.75) имеем соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)&=2k\frac{\partial^3\alpha}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)&=2k\frac{\partial^3\beta}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0,\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)&=2k\frac{\partial^3\gamma}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (11.79)$$

Но из (11.72) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
F_1&=-e_{yz}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\right),\\
F_2&=-e_{xz}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\right),\\
F_3&=-e_{xy}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (11.80)$$

Внося (11.80) в (11.79), получим соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)+2\frac{\partial^3 f_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)+2\frac{\partial^3 f_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)+2\frac{\partial^3 f_3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.$$

Но из (11.71) имеем:

$$\frac{\partial^3 f_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 f_3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}.$$

Подставляя в предыдущие соотношения, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)&=2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)&=2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)&=2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.81)$$

Это есть вторая группа тождественных соотношений Сен-Венана, совпадающая с формулами (1.110).

Внося (11.80) в (11.78), получим соотношения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}=-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)=$$
$$=-\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)=0.$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial z}=-\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)=$$
$$=-\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)=0.$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)=$$
$$=-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)=0.$$

Вследствие (11.71) эти соотношения дают:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\,\partial z}&=\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2 e_{xz}}{\partial x\,\partial z}&=\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2},\\
\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.82)$$

Это есть первая группа тождественных соотношений Сен-Венана, совпадающая с формулами (1.107).

Таким образом, мы установили, что шесть тождественных соотношений Сен-Венана являются следствием вариационного уравнения Кастилиано (11.70). Это и должно было быть, так как статически возможное напряжённое состояние в теле отличается от того напряжённого состояния, которое имеет место при действительном равновесии, *именно тем, что при этом* *последнем удовлетворены тождественные соотношения Сен-Венана.* Этим самым Саутуэлл устанавливает геометрическое значение начала Кастилиано, которое просто является выражением начала неразрывности деформаций, выраженным в энергетической форме. Теперь становится ясным то глубокое различие, которое существует между вариационным началом возможных работ Лагранжа и вариационным началом Кастилиано: *первое из них есть начало статики, а второе есть геометрическое условие неразрывности деформации.*

Саутуэлл первоначально дал своей теореме иное доказательство, основанное на применении решений Максвелла и Морера [формулы (4.27) и (4.28)]. Для двухмерной задачи теории упругости теорема Саутуэлла может быть легко доказана. В этом случае вариационное уравнение (11.70) принимает вид

$$\delta U=\iint (e_{xx}\delta X_x+e_{yy}\delta Y_y+e_{xy}\delta X_y)\,d\Sigma=0, \tag{11.83}$$

где $d\Sigma$ — элемент площади.

Уравнения (11.68) и (11.69) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} l\delta X_x+m\delta X_y&=0,\\ l\delta X_y+m\delta Y_y&=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.84}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\delta X_x+\frac{\partial}{\partial y}\delta X_y&=0,\\ \frac{\partial}{\partial x}\delta X_y+\frac{\partial}{\partial y}\delta Y_y&=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.85}$$

Мы удовлетворим системе (11.85), положив по методу Эри:

$$\delta X_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \delta Y_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \delta X_y=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \tag{11.86}$$

где F — произвольная функция. Внося (11.86) в (11.83) и интегрируя по частям, имеем:

$$\delta U=\oint\left(\frac{\partial F}{\partial y}me_{xx}+\frac{\partial F}{\partial x}le_{yy}+\frac{\partial F}{\partial x}me_{xy}\right)ds-\\ -\iint\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)\right]dx\,dy, \tag{11.87}$$

где контурный интеграл взят по всей границе, а l, m — косинусы углов внешней нормали к контуру с осями координат. Далее, снова интегрируя по частям, имеем:

$$\iint\left[\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=\\ =\oint F\left[m\frac{\partial e_{xx}}{\partial y}+l\left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial y}\right)\right]ds-\\ -\iint F\left[\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}\right]dx\,dy. \tag{11.88}$$

Внося (11.88) в (11.87), мы получим:

$$\delta U = \oint \left[\frac{\partial F}{\partial y} m e_{xx} + \frac{\partial F}{\partial x} (l e_{yy} + m e_{xy}) \right] ds - \\ - \oint F \left[m \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} + l \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} \right) \right] ds + \\ + \iint F \left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \, \partial y} \right) ds = 0. \qquad (11.89)$$

Внося (11.86) в (11.84) и применяя формулы

$$l = \frac{dy}{ds}, \quad m = -\frac{dx}{ds},$$

мы получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0.$$

Из этого следует, что на контуре мы имеем:

$$F = Ax + By + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

Очевидно, что в случае односвязного сечения мы можем принять на контуре

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \qquad (11.90)$$

Внося (11.90) в (11.89), мы получим:

$$\delta U = \iint F \left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \, \partial y} \right) dx \, dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \, \partial y}, \qquad (11.91)$$

а это и есть тождественное соотношение Сен-Венана для двухмерной задачи.

Изложенное здесь доказательство было дано автором ещё в 1935 г.

ГЛАВА XII.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

§ 123. Гипотеза Франца Неймана.

Пусть θ есть изменение температуры в данной точке упругого тела, отсчитываемое от некоторого начального состояния постоянной по всему телу температуры. Очевидно, что θ есть функция координат x, y, z и времени t, удовлетворяющая уравнению теплопроводности Фурье, начальному и граничному условиям. Вырежем из тела бесконечно малый прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям. Температуру внутри него мы можем считать распределённой равномерно, и если бы он мог расширяться свободно, то он остался бы прямоугольным параллелепипедом. Компоненты этой деформации будут даны формулами:

$$\begin{aligned} e'_{xx} &= e'_{yy} = e'_{zz} = a\theta, \\ e'_{yz} &= e'_{zx} = e'_{xy} = 0, \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $a = \frac{1}{3} c$ есть постоянный коэффициент линейного расширения от температуры, причём c есть коэффициент кубического температурного расширения. В действительности, тепловая деформация вырезанного нами параллелепипеда встречает упругое сопротивление, и в теле возникает упругая деформация. Если компоненты полной деформации в теле мы обозначим через

$$e_{xx}, \; e_{yy}, \; e_{zz}, \; e_{xy}, \; e_{yz}, \; e_{zx}, \tag{12.2}$$

то компоненты упругой деформации в теле будут даны формулами:

$$\left.\begin{aligned} e''_{xx} &= e_{xx} - e'_{xx}, & e''_{yz} &= e_{yz} - e'_{yz}, \\ e''_{yy} &= e_{yy} - e'_{yy}, & e''_{zx} &= e_{zx} - e'_{zx}, \\ e''_{zz} &= e_{zz} - e'_{zz}, & e''_{xy} &= e_{xy} - e'_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Упругое напряжённое состояние дано компонентами:

$$X_x, \; Y_y, \; Z_z, \; Y_z, \; X_z, \; X_y. \tag{12.4}$$

Гипотеза Франца Неймана состоит в том, что:

1) Компоненты напряжённого состояния (12.4) связаны с компонентами упругой деформации (12.3) обычными соотношениями закона Гука:

$$\left.\begin{aligned} e''_{xx} &= \frac{1}{E}[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)],\\ e''_{yy} &= \frac{1}{E}[Y_y - \sigma(Z_z + X_x)],\\ e''_{zz} &= \frac{1}{E}[Z_z - \sigma(X_x + Y_y)],\\ e''_{yz} &= \frac{1}{\mu}Y_z, \quad e''_{zx} = \frac{1}{\mu}X_z, \quad e''_{xy} = \frac{1}{\mu}X_y, \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

где E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига;

2) Компоненты полной деформации (12.2) связаны с компонентами перемещения u, v, w обычными соотношениями Коши:

$$\begin{gathered} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},\\ e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{gathered} \tag{12.6}$$

В случае значительных изменений температуры θ объёмное расширение, происходящее в результате повышения температуры на θ, уже не будет пропорционально θ. Теория в этом случае требует изменений.

§ 124. Термоэластические уравнения Дюгамеля-Неймана.

Решая первые три уравнения (12.5) относительно X_x, Y_y, Z_z, мы найдём:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\sigma E \Delta''}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} + \frac{E}{1+\sigma}e''_{xx},\\ Y_y &= \frac{\sigma E \Delta''}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} + \frac{E}{1+\sigma}e''_{yy},\\ Z_z &= \frac{\sigma E \Delta''}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} + \frac{E}{(1+\sigma)}e''_{zz}, \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

где

$$\Delta'' = e''_{xx} + e''_{yy} + e''_{zz}.$$

Из формул (3.72) имеем:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)};$$

и формулы (12.7) преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta'' + 2\mu e''_{xx}, \\ Y_y &= \lambda\Delta'' + 2\mu e''_{yy}, \\ Z_z &= \lambda\Delta'' + 2\mu e''_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Согласно (12.3), мы получим:

$$\Delta'' = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} - (e'_{xx} + e'_{yy} + e'_{zz}).$$

Подставляя сюда (12.1), имеем:

$$\Delta'' = \Delta - 3\alpha\theta, \tag{12.9}$$

причём введено обычное обозначение

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \tag{12.10}$$

Внося (12.3) в (12.8), мы получим на основании (12.9):

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta, \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta, \\ Z_z &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

Также из (12.5), (12.3) и (12.1) имеем:

$$Y_z = \mu e_{yz}, \quad X_z = \mu e_{xz}, \quad X_y = \mu e_{xy}. \tag{12.12}$$

Вводя обозначение Лява

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)c, \tag{12.13}$$

мы получим из (12.11) и (12.12) окончательные выражения для связи между шестью компонентами напряжённого состояния (12.4) и шестью компонентами полной деформации (12.2):

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} - \beta\theta, \\ Y_y &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} - \beta\theta, \\ Z_z &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} - \beta\theta, \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \quad X_z = \mu e_{xz}, \quad X_y = \mu e_{xy}, \\ \Delta &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \quad \beta = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)c. \end{aligned}\right\} \tag{12.14}$$

Шесть компонентов полной деформации, входящие сюда, выражаются формулами (12.6).

Подставляя (12.14) в уравнения упругого движения Коши

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.15)$$

мы получим следующие дифференциальные уравнения, называемые термоэластическими уравнениями Дюгамеля-Неймана:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)-\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)-\beta\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-\beta\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,\\
&\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.16)$$

Дюгамель получил эти уравнения немного ранее Франца Неймана, исходя из метода системы материальных точек, связанных специальными молекулярными силами в духе Коши и Пуассона.

Величина θ должна быть задана, так как в этом случае только и возможно решение уравнений (12.16) при заданных начальных и граничных условиях.

При составлении граничных условий мы применяем обычные формулы:

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu&=X_x l+X_y m+X_z n,\\
Y_\nu&=X_y l+Y_y m+Y_z n,\\
Z_\nu&=X_z l+Y_z m+Z_z n,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.17)$$

причём должны внести сюда компоненты напряжённого состояния из формул (12.14).

§ 125. Температурные напряжения шара при симметричном относительно центра распределении температуры.

Задача эта была решена Дюгамелем и Францем Нейманом. Так как распределение температуры относительно центра шара предположено симметричным, то θ есть функция расстояния r от центра шара, в котором примем начало координат. Температуру примем не зависящей от времени и предположим отсутствие массовых сил. Уравнения (12.16) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u-\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v-\beta\frac{\partial\theta}{\partial y}&=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w-\beta\frac{\partial\theta}{\partial z}&=0,\\\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&.\end{aligned}\right\}\tag{12.18}$$

Ввиду симметрии будем искать решение уравнений (12.18) в виде:

$$u=xf(r),\quad v=yf(r),\quad w=zf(r),\qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).\tag{12.19}$$

Внося (12.19) в (12.18), мы получим:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right)-\frac{\beta}{r}\frac{d\theta}{dr}=0.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид:

$$f(r)=C_1+\frac{C_2}{r^3}+\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\psi(r),\tag{12.20}$$

где

$$\psi(r)=\frac{1}{r^3}\int_0^r\theta(r)\,r^2\,dr,\tag{12.21}$$

а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Внося (12.19) в (12.14), мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}X_x&=\lambda\Delta+2\mu\left(f+\frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta,\\Y_y&=\lambda\Delta+2\mu\left(f+\frac{y^2}{r}\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta,\\Z_z&=\lambda\Delta+2\mu\left(f+\frac{z^2}{r}\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta,\\Y_z&=2\mu\frac{df}{dr}\left(\frac{yz}{r}\right),\\X_z&=2\mu\frac{df}{dr}\left(\frac{zx}{r}\right),\\X_y&=2\mu\frac{df}{dr}\left(\frac{xy}{r}\right).\end{aligned}\right\}\tag{12.22}$$

$$\Delta=3f+r\frac{df}{dr}.\tag{12.23}$$

Для составления граничных условий на сферической поверхности мы должны внести в формулы (12.17) выражения:

$$l=\frac{x}{r}, \quad m=\frac{y}{r}, \quad n=\frac{z}{r}$$

и подставить компоненты напряжённого состояния по формулам (12.22). Это даёт для первого уравнения:

$$X_\nu=(\lambda\Delta-\beta\theta)\frac{x}{r}+2\mu\left(f+\frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}\right)\frac{x}{r}+2\mu\frac{df}{dr}\frac{y^2x}{r^2}+2\mu\frac{df}{dr}\frac{z^2x}{r^2}=$$
$$=(\lambda\Delta-\beta\theta)\frac{x}{r}+2\mu\left(f+\frac{x^2+y^2+z^2}{r}\frac{df}{dr}\right)\frac{x}{r}=$$
$$=\left[\lambda\Delta-\beta\theta+2\mu\left(f+r\frac{df}{dr}\right)\right]\frac{x}{r},$$

и граничные условия задачи примут вид (два другие уравнения получаем по аналогии):

$$\left.\begin{aligned} X_\nu&=\left[\lambda\Delta+2\mu\left(f+r\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta\right]\frac{x}{r},\\ Y_\nu&=\left[\lambda\Delta+2\mu\left(f+r\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta\right]\frac{y}{r},\\ Z_\nu&=\left[\lambda\Delta+2\mu\left(f+r\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta\right]\frac{z}{r}.\end{aligned}\right\} \tag{12.24}$$

Из этих формул следует, что на элементарной площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r, действует нормальное напряжение:

$$P=\lambda\Delta+2\mu\left(f+r\frac{df}{dr}\right)-\beta\theta. \tag{12.25}$$

Возьмём теперь элементарную площадку, нормаль к которой перпендикулярна к радиусу-вектору r. Следовательно, косинусы l, m, n — нормали к этой площадке — удовлетворяют условию перпендикулярности:

$$lx+my+nz=0. \tag{12.26}$$

Внося (12.22) в (12.17), имеем для компонентов напряжения на этой площадке выражения:

$$X_\nu=\lambda\Delta l+2\mu\left(f+\frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}\right)l+2\mu\frac{df}{dr}\left(\frac{xy}{r}\right)m+2\mu\frac{df}{dr}\left(\frac{xz}{r}\right)n-\beta\theta l=$$
$$=(\lambda\Delta-\beta\theta+2\mu f)l+2\mu\frac{x}{r}\frac{df}{dr}(lx+my+nz).$$

Также найдём:

$$Y_\nu=(\lambda\Delta-\beta\theta+2\mu f)m+2\mu\frac{y}{r}\frac{df}{dr}(lx+my+nz),$$
$$Z_\nu=(\lambda\Delta-\beta\theta+2\mu f)n+2\mu\frac{z}{r}\frac{df}{dr}(lx+my+nz).$$

Вследствие условия (12.26) мы имеем отсюда:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= (\lambda\Delta - \beta\theta + 2\mu f)l, \\ Y_\nu &= (\lambda\Delta - \beta\theta + 2\mu f)m, \\ Z_\nu &= (\lambda\Delta - \beta\theta + 2\mu f)n. \end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

Из этих формул следует, что на рассматриваемой элементарной площадке существует нормальное напряжение:

$$T = \lambda\Delta - \beta\theta + 2\mu f. \tag{12.28}$$

В случае сферической оболочки, ограниченной сферами радиусов b и a $(b < a)$ мы имеем два граничных условия: одно на внутренней полости $r = b$ и одно на внешней поверхности $r = a$.

Составим выражение нормального напряжения P на площадке, перпендикулярной к радиусу-вектору r, для чего внесём (12.23) в (12.25):

$$P = (3\lambda + 2\mu)f + (\lambda + 2\mu)r\frac{df}{dr} - \beta\theta.$$

Подставляя $f(r)$ из (12.20), мы получим:

$$P = (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2 + \beta\left[\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\psi + r\frac{d\psi}{dr}\right] - \beta\theta.$$

Так как из (12.21) имеем, дифференцируя,

$$r\frac{d\psi}{dr} = \theta - 3\psi,$$

то получим после приведения:

$$P = (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu}\psi(r). \tag{12.29}$$

Граничное условие состоит в том, что

$$P = 0 \text{ для } r = b \text{ и для } r = a \tag{12.30}$$

Подставляя это в (12.29), получим:

$$\left.\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{a^3}C_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu}\psi(a) = 0, \\ (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{b^3}C_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu}\psi(b) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

решая эти уравнения, найдём:

$$\left.\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu)C_1 &= \frac{4\mu\beta\,[a^3\psi(a) - b^3\psi(b)]}{(\lambda + 2\mu)(a^3 - b^3)}, \\ C_2 &= \frac{\beta a^3 b^3\,[\psi(a) - \psi(b)]}{(\lambda + 2\mu)(a^3 - b^3)}. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Так как C_1 и C_2 найдены, то мы можем по формулам (12.29) и (12.28) вычислить напряжённое состояние в оболочке.

В случае сплошного шара надо положить $b=0$, тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} C_2&=0,\\ (3\lambda+2\mu)C_1&=\frac{4\mu\beta}{\lambda+2\mu}\psi(a). \end{aligned}\right\} \tag{12.33}$$

Также найдём:

$$P=\frac{4\mu\beta}{\lambda+2\mu}[\psi(a)-\psi(r)]. \tag{12.34}$$

Внося (12.23) в (12.28), найдём:

$$T=(3\lambda+2\mu)f+\lambda r\frac{df}{dr}-\beta\theta. \tag{12.35}$$

Подставляя сюда для сплошного шара

$$f(r)=C_1+\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\psi(r),$$

найдём:

$$T=\frac{4\mu\beta}{\lambda+2\mu}\psi(a)+\frac{2\mu\beta}{\lambda+2\mu}[\psi(r)-\theta]. \tag{12.36}$$

Формулы (12.34) и (12.36) решают задачу о термических напряжениях сплошного шара при данном $\theta(r)$.

§ 126. Температурные напряжения в случае двухмерной задачи при симметричном относительно центра распределении температуры.

В отсутствии массовых сил уравнения (12.16) примут в рассматриваемой задаче вид

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u-\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}&=0,\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v-\beta\frac{\partial\theta}{\partial y}&=0,\\ \Delta&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{12.37}$$

Здесь θ есть функция от r, причём $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Ввиду симметрии относительно начала O примем:

$$\left.\begin{aligned} u&=xf(r),\\ v&=yf(r). \end{aligned}\right\} \tag{12.38}$$

Внося (12.38) в (12.37), мы легко получим:

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{df}{dr}=\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\frac{d\theta}{dr}. \tag{12.39}$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$f = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \psi(r), \tag{12.40}$$

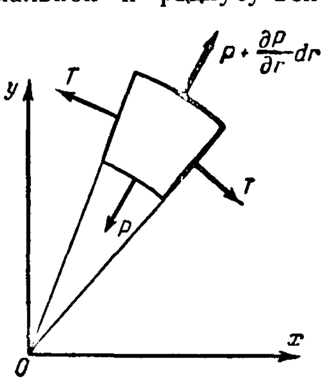
где

$$\psi(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r\theta(r)\,dr. \tag{12.41}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные интеграции.

На элементарной площадке, нормальной к радиусу-вектору r, будет существовать одно нормальное напряжение (фиг. 33)

$$P = \lambda\Delta + 2\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{ux + vy}{r}\right) - \beta\theta. \tag{12.42}$$



Фиг. 33.

Сюда надо внести

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 2f + r\frac{df}{dr}, \\ \frac{ux + vy}{r} &= rf. \end{aligned}\right\} \tag{12.43}$$

Внося (12.43) в (12.42), получим:

$$P = 2(\lambda + \mu)f + (\lambda + 2\mu)r\frac{df}{dr} - \beta\theta. \tag{12.44}$$

Согласно равенству (12.40) последнее выражение примет вид:

$$P = 2(\lambda + \mu)C_1 - \frac{2\mu}{r^2}C_2 + \frac{2\beta(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\psi + \beta r\frac{d\psi}{dr} - \beta\theta. \tag{12.45}$$

Но из (12.41) имеем:

$$r\frac{d\psi}{dr} = \theta - 2\psi. \tag{12.46}$$

Внося (12.46) в (12.45), получим окончательно:

$$P = 2(\lambda + \mu)C_1 - \frac{2\mu}{r^2}C_2 - \frac{2\beta\mu}{\lambda + 2\mu}\psi. \tag{12.47}$$

Для определения C_1 и C_2 мы должны удовлетворить двум граничным условиям: одному для $r = a$, другому для $r = b$, причём примем $b < a$.

В случае сплошного цилиндра $C_2 = 0$, произвольная постоянная C_1 определяется из условия отсутствия напряжений на внешней боковой поверхности цилиндра, т. е.

$$P = 0 \text{ при } r = a.$$

Тогда из выражения (12.47) найдём:

$$2(\lambda+\mu)C_1-\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}\psi(a)=0,$$

откуда имеем:

$$C_1=\frac{\beta\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\psi(a). \tag{12.48}$$

Для $f(r)$ в этом случае получим:

$$f(r)=C_1+\frac{\beta}{\lambda+2\mu}\psi(r). \tag{12.49}$$

На элементарной площадке, нормаль к которой перпендикулярна к радиусу-вектору r (фиг. 33), действует только нормальное напряжение

$$T=\lambda\Delta-\beta\theta+2\mu f, \tag{12.50}$$

что вследствие (12.43) даёт:

$$T=2(\lambda+\mu)f+\lambda r\frac{df}{dr}-\beta\theta. \tag{12.51}$$

Учитывая соотношение (12.40), получим:

$$T=2(\lambda+\mu)C_1+\frac{2\mu}{r^2}C_2+\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}[\psi(r)-\theta]. \tag{12.52}$$

В случае сплошного цилиндра получим:

$$\left.\begin{aligned}T&=2(\lambda+\mu)C_1+\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}[\psi(r)-\theta],\\ P&=2(\lambda+\mu)C_1-\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}\psi(r).\end{aligned}\right\} \tag{12.53}$$

Внося сюда C_1 из (12.48), получим:

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}[\psi(a)-\psi(r)],\\ T&=\frac{2\beta\mu}{\lambda+2\mu}[\psi(a)+\psi(r)-\theta],\\ \psi(a)&=\frac{1}{a^2}\int_0^a r\theta(r)\,dr;\quad \psi(r)=\frac{1}{r^2}\int_0^r r\theta(r)\,dr.\end{aligned}\right\} \tag{12.54}$$

Если приять, что полная деформация

$$e_{zz}=0$$

без равенства нулю отдельно упругой и температурной деформации, то величина β будет даваться прежней формулой (12.13). Если же принять равными нулю

$$e'_{zz} \text{ и } e''_{zz},$$

то величина β определится из фурмулы

$$\beta = 2(\lambda + \mu)\alpha.$$

В случае определения температурных напряжений в очень тонких дисках мы должны рассматривать плоское напряжённое состояние. Поэтому в уравнениях (12.37) надо заменить λ по формуле (8.21):

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu},$$

а величину β определить из условия $Z_z = 0$, что нам даст

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta = 0.$$

Откуда

$$e_{zz} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu}\Delta_1 + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha\theta}{\lambda + 2\mu}.$$

Подставляя эту формулу в выражение для Δ, мы получим:

$$\Delta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta_1 + \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha\theta}{\lambda + 2\mu}.$$

Внося это в формулы (12.11), мы легко найдём:

$$X_x = \lambda'\Delta_1 + 2\mu e_{xx} - \beta_1\theta,$$
$$Y_y = \lambda'\Delta_1 + 2\mu e_{yy} - \beta_1\theta,$$

где β_1 имеет следующее значение:

$$\beta_1 = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\alpha.$$

Формулы (12.54) примут вид

$$P = \frac{2\beta_1\mu}{\lambda' + 2\mu}[\psi(a) - \psi(r)],$$
$$T = \frac{2\beta_1\mu}{\lambda' + 2\mu}[\psi(a) + \psi(r) - \theta].$$

Подставляя сюда значение β_1 и λ', получим:

$$\frac{2\beta_1\mu}{\lambda' + 2\mu} = E\alpha,$$

где E дано формулой (3.64).

§ 127. Начальные напряжения.

В § 29 мы сделали предположение, что в упругом теле в естественном недеформированном состоянии отсутствует напряжённое состояние, и что возникающее в теле напряжённое состояние зависит только от той деформации, которая произошла от приложенных к нему сил или перемещений.

При приложении теории упругости к задачам геофизики, а также к упругим телам, встречающимся в технике, мы часто должны отказываться от предположения, что в изучаемом нами теле нет упругих напряжений, появившихся в этом теле в процессе его природного образования или технического производства. Такие напряжения называются начальными. Вычисление их представляет большие трудности, а в ряде случаев оно вовсе невыполнимо.

Предполагая, что начальное напряжённое состояние такое, что уравнения равновесия и граничные условия удовлетворены, мы будем иметь следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x^0}{\partial x}+\frac{\partial X_y^0}{\partial y}+\frac{\partial X_z^0}{\partial z}+\rho_0 X_0=0,\\
&\frac{\partial X_y^0}{\partial x}+\frac{\partial Y_y^0}{\partial y}+\frac{\partial Y_z^0}{\partial z}+\rho_0 Y_0=0,\\
&\frac{\partial X_z^0}{\partial x}+\frac{\partial Y_z^0}{\partial y}+\frac{\partial Z_z^0}{\partial z}+\rho_0 Z_0=0,
\end{aligned}\right\}\tag{12.55}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&X_x^0\cos(\nu_0, x)+X_y^0\cos(\nu_0, y)+X_z^0\cos(\nu_0, z)=0,\\
&X_y^0\cos(\nu_0, x)+Y_y^0\cos(\nu_0, y)+Y_z^0\cos(\nu_0, z)=0,\\
&X_z^0\cos(\nu_0, x)+Y_z^0\cos(\nu_0, y)+Z_z^0\cos(\nu_0, z)=0,
\end{aligned}\right\}\tag{12.56}$$

где обозначено: X_x^0, Y_y^0, Z_z^0, X_y^0, X_z^0, Y_z^0 — компоненты начального напряжённого состояния, ρ_0 — плотность материала тела в начальном состоянии, X_0, Y_0, Z_0 — компоненты массовых сил в начальном состоянии тела, и ν_0 — направление внешней нормали к поверхности упругого тела в начальном состоянии.

Обозначим напряжённое состояние под действием новых массовых и поверхностных сил через

$$X_x^0+X_x,\quad Y_y^0+Y_y',\quad Z_z^0+Z_z',\quad X_y^0+X_y',\quad X_z^0+X_z',\quad Y_z^0+Y_z',$$

тогда уравнения упругого равновесия будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(X_x^0+X_x')+\frac{\partial}{\partial y}(X_y^0+X_y')+\frac{\partial}{\partial z}(X_z^0+X_z')+\\
&\qquad\qquad+(\rho_0+\rho')(X_0+X')=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(X_y^0+X_y')+\frac{\partial}{\partial y}(Y_y^0+Y_y')+\frac{\partial}{\partial z}(Y_z^0+Y_z')+\\
&\qquad\qquad+(\rho_0+\rho')(Y_0+Y')=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(X_z^0+X_z')+\frac{\partial}{\partial y}(Y_z^0+Y_z')+\frac{\partial}{\partial z}(Z_z^0+Z_z')+\\
&\qquad\qquad+(\rho_0+\rho')(Z_0+Z')=0,
\end{aligned}\right\}\tag{12.57}$$

где $\rho_0+\rho'$ — есть плотность в деформированном состоянии, а X_0+X', Y_0+Y', Z_0+Z' суть компоненты массовых сил в деформированном состоянии.

Граничные условия теперь будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(X_x^0+X_x')\cos(\nu, x)+(X_y^0+X_y')\cos(\nu, y)+\\
&\qquad\qquad+(X_z^0+X_z')\cos(\nu, z)=X_\nu,\\
&(X_y^0+X_y')\cos(\nu, x)+(Y_y^0+Y_y')\cos(\nu, y)+\\
&\qquad\qquad+(Y_z^0+Y_z')\cos(\nu, z)=Y_\nu,\\
&(X_z^0+X_z')\cos(\nu, x)+(Y_z^0+Y_z')\cos(\nu, y)+\\
&\qquad\qquad+(Z_z^0+Z_z')\cos(\nu, z)=Z_\nu,
\end{aligned}\right\} \tag{12.58}$$

где X_ν, Y_ν, Z_ν суть напряжения, действующие на деформированной поверхности, а ν — направление внешней нормали к деформированной поверхности.

Если смещения малы, то соотношения (12.57) и (12.58) могут быть преобразованы при помощи соотношений (12.55) и (12.56). В результате мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x'}{\partial x}+\frac{\partial X_y'}{\partial y}+\frac{\partial X_z'}{\partial z}+\rho_0 X'+\rho' X_0=0,\\
&\frac{\partial X_y'}{\partial x}+\frac{\partial Y_y'}{\partial y}+\frac{\partial Y_z'}{\partial z}+\rho_0 Y'+\rho' Y_0=0,\\
&\frac{\partial X_z'}{\partial x}+\frac{\partial Y_z'}{\partial y}+\frac{\partial Z_z'}{\partial z}+\rho_0 Z'+\rho' Z_0=0,
\end{aligned}\right\} \tag{12.59}$$

а граничные условия примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&X_x'\cos(\nu, x)+X_y'\cos(\nu, y)+X_z'\cos(\nu, z)=\\
&\qquad=X_\nu-X_x^0[\cos(\nu, x)-\cos(\nu_0, x)]-\\
&-X_y^0[\cos(\nu, y)-\cos(\nu_0, y)]-X_z^0[\cos(\nu, z)-\cos(\nu_0, z)],\\
&X_y'\cos(\nu, x)+Y_y'\cos(\nu, y)+Y_z'\cos(\nu, z)=\\
&\qquad=Y_\nu-X_y^0[\cos(\nu, x)-\cos(\nu_0, x)]-\\
&-Y_y^0[\cos(\nu, y)-\cos(\nu_0, y)]-Y_z^0[\cos(\nu, z)-\cos(\nu_0, z)],\\
&X_z'\cos(\nu, x)+Y_z'\cos(\nu, y)+Z_z'\cos(\nu, z)=\\
&\qquad=Z_\nu-X_z^0[\cos(\nu, x)-\cos(\nu_0, x)]-\\
&-Y_z^0[\cos(\nu, y)-\cos(\nu_0, y)]-Z_z^0[\cos(\nu, z)-\cos(\nu_0, z)].
\end{aligned}\right\} \tag{12.60}$$

Напряжённое состояние

$$X_x',\ Y_y',\ Z_z',\ X_y',\ X_z',\ Y_z',$$

может быть определено через деформацию при помощи закона Гука.

Так как начальное напряжённое состояние

$$X_x^0,\ Y_y^0,\ Z_z^0,\ X_y^0,\ X_z^0,\ Y_z^0$$

известно, то в правых частях уравнений (12.60) все величины нам известны.

Если же начальное напряжённое состояние нам неизвестно, то уравнения (12.55) при граничных условиях (12.56) сами по себе недостаточны для определения начального напряжённого состояния. Это может быть сделано лишь в отдельных случаях, если известна начальная деформация.

К этому типу вопросов относятся также задачи на устойчивость упругого равновесия, в которых мы имеем заданное начальное напряжённое состояние.

ГЛАВА XIII.

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК.

§ 128. Вывод уравнения равновесия тонкой упругой пластинки постоянной толщины.

