Л. А. Люстерник, Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, 1947, том 19, 3–100

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже давно была замечена связь между топологическими свойствами многообразия и числом и характером критических точек любой функции f на нем (критическими называются точки, в которых $df=0$). Надо добавить, что слова „число критических точек" можно понимать двояко; можно понимать под этим сумму кратностей числа критических точек, это так называемое число аналитически различных критических точек; можно понимать под этим число геометрически различных критических точек (для пояснения укажем, что число аналитически различных корней алгебраического уравнения n-ой степени, т. е. сумма кратностей корней равно n, между тем как число геометрически разных корней может быть не более единицы). Соответственно, различные топологические инварианты применялись для оценки числа геометрически и аналитически различных корней.

Переходу к вариационным задачам от критических точек функции, заданной на многообразии, к экстремалям функционалов, заданных на функциональном пространстве допустимых кривых данной вариационной задачи, отвечает переход от топологического исследования n-мерных многообразий к топологическому исследованию более общих абстрактных пространств. И таким образом задачи анализа смыкаются с исследованиями современной абстрактной топологии.

В нашей обзорной статье, помещенной в „Успехах математических наук" (Люстерник [13]), мы осветили главнейшие применения топологии к вариационному исчислению. Эту статью следует рассматривать как введение к настоящей работе. Мы здесь ограничимся лишь указанием на важнейшие результаты.

M. Morse и его ученики исследовали связь между числами Betti по модулю 2 и характером и числом аналитически различных точек. Основные результаты Morse'a изложены в его замечательной книге „Calcules of variations in the Large". Свои методы Morse применяет и к функциональным пространствам, в связи с чем он изучил числа Betti по модулю 2 конкретных функциональных пространств — пространств спрямляемых кривых с общими концами на n-мерной сфере и замкнутых спрямляемых кривых на ней. Важнейший полученный Morse'ом результат — доказательство существования счетной последовательности геодезических дуг, соединяющих две данные точки на многообразии, гомеоморфной n-мерной сфере.

Московские математики — Люстерник, Шнирельман и их ученики исследовали связь между числом геометрически различных критических точек и топологическими свойствами многообразия. В связи с этим был введен гомотопический инвариант „категория" (Lusternik, [1]), оценивающий число геометрически различных критических точек; в свою очередь, для оценки этого трудно вычисляемого инварианта были введены гомологические инварианты (Schnirelmann [1)], которые оказались тесно связанными с кольцом пересечения многообразия. В дальнейшем эти инварианты были дополнительно изучены, были введены новые гомотопические инварианты (Эльсгольц [2]), был введен и новый, весьма удобный для вычисления инвариант „длина" многообразия (Froloff et Elzholz [1]).

Весьма существенным орудием в этих исследованиях была теорема Л. С. Понтрягина о снятии цикла (Pontragin [1]).

Гомотопические инварианты, например категория, непосредственно определяются и для функциональных пространств. В отдельных задачах удавалось вычислить такие инварианты и тем самым исследовать число решений соответственной вариационной задачи. Таким именно методом было доказано существование трех замкнутых геодезических на поверхностях рода 0 (Люстерник и Шнирельман, [3]). Однако в других случаях непосредственное определение гомотопических инвариантов не удалось.

В настоящей работе исследуются гомологические свойства функциональных пространств в связи с оценкой числа решений соответственных вариационных задач. Примыкая, с одной стороны, к предыдущим работам московских математиков по топологическим методам в вариационных задачах, они примыкают, с другой стороны, к исследованиям московской топологической школы по гомологической теории абстрактных пространств. В известном смысле здесь осуществляется синтез обоих направлений Московской топологической школы.

В важнейших задачах вариационного исчисления эти функциональные пространства обычно компактны или близки к компактным. Основные понятия и факты комбинаторной топологии перенесены на подобные пространства. Здесь прежде всего следует отметить труды П. С. Александрова. В частности, П. С. Александров [3] перенес на такие пространства основные теоремы двойственности, которые получают применение в вариационном исчислении в целом.

Существенным орудием исследования являются верхние циклы в функциональных пространствах и их произведения, введенные в топологию А. Н. Колмогоровым и Александером. Именно в случае бесконечномерных пространств верхние образы дают принципиально новые геометрические объекты (бесконечномерные с конечномерным дефектом по отношению ко всему пространству), столь же необходимые для исследования свойств всего пространства, как и обычные конечномерные „нижние образы". В конкретных исследованиях верхние циклы в отдельных функциональных пространствах допускают геометрические наглядные определения в виде, например, совокупности кривых, проходящих через данные точки многообразия в пространстве кривых на этом многообразии и т. п.

Глава I настоящей работы излагает общие методы вариационного исчисления в целом. Формулируется общий принцип, позволяющий судить, когда появляются бесконечные семейства экстремалей и дающий возможность оценивать число решений вариационной задачи в связи с кольцом произведений в соответственном функциональном пространстве.

Глава II дает применение общих методов к теории собственных значений некоторых классов нелинейных интегральных уравнений.

Глава III исследует „критические множества", состоящие из геодезических линий на многообразиях. В дополнение к ней воспроизводится теорема автора о том, что всякое компактное семейство самонепересекающихся кривых на двумерной сфере непрерывной деформацией сводимо к семейству окружностей.

Глава IV исследует функциональное пространство всех спрямляемых кривых на сфере с общими концами (допустимых кривых вариационной задачи с фиксированными концами). Здесь впервые дается полное исследование топологической структуры существенно нелинейного функционального пространства. Строятся верхние и нижние группы гомологий и кольцо пересечений (для разных групп коэффициентов). Даются исследования и некоторых гомотопических свойств этого пространства. Как применение, дается полное исследование геодезических дуг, соединяющих две данные точки на поверхности рода 0 с уточнением результатов Morse'a.

Глава V исследует общими методами замкнутые геодезические на многообразиях гомеоморфных n-мерным сферам. Для случая $n=2$ дается новое доказательство теоремы, доказанной ранее автором совместно с Л. Г. Шнирельманом о существовании трех замкнутых геодезических. Для случая $n>2$ при некоторых метрических ограничениях эта теорема обобщается: доказывается существование по меньшей мере $(n+1)$-ой замкнутой геодезической.

Для случая $n=2^k$ доказывается наличие $(2n-1)$-ой такой геодезической.

В заключение укажем, что изучение гомологических свойств конкретных бесконечномерных функциональных пространств представляет весьма интересную задачу топологии.

ГЛАВА I

Общие принципы вариационного исчисления в целом

§ 1. Критические значения

K-множества. При исследовании вариационных задач приходится выделять специальные классы множеств, например множеств, на которых данный функционал непрерывен, множеств допустимых элементов при специальных ограничениях на них в некоторых задачах и т. п.

Пусть дано метрическое пространство M. Будем рассматривать некоторый класс $[A]$ замкнутых множеств на M, обладающих следующим свойством: если множество A принадлежит классу $[A]$, то любое его замкнутое подмножество принадлежит тому же классу. Класс $[A]$ будем называть K-классом, а множества K-класса $[A]$ — K-множествами.

Например, пусть J есть функционал, заданный в M, можно определить K-класс [4] тех замкнутых множеств A, на которых J непрерывен. Можно также определить K-класс $[B]$ замкнутых множеств B, имеющих конечную размерность.

Непрерывные деформации будем определять обычным образом. Пусть A некоторое (заданное, вообще говоря, абстрактно) множество с определенной на нем топологией. Каждой точке a множества A и каждому значению параметра t сегмента $[0, 1]$ отвечает точка $f(a, t)$ пространства M, причем $f(a, t)$ есть функция непрерывная относительно a и относительно t.

Совокупность точек вида $f(a, t)$ при фиксированном t образует множество A_t — непрерывный образ множества A. Таким образом определенная операция преобразования множества A_0 в множество A_1 называется деформацией A_0, как образ множества A.

Если множество A_0 совпадает с A и $f(a, o) = a$, мы называем тогда такую операцию просто деформацией A.

Наряду с классами K-множеств мы рассматриваем некоторые классы деформаций, которые называем K-деформациями. При этом последовательность двух примененных одна за другой K-деформаций образует K-деформацию и K-деформация преобразует K-множество B_0 снова в K-множество B_1. Однако промежуточные стадии деформации

B_0 могут и не быть K-множествами. Идентичная деформация всегда считается K-деформацией.