Пластинкой называется упругое тело, имеющее форму цилиндра или призмы с малой, по сравнению с размерами основания, высотой. Плоскость, параллельную основаниям цилиндра или призмы и делящую высоту пополам, называют срединной плоскостью пластинки.

Задача об изгибе пластинки силами, нормальными к срединной плоскости, имеет очень большое значение в теории сопротивления материалов.

Уравнение изгиба пластинки было найдено Софи Жермен в 1815 г. в целях решения важной задачи акустики о тонах колеблющейся пластинки. Ею же были впервые установлены так называемые, граничные условия. Развитие её исследований привело Навье к открытию общих уравнений теории упругости.

Современная теория изгиба пластинок была построена Кирхгофом при помощи следующих гипотез, обобщающих теорию изгиба стержней:

1) Линейные элементы, перпендикулярные к срединной плоскости до деформации, остаются прямолинейными и перпендикулярными к искривлённой срединной плоскости после деформации.

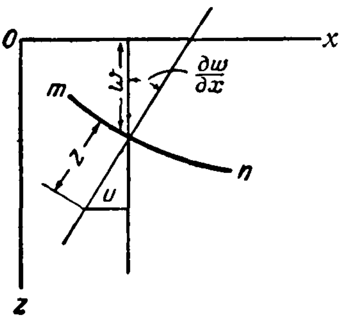
2) Элементы срединной плоскости не подвергаются растяжению или сжатию.

Расположим оси координат x и y в срединной плоскости, ось z направим перпендикулярно к этой плоскости. Обозначим через w прогиб срединной плоскости, а через u и v — перемещения, соответственно параллельные осям x и y (следует заметить, что здесь w не есть перемещение, параллельное оси z любой точки, а — перемещение точек срединной плоскости).

Из первой гипотезы следует, что линейный элемент, перпендикулярный к срединной плоскости, и следовательно, параллельный оси z, поворачивается и образует с осями x и y углы, очень мало отличающиеся от прямого. Рассуждая так же, как в теории изгиба стержней, излагаемой в теории сопротивления материалов, мы получим для косинусов этих углов следующие выражения:

$$\cos(\nu, x) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{13.1}$$

где ν — направление нормали к срединной поверхности, вдоль которой расположен рассматриваемый линейный элемент. Для точки, находящейся на расстоянии z от срединной плоскости, играющей роль нейтрального слоя в теории изгиба стержней, мы получим следующие выражения для компонентов перемещения по осям x и y (фиг. 34)



Фиг. 34.

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{13.2}$$

На основании формул (1.11), мы имеем для относительных удлинений e_{xx} и e_{yy} выражения:

$$e_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{13.3}$$

При изгибе пластинки поперечными силами нормальный компонент напряжённого состояния Z_z представляет, внутри пластинки, по отношению к двум другим нормальным компонентам X_x и Y_y малую величину. Поэтому при определении X_x и Y_y мы можем пренебречь Z_z и принять

$$Z_z = 0$$

внутри пластинки.

Три касательных компонента напряжённого состояния внутри пластинки мы принимаем отличными от нуля.

Так как мы приближённо приняли Z_z равным нулю, то мы можем применить формулы (8.20):

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

На основании формул (3.72), мы мы преобразуем к виду:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Подставляя сюда $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ из формул (13.3), получим приближённые формулы:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ Y_y &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

На основании формул (1.12)

$$e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

подставляя сюда u и v из формул (13.2), имеем:

$$e_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{13.7}$$

Отсюда, на основании формул (3.52) и (3.72), получим:

$$X_y=-\frac{Ez}{1+\sigma}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{13.8}$$

Остающиеся два касательных напряжения X_z и Y_z определим из уравнений упругого равновесия Коши в отсутствии массовых сил:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

Внесём в первые два уравнения полученные выражения для X_x, Y_y и X_y. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

Интегрируя эти уравнения, мы найдём:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\varphi(x, y), \\ Y_z &= \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\psi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Мы предполагаем, что на верхнем и нижнем основании пластинки приложена только нормальная нагрузка q_1 и q_2 на единицу площади.

Обозначив через h толщину пластинки, мы будем иметь:

1) для $z=+\frac{h}{2}$

$$X_z=Y_z=0, \tag{13.12}$$

$$Z_z=q_2; \tag{13.13}$$

2) для $z=-\frac{h}{2}$

$$X_z=Y_z=0, \tag{13.14}$$

$$Z_z=-q_1. \tag{13.15}$$

Из формул (13.11), (13.12) и (13.13) мы получим следующие выражения для φ и ψ:

$$\varphi=-\frac{Eh^2}{8(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\psi=-\frac{Eh^2}{8(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Внося это в (13.11), мы получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} X_z&=-\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right),\\ Y_z&=-\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right).\end{aligned}\right\} \tag{13.16}$$

Мы пренебрегли нормальным компонентом напряжённого состояния Z_z при выводе приближённых выражений (13.6), но при применении третьего уравнения системы (13.9) мы не должны его считать равным нулю и, следовательно, имеем из третьего уравнения (13.9):

$$-\frac{\partial Z_z}{\partial z}=\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y};$$

умножая на dz и интегрируя от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$, мы получим:

$$-[Z_z]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}X_z\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}Y_z\,dz. \tag{13.17}$$

Обозначив

$$N_1=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}X_z\,dz \quad \text{и} \quad N_2=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}Y_z\,dz, \tag{13.18}$$

мы будем иметь

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+q=0, \tag{13.19}$$

где

$$q=[Z_z]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}=q_1+q_2. \tag{13.20}$$

Здесь N_1 есть сумма перерезывающих сил на единицу длины в сечении, перпендикулярном к оси x, а N_2 — сумма перерезывающих сил на единицу длины в сечении, перпендикулярном к оси y.

Внося в (13.18) выражения (13.16) и интегрируя, получим:

$$\left.\begin{aligned} N_1&=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ N_2&=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

Введя новую постоянную

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}=\frac{\mu h^3}{3}\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}, \tag{13.22}$$

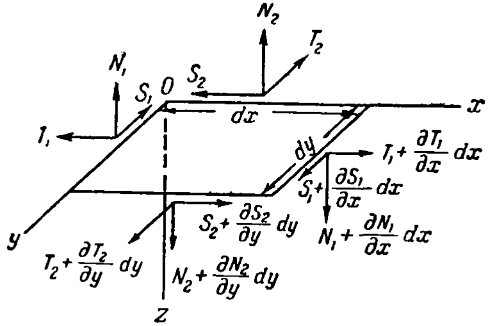
называемую *жёсткостью при изгибе*, мы представим (13.21) в виде:

$$\left.\begin{aligned} N_1&=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ N_2&=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.23}$$

Внося эти формулы в (13.19), мы получим следующее уравнение:

$$D\nabla^4 w=q. \tag{13.24}$$

Это есть уравнение для определения прогиба пластинки при действии на пластинку поперечных сил. Оно носит название *уравнения Софи Жермен.*



Фиг. 35.

§ 129. Изгибающие и крутящие моменты.

Вырежем из пластинки элемент двумя сечениями, параллельными плоскости zy и отстоящими друг от друга на dx, и двумя сечениями, параллельными плоскости zx и отстоящими друг от друга на dy (фиг. 35).

На гранях элемента действуют усилия, обусловленные шестью компонентами напряжённого состояния. Рассмотрим грань элемента, перпендикулярную к оси x, на ней действуют следующие усилия:

$$\left.\begin{aligned} T_1\,dy &= dy\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x\,dz, \\ S_1\,dy &= dy\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y\,dz, \\ N_1\,dy &= dy\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_z\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

Здесь T_1 обозначает растягивающую силу на единицу длины, S_1 — касательную силу на единицу длины, а N_1 — перерезывающую силу на единицу длины. Силы T_1 и S_1 лежат в срединной плоскости. Сила N_1 перпендикулярна к срединной плоскости и параллельна оси z. На грани элемента, перпендикулярной к оси y, действуют следующие усилия:

$$\left.\begin{aligned} T_2\,dx &= dx\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y\,dz, \\ S_2\,dx &= dx\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x\,dz, \\ N_2\,dx &= dx\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_z\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{13.26}$$

Здесь T_2 обозначает растягивающую силу на единицу длины, S_2 — касательную силу на единицу длины, а N_2 — перерезывающую силу на единицу длины. Силы T_2 и S_2 лежат в срединной плоскости, сила N_2 перпендикулярна к срединной плоскости и параллельна оси z.

Вследствие формул (2.10) имеем:

$$S_1 = S_2. \tag{13.27}$$

Кроме сил на выделенный элемент пластинки действуют следующие моменты (фиг. 36):

1) изгибающие моменты интенсивности G_1 и G_2 на единицу длины и

2) крутящие моменты интенсивности H_1 и H_2 на единицу длины.

Очевидно, имеем:

$$G_1\,dy = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z\,dz, \quad H_1 dy = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x z\,dz, \tag{13.28}$$

$$G_2\,dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z\,dz, \quad H_2 dx = -dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y z\,dz. \tag{13.29}$$

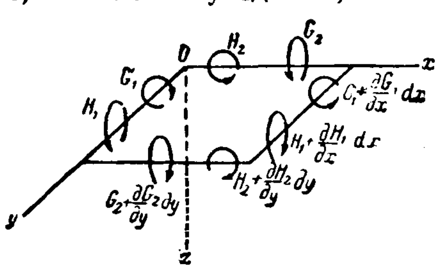
Вследствие того, что

$$X_y = Y_x,$$

из формул (13.28) и (13.29) следует, что

$$H_1 = -H_2. \tag{13.30}$$

Моменты относительно оси z от усилий, действующих на гранях элемента, представляют собою, как легко убедиться, малые величины по сравнению с моментами G_1, G_2 H_1, H_2, и мы должны их исключить из рассмотрения.



Фиг. 36.

Если пластинка нагружена только нормально к срединной плоскости, то компоненты напряжённого состояния X_x, Y_y, X_y даны формулами (13.6) и (13.8). Внося эти выражения в формулы (13.25), (13.26), (13.27) и (13.28), окончательно получим:

$$T_1 = T_2 = S_1 = S_2 = 0. \tag{13.31}$$

$$G_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (13.32)$$

$$G_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (13.33)$$

$$H_1 = -H_2 = -\frac{Eh^3}{12(1+\sigma)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = -D(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \quad (13.34)$$

где D определяется формулой (13.22).

Таким образом, зная w из уравнения (13.24), мы можем определить

$$N_1,\ N_2,\ G_1,\ G_2,\ H_1 = -H_2.$$

§ 130. Общий случай изгиба пластинки.

В этом случае лежащие в срединной плоскости силы

$$T_1,\ T_2,\ S_1 = S_2$$

отличны от нуля. Составим уравнения равновесия, выделенного нами элемента пластинки, пренебрегая влиянием прогиба пластинки на уравнения равновесия.

Проектируя все силы на ось x, получим:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0, \quad (13.35)$$

на ось y получим:

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0, \quad (13.36)$$

и на ось z получим:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q = 0. \quad (13.37)$$

Изгиб пластинки создают перерезывающие силы N_1, N_2 и моменты G_1, G_2, $H_1 = -H_2$, выражение которых через прогиб w не зависит при малом прогибе от действия сил, лежащих в срединной плоскости, и следовательно, формулы, дающие выражения N_1, N_2, G_1, G_2, $H_1 = -H_2$ через прогиб w, остаются теми же самыми.

Взяв моменты относительно осей x и y, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial H_2}{\partial y} - N_1 = 0, \\ \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - N_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13.38)$$

Внося N_1 и N_2 из формул (13.38) в (13.37), мы получим:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} = -q. \quad (13.39)$$

Если подставить сюда выражения G_1, G_2, H_1 из формул (13.32), (13.33) и (13.34), то мы получим прежнее уравнение Софи Жермен (13.24).

Уравнения (13.35) и (13.36) позволяют исследовать действие сил, лежащих в срединной плоскости.

Такое решение задачи возможно только в случаях малых прогибов пластинки.

§ 131. Граничные условия.

Напряжения на боковой поверхности пластинки X_ν, Y_ν, Z_ν (ν — внешняя нормаль) в каждой точке её имеют заданные значения. Так как мы рассматриваем тонкие пластинки, то по принципу Сен-Венана мы можем заменить эти усилия на единицу длины контура пластинки через равнодействующую силу с компонентами T_0 (растягивающая сила), S_0 (касательная сила), N_0 (перерезывающая сила) и через равнодействующую пару, компоненты момента которой G_0 (изгибающий момент) и H_0 (крутящий момент).

Если мы проведём внутри пластинки на небольшом расстоянии от границы цилиндрическую поверхность, параллельную боковой поверхности пластинки, то мы можем вычислить для неё величины T, S, N, G, H. Если внешняя нормаль ν образует с осями координат углы θ и $\frac{\pi}{2}-\theta$, то по формулам (2.25) и (2.26), внося туда

$$l_1=\cos\theta,\ m_1=\sin\theta,\ l_2=-\sin\theta,\ m_2=\cos\theta,$$
$$n_1=n_2=l_3=m_3=0,\ n_3=1,$$

получим их выражения в виде:

$$\left.\begin{aligned}
T&=T_1\cos^2\theta+T_2\sin^2\theta+S_1\sin 2\theta,\\
S&=\frac{1}{2}(T_2-T_1)\sin 2\theta+S_1\cos 2\theta,\\
N&=N_1\cos\theta+N_2\sin\theta,\\
G&=G_1\cos^2\theta+G_2\sin^2\theta-H_1\sin 2\theta,\\
H&=\frac{1}{2}(G_1-G_2)\sin 2\theta+H_1\cos 2\theta
\end{aligned}\right\}\tag{13.40}$$

(нормаль этой цилиндрической поверхности направлена к боковой поверхности пластинки).

Когда внутренняя цилиндрическая поверхность стремится к совпадению с боковой поверхностью пластинки, то предельные значения T, S, N, G, H, вычисленные по формулам (13.40), стремятся к значениям T_0, S_0, N_0, G_0, H_0, которые должны быть заданы на боковой поверхности пластинки и легко вычисляются по заданным

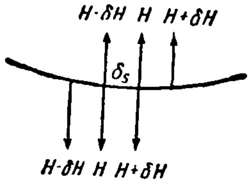
$$X_\nu^0,\ Y_\nu^0,\ Z_\nu^0.$$

Поэтому мы имеем пять граничных условий Пуассона:

$$T = T_0,\ S = S_0,\ N = N_0,\ G = G_0,\ H = H_0. \qquad (13.41)$$

Однако, Кирхгоф показал, что эти пять условий сводятся к четырём условиям. Это было затем доказано Томпсоном и Тэтом, исходя из того, что способ распределения на границе напряжений, дающих крутящий момент, не имеет существенного значения.

На протяжении элемента δs граничного контура действует крутящая пара с моментом $H\delta s$. Мы можем рассматривать её как состоящую из двух равных и прямо противоположных сил H на плече δs.



Фиг. 37.

Впишем в кривую s, ограничивающую среднюю плоскость пластинки, многоугольник с очень большим числом малых сторон. Пара сил $H\delta s$, действующая на какую-либо его сторону, длина которой δs, как мы видели, эквивалентна двум силам H, приложенным в концах стороны, нормальных к плоскости кривой s и направленных в разные стороны (фиг. 37). Пары $(H+\delta H)\delta s$ и $(H-\delta H)\delta s$, соответствующие сторонам, примыкающим к рассматриваемой, можно подобным же образом заменить силами $H+\delta H$ и $H-\delta H$, где

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial s}\delta s.$$

В результате сложения полученных сил мы получаем силу $-\delta H$, приложенную в каждой вершине многоугольника, что даёт нам распределение $-\frac{\partial H}{\partial s}$.

Таким образом, непрерывно приложенные к контуру пластинки крутящие пары H могут быть заменены непрерывно распределёнными перерезывающими силами интенсивности $-\frac{\partial H}{\partial s}$. Полная величина перерезывающей силы на единицу длины контура поэтому будет

$$Q = N - \frac{\partial H}{\partial s}. \qquad (13.42)$$

Из этого следует, что при рассмотрении какой-либо части пластинки, ограниченной цилиндрической поверхностью, мы можем также не принимать во внимание крутящий момент H, но вместо N и H вводить перерезывающую силу Q по формуле (13.42). Поэтому вместо пяти граничных условий (13.41) мы имеем четыре граничных условия:

$$T = T_0,\quad S = S_0,\quad G = G_0,$$
$$N - \frac{\partial H}{\partial s} = N_0 - \frac{\partial H_0}{\partial s}. \tag{13.43}$$

Эти условия были даны впервые Кирхгофом.

Условия Кирхгофа суть статические условия, так как они определяют соответствие между внешней нагрузкой на боковой границе пластинки и внутренними силами на цилиндрической поверхности, бесконечно близкой к боковой поверхности пластинки.

Кроме условий Кирхгофа существуют ещё геометрические условия, определяемые из условий закрепления пластинки. Например, если пластинка опёрта по контуру, то мы имеем геометрическое условие $w = 0$ по всему контуру, кроме того должны существовать статические граничные условия.

Если пластинка заделана по контуру, то мы имеем на контуре следующие условия:

1) $w = 0$ на контуре, (13.44)

2) $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ на контуре, (13.45)

где производная взята по внешней нормали к контуру пластинки.

§ 132. Потенциальная энергия изогнутой пластинки.

Потенциальную энергию на единицу объёма изогнутой пластинки получим по формуле (3.87). При этом примем во внимание, что всюду внутри пластинки мы пренебрегаем нормальным компонентом напряжённого состояния Z_z по сравнению с X_x и Y_y. Точно так же мы пренебрегаем как величинами высшего порядка X_z^2 и Y_z^2 по сравнению с X_y^2.

Это даёт:

$$2EW = X_x^2 + Y_y^2 - 2\sigma X_x Y_y + 2(1+\sigma) X_y^2. \tag{13.46}$$

Внося сюда X_x, Y_y, X_y по формулам (13.6) и (13.8), мы получим после приведения:

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)} \left\{ (\nabla_1^2 w)^2 - 2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}. \tag{13.47}$$

Потенциальная энергия деформации всей пластинки получится по формуле:

$$U = \iiint W\,dx\,dy\,dz, \tag{13.48}$$

где тройной интеграл взят по всему объёму пластинки. Внося сюда W из (13.47), мы получим:

$$U=\iint\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\left\{(\nabla_1^2 w)^2-2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}z^2dz=$$

$$=\iint\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\left\{(\nabla_1^2 w)^2-2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy=$$

$$=\iint\frac{D}{2}\left\{(\nabla_1^2 w)^2-2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy, \qquad (13.49)$$

причём D дано формулой (13.22).

§ 133. Вариационное уравнение изгиба пластинки поперечной нагрузкой.

Мы будем рассматривать изгиб пластинки только поперечной нагрузкой, причём массовыми силами мы пренебрегаем. Поэтому по формуле (11.34) мы будем иметь:

$$-\delta U+\iint q\,\delta w\,dx\,dy=0. \qquad (13.50)$$

На прогиб пластинки w могут быть наложены, согласно § 132, следующие геометрические связи:

1) если пластинка опёрта по контуру, то имеем:

$$w=0 \text{ на контуре}; \qquad (13.51)$$

2) если пластинка заделана по контуру, то к условию (13.51) добавляется условие:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}=0 \text{ на контуре}, \qquad (13.52)$$

где производная взята по внешней нормали к контуру пластинки.

Поэтому на вариации δw налагаются следующие связи:

1) $\delta w=0$ на контуре, (13.53)

2) $\delta\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)=0$ на контуре. (13.54)

Из формулы (13.49) мы имеем, предполагая жёсткость при изгибе D постоянной:

$$\frac{1}{D}\delta U=\iint\left\{\nabla_1^2 w\left[\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]-\right.$$

$$-(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\right\}dx\,dy. \qquad (13.55)$$

Интегрируя по частям, имеем согласно формуле Грина:

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dx\,dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(\nu,y)\,ds - \\ - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\delta w\cos(\nu,y)\,ds + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w\,dx\,dy;$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\,dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\nu,x)\,ds - \\ - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\delta w\cos(\nu,x)\,ds + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^2\,\partial x^2}\delta w\,dx\,dy;$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\,dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\nu,x)\,ds - \\ - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\delta w\cos(\nu,x)\,ds + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\delta w\,dx\,dy;$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dx\,dy = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(\nu,y)\,ds - \\ - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\delta w\cos(\nu,y)\,ds + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\delta w\,dx\,dy;$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy = \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy = \\ = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(\nu,x)\,ds - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\delta w\cos(\nu,y)\,ds + \\ + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w\,dx\,dy;$$

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy = \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\,dy = \\ = \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\nu,y)\,ds - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\delta w\cos(\nu,x)\,ds + \\ + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w\,dx\,dy.$$

Внося полученные формулы преобразования в правую часть формулы (13.55), получим после приведения:

$$\frac{1}{D}\delta U = \oint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos(\nu,x) + (1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu,y)\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)ds + \\ + \oint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos(\nu,y) + (1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu,x)\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)ds - \\ - \oint\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla_1^2 w)\cos(\nu,x) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla_1^2 w)\cos(\nu,y)\right]\delta w\,ds + \\ + \iint(\nabla^4 w)\,\delta w\,dx\,dy. \quad (13.56)$$

Здесь ν есть внешняя нормаль к контуру пластинки.

Если направления касательной и внешней нормали к контуру выбрать так, как показано на фиг. 38, то мы будем иметь очевидные формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\nu,\ x)=\cos\theta, \qquad \cos(\nu,\ y)=\sin\theta,\\
&\cos(s,\ x)=-\sin\theta, \quad \cos(s,\ y)=\cos\theta,\\
&\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial s}(\delta w)+\cos\theta\frac{\partial}{\partial \nu}(\delta w),\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\delta w)=\ \ \cos\theta\frac{\partial}{\partial s}(\delta w)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial \nu}(\delta w).
\end{aligned}\right\} \tag{13.57}$$

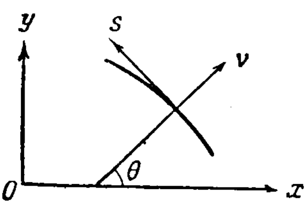
Далее имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\nabla_1^2 w)=\cos(\nu,\ x)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla_1^2 w)+\cos(\nu,\ y)\frac{\partial}{\partial y}(\nabla_1^2 w). \tag{13.58}$$

Внося (13.57) и (13.58) в (13.56), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D}\delta U=\iint(\nabla^4 w)\,\delta w\,dx\,dy-\oint\frac{\partial}{\partial\nu}(\nabla_1^2 w)\,\delta w\,ds+\\
+(1-\sigma)\oint\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\sin 2\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos 2\theta\right]\frac{\partial}{\partial s}(\delta w)\,ds+\\
+\oint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos^2\theta+\right.\\
\left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\sin^2\theta+(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\frac{\partial(\delta w)}{\partial\nu}\,ds.
\end{aligned}$$

Вводя общепринятые обозначения: G_t для изгибающего момента на контуре пластинки и H_t для крутящего момента на том же контуре, получим:



Фиг. 38.

$$\begin{aligned}
\delta U=D\iint(\nabla^4 w)\,\delta w\,dx\,dy-\\
-D\oint\frac{\partial}{\partial\nu}(\nabla^2 w)\,\delta w\,ds+\oint H_t\frac{\partial}{\partial s}(\delta w)\,ds-\\
-\oint G_t\frac{\partial}{\partial\nu}(\delta w)\,ds.
\end{aligned} \tag{13.59}$$

Но легко видеть, что для замкнутого контура вследствие однозначности имеем:

$$\oint H\frac{\partial}{\partial s}(\delta w)\,ds=-\oint\frac{\partial H_t}{\partial s}\delta w\,ds. \tag{13.60}$$

Внося (13.60) в (13.59), имеем окончательно:

$$\delta U = D\iint (\nabla^4 w)\,\delta w\,dx\,dy -$$
$$- \oint G_t \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta w)\,ds + \oint \left(N_t - \frac{\partial H_t}{\partial s}\right)\delta w\,ds, \qquad (13.61)$$

где введено обычное для поперечной силы на контуре пластинки обозначение:

$$N_t = -D\frac{\partial}{\partial s}(\nabla_1^2 w). \qquad (13.62)$$

Очень важная формула (13.61) впервые дана Кирхгофом в его знаменитом мемуаре о пластинках. Внося (13.61) в (13.50), мы получим окончательно вариационное уравнение Лагранжа для изгиба пластинки:

$$\iint [D\nabla^4 w - q]\,\delta w\,dx\,dy -$$
$$- \oint G_t \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta w)\,ds + \oint \left[N_t - \frac{\partial H_t}{\partial s}\right]\delta w\,ds = 0. \qquad (13.63)$$

Из этого уравнения следует:

1) Известное уравнение Софи Жермен (13.24) для поперечного изгиба пластинки

$$D\nabla^4 w = q, \qquad (13.64)$$

так как вариация δw внутри контура пластинки совершенно произвольна.

2) Граничное условие:

$$- \oint G_t \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta w)\,ds + \oint \left(N_t - \frac{\partial H_t}{\partial s}\right)\delta w\,ds = 0. \qquad (13.65)$$

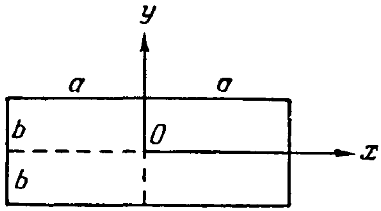
Поскольку для заделанной по контуру пластинки имеют место геометрические условия (13.53) и (13.54), граничное условие (13.65) должно быть выполнено самим подбором $w(x, y)$. Поэтому остаётся из (13.63) вариационное уравнение в форме Б. Г. Галёркина:

$$\iint (D\nabla^4 w - q)\,\delta w\,dx\,dy = 0. \qquad (13.66)$$

§ 134. Изгиб прямоугольной пластинки, подпёртой по контуру и нагруженной равномерной нагрузкой.

Задача эта была впервые решена ещё знаменитым основателем теории упругости Навье. Мы приведём решение её по способу вариационного уравнения.

Начало координат возьмём в центре прямоугольного контура со сторонами $2a$ и $2b$ (фиг. 39). Оси координат направим параллельно сторонам прямоугольника. Так как пластинка опёрта на контуре, то мы имеем граничные условия:



Фиг. 39.

$$w=0 \text{ для } \begin{cases} x=\pm a, \\ y=\pm b, \end{cases} \tag{13.67}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{для} \quad x=\pm a, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{для} \quad y=\pm b. \end{aligned}\right\} \tag{13.68}$$

Последние условия вытекают из известных формул для изгибающих моментов

$$\left.\begin{aligned} G_1=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ G_2=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{13.69}$$

при учёте условия (13.67).

С целью удовлетворить граничным условиям (13.67) и (13.68) мы примем, так как w есть чётная функция от x и y, что

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}, \tag{13.70}$$

где m и n суть целые нечётные числа, т. е.

$$\left.\begin{aligned} m=1,\ 3,\ 5,\ 7,\dots, \\ n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\dots \end{aligned}\right\} \tag{13.71}$$

Внося (13.70) в (13.49), мы получим:

$$U=\frac{D}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 ab\sum\sum A_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2. \tag{13.72}$$

Далее, внося (13.70) в формулу для элементарной работы нагрузки, найдём:

$$q\iint \delta w\,dx\,dy=\frac{16qab}{\pi^2}\sum\sum\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn}\delta A_{mn}. \tag{13.73}$$

Подставляя (13.72) и (13.73) в вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta U=q\iint \delta w\,dx\,dy, \tag{13.74}$$

мы получим формулу:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 DA_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=\frac{16q}{\pi^2}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn},$$

из которой найдём:

$$A_{mn}=\frac{256q\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{D\pi^6\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{13.75}$$

Наконец, внося (13.75) в (13.70), получим формулу Навье:

$$w=\frac{256q}{D\pi^6}\sum\sum\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \tag{13.76}$$

представляющую *точное* решение задачи.

Для стрелы прогиба в центре пластинки имеем:

$$f=\frac{256q}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{13.77}$$

Для квадратной пластинки $b=a$, и поэтому формула (13.77) примет вид:

$$f=\frac{256qa^4}{D\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn(m^2+n^2)^2}. \tag{13.78}$$

Для вычисления стоящего здесь двойного ряда выведем вспомогательную формулу. Пусть

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}, \tag{13.79}$$

где n — любое целое число, и a — произвольный параметр. Взяв вторую производную по x, найдём:

$$z''=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin nx}{n(n^2+a^2)}. \tag{13.80}$$

Из (13.79) и (13.80) имеем:

$$z''-a^2z=-\sum\frac{(n^2+a^2)\sin nx}{n(n^2+a^2)}=-\sum\frac{\sin nx}{n}. \tag{13.81}$$

Но, разлагая в ряд Фурье, легко найдём:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{13.82}$$

Из (13.81) и (13.82) имеем:

$$z'' - a^2 z = \frac{x - \pi}{2}.$$

Интегрируя это уравнение при условии, вытекающем из (13.79),

$$z = 0 \quad \text{для} \quad x = 0 \quad \text{и для} \quad x = \pi,$$

мы найдём:

$$z = \frac{\pi - x}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{sh} a(x - \pi)}{2a^2 \operatorname{sh} a\pi}.$$

Внося сюда (13.79), мы получим формулу:

$$\sum \frac{\sin nx}{n(n^2 + a^2)} = \frac{\pi - x}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{sh} a(x - \pi)}{2a^2 \operatorname{sh} a\pi}. \tag{13.83}$$

Положив здесь $x = \frac{\pi}{2}$, мы легко получим:

$$\sum \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n(n^2 + a^2)} = \frac{\pi}{4a^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}}\right). \tag{13.84}$$

Взяв производную по a и положив затем $a = m$, найдём искомую формулу:

$$\sum \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n(n^2 + m^2)^2} = \frac{\pi}{4m^4}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}\right) - \frac{\pi^2}{16m^3} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}, \tag{13.85}$$

куда входят только нечётные значения индекса n, ибо для чётных значений

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

Прилагая формулу (13.85) к формуле (13.78), получим:

$$\sum\sum \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + n^2)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^5}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}\right) - \frac{\pi^2}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^4} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}, \tag{13.86}$$

где $m = 1, 3, 5, 7, \ldots$

Ввиду быстрой сходимости рядов достаточно при вычислении брать немного членов, что даёт:

$$\sum\sum \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn(m^2+n^2)^2}=0,245. \tag{13.87}$$

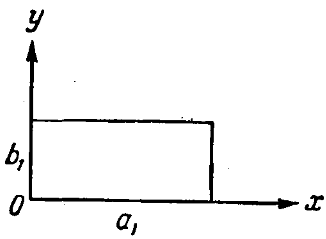
Внося (13.87) в (13.78), мы получим:

$$f=0,0652\frac{qa^4}{D}, \tag{13.88}$$

что близко к величине 0,0649, полученной С. П. Тимошенко *).

§ 135. Изгиб прямоугольной пластинки, подпёртой по контуру, при произвольной нагрузке.

Возьмём начало координат в одной из вершин прямоугольника (фиг. 40) и направим оси координат по его сторонам. Стороны обозначим через a_1, b_1 ($a_1=2a$, $b_1=2b$).



Фиг. 40.

Граничные условия, согласно (13.67) и (13.68), будут:

$$w=0 \text{ для } \left.\begin{matrix} x=0, & y=0, \\ x=a_1, & y=b_1, \end{matrix}\right\} \tag{13.89}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ для } x=0, \; x=a_1, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ для } y=0, \; y=b_1. \end{matrix}\right\} \tag{13.90}$$

С целью удовлетворить этим граничным условиям примем:

$$w=\sum\sum A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a_1}\sin\frac{n\pi y}{b_1}, \tag{13.91}$$

где m, n суть *целые* числа.

Внося (13.91) в формулу (13.49), получим:

$$U=\frac{D}{2}\pi^4\frac{a_1 b_1}{4}\sum\sum A_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a_1^2}+\frac{n^2}{b_1^2}\right)^2. \tag{13.92}$$

---

*) Тимошенко С. П., Теория упругости, том II, стр. 290, 1916.

Далее, внося (13.91) в формулу для элементарной работы нагрузки, найдём:

$$\iint q\,\delta w\,dx\,dy = \sum\sum \delta A_{mn} \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a_1}\sin\frac{n\pi y}{b_1}\,dx\,dy. \tag{13.93}$$

В случае равномерной нагрузки

$$q = \text{const.},$$

и тогда получим из (13.93):

$$\iint q\,\delta w\,dx\,dy = \frac{qa_1b_1}{\pi^2}\sum\sum A_{mn}\frac{(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi)}{mn}. \tag{13.94}$$

Очевидно, что правая часть формулы (13.94) отлична от нуля только в том случае, если m, n суть *целые нечётные* числа.

Внося (13.92) и (13.93) в вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta U = \iint q\,\delta w\,dx\,dy, \tag{13.95}$$

мы получим:

$$A_{mn} = \frac{4\iint q\sin\frac{m\pi x}{a_1}\sin\frac{n\pi y}{b_1}\,dx\,dy}{\pi^4 \varkappa\beta\left(\frac{m^2}{a_1^2}+\frac{n^2}{b_1^2}\right)^2 D}. \tag{13.96}$$

Для случая равномерной нагрузки будем иметь:

$$A_{mn} = \frac{16q}{\pi^6 D\left(\frac{m^2}{a_1^2}+\frac{n^2}{b_1^2}\right)^2 mn}. \tag{13.97}$$

В этом случае

$$w = \frac{16q}{D\pi^6}\sum\sum\frac{\sin\frac{m\pi x}{a_1}\sin\frac{n\pi y}{b_1}}{mn\left(\frac{m^2}{a_1^2}+\frac{n^2}{b_1^2}\right)^2}, \tag{13.98}$$

причём m, n суть целые нечётные числа.

Для стрелы прогиба в центре квадратной пластинки $\left(x=\frac{a_1}{2},\ y=\frac{b_1}{2}\right)$, получим:

$$f = \frac{16qa_1^4}{D\pi^6}\sum\sum\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn(m^2+n^2)^2}. \tag{13.99}$$

Так как $a_1 = 2a$, то формула (13.99) совпадает с (13.78).

§ 136. Приложение метода смягчения граничных условий к задаче об изгибе заделанной по контуру прямоугольной пластинки равномерной нагрузкой.

Задача об изгибе заделанной по контуру прямоугольной пластинки равномерной нагрузкой представляет при решении очень большие вычислительные трудности. Первое простое решение этой задачи было дано В. Ритцем в его знаменитом мемуаре*). Это решение является приближённым, но Ритц доказал, что оно в пределе стремится к точному решению. Мы не можем считать, что мы обладаем абсолютно точным решением этой важной технической проблемы. Поэтому представляет интерес применение приближённого метода, основанного на *смягчении* или, как иначе называют, *релаксации* граничных условий. В этом параграфе мы дадим приложение метода *релаксации* граничных условий.

Выберем начало координат в центре прямоугольника (см. фиг. 39), оси координат направим параллельно сторонам прямоугольника, которые мы примем равными $2a$ и $2b$. Вследствие условий симметрии примем для прогиба $w(x, y)$ при изгибе равномерной нагрузкой выражение:

$$w = \frac{q}{8D}\left[(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + \right.$$
$$\left. + \sum_n A_n Y_n(y)\cos\alpha x + \sum_n B_n X_n(x)\cos\beta y, \right. \tag{13.100}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} X_n(x) &= a\operatorname{sh}\beta a\operatorname{ch}\beta x - x\operatorname{ch}\beta a\operatorname{sh}\beta x, \\ Y_n(y) &= b\operatorname{sh}\alpha b\operatorname{ch}\alpha y - y\operatorname{ch}\alpha b\operatorname{sh}\alpha y, \end{aligned}\right\} \tag{13.101}$$

причём положено для сокращения:

$$\alpha = \frac{\pi n}{2a}, \quad \beta = \frac{\pi n}{2b}. \tag{13.102}$$

Легко видеть, что $w(x, y)$ есть интеграл уравнения (13.24), удовлетворяющий всюду на контуре прямоугольника основному граничному условию

$$w = 0 \text{ для } x = \pm a, \quad y = \pm b, \tag{13.103}$$

если m, n суть *целые нечётные числа*. Постоянные A_1, A_3, A_5, ..., B_1, B_3, B_5,... остаются произвольными и подлежат определению из граничных условий

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ для } x = \pm a, \tag{13.104}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ для } y = \pm b. \tag{13.105}$$

*) Journ. f. Math. (Crelle) т. 135, 1909 г.

Вычисляя значение производной от w, мы найдём:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\pm a}=\pm f_1(y), \tag{13.106}$$

где

$$f_1(y)=\frac{q}{8D}\Big[2a(y^2-b^2)-$$
$$-\sum A_n Y_n a\sin\alpha a+\sum B_n\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=a}\cos\beta y\Big], \tag{13.107}$$

причём

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=a}=-\operatorname{ch}\beta a\operatorname{sh}\beta a-\beta a. \tag{13.108}$$

Функция $f_1(y)$ в интервале

$$-b\leqslant y\leqslant b \tag{13.109}$$

может быть развёрнута в ряд Фурье:

$$f_1(y)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\frac{k\pi y}{2b}, \tag{13.110}$$

причём

$$C_0=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b}f_1(y)\,dy, \tag{13.111}$$

$$C_k=\frac{1}{b}\int_{-b}^{+b}f_1(y)\cos\frac{k\pi y}{2b}\,dy,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{13.112}$$

Вследствие (13.106) и (13.110) выполнение граничного условия (13.104) сводится к требованию обращения в нуль всех коэффициентов этого разложения:

$$C_0=0, \tag{13.113}$$
$$C_k=0. \tag{13.114}$$

Метод смягчения граничных условий требует, чтобы вместо выполнения всех условий (13.113) и (13.114) было выполнено основное условие (13.104), что можно написать в виде:

$$\int_{-b}^{b}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}dy=0. \tag{13.115}$$

Далее, вместо граничного условия (13.105) имеем смягчённое условие

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b}dx=0. \tag{13.116}$$

Для дальнейших вычислений мы должны применить формулы, получаемые из (13.100) дифференцированием w по x и y:

$$\left.\begin{aligned}\frac{8D}{q}\frac{\partial w}{\partial x}&=2x(y^2-b^2)-\sum_n A_nY_n\alpha\sin\alpha x+\\&\qquad+\sum_n B_n\frac{dX_n}{dx}\cos\beta y,\\ \frac{8D}{q}\frac{\partial w}{\partial y}&=2y(x^2-a^2)+\sum_n A_n\frac{dY_n}{dy}\cos\alpha x-\\&\qquad-\sum_n B_nX_n\beta\sin\beta y,\end{aligned}\right\}\tag{13.117}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{8D}{q}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=2(y^2-b^2)-\sum_n A_nY_n\alpha^2\cos\alpha x+\\&\qquad+\sum_n B_n\frac{d^2X_n}{dx^2}\cos\beta y,\\ \frac{8D}{q}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=2(x^2-a^2)+\sum_n A_n\frac{d^2Y_n}{dy^2}\cos\alpha x-\\&\qquad-\sum_n B_nX_n\beta^2\cos\beta y.\end{aligned}\right\}\tag{13.118}$$

Сюда надо внести на основании (13.101):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX_n}{dx}&=a\beta\,\mathrm{sh}\,\beta a\,\mathrm{sh}\,\beta x-\beta x\,\mathrm{ch}\,\beta a\,\mathrm{ch}\,\beta x-\\&\qquad-\mathrm{ch}\,\beta a\,\mathrm{sh}\,\beta x,\\ \frac{d^2X_n}{dx^2}&=a\beta^2\,\mathrm{sh}\,\beta a\,\mathrm{ch}\,\beta x-\beta^2x\,\mathrm{ch}\,\beta a\,\mathrm{sh}\,\beta x-\\&\qquad-2\beta\,\mathrm{ch}\,\beta a\,\mathrm{ch}\,\beta x,\\ \frac{dY_n}{dy}&=b\alpha\,\mathrm{sh}\,b\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha y-\alpha y\,\mathrm{ch}\,b\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha y-\\&\qquad-\mathrm{ch}\,\alpha b\,\mathrm{sh}\,\alpha y,\\ \frac{d^2Y_n}{dy^2}&=b\alpha^2\,\mathrm{sh}\,b\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha y-\alpha^2y\,\mathrm{ch}\,b\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha y-\\&\qquad-2\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha b\,\mathrm{ch}\,\alpha y.\end{aligned}\right\}\tag{13.119}$$

Из (13.117) и (13.119) получим:

$$\begin{aligned}\frac{4D}{q}\nabla^2 w&=(x^2-a^2)+(y^2-b^2)-\sum A_n\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha b\,\mathrm{ch}\,\alpha y\cos\alpha x-\\&\qquad-\sum B_n\beta\,\mathrm{ch}\,\beta a\,\mathrm{ch}\,\beta x\cos\beta y.\end{aligned}\tag{13.120}$$

Для вычисления потенциальной энергии U мы должны применить формулу (13.49), которая для рассматриваемого случая принимает вид:

$$U = \frac{D}{2}\iint (\nabla^2 w)^2\,dx\,dy. \tag{13.121}$$

В самом деле, интегрируя формулу (13.49) по частям, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dx\,dy &= \oint \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos(\nu, x)\,ds - \\ &\quad - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial x} w\cos(\nu, x)\,ds + \iint w\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\,dx\,dy, \\ \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy &= \oint \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\cos(\nu, x)\,ds - \\ &\quad - \oint \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} w\cos(\nu, x)\,ds + \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} w\,dx\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{13.122}$$

Так как на сторонах прямоугольника $x = \pm a$ имеет место условие (13.103), то из него следует:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ для } x = \pm a.$$

Далее, на сторонах $y = \pm b$ имеет место очевидное условие

$$\cos(\nu, x) = 0.$$

Затем имеет место условие (13.103). Поэтому в формулах (13.122) контурные интегралы исчезают, и остаются только интегралы, по площади прямоугольника равные между собой. Следовательно, имеем:

$$\iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dx\,dy = \iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy, \tag{13.123}$$

что оправдывает формулу (13.121).

Внося (13.120) в (13.121), мы получим после приведения следующую формулу:

$$\begin{aligned}\frac{8D}{abq^2}U &= \frac{8}{45}[3(a^4+b^4)+5a^2b^2] + \\ &+ \sum A_n^2\frac{\alpha^2\operatorname{ch}^2\alpha b\,(2\alpha b+\operatorname{sh}2\alpha b)}{8\alpha b} + \sum B_n^2\frac{\beta^2\operatorname{ch}^2\beta a\,(2\beta a+\operatorname{sh}2\beta a)}{8\beta a} + \\ &+ 4\sum A_n\frac{\operatorname{sh}\alpha b\operatorname{ch}\alpha b}{\alpha^3 ab}\sin\frac{n\pi}{2} + 4\sum B_n\frac{\operatorname{sh}\beta a\operatorname{ch}\beta a}{\beta^3 ab}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned} \tag{13.124}$$

Далее, найдём:

$$\begin{aligned}\frac{2D}{qab}\iint w\,dx\,dy &= \frac{4}{9}a^2b^2 + \frac{a}{2}\sum A_n\sin\frac{n\pi}{2}\frac{\operatorname{sh}2\beta a - 2\beta a}{(b\alpha)(\beta a)^2} + \\ &+ \frac{b}{2}\sum B_n\sin\frac{n\pi}{2}\frac{\operatorname{sh}2\alpha b - 2\alpha b}{(\beta a)(b\alpha)^2}.\end{aligned} \tag{13.125}$$

Так как производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ есть нечётная функция от x, то условие (13.115) пригодно также и для случая $x=-a$; аналогично условие (13.116) пригодно также и для случая $y=-b$. Внося (13.117) в (13.115) и (13.116), мы получим *смягчённые граничные условия*:

$$\frac{8}{3}ab^3+b\sum A_n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{(\alpha b)}[\operatorname{sh}2\alpha b-2\alpha b]+\\+a\sum B_n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{(\beta a)}[\operatorname{sh}2\beta a-2\beta a)=0, \qquad (13.126)$$

$$\frac{8}{3}a^3b+b\sum A_n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{(\alpha b)}[\operatorname{sh}2\alpha b-2\alpha b]+\\+a\sum B_n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{(\beta a)}[\operatorname{sh}2\beta a-2\beta a]=0. \qquad (13.127)$$

Для упрощения вычислений рассмотрим случай квадратной пластинки, для которой $b=a$. В этом случае имеем из (13.126) и (13.127):

$$B_n=A_n, \qquad (13.128)$$

и оба условия (13.126) и (13.127) сводятся к одному условию, которое получим, внеся α и β из формул (13.102):

$$\frac{2}{3}a^4+a\sum\frac{A_n}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}n\pi=0. \qquad (13.129)$$

Легко получим из (13.124) и (13.125):

$$\frac{8D}{q^2a^2}U=\frac{88a^4}{45}+\frac{\pi}{8a^2}\sum A_n^2\, n\operatorname{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\pi n+\operatorname{sh}\pi n)+\\+\frac{32a}{\pi^3}\sum A_n\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3}\operatorname{sh}\pi n; \qquad (13.130)$$

$$\frac{2D}{qa^2}\iint w\,dx\,dy=\frac{4}{9}a^4+\frac{8a}{\pi^3}\sum A_n\frac{\operatorname{sh}\pi n-\pi n}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}. \qquad (13.131)$$

Вследствие существования условия (13.129) вариационное уравнение Лагранжа примет вид:

$$\delta S=0, \qquad (13.132)$$

где

$$S=\frac{q^2a^2}{8D}\left[\frac{88a^4}{45}+\frac{\pi}{8a^2}\sum A_n^2 n\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\pi n+\mathrm{sh}\,\pi n)+\right.$$
$$\left.+\frac{32a}{\pi^3}\sum A_n\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3}\mathrm{sh}\,\pi n\right]-\left[\frac{4}{9}a^4+\frac{8a}{\pi^3}\sum\frac{A_n\sin\frac{n\pi}{2}(\mathrm{sh}\,n\pi-n\pi)}{n^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}a^4\lambda+\lambda a\sum\frac{A_n\sin\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,n\pi}{n\pi}\right]. \quad (13.133)$$

Здесь λ есть множитель Лагранжа.

Внося (13.133) в (13.132), мы получим уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial A_n}=0,$$

из которых найдём:

$$A_n=-\frac{128a^3\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi^3n^3\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,\pi n+\pi n)}+\frac{16\lambda a^3\sin\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\pi n}{\pi^2n^2\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,\pi n+\pi n)}. \quad (13.134)$$

Внося это значение A_n в (13.129), мы получим, после упрощений, следующее уравнение для определения λ:

$$\frac{2}{3}-\frac{128}{\pi^4}\sum\frac{\mathrm{sh}\,\pi n}{n^4\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,n\pi+\pi n)}+$$
$$+\frac{16\lambda}{\pi^3}\sum\frac{\mathrm{sh}^2\,\pi n}{n^3\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,\pi n+\pi n)}=0. \quad (13.135)$$

Здесь n есть целое нечётное число. Вычисление даёт:

$$\left.\begin{aligned}\sum\frac{\mathrm{sh}\,\pi n}{n^4\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,\pi n+\pi n)}&=0{,}1249,\\ \sum\frac{\mathrm{sh}^2\,\pi n}{n^3\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi n}{2}(\mathrm{sh}\,\pi n+\pi n)}&=1{,}543.\end{aligned}\right\} \quad (13.136)$$

Внося (13.136) в (13.135), мы получим:

$$\lambda=-0{,}631. \quad (13.137)$$

Для определения стрелы прогиба f в центре пластинки подставим в (13.100) $x=y=0$. Для квадратной пластинки ($b=a$) получим:

$$f=\frac{q}{8D}\left[a^4+2a\sum A_n\,\mathrm{sh}\frac{\pi n}{2}\right]. \quad (13.138)$$

Внеся A_n из (13.134) в (13.138), мы получим:

$$f=\frac{qa^4}{8D}\left[1-\frac{256}{\pi^3}\sum\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}{n^3\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2}(\operatorname{sh}n\pi+n\pi)}+\right.$$

$$\left.+\frac{32\lambda}{\pi^2}\sum\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}n\pi}{n^2\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2}(\operatorname{sh}\pi n+\pi n)}\right]. \quad (13.139)$$

Вычисление даёт:

$$\left.\begin{aligned}\sum\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}}{n^3\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2}(\operatorname{sh}n\pi+n\pi)}&=0,02488,\\ \sum\frac{\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh}n\pi}{n^2\operatorname{ch}^2\frac{n\pi}{2}(\operatorname{sh}n\pi+n\pi)}&=0,28533.\end{aligned}\right\} \quad (13.140)$$

Внося (13.137) и (13.140) в (13.139), мы получим:

$$f=0,02407\frac{qa^4}{D}. \quad (13.141)$$

Сравнивая с формулой

$$f=0,0202\frac{qa^4}{D},$$

полученной другими методами, мы находим, что нами получена верхняя оценка стрелы прогиба, что и следовало ожидать при смягчении граничных условий.

Из формулы (13.32) мы имеем для наибольшего значения изгибающего момента (в середине стороны квадрата):

$$G_1^{\max}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \text{ при } x=a,\ y=0, \quad (13.142)$$

так как в этом случае

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

Внося (13.100) в (13.142), мы получим:

$$G_1^{\max}=\frac{qa^2}{4}\left[1+\frac{\pi}{2a^3}\sum A_n\left(n\operatorname{ch}^2\frac{\pi n}{2}\right)\right]. \quad (13.143)$$

Внося сюда A_n из (13.134), мы найдём:

$$G_1^{\max} = \frac{qa^2}{4}\left[1 - \frac{64}{\pi^2}\sum \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2(\operatorname{sh} n\pi + n\pi)} + \frac{8\lambda}{\pi}\sum \frac{\sin\frac{n\pi}{2}\operatorname{sh} n\pi}{n(\operatorname{sh} n\pi + n\pi)}\right]. \quad (13.144)$$

Вычисление даёт:

$$G_1^{\max} = -0{,}0902\, qa^2 . \quad (13.145)$$

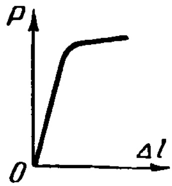
Можно применить к рассмотренной выше задаче другую форму представления для $w(x, y)$. Соответственные вычисления можно найти в § 6 главы VI нашего сочинения «Вариационные методы решения задач теории упругости».

ГЛАВА XIV.

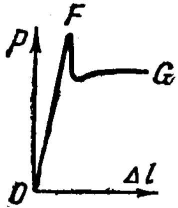
УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ.

§ 137. Пластическая деформация. Предельные поверхности.

Деформация упругих тел вообще состоит из упругой и остающейся частей. То состояние тела, в котором оно под действием нагрузки и без заметного ослабления связей между частицами получает значительные (по сравнению с упругими) остаточные деформации, называется пластическим состоянием тела. Материалы, в которых перед наступлением разрушения происходят только малые упругие изменения, или остаточная деформация которых невелика по сравнению с упругой, называются хрупкими. Однако хрупкость и пластичность не являются такими свойствами, которые могут быть приписаны



Фиг. 41.



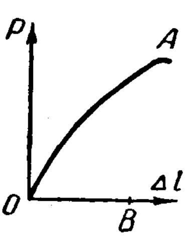
Фиг. 42.

определённому материалу при всех обстоятельствах. Так, мраморные цилиндры при осевой нагрузке разрушаются, как хрупкие тела, а при всестороннем сжатии они деформируются пластически.

Обратимся к результатам испытания образца литого железа, растягиваемого силой, которая постепенно увеличивается от нуля до P. Кривые, изображающие зависимость между силой и деформацией, обычно имеют вид, показанный на фиг. 41 и 42. Сначала сила P растёт прямо пропорционально абсолютному удлинению Δl (l есть длина измеряемой части образца). Этот факт и составляет закон Гука. Затем при некотором напряжении

$$\sigma = \frac{P}{f}$$

(f есть площадь поперечного сечения измеряемой части образца), которое для отожжённого литого железа имеет значение между 2000 и 3000 $кг/см^2$; сразу начинают получаться остаточные деформации. Это растягивающее напряжение называется *пределом текучести на растяжение.* В этот момент на диаграмме растяжения получается резкий перелом, и удлинения за этой точкой быстро увеличиваются. Переход к горизонтальному участку кривой диаграммы растяжения может начаться с острого пика и последующего уменьшения нагрузки, как это показано на фиг. 42, или переход может быть постепенным, как на фиг. 41. В части OF диаграммы материал находится в *упругом состоянии*, а в части FG — в *пластическом состоянии.* Для некоторых металлов, например, мягкой отожжённой меди или алюминия, кривая $P=f(\Delta l)$ вовсе не имеет прямолинейного участка, и определённого предела текучести не существует (фиг. 43).



Фиг. 43.

В общем случае упругого тела напряжённое состояние определяется шестью компонентами напряжённого состояния, либо шестью другими независимыми величинами, например, тремя главными осями деформации и тремя главными нормальными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3. Поэтому, относя упругое тело к главным осям деформации, можно характеризовать напряжённое состояние, находящееся на границе пластической деформации или разрушения, именно этими *тремя главными нормальными напряжениями* σ_1, σ_2, σ_3.

Если по предложению Хея (Haigh) и Вестергаарда (Westergaard) взять главные оси деформации за оси координат, то совокупность точек, изображающих разные *предельные* напряжённые состояния, при переходе за которые возникает *пластическая* деформация, образует поверхность

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \tag{14.1}$$

называемую *предельной поверхностью пластической деформации.*

В своей известной работе по механике пластического состояния твёрдого тела Р. Мизес предложил брать уравнение (14.1) в форме:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2 = 0, \tag{14.2}$$

где k есть постоянная величина.

В принятой нами системе координат это уравнение представляет круглый цилиндр, радиус поперечного сечения которого равен

$$R=2k\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опытные исследования довольно хорошо подтверждают уравнение (14.2). Опыты показали, что большинство твёрдых тел противостоит без разрушения действию одинакового всестороннего очень высокого давления. Только в некоторых, менее плотных телах наблюдались случаи разрушения вследствие проникновения внутрь тела через мелкие щели и трещины жидкости, в которую были погружены испытуемые тела.

В противоположность этому, материалы, подвергнутые действию всестороннего равномерного растяжения ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=$ $=\text{const.}$), способны сопротивляться лишь напряжениям, не превышающим некоторого определённого значения, причём пластическая деформация не наблюдается.

Для таких материалов совокупности *предельных напряжённых состояний*, характеризуемых главными растягивающими напряжениями σ_1, σ_2, σ_3, *как раз достаточными для разрушения тела, соответствует так называемая предельная поверхность разрушения*

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0. \tag{14.3}$$

Пластическая деформация твёрдого тела по своей природе есть состояние движения. Явление текучести должно исследоваться как некоторое движение непрерывной среды. Во многих практических задачах существенное значение имеет напряжённое состояние, соответствующее началу пластической деформации, ибо при дальнейшем возрастании напряжений возникает опасность появления пластической деформации. Такое напряжённое состояние может быть определено из условий равновесия, так как при обычных условиях, когда температура много ниже точки плавления, деформация происходит медленно, а скорость деформации влияет на напряжения очень незначительно. Хорошо известные в сопротивлении материалов явления упрочнения (наклёп) и разупрочнения (ослабление) мы оставляем без рассмотрения.

§ 138. Определение скорости деформации и напряжённого состояния при пластической деформации.

При пластической деформации частицы тела движутся с ограниченными по величине скоростями. Обозначим через U, V, W компоненты скорости частицы, находящейся в момент времени t в точке (x, y, z). Эти компоненты скорости будут функциями координат x, y, z и времени t:

$$U=f_1(x, y, z, t);\; V=f_2(x, y, z, t);\; W=f_3(x, y, z, t). \quad (14.4)$$

Скорость самой деформации, по предложению Сен-Венана, вычисляется по формулам, аналогичным формулам (1.11) и (1.12):

$$\left.\begin{aligned} s_{xx}&=\frac{\partial U}{\partial x}; & s_{yz}&=\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}; \\ s_{yy}&=\frac{\partial V}{\partial y}; & s_{xz}&=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}; \\ s_{zz}&=\frac{\partial W}{\partial z}; & s_{xy}&=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (14.5)$$

Аналогично упругой деформации мы имеем здесь три взаимно перпендикулярные *главные оси скоростей пластической деформации*. По ним будут направлены *три главные скорости пластической деформации* s_1, s_2, s_3.

Средняя скорость пластической деформации $\bar{s}$ определяется аналогично формуле (1.99) через инвариантное соотношение

$$3\bar{s}=\bar{\Delta}=s_{xx}+s_{yy}+s_{zz}=s_1+s_2+s_3, \quad (14.6)$$

где $\bar{\Delta}$ есть скорость объёмного расширения. Напряжённое состояние, соответствующее этой пластической деформации, определяется, по предложению Сен-Венана, так же, как и при упругой деформации, шестью компонентами

$$X_x,\; Y_y,\; Z_z,\; Y_z,\; X_z,\; X_y. \quad (14.7)$$

Аналогично случаю упругого напряжённого состояния, мы имеем здесь три взаимно перпендикулярные главные оси напряжённого состояния, которые будем считать совпадающими с главными осями скоростей деформации (предложение Мориса Леви). На элементарных площадках, нормальных к этим главным осям, действуют три главных нормальных напряжения

$$\sigma_1,\; \sigma_2,\; \sigma_3.$$

На трёх взаимно перпендикулярных элементарных площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями (деформации), действуют главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3, определяемые по формулам (2.53). На этих элементарных площадках имеются три главные скорости деформации сдвига $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$, определяемые формулами:

$$\bar{\gamma}_1=s_2-s_3;\; \bar{\gamma}_2=s_3-s_1;\; \bar{\gamma}_3=s_1-s_2. \quad (14.8)$$

Аналогично формулам (2.52) и (3.104) имеем:

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3=0, \tag{14.9}$$

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0. \tag{14.10}$$

Среднее растягивающее напряжение определяется инвариантным соотношением (3.79):

$$P=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}(X_x+Y_y+Z_z). \tag{14.11}$$

§ 139. Соотношения Мизеса-Мориса Леви.

При пластической деформации между шестью компонентами напряжённого состояния и шестью компонентами скоростей пластической деформации имеется определённая связь. По аналогии с соотношениями (3.82) и (3.83) естественно эту связь установить, вводя вместо 2μ новый модуль $\mathfrak{M}$, который будем называть *модулем пластической деформации, но который есть величина переменная и неизвестная, подлежащая определению.*

Таким образом, мы получим соотношения, принадлежащие Р. Мизесу, но которые, по существу, уже были известны Морису Леви:

$$\left.\begin{aligned} X_x-P&=\mathfrak{M}(s_{xx}-\bar{s}),\\ Y_y-P&=\mathfrak{M}(s_{yy}-\bar{s}),\\ Z_z-P&=\mathfrak{M}(s_{zz}-\bar{s}),\end{aligned}\right\} \tag{14.12}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_z&=\mathfrak{M}\left(\frac{1}{2}s_{yz}\right),\\ X_z&=\mathfrak{M}\left(\frac{1}{2}s_{xz}\right),\\ X_y&=\mathfrak{M}\left(\frac{1}{2}s_{xy}\right).\end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

Эти соотношения являются естественным обобщением соотношений Сен-Венана для плоской пластической деформации. Они подтверждаются тем экспериментальным фактом, что направления сдвигов совпадают с направлениями наибольших касательных напряжений. При пластической деформации наиболее употребительных материалов части массы скользят друг по другу вдоль бесчисленных плоскостей скольжения, которые можно наблюдать в виде так называемых фигур скольжения (линии Людерса).

Предположение о том, что главные оси напряжённого состояния совпадают с главными осями скоростей деформации, принадлежит Сен-Венану, который вывел его на основании опытов Треска над текучестью материалов под высоким давлением. Это предположение было затем положено Морисом Леви в основу его работы по пластичности.

Обычно принимают, что при пластической деформации плотность или объём массы не меняется. Однако, очень точные измерения показали, что небольшое увеличение объёма при пластической деформации всё же происходит (вследствие того, что микроструктура обычно делается менее плотной), причём это изменение объёма имеет величину того же порядка, что и упругая деформация. Так как величина упругой деформации незначительна по сравнению с величиной пластической деформации, то ею обычно пренебрегают. На том же основании можно пренебрегать и упомянутым увеличением объёма. Поэтому на основании соотношения (14.6) имеем:

$$\bar{\Delta} = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0, \tag{14.14}$$

$$\bar{s} = 0, \tag{14.15}$$

и формулы (14.12) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} X_x - P &= \mathfrak{M} s_{xx}, \\ Y_y - P &= \mathfrak{M} s_{yy}, \\ Z_z - P &= \mathfrak{M} s_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{14.16}$$

Формулами (14.13), (14.14) и (14.16) обычно и пользуются при исследовании пластической деформации.

Внося (14.11) в (14.16), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} s_{xx} &= m\left[X_x - \frac{1}{2}(Y_y + Z_z)\right], \\ s_{yy} &= m\left[Y_y - \frac{1}{2}(X_x + Z_z)\right], \\ s_{zz} &= m\left[Z_z - \frac{1}{2}(X_x + Y_y)\right], \\ s_{yz} &= 3mY_z, \\ s_{xz} &= 3mX_z, \\ s_{xy} &= 3mX_y, \end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

где

$$m = \frac{2}{3}\frac{1}{\mathfrak{M}}. \tag{14.18}$$

Соотношения (14.17) соответствуют соотношениям (3.85), но в них вместо модуля Юнга E стоит величина $\frac{3}{2}\mathfrak{M}$, а коэффициент Пуассона принят равным $\sigma = 0{,}5$, как и должно быть для случая несжимаемого тела.

Внося формулы (14.5) в (14.13), (14.14) и (14.16), мы получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned} X_x - P &= \mathfrak{M}\frac{\partial U}{\partial x}, & Y_z &= \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right), \\ Y_y - P &= \mathfrak{M}\frac{\partial V}{\partial y}, & X_z &= \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right), \\ Z_z - P &= \mathfrak{M}\frac{\partial W}{\partial z}, & X_y &= \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0. \tag{14.20}$$

Кроме того, шесть компонентов напряжённого состояния при пластической деформации должны удовлетворять трём уравнениям Коши:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\left(X-\frac{DU}{Dt}\right)=0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho\left(Y-\frac{DV}{Dt}\right)=0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho\left(Z-\frac{DW}{Dt}\right)=0, \end{aligned}\right\} \tag{14.21}$$

где ρ — плотность, X, Y, Z — компоненты силы на единицу массы, а

$$\frac{D}{Dt}(\ )=\frac{\partial}{\partial t}(\ )+U\frac{\partial}{\partial x}(\ )+V\frac{\partial}{\partial y}(\ )+W\frac{\partial}{\partial z}(\ ) \tag{14.22}$$

есть субстанциальная производная.

Внося (14.19) в (14.21) и присоединяя уравнение (14.20), мы получим систему четырёх уравнений с пятью неизвестными U, V, W, P, $\mathfrak{M}$, ибо модуль пластичности $\mathfrak{M}$ есть величина неизвестная.

Недостающее пятое уравнение получается из так называемого *условия пластичности*. Правильная формулировка этого условия была главным затруднением в развитии теории пластичности после работы Сен-Венана. Это условие было сформулировано только много времени спустя Р. Мизесом, что, между прочим, составляет его главную заслугу в теории пластичности.

§ 140. Условие пластичности Мизеса — Сен-Венана.

На основании своих опытов над истечением металлов через отверстие Треска пришёл к заключению, что критерием возникновения пластической деформации является не предельное значение одного из главных нормальных напряжений, характерное для данного материала, а наибольшая разность главных нормальных напряжений.