Например, можно определить на прямой K-класс $[A]$, именно класс множеств A, не содержащих некоторой точки a, и класс K-деформаций этих множеств, именно тех их сдвигов по прямой (как „твердого тела“), в результате которых K-множество A (не содержащее точки a) переходит в K-множество (однако в некоторые моменты сдвига образ множества A может и проходить через a). Мы будем, например, в дальнейшем рассматривать в пространстве всех замкнутых кривых на сфере K-множества, состоящие из кривых без двойных точек и K-деформации подобных множеств, преобразующие их снова во множества кривых без двойных точек, т. е. в K-множества (хотя в промежуточные моменты деформации K-множества могут перестать быть таковыми).

K-критические точки. Мы скажем: компактное в себе множество A (пустое или непустое) на гиперповерхности уровня $(I=c)$[1] обладает K-свойством, если для любого достаточно малого $\alpha>0$ найдется такое $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)>0$, где $\varepsilon(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to 0$, что любое K-множество из $(I\leqslant c+\alpha)$ может быть путем K-деформации переведено в область $(I\leqslant c-\alpha)+S(A, \varepsilon)$. Мы будем говорить в этом случае, что само $(I=c)$ обладает этим свойством.

Пример 1. Пусть M — компакт и I — непрерывная функция на нем. Гиперповерхность уровня $(I=c)$, которую обозначим через A_c обладает следующим легко доказываемым свойством: для любого $\alpha>0$ можно найти такое $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)>0$, $\varepsilon(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to 0$, что если для точки x, $|I(x)-c|<\alpha$, то $x\in S(A_c, \varepsilon)$. Отсюда следует: $(I\leqslant c+\alpha)\subset(I\leqslant c-\alpha)+ +S(A_c, \varepsilon)$. Так как идентичная операция является K-операцией и A_c есть компактное в себе множество, то отсюда следует: A_c обладает K-свойством.

Если для функционала I все поверхности уровня $(I=c)$ обладают K-свойством, то сам функционал *I обладает K-свойством*. Например, все непрерывные функционалы на компактах обладают K-свойством. В § 11 и 12 мы докажем, что функционал — длина кривой в пространстве R спрямляемых дуг на сфере с общими концами и в пространстве P спрямляемых замкнутых кривых на сфере обладает K-свойством.

Пусть функционал I, а значит все гиперповерхности $(I=c)$ обладают K-свойством. Возможны два случая:

1) Пустое множество обладает на $(I=c)$ K-свойством. Это значит, что для любого достаточно малого $\alpha>0$ каждое K-множество из $(I\leqslant c+\alpha)$ может быть K-деформацией переведено в область $(I\leqslant c-\alpha)$. В этом случае c будем называть K-обыкновенным значением.

2) K-свойством обладают на $(I=c)$ лишь некоторые непустые (компактные в себе) множества A. В этом случае существует на $(I=c)$

[1] Множество точек, в которых функционал $I=c$.

компактное в себе непустое множество A_0 неприводимое по свойству обладать K-свойством. Такое множество будем называть K-критическим.

Компактное в себе множество A_0 *называется* K-*критическим на* $(I=c)$, если оно есть минимальное множество по отношению к следующему свойству: для всякого $\alpha>0$ *найдется такое* $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)>0$, $\varepsilon(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to 0$, что любое K-множество из $(I\leqslant c+\alpha)$ может быть переведено в $(I\leqslant c-\alpha)+S(A_0,\varepsilon)$. В этом случае c называется K-*критическим значением.*

Если c не является K-критическим значением, то будем его называть K-*обыкновенным значением.*

Точки K-критического множества будем называть K-*критическими* точками.

Если K-множества суть произвольные замкнутые множества, K-деформации — их произвольные деформации, то будем говорить просто о критических множествах, точках, значениях, вместо K-критических и соответственно об обыкновенных значениях.

Пример 2. Рассмотрим хорошо изученный случай, когда f есть дважды дифференцируемая функция на дважды дифференцируемом римановом n-мерном замкнутом многообразии R_n.

Если $(f=c)$ не содержит стационарных точек, т. е. точек, в которых $df=0$, то любое замкнутое множество из $(f\leqslant c+\alpha)$ при достаточно малых $\alpha>0$ может быть сведено деформацией в $(f\leqslant c-\alpha)$, т. е. c является обыкновенным значением.

Если $(f=c)$ содержит непустое множество A стационарных точек (A замкнуто), то для всякого $\alpha>0$ можно найти $\varepsilon>0$ такое, что любое замкнутое множество из $(f<c+\alpha)$ может быть деформировано в $(f<c-\alpha)+S(A,\varepsilon)$. A обладает K-свойством. Критические точки f суть стационарные точки.

В дальнейшем в главе I будем без оговорок считать рассматриваемые функционалы обладающими K-свойством.

Принцип минимум максимумов. K-класс гомотопии. Пусть дан K-класс L и класс K-деформаций K-множеств B из L, и класс L инвариантен по отношению к деформациям этого класса. Назовем L классом гомотопии.

Теорема 1. Обозначим через c нижнюю границу по L верхних границ функций I на множествах B класса гомотопии L:

$$c=\inf[\sup I(x)]$$

$$B\in L,\ x\in B.$$

Тогда c есть K-критическое значение, т. е. $(I=c)$ содержит непустое K-критическое множество функционала I.

В самом деле, если c было бы K-обыкновенным значением, то любое K-множество из $(I\leqslant c+\alpha)$ при достаточно малом $\alpha>0$, можно было бы путем K-деформации преобразовать в область $(I \leqslant c - \alpha)$. Но при любом $\alpha > 0$ в $(I \leqslant c + \alpha)$ содержится K-множество B класса L. В силу определения L, путем K-деформации B преобразуется в множество B_1 того же класса L, лежащее в $(I \leqslant c - \alpha)$, sup $I(x)$ на B_1 будет $\leqslant c - \alpha$ вопреки определению c. Полученное противоречие доказывает предложение.

Вернемся к примеру 2.

Пусть дан класс замкнутых множеств L в R_n, инвариантный по отношению к операции деформации. Если c есть нижняя граница максимумов f на множествах класса L, то $(f = c)$ содержит стационарные точки функции f (в которых $df = 0$) (Lusternik et Schnirelmann [1]).

§ 2. Слияния критических значений

Подчиненные классы. Пусть даны два K-класса гомотопии $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$, причем каждое множество B класса $\mathfrak{B}$ содержит в теоретико-множественном смысле множество класса $\mathfrak{B}_1$. Мы скажем: класс $\mathfrak{B}_1$ подчинен классу $\mathfrak{B}$. Каждый из этих классов порождает соответственное критическое значение c и c_1 функционала I.

Имеем $c_1 \leqslant c$. В самом деле, для любого $\alpha > 0$ найдется такое множество B класса $\mathfrak{B}$, что $\sup\limits_{x \in B} I(x) \leqslant c + \alpha$. Но B содержит подмножество B_1 класса $\mathfrak{B}_1$ и $\sup\limits_{x \in B_1} I(x) \leqslant \sup\limits_{x \in B} I(x) \leqslant c + \alpha$, поэтому

$$c_1 = \inf_{B_1 \in \mathfrak{B}_1} [\sup_{x \in B_1} I(x)] \leqslant c + \alpha$$

и, ввиду произвольности $\alpha > 0$, получаем $c_1 \leqslant c$.

Наиболее интересен случай, когда $c = c_1$. В силу принципа минимум максимумов, на $(I = c)$ содержится K-критическое множество A. При любом $\alpha > 0$ существует множество класса $\mathfrak{B}$ в $(I \leqslant c + \alpha)$. Любое K-множество из $(I \leqslant c + \alpha)$ может быть деформировано в область

$$(I \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, и при $\varepsilon \to 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$. При произвольном $\varepsilon > 0$ и $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ существует множество B_ε класса $\mathfrak{B}$, заключенное в $(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon)$.

Критическое множество A должно быть таково, что $B_\varepsilon - S(A, \varepsilon)$ не должно содержать множеств класса $\mathfrak{B}_1$. В самом деле, так как

$$B_\varepsilon \in (I \leqslant c \alpha) + S(A, \varepsilon),$$

то

$$[B_\varepsilon - S(A, \varepsilon)] \in (I \leqslant c - \alpha).$$

Если множество B_1 класса $\mathfrak{B}_1$ входит в $B_\varepsilon - S(A, \varepsilon)$, то $B_1 \in (I \leqslant c - \alpha)$ $\sup\limits_{x \in B_1} I(x) \leqslant c - \alpha < c = c_1$, вопреки определению c_1.