На основании этого Сен-Венан принял следующее условие пластичности: *в каждой точке материала, находящегося в пластическом состоянии, наибольшее касательное напряжение имеет постоянную величину, характерную для этого материала.* Это положение Сен-Венана, известное под именем *теории наибольшего касательного напряжения,* хорошо согласуется с поведением материала при высоких давлениях и наблюдением над линиями Людерса. Если σ_1 и σ_2 суть главные нормальные напряжения, то наибольшее касательное напряжение согласно формулам (2.53) будет:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = k_1, \tag{14.23}$$

где k_1 есть постоянная величина, характерная для данного материала. Внося в (14.23) выражения σ_1 и σ_2 через компоненты напряжённого состояния по формуле (8.16), можно представить соотношение (14.23) в следующем виде:

$$(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 = 4k_1^2. \tag{14.24}$$

Это соотношение было дано Сен-Венаном и лежит в основе всех последующих работ по плоской задаче.

Три главные касательные напряжения τ_1, τ_2, τ_3, имеющие место в каждой точке упругого напряжённого тела и определяемые по формулам (2.53), образуют три взаимно перпендикулярных направления, которые могут быть приняты за оси координат. Рассматривая τ_1, τ_2 и τ_3 как координаты некоторой точки M, мы можем рассматривать эту точку как изображение определённого напряжённого состояния. Совокупность точек M, изображающих разные *предельные* состояния, при переходе за которые возникает *пластическая* деформация, образует поверхность

$$f_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0. \tag{14.25}$$

Эта поверхность будет *предельной поверхностью пластической деформации.*

Можно принять, обобщая условие (14.23), что пластическая деформация определяется тремя условиями:

$$|\tau_1| \leqslant k; \quad |\tau_2| \leqslant k; \quad |\tau_3| \leqslant k, \tag{14.26}$$

где k есть постоянная, характерная для данного материала. Тогда в системе координат (τ_1, τ_2, τ_3) предельная поверхность (14.25) представляет куб, грани которого параллельны координатным плоскостям, а центр куба находится в начале координат.

Р. Мизес заменил этот куб сферой, центр которой находится в начале координат, и уравнение которой имеет вид:

$$\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2=2k^2. \tag{14.27}$$

Если внести сюда τ_1, τ_2 и τ_3 по формулам (2.53), то получим уравнение:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=8k^2, \tag{14.28}$$

а это есть наше уравнение (14.2) предельной поверхности в системе координат (σ_1, σ_2, σ_3). Уравнение (14.27) или эквивалентное ему уравнение (14.28) и представляет *условие пластичности Мизеса*, которое довольно хорошо согласуется с опытными данными. В § 142 будет показано, что условие Сен-Венана (14.23) есть частный случай условия (14.28). Таким образом, условие Мизеса есть обобщение условия Сен-Венана на пространственную задачу пластичности.

§ 141. Интерпретация условия пластичности Мизеса, данная Генки.

В главе III мы вывели формулу (3.97) для удельной работы деформации формы. Внося в неё Ω_2 по формулам (3.100) и (3.102), мы получим два эквивалентных выражения удельной работы деформации формы:

$$A_g=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{12\mu}, \tag{14.29}$$

$$A_g=\frac{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}{3\mu}. \tag{14.30}$$

Внося сюда (14.27) и (14.28), мы будем иметь:

$$A_g=\frac{2k^2}{3\mu}. \tag{14.31}$$

Это и есть *удельная работа деформации формы элемента* (*упругого тела*), *находящегося в пластическом состоянии.*

Отсюда мы имеем следующий закон, принадлежащий Генки: *удельная работа деформации формы элемента, находящегося в пластическом состоянии, есть величина постоянная, определяемая формулой* (14.31).

В случае чистого растяжения в направлении оси Ox мы имеем:

$$\sigma_2=\sigma_3=0, \tag{14.32}$$

чему соответствуют, по формулам (2.53), касательные напряжения

$$\tau_1=0, \quad \tau_2=-\frac{1}{2}\sigma_1, \quad \tau_3=\frac{1}{2}\sigma_1. \tag{14.33}$$

Внося (14.33) в (14.27) и имея в виду, что $\sigma_1 > 0$, мы получим:

$$\sigma_1 = 2k. \tag{14.34}$$

Пластическое состояние материала в рассматриваемом случае начнётся тогда, когда главное нормальное напряжение σ_1 достигнет *предела текучести на растяжение* σ_0, вследствие чего имеем:

$$\sigma_0 = 2k. \tag{14.35}$$

В этот момент времени согласно (14.33) наибольшее касательное напряжение будет иметь постоянную величину

$$\tau_3 = k. \tag{14.36}$$

Следовательно, *постоянная k равна половине величины предела текучести σ_0 при растяжении в одном направлении* (т. е. при чистом растяжении).

В случае чистого сдвига имеем известные соотношения:

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sigma_1. \tag{14.37}$$

Внося (14.37) в формулы (2.53), мы получим:

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \tau_2 = -\sigma_1, \quad \tau_3 = \frac{1}{2}\sigma_1,$$

откуда следует соотношение

$$\tau_1 = \tau_3 = -\frac{1}{2}\tau_2. \tag{14.38}$$

Внося (14.38) в (14.27), мы найдём:

$$\tau_2 = \frac{2k}{\sqrt{3}} = \tau_0, \tag{14.39}$$

что вследствие (14.35) даёт:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 0{,}58\sigma_0. \tag{14.40}$$

Следовательно, при чистом сдвиге пластическая деформация начнётся в материале тогда, когда касательное напряжение достигнет величины τ_0, даваемой формулой (14.40), которая и будет *пределом текучести при чистом сдвиге.* Этот вывод подтверждается опытными данными.

Из формул (14.31) и (3.97) имеем:

$$A_g = \frac{1}{2\mu}\Omega_2 = \frac{2k^2}{3\mu}, \tag{14.41}$$

что даёт условие пластичности Мизеса в виде

$$\Omega_2 = \frac{4}{3}k^2. \tag{14.42}$$

Внося сюда Ω_2 по формуле (3.96), мы получим условие пластичности Мизеса в форме инварианта:

$$(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + \\ + 6(Y_z^2 + X_z^2 + X_y^2) = 8k^2. \quad (14.43)$$

Эта форма условия пластичности Мизеса пригодна для произвольно выбранных прямоугольных осей координат. Если оси координат x, y, z совпадают с главными осями, то имеем:

$$X_x = \sigma_1, \quad Y_y = \sigma_2, \quad Z_z = \sigma_3, \quad Y_z = X_z = X_y = 0,$$

и условие (14.43) переходит в условие (14.28).

§ 142. Интенсивность напряжений сдвига и интенсивность скорости пластической деформации сдвига.

Очевидно, что, не изменяя рассуждений § 38, мы можем определить величину

$$T = \sqrt{\Omega_2}, \quad (14.44)$$

введённую нами в главе III [формула (3.106)] *как интенсивность напряжений сдвига при пластической деформации*, причём Ω_2 определяется формулой (3.96).

Введём теперь новую величину Ω_3, аналогичную величине Ω_1, определённой формулой (3.94):

$$\Omega_3 = s_{zy}^2 + s_{zx}^2 + s_{xy}^2 + \frac{2}{3}[(s_{zz} - s_{yy})^2 + \\ + (s_{yy} - s_{xx})^2 + (s_{xx} - s_{zz})^2]. \quad (14.45)$$

Выражение, стоящее в правой части (14.45), есть инвариант. Выбирая за оси x, y, z главные оси скоростей деформации, мы будем иметь:

$$s_{xx} = s_1, \quad s_{yy} = s_2, \quad s_{zz} = s_3, \quad s_{yz} = s_{zx} = s_{xy} = 0.$$

Внося эти значения в (14.45), получим:

$$\Omega_3 = \frac{2}{3}[(s_3 - s_2)^2 + (s_2 - s_1)^2 + (s_1 - s_3)^2]. \quad (14.46)$$

Подставляя теперь в (14.46) соотношения (14.8), имеем:

$$\Omega_3 = \frac{2}{3}[\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\gamma}_3^2]. \quad (14.47)$$

Величину

$$h = \sqrt{\Omega_3}, \quad (14.48)$$

выраженную через главные скорости деформации сдвига $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ и $\bar{\gamma}_3$, мы будем называть *интенсивностью скорости пластической деформации сдвига.*

Внося (14.44) в (14.42), мы получим, как *условие пластичности*, формулу Генки:

$$T = \frac{2k}{\sqrt{3}} = \tau_0. \tag{14.49}$$

Следовательно, ***при пластической деформации интенсивность напряжений сдвига T имеет постоянную величину*** τ_0, которая является пределом текучести при чистом сдвиге.

Если в выражение Ω_2, заданное формулой (3.96), внести выражения шести компонентов напряжённого состояния пластической деформации по формулам (14.13) и (14.16), то, имея в виду равенство (14.45), получим важное соотношение:

$$\Omega_2 = \frac{1}{4}\mathfrak{M}^2\Omega_3. \tag{14.50}$$

Подставляя сюда вместо Ω_2 и Ω_3 их значения из равенств (14.44) и (14.48), найдём:

$$T^2 = \frac{1}{4}\mathfrak{M}^2 h^2,$$

откуда получается основная формула

$$T = \frac{1}{2}\mathfrak{M}h, \tag{14.51}$$

аналогичная формуле (3.110).

§ 143. Случай плоской деформации.

Пусть плоскость деформации есть плоскость Oxy. Для плоской деформации имеем:

$$\left.\begin{aligned} U &= f_1(x, y, t), \\ V &= f_2(x, y, t), \\ W &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.52}$$

откуда следует:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Внося эти значения в (2.53), получим:

$$s_{zz} = s_{yz} = s_{xz} = 0. \tag{14.53}$$

Условие несжимаемости выразится теперь формулой:

$$\bar{s} = \frac{1}{2}(s_{xx} + s_{yy}) = 0,$$

что даёт:

$$s_{xx} + s_{yy} = 0. \tag{14.54}$$

На основании сказанного в § 139, мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= P + \mathfrak{M} s_{xx}, \\ Y_y &= P + \mathfrak{M} s_{yy}, \\ X_y &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} s_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{14.55}$$

$$Z_z = P, \tag{14.56}$$

$$X_z = Y_z = 0. \tag{14.57}$$

Из (14.55) на основании (14.54) имеем:

$$P = \frac{1}{2}(X_x + Y_y). \tag{14.58}$$

Для вычисления главных нормальных напряжений имеем детерминантное уравнение (см. § 21):

$$\begin{vmatrix} X_x - \sigma & X_y & X_z \\ X_y & Y_y - \sigma & Y_z \\ X_z & Y_z & Z_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{14.59}$$

Внося сюда из (14.57)

$$Y_z = X_z = 0,$$

мы получим уравнение:

$$(Z_z - \sigma)\begin{vmatrix} X_x - \sigma & X_y \\ X_y & Y_y - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$(X_x - \sigma)(Y_y - \sigma) - X_y^2 = 0, \tag{14.60}$$

$$Z_z - \sigma = 0. \tag{14.61}$$

Решая квадратное уравнение (14.60), получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(X_x + Y_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(X_x + Y_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.62}$$

Из уравнения (14.61) имеем третий корень:

$$\sigma_3 = Z_z. \tag{14.63}$$

Из (14.62) имеем важное соотношение:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}, \tag{14.64}$$

которое мы уже применили при выводе формулы (14.24) из формулы (14.23). Из формул (14.56), (14.58) и (14.63) мы имеем:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(X_x + Y_y) = Z_z, \tag{14.65}$$

Складывая оба уравнения (14.62), имеем:

$$\sigma_1+\sigma_2=X_x+Y_y.$$

Внося это выражение в (14.65), получим соотношение:

$$\sigma_3=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2). \tag{14.66}$$

Следовательно, имеем:

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),$$

$$\sigma_2-\sigma_3=\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1).$$

Внося эти значения в (14.28), мы получим:

$$\frac{3}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2=8k^2, \tag{14.67}$$

откуда при условии, что $\sigma_1>\sigma_2$, найдём соотношение:

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{4k}{\sqrt{3}}, \tag{14.68}$$

которое вследствие (14.35) приводится к виду:

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}. \tag{14.69}$$

Сравнивая (14.24), (14.64), (14.68) и (14.69), мы найдём:

$$k_1=\frac{2k}{\sqrt{3}}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \tag{14.70}$$

откуда следует, что постоянная k_1 в условии Сен-Венана не равна постоянной k в условии Мизеса, но связана с ней соотношением (14.70).

Величина наибольшего касательного напряжения при условии, что $\sigma_1>\sigma_2$, будет иметь значение

$$\tau_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(X_x-Y_y)^2+4X_y^2}. \tag{14.71}$$

Из (14.68), (14.69) и (14.71) следует, что при пластической деформации имеет место соотношение:

$$\tau_3=\frac{2k}{\sqrt{3}}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \tag{14.72}$$

в то время как при применении теории наибольших касательных напряжений мы имели бы, как условие пластичности, соотношение

$$\tau_3=k_1=\frac{1}{2}\sigma_0. \tag{14.73}$$

Вносяя значение Z_z из формулы (14.65), мы будем иметь:

$$X_x - Z_z = \frac{1}{2}(X_x - Y_y); \quad Z_z - Y_y = \frac{1}{2}(X_x - Y_y). \quad (14.74)$$

Подставляя (14.74) в формулу (3.96), мы получим:

$$\Omega_2 = \frac{1}{4}[(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2]. \quad (14.75)$$

Внося (14.75) в (14.44), получим важную формулу:

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}. \quad (14.76)$$

Сравнивая (14.76) и (14.71), получим соотношение

$$T = \tau_3,$$

следовательно, *при плоской деформации интенсивность напряжений сдвига T равна наибольшему касательному напряжению* τ_3.

Внося (14.53) в (14.45), мы получим:

$$\Omega_3 = s_{xy}^2 + \frac{2}{3}[s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + (s_{xx} - s_{yy})^2]. \quad (14.77)$$

Но вследствие (14.54) имеем:

$$s_{xx}^2 + s_{yy}^2 = \frac{1}{2}(s_{xx} - s_{yy})^2 + \frac{1}{2}(s_{xx} + s_{yy})^2 = \frac{1}{2}(s_{xx} - s_{yy})^2. \quad (14.78)$$

Внося это выражение в (14.77) и имея в виду (14.48), мы получим:

$$h = \sqrt{s_{xy}^2 + (s_{xx} - s_{yy})^2}. \quad (14.79)$$

Это есть величина *интенсивности скорости деформации сдвига при плоской пластической деформации.*

Можно показать, что h есть наибольшая скорость деформации сдвига.

Следует заметить, что T и h суть инварианты при преобразовании осей координат.

§ 144. Случай плоского напряжённого состояния.

В случае плоского напряжённого состояния все три компонента напряжённого состояния, параллельные данной плоскости, за которую мы примем плоскость Oxy, равны нулю:

$$X_z = Y_z = Z_z = 0. \quad (14.80)$$

Внося (14.80) в (14.59), получим уравнение:

$$\sigma\begin{vmatrix} X_x-\sigma & X_y \\ X_y & Y_y-\sigma \end{vmatrix}=0, \tag{14.81}$$

которое распадается на два уравнения:

$$(X_x-\sigma)(Y_y-\sigma)-X_y^2=0,$$
$$\sigma=0.$$

Следовательно, при плоском напряжённом состоянии два главных нормальных напряжения σ_1 и σ_2 определяются формулами (14.62), а третье главное нормальное напряжение равно нулю:

$$\sigma_3=0. \tag{14.82}$$

Внося (14.82) в (14.28), мы получим уравнение:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2=8k^2. \tag{14.83}$$

Внося сюда σ_1 и σ_2 по формулам (14.62), найдём:

$$X_x^2+Y_y^2-X_xY_y+3X_y^2=4k^2=\sigma_0^2. \tag{14.84}$$

Это и будет *условием пластичности Мизеса для плоского напряжённого состояния.*

§ 145. Определение мощности пластической деформации.

Удельную работу пластической деформации, отнесённую к единице времени, мы будем называть *мощностью пластической деформации.* По аналогии с удельной работой деформации мы будем определять мощность пластической деформации по формуле:

$$d\Lambda=X_xds_{xx}+Y_yds_{yy}+Z_zds_{zz}+Y_zds_{yz}+X_zds_{xz}+X_yds_{xy}. \tag{14.85}$$

Внося (14.13) и (14.16) в (14.85), мы получим:

$$d\Lambda=Pd(s_{xx}+s_{yy}+s_{zz})+\mathfrak{M}(s_{xx}ds_{xx}+s_{yy}ds_{yy}+s_{zz}ds_{zz})+$$
$$+\frac{1}{2}\mathfrak{M}(s_{yz}ds_{yz}+s_{xz}ds_{xz}+s_{xy}ds_{xy}),$$

что вследствие условия несжимаемости (14.14) приводится к виду:

$$d\Lambda=\frac{1}{4}\mathfrak{M}\,dF_1, \tag{14.86}$$

где

$$F_1=2(s_{xx}^2+s_{yy}^2+s_{zz}^2)+s_{yz}^2+s_{zx}^2+s_{xy}^2. \tag{14.87}$$

Вследствие условия (14.14) мы имеем:

$$s_{xx}^2+s_{yy}^2+s_{zz}^2=s_{xx}^2+s_{yy}^2+s_{zz}^2-\frac{1}{3}(s_{xx}+s_{yy}+s_{zz})^2=$$
$$=\frac{2}{3}(s_{xx}^2+s_{yy}^2+s_{zz}^2-s_{xx}s_{yy}-s_{yy}s_{zz}-s_{zz}s_{xx})=$$
$$=\frac{1}{3}[(s_{xx}-s_{yy})^2+(s_{yy}-s_{zz})^2+(s_{zz}-s_{xx})^2].$$

Следовательно, имеем из (14.87):

$$F_1=s_{yz}^2+s_{zx}^2+s_{xy}^2+\frac{2}{3}[(s_{xx}-s_{yy})^2+$$
$$+(s_{yy}-s_{zz})^2+(s_{zz}-s_{xx})^2]. \quad (14.88)$$

Сравнивая (14.88) и (14.45), мы найдём:

$$F_1=\Omega_8.$$

Внося это значение F_1 в (14.86), мы получим:

$$d\Lambda=\frac{1}{4}\mathfrak{M}\,d\Omega_8 \quad (14.89)$$

или, имея в виду (14.48):

$$d\Lambda=\frac{1}{2}\mathfrak{M}h\,dh. \quad (14.90)$$

Согласно условию пластичности Мизеса, T имеет постоянное значение τ_0, определяемое формулой (14.49). Из (14.51) и (14.49) мы имеем соотношение:

$$\mathfrak{M}=\frac{2\tau_0}{h}=\frac{4k}{h\sqrt{3}}. \quad (14.91)$$

Поэтому внося (14.91) в (14.90), мы получим:

$$d\Lambda=\tau_0 dh, \quad (14.92)$$

интегрируя, имеем:

$$\Lambda=\tau_0 h. \quad (14.93)$$

Внося (14.51) в (14.90), мы получим фундаментальное соотношение

$$d\Lambda=T dh, \quad (14.94)$$

аналогичное соотношению (3.111) и указывающее на существенную роль, которую должны играть введённые Генки величины T и h в теории пластичности. Так как при пластической деформации

$$T=\tau_0=\text{const.},$$

то из (14.94) имеем снова (14.93).

§ 146. Вариационное уравнение в теории пластичности Сен-Венана — Мизеса.

Не вводя пока гипотезы о несжимаемости и считая поэтому три вариации скоростей

$$\delta U,\ \delta V,\ \delta W$$

произвольными, умножим соответственно уравнения системы (14.21) на $\delta U\,dx\,dy\,dz$, $\delta V\,dx\,dy\,dz$ и $\delta W\,dx\,dy\,dz$; полученные результаты сложим и возьмём интеграл по всему объёму тела, занятому пластической деформацией. Получим:

$$\begin{aligned}\iiint\Big[\Big(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\Big)\delta U+\Big(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\Big)\delta V+\\+\Big(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\Big)\delta W\Big]\,dx\,dy\,dz+\\+\iiint\Big[\Big(X-\frac{DU}{Dt}\Big)\delta U+\Big(Y-\frac{DV}{Dt}\Big)\delta V+\\+\Big(Z-\frac{DW}{Dt}\Big)\delta W\Big]\rho\,dx\,dy\,dz=0.\end{aligned}\qquad(14.95)$$

Преобразуем первый тройной интеграл. Интегрируя по частям и обозначая через l, m, n косинусы углов внешней нормали с осями координат и через $d\Sigma$ элемент поверхности, получим три выражения вида:

$$\begin{aligned}\iiint\Big[\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\Big]\delta U\,dx\,dy\,dz=\iint[lX_x+mX_y+nX_z]\,\delta U\,d\Sigma-\\-\iiint\Big[X_x\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+X_y\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial y}\Big)+X_z\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big)\Big]\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\qquad(14.96)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta U)=\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)\quad\text{и т. д.}$$

Обозначим через $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$, рассчитанные на единицу площади компоненты внешних сил, приложенных к поверхности тела; тогда граничные условия, согласно формулам (4.21), будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_\nu&=lX_x+mX_y+nX_z,\\ \overline{Y}_\nu&=lX_y+mY_y+nY_z,\\ \overline{Z}_\nu&=lX_z+mY_z+nZ_z.\end{aligned}\right\}\qquad(14.97)$$

Внося (14.97) в (14.95), используя соотношения (14.5) и применяя формулу (14.85), мы получим:

$$\begin{aligned}\iiint\Big[\Big(X-\frac{DU}{Dt}\Big)\delta U+\Big(Y-\frac{DV}{Dt}\Big)\delta V+\Big(Z-\frac{DW}{Dt}\Big)\delta W\Big]\rho\,dx\,dy\,dz+\\+\iint[\overline{X}_\nu\delta U+\overline{Y}_\nu\delta V+\overline{Z}_\nu\delta W]\,d\Sigma-\iiint\delta\Lambda\,dx\,dy\,dz=0.\end{aligned}\qquad(14.98)$$

Это и есть *вариационное уравнение при пластической деформации упругого тела.*

В случае несжимаемости мы имеем условие (14.14), которое нам даёт:

$$\delta s_{xx} + \delta s_{yy} + \delta s_{zz} = 0,$$

откуда вследствие формул (14.5) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta U) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta V) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta W) = 0. \qquad (14.99)$$

§ 147. Принцип Журдена.

Начало Даламбера в соединении с началом Лагранжа приводит к основному уравнению динамики системы:

$$\sum m[(X_x - j_x)\,\delta x + (Y_y - j_y)\,\delta y + (Z_z - j_z)\,\delta z] = 0, \qquad (14.100)$$

где m есть масса материальной точки системы, j_x, j_y, j_z — компоненты полного ускорения материальной точки, а δx, δy, δz — элементарные перемещения, согласные со связями системы. Взяв производную от (14.100) по времени t, получим:

$$\sum m\left[(X_x - j_x)\frac{d\,\delta x}{dt} + (Y_y - j_y)\frac{d\,\delta y}{dt} + (Z_z - j_z)\frac{d\,\delta z}{dt}\right] + \sum m\left[\delta x\frac{d}{dt}(X_x - j_x) + \delta y\frac{d}{dt}(Y_y - j_y) + \delta z\frac{d}{dt}(Z_z - j_z)\right] = 0. \qquad (14.101)$$

Обозначая компоненты скорости точки в виде

$$U = \frac{dx}{dt}, \quad V = \frac{dy}{dt}; \quad W = \frac{dz}{dt}, \qquad (14.102)$$

мы будем иметь:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \delta U, \quad \frac{d}{dt}(\delta y) = \delta V, \quad \frac{d}{dt}(\delta z) = \delta W. \qquad (14.103)$$

Журден предложил сравнить с действительным движением системы в данный момент времени, когда точка m_i занимает положение x_i, y_i, z_i и имеет скорости U_i, V_i, W_i, такое смежное движение, при котором та же точка m_i имеет *то же самое положение* (x_i, y_i, z_i), но имеет *иную скорость*, смежную с данной, а именно:

$$U_i + \delta U_i, \quad V_i + \delta V_i, \quad W_i + \delta W_i.$$

Следовательно, в этом случае мы имеем:

$$\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0. \qquad (14.104)$$

Внося (14.103) и (14.104) в (14.101), мы получим основное уравнение динамики в форме, данной Журденом:

$$\sum m\left[(X_x-j_x)\,\delta U+(Y_y-j_y)\,\delta V+(Z_z-j_z)\,\delta W\right]=0. \tag{14.105}$$

Применяя уравнение (14.105) к пластической деформации упругого тела, которое мы рассматриваем как сплошную среду, мы получим уравнение (14.95). Следовательно, вариационное уравнение (14.98), вытекающее из (14.95), является *вариационным уравнением Журдена в динамике пластической среды.*

§ 148. Определение скоростей деформации из уравнений движения.

Внося из (14.91) значение модуля пластичности

$$\mathfrak{M}=\frac{2\tau_0}{h}$$

в формулы (14.13) и (14.16), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} &X_x=P+\frac{2\tau_0}{h}s_{xx}, && Y_y=P+\frac{2\tau_0}{h}s_{yy}, && Z_z=P+\frac{2\tau_0}{h}s_{zz},\\ &Y_z=\frac{\tau_0}{h}s_{yz}, && X_z=\frac{\tau_0}{h}s_{xz}, && X_y=\frac{\tau_0}{h}s_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{14.106}$$

где P есть неизвестная величина. Внося (14.106) в условие пластичности (14.43) и принимая во внимание (14.45), мы получим:

$$\frac{6\tau_0^2}{h^2}\Omega_s=8k^2,$$

что вследствие (14.48) и (14.39) приводится к тождеству. Таким образом, применяя соотношения (14.106) между шестью компонентами напряжённого состояния и шестью компонентами скоростей пластической деформации, мы тем самым автоматически удовлетворяем условию пластичности Мизеса. Поэтому соотношения (14.106) прямо могут быть подставлены в уравнения (14.21), и условие (14.43) уже более не нужно.

Внося (14.5) в (14.106), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} &X_x=P+\frac{2\tau_0}{h}\frac{\partial U}{\partial x}, && Y_z=\frac{\tau_0}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right),\\ &Y_y=P+\frac{2\tau_0}{h}\frac{\partial V}{\partial y}, && X_z=\frac{\tau_0}{h}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right),\\ &Z_z=P+\frac{2\tau_0}{h}\frac{\partial W}{\partial z}, && X_y=\frac{\tau_0}{h}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14.107}$$

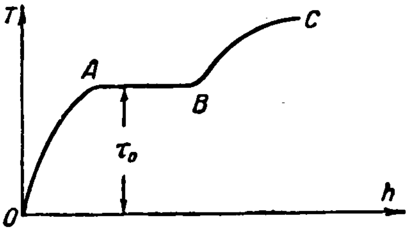
Входящая сюда величина h, как это следует из формул (14.107), (14.45) и (14.48), равна

$$h=\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (14.108)$$

Внося (14.107) и (14.108) в уравнение (14.21), мы получим три уравнения, в которые входят четыре неизвестных U, V, W, P. Добавочное четвёртое уравнение даёт условие несжимаемости (14.20).

§ 149. Диаграмма пластичности Генки.

На фиг. 44 по оси абсцисс отложены значения h, а по оси ординат значения T. Полученная таким образом диаграмма (T, h) может быть названа *диаграммой Генки*. Вначале, когда интенсивность касательных напряжений T меньше предела текучести при сдвиге τ_0, определяемого по формуле (14.39), мы имеем область упругой деформации, представляемой участком OA диаграммы. По данным Надаи, основанным на результатах Людвика, можно принять, что в этой области



Фиг. 44.

$$T=A_1+A_2\ln\frac{h}{A_3}, \quad (14.109)$$

где A_1, A_2, A_3 суть постоянные, характерные для каждого опыта и материала.

Участок AB представляет состояние текучести, характеризуемое нарастанием интенсивности скорости деформации сдвига h при неизменном значении интенсивности касательных напряжений $T=\tau_0$.

Участок BC диаграммы соответствует состоянию деформации после перехода через состояние текучести и изображается аналитически уравнением

$$T=f(h). \quad (14.110)$$

Однако одно это соотношение не может служить основанием для построения уравнений связи между компонентами напряжённого состояния и компонентами скоростей деформации в этой области.

§ 150. Теория пластичности Генки.

Генки в отличие от Мизеса и Сен-Венана устанавливает связь между *шестью компонентами пластической деформации*

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{zx},\ e_{xy} \tag{14.111}$$

и шестью компонентами соответствующего напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y. \tag{14.112}$$

Он применяет для этого формулы (3.83) и (3.86), дающие эту связь при упругой деформации, вводя вместо постоянного модуля сдвига μ некоторую переменную величину φ при помощи соотношения:

$$\varphi=\frac{1}{2\mu}, \tag{14.113}$$

причём φ есть функция координат:

$$\varphi=\varphi(x, y, z). \tag{14.114}$$

Обозначая три компонента смещения при пластической деформации через u, v, w и применяя формулы (3.83) и (3.86), мы получим для пластической деформации следующие соотношения между величинами (14.111) и (14.112):

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi\left[X_x-\frac{\varphi-\frac{1}{3K}}{\varphi}P\right],\\
e_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}=\varphi\left[Y_y-\frac{\varphi-\frac{1}{3K}}{\varphi}P\right],\\
e_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}=\varphi\left[Z_z-\frac{\varphi-\frac{1}{3K}}{\varphi}P\right],\\
e_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=2\varphi Y_z,\\
e_{zx}&=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=2\varphi X_z,\\
e_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2\varphi X_y,\\
P&=\frac{1}{3}(X_x+Y_y+Z_z),
\end{aligned}\right\} \tag{14.115}$$

где K представляет величину, мало изменяющуюся при пластической деформации. Эту величину можно рассматривать как постоянную величину, характерную для данного материала. Соотношения (14.115) были впервые предложены Г. Генки.

Из формул (14.115) имеем:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= K\Delta + \frac{2}{3\varphi}\left[e_{xx} - \frac{e_{yy}+e_{zz}}{2}\right], \\ Y_y &= K\Delta + \frac{2}{3\varphi}\left[e_{yy} - \frac{e_{xx}+e_{zz}}{2}\right], \\ Z_z &= K\Delta + \frac{2}{3\varphi}\left[e_{zz} - \frac{e_{xx}+e_{yy}}{2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{14.116}$$

$$Y_z = \frac{1}{2\varphi} e_{yz}, \quad X_z = \frac{1}{2\varphi} e_{xz}, \quad X_y = \frac{1}{2\varphi} e_{xy}, \tag{14.117}$$

где

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{14.118}$$

Для определения шести компонентов напряжённого состояния (14.112) Генки применяет уравнения упругости Коши, пренебрегая массовыми силами и ускорениями. Поэтому имеем три уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.119}$$

Как условие пластичности Генки применяет условие пластичности Мизеса (14.43).

Если внести (14.117) и (14.116) в (14.119), то получим три уравнения, в которые входят четыре неизвестных u, v, w, φ. Четвёртое уравнение получится, если внести (14.116) и (14.117) в условие пластичности (14.43).

Формула (3.110), принадлежащая Генки и аналогичная закону Гука упругой деформации, после замены в ней μ через φ, на основании равенства (14.113), принимает вид:

$$\varepsilon = 2\varphi T. \tag{14.120}$$

§ 151. Работа при пластической деформации.

Удельная работа пластической деформации в теории Генки вычисляется по формуле (3.88):

$$\delta\bar{A} = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + X_z \delta e_{xz} + X_y \delta e_{xy}. \tag{14.121}$$

Внося (14.116) и (14. 117) в (14.121) и применяя (14.118), получим:

$$\delta\overline{A} = K\Delta\delta\,(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+\frac{2}{3\varphi}\left[e_{xx}\delta e_{xx}+e_{yy}\delta e_{yy}+e_{zz}\delta e_{zz}\right]-$$
$$-\frac{1}{3\varphi}\left[(e_{yy}+e_{zz})\,\delta e_{xx}+(e_{xx}+e_{zz})\,\delta e_{yy}+(e_{xx}+e_{yy})\,\delta e_{zz}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\varphi}\left[e_{yz}\delta e_{yz}+e_{xz}\delta e_{xz}+e_{xy}\delta e_{xy}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}K\delta\Delta^2+\frac{1}{3\varphi}\,\delta\,(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)-\frac{1}{3\varphi}\,\delta\,(e_{xx}e_{yy}+e_{xx}e_{zz}+e_{yy}e_{zz})+$$
$$+\frac{1}{4\varphi}\,\delta\,(e_{yz}^2+e_{xz}^2+e_{xy}^2)=\frac{1}{2}K\delta\Delta^2+\frac{1}{4\varphi}\,\delta\,(e_{yz}^2+e_{xz}^2+e_{xy}^2)+$$
$$+\frac{1}{6\varphi}\,\delta\left[(e_{xx}-e_{yy})^2+(e_{xx}-e_{zz})^2+(e_{yy}-e_{zz})^2\right]. \qquad (14.122)$$

Вследствие формулы (3.94) мы имеем отсюда:

$$\delta\overline{A}=\frac{1}{2}K\delta\Delta^2+\frac{1}{4\varphi}\,\delta\Omega_1, \qquad (14.123)$$

или на основании формулы (3.107):

$$\delta\overline{A}=\frac{1}{2}K\delta\Delta^2+\frac{1}{2\varphi}\,\varepsilon\,\delta\varepsilon, \qquad (14.124)$$

где ε есть интенсивность пластической деформации сдвига, равная

$$\varepsilon=\sqrt{\Omega_1}.$$

Первый член формулы (14.124) представляет удельную работу объёмного сжатия при упругой деформации. Второй член представляет *удельную работу при пластическом изменении формы.* Обозначая её через A_g, имеем основное соотношение:

$$\delta\overline{A}_g=\frac{1}{2\varphi}\,\varepsilon\,\delta\varepsilon. \qquad (14.125)$$

Из условия пластичности Мизеса мы получили формулы (14.49):

$$T=\tau_0, \qquad (14.126)$$

$$\tau_0=\frac{2k}{\sqrt{3}}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}. \qquad (14.127)$$

Внося (14.126) в (14.120), найдём:

$$\varepsilon=2\varphi\tau_0, \qquad (14.128)$$

откуда получим значение φ:

$$\varphi=\frac{\varepsilon}{2\tau_0}, \qquad (14.129)$$

т. е. при пластической деформации коэффициент φ пропорционален интенсивности пластической деформации сдвига ε.

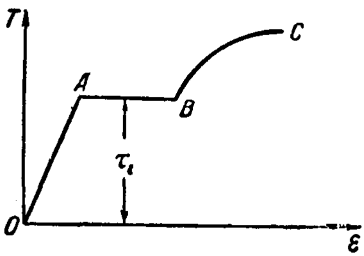
Внося φ из (14.129) в (14.125), мы получим:

$$\delta \overline{A}_g = \tau_0 \delta \varepsilon. \tag{14.130}$$

Интегрируя, получим:

$$\overline{A}_g = \tau_0 \varepsilon. \tag{14.131}$$

На фиг. 45 по оси абсцисс отложены значения ε, а по оси ординат — значения T. Полученную таким образом диаграмму (T, ε) назовём *диаграммой Генки-Шмидта*. Вначале, пока интенсивность касательных напряжений T меньше предела текучести при сдвиге τ_0, мы имеем область упругой деформации, причём коэффициент φ определяется формулой (14.113). Поэтому имеем в этом случае из (14.120)



Фиг. 45.

$$T = \mu \varepsilon, \tag{14.132}$$

где μ есть модуль сдвига. Это соответствует участку OA диаграммы и выражает закон Гука.

Участок AB диаграммы представляет состояние текучести, характеризуемое нарастанием интенсивности деформации сдвига ε при неизменном значении интенсивности касательных напряжений T, определяемом формулой (14.126). Участок BC диаграммы соответствует состоянию деформации после перехода через состояние текучести и изображается аналитически уравнением

$$T = f_1(\varepsilon). \tag{14.133}$$

Внося (14.120) в (14.125), получим основное соотношение:

$$d\overline{A}_g = T\, d\varepsilon, \tag{14.134}$$

из которого следует, что площадь между кривой $OABC$ и осью абсцисс на фиг. 45 представляет удельную работу деформации формы. Внося (14.132) в (14.134), мы получим для упругой деформации формы:

$$A_g = \frac{T^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu\varepsilon^2, \tag{14.135}$$

а для пластической деформации мы получили для $\overline{A}_g$ формулу (14.131).

§ 152. Несжимаемая пластическая деформация.

Если принять материал в пластической области несжимаемым, то мы будем иметь уравнение:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{14.136}$$

В этом случае

$$K=\infty. \tag{14.137}$$

Внося (14.136) и (14.137) в (14.115) и подставляя φ из (14.129), мы получим соотношения:

$$\left.\begin{array}{lll} X_x=P+\frac{2\tau_0}{\varepsilon}e_{xx}, & Y_y=P+\frac{2\tau_0}{\varepsilon}e_{yy}, & Z_z=P+\frac{2\tau_0}{\varepsilon}e_{zz}; \\ Y_z=\frac{\tau_0}{\varepsilon}e_{yz}, & X_z=\frac{\tau_0}{\varepsilon}e_{xz}, & X_y=\frac{\tau_0}{\varepsilon}e_{xy}. \end{array}\right\} \tag{14.138}$$

Если внести (14.138) в условие пластичности (14.43), то вследствие формулы (3.94) мы получим:

$$\frac{6\tau_0^2}{\varepsilon^2}\Omega_1=8k^2,$$

что на основании формул (3.107) и (14.127) приводится к тождеству.

Следовательно, применяя формулы (14.138), мы тем самым уже удовлетворили условию пластичности Мизеса и можем, не рассматривая его более, ограничиться только уравнениями (14.119).

§ 153. Вариационное уравнение в теории пластичности Генки.

Не вводя пока гипотезы о несжимаемости, мы должны считать три вариации δu, δv, δw произвольными. Для пластической деформации имеют место уравнения Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho(X-j_x)=0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho(Y-j_y)=0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho(Z-j_z)=0. \end{array}\right\} \tag{14.139}$$

Умножим первое уравнение этой системы на $\delta u\,dx\,dy\,dz$, второе и третье соответственно на $\delta v\,dx\,dy\,dz$ и $\delta w\,dx\,dy\,dz$, затем полученные результаты сложим и возьмём интеграл по всему объёму тела, занятому пластической деформацией. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \iiint\Big[\Big(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\Big)\delta u+\Big(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\Big)\delta v+ \\ +\Big(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\Big)\delta w\Big]dx\,dy\,dz+ \\ +\iiint[(X-j_x)\delta u+(Y-j_y)\delta v+ \\ +(Z-j_z)\delta w]\rho\,dx\,dy\,dz=0, \end{aligned} \tag{14.140}$$

Интегрируя по частям, мы получим три выражения вида:

$$\iiint \left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] \delta u\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint (lX_x + mX_y + nX_z)\, \delta u\, d\Sigma -$$
$$- \iiint \left[X_x \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + X_y \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + X_z \delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz.$$

Внося это и два аналогичных выражения в (14.140) и применяя (3.3) и (3.4) и формулы (14.97), (14.121), (14.14) и (14.15), мы получим:

$$\iiint [(X - j_x)\,\delta u + (Y - j_y)\,\delta v + (Z - j_z)\,\delta w]\, \rho\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \iint [\overline{X}_\nu \delta u + \overline{Y}_\nu \delta v + \overline{Z}_\nu \delta w]\, d\Sigma - \iiint \delta \overline{A}\, dx\, dy\, dz = 0. \qquad (14.141)$$

Это и есть *вариационное уравнение пластической деформации в теории Генки.*

В случае несжимаемости вариации δu, δv, δw уже не будут произвольными, а будут связаны между собою уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta v) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta w) = 0, \qquad (14.142)$$

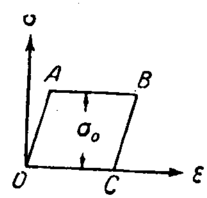
получаемым из (14.136).

§ 154. Закон разгрузки.

Вдоль линии BC на фиг. 45 имеет место соотношение Генки-Шмидта:

$$T = f_1(\varepsilon). \qquad (14.143)$$

Следует заметить, что это соотношение имеет только принципиальный характер и что на нём нельзя построить соотношения между напряжениями и деформациями в нелинейной области. Для этого необходимы дополнительные условия, до сих пор ещё твёрдо не установленные. Если в процессе пластической деформации мы прекратим нагрузку, и начнётся разгрузка, то возникает вопрос о связи между напряжениями и деформациями в процессе разгрузки.



Фиг. 46.

Наиболее просто предположить, что в процессе разгрузки имеет место закон Гука, т. е. компоненты напряжённого состояния и компоненты деформации связаны между собою линейными соотношениями, причём простейшая гипотеза состоит в том, что упругие постоянные в процессе нагрузки и разгрузки остаются теми же самыми*).

На фиг. 46 дана идеальная диаграмма деформаций для нагрузки и разгрузки. Нагрузка происходит по прямой линии OA. Прямая линия AB соответствует пластической деформации, а прямая BC — разгрузке. Отрезок OC даёт остаточное относительное удлинение.

Приближённо принимают, что прямая BC параллельна OA, т. е. что модуль упругости при нагрузке и разгрузке имеет одно и то же значение.

§ 155. Теория пластичности Рейса.

В теории пластичности Сен-Венана и Мизеса предполагается, что чисто упругая часть деформации

$$e'_{xx},\ e'_{yy},\ e'_{zz},\ e'_{yz},\ e'_{zx},\ e'_{xy}$$

настолько мала по сравнению с пластической частью деформации

$$e''_{xx},\ e''_{yy},\ e''_{zz},\ e''_{yz},\ e''_{zx},\ e''_{xy},$$

что ею можно пренебречь.

В теории Рейса предполагается, что обе составные части деформации одного порядка. Поэтому полная деформация определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx}&=e'_{xx}+e''_{xx}, & e_{yy}&=e'_{yy}+e''_{yy}, & e_{zz}&=e'_{zz}+e''_{zz},\\ e_{yz}&=e'_{yz}+e''_{yz}, & e_{zx}&=e'_{zx}+e''_{zx}, & e_{xy}&=e'_{xy}+e''_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{14.144}$$

$$e=e'+e''=\frac{1}{3}(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}), \tag{14.145}$$

$$e'=\frac{1}{3}(e'_{xx}+e'_{yy}+e'_{zz}), \tag{14.146}$$

$$e''=\frac{1}{3}(e''_{xx}+e''_{yy}+e''_{zz}). \tag{14.147}$$

Далее в теории Рейса принимается, что *всё изменение объёма происходит от чисто упругой части деформации*, в то время как пластическая часть деформации обладает свойством несжимаемости, как в теориях Сен-Венана — Мизеса и Генки. Следовательно, имеем:

$$e''=0, \tag{14.148}$$

$$e=e', \tag{14.149}$$

$$e''_{xx}+e''_{yy}+e''_{zz}=0. \tag{14.150}$$

---

*) Надаи, Пластичность, стр. 219—220.

Из соотношений (14.144) и (14.149) получаем для скоростей деформации выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e_{xx}-e) &= \frac{d}{dt}(e'_{xx}-e')+\frac{de''_{xx}}{dt}, \\
\frac{d}{dt}(e_{yy}-e) &= \frac{d}{dt}(e'_{yy}-e')+\frac{de''_{yy}}{dt}, \\
\frac{d}{dt}(e_{zz}-e) &= \frac{d}{dt}(e'_{zz}-e')+\frac{de''_{zz}}{dt}, \\
\frac{de_{yz}}{dt} &= \frac{de'_{yz}}{dt}+\frac{de''_{yz}}{dt}, \\
\frac{de_{xz}}{dt} &= \frac{de'_{xz}}{dt}+\frac{de''_{xz}}{dt}, \\
\frac{de_{xy}}{dt} &= \frac{de'_{xy}}{dt}+\frac{de''_{xy}}{dt}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.151}$$

Дифференцируя по времени t формулы (3.82) и (3.83), мы получим следующие выражения для скоростей чисто упругой части деформации:

$$\left.\begin{aligned}
2\mu\frac{d}{dt}(e'_{xx}-e') &= \frac{d}{dt}S_{xx}, \\
2\mu\frac{d}{dt}(e'_{yy}-e') &= \frac{d}{dt}S_{yy}, \\
2\mu\frac{d}{dt}(e'_{zz}-e') &= \frac{d}{dt}S_{zz}, \\
\mu\frac{de'_{yz}}{dt} &= \frac{d}{dt}S_{yz}, \\
\mu\frac{de'_{xz}}{dt} &= \frac{d}{dt}S_{xz}, \\
\mu\frac{de'_{xy}}{dt} &= \frac{d}{dt}S_{xy}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.152}$$

При этом из формул (3.82) имеем:

$$S_{xx}+S_{yy}+S_{zz}=0, \tag{14.153}$$

$$\left.\begin{aligned}
X_x=P+S_{xx},\quad Y_y=P+S_{yy},\quad Z_z=P+S_{zz}, \\
Y_z=S_{yz},\qquad X_z=S_{xz},\qquad X_y=S_{xy},
\end{aligned}\right\} \tag{14.154}$$

причём имеем известное соотношение (3.79):

$$P=\frac{1}{3}(X_x+Y_y+Z_z). \tag{14.155}$$

Из формул (3.78) и (3.80) имеем соотношение:

$$P=3Ke. \tag{14.156}$$

Для скоростей пластической деформации Рейс принимает те же выражения, что и в теории Сен-Венана и Мизеса, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{de''_{xx}}{dt} &= \frac{N}{2\mu} S_{xx}, & \frac{de''_{yy}}{dt} &= \frac{N}{2\mu} S_{yy}, & \frac{de''_{zz}}{dt} &= \frac{N}{2\mu} S_{zz}, \\ \frac{de''_{yz}}{dt} &= \frac{N}{\mu} S_{yz}, & \frac{de''_{zx}}{dt} &= \frac{N}{\mu} S_{xz}, & \frac{de''_{xy}}{dt} &= \frac{N}{\mu} S_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{14.157}$$

где N есть введённый Рейсом коэффициент, представляющий функцию координат x, y, z и времени t и подлежащий определению.

Дифференцируя (14.150) по времени t, получим условие несжимаемости пластической части деформации:

$$\frac{de''_{xx}}{dt} + \frac{de''_{yy}}{dt} + \frac{de''_{zz}}{dt} = 0. \tag{14.158}$$

Складывая первые три соотношения (14.157), мы замечаем, что вследствие (14.153) условие (14.158) выполнено. Внося (14.152) и (14.157) в (14.151), мы получим *соотношения Рейса*:

$$\left.\begin{aligned} 2\mu \frac{d}{dt}(e_{xx} - e) &= NS_{xx} + \frac{d}{dt} S_{xx}, \\ 2\mu \frac{d}{dt}(e_{yy} - e) &= NS_{yy} + \frac{d}{dt} S_{yy}, \\ 2\mu \frac{d}{dt}(c_{zz} - e) &= NS_{zz} + \frac{d}{dt} S_{zz}, \\ \mu \frac{de_{yz}}{dt} &= NS_{yz} + \frac{d}{dt} S_{yz}, \\ \mu \frac{de_{xz}}{dt} &= NS_{xz} + \frac{d}{dt} S_{xz}, \\ \mu \frac{de_{xy}}{dt} &= NS_{xy} + \frac{d}{dt} S_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{14.159}$$

Условие пластичности Рейс принимает в форме Мизеса, т. е.

$$(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + \\ + 6(Y_z^2 + X_z^2 + X_y^2) = 8k^2. \tag{14.160}$$

§ 156. Теория пластичности Прагера.

В. Прагер предложил новую систему уравнений, которая одинаково пригодна как при небольших напряжениях, когда материал ведёт себя как вполне упругое тело, так и при тех напряжениях, когда материал течёт.

В области упругой деформации связь между шестью компонентами деформации и шестью компонентами напряжённого состояния определяется формулами (3.82) и (3.83), выражающими закон Гука. Предполагая, как и всегда, что деформация несжимаемая, т. е.

$$3e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

мы представим эти соотношения в виде:

$$\left.\begin{array}{lll} S_{xx}=2\mu e_{xx}, & S_{yy}=2\mu e_{yy}, & S_{zz}=2\mu e_{zz}, \\ S_{yz}=\mu e_{yz}, & S_{xz}=\mu e_{xz}, & S_{xy}=\mu e_{xy}. \end{array}\right\} \qquad (14.161)$$

Отсюда, дифференцируя, имеем:

$$\left.\begin{array}{lll} dS_{xx}=2\mu\, de_{xx}, & dS_{yy}=2\mu\, de_{yy}, & dS_{zz}=2\mu\, de_{zz}, \\ dS_{yz}=\mu\, de_{yz}, & dS_{xz}=\mu\, de_{xz}, & dS_{xy}=\mu\, de_{xy}. \end{array}\right\} \qquad (14.162)$$

Удельная элементарная работа деформации определяется по формуле:

$$dA=X_x de_{xx}+Y_y de_{yy}+Z_z de_{zz}+Y_z de_{yz}+X_z de_{xz}+X_y de_{xy}. \qquad (14.163)$$

Дифференциальные соотношения (14.162), пригодные в области упругой деформации, В. Прагер обобщил на область пластической деформации. Именно, он принимает, что:

1) если $dA<0$, то имеют место соотношения (14.162);

2) если $dA>0$, то имеют место соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} dS_{xx}=2\mu\left(de_{xx}-\frac{dA}{2\omega^2}S_{xx}\right), \\ dS_{yy}=2\mu\left(de_{yy}-\frac{dA}{2\omega^2}S_{yy}\right), \\ dS_{zz}=2\mu\left(de_{zz}-\frac{dA}{2\omega^2}S_{zz}\right), \\ dS_{yz}=\mu\left(de_{yz}-\frac{dA}{\omega^2}S_{yz}\right), \\ dS_{xz}=\mu\left(de_{xz}-\frac{dA}{\omega^2}S_{xz}\right), \\ dS_{xy}=\mu\left(de_{xy}-\frac{dA}{\omega^2}S_{xy}\right). \end{array}\right\} \qquad (14.164)$$

Здесь ω есть предел текучести при деформации чистого сдвига, т. е.

$$\omega=\tau_0. \qquad (14.165)$$

В случае чистого сдвига имеем:

$$X_x=Y_y=Z_z=Y_z=X_z=0;\ X_y=\tau,$$
$$e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=e_{yz}=e_{xz}=0;\ e_{xy}=\gamma.$$

Внося эти значения в (14.163), получим:

$$dA = \tau\, d\gamma. \tag{14.166}$$

Если

$$\tau\, d\gamma < 0, \tag{14.167}$$

то имеем из (14.162) соотношение:

$$d\tau = \mu\, d\gamma. \tag{14.168}$$

Если

$$\tau\, d\gamma > 0, \tag{14.169}$$

то имеем из (14.164) соотношение:

$$d\tau = \mu\left(1 - \frac{\tau^2}{\omega^2}\right) d\gamma. \tag{14.170}$$

Если, начиная от начального состояния нулевой деформации и нулевого напряжения, деформация сдвига возрастает, то

$$\tau\, d\gamma > 0,$$

и, интегрируя (14.170) при условии

$$\tau = 0 \text{ при } \gamma = 0, \tag{14.171}$$

мы получим следующее соотношение:

$$\tau = \omega \operatorname{th}\left(\frac{\mu\gamma}{\omega}\right). \tag{14.172}$$

Отсюда, при малых значениях γ имеем приближённо:

$$\tau = \mu\gamma. \tag{14.173}$$

При больших же значениях γ напряжение сдвига стремится к значению ω, которое является пределом текучести при чистом сдвиге.

Если γ, начиная с некоторого значения $\gamma = \gamma_1$, убывает, то $d\gamma < 0$ и, следовательно:

$$\tau\, d\gamma < 0.$$

В этом случае имеет место соотношение (14.168), из которого получаем интеграл:

$$\tau = \mu\gamma + C_1. \tag{14.174}$$

Произвольная постоянная C_1 определяется из условия:

$$\mu\gamma_1 + C_1 = \omega \operatorname{th}\left(\frac{\mu\gamma_1}{\omega}\right). \tag{14.175}$$

Вычитая (14.175) из (14.174), мы получим соотношение:

$$\tau = \omega \operatorname{th}\left(\frac{\mu\gamma_1}{\omega}\right) + \mu(\gamma - \gamma_1), \tag{14.176}$$

которое пригодно до тех пор, пока τ не станет равным нулю при $\gamma=\gamma_2$. Внося это значение γ_2 в (14.176), получим:

$$\omega \operatorname{th}\left(\frac{\mu\gamma_1}{\omega}\right)+\mu(\gamma_2-\gamma_1)=0,$$

откуда имеем:

$$\gamma_2=\gamma_1-\frac{\omega}{\mu}\operatorname{th}\left(\frac{\mu\gamma_1}{\omega}\right). \tag{14.177}$$

Если деформация сдвига убывает и далее, то имеем:

$$\tau<0,\quad d\gamma<0,$$

а следовательно,

$$\tau\, d\gamma>0.$$

Поэтому мы опять должны применить соотношение (14.170). Интегрируя его при условии

$$\tau=0 \text{ при } \gamma=\gamma_2, \tag{14.178}$$

мы получим:

$$\tau=\omega \operatorname{th}\left[\frac{\mu(\gamma-\gamma_2)}{\omega}\right]. \tag{14.179}$$

Механические свойства, подобные здесь описанным, обнаруживает, например, медь.

§ 157. Кручение при пластической деформации.

При значительном закручивании призмы в некоторых частях её возникает пластическая деформация. Как и при обычной теории кручения в упругой области, мы будем предполагать, что все три нормальных компонента напряжённого состояния равны нулю, а из трёх касательных компонентов не равны нулю только два, действующих в плоскости поперечного сечения призмы.

Принимая ось Oz параллельной оси призмы, имеем в упругой области (глава IX, фиг. 24):

$$X_x=Y_y=Z_z=X_y=0. \tag{14.180}$$

Остальные два компонента X_z и Y_z должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}=0. \tag{14.181}$$

Кроме того, должны быть удовлетворены известные тождества Бельтрами (4.51). Так как мы принимаем, что в *пластической области деформации* напряжённое состояние при кручении определяется формулами (14.180) и (14.181), то условие пластичности (14.43) принимает вид:

$$6(Y_z^2+X_z^2)=8k^2,$$

откуда имеем:

$$\tau^2=Y_z^2+X_z^2=\frac{4}{3}k^2, \tag{14.182}$$

где τ есть результирующее касательное напряжение. Отсюда находим, что при пластической деформации, возникающей при кручении, касательное напряжение имеет постоянную величину

$$\tau=\tau_2=\frac{2k}{\sqrt{3}}, \tag{14.183}$$

что совпадает с формулой (14.39). Поэтому условие пластичности (14.182) принимает вид:

$$X_z^2+Y_z^2=\tau_2^2. \tag{14.184}$$

Предполагая, что боковая поверхность призмы свободна от нагрузки внешними силами, мы имеем статическое граничное условие:

$$lX_z+mY_z=0, \tag{14.185}$$

где l и m суть косинусы углов внешней нормали с осями координат x и y. Если ds и $d\nu$ суть элементы дуги контура и внешней нормали к нему, то имеем [см. (9.38)]:

$$l=\frac{dy}{ds}, \quad m=-\frac{dx}{ds}. \tag{14.186}$$

Если ввести функцию напряжений $F(x, y)$ при помощи соотношений

$$X_z=\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Y_z=-\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{14.187}$$

то условие равновесия (14.181) будет удовлетворено тождественно. Внося (14.187) и (14.186) в (14.185), мы получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial F}{\partial s}=0.$$

Это условие должно быть удовлетворено в каждой точке контура поперечного сечения призмы. Интегрируя, имеем контурное условие:

$$F=\text{const}. \tag{14.188}$$

Следовательно, на контуре поперечного сечения функция F имеет постоянное значение, которое для односвязного контура можно принять равным нулю. Отсюда для односвязного сечения имеем контурное условие:

$$F=0. \tag{14.189}$$

Внося (14.187) в (14.184), мы получим основное соотношение:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2=\tau_2^2=\text{const}. \tag{14.190}$$

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, есть квадрат градиента F (наибольшего уклона поверхности F). Следовательно, *поверхность пластических напряжений*

$$z=F(x, y) \tag{14.191}$$

есть *поверхность с постоянным углом ската* (поверхность естественного откоса), которую можно построить на контуре поперечного сечения. Если сделать жёсткий шаблон поперечного сечения призмы, положить его горизонтально и насыпать песком, то получится куча, естественные откосы которой и дадут представление о поверхности (14.191). Так как в уравнение (14.190) не входит степень кручения θ, то форма этой поверхности не зависит от угла кручения. Эта интерпретация дана А. Надаи.

В упругой области вместо уравнения (14.190) мы имеем уравнение Прандтля:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-2\mu\theta, \tag{14.192}$$

но *контурное условие* (14.189) остаётся. Уравнение (14.192) получается из тождественных соотношений Бельтрами, которые необходимо удовлетворить везде в области упругой деформации. Граница между упругой и пластической зонами деформации определяется тем, что по одну её сторону в области упругой деформации результирующее касательное напряжение

$$\tau=\sqrt{Y_z^2+X_z^2} \tag{14.193}$$

меньше постоянной величины τ_2, определяемой формулой (14.183), а по другую сторону в области пластической деформации оно постоянно и равно τ_2. *При переходе через эту границу оба компонента касательного напряжения меняются непрерывно и на границе*

$$X_z^{(e)}=X_z^{(p)}, \quad Y_z^{(e)}=Y_z^{(p)}, \tag{14.194}$$

где значок (e) обозначает зону упругой деформации, а значок (p) — зону пластической деформации. Соответственно $F^{(e)}$ и $F^{(p)}$ суть функции напряжения в упругой и пластической зонах. Из условия (14.194) следует, что производные обеих функций

$F^{(e)}$ и $F^{(p)}$ на границе обеих зон равны, а следовательно, обе эти функции вдоль границы обеих зон различаются на некоторую постоянную, т. е.

$$F^{(p)} = F^{(e)} + \text{const}. \tag{14.195}$$

Отсюда следует, что если в какой-либо точке границы между обеими зонами

$$F^{(p)} = F^{(e)},$$

то это имеет место и в остальных точках общей границы обеих зон.

На этих свойствах основан следующий опыт А. Надаи. На горизонтально лежащий кусок картона, имеющий форму поперечного сечения призмы, насыпают песок так, чтобы получилась куча песка с естественным углом откоса. Над тем же контуром строят жёсткую крышу с постоянным углом ската, равным этому естественному откосу. Если основание этой крыши затянуть мембраной и эту мембрану нагрузить равномерно распределённым давлением, то, когда давление достигнет известного предела, часть мембраны будет касаться крыши, поставленной над сечением. Свободные части мембраны и части мембраны, прилегающие к крыше, т. е. к поверхности естественного откоса, образуют вместе поверхность напряжений призмы с частичной пластической деформацией. Под частями мембраны, касающимися поверхности естественного откоса, происходит пластическая деформация, а под свободными — упругая деформация.

Крутящий момент M вычисляется по известной формуле:

$$M = \iint (xY_z - yX_z)\, dx\, dy.$$

Внося сюда (14.187), мы получим:

$$M = -\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y\right) dx\, dy = \\ = \oint F (lx + my)\, ds + 2 \iint F\, dx\, dy,$$

что вследствие контурного условия (14.189) даёт формулу Прандтля:

$$M = 2 \iint F\, dx\, dy.$$

§ 158. Пластическое кручение круглого цилиндра.

Обозначая через a радиус поперечного сечения цилиндра, примем F для пластической зоны в виде:

$$F^{(p)} = C(r - a), \tag{14.196}$$

где C есть произвольная постоянная, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от оси цилиндра. Условие (14.189) при этом удовлетворяется. Имеем:

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial x}=C\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial F^{(p)}}{\partial y}=C\frac{y}{r}.$$

Вносся эти значения в (14.190), получим:

$$C=-\tau_2. \tag{14.197}$$

Из (14.187), (14.196) и (14.197) имеем:

$$X_z^{(p)}=-\tau_2\frac{y}{r}, \quad Y_z^{(p)}=+\tau_2\frac{x}{r}. \tag{14.198}$$

В области упругой зоны мы удовлетворим уравнению (14.192), приняв:

$$F=C_1 r^2+C_2, \tag{14.199}$$

где

$$C_1=-\frac{1}{2}\mu\theta. \tag{14.200}$$

Из (14.199), (14.200) и (14.187) мы получаем:

$$X_z^{(e)}=-\mu\theta y, \quad Y_z^{(e)}=\mu\theta x. \tag{14.201}$$

Здесь границей между обеими зонами является, очевидно, окружность радиуса c. Поэтому условие (14.194) даёт:

$$\tau_2=+\mu\theta c, \tag{14.202}$$

откуда получим радиус границы между зонами:

$$c=\frac{\tau_2}{\mu\theta}. \tag{14.203}$$

Крутящий момент в пластической зоне будет равен:

$$M^{(p)}=\frac{2}{3}\pi\tau_2(a^3-c^3). \tag{14.204}$$

Крутящий момент в упругой зоне, очевидно, будет:

$$M^{(e)}=\frac{1}{2}\pi c^4\mu\theta. \tag{14.205}$$

Полный крутящий момент призмы будет:

$$M=M^{(p)}+M^{(e)}, \tag{14.206}$$

или, вследствие (14.204) и (14.205)

$$M=\frac{2}{3}\pi\tau_2 a^3-\frac{2\pi\tau_2 c^3}{3}+\frac{\pi\mu\theta c^4}{2}. \tag{14.207}$$

Исключая отсюда c при помощи (14.203), мы получим:

$$M=\frac{2\pi}{3}\tau_2 a^3\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_2}{\mu\theta a}\right)^3\right]. \tag{14.208}$$

Следует заметить, что вследствие (14.201) наибольшее касательное напряжение в упругой зоне во всей призме будет равно:

$$\tau_0=\mu\theta a. \tag{14.209}$$

Поэтому (14.208) примет вид:

$$M=\frac{2\pi}{3}\tau_2 a^3\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_2}{\tau_0}\right)^3\right]. \tag{14.210}$$

Если мы имеем трубу малой толщины δ, находящуюся в состоянии пластического кручения, то для $r=c$ имеем:

$$c=a-\delta. \tag{14.211}$$

Внося (14.210) в (14.204), получим приближённо:

$$M=2\pi a^2\delta\tau_2. \tag{14.212}$$

§ 159. Метод Мориса Леви для решения плоской задачи теории пластичности.

Будем пренебрегать в уравнениях (14.21) ускорениями и массовыми силами и воспользуемся определениями и соотношениями § 142. Напряжённое состояние определится тремя компонентами X_x, Y_y, X_y, а состояние пластической деформации — тремя компонентами

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{xy}.$$

Имеем два уравнения равновесия:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0, \tag{14.213}$$

к которым надо присоединить условие пластичности (14.43) в виде:

$$(X_x-Y_y)^2+4X_y^2=4k_1^2, \tag{14.214}$$

где

$$k_1=\frac{2k}{\sqrt{3}}=\frac{c_0}{\sqrt{3}}. \tag{14.215}$$

Уравнения (14.213) и условие (14.214) были даны Сен-Венаном в его знаменитом мемуаре 1870 г., в котором было положено основание теории пластичности. Сен-Венан заметил, что три уравнения (14.213) и (14.214) достаточны для определения

X_x, Y_y, X_y. Он предложил взять решение этих уравнений в виде:

$$X_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y},$$

ибо тогда оба уравнения (14.213) будут тождественно удовлетворены, а уравнение (14.214) даст уравнение для определения функции $F(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 4k_1^2.$$

Однако этот метод решения не получил дальнейшего развития.

Вскоре после работы Сен-Венана Морис Леви предложил другой метод решения уравнений (14.213) и (14.214), который лёг в основу всех дальнейших исследований.