То, что $B_\varepsilon - S(A, \varepsilon)$ не содержит множеств класса $\mathfrak{B}_1$, где B_ε входит в класс $\mathfrak{B}$, позволяет во многих случаях по топологической структуре множеств классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ судить о топологической структуре $S(A, \varepsilon)$, а значит и A. Здесь особенно важны те предложения, которые по свойствам двух множеств позволяют судить о свойствах их разности. Поэтому, в частности, находят себе применение инварианты аддитивного характера и теоремы о связи между структурой множества и его дополнения (типа принципа двойственности Александера).

§ 3. Категория и другие инварианты для конечномерного случая

Первым по времени, использованным для этой цели инвариантом, был инвариант, названный категория (Lusternik [1]). Множество M называется категории 1, $\operatorname{cat} M = 1$, в пространстве L, если оно путем непрерывной деформации сводимо в L к точке; множество M называлось категории m, $\operatorname{cat} M = m$, если оно разбивалось на m частей категории 1, но не разбивалось на их меньшее число. При деформациях категория множества не понижалась. В n-мерном многообразии R_n, при достаточно малом ε, $\operatorname{cat} M = \operatorname{cat} S(M, \varepsilon)$.

Пусть $(M)_i$ есть класс множеств категории $\geqslant i$ в R_n, $(M)_i$ есть класс гомотопии. Рассмотрим в R_n функцию f. Обозначим через

$$c_i = \inf_{M \in (M)_i} \sup_{x \in M} f(x),$$

порождаемое классом $(M)_i$ критическое значение функции f. При $p > 0$, $c_i \leqslant c_{i+p}$.

Пусть теперь $c_i = c_{i+p} = c$. В цитированной работе доказывалось, что критическое множество A на поверхности уровня $(f = c)$ имеет категорию $\geqslant p + 1$. В самом деле, при достаточно малом ε,

$$\operatorname{cat} A = \operatorname{cat} S(A, \varepsilon).$$

Далее, можно определить такое $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, что всякое множество из R_n, заключенное в $(f \leqslant c + \alpha)$, может быть преобразовано в

$$(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon)$$

непрерывной деформацией.

Пусть M_{i+p} множество класса $(M)_{i+p}$, заключенное в

$$(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon).$$

Если $\operatorname{cat} A \leqslant p$, то при достаточно малом ε,

$$\operatorname{cat} S(A, \varepsilon) \leqslant p, \quad \operatorname{cat}[M_{i+p} - S(A, \varepsilon)] \geqslant \operatorname{cat} M_{i+p} - \\ - \operatorname{cat} S(A, \varepsilon) \geqslant i + p - p = i.$$

Итак, разность $M_i = M_{i+p} - S(A, \varepsilon)$ содержится в классе $(M)_i$, что невозможно (эта разность M_i заключена в $(f \leqslant c - \alpha)$, $\sup\limits_{x \in M_i} f(x) \leqslant c - \alpha < c = c_i$, вопреки определению c_i).

С помощью инварианта категории можно оценить число стационарных точек трижды дифференцируемой функции f (т. е. точек, в которых $df = 0$), заданной на замкнутом многообразии R_n. В самом деле, критическое множество на $(f = c)$ содержится в множестве стационарных точек. Пусть $\operatorname{cat} R_n = k$. Тогда можно определить классы $(M)_1, (M)_2, \ldots, (M)_i$, множеств M_i которых категория $\geqslant i \, (i = 1, 2, \ldots, k)$. Каждый класс индуцирует критическое значение

$$c_i = \inf_{M_i \in (M)_i} \sup_{x \in M_i} f(x).$$

Каждая поверхность уровня $(f = c_i)$ содержит стационарную точку. Если числа c_i различны, то стационарных точек не меньше k. Если же $c_i = c_{i+p} = c$ и, значит, поверхности уровня $(f = c_1), \ldots, (f = c_{i+p})$ совпадают, то на совпавшей поверхности уровня $(f = c)$ содержится критическое множество A категории $\geqslant p$, следовательно, это множество содержит бесконечное множество стационарных точек.

Можно ограничиться специальными классами деформаций — K-деформациями и ввести соответственно понятие K-категории множества — наименьшего числа частей, сводимых путем K-деформаций к точкам, на которые можно разбить множество.

Вычисления гомотопических инвариантов представляют значительные сложности. В связи с этим Л. Г. Шнирельманом были введены для оценки категории, а следовательно и числа критических точек, гомологические инварианты (Schnirelmann [1]). Эти инварианты (например, „ранг“) оказались тесно связанными с кольцом пересечения данного многообразия. Хотя эти гомологические инварианты и давали в некоторых случаях менее точную оценку, чем гомотопические, но они были проще для вычисления, и с помощью их сравнительно просто были вычислены и категории некоторых многообразий, например, n-мерного проективного пространства, n-мерного гипертора и т. д. Среди введенных позже гомологических инвариантов оказался весьма удобным для вычисления инвариант „длина многообразия“, определенный С. Фроловым и Л. Эльсгольцем как наибольшее число циклов многообразия, пересечение которых не равно нулю.

Понятие категории логически просто обобщается на случай бесконечномерных пространств, но вычисление его делается еще более сложным. Однако удалось определить категории некоторых множеств в пространстве замкнутых кривых на сфере и тем самым оценить число решений вариационной задачи на отыскание замкнутых экстремалей на сфере или на поверхности рода 0. На такой поверхности, оказалось, всегда существует три замкнутых геодезических.

Однако для других задач, например для задачи с фиксированными концами, оценить непосредственно категории семейств допустимых линий не удалось.

Примечание. Для оценки числа критических точек употребляются как гомотопические инварианты (категория, инварианты, введенные Л. Э. Эльсгольцем [2], так и гомологические („ранг", „длина" др.). Гомотопические инварианты дают в общем более точную оценку. Так, Borsuk исследовал связь категорий с фундаментальной группой; из его результатов следует, что категория многообразия F_n, гомологическая структура которого совпадает со структурой n-мерной сферы S_n, и фундаментальная группа нетривиальна, не меньше 3, поэтому для любой функции на S_n число критических точек $\geqslant 3$, тогда как для функции на сфере оно может равняться 2. Между тем с точки зрения гомологии F_n не отличается от S_n (такие многообразия F_n, как показал Пуанкаре, существуют, начиная с размерности $n=3$).

§ 4. Размерности критических множеств; n-мерный случай

Будем рассматривать в n-мерном многообразии R_n классы k-мерных циклов (z_k) таких, что вместе с циклом z_k класс (z_k) содержит все циклы гомологичные qz_k; здесь, как и везде в дальнейшем, q есть произвольное положительное, меньшее p число, если гомологии берутся по простому модулю p, и q есть произвольное целое число $q \neq 0$, если гомологии берутся по модулю 0.

Если гомологии берутся по модулю R (с группой коэффициентов вещественных чисел), то q означает произвольное вещественное число, отличное от 0, и т. д.

Мы скажем, класс (z_k) k-мерных циклов z_k подчинен классу (z_{k+l}) $(k+l)$-мерных циклов z_{k+l} посредством класса (z_{n-l}) $(n-l)$-мерных циклов, если пересечение цикла z_{n-l} из (z_{n-l}) с циклом z_{k+l} из (z_{k+l}) есть цикл z_k из класса (z_k). Так как классы циклов (z_k), (z_{k+l}) — инварианты по отношению к операции деформации, то классы (z_k), и (z_{k+l}) являются в то же время классами гомотопии, подчиненными один другому.

Теорема 2. Если порожденные классами (z_k) и (z_{k+l}) критические значения c_k, c_{k+l} функции f совпадают, $c_k = c_{k+l} = c$, то поверхность уровня $f = c$ содержит критическое множество A, размерность которого не меньше l.

Эту теорему можно уточнить.

Теорема 3. Если $c_{k+l} = c_k = c$ и A есть критическое множество на $(f = c)$, то A содержит не гомологичный нулю l-мерный цикл z_l, именно такой, что $z_l \times z_{n-l} \neq 0$, $z_{n-l} \in (z_{n-l})$.

В самом деле, допустим противное. Каков бы ни был l-мерный цикл z_l, заключенный в A, $z_l \times z_{n-l}=0$, где z_{n-l} — цикл класса (z_{n-l}). Теорема о снятии цикла Л. С. Понтрягина [1] гласит, что если для любого l-мерного цикла z_l, лежащего в A, $z_l \times z_{n-l}=0$, то существует цикл $\bar{z}_{n-l}$, гомологичный z_{n-l} и лежащий целиком вне A. Так как A замкнутое, то существует такое $\varepsilon>0$, что $\bar{z}_{n-l}$ лежит вне $S(A, \varepsilon)$. Существует такое $\alpha>0$, что всякое замкнутое множество из $(f \leqslant c+\alpha)$ может быть деформировано в $(f \leqslant c-\alpha)+S(A, \varepsilon)$. Так как при любом $f \leqslant c+\alpha$ существует, в силу определения c, цикл $z_{k+l} \in (z_{k+l})$, лежащий в области $(f \leqslant c+\alpha)$, а значит, существует цикл $\bar{z}_{k+l} \sim z_{k+l}$, $(\bar{z}_{k+l} \in (z_{k+l}))$, лежащий в $(f \leqslant c-\alpha)+S(A, \varepsilon)$. Обозначим $z_k=\bar{z}_{k+l} \times \bar{z}_{n-l}$. По определению, z_k входит в класс (z_k). Так как $\bar{z}_{k+l} \in (f \leqslant c-\alpha)+S(A, \varepsilon)$, а $\bar{z}_{n-l}$ лежит вне $S(A, \varepsilon)$, то z_k, расположенный в теоретико-множественном пересечении $\bar{z}_{k+l}$ и z_{n-l}, лежит в $(f \leqslant c-\alpha)$, и максимум f на z_k не превосходит $c-\alpha<c=c_k$, что противоречит определению c_k. Теорема доказана.

Можно рассмотреть структуру, элементами которой являются классы гомологии многообразия, причем класс (z_{k+l}) следует за классом (z_k), если элементы класса (z_k) получаются пересечением элементов класса (z_{k+l}) с циклами z_l класса (z_l). Эта теорема указывает порядок появления критических значений функции f. Если класс (z_{k+l}) следует за классом (z_k), то порождаемые ими критические значения c_k, c_{k+l} удовлетворяют неравенству $c_k<c_{k+l}$, или в случае совпадения $c_k=c_{k+l}$ появляется континуальное множество критических точек.

Наибольшее число следующих друг за другом классов гомологии многообразия R совпадает с инвариантом „длина многообразия" (Froloff et Elsholz [1]).

§ 5. Переход к компактам

Теорема 4. О снятии ∇-цикла. Перенесем полученные результаты на случай произвольного компакта. При доказательстве теоремы мы пользовались теоремой Л. С. Понтрягина об отделении цикла. Эта теорема была обобщена П. С. Александровым на случай компактов (общее, локально бикомпактных пространств) M. Именно: *пусть в M задан n-мерный ∇-цикл Z^n и замкнутое множество A такое, что для любого n-мерного ∇-цикла z_n из A индекс пересечения $Z^n \times z_n=0$. Тогда цикл Z^n можно снять с A, т. е. существует ∇-гомологичный Z^n ∇-цикл $\bar{Z}^n$, лежащий вне A, т. е. носител $\bar{Z}^n$* лежит вне A (и более, при достаточно малом $\varepsilon>0$, вне $S(A, \varepsilon)$) (Александров [3]).*

* Носителем ∇-цикла U называется замкнутое множество B, обладающее следующими свойствами: 1) какова бы ни была окрестность B, U может быть определено последовательностью функций, равных нулю вне этой окрестности, 2) B неприводимо по отношению к этому свойству.

В качестве следствия теоремы о снятии цикла докажем следующее: Пусть $Z^{n+m} \widetilde{\nabla} Z^n \times Z^m$, где Z^n, Z^m, Z^{n+m} суть n, m и $(m+n)$-мерные ∇-циклы, z_{n+m} — $(n+m)$-мерный Δ-цикл, такой, что $z_{n+m} \times Z^{n+m} \neq 0$. Тогда теоретико-множественное пересечение носителя Z^n и z_{n+m} содержит m-мерный Δ-цикл z_m, такой, что $Z^m \times z_m \neq 0$.

В самом деле, пусть A есть теоретико-множественное пересечение z_{n+m} и носителя Z^n. Если для любого m-мерного Δ-цикла z_m из A, $z_m \times Z^m = 0$, то существует ∇-цикл $\overline{Z}^m \widetilde{\nabla} Z^m$, носитель которого лежит вне A. Пусть $\overline{Z}^{n+m} = Z^n \times \overline{Z}^m$. Имеем $\overline{Z}^{n+m} \widetilde{\nabla} Z^{n+m}$. Носитель $\overline{Z}^{n+m}$ лежит в теоретико-множественном пересечении носителей Z^n и $\overline{Z}^m$, и теоретико-множественное пересечение носителя $\overline{Z}^{n+m}$ и z_{n+m} лежит в теоретико-множественном пересечении носителей $\overline{Z}^m$, Z^n и z_{n+m}. Но последнее пересечение пусто. В самом деле, носитель $\overline{Z}^m$ лежит вне $S(A, \varepsilon)$, т. е. вне теоретико-множественного пересечения носителя Z^n и z_{n+m}. Но отсюда следует $(Z^n \times \overline{Z}^m) \times z_{n+m} = 0$. Между тем

$$(Z^n \times \overline{Z}^m) \times z_{n+m} = \overline{Z}^{n+m} \times z_{n+m} = Z^{n+m} \times z_{n+m} \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Чех дал определение произведения верхнего ∇-цикла Z^n и Δ-цикла z_{n+m} (размерностей соответственно n и $n+m$). Это произведение есть m-мерный Δ-цикл z_m, лежащий в теоретико-множественном пересечении z_{n+m}, и носителя Z^n, причем если

$$(Z^n \times Z^m) \times z_{n+m} \neq 0,$$

то

$$Z^m \times z_m \neq 0.$$

Существование цикла, удовлетворяющего этим свойствам, следует из приведенного следствия теоремы о снятии цикла.

K-классы Δ-циклов. Будем называть K-циклом Δ-цикл, являющийся K-множеством; K-классом (z_n) будем называть совокупность Δ-циклов, таких, что с циклом z_n в (z_n) входит всякий Δ-цикл, гомологичный qz_n, где $q \neq 0$ при гомологии по модулю 0, $0 < p < q$ при гомологиях по простому модулю p; вообще, q — произвольный ненульстепенный элемент группы коэффициентов гомологии.

K-класс n-мерных Δ-циклов (z_n) является подчиненным K-классу $(n+m)$-мерных Δ-циклов (z_{n+m}) посредством ∇-циклов класса (Z^m), если в теоретико-множественном пересечении носителя ∇-любого цикла $Z^m \in (Z^m)$ и любого цикла z_{n+m} из (z_{n+m}) содержит Δ-цикл z_n класса (z_n).

Пусть (Z^n), (Z^m), (Z^{n+m}) — классы гомологии n, m и $(n+m)$-мерных ∇-циклов, таких, что для $Z^n \in (Z^n)$, $Z^m \in (Z^m)$, $(Z^n \times Z^m) \in (Z^{n+m})$.

Пусть далее (z_n) и (z_{n+m}) классы всех n и $(n+m)$-мерных Δ-циклов, таких, что для z_n, z_{n+m} из (z_n), (z_{n+m}) и Z^n, Z^{n+m} из (Z^n), (Z^{n+m}).

$$Z^n \times z_n \neq 0,$$

$$Z^{n+m} \times z_{n+m} \neq 0.$$

Из приведенного следствия теоремы о снятии следует: класс (z_n) подчинен классу (z_{n+m}) посредством класса (Z^m).

Если задан в M K-класс (z_n), то он является и K-классом гомотопии. Если задана в M функция $f(a)$ и

$$c = \inf_{a \in (z_n)} f(a),$$

то c есть критическое значение, т. е. $(f = c)$ содержит непустое K-критическое множество (следствие теоремы 1). Критическое значение c будем называть порожденным классом (z_n).

Докажем сейчас обобщение теоремы 4 на случай компакта M.

Теорема 5 (основная). Пусть $f(a)$ заданная на M функция, (z_n) и (z_{n+m}) классы n и $(n+m)$-мерных Δ-циклов, причем класс (z_n) подчинен (z_{n+m}) посредством ∇-класса (Z^m); пусть далее c_n и c_{n+m} порожденные классами $z_n)$ (z_{n+m}) K-критические значения:

$$c_n = \inf_{z_n \in (z_n)} \sup_{a \in z_n} f(a),$$

$$c_{n+m} = \inf_{z_{n+m} \in (z_{n+m})} \sup_{a \in z_{n+m}} f(a).$$

Если $c_n = c_{n+m} = c$, то K-критическое множество A на $(f = c)$ содержит m-мерный негомологичный нулю Δ-цикл z_m, для которого $z_m \times Z^m \neq 0$.