Проведём через произвольную точку M тела элементарную площадку, нормаль к которой $M\nu$ образует угол α с осью Ox. Перпендикуляр Mt к нормали ориентируем относительно неё так же, как ось Oy ориентирована относительно Ox. Обозначим компоненты скорости деформации относительно осей (ν, t) через $s_{\nu\nu}$, s_{tt}, $s_{\nu t} = s$. Мы можем применить формулы преобразования (1.82), положив в них

$$e_{x'x'} = s_{\nu\nu}; \quad e_{y'y'} = s_{tt}; \quad e_{x'y'} = s_{\nu t} = s;$$
$$e_{xx} = s_{xx}; \quad e_{yy} = s_{yy}; \quad e_{xy} = s_{xy}.$$

Тогда получим:

$$s = (s_{yy} - s_{xx}) \sin 2\alpha + s_{xy} \cos 2\alpha.$$

Условие $\frac{ds}{d\alpha} = 0$ даёт:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{s_{yy} - s_{xx}}{s_{xy}}. \tag{14.216}$$

Внося значения $\sin 2\alpha'$ и $\cos 2\alpha'$, соответствующие (14.216), в выражение для s, мы получим:

$$s_{\max} = \sqrt{(s_{xx} - s_{yy})^2 + s_{xy}^2}.$$

Сравнивая с формулой (14.79), найдём:

$$h = s_{\max} = \sqrt{(s_{xx} - s_{yy})^2 + s_{xy}^2}, \tag{14.217}$$

следовательно, h есть *максимальная скорость скольжения.*

Применяя формулы преобразования (8.15), мы примем в них $\sigma' = X'_{x'}$, $\tau' = X'_{y'}$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= X_x \cos^2\alpha + Y_y \sin^2\alpha + X_y \sin 2\alpha, \\ \tau' &= \frac{1}{2}(Y_y - X_x) \sin 2\alpha + X_y \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{14.218}$$

Условие

$$\frac{d\tau}{d\alpha}=0$$

даёт:

$$\operatorname{tg} 2\alpha''=\frac{Y_y-X_x}{2X_y}. \tag{14.219}$$

Вычисляя отсюда значения $\sin 2\alpha''$ и $\cos 2\alpha''$ и внося их в выражение для τ', мы получим:

$$\tau'_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{(Y_y-X_x)^2+4X_y^2}. \tag{14.220}$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (14.76), мы видим, что

$$T=\tau'_{\max}.$$

Если в правую часть (14.219) внести значения компонентов напряжённого состояния по формулам, то получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha''=\frac{s_{yy}-s_{xx}}{s_{xy}}.$$

Сравнивая с (14.216), мы найдём, что $\alpha'=\alpha''$, а отсюда следует, что наибольшая скорость скольжения направлена по наибольшему касательному напряжению (гипотеза Сен-Венана).

Если σ_1 есть главное нормальное напряжение, действующее на главной площадке, нормаль к которой образует угол α с осью Ox, а σ_2 есть другое главное нормальное напряжение, то мы будем иметь по формулам (8.16):

$$X_x=P+\tau\cos 2\alpha, \quad Y_y=P-\tau\cos 2\alpha, \quad X_y=\tau\sin 2\alpha, \tag{14.221}$$

где

$$P=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2) \tag{14.222}$$

и есть среднее растягивающее напряжение, а

$$\tau=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2) \tag{14.223}$$

и есть наибольшее касательное напряжение, которое во всё время пластической деформации постоянно равно k_1 (согласно гипотезе Сен-Венана) и определяется по формуле (14.70). Площадки, на которых действуют главные касательные напряжения, делят пополам углы между площадками, на которых действуют главные нормальные напряжения (главные площадки), а следовательно, образуют с осью Ox углы

$$\beta_1=\alpha+45^\circ, \quad \beta_2=\alpha-45^\circ. \tag{14.224}$$

Это суть направления главных касательных напряжений. Если построить два семейства кривых, касательные к которым в каждой точке (x, y) совпадают с упомянутыми направлениями (14.224), то получим *ортогональную систему линий скольжения* плоской задачи. Внося первую из формул (14.224) в (14.221) и используя условие пластичности Сен-Венана и Мизеса

$$\tau = k_1, \tag{14.225}$$

мы получим формулы:

$$X_x = P + k_1 \sin 2\beta, \quad Y_y = P - k_1 \sin 2\beta, \quad X_y = -k_1 \cos 2\beta, \tag{14.226}$$

где P и β — величины переменные, меняющиеся от точки к точке, т. е. функции координат (x, y). Если внести в условие пластичности (14.214) выражения (14.226), то увидим, что оно удовлетворяется тождественно. Морис Леви поэтому предложил искать решение системы уравнений (14.213) и (14.214) в форме (14.226). Внося (14.226) в (14.213), мы получим систему двух уравнений с частными производными первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + 2k_1\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\cos 2\beta + \frac{\partial \beta}{\partial y}\sin 2\beta\right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} + 2k_1\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\sin 2\beta - \frac{\partial \beta}{\partial y}\cos 2\beta\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14.227}$$

принадлежащую Морису Леви и служащую для определения P и β. Если

$$y = f(x) \tag{14.228}$$

есть уравнение одной какой-либо линии скольжения, то дифференциальные уравнения обоих семейств линий скольжения будут:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta, \tag{14.229}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\beta + 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \beta. \tag{14.230}$$

Легко видеть, что уравнения (14.227) допускают интегралы

$$P = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}, \tag{14.231}$$

имеющие частое приложение.

§ 160. Пластическая масса, сжатая между двумя параллельными шероховатыми плоскостями.

Рассмотрим пластическую массу, сжатую между двумя параллельными шероховатыми плоскостями.

Если первое уравнение системы (14.213) продифференцировать по y, а второе по x и вычесть из первого, то получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(X_x - Y_y) = \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2}. \tag{14.232}$$

Из уравнения (14.214) имеем:

$$X_x - Y_y = \pm 2\sqrt{k_1^2 - X_y^2}. \tag{14.233}$$

Внося (14.233) в (14.232), мы получим дифференциальное уравнение:

$$\pm 2\frac{\partial^2 \sqrt{k_1^2 - X_y^2}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} \tag{14.234}$$

для одного неизвестного X_y.

Простое решение этого уравнения мы получим в том случае, когда X_y есть функция одного переменного, например,

$$X_y = X_y(y). \tag{14.235}$$

В этом случае имеем из (14.234) уравнение:

$$\frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} = 0,$$

интеграл которого есть

$$X_y = C_1 + C_2 y.$$

Если взять $C_1 = 0$, то имеем:

$$X_y = C_2 y. \tag{14.236}$$

Очевидно, что существуют две параллельные прямые

$$y = \pm a, \tag{14.237}$$

вдоль которых касательное напряжение X_y достигает наибольшего возможного абсолютного значения k_1. Если при $y = +a$ имеем условие

$$X_y = -k_1, \tag{14.238}$$

то из (14.236) имеем:

$$X_y = -k_1\frac{y}{a}. \tag{14.239}$$

Две прямые линии (14.237) образуют естественные границы пластической массы, и полученное решение имеет механический смысл только внутри полосы

$$-a \leqslant y \leqslant +a.$$

Для определения X_x и Y_y вносим (14.239) в уравнения (14.213), что даёт:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{k_1}{a}, \quad \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0.$$

Интегрируя, имеем:

$$X_x = \frac{k_1 x}{a} + f_1(y), \quad Y_y = f_2(x), \tag{14.240}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ суть произвольные функции. Для определения их внесём (14.239) и (14.240) в условие пластичности (14.233), что даёт:

$$\frac{k_1 x}{a} + f_1(y) - f_2(x) = \pm 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}.$$

Так как это равенство должно удовлетворяться тождественно, то получим:

$$f_1(y) = C \pm 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2},$$
$$f_2(x) = C + \frac{k_1 x}{a},$$

где C есть произвольная постоянная.

На основании этих формул мы получим следующие формулы для компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= C + \frac{k_1 x}{a} \pm 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}, \\ Y_y &= C + \frac{k_1 x}{a}, \\ X_y &= -\frac{k_1 y}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{14.241}$$

Мы имеем здесь два решения, одно соответствующее положительному знаку перед радикалом, а другое — отрицательному. На верхней границе полосы ($y = +a$) имеем:

$$X_x = Y_y = C + \frac{k_1 x}{a}, \quad X_y = -k_1,$$

а на нижней её границе ($y = -a$)

$$X_x = Y_y = C + \frac{k_1 x}{a}, \quad X_y = +k_1.$$

Из формул (14.241) получаем:

$$X_y = -\frac{k_1 y}{a}, \tag{14.242}$$

$$X_x - Y_y = \pm 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}. \tag{14.243}$$

Но из формул (14.226) мы имеем:

$$X_y = -k_1 \cos 2\beta, \tag{14.244}$$
$$X_x - Y_y = 2k_1 \sin 2\beta. \tag{14.245}$$

Сравнивая (14.242) и (14.244), мы получаем:

$$\cos 2\beta = \frac{y}{a}. \tag{14.246}$$

Из формул (14.243) и (14.245) следует, что если угол β заключён в интервале

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \tag{14.247}$$

то перед радикалом нужно взять положительный знак; если же угол β заключён в интервале

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \tag{14.248}$$

то перед радикалом нужно взять отрицательный знак. Поэтому существуют две системы линий скольжения, каждая для своего решения. Из уравнения (14.246) имеем:

$$y = a\cos 2\beta, \tag{14.249}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -2a\sin 2\beta\,\frac{d\beta}{dx}.$$

Внося это значение в (14.229) и (14.230), мы получим дифференциальные уравнения обоих ортогональных семейств линий скольжения:

$$-2a\sin 2\beta\,\frac{d\beta}{dx} = \operatorname{tg}\beta,$$

$$-2a\sin 2\beta\,\frac{d\beta}{dx} = -\operatorname{ctg}\beta.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$x = -4a\int \cos^2\beta\,d\beta + \text{const.},$$

$$x = +4a\int \sin^2\beta\,d\beta + \text{const.}$$

Отсюда находим следующие уравнения линий скольжения первое семейство:

$$\left.\begin{aligned} x &= -a\,[2\beta + \sin 2\beta] + \text{const.},\\ y &= a\cos 2\beta; \end{aligned}\right\} \tag{14.250}$$

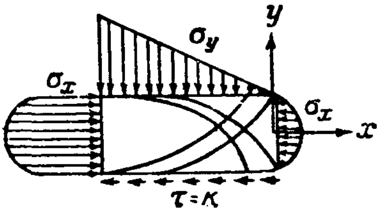
второе семейство:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,[2\beta - \sin 2\beta] + \text{const.},\\ y &= a\cos 2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{14.251}$$

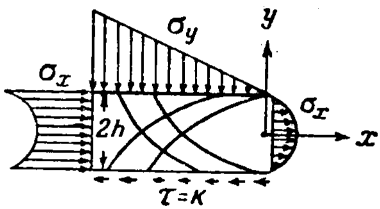
Это суть уравнения семейства циклоид.

Для случая, когда угол β заключён в интервале (14.247), расположение линий скольжения показано на фиг. 47. Чтобы создать соответствующее напряжённое состояние, надо сближать горизонтально плиты — это случай *пассивной* пластической деформации.

Для случая, когда угол β заключён в интервале (14.248), расположение линий скольжения показано на фиг. 48. Чтобы создать соответствующее напряжённое состояние, надо действовать горизонтальными сжимающими усилиями, и горизонтальные плиты расходятся, — это случай *активной* пластической деформации.



Фиг. 47.



Фиг. 48.

Активная и пассивная пластические деформации могут быть наглядно представлены при помощи соответствующих систем линий скольжения.

Мы можем представить себе первое напряжённое состояние [угол β заключён в интервале (14.247)] в виде своих линий скольжения в плоскости I, а второе напряжённое состояние [угол β заключён в интервале (14.248)] — в виде своих линий скольжения в плоскости II. Эти две ветви решения совпадают вдоль линии разветвления

$$y = \pm a.$$

Огибающими линий скольжения являются две линии разветвления решения, вдоль которых оба различных напряжённых состояния граничат друг с другом. Вышеизложенное решение принадлежит Л. Прандтлю.

§ 161. Теория пластичности Прандтля.

Знаменитый учёный Л. Прандтль предложил особую теорию пластичности, опирающуюся на метод Мора и в этом отношении стоящую особняком от вышеизложенных теорий.

Согласно методу Мора, напряжённое состояние в каком-либо сечении тела характеризуется так называемой *диаграммой Мора*, в которой по оси абсцисс откладывается нормальный компонент напряжения σ, а по оси ординат откладывается касательный компонент напряжения τ. Напряжённое состояние определяется построением трёх главных кругов Мора. Мор принимает, что на плоскостях скольжения касательное напряжение τ зависит от действующего здесь нормального напряжения σ:

$$\tau = \Phi(\sigma). \tag{14.252}$$

Построенная на диаграмме Мора кривая (14.252), называемая *предельной кривой*, выражает графически эту зависимость. Очевидно, что эта предельная кривая нигде не пересекается с главными кругами Мора, ибо если бы она пересекала самый большой главный круг напряжений, то существовало бы касательное напряжение, значение которого было бы больше его значения на предельной кривой. Следовательно, ***предельная кривая должна быть огибающей всех больших главных кругов Мора.*** Абсциссы и ординаты точек этой кривой дают значения нормального и касательного напряжений на плоскостях скольжения, вдоль которых материал будет течь. С целью упрощения Прандтль предложил принять предельную кривую за прямую линию. В этом случае уравнение (14.252) заменяется уравнением прямой:

$$\tau = A - B\sigma, \tag{14.253}$$

где A и B суть постоянные. В случае плоской задачи ($\sigma_1 > \sigma_2$) из условия касания круга Мора (с радиусом R и центром, лежащим на расстоянии P от начала на оси абсцисс) с прямой (14.253) получается соотношение:

$$R = C_1 - C_2 P, \tag{14.254}$$

где

$$C_1 = \frac{A}{\sqrt{1+B^2}}, \quad C_2 = \frac{B}{\sqrt{1+B^2}}. \tag{14.255}$$

Внося в (14.254) для круга Мора

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \tag{14.256}$$

мы получим *условие пластичности Прандтля*:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = C_1 - C_2 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \tag{14.257}$$

$$\tau = C_1 - C_2 P, \tag{14.258}$$

которое при $C_2 = 0$ переходит в *условие пластичности Сен-Венана*. Случай $C_1 = 0$ соответствует условиям грунтов.

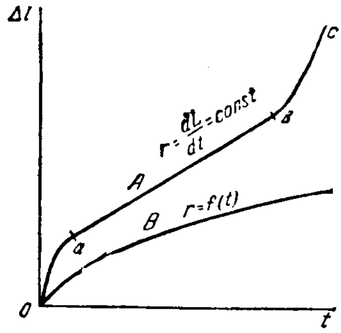
§ 162. О крипе.

Термином *крип* (*creep*) называют течение металла под действием напряжения. Явление это представляет значительный интерес с практической точки зрения.

На фиг. 49 графически представлена зависимость скорости крипа от времени. По оси абсцисс отложено время t, а по оси ординат — удлинение

$$\Delta l = l - l_0,$$

где l_0 есть первоначальная длина образца, а l — длина в момент времени t. Абсолютная температура T и полное напряжение S во всё время опыта постоянны.



Фиг. 49.

В начальном участке Oa скорость крипа быстро возрастает и постепенно достигает постоянной величины, которая имеет место в течение некоторого периода (участок ab), после чего скорость крипа быстро растёт (участок bc) и происходит разрушение испытуемого образца.

В некоторых случаях течение крипа характеризуется кривою B. Здесь нет области постоянной скорости крипа и она непрерывно убывает.

Вопросу о крипе посвящено большое число экспериментальных работ. Имеются также теоретические исследования. Весьма простое соотношение получено американскими учёными Эрингом (*Eyring*) и Кауцманом (Kauzmann)

$$\ln\left(\frac{v}{T}\right) = \ln\left(\frac{k}{h}\right) - \frac{\Delta F}{RT} + \ln(2\operatorname{sh} x), \tag{14.259}$$

где v есть скорость деформации удлинения, равная

$$v = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}, \tag{14.260}$$

k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, ΔF — изменение свободной энергии,

$$x = \frac{\beta_0 S}{T}, \tag{14.261}$$

$$\beta_0 = \frac{af}{2RT}, \tag{14.262}$$

j — величина, обратная механическому эквиваленту тепла, a — величина, пропорциональная обратному объёму для материала образца, S — полное растягивающее напряжение.

Если $x > 1{,}6$, то приближённо имеем:

$$\ln(2\,\mathrm{sh}\,x) = x. \tag{14.263}$$

Поэтому, вводя обыкновенные логарифмы, получим вместо (14.259) приближённое соотношение:

$$\lg\left(\frac{v}{T}\right) = 10{,}319 - \frac{\Delta F}{4{,}577\,T} + \frac{\beta_0 S}{T}. \tag{14.264}$$

При постоянной температуре имеем (14.264)

$$\lg\frac{v}{T} = \lg\frac{v_1}{T} + \frac{\beta S}{T}, \tag{14.265}$$

где введена постоянная величина

$$\lg\frac{v_1}{T} = 10{,}319 - \frac{\Delta F}{4.577\,T}. \tag{14.266}$$

Формула (14.266) представляет известный закон Людвига (*Ludwig*):

$$\lg\frac{v}{v_1} = \frac{\beta_0 S}{T}, \tag{14.267}$$

который можно представить в форме

$$\frac{v}{v_1} = e^{\frac{\beta S}{T}}, \tag{14.268}$$

где

$$\beta = 2{,}303\,\beta_0. \tag{14.269}$$

Теоретическая формула (14.264) хорошо подтверждается опытами [1]). Вообще можно принять, что при одноразмерном крипе существует характеристическое соотношение

$$\Phi(v, T, S) = 0, \tag{14.270}$$

которое можно назвать *законом Людвига.*

---

[1]) Journal of applied Physics, 1944, т. XV, стр. 108, S. Dushman etc.

ГЛАВА XV.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ.

§ 163. Два типа волн.

Уравнения упругих движений в отсутствии массовых сил возьмём в форме Ламе:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}\right\}\tag{15.1}$$

где

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.\tag{15.2}$$

Выражения для компонентов вращения элемента имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}2\omega_x&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\\2\omega_y&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\\2\omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{15.3}$$

Выражения компонентов деформации сдвига имеют вид

$$\left.\begin{aligned}e_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\\e_{zx}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\\e_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{15.4}$$

Первое из уравнений (15.1) продифференцируем по x, второе — по y, третье — по z, затем сложим результаты дифференцирования:

$$(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right]+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 w\right]=$$
$$=\rho\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]. \quad (15.5)$$

Так как x, y, z, t суть независимые переменные, и порядок частного дифференцирования можно изменять, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u=\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ и т. д.,}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

Вследствие этого уравнение (15.5) примет вид:

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right)+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=$$
$$=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Вводя обычное обозначение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad)=\nabla^2(\quad)$$

и применяя формулу (15.2), мы получим волновое уравнение:

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2(\Delta)=\rho\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}. \quad (15.6)$$

Если третье уравнение системы (15.1) продифференцировать по y, а второе — по z и вычесть затем из предыдущего, то исключится кубическое расширение Δ, и мы получим:

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w-\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 v\right]=\rho\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\right],$$

или

$$\mu\nabla^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

и вследствие (15.3) мы получим отсюда:

$$\left.\begin{aligned}\mu\nabla^2(\omega_x)&=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_x),\\ \mu\nabla^2(\omega_y)&=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_y),\\ \mu\nabla^2(\omega_z)&=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_z);\end{aligned}\right\} \quad (15.7)$$

второе и третье уравнения получаются аналогичным приёмом.

Если существует потенциал для упругих перемещений, то

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (15.8)$$

Отсюда, согласно (15.3), имеем:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \tag{15.9}$$

Такое движение называется *безвихревым*.

Здесь имеем, согласно (15.8):

$$\Delta = \nabla^2 \varphi \tag{15.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u &= \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \varphi), \\ \nabla^2 v &= \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \varphi), \\ \nabla^2 w &= \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{15.11}$$

Очевидно, что при этом вследствие (15.10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 u, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 v, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 w. \end{aligned}\right\} \tag{15.12}$$

Внося (15.12) в (15.1), получим следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

Мы видим, что все три компонента упругого смещения удовлетворяют тому же волновому уравнению (15.6), которому удовлетворяет кубическое расширение Δ. Поэтому говорят, что здесь имеет место безвихревая волна расширения, скорость распространения которой есть

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{15.14}$$

Если же кубическое расширение материала Δ равно нулю, то уравнения (15.1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \mu \nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \mu \nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15.15}$$

В этом случае компоненты элементарного вращения ω_x, ω_y, ω_z не равны нулю и удовлетворяют уравнениям (15.7).

Уравнения (15.7) и (15.5) представляют волновое уравнение одного и того же типа. Так как здесь $\Delta=0$ и, следовательно, объём элемента не меняется, то говорят, что здесь имеет место сопровождаемая вращением частиц *эквиволюминальная волна*, скорость распространения которой есть

$$c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{15.16}$$

Существование двух типов волн в упругой среде впервые доказано Пуассоном.

§ 164. Плоские волны.

Если компоненты упругого смещения u, v, w суть три различные функции

$$\left.\begin{aligned} u&=f_1(\omega),\\ v&=f_2(\omega),\\ w&=f_3(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{15.17}$$

от одного и того же аргумента

$$\omega=lx+my+nz-ct, \tag{15.18}$$

где l, m, n — косинусы углов нормали к плоскости

$$\omega=\text{const.}, \tag{15.19}$$

то говорят, что в упругой среде распространяются плоские волны со скоростью c. Очевидно, что l, m, n связаны известным соотношением

$$l^2+m^2+n^2=1. \tag{15.20}$$

Из (15.17) имеем:

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=f_1'l+f_2'm+f_3'n,$$

где $f_1'=\frac{df_1}{d\omega}$, $f_1''=\frac{d^2f_1}{d\omega^2}$ и т. д.

Поэтому, внося (15.17) в (15.1), мы получим:

$$(\lambda+\mu)(f_1''l^2+f_2''ml+f_3''nl)+\mu f_1''(l^2+m^2+n^2)=\rho c^2 f_1'',$$

и два аналогичных равенства.

На основании (15.20) получим отсюда:

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)(l^2f_1''+mlf_2''+nlf_3'')&=(\rho c^2-\mu)f_1'',\\ (\lambda+\mu)(lmf_1''+m^2f_2''+mnf_3'')&=(\rho c^2-\mu)f_2'',\\ (\lambda+\mu)(lnf_1''+mnf_2''+n^2f_3'')&=(\rho c^2-\mu)f_3''. \end{aligned}$$

Исключая отсюда f_1'', f_2'', f_3'', мы получим:

$$\begin{vmatrix} l^2-\vartheta & ml & nl \\ lm & m^2-\vartheta & nm \\ ln & mn & n^2-\vartheta \end{vmatrix} = 0, \qquad (15.21)$$

где обозначено:

$$\vartheta = \frac{\rho c^2 - \mu}{\lambda+\mu}. \qquad (15.22)$$

Развёртывая детерминантное уравнение (15.21), мы получим:

$$\vartheta^2 - \vartheta^3 = 0,$$

что приводится вследствие (15.22) к виду:

$$(\rho c^2 - \mu)^2 [\rho c^2 - (\lambda + 2\mu)] = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\rho c^2 - \mu = 0,$$
$$\rho c^2 - (\lambda + 2\mu) = 0.$$

Следовательно, возможны две скорости распространения плоской волны

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

найденные в § 163 [см. (15.14) и (15.16)].

§ 165. Сферические волны.

Волновые уравнения (15.6) и (15.7) имеют один и тот же вид

$$c^2\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (15.23)$$

где c есть скорость волны, данная формулами (15.14) и (15.16). Если волновое движение происходит в одном измерении, например по оси x, то уравнение (15.23) примет вид:

$$c^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (15.24)$$

Решение этого уравнения в форме Даламбера имеет известный вид:

$$\varphi = f(x - ct) + F(x + ct), \qquad (15.25)$$

где f и F — две произвольные функции. Это решение представляет плоские волны, распространяющиеся со скоростью c.

Если движение симметрично относительно данной точки, которую выберем за начало координат, то, полагая

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (15.26)$$

мы можем считать

$$\varphi = f(r, t). \tag{15.27}$$

В этом случае уравнение (15.23) примет вид:

$$c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{15.28}$$

что можно представить в форме:

$$\frac{c^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

или

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi). \tag{15.29}$$

Сравнивая (15.29) и (15.24), видим, что для $(r\varphi)$ мы можем применить интеграл Даламбера:

$$r\varphi = f(r - ct) + F(r + ct). \tag{15.30}$$

Это решение представляет сферические волны, скорость распространения которых есть c. Функция

$$\frac{1}{r}f(r - ct)$$

представляет сферическую волну, имеющую источником ту неподвижную точку, из которой проводится радиус-вектор r.

§ 166. Распространение волн в двух измерениях.

Пусть упругое тело ограничено плоскостью Oxz и находится в области положительных значений y. Предполагая движение в двух измерениях, примем

$$w = 0;$$

тогда уравнения (15.1) примут вид:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ (\lambda + \mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\end{aligned}\right\} \tag{15.31}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

По методу Ламба положим:

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y},\\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{15.32}$$

что даёт:

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\nabla^2\varphi,\\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\nabla^2\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(15.33)$$

Внося (15.32) в (15.31), мы получим:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi=\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right),$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi-\mu\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi=\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right),$$

что приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\nabla^2\psi-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]=0,\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\nabla^2\psi-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(15.34)$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если положить

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi=\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\qquad(15.35)$$

$$\mu\nabla^2\psi=\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.\qquad(15.36)$$

Из уравнения (15.35) следует, что функция φ соответствует безвихревой волне расширения, передающейся со скоростью c_1, определяемой по формуле (15.14). Из уравнения (15.36) следует, что функция ψ соответствует эквиволюминальной волне вращения, передающейся со скоростью c_2, определяемой по формуле (15.16). Можно рассмотреть систему (15.34) с более общей точки зрения.

Обозначив

$$\left.\begin{aligned}P &= (\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\\ -Q &= \mu\nabla^2\psi-\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\end{aligned}\right\}\qquad(15.37)$$

уравнения (15.34) можно представить в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.\qquad(15.38)$$

Из этих уравнений следует, что выражение

$$\Omega=P+iQ\qquad(15.39)$$

есть функция комплексного переменного

$$z=x+iy,\qquad(15.40)$$

т. е.

$$\Omega = f(x+iy). \tag{15.41}$$

Отсюда следует, что P и Q удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 P = 0, \tag{15.42}$$

$$\nabla^2 Q = 0. \tag{15.43}$$

Подставляя первое уравнение (15.37) в (15.42), имеем:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2(\nabla^2\varphi) = \rho\frac{\partial^2\nabla^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{15.44}$$

что вследствие (15.33) приводится к уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2(\Delta) = \rho\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2},$$

совпадающему с (15.6).

Внося второе уравнение (15.37) в (15.43), получаем:

$$\mu\nabla^2(\nabla^2\psi) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\psi, \tag{15.45}$$

что вследствие (15.33) приводится к уравнению

$$\mu\nabla^2(\omega_z) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_z),$$

совпадающему с (15.7). В случае отсутствия движения имеем:

$$P = (\lambda + 2\mu)\Delta, \quad Q = 2\omega_z\mu, \tag{15.46}$$

так что уравнение (15.39) примет вид:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + 2i\mu\omega_z = f(x+iy), \tag{15.47}$$

что было впервые указано Лявом в его курсе теории упругости.

Из (15.37) следует, что φ и ψ удовлетворяют двум уравнениям:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + P, \tag{15.48}$$

$$\mu\nabla^2\psi = \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - Q, \tag{15.49}$$

где P и Q — действительная и мнимая части функции комплексного переменного $z = x + iy$.

Для поставленной нами волновой проблемы достаточно рассмотреть случай, когда

$$P = Q = 0. \tag{15.50}$$

В этом случае уравнения (15.48) и (15.49) приводятся к виду (15.35) и (15.36).

§ 167. Поверхностные волны Рэлея.

Вдали от источника возмущения можно рассматривать деформацию, приносимую волнами, как плоскую, и ограничиться рассмотрением движения в двух измерениях. Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Английский физик Рэлей указал, что могут существовать особые волны, называемые поверхностными, в которых движение быстро угасает по мере удаления от свободной поверхности тела. Поэтому будем искать решения уравнений (15.35) и (15.36) в виде:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= Ae^{-\alpha y+i(\xi x-pt)},\\ \psi &= Be^{-\beta y+i(\xi x-pt)},\end{aligned}\right\} \tag{15.51}$$

где α, β, ξ, p, A, B — постоянные, и

$$\alpha>0, \qquad \beta>0. \tag{15.52}$$

Внося (15.51) в (15.35) и (15.36), мы получим:

$$\alpha^2-\xi^2+h^2=0; \quad \beta^2-\xi^2+k^2=0, \tag{15.53}$$

причём обозначено:

$$h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}, \quad k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}. \tag{15.54}$$

Составим теперь граничные условия на свободной поверхности упругого полутела, на которой отсутствуют поверхностные силы.

Для элементарной площадки, перпендикулярной к оси y, имеем:

$$Y_y=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=0; \qquad X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0, \tag{15.55}$$

для $y=0$. Внося (15.51) в (15.55), мы получим:

$$\left.\begin{aligned}[\lambda(\alpha^2-\xi^2)+2\mu\alpha^2]A+2\mu\beta i\xi B&=0,\\ -2A\alpha i\xi+B(\beta^2+\xi^2)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{15.56}$$

Исключая A и B, получим уравнение:

$$[\lambda(\alpha^2-\xi^2)+2\mu\alpha^2](\beta^2+\xi^2)-4\mu\alpha\beta\xi^2=0. \tag{15.57}$$

Согласно (15.53) имеем:

$$\beta^2+\xi^2=\xi^2-k^2+\xi^2=2\xi^2-k^2. \tag{15.58}$$

Из (15.54) найдём $\lambda+2\mu=\frac{\rho p^2}{h^2}$, $\rho p^2=k^2\mu$, откуда следует

$$\lambda+2\mu=\frac{k^2}{h^2}\mu, \quad \lambda=\left(\frac{k^2}{h^2}-2\right)\mu.$$

Следовательно, имеем:

$$\lambda(\alpha^2-\xi^2)+2\mu\alpha^2=\mu\left[\left(\frac{k^2}{h^2}-2\right)(\alpha^2-\xi^2)+2\alpha^2\right]=$$
$$=\mu\left[\frac{k^2}{h^2}(\alpha^2-\xi^2)-2\alpha^2+2\xi^2+2\alpha^2\right].$$

Учитывая соотношение $\alpha^2-\xi^2=-h^2$, получаемое из (15.53), и делая приведение, получим:

$$\lambda(\alpha^2-\xi^2)+2\mu\alpha^2=\mu(2\xi^2-k^2). \tag{15.59}$$

Внося (15.58) и (15.59) в (15.57), получим:

$$(2\xi^2-k^2)^2-4\alpha\beta\xi^2=0. \tag{15.60}$$

Разделим обе части уравнения на ξ^4, что даёт:

$$\left(2-\frac{k^2}{\xi^2}\right)^2=4\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)\left(\frac{\beta}{\xi}\right).$$

Возведём обе части в квадрат, имея в виду соотношение (15.53) $\alpha^2=\xi^2-h^2$, $\beta^2=\xi^2-k^2$, что даёт:

$$\left(2-\frac{k^2}{\xi^2}\right)^4=16\left(1-\frac{h^2}{\xi^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{\xi^2}\right). \tag{15.61}$$

Но согласно (15.54), имеем: $\frac{h^2}{k^2}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$. Поэтому, обозначив

$$\vartheta=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \tag{15.62}$$

получим:

$$h^2=\vartheta k^2. \tag{15.63}$$

Внесём (15.63) в (15.61) и обозначим

$$\left(\frac{k}{\xi}\right)^2=\omega. \tag{15.64}$$

Тогда уравнение (15.61) примет вид:

$$(2-\omega)^4=16(1-\omega)(1-\vartheta\omega).$$

Упрощая это уравнение, получим:

$$\omega^3-8\omega^2+(24-16\vartheta)\omega-16(1-\vartheta)=0. \tag{15.65}$$

Это уравнение имеет один пригодный корень. Для случая $\lambda=\mu$ получим из (15.62)

$$\vartheta=\frac{1}{3}, \tag{15.66}$$

и уравнение (15.65) примет вид:

$$\omega^3-8\omega^2+\frac{56}{3}\omega-\frac{32}{3}=0,$$

что можно представить в виде:

$$(\omega-4)(3\omega^2-12\omega+8)=0.$$

Корни этого уравнения суть

$$\omega_1=4, \quad \omega_2=2+\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \omega_3=2-\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{15.67}$$

Из (15.53) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \beta^2&=\xi^2-k^2=\xi^2\left(1-\frac{k^2}{\xi^2}\right)=\xi^2(1-\omega),\\ \alpha^2&=\xi^2-h^2=\xi^2\left(1-\frac{h^2}{\xi^2}\right)=\xi^2(1-\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{15.68}$$

Так как по условию задачи $\alpha>0$, $\beta>0$, то из (15.68) следует, что

$$\omega<1<\frac{1}{\vartheta}=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}=2+\frac{\lambda}{\mu}.$$

Поэтому только один корень

$$\omega=2-\frac{2}{\sqrt{3}}=0,8453 \tag{15.69}$$

удовлетворяет условиям задачи.