Критические значения c_n и c_{n+m} связаны соотношением $c_n \leqslant c_{n+m}$. Теорема гласит, что если это неравенство переходит в равенство, то соответственная слившаяся поверхность уровня содержит критическое множество размерности не меньше m.

Итак, пусть $c_n = c_{n+m} = c$ и пусть A есть K-критическое множество на поверхности уровня $(f = c)$. Если для любого m-мерного Δ-цикла z_m из A, вопреки утверждению теоремы, $z_m \times Z^m = 0$, то цикл Z^m можно снять с A, т. е. существует некоторый цикл $\overline{Z}^m$ того же класса (Z^m), носитель которого лежит вне $S(A, \varepsilon)$, где ε — некоторое положительное число. Существует такое число $\alpha > 0$, что любое K-множество из $(f \leqslant c + \alpha)$ может быть K-деформацией сведено в $(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon)$. По определению, $c = c_{n+m}$, в $(f \leqslant c + \alpha)$ существует цикл z_{n+m} класса (z_{n+m}). Путем K-деформации он будет переведен в цикл $\overline{z}_{n+m}$ того же класса (z_{n+m}), лежащий в $(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon)$. В теоретико-множественном пересечении носителя $\overline{Z}^m$ из (Z^m) и $\overline{z}_{n+m}$ из (z_{n+m}) находится цикл z_n из класса (z) [по определению подчиненности классов (z_n) и (z_{n+m}) посредством класса (Z^m)].

Но так как $\overline{z}_{n+m}$ лежит в $(f \leqslant c - \alpha) + S(A, \varepsilon)$, а носитель $\overline{Z}^m$ вне $S(A, \varepsilon)$, то z_n лежит в $(f \leqslant c - \alpha)$:

$$\sup_{a \in z_n} f(a) \leqslant c - \alpha = c_n - \alpha < c_n,$$

а это противоречит определению c_n. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример.* *Задача с подвижными концами на плоскости.* Рассмотрим на плоскости замкнутую кривую p с всюду непрерывной кривизной и точку A внутри p.

Совокупность спрямляемых плоских дуг с началом в A и концом в p образует пространство T, которое можно метризовать, приняв за расстояние в смысле Фреше. Пусть длина кривой q из T равна $l(q)$.

Введем на кривой q параметр t так, что, когда точка, двигаясь по кривой q от A, описывает путь длины s, конец a_q^t этого пути отвечает значению параметра $t=\frac{1}{l(q)}\cdot s$; при $t=1$, a_q^1 есть конец кривой q, лежащий на кривой p, $a_q^0=A$. Назовем K-множеством в T замкнутое множество кривых q из T, на которых точки a_q^t непрерывно зависят от кривой q и параметра t. Например, замкнутое множество кривых ограниченной кривизны или замкнутое множество полигонов с ограниченным числом сторон суть K-множества.

Всякое K-множество M из T можно непрерывной деформацией перевести в множество прямолинейных отрезков. Пусть $r\in M$ и $a^1{}_r$ конец r, (лежащий на p). Обозначим через D_r прямолинейный отрезок с началом в A и концом $a^1{}_r$; параметр t на D_r выбран согласно принятому для кривых $q\in T$ правилу. Соединим каждую точку a_r^t кривой r с точкой $a^t_{D_r}$ соответственного отрезка D_r прямолинейным путем $\overline{a^t{}_r\, a^t_{D_r}}$. Деформация D заключается в движении каждой точки $a^t{}_r$ кривой r по отрезку $\overline{a_r^t\, a^t_{D_r}}$, по направлению $a^t_{D_r}$ со скоростью, пропорциональной длине последнего, так что в единицу времени эта точка совместится с $a^t_{D_r}$, и кривая r перейдет в отрезок $Dr=D_r$, а множество M в множество DM таких прямолинейных отрезков.

Пусть Dr не есть нормаль к p. Тогда один из двух касательных к p лучей, выходящих из точки $c=a^1_{D_r}$, который обозначим через n, образует с Dr острый угол α. Будем перемещать отрезок $Dr=\overline{Ac}$, оставляя неизменным его начало A, а конец c перемещая по кривой p в направлении касательного луча n со скоростью, пропорциональной $\cos\alpha$ — косинусу угла между отрезком и этим направлением касательной. При этом длина $l(Ac)$ отрезка Ac будет убывать. Скорость будет стремиться к нулю по мере приближения $\overline{Ac}$ к нормали k кривой p, проведенной из A. Отрезки $\overline{Ad}$, нормальные к p, оставим неподвижными. Продолжая такое движение в течение некоторого промежутка времени, мы уменьшим длины всех отрезков $\overline{Ac}$, не являющихся нормальными к p. Такое перемещение есть непрерывная деформация D_1. Последовательное применение операции D и D_1 есть деформация $D_1\, D$, сохраняющая

* Разбираемый пример приводится с иллюстративной целью.

неизменными нормали к кривой p и уменьшающая длины всех остальных кривых из M.

Пусть M_0 есть множество нормалей к p, проведенных из A. Можно определить для каждого $\varepsilon > 0$ такое $\varepsilon_1 > 0$, что кривые q, удаленные от какой-нибудь нормали из M_0 не больше чем на ε_1, удалятся от этой нормали не больше чем на ε.

Далее, можно определить такое α, что кривые из M, удаленные от нормали к p больше чем на ε, уменьшат свою длину при операции $D_1 D$ не меньше чем на 2α. Далее, наложим на α требование, что все нормали из M_0, длины которых заключены между $c - \alpha$ и $c + \alpha$, расположены в $S(M_l^0, \varepsilon)$, где M_l^0 совокупность нормалей длины l, $M_l^0 \in (l = l)$. Отсюда следует: функционал l обладает K-свойством и критическое множество на $(l = l)$ содержится во множестве нормалей к p длины l.

В самом деле, пусть T' есть множество дуг, из T, заключенных в $(c - \alpha < l < c + \alpha)$; после деформации $D_1 D$ оно перейдет в множество, заключенное в $(l \leqslant c - \alpha) + S(M_l^0, \varepsilon)$.

Выберем теперь точку B внутри p, отличную от A. Пусть q_1 и q_2 две кривые из T, не проходящие через B, такие, что $\rho(q_1, q_2) < \alpha$, где α — достаточно малое положительное число, выбранное так, что точки $a_{q_1}^1$ и $a_{q_2}^1$ на p удалены друг от друга на расстояние меньшее ε.

При достаточно малом ε точки $a^1_{q_1} = d_1$, $a^1_{q_2} = d_2$ ограничивают на p две дуги, одна из которых по длине меньше $\frac{1}{3}\, l(p)$. Обозначим ее через $\overset{\frown}{d_1 d_2}$. Обозначим через $f_1^\alpha(q_1, q_2, B)$ функцию, равную порядку обхода по модулю 2 точки B кривой $q_1 + \overset{\frown}{d_1 d_2} - q_2$.

Система функций $f_1^\alpha(q_1, q_2, B)$ определяет на T одномерный верхний цикл Z_B^1; (Z^1) — класс гомологий для Z_B^1.

Совокупность прямолинейных отрезков, соединяющих A с точками p, образует на T одномерный Δ-цикл z_1; индекс пересечения $z_1 \times Z^1 = 1$.

Обозначим через (z_1) совокупность всех Δ-циклов класса z_1 т. е. гомологичных z_1 (гомологии будем брать по модулю 2), через (z_0) — совокупность всех отдельных элементов из T, т. е., если угодно, совокупность нульмерных циклов, не гомологичных нулю. Очевидно, если на T задана функция $l(q)$ и

$$c_1 = \inf_{z_i \in (z_i)} \sup_{q \in z_i} l(q), \quad i = 0.1,$$

то c_0 есть просто нижняя граница $l(q)$. Очевидно, $c_0 \leqslant c_1$; так как c_0 и c_1 суть K-критические значения (см. § 1), т. е. $(l = c_0)$ и $(l = c_1)$ должны содержать непустые K-критические множества, а значит, непустые множества нормалей к кривой p длины c_0 и c_1.

Класс (z_0) подчинен классу $(\bar{z}_1)$ посредством Z^1.

Если $c_0 = c_1 = c$, то $(l = c)$ содержат одномерный цикл $\bar{z}_1$, состоящий из нормалей, опущенных из A на p, длины l, $\bar{z}_1 \times Z^1 = 1$ (в силу основной теоремы), $\bar{z}_1$ негомологичны нулю по модулю 2; семейство отрезков, соединяющих A с p и не содержащее всех отрезков, может быть непрерывной деформацией в сведении к одному отрезку и поэтому не содержит негомологичных в T циклов. Поэтому, если совокупность нормалей длины c содержит одномерный негомологичный нулю цикл $\bar{z}_1$, то все отрезки, соединяющие A с точками p, суть нормали, опущенные из A на p длины c, т. е. p есть окружность с центром в A и радиуса c. Эти результаты можно получить, конечно, элементарными рассуждениями. Мы привели эти рассуждения лишь как типичные, встречающиеся при решении более сложных задач.

ГЛАВА II

Применение к нелинейным интегральным уравнениям

§ 6. Однородные операторы

Как известно, интегральное уравнение Фредгольма с позитивным симметрическим ядром имеет счетное число положительных собственных значений, стремящихся к нулю. В формулировке этой теоремы нельзя отказаться от условия позитивности, тем более симметричности. Но зато можно отказаться от условия линейности, заменив его более общим условием нечетной однородности или просто нечетности. Нечетно-однородные уравнения мы рассматривали в нашей работе [6]; сейчас мы дадим более полную теорию этих уравнений как иллюстрацию общих методов. (Применение к этим уравнениям теории категорий дано в работе Цитланадзе [1].) Для вполне непрерывного симметрического позитивного линейного оператора L в гильбертовом пространстве существует счетное число нормированных собственных элементов

$$La_n = \lambda_n a_n,$$

где

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots, \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n \to 0.$$

Если $\lambda_n = \lambda_{n+p} = \lambda$, то кратному собственному значению λ отвечает p-мерная сфера нормированных собственных элементов.

Будем рассматривать теперь нелинейные операторы L. Оператор L назовем вполне непрерывным, если он отображает произвольное ограниченное множество в вещественном гильбертовом пространстве H в компактное и удовлетворяет условию Липшица:

$$\| Lb' - Lb \| \leqslant M \| b' - b \|, \ M \text{ — константа.}$$

Пусть в H дан функционал f. Дифференциал $df(a, h)$ от f в точке a при приращении h называют

$$df(a; h) = \frac{d}{dt} f(a + th)|_{t=0}, \tag{1}$$

если правая часть существует и представляет линейный функционал от h. В этом случае существует такой элемент $g \in H$, что

$$df(a; h) = (g, h).$$

Здесь элемент g зависит от a: $g = La$,

$$df(a, h) = (La, h). \tag{2}$$

Оператор La, порождаемый дифференцированием функционала f, естественно называть симметрическим. В случае линейного симметрического оператора последний порождается дифференцированием квадратического функционала.

Позитивным оператором будем называть такой, для которого при $a \neq 0$, $(La, a) > 0$.

Пусть теперь $f(a)$ однородный четный функционал порядка k, т. е.

$$f(-a) = f(a),$$

и при

$$\lambda > 0, \ f(\lambda a) = \lambda^k f(a).$$

В этом случае, если La — порождаемый дифференцированием $f(a)$, оператор, то

$$L(-a) = -La;$$

при $\lambda > 0$, $L(\lambda a) = \lambda^{k-1} La$. La — нечетно однородный оператор порядка $k-1$. Будем полагать $k > 1$.

Для однородных функций порядка k имеет место аналог теоремы Эйлера

$$(La, a) = kf(a). \tag{3}$$

В самом деле, $df(a, h) = (La, h)$. Отсюда

$$(La, a) = df(a; a) = \frac{d}{dt} f(a + ta)|_{t=0} =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}(1+t)^k\right]_{t=0} f(a = kf(a).$$

Будем рассматривать нормированные собственные элементы a оператора L:

$$La = \lambda a, \quad \|a\| = 1 \tag{4}$$

и соответственные собственные значения λ.

Если La порождается дифференцированием однородной функции $f(a)$ порядка k, то из (3) и (4) следует

$$kf(a) = (La, a) = \lambda(a, a) = \lambda.$$

Будем обозначать

$$f_1(a) = kf(a) = (La, a),$$

имеет место:

Теорема 1. Пусть La вполне непрерывный, симметрический нечетно-однородный позитивный оператор в гильбертовом пространстве H. Существует последовательность положительных собственных значений λ_n оператора L:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots, \quad \lambda_n > 0,$$

стремящаяся к нулю. Если $\lambda_n = \lambda_{n+p} = \lambda$, то кратному собственному значению λ отвечает p-мерная система нормированных собственных значений.

Последнюю часть этой теоремы мы уточним ниже. Ниже, в этом параграфе и последующем § 7, дается доказательство этой теоремы.

Ортогональные траектории

Будем обозначать через $[b(t)]_0^\alpha$ сильно непрерывный образ в H сегмента $[0 \leqslant t \leqslant \alpha]$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{db(t)}{dt} = B(b(t)), \tag{5}$$

где B — оператор в H, удовлетворяющий в области $S(b_0, h)$ условию Липшица

$$\| B(b') - B(b'') \| < N \| b' - b'' \|,$$

и где N — положительная константа.

Имеет место теорема существования:

Существует и притом единственное решение $[b(t)]_0^\alpha$ уравнения (5), лежащее в $S(b_0, h)$ с любым начальным условием $b(0) = b_1$, где

$$b_1 \in S\left(b_0, \frac{h}{2}\right),$$

α определяется h и N. При этом $b(t)$ для сегмента $[0, \alpha]$ равномерно непрерывно зависит от начальных значений $b(0)$.

Доказательство этой теоремы есть непосредственное обобщение доказательства аналогичной теоремы для n-мерного случая методом Пикара. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{db(t)}{dt} = L\,b(t) - f_1(b(t))\,b(0). \tag{6}$$

Правая часть этого уравнения в сфере $\| b \| < 2$ удовлетворяет условиям Липшица. В самом деле, пусть $\| b' \| < 2$, $\| b'' \| < 2$; имеем

$$\| Lb' - f_1(b')\,b' - Lb'' + f_1(b'')\,b'' \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Lb' - Lb'' \| + | f_1(b') - f_1(b'') |\, \| b' \| + | f(b'') | \cdot \| b' - b'' \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Lb' - Lb'' \| + | (Lb', b') - (Lb'', b'') | \cdot \| b' \| +$$

$$+\|Lb''\|\cdot\|b''\|\cdot\|b'-b''\|\leqslant\|Lb'-Lb''\|+\|b'\|\cdot\|Lb'-Lb''\|+$$
$$+\|Lb''\|\cdot\|b'-b''\|+\|Lb''\|\cdot\|b''\|\cdot\|b'-b''\|=$$
$$=\|Lb'-Lb''\|(1+\|b'\|)+\|b'-b''\|\cdot\|Lb''\|(1+\|b''\|).$$

Если обозначить через R максимум $\|Lb\|$ в сфере $\|b\|\leqslant 2$ и вспомнить, что

$$\|b'\|\leqslant 2,\ \|b''\|<2,\ \text{и}\ \|Lb'-Lb''\|\leqslant M\|b'-b''\|,$$

то из предыдущего будет следовать

$$\|(Lb'-f_1(b')b')-(Lb''-f_1(b'')b'')\|\leqslant(3M+2R)\ \|b'-b''\|,$$

т. е. правая часть нашего уравнения удовлетворяет условию Липшица. А значит существуют интегральные кривые $[b(t)]_0^\alpha$ этого уравнения в сфере $\|b\|<2$ с любыми начальными значениями $b(0)$, где $\|b(0)\|=1$, и эти решения равномерно на сегменте $[0,\alpha]$ зависят от начальных значений.