Скорость поверхностной волны, очевидно, будет:

$$c=\frac{p}{\xi}. \tag{15.70}$$

Из (15.54) и (15.16) имеем: $k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}=\frac{p^2}{c_2^2}$. Отсюда имеем:

$$k=\frac{p}{c_2}. \tag{15.71}$$

Следовательно, получим из (15.70):

$$c=\frac{p}{k}\cdot\frac{k}{\xi}=c_2\left(\frac{k}{\xi}\right).$$

Вследствие (15.64) получим отсюда:

$$c=c_2\sqrt{\omega}. \tag{15.72}$$

Внося сюда значение ω, получим:

$$c=0,9194\,c_2=0,9194\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{15.73}$$

Внося ω в (15.68), мы получим:

$$\alpha=0,8475\xi, \quad \beta=0,3933\xi. \tag{15.74}$$

И тогда легко найдём, взяв действительную часть:

$$\left.\begin{aligned} u&=C\left(-e^{-\alpha y}-0,5753e^{-\beta y}\right)\sin(\xi x-pt),\\ v&=0,8475C\left(e^{-\alpha y}-1,7320e^{-\beta y}\right)\cos(\xi x-pt), \end{aligned}\right\} \tag{15.75}$$

где C — произвольная постоянная.

На поверхности упругого полупространства для $y=0$ получим:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -0{,}4247C\sin(\xi x - pt), \\ v_0 &= -0{,}7320\cdot 0{,}8475C\cos(\xi x - pt). \end{aligned}\right\} \tag{15.76}$$

Отношение амплитуд горизонтального и вертикального движения равно 0,681.

Другой интересный случай будет, когда материал несжимаемый. В этом случае $\frac{\lambda}{\mu}=\infty$ и, следовательно, $\vartheta=0$. Уравнение (15.65) принимает вид:

$$\omega^3 - 8\omega^2 + 24\omega - 16 = 0.$$

Легко вычислить, что скорость поверхностной волны дана формулой:

$$c = 0{,}9553\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{15.77}$$

§ 168. Волны Лява.

Предположим, что беспредельный пласт постоянной толщины H и плотности ρ_1 с коэффициентами Ламе λ_1, μ_1 лежит на упругом полупространстве плотности ρ_2 с коэффициентами Ламе λ_2, μ_2. Примем плоскость раздела за плоскость Ozx и направим положительную ось y внутрь полупространства. Рассмотрим специальный случай упругих волн, для которых:

1) внутри пласта $(0 \geqslant y \geqslant -H)$

$$u_1 = v_1 = 0, \quad w_1 = f(y)\,e^{i(\xi x - pt)}; \tag{15.78}$$

2) внутри полупространства $(y \geqslant 0)$

$$u_2 = v_2 = 0, \quad w_2 = Ce^{-\beta y + i(\xi x - pt)}. \tag{15.79}$$

Внося (15.78) в уравнения упругости Ламе, имеем:

$$\mu_1\left(\frac{d^2f}{dy^2} - \xi^2 f\right) + \rho_1 p^2 f = 0.$$

Вводя обозначения

$$b_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}, \tag{15.80}$$

$$k_1 = \frac{p}{b_1}, \tag{15.81}$$

мы получим:

$$\frac{d^2f}{dy^2} + (k_1^2 - \xi^2)f = 0. \tag{15.82}$$

Интеграл этого уравнения берём в форме:

$$f(y) = A\sin(\alpha y) + B\cos(\alpha y). \tag{15.83}$$

Подставляя (15.83) и (15.82), мы получим:

$$\alpha^2 = k_1^2 - \xi^2. \tag{15.84}$$

Внося (15.79) в уравнения Ламе, найдём:

$$\beta^2 = \xi^2 - k_2^2, \tag{15.85}$$

где обозначено:

$$k_2 = \frac{p}{b_2}, \tag{15.86}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}}. \tag{15.87}$$

Из формул (15.78) имеем:

1) внутри пласта

$$X'_y = \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = 0, \tag{15.88}$$

$$Z'_y = \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}, \tag{15.89}$$

$$Y'_y = \lambda_1 \Delta_1 + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0; \tag{15.90}$$

2) внутри полупространства

$$X''_y = \mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = 0, \tag{15.91}$$

$$Z''_y = \mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial y}, \tag{15.92}$$

$$Y''_y = \lambda_2 \Delta_2 + 2\mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \tag{15.93}$$

На внешней поверхности пласта $y = -H$ не приложено внешних сил, а следовательно, имеем: $Z'_y = 0$ для $y = -H$, что на основании (15.89) даёт $\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0$ для $y = -H$. Внося сюда (15.78), мы получим:

$$\frac{df}{dy} = 0 \text{ для } y = -H. \tag{15.94}$$

Подставляя $f(y)$ из (15.83) в (15.94), получим:

$$A \cos \alpha H + B \sin \alpha H = 0. \tag{15.95}$$

На общей границе $y = 0$ мы должны иметь равенство упругих перемещений и напряжений. Поэтому имеем:

$$w_1 = w_2 \quad \text{для} \quad y = 0; \quad \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial y} \quad \text{для} \quad y = 0.$$

Согласно (15.78) и (15.79), мы получим отсюда:

$$B = C; \quad \mu_1 \alpha A = -\mu_2 \beta C. \tag{15.96}$$

Исключая A, B и C из уравнений (15.95) и (15.96), мы получим уравнение

$$\operatorname{tg}(\alpha H)=\frac{\mu_2\beta}{\mu_1\alpha}, \tag{15.97}$$

но действительная часть β должна быть положительной. Согласно (15.85), для этого должно иметь:

$$\xi>k_2. \tag{15.98}$$

Скорость волнообразного движения, данного уравнениями (15.78) и (15.79), очевидно, есть

$$c=\frac{p}{\xi}. \tag{15.99}$$

Из (15.84) и (15.98) мы имеем:

$$\xi>\frac{p}{b_2}. \tag{15.100}$$

Внося (15.100) в (15.99), мы получим:

$$c<b_2. \tag{15.101}$$

Если бы мы имели $c<b_1$, то, согласно (15.99), мы получили бы

$$\frac{p}{\xi}<b_1. \tag{15.102}$$

Сравнивая (15.81) и (15.102), мы получим:

$$k_1<\xi. \tag{15.103}$$

Но из (15.103) и (15.84) следует, что $\alpha^2<0$, т. е. α есть чисто мнимая величина.

Примем: $\alpha=\gamma i$. Внося это в (15.97), мы получим:

$$\gamma i \operatorname{tg}(i\gamma H)=\frac{\mu_2\beta}{\mu_1}, \tag{15.104}$$

и так как $\operatorname{tg}(i\gamma H)=i\operatorname{th}(\gamma H)$, то мы имеем:

$$\gamma\operatorname{th}(\gamma H)=-\frac{\mu_2\beta}{\mu_1}<0.$$

Но это, очевидно, невозможно, и мы заключаем отсюда, что

$$c>b_1. \tag{15.105}$$

Итак, волны рассматриваемого вида могут распространяться, как это следует из (15.101) и (15.105), только тогда, когда

$$b_1<b_2. \tag{15.106}$$

Согласно (15.80) и (15.87) для этого необходимо, чтобы было

$$\mu_1<\mu_2. \tag{15.107}$$

Для возможности существования волн Лява верхний пласт должен лежать на более жёстком основании. Волны Лява суть поперечные эквиволюминальные волны, скорость распространения которых всегда заключена между скоростями поперечных волн в верхней и нижней среде.

§ 169. Радиальные колебания шара.

Как простейший пример колебаний упругого тела конечных размеров мы рассмотрим собственные радиальные колебания упругого шара. В этом случае каждая частица совершает радиальные перемещения. Поэтому мы можем принять следующие выражения для компонентов упругого перемещения:

$$\left.\begin{aligned} u&=xf(r)\cos pt,\\ v&=yf(r)\cos pt,\\ w&=zf(r)\cos pt,\end{aligned}\right\} \tag{15.108}$$

где r есть расстояние от центра шара, в котором помещено начало прямоугольных осей x, y, z. Если T есть период собственного колебания шара, то, как известно,

$$p=\frac{2\pi}{T}. \tag{15.109}$$

Из уравнений (15.108) мы получим, опуская временно фактор $\cos pt$:

$$\Delta=3f+r\frac{df}{dr},$$

$$\nabla^2[xf(r)]=x\nabla^2 f(r)+2\frac{\partial f}{\partial x}=x\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right)+\frac{2x}{r}\frac{df}{dr}=$$

$$=x\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right),$$

$$\nabla^2[yf(r)]=y\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right);$$

$$\nabla^2[zf(r)]=z\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right);$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x}=x\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right);$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y}=y\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right);$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial z}=z\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right).$$

Внося это в уравнения упругости Ламе, имеем:

$$x\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right)\right]\cos pt+\rho p^2 x f(r)\cos pt=0,$$
$$y\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right)\right]\cos pt+\rho p^2 y f(r)\cos pt=0,$$
$$z\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right)\right]\cos pt+\rho p^2 z f(r)\cos pt=0.$$

Эти уравнения будут удовлетворены, если

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}\right)+\rho p^2 f=0. \tag{15.110}$$

Вводя прежнее обозначение

$$h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}, \tag{15.111}$$

мы приведём уравнение (15.110) к виду:

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df}{dr}+h^2 f=0. \tag{15.112}$$

Интеграл этого уравнения, конечный в начале координат (т. е. для $r=0$), имеет вид:

$$f=C\frac{hr\cos hr-\sin hr}{r^3}, \tag{15.113}$$

где C — произвольная постоянная.

Обозначая через $\mathfrak{Z}$ величину радиального упругого перемещения, мы имеем:

$$\mathfrak{Z}=\frac{ux+vy+wz}{r}. \tag{15.114}$$

Внося сюда (15.108), мы получим:

$$\mathfrak{Z}=rf(r)\cos pt. \tag{15.115}$$

Величина нормального напряжения на элементарной площадке, нормальной к радиусу-вектору r, очевидно, будет дана формулой

$$\sigma_r=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial r}. \tag{15.116}$$

Внося сюда значение Δ и $\mathfrak{Z}$, мы получим:

$$\sigma_r=\left[(3\lambda+2\mu)f(r)+(\lambda+2\mu)r\frac{df}{dr}\right]\cos pt. \tag{15.117}$$

На свободной поверхности шара

$$r=a$$

(если a — радиус шара) отсутствуют внешние поверхностные силы. Поэтому мы имеем граничное условие:

$$\sigma_r = 0 \text{ для } r = a. \tag{15.118}$$

Внося сюда (15.113) и (15.117), мы получим:

$$(\lambda + 2\mu)\{(2 - \lambda^2 a^2)\sin ha - 2\,ha\cos ha\} + \\ + 2\lambda(ha\cos ha - \sin ha) = 0. \tag{15.119}$$

Если $\lambda = \mu$, то корни этого уравнения будут:

$$\frac{ha}{\pi} = 0{,}8160;\ 1{,}9285;\ 2{,}9359;\ 3{,}9658;\ 4{,}9728;\ 5{,}9774.$$

Обозначим через T_1 время пробега волны расширения по длине диаметра земного шара, равного $2a$. Скорость волны расширения равна

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Из (15.111) мы получим:

$$h = \frac{p}{c_1}. \tag{15.120}$$

Поэтому имеем:

$$T_1 = \frac{2a}{c_1} = \frac{2ah}{p}, \tag{15.121}$$

также из (15.109) получим:

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\pi}{ah}. \tag{15.122}$$

§ 170. Динамическая проблема Ламба.

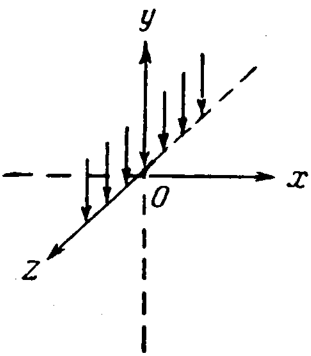
Вопрос о распространении в упругом полупространстве эффекта произвольного импульса, приложенного к свободной поверхности, был исследован знаменитым английским учёным Ламбом.

Мы рассмотрим простейший случай двухразмерной задачи, когда на свободной поверхности тела действует нормальная сила (фиг. 50). Сначала предположим, что эта сила периодическая, и закон действия её дан формулой:

$$F = Ne^{i(\xi x - pt)}, \tag{15.123}$$

а затем перейдём к более общему случаю.

Предположим, как в § 167, ось Ox направленной вдоль свободной поверхности, а ось Oy направленной внутрь упругого полупространства (фиг. 50). Так как на свободной поверхности отсутствуют касательные напряжения, но действует нормальная сила по закону (15.123), то мы имеем следующие граничные условия:



Фиг. 50.

$$Y_y = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = F = Ne^{i(\xi x - pt)}, \tag{15.124}$$

$$X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \tag{15.125}$$

для $y = 0$.

Уравнения движения имеют форму (15.31), и мы будем искать их решение в форме (15.32). Так как по мере удаления внутрь упругого полупространства u и v стремятся к нулю, мы будем искать решение уравнений (15.35) и (15.36) в форме (15.51). Внося (15.51) в граничные условия (15.124) и (15.125), мы получим два уравнения для определения A и B

$$\left.\begin{aligned} [\lambda(\alpha^2 - \xi^2) + 2\mu\beta\alpha^2]A + 2\mu\beta i\xi B &= N, \\ -2\alpha i\xi A + (\beta^2 + \xi^2)B &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{15.126}$$

где ξ — величина вещественная, а α и β положительны.

Решая уравнения (15.126), мы найдём:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2\xi^2 - k^2}{(2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta}\cdot\frac{N}{\mu}, \\ B &= \frac{2i\xi\alpha}{(2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta}\cdot\frac{N}{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{15.127}$$

Внося (15.51) в (15.32), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} u &= [Ai\xi e^{-\alpha y} - B\beta e^{-\beta y}]e^{i(\xi x - pt)}, \\ v &= -[A\alpha e^{-\alpha y} + Bi\xi e^{-\beta y}]e^{i(\xi x - pt)}. \end{aligned}\right\} \tag{15.128}$$

Для перемещения на свободной поверхности имеем, полагая в (15.128) $y = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= [Ai\xi - B\beta]e^{i(\xi x - pt)}, \\ v_0 &= -[A\alpha + Bi\xi]e^{i(\xi x - pt)}. \end{aligned}\right\} \tag{15.129}$$

Внося (15.127) в (15.129), получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{i\xi[(2\xi^2-k^2)-2\alpha\beta]N}{[(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta]\cdot\mu}\,e^{i(\xi x-pt)}, \\ v_0 &= \frac{k^2\alpha\cdot N}{[(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta]\cdot\mu}\,e^{i(\xi x-pt)}. \end{aligned}\right\} \tag{15.130}$$

Так как уравнения (15.31) линейные, то мы получим весьма общее решение путём наложения отдельных решений. Поэтому положим:

$$N=-Q\frac{d\xi}{2\pi} \tag{15.131}$$

и внесём (15.131) в (15.128), а затем возьмём сумму всех подобных решений, т. е. произведём интегрирование по ξ от $-\infty$ до $+\infty$ (см. § 91, главы VIII). Положив затем $y=0$, мы получим весьма общие выражения для компонентов упругого смещения на свободной поверхности в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_0 &= -\frac{iQ}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(2\xi^2-k^2-2\alpha\beta)\,e^{i(\xi x-pt)}d\xi}{(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta}, \\ \bar{v}_0 &= -\frac{iQ}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2\alpha\,e^{i(\xi x-pt)}\,d\xi}{(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{15.132}$$

Если мы знаменатель в наших подинтегральных выражениях приравняем нулю, то получим уравнение (15.60), которое соответствует поверхностным волнам Рэлея.

На основании теоремы Фурье, Ламб получает из (15.132) перемещения на свободной поверхности, соответствующие нормальной силе P, действующей на свободной поверхности:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_0 &= -\frac{iP}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi(2\xi^2-k^2-2\alpha\beta)e^{i\xi x}d\xi}{(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta}, \\ \bar{v}_0 &= -\frac{iP}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2\alpha\,e^{i\xi x}\,d\xi}{(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{15.133}$$

Эти замечательные формулы принадлежат Ламбу.

Главная трудность заключается в изучении полученных определённых интегралов; это изучение достигается при помощи комплексного интегрирования вдоль соответствующих путей и даёт интегралы, для которых могут быть даны асимптотические выражения.

Таким методом Ламб получил:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}_0 &= -\frac{P}{\mu}He^{i(pt-\sigma x)}+\frac{P}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{1-\frac{h^2}{k^2}}\frac{e^{i\left(pt-kx-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kx)^{\frac{3}{2}}}-\\
&\quad -\frac{P}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{h^3k^2\sqrt{k^2-h^2}}{(k^2-2h^2)^3}\cdot\frac{ie^{i\left(pt-hx-\frac{\pi}{4}\right)}}{(hx)^{\frac{3}{2}}}+\ldots,\\
\bar{v}_0 &= -\frac{iP}{\mu}ke^{i(pt-\sigma x)}+\frac{2P}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)\frac{ie^{i\left(pt-kx-\frac{\pi}{4}\right)}}{(kx)^{\frac{3}{2}}}+\\
&\quad +\frac{P}{2\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{h^2k^2}{(k^2-2h^2)^2}\cdot\frac{ie^{i\left(pt-hx-\frac{\pi}{4}\right)}}{(hx)^{\frac{3}{2}}}+\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (15.134)$$

где σ — корень знаменателя подинтегрального выражения, т. е. корень уравнения (15.60), и при $\lambda=\mu$ получим $H=0{,}1250$, $k=0{,}1835$.

Первый член (15.134) представляет свободные волны Рэлея. Отношение амплитуд горизонтального и вертикального движений равно

$$\frac{H}{k}=0{,}681, \quad (15.135)$$

а это и есть то, что мы имели в формуле (15.76).

Остальная часть возмущения, представленного формулами (15.134), состоит из двух частей. Для одной из этих частей волновая скорость есть скорость волны, не сопровождающейся изменением объёма; колебания на поверхности эллиптические, отношение вертикального диаметра траектории к горизонтальному равно 1,633. Другая часть имеет волновую скорость, равную скорости волн, не сопровождающихся вихрями; соответствующие поверхностные колебания прямолинейны, отношение вертикальной амплитуды к горизонтальной равно 0,3535. При возрастающем расстоянии амплитуда каждой части уменьшается как $x^{-\frac{3}{2}}$. В случае трёхразмерной задачи при наличии симметрии относительно оси Oz и силы, действующей в направлении оси Oz перпендикулярно к поверхности среды плоскости xy, аналогичные вычисления приводят к следующему результату: возмущение распространяется по поверхности в виде симметричной кольцеобразной волновой системы. Начальный характер этой волновой системы зависит от процесса возбуждения, но в конце концов устанавливается движение, которое характеризуется тремя волнами, распространяющимися одна со скоростью волны, не сопровождающейся вихрями, другая — со скоростью волны, не сопровождающейся изменением объёма, третья — со скоростью волн Рэлея.

Фиг. 51.

При прохождении системы волн через какую-либо точку горизонтальное перемещение q_0 (перпендикулярное к оси Oz) проявляется сперва — при прибытии волны, не сопровождающейся вращением, — в явственном отдельном колебании, за которым следует период сравнительного затишья. Затем следует второе колебание при прибытии волны, не сопровождающейся изменением объёма. Наконец, наступает главное колебание, соответствующее прибытию волны Рэлея (фиг. 51).

Амплитуда двух первых колебаний уменьшается всё больше и больше (не только абсолютно, но и в отношении к главному колебанию) в зависимости от удаления от источника возмущения. Подобного же рода соотношения имеют место и при вертикальном перемещении w_0 (параллельном оси Oz) (фиг. 52).

Фиг. 52.

При применении этой теории к телу с криволинейной свободной поверхностью (земля) надо обратить внимание на то, что обе первые волны распространяются внутри среды, тогда как волна Рэлея идёт вдоль поверхности, так что на большом удалении от центра возмущения она получает всё более и более важное значение. Бросающееся в глаза различие между фиг. 51, 52 и графиками землетрясений, где оба предварительных толчка и главный толчок состоят из большого числа идущих туда и назад колебаний, пытаются объяснить дисперсией волн (т. е. зависимостью скорости распространения от длины волны), вызванной недостаточной однородностью среды.

Рассмотренный здесь вопрос был исследован новым методом В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым, к работе которых мы и отсылаем.

ГЛАВА XVI.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ.

§ 171. Приложение вариационного уравнения Лагранжа.

На основании формулы (11.34) вариационное уравнение Лагранжа для случая упругого равновесия имеет вид:

$$\iiint(X\,\delta u+Y\,\delta v+Z\,\delta w)\,\rho\,dx\,dy\,dz+ \\ +\iint(\overline{X}_\nu\delta u+\overline{Y}_\nu\delta v+\overline{Z}_\nu\delta w)\,d\Sigma-\delta U=0. \quad (16.1)$$

Это уравнение даёт удобный метод для приближённого решения задачи об упругом равновесии. Пионером в этой области явился безвременно умерший геттингенский профессор Вальтер Ритц.

В случае заданных на поверхности тела так называемых поверхностных сил мы имеем статические граничные условия (11.43). Но нет надобности удовлетворять им заранее. В случае заданных на поверхности тела значений компонентов перемещений $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ мы имеем граничные условия:

$$u=\overline{u}(x, y, z),\quad v=\overline{v}(x, y, z),\quad w=\overline{w}(x, y, z). \quad (16.2)$$

Эти условия должны быть удовлетворены *заранее* надлежащим выбором $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. Точно так же надлежащим выбором u, v, w должны быть удовлетворены заранее условия относительно значений компонентов перемещения внутри тела. Поэтому выберем для компонентов упругого перемещения выражения:

$$\left.\begin{aligned} u&=u_0+\sum_m a_m f_m(x, y, z), \\ v&=v_0+\sum_m b_m\varphi_m(x, y, z), \\ w&=w_0+\sum_m c_m\psi_m(x, y, z), \end{aligned}\right\} \quad (16.3)$$

где величины

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, \\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots, \\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots, \end{array}\right\} \tag{16.4}$$

суть произвольные постоянные, а функции

$$\left.\begin{array}{l} f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots, \\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots, \\ \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{16.5}$$

суть известные функции координат x, y, z. Функции

$$u_0(x, y, z),\ v_0(x, y, z),\ w_0(x, y, z) \tag{16.6}$$

суть также известные функции координат, не содержащие произвольных постоянных.

Систему функций (16.5) и (16.6) мы выбираем так, чтобы были удовлетворены граничные условия (16.2) и вообще геометрические связи, наложенные на рассматриваемое упругое тело, как на его поверхности, так и внутри его. Например, если существуют только геометрические связи (16.2), то можно принять:

$$u_0=\bar{u},\ v_0=\bar{v},\ w_0=\bar{w}, \tag{16.7}$$

а функции (16.5) выбрать так, чтобы каждая из них уничтожалась на поверхности тела. На основании сказанного, мы имеем из (16.3) следующие выражения для возможных упругих перемещений:

$$\delta u=\sum_m f_m \delta a_m,\quad \delta v=\sum_m \varphi_m \delta b_m,\quad \delta w=\sum_m \psi_m \delta c_m, \tag{16.8}$$

причём вариации произвольных постоянных

$$\left.\begin{array}{l} \delta a_1,\ \delta a_2,\ \delta a_3,\ \ldots, \\ \delta b_1,\ \delta b_2,\ \delta b_3,\ \ldots, \\ \delta c_1,\ \delta c_2,\ \delta c_3,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{16.9}$$

совершенно произвольны и ничем между собой не связаны. С целью определения постоянных (16.4) вносим (16.3) в формулу (11.35) и получаем отсюда U как функцию второй степени относительно постоянных (16.4). Поэтому имеем:

$$\delta U=\sum\left(\frac{\partial U}{\partial a_m}\delta a_m+\frac{\partial U}{\partial b_m}\delta b_m+\frac{\partial U}{\partial c_m}\delta c_m\right). \tag{16.10}$$

Внося (16.8) и (16.10) в (16.1), мы получим:

$$\sum_m \left[-\frac{\partial U}{\partial a_m}+\iiint f_m \rho X\,dx\,dy\,dz+\iint f_m \overline{X}_\nu\,d\Sigma\right]\delta a_m+$$
$$+\sum_m \left[-\frac{\partial U}{\partial b_m}+\iiint \varphi_m \rho Y\,dx\,dy\,dz+\iint \varphi_m \overline{Y}_\nu\,d\Sigma\right]\delta b_m+$$
$$+\sum_m \left[-\frac{\partial U}{\partial c_m}+\iiint \psi_m \rho Z\,dx\,dy\,dz+\iint \psi_m \overline{Z}_\nu\,d\Sigma\right]\delta c_m=0.$$

Так как вариации (16.9) совершенно произвольны и ничем между собой не связаны, то мы имеем отсюда:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial a_m}+\iiint \rho f_m X\,dx\,dy\,dz+\iint f_m \overline{X}_\nu\,d\Sigma=0,\\ -\frac{\partial U}{\partial b_m}+\iiint \rho \varphi_m Y\,dx\,dy\,dz+\iint \varphi_m \overline{Y}_\nu\,d\Sigma=0,\\ -\frac{\partial U}{\partial c_m}+\iiint \rho \psi_m Z\,dx\,dy\,dz+\iint \psi_m \overline{Z}_\nu\,d\Sigma=0,\end{aligned}\right\} \tag{16.11}$$

причём $m=1, 2, 3, 4, \ldots$

Число этих уравнений равно числу постоянных (16.4), и так как U есть функция второй степени относительно них, то (16.11) представляет по отношению к постоянным (16.4) систему линейных уравнений, из которых они и определяются.

В случае бесконечных рядов (16.3) возникает вопрос о том, сходятся ли значения u, v, w, полученные указанным методом, к действительным интегралам уравнений упругого равновесия в рассматриваемом случае. Ритц доказал это для разобранного им случая изгиба заделанной прямоугольной пластинки равномерной нагрузкой. В общем виде этот вопрос был предметом многих работ, в частности работ Н. М. Крылова и Л. Канторовича, но он не может считаться окончательно решённым, и мы не будем здесь останавливаться на нём. При конечном числе постоянных (16.4) мы получим приближённое решение, точность которого вообще тем выше, чем больше постоянных (16.4), и чем искуснее подобраны функции (16.5).

Мы обращаем внимание на то, что до сих пор статические граничные условия (11.43) нами не рассматривались. Они будут удовлетворены автоматически либо точно, либо приближённо и, в последнем случае, тем точнее, чем больше число постоянных (16.4), введённых в формулы (16.3). Так как выбор функций (16.5), удовлетворяющих заранее статическим граничным условиям (11.43), часто является трудным, то в этом мы видим решительное преимущество метода Ритца. Так как мы ввели по формулам (16.3) упругие перемещения, то тождественные соотношения Сен-Венана будут удовлетворены автоматически.

§ 172. Приближённый метод Б. Г. Галёркина.

Б. Г. Галёркину принадлежит замечательный метод приближённого интегрирования, оказавший значительную помощь в решении задач теории упругости и строительной механики.

Если функции (16.5) выбраны так, чтобы заранее были удовлетворены не только геометрические связи, но и статические граничные условия (11.43), то в уравнении (11.41) второй (поверхностный) интеграл исчезает, и уравнение принимает вид:

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X\right)\delta u+\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y\right)\delta v+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z\right)\delta w\right]dx\,dy\,dz=0. \qquad (16.12)$$

Сюда надо внести δu, δv, δw по формулам (16.8); тогда вследствие произвольности вариаций (16.9) мы получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X\right)f_m\,dx\,dy\,dz=0,\\&\iiint\left(\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y\right)\varphi_m\,dx\,dy\,dz=0,\\&\iiint\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z\right)\psi_m\,dx\,dy\,dz=0,\end{aligned}\right\} \qquad (16.13)$$

где $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Число этих уравнений равно числу постоянных (16.4). Входящие в левую часть (16.13) шесть компонентов напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y,$$

выражаются для однородного изотропного тела, согласно формулам (1.11), (1.12) и (3.52), как линейные функции постоянных (16.4). Следовательно, для определения этих постоянных мы будем иметь систему линейных уравнений. В тех случаях, когда предварительное удовлетворение статических граничных условий нетрудно сделать, метод Б. Г. Галёркина даёт значительное упрощение вычислений.

Исследованию сходимости процесса последовательного приближения к истинным интегралам при решении задач по методу Б. Г. Галёркина посвящено много работ.

§ 173. Метод приближения Треффца.

Имеется ещё одна возможность выбора функций (16.3). Именно, их можно выбрать так, чтобы они были интегралами уравнений Ламе (4.106). Тогда в формуле (11.41) отпадает первый (объёмный) интеграл, и мы получим:

$$\iint[(lX_x+mX_y+nX_z-\overline{X}_\nu)\delta u+(lX_y+mY_y+nY_z-\overline{Y}_\nu)\delta v+$$
$$+(lX_z+mY_z+nZ_z-\overline{Z}_\nu)\delta w]\,d\Sigma=0\,. \quad (16.14)$$

Сюда надо внести δu, δv, δw по формулам (16.8). Тогда, вследствие произвольности вариаций (16.9), мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\iint[lX_x+mX_y+nX_z-\overline{X}_\nu]f_m\,d\Sigma=0,\\&\iint[lX_y+mY_y+nY_z-\overline{Y}_\nu]\varphi_m\,d\Sigma=0,\\&\iint[lX_z+mY_z+nZ_z-\overline{Z}_\nu]\psi_m\,d\Sigma=0,\end{aligned}\right\} \quad (16.15)$$

где $m=1, 2, 3, 4, \ldots$

Число этих уравнений равно числу произвольных постоянных (16.4). Согласно сказанному в предыдущем параграфе, левые части уравнений (16.15) суть линейные функции относительно постоянных (16.4). Поэтому мы имеем достаточное число линейных уравнений для определения этих постоянных. Таким образом, мы выражаем u, v, w по формулам (16.3) как суммы интегралов уравнений Ламе (4.106) с произвольными коэффициентами, которые определяются по указанному методу. Здесь статические граничные условия удовлетворяются автоматически, и именно они и служат для определения неизвестных постоянных (16.4).

§ 174. Смешанный метод.

Этот метод применяется в случае двух- и трёхразмерных задач. Он состоит в том, что искомые функции представляют в виде произведения двух функций, из которых одна — известная, причём подобранная так, чтобы частично удовлетворить граничным условиям. Другая же функция — неизвестная — должна зависеть от меньшего числа переменных и подлежит определению при помощи вариационного уравнения (16.1). Таким образом, в случае задачи, зависящей от двух переменных, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции. Метод этот был предложен в 1933 году Л. Канторовичем в применении к кручению прямоугольного контура, В. Дунканом — в применении к кручению равнобедренного треугольника и автором этой книги — в применении к определению центра изгиба сегмента параболы.