Пусть $\Psi(t)=1-\|b(t)\|=1-(b(t),\ b(t)$. Имеем

$$\Psi'(t)=-2\left(b(t),\ \frac{db(t)}{dt}\right)=-2[Lb(t),b(t)]-$$
$$-2f_1(b(t))\|b(t)\|=-2f_1(b(t))[1-\|b(t)\|]=-2f_1(b(t))\Psi(t).$$

Если для какого-нибудь t, $\|b(t)\|=1$, то $\Psi(t)=0$. В сфере

$$\|b\|<2,\ \|f_1(b)\|=\|Lb,b\|\leqslant\|Lb\|\cdot\|b\|\leqslant 2N$$

и поэтому решение уравнения

$$\Psi'(t)=-2f_1(b(t))\Psi(t)$$

при начальном значении $\Psi(0)=0$ есть $\Psi(t)\equiv 0$. Поэтому, если точка $b(0)$ принадлежит S, $\|b(0)\|=1$, $\Psi(0)=0$, то $\Psi(t)\equiv 0$, $\|b(t)\|=1$, и вся кривая $b(t)$ принадлежит S.

Так как вместе с $[b(t)]$ и кривая $[-b(t)]$ удовлетворяет уравнению (6), то можно говорить, что $[b(t)]$ есть кривая на P.

Далее

$$\frac{d}{dt}f_1[b(t)]=\left(Lb(t),\frac{db(t)}{dt}\right)=(Lb(t),Lb(t))-f_1(b(t))(Lb(t),b(t))=$$
$$=(Lb(t)\,Lb(t))-[Lb(t),b(t)]^2.$$

В силу $(b(t),(b(t))=1$ и неравенства Шварца, правая часть равенства всегда неотрицательна и лишь тогда равна нулю, когда $b(t)$ — собственный элемент. Кривые $[b(t)]$ будем называть ортогональными траекториями к поверхности уровня $f_1=c$, причем параметр t возрастает на нем вместе с возрастанием f_1. Если $b(0)$ есть собственный элемент, то кривая $[b(t)]$ вырождается в точку $b(0)$.

§ 7. Компактные части проективного пространства P

Компактные множества на P. Условием того, что множество A компактно в H, является существование последовательности числа $\alpha_n > 0$, такое, что $\alpha_n \to 0$ и для любого $a \in A$, $\|R_n a\| \leqslant \alpha_n$; если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, где a_i — компоненты a в H, то

$$R_n a = (0, 0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots).$$

Так как La вполне непрерывный оператор, то для любого $a \subset S$

$$\| R_n La \| \leqslant \alpha_n, \tag{7}$$

где α_n — фиксированная последовательность положительных чисел и $\alpha_n \to 0$.

Рассмотрим на S или P область $(f_1 \geqslant c)$, где $c > 0$. Если a собственный элемент из этой области, $La = \lambda a$, $\lambda = f_1(a) \geqslant c$ и в силу (7)

$$\left\|R_n a\right\| = \frac{1}{\lambda}\left\|R_n La\right\| \leqslant \frac{1}{c}\left\|R_n La\right\| \leqslant \frac{\alpha_n}{c}. \tag{8}$$

Выберем α_n подпоследовательность α_{n_k}, так что $\sum \alpha_{n_k}$ сходятся (например, $\alpha_{n_k} \leqslant \frac{1}{2^k}$). Обозначим через P_c компактное множество в P (или S), определяемое системой неравенств

$$f_1 \geqslant c, \quad \left\|R_{n_k}\right\| \leqslant \frac{2\alpha_{n_k}}{c}, \tag{9}$$

причем ограничимся теми неравенствами, в которых $\alpha_{n_k} < \frac{c}{2}$ (остальные удовлетворяются автоматически), так как всегда

$$\|R_n a\| \leqslant \|a\| = 1.$$

В силу (8) все собственные элементы, лежащие в $(f_1 \geqslant c)$, принадлежат P_c.

Пусть n_i есть наименьшее из чисел n_k в (9), таких, что $\alpha_{n_k} < \frac{c}{2}$. Положим $n \geqslant n_i$, так что

$$\|R_n La\| \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n_i} < \frac{c}{2}. \tag{10}$$

Для каждого a, где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, будем обозначать

$$A_n a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно

$$a = A_n a + R_n a.$$

Если

$$a \in (f_1 \geqslant c),$$

то

$$(La, a) = f_1(a) \geqslant c.$$

Но

$$(La, a) = (A_n La, A_n a) + (R_n La, R_n a),$$

$$(R_n La, R_n a) \leqslant \| R_n La \| \; \| R_n a \| \leqslant \frac{c}{2} \cdot 1 \leqslant \frac{c}{2},$$

поэтому

$$(A_n La, A_n a) = (La, a) - (R_n La, R_n a) > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}, \tag{11}$$

откуда

$$\| A_n(a) \| \neq 0,$$

если

$$a \in (f_1 > c).$$

Деформация D

Выберем теперь $m \geqslant n_i$, где n_i только что определено.

Определим деформацию D_m:

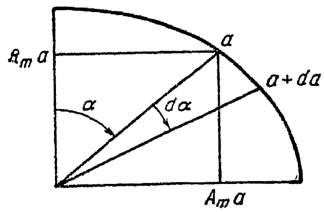

Рис. 1.

1) Если $\| R_m a \| \leqslant \frac{2\alpha_m}{c}$, то $D_m a = a$.

2) Пусть $\| R_m a \| \geqslant \frac{2\alpha_m}{c} > 0$,

причем первые два слагаемых отличны от 0. Мы убедились, что в $(f_1 > c)$

$$\| A_m(a) \| \neq 0.$$

Определим деформацию $D_m a$ элемента a следующим образом. Через Θ и оба ортогональных ненулевых элемента $A_m a$ и $R_m a$ проведем плоскость и в ней окружность q радиуса 1 с центром в Θ. Элемент a лежит на q (рис. 1). Деформация D_m для элемента a будет заключаться в движении элемента a по окружности q в сторону уменьшения нормы компоненты $R_m a$, пока она не станет равной $\frac{2\alpha_m}{c}$.

Если элемент a движется по q, описывая дугу $d\alpha > 0$ в сторону уменьшения $\| R_m a \|$, то

$$da = \left(A_m(a) \frac{\| R_m a \|}{\| A_m a \|} - R_m a \frac{\| A_m a \|}{\| R_m a \|} \right) d\alpha. \tag{12}$$

Если β есть часть дуги q, заключенная между a и $\frac{A_m(a)}{\|A_m a\|}$, то $\sin\beta = \| R_m a \|$.

Так как $\beta < 2\sin\beta = 2\| R_m a \|$, а сдвиг элемента a при деформации D_m не превосходит β, то

$$\| D_m a - a \| \leqslant \| R_m a \|.$$

Определенная таким образом операция D_m есть деформация, обладающая следующими свойствами:

$$1)\quad \text{если } b = D_m a, \text{ то } \|R_m b\| \leqslant \frac{2\alpha_m}{c};$$

$$2)\quad \|b-a\| \leqslant \|R_m a\|;$$

$$3)\quad f_1(b) = f_1(D_m a) \geqslant f_1(a). \tag{13}$$

В самом деле, если a получает дифференциальное приращение da, определенное по формуле (12) при $d\alpha > 0$, то

$$df_1(a, da) = (La, da) = (A_m La, A_m da) + (R_m La, R_m da) =$$

$$= \left[(A_m La, A_m a)\frac{\|R_m a\|}{\|A_m a\|} - (R_m La, R_m a)\frac{\|A_m a\|}{\|R_m a\|}\right] d\alpha.$$

Так как [см. (11)]

$$(A_m La, A_m a) > \frac{c}{2}, \quad \|A_m a\| \leqslant \|a\| = 1,$$

$$(R_m La, R_m a) \leqslant \|R_m La\| \cdot \|R_m a\| \leqslant \alpha_m \|R_m a\| \quad \text{[см. (9)]},$$

то

$$df_1(a, da) \geqslant \left(\frac{c}{2}\|R_m a\| - \alpha_m\right) d\alpha,$$

откуда, если $\|R_m a\| \geqslant \frac{2\alpha_m}{c}$,

$$df_1(a, da) \geqslant 0.$$

Таким образом, при описанном движении по окружности q функция f_1 возрастает, пока $\|R_m a\|$ остается большим $\frac{2\alpha_m}{c}$. Отсюда из определения деформации D_m и следует (13).

Применим теперь к элементу a из $(f_1 \leqslant c)$ последовательно операции $D_{n_{i+1}}, D_{n_{i+2}}, \ldots, D_{n_k}, \ldots$ (при всех $k > i$).