§ 175. Приложение вариационной формулы Кастилиано.

Если решать задачи упругого равновесия по методу Сен-Венана, задаваясь из механических соображений значениями компонентов напряжённого состояния и применяя уравнения упругого равновесия Коши (4.24) и статические граничные условия (11.43), то главная трудность будет состоять в удовлетворении шести тождественных соотношений Бельтрами (4.48) и (4.50). Но из теоремы Саутуэлла (§ 122) вытекает, что тождественные соотношения Сен-Венана являются следствием вариационного уравнения Кастилиано (11.70):

$$\delta U = 0, \tag{16.16}$$

а следовательно, и соотношения Бельтрами будут также являться его следствием.

Поэтому применение вариационного уравнения (16.16) к приближённому решению задач упругого равновесия по способу Сен-Венана не вызывает необходимости в *предварительном удовлетворении* тождественных соотношений Бельтрами теми значениями шести компонентов напряжённого состояния, которыми мы задаёмся. Эти тождественные соотношения приближённо удовлетворяются сами собой, и тем точнее, чем больше произвольных постоянных взято в приближённых выражениях компонентов напряжённого состояния и чем удачнее сделан их выбор.

В случае однородного изотропного тела потенциальная энергия деформации имеет следующее выражение:

$$U = \frac{1}{2E}\iiint [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z) + \\ + 2(1+\sigma)(Y_z^2 + X_z^2 + X_y^2)]\,dx\,dy\,dz. \tag{16.17}$$

Будем различать два случая:

1. *Если даны поверхностные силы*, то имеют место уравнения (11.65), и тогда мы применяем вариационное уравнение (16.16). В этом случае значения шести компонентов напряжённого состояния

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y,$$

которые надо внести в (16.17), должны удовлетворять уравнениям (4.24) и (11.43).

Поэтому в рассматриваемом случае *заданных поверхностных сил* П. Ф. Папкович предложил брать следующие выражения для компонентов напряжённого состояния:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= X_x^0 + \sum_m A_m X_x^{(m)}, & Y_z &= Y_z^0 + \sum_m A_m Y_z^{(m)}, \\ Y_y &= Y_y^0 + \sum_m A_m Y_y^{(m)}, & X_z &= X_z^0 + \sum_m A_m X_z^{(m)}, \\ Z_z &= Z_z^0 + \sum_m A_m Z_z^{(m)}, & X_y &= X_y^0 + \sum_m A_m X_y^{(m)}, \end{aligned}\right\} \tag{16.18}$$

причём

$$X_x^0,\ Y_y^0,\ Z_z^0,\ Y_z^0,\ X_z^0,\ X_y^0$$

суть частные решения уравнений (4.24), удовлетворяющие граничным условиям (11.43). Если бы они, кроме того, удовлетворяли и тождествам Бельтрами (4.48) и (4.50), то давали бы решение задачи упругого равновесия, но мы предполагаем, что они этим тождествам не удовлетворяют.

Далее,

$$X_x^{(m)},\ Y_y^{(m)},\ Z_z^{(m)},\ Y_z^{(m)},\ X_z^{(m)},\ X_y^{(m)}$$

суть решения уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.19}$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} X_x l + X_y m + X_z n &= 0, \\ X_y l + Y_y m + Y_z n &= 0, \\ X_z l + Y_z m + Z_z n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.20}$$

но не удовлетворяющие шести тождествам Бельтрами (хотя для отдельных значений m эти тождества могут быть удовлетворены).

Наконец,

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots,\ A_m, \ldots \tag{16.21}$$

суть произвольные постоянные, вариации которых

$$\delta A_1,\ \delta A_2,\ \delta A_3, \ldots \tag{16.22}$$

совершенно произвольны и ничем между собой не связаны. Из (16.18) следует, что мы получим вариацию напряжённого состояния, если подвергнем вариации произвольные постоянные (16.21):

$$\left.\begin{aligned} \delta X_x &= \sum_m X_x^{(m)} \delta A_m, & \delta Y_z &= \sum_m Y_z^{(m)} \delta A_m, \\ \delta Y_y &= \sum_m Y_y^{(m)} \delta A_m, & \delta X_z &= \sum_m X_z^{(m)} \delta A_m, \\ \delta Z_z &= \sum_m Z_z^{(m)} \delta A_m, & \delta X_y &= \sum_m X_y^{(m)} \delta A_m, \end{aligned}\right\} \tag{16.23}$$

причём граничные условия (11.43) дают вследствие (16.20):

$$\left.\begin{aligned} l\delta X_x + m\,\delta X_y + n\,\delta X_z &= 0, \\ l\,\delta X_y + m\,\delta Y_y + n\,\delta Y_z &= 0, \\ l\,\delta X_z + m\,\delta Y_z + n\,\delta Z_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16.24}$$

что и требуется условиями (11.68). Таким образом, формулы (16.18) удовлетворяют всем условиям приложения вариационного уравнения Кастилиано (16.16).

Внося (16.18) в (16.17), мы видим, что U есть функция второй степени относительно постоянных (16.21). Поэтому из уравнения (16.17) мы получим уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial A_m} = 0, \ldots \tag{16.25}$$

Число этих уравнений равно числу произвольных постоянных (16.21), и они по отношению к этим постоянным суть линейные. Таким образом, из уравнений (16.25) определяются все постоянные (16.21), причём тождественные соотношения Бельтрами будут удовлетворены тем точнее, чем больше будет взято постоянных (16.21), и чем удачнее будет выбор решений

$$X_x^0,\ Y_y^0,\ Z_z^0,\ Y_z^0,\ X_z^0,\ X_y^0,$$
$$X_x^{(m)},\ Y_y^{(m)},\ Z_z^{(m)},\ Y_z^{(m)},\ X_z^{(m)},\ X_y^{(m)}.$$

Если решения (16.18) представляют собой бесконечные ряды, то возникает вопрос о сходимости их к истинному интегралу уравнения упругого равновесия, удовлетворяющему статическим граничным условиям и шести тождествам Бельтрами. Этот вопрос пока не исследован.

2. *Если на поверхности упругого тела заданы смещения*

$$\bar{u}(x, y, z), \quad \bar{v}(x, y, z), \quad \bar{w}(x, y, z),$$

то имеют место граничные условия (16.2).

В этом случае в правую часть вариационной формулы Кастилиано (11.62) надо внести значения $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$ упругих перемещений, которые они принимают при действительном равновесии на поверхности тела, что даёт:

$$\delta U=\iint(\overline{u}\,\delta\overline{X}_\nu+\overline{v}\,\delta\overline{Y}_\nu+\overline{w}\,\delta\overline{Z}_\nu)\,d\Sigma. \qquad (16.26)$$

Для U мы применяем формулу (16.17). Необходимые вариации поверхностных напряжений

$$\delta\overline{X}_\nu,\quad \delta\overline{Y}_\nu,\quad \delta\overline{Z}_\nu \qquad (16.27)$$

вычисляются по формулам (11.50). Для решения по методу П. Ф. Папковича шесть компонентов напряжённого состояния выбираем по формулам (16.18). Затем, внося (16.23) в формулы (11.50), вычисляем величины (16.27), которые представляем в (16.26).

Внося (16.18) в (16.17), мы получим:

$$U=F(A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots),$$

откуда имеем:

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial A_1}\delta A_1+\frac{\partial U}{\partial A_2}\delta A_2+\frac{\partial U}{\partial A_3}\delta A_3+\ldots \qquad (16.28)$$

Далее получим:

$$\iint(\overline{u}\,\delta\overline{X}_\nu+\overline{v}\,\delta\overline{Y}_\nu+\overline{w}\,\delta\overline{Z}_\nu)\,d\Sigma=\sum_m D_m\,\delta A_m. \qquad (16.29)$$

Внося (16.28) и (16.29) в (16.26) и принимая во внимание независимость вариаций δA_1, δA_2, δA_3, ..., получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1}=D_1,\quad \frac{\partial U}{\partial A_2}=D_2,\quad \frac{\partial U}{\partial A_3}=D_3,\ \ldots \qquad (16.30)$$

Число этих уравнений равно числу произвольных постоянных (16.21).

Ввиду того, что U есть функция второй степени относительно постоянных (16.21), уравнения (16.30) суть *линейные*. Чем больше взято членов в (16.18), тем вообще точнее будут удовлетворены тождества Бельтрами. Вопрос о сходимости бесконечных рядов (16.18) к истинному интегралу уравнений (4.24) пока не исследован.

§ 176. Вариационный метод Треффца.

Метод Треффца состоит в требовании, чтобы взятый по всей поверхности упругого тела интеграл от квадратичной ошибки при удовлетворении граничных условий имел наименьшее значение, либо чтобы взятый по всему объёму упругого тела интеграл от квадратичной ошибки при удовлетворении уравнений упругого равновесия тоже имел наименьшее значение. Разберём сначала случай, когда на поверхности тела заданы напряжения.

Выберем для компонентов упругого смещения выражения:

$$u=\sum_m a_m u_m; \quad v=\sum_m a_m v_m; \quad w=\sum_m a_m w_m, \tag{16.31}$$

где

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \tag{16.32}$$

суть произвольные параметры, а

$$u_m(x, y, z), \ v_m(x, y, z), \ w_m(x, y, z)$$

суть частные решения уравнений Ламе (4.106). Внося (16.31) в формулы (1.11) и (1.12), мы вычислим шесть компонентов деформации, а затем, внося их в формулы (3.52), мы вычислим шесть компонентов напряжённого состояния, которые являются линейными функциями от параметров (16.32). Внося же значения этих компонентов в формулы (2.8), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= \sum_m a_m X_\nu^{(m)}, \\ Y_\nu &= \sum_m a_m Y_\nu^{(m)}, \\ Z_\nu &= \sum_m a_m Z_\nu^{(m)}, \end{aligned}\right\} \tag{16.33}$$

где $X_\nu^{(m)}$, $Y_\nu^{(m)}$, $Z_\nu^{(m)}$ суть величины уже известные.

Внося (16.33) в статические граничные условия (11.43), мы получим неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_m a_m X_\nu^{(m)} - \overline{X}_\nu \neq 0, \\ \varepsilon_y &= \sum_m a_m Y_\nu^{(m)} - \overline{Y}_\nu \neq 0, \\ \varepsilon_z &= \sum_m a_m Z_\nu^{(m)} - \overline{Z}_\nu \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.34}$$

Если бы (16.31) было точным решением задачи упругости, удовлетворяющим граничным условиям, то мы имели бы

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0.$$

Но так как граничные условия (11.43) не удовлетворены, то ε_x, ε_y, ε_z отличны от нуля и представляют ошибки вследствие неудовлетворения этих граничных условий. Величина квадратичной ошибки будет равна

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2. \tag{16.35}$$

Величина ε^2 является функцией относительно параметров (16.32). Очевидно, *что средняя квадратичная ошибка при неточном удовлетворении граничных условий* (11.43) *будет пропорциональна интегралу*

$$\varepsilon_0^2 = \iint \varepsilon^2 \, d\Sigma. \tag{16.36}$$

Внося сюда (16.35) и (16.34), мы получим:

$$\varepsilon_0^2 = \iint \Big[\big(\sum_m a_m X_\nu^{(m)} - \overline{X}_\nu\big)^2 + \big(\sum_m a_m Y_\nu^{(m)} - \overline{Y}_\nu\big)^2 + \\ + \big(\sum_m a_m Z_\nu^{(m)} - \overline{Z}_\nu\big)^2 \Big] \, d\Sigma, \tag{16.37}$$

и очевидно, что ε_0 будет функцией второй степени относительно произвольных параметров (16.32). Условие минимума ε_0 даёт:

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial a_3} = 0, \ \ldots \tag{16.38}$$

На основании сказанного эти уравнения линейны относительно параметров (16.32), и число их равно числу этих параметров; эти постоянные и будут определены из уравнений (16.38). Внося полученные значения параметров (16.32) в формулы (16.31), мы получим интегралы уравнений упругого равновесия Ламе, соответствующие рассматриваемой задаче упругости, но с приближённым удовлетворением граничных условий. Это приближение будет тем больше, чем больше членов взято в формулах (16.31) и чем удачнее выбор частных интегралов u_m, v_m, w_m.

Если правые части формул (16.31) представляют собой бесконечные ряды, то возникает вопрос о сходимости их к точному интегралу уравнений Ламе для рассматриваемого случая. Этот вопрос мало исследован.

В том случае, когда на поверхности тела заданы смещения

$$\overline{u}(x, y, z), \quad \overline{v}(x, y, z), \quad \overline{w}(x, y, z),$$

то необходимо удовлетворить граничным условиям (16.2). Внося (16.31) в (16.2), мы получим неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_m a_m u_m - \overline{u} \neq 0, \\ \varepsilon_y &= \sum_m a_m v_m - \overline{v} \neq 0, \\ \varepsilon_z &= \sum_m a_m w_m - \overline{w} \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.39}$$

Внося (16.39) в (16.35) и затем в (16.36), мы получим:

$$\varepsilon_0^2 = \iint [(\sum_m a_m u_m - \bar{u})^2 + (\sum_m a_m v_m - \bar{v})^2 + \\ + (\sum_m a_m w_m - \bar{w})^2] \, d\Sigma. \qquad (16.40)$$

Мы получили ε_0 как функцию второй степени относительно параметров (16.32). Для определения этих параметров служат уравнения (16.38), дающие условия минимума средней квадратичной ошибки ε_0, получающейся при неточном удовлетворении граничных условий.

Другой вариант метода Треффца состоит в том, что в формулах (16.31) u_m, v_m, w_m суть функции координат, подобранные так, чтобы граничные условия (11.43) были точно удовлетворены. Следовательно, в формулах (16.34) будем иметь:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0.$$

Если теперь подставить (16.31) в уравнения Ламе, то мы получим неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_m a_m \left\{ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_m + \rho X \right\} \neq 0, \\ \varepsilon_y &= \sum_m a_m \left\{ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_m + \rho Y \right\} \neq 0, \\ \varepsilon_z &= \sum_m a_m \left\{ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_m + \rho Z \right\} \neq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (16.41)$$

где

$$\Delta^{(m)} = \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z}.$$

Здесь ε_x, ε_y, ε_z представляют собой ошибки при неточном удовлетворении уравнений (4.106). Величина средней квадратичной ошибки, получающейся при неточном решении уравнений упругого равновесия, определяется по формуле (16.36). Поэтому мы имеем в этом случае:

$$\varepsilon_0^2 = \iiint \Big[\Big\{ \sum_m a_m \Big[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_m + \rho X \Big] \Big\}^2 + \\ + \Big\{ \sum_m a_m \Big[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_m + \rho Y \Big] \Big\}^2 + \\ + \Big\{ \sum_m a_m \Big[(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta^{(m)}}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_m + \rho Z \Big] \Big\}^2 \Big] \, dx \, dy \, dz. \qquad (16.42)$$

Отсюда мы получим ε_0 как функцию второй степени относительно параметров a_1, a_2, a_3, для определения которых служат уравнения (16.38). Всё остаётся таким же, как и в предыдущем случае.

§ 177. Вариация потенциальной энергии деформации для плоской задачи.

Потенциальная энергия деформации имеет выражение:

$$U=\iint W\,dx\,dy, \tag{16.43}$$

где интеграл взят по всему сечению. Внося сюда W по формуле

$$2W=\frac{1-\sigma^2}{E}(X_x^2+Y_y^2)-\frac{2\sigma(1+\sigma)}{E}X_xY_y+\frac{2(1+\sigma)}{E}X_y^2,$$

мы получим:

$$U=\frac{1}{2E}\iint[(1-\sigma^2)(X_x^2+Y_y^2)+2(1+\sigma)X_y^2-$$
$$-2\sigma(1+\sigma)X_xY_y]\,dx\,dy. \tag{16.44}$$

Выражение для U удобно представить в виде:

$$U=\frac{1-\sigma^2}{2E}I_1+\frac{\sigma(1+\sigma)}{E}I_2, \tag{16.45}$$

где обозначено:

$$I_1=\iint[X_x^2+Y_y^2+2X_y^2]\,dx\,dy, \tag{16.46}$$

$$I_2=\iint[X_y^2-X_xY_y]\,dx\,dy. \tag{16.47}$$

Введём функцию напряжений $F(x, y)$ по формулам (8.34); тогда получим:

$$I_1=\iint\left[\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{16.48}$$

$$I_2=\iint\left[\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right]dx\,dy. \tag{16.49}$$

Вычислим теперь вариацию δI_2, которая получится только вследствие вариации функции напряжений F:

$$\delta I_2=\iint\left[2\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\right)-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)\right]dx\,dy.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\delta I_2 = \oint\left[\left(m\frac{\partial F}{\partial x} + l\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) - m\frac{\partial F}{\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - l\frac{\partial F}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\right]ds - \iint\left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\delta\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right]dx\,dy.$$

Здесь двухкратный интеграл тождественно обращается в нуль, а контурный интеграл принимает вид:

$$\delta I_2 = -\oint\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\left[l\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - m\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial y}\left[-l\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) + m\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right]\right\}ds. \quad (16.50)$$

Из формул (8.34) имеем:

$$\delta X_x = \delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \quad \delta Y_y = \delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \quad \delta X_y = \delta\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right). \quad (16.51)$$

Так как по условию начала Кастилиано усилия на контуре $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$ не подвергаются вариации, то имеют место граничные условия

$$l\delta X_x + m\delta X_y = 0, \quad l\delta X_y + m\delta Y_y = 0,$$

в которые мы должны внести (16.51), что даёт:

$$\left.\begin{aligned} l\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - m\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) &= 0, \\ -l\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) + m\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (16.52)$$

Внося (16.52) в (16.50), мы получим важное условие:

$$\delta I_2 = 0. \quad (16.53)$$

Остаётся вычислить вариацию δI_1, происходящую также от вариации функции F. Легко получаем:

$$\frac{1}{2}\delta I_1 = \iint\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)\right]dx\,dy.$$

Интегрирование по частям даёт:

$$\frac{1}{2}\delta I_1 = \oint\left[\left(l\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(l\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + m\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\delta\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right]ds - \oint\left[l\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2}\right) + m\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)\right]\delta F\,ds + \iint\left[\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right]\delta F\,dx\,dy. \quad (16.54)$$

Но из формул (8.122) и (8.126) мы видели, что при заданных на контуре сечения усилиях $\overline{X}_\nu\, ds$, $\overline{Y}_\nu\, ds$ контурные значения F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ могут быть вычислены и, следовательно, они могут считаться величинами, заданными на контуре сечения. Отсюда следует, что на контуре

$$\delta F = 0, \quad \delta\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0, \quad \delta\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0. \tag{16.55}$$

Внося (16.55) в (16.54), мы получим:

$$\frac{1}{2}\,\delta I_1 = \iint (\nabla_1^4 F)\,\delta F\, dx\, dy. \tag{16.56}$$

Следует заметить, что стоящая под знаком интеграла вариация δF функции напряжений ничем внутри контура поперечного сечения не стеснена и остаётся произвольной.

§ 178. Приложение вариационного уравнения Кастилиано к плоской задаче при заданных на контуре сечения усилиях.

Так как контурные усилия $\overline{X}_\nu ds$, $\overline{Y}_\nu ds$ в данном случае не подвергаются вариации, то имеет место вариационное уравнение Кастилиано (11.66)

$$\delta U = 0, \tag{16.57}$$

где U определяется формулой (16.45). Поэтому имеем вариационное уравнение

$$\frac{1-\sigma^2}{2E}\,\delta I_1 + \frac{\sigma(1+\sigma)}{E}\,\delta I_2 = 0, \tag{16.58}$$

которое вследствие (16.53) приводится к уравнению:

$$\delta I_1 = 0. \tag{16.59}$$

Вследствие формулы (16.56) мы имеем отсюда уравнение:

$$\iint (\nabla_1^4 F)\,\delta F\, dx\, dy = 0,$$

которое ввиду произвольности δF даёт:

$$\nabla_1^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0,$$

а это и есть уравнение (8.42), т. е. известное бигармоническое уравнение, служащее для определения функции напряжений F.

Таким образом, мы показали, что вариационное уравнение Кастилиано в приложении к плоской задаче приводит к бигармоническому уравнению. Функция напряжений удовлетворяет бигармоническому уравнению (8.42) и принимает вместе со своими первыми производными заданные значения на контуре (при данных усилиях на контуре). Здесь мы имеем аналогию с известной задачей об изгибе пластинки (умеренной толщины), прогиб которой удовлетворяет (при отсутствии нормальной нагрузки) бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 w = 0, \tag{16.60}$$

причём на контуре пластинки даны значение w и первых производных $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ или $\frac{\partial w}{\partial s}$ и $\frac{\partial w}{\partial \nu}$.

Уравнение (8.42) не может быть получено из начала возможных перемещений, т. е. из вариационного уравнения Лагранжа. Статические граничные условия для функции F не являются следствием вариационного уравнения (16.59) и должны быть удовлетворены заранее, если, пользуясь этим уравнением, искать приближённое решение задачи. С целью составления статических граничных условий внесём (8.34) в граничные условия, что даёт:

$$l\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - m\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \overline{X}_\nu, \qquad -l\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - m\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \overline{Y}_\nu, \tag{16.61}$$

где l и m суть косинусы углов внешней нормали с осями координат. Другую форму этих уравнений мы уже имели выше в виде уравнений (8.120):

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \overline{X}_\nu, \; \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\overline{Y}_\nu. \tag{16.62}$$

Пусть $F_0(x, y)$ есть функция, удовлетворяющая статическим граничным условиям (16.62). Тогда примем для отыскания приближённого решения следующее выражение для F:

$$F = F_0 + \sum_m A_m F_m(x, y), \tag{16.63}$$

где

$$F_1(x, y),\ F_2(x, y),\ \ldots,\ F_m(x, y), \ldots \tag{16.64}$$

суть функции, удовлетворяющие на контуре сечения условиям:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F_m}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F_m}{\partial y}\right) = 0. \tag{16.65}$$

Величины

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots,\ A_m, \ \ldots \tag{16.66}$$

суть произвольные постоянные.

Внося (16.63) в формулу (16.48), мы будем иметь:

$$I_1 = f(A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots), \tag{16.67}$$

причём эта функция по отношению к аргументам (16.66) будет второй степени. Внося (16.67) в вариационное уравнение Кастилиано (16.59), мы, ввиду произвольности параметров (16.66), получим уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial A_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial A_m} = 0, \quad \ldots \tag{16.68}$$

Число этих уравнений, *линейных* относительно произвольных параметров (16.66), равно числу параметров A_1, A_2, ...; из этих уравнений эти параметры и вычисляются.

Таким образом, получается приближённое решение плоской задачи при заданных усилиях на контуре и при отсутствии объёмных сил. Это решение приближённо удовлетворяет тождественному условию Бельтрами, которым является бигармоническое уравнение, причём удовлетворяет, вообще говоря, тем точнее, чем больше членов взято в (16.63) и чем удачнее сделан выбор функций (16.64). В случае бесконечного ряда возникает вопрос о сходимости его к истинному интегралу. Вопрос этот пока ещё не исследован.

§ 179. Приложение вариационной формулы Кастилиано к плоской задаче при заданных на контуре перемещениях.

В случае, если на контуре заданы перемещения

$$u = \bar{u}(x, y), \quad v = \bar{v}(x, y), \tag{16.69}$$

то необходимо для поддержания варьированного состояния подвергнуть варьированию силы, приложенные к контуру сечения. Величину этих вариаций контурных усилий можно получить по формулам (16.62), подвергая вариации функцию F, что даёт:

$$\delta \overline{X}_\nu = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta F)\right], \qquad \delta \overline{Y}_\nu = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta F)\right]. \tag{16.70}$$

Так как на контуре сечения имеют место условия (16.69), то, внося их в формулу Кастилиано для плоской задачи, мы получим:

$$\delta U = \oint (\bar{u}\,\delta X_\nu + \bar{v}\,\delta \overline{Y}_\nu)\, ds. \tag{16.71}$$

Внося (16.70) в (16.71), мы получим:

$$\delta U=\oint\left[\bar{u}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(\delta F)}{\partial y}\right)-\bar{v}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(\delta F)}{\partial x}\right)\right]ds. \tag{16.72}$$

Криволинейный интеграл в правой части взят по контуру сечения. Так как усилия, приложенные на контуре сечения, подвергаются вариации, то соотношения (16.52) уже не имеют места и, следовательно, не имеет места и соотношение (16.53). Поэтому выражение для U выгоднее взять в форме (16.44) и внести туда (8.34), что даёт:

$$U=\frac{1}{2E}\iint\left\{(1-\sigma^2)\left[\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)^2\right]-\right.$$
$$\left.-2\sigma(1+\sigma)\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+2(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy. \tag{16.73}$$

Это выражение потенциальной энергии надо внести в уравнение (16.72).

Функцию F мы выбираем в виде:

$$F=\sum_m a_m F_m(x,\ y), \tag{16.74}$$

где

$$F_1(x,\ y),\ F_2(x,\ y),\ \ldots\ F_m(x,\ y),\ \ldots \tag{16.75}$$

суть независимые функции координат, по которым внутри рассматриваемого сечения можно осуществить разложение (16.74), а параметры

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots \tag{16.76}$$

суть произвольные постоянные, вариации которых

$$\delta a_1,\ \delta a_2,\ \delta a_3,\ \ldots \tag{16.77}$$

ничем между собой не связаны и произвольны.

Внося (16.74) в (16.72), мы получим:

$$\sum_m M_m\,\delta a_m=0, \tag{16.78}$$

где M_1, M_2, M_3, ... суть выражения, линейные относительно постоянных (16.76). Так как вариации (16.77) произвольны, то мы имеем из (16.78) систему линейных относительно постоянных (16.76) уравнений, число которых равно числу неизвестных постоянных (16.76). Следовательно, эти постоянные будут определены.

Таким образом получается приближённое решение плоской задачи при заданных на контуре сечения смещениях, причём тождественные соотношения Бельтрами заранее не удовлетворены.

§ 180. Об оценке величины деформаций, получаемых с помощью приближённых методов.

Точность приближённого решения, данного формулами (16.3), как уже было указано в конце § 171, тем выше, чем больше постоянных (16.4) и чем искуснее подобраны функции (16.5), с помощью которых представлено наше приближённое решение.

Но было бы ошибочным думать, что, обрывая ряды (16.3), мы тем самым получаем систему с конечным числом степеней свободы и тем делаем систему более жёсткой, а следовательно, как правило, получаем меньшую деформацию и что это даёт возможность сделать оценку величины приближения.

Дело в том, что такой процесс приближения вовсе не есть процесс наложения новых связей, которые сделают систему менее подвижной. Наоборот, перемещения, полученные при небольшом числе членов в формулах (16.3), иногда могут быть даже больше действительных перемещений.

Для оценки величины приближения надо применять другие методы.

§ 181. Вариационное уравнение упругости для случая упругих движений.

На основании начала Даламбера уравнение (11.34) даёт:

$$\iiint\left[\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u+\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v+\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\right]\rho\,dx\,dy\,dz+\\+\iint[X_\nu\,\delta u+Y_\nu\,\delta v+Z_\nu\,\delta w]\,d\Sigma-\delta U=0. \quad (16.79)$$

Рассуждая так же, как и в случае упругого равновесия, мы получим уравнение:

$$\iiint\left\{\left[\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right]\delta u+\right.\\+\left[\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\right]\delta v+\\+\left.\left[\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]\delta w\right\}dx\,dy\,dz-\\-\iint\{[X_x l+X_y m+X_z n-\overline{X}_\nu]\,\delta u+[X_y l+Y_y m+Y_z n-Y_\nu]\delta v+\\+[X_z l+Y_z m+Z_z n-\overline{Z}_\nu]\,\delta w\}\,d\Sigma=0. \quad (16.80)$$

Так как возможные перемещения δu, δv, δw ничем между собой не связаны и совершенно произвольны, то следует приравнять нулю коэффициенты, стоящие при них в скобках в каждом из интегралов, что даёт нам, во-первых, *граничные условия*:

$$\left.\begin{aligned} X_x l + X_y m + X_z n &= \overline{X}_\nu, \\ X_y l + Y_y m + Y_z n &= \overline{Y}_\nu, \\ X_z l + Y_z m + Z_z n &= \overline{Z}_\nu, \end{aligned}\right\} \tag{16.81}$$

которые мы будем называть *динамическими граничными условиями*, и, во-вторых, *уравнения упругих движений*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.82}$$

Следовательно, при применении вариационного уравнения (16.79) нет необходимости заранее удовлетворять динамическим граничным условиям (16.81), так как они удовлетворяются как бы автоматически. При применении вариационного уравнения (16.79) мы задаём себе выражения u, v, w, согласные со связями, наложенными на упругое тело.

В случае периодических движений, частота которых есть p, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -p^2 u, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -p^2 v, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p^2 w. \tag{16.83}$$

Внося (16.83) в (16.79), мы получим:

$$\begin{aligned} &\iiint (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,\rho\,dx\,dy\,dz + \\ &\qquad + \iint (X_\nu\,\delta u + Y_\nu\,\delta v + Z_\nu\,\delta w)\,d\Sigma + \delta T - \delta U = 0, \end{aligned} \tag{16.84}$$

где

$$T = \frac{p^2}{2} \iiint \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{16.85}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Галёркин Б. Г., Тонкие плиты, 1933.

Галилео Галилей, Сочинения, т. I (перевод с итальянского), 1933.

Геккелер И. В., Статика упругого тела, 1934.

Ляв А., Математическая теория упругости (перевод с английского), 1935.

Лейбензон Л. С., Элементы математической теории пластичности, 1943.

Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, 1943.

Мусхелишвили Н. И., Некоторые задачи теории упругостч, 1935.

Надаи А., Пластичность (перевод с английского), 1936.

Папкович П. Ф., Теория упругости.

Пфейффер П., Колебания упругих тел (перевод с немецкого), 1934.

Рэлей, Теория звука, т. I (перевод с английского), 1940.

Серенсен С. В., Основы технической теории упругости, 1934.

Тимошенко С. П., Теория упругости (перевод с английского), 1937.

Тимошенко С. П., Курс теории упругости, ч. II, 1916.

Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. I и т. II (перевод с английского), 1945 и 1946.

Тимошенко С. П., *Пластинки и оболочки* (перевод с английского), 1946.

Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле (перевод с английского), 1931.

Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем (перевод с английского), 1946.

Треффц Е., Математическая теория упругости (перевод с немецкого), 1934.

Феппль А. и Феппль Л., Сила и деформация, т. I и т. II (перевод с немецкого), 1933 и 1936.

Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, 1947.

Appell P., Traité de Mécanique, т. III.

Bach C., Elastizität und Festigkeit, Berlin, 1894.

Boussinesq J., Applications des Potentiels, Paris, 1885.

Clebsch A., Théorie de l'élasticité des corps solides. (Перевод книги на французский язык B. de Saint-Venant'a с его обширными примечаниями.) Paris, 1883.

Föppl A., Vorlesungen über technische Mechanik, т. II, III и V. Leipzig, 1907.

Grashof F., Elastizität und Festigkeit, Berlin, 1878.

Ibbetson W. J., An Elementary Treatise on the Mathematical Theory of Perfectly Elastic Solids, London, 1887.

Kirchhoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, т. I (Mechanik).

Lamé G., Leçons sur la théorie mathèmatique de l'élasticité des corps solides, Paris, 1852.

Prager W., A New Mathematical Theory of Plasticity, Прикладная математика и механика, т. V.

Southwell R. W., Theory of Elasticity.

Todhunter and Pearson, History of the Theory of Elasticity, Cambridge, 1886.

Thompson W. u. P. G. Tait, Natural Philosophy, London.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Опечатки

№№ стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
69	12 снизу	коэффициенты	компоненты	ред.
89	7 снизу	$-[(Y-j_y)$	$-z\,[(Y-j_y)$	ред.
344	13 снизу	мы мы	мы их	тип.
362	10 снизу	$\pi^4\alpha\beta$	$\pi^4 a_1 b_1$	ред.