Обозначим

$$a_k = D_{n_k} D_{n_{k-1}} \ldots D_{n_{i+1}} a = D_{n_k} a_{k-1}.$$

Так как

$$a_{k-1} = D_{n_{k-1}} a_{k-2} \quad \text{и} \quad \left\|R_{n_{k-1}} a_{k-1}\right\| \leqslant \frac{2\alpha_{n_{k-1}}}{c},$$

$$\left\|R_{n_k} a\right\| \leqslant \left\|R_{n_{k-1}} a\right\| \leqslant \frac{2\alpha_{n_{k-1}}}{c},$$

то, в силу приведенного выше свойства D_m, сдвиг

$$\|a_k - a_{k-1}\| \leqslant \frac{2\alpha_{n_{k-1}}}{c}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} \frac{2\alpha_{n_k}}{c}$ сходится, а вместе с ним сходится абсолютно и ряд $\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$.

Последовательность

$$a_k = D_{n_k} D_{n_{k-1}} \ldots D_{n_{i+1}} a$$

сходится равномерно во всей области $a \in (f_1 \geqslant c)$.

Пусть $a_k \to a_\omega$.

Операция D:

$$Da = a \;\; = \lim_{k \to \infty} \left(D_{n_k} D_{n_{k-1}} \ldots D_{n_{i+1}} a \right)$$

есть непрерывная деформация области $(f_1 \geqslant c)$. Так как у элемента

$$a_\omega = Da, \quad \| R_{n_k} Da \| \leqslant \frac{2\alpha_{n_k}}{c},$$

то Da входит в компакт P_c. Далее,

$$f_1(Da) \geqslant f_1(a) \geqslant c. \tag{14}$$

Итак, операция D превращает все $(f_1 \geqslant c)$ в компактную часть

$$P_c \in (f_1 \geqslant c)$$

этой области, при этом P_c остается неизменным при этой деформации.

Операция D^n. В следующем параграфе нам понадобится операция, родственная D_n. Пусть z_k означает проективное k-мерное пространство, именно k-мерную единичную сферу $R_{k+2} a = \Theta$, $\| a \| = 1$ с иденцифицированными противоположными элементами.

Далее, пусть l_i есть i-ый единичный координатный вектор:

$$A_{i-1} l_i = \Theta, \quad A_i l_i = l_i, \quad R_{i-1} l_i = l_i.$$

Пара $(l_i, -l_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n+1$ входит в z_n. Далее,

$$f(l_i) = (Ll_i, l_i) = (R_{i-1} Ll_i, R_{i-1} l_i) \leqslant \|R_{i-1} l_i\| \; \|R_{i-1} Ll_i\| \leqslant$$
$$\leqslant \| R_{i-1} Ll_i \| \leqslant \alpha_i.$$

Если $c \geqslant \alpha_i$, то l_i не входит в $(f_1 \geqslant c)$, а значит и z_i не входит в $(f_1 \geqslant c)$.

Далее, при фиксированном c в области $(f_1 \geqslant c)$, и, в частности, в P_c, $\| R_n a \| < d < 1$ при достаточно большом n. Определим операцию D^n, переводящую область $(f_1 \geqslant c)$ в часть z_n. Именно, если $R_n a = \Theta$ и, следовательно, $a \in z_{n-1}$, оставим a неподвижным. Если $R_n a \neq 0$, проведем плоскость через элементы $\Theta, A_n a, R_n a$ и в ней окружность единичного радиуса с центром в Θ, на которой лежит a. Операция D^n будет заключаться в движении a по этой окружности в направлении уменьшения $\| R_{n+1} a \|$, пока эта проекция не станет равной нулю, т. е. пока a не попадет в $z_{n-1} : D_n a \in z_{n-1} \cdot D^n$ есть деформация, переводящая $(f_1 \geqslant c)$ и, в частности, P_c, в z_{n-1}. При достаточно малом $c' > 0$, z_{n-1} заключено в $P_{c'}$, и операция D^n переводит P_c в его часть z_n внутри $P_{c'}$.

Операция G. Определим следующую операцию G компакта P_c.

1) если a есть собственный элемент, заключенный в P_c,

$$Ga = a;$$

2) если $a \in P_c$ не есть собственный элемент, то через a можно провести нормальную траекторию $[b(t)]_0^{t_1}$, удовлетворяющую уравнению (6) и начальному условию $b(0) = a$.

Как было выше доказано, при $t > 0, f_1(b(t)) > f_1(b(0))$.

Фиксировав $t_0 > 0$, обозначим через a_t, при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $a_t = D[b_a(t)]$. Очевидно $a_0 = Db(0) = Da = a$, (так как $a \in P_c$ и операция D не меняет P_c; положим для a — несобственного элемента

$$Ga = a_{t_0} = D[b_a(t_0)].$$

Имеем [см. (14)]

$$f_1[Ga] = f_1[D(b_a(t_0))] \geqslant f_1(b_a(t_0)) \geqslant f_1(b_a(0)) = f_1(a),$$

причем, если a не есть собственный элемент, $b_a(t_0) \neq b_a(0) = a$,

$$f_1(b_a(t_0)) > f_1(a) \text{ и } f_1[Ga] \geqslant f(a).$$

Итак, G есть деформация P_c в собственную часть, не меняющая собственных элементов и увеличивающая значения f_1 в остальных элементах P_c.

Пусть $\lambda > c$.

Лемма 1. Критическое множество на поверхности уровня $(f_1 = \lambda)$ *в* P_c *содержится в множестве* A *собственных элементов, отвечающих собственному значению* λ [*все эти элементы лежат на* $(f_1 = \lambda)$].

Во время деформации G множество A не меняется. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\varepsilon_1 > 0$, что элементы из $S(A, \varepsilon_1)$ остаются после операции G в $S(A, \varepsilon)$.

Выберем $\delta > 0$ таким, что собственные элементы из $(\lambda - \delta \leqslant f_1 \leqslant \lambda + \delta)$ лежат внутри $S(A, \varepsilon_1)$. Далее, можно выбрать такое $\alpha > 0$, что элементы P_c, лежащие в области $(\lambda - \delta \leqslant f_1 \leqslant \lambda + \delta)$ вне $S(A, \varepsilon_1)$, увеличивают значения f_1 при операции G на

$$2\alpha = \min \{f_1(Ga) - f_1(a)\}$$

$$a \in \{P_c \times (\lambda - \delta \leqslant f_1 \leqslant \lambda + \delta)\}$$

(так как множество, на котором рассматривается положительная функция $f_1(Ga) - f_1(a)$, компактно, то ее минимум 2α положителен). Пусть α_1

меньшее из двух чисел α и δ. Вся часть P_c, лежащая в области $(\lambda-\alpha_1\leqslant f_1)$, переходит при операции G в часть P_c, лежащую в $(\lambda+\alpha<f_1)+S(A,\varepsilon)$. В самом деле, если $a\in S(A,\varepsilon_1)$, он останется в $S(A,\varepsilon)$. Если a лежит вне $S(A,\varepsilon)$, в $(\lambda-\alpha_1\leqslant f_1\leqslant\lambda+\alpha_1)$, то $f(a)$ получает приращение, не меньшее $2\alpha_1$, и a переходит в $(f_1\geqslant\alpha_1)$. Если a лежало в $(f_1\geqslant\lambda+\alpha_1)$, то оно останется в этой области

Тем самым лемма доказана (в силу определения критического множества).

§ 8. Гомологии в P и их применения

∇-циклы. Пусть даны два элемента $(a,-a)$ и $(b,-b)$ в P. Расстояние между ними в P есть меньшее из чисел $\|a-b\|$, $\|a+b\|$. Пусть это расстояние меньше $\varepsilon<\frac{1}{2}$ и, например, $\|a-b\|<\varepsilon$.

Обозначим через $f_i^0(a,b)$ функцию от a, b, для которой $\|a-b\|<\varepsilon$, равную 0, если i-ые координаты элементов a и b имеют равные знаки, и 1, если они имеют разные знаки. Так как $f_1^\varepsilon(a,b)=f_1^\varepsilon(-a,-b)$, то f_1^ε есть функция от пары элементов проективного пространства P, определяющая в нем одномерный ∇-цикл X_i^1. Все X_i^1 ∇-гомологичны между собою.

Обозначим через (X^1) совокупности всех циклов, ∇-гомологичных X^1_i в P. При этом под ∇-гомологией в P мы понимаем ∇-гомологию mod 2 во всех P_c при любых достаточно малых c.

Проективные пространства z_n суть n-мерные Δ-циклы во всех P_c, куда они входят.

Обозначим, далее, через $X^n=X_1^1\times X_2^1\times\ldots\times X_n^1$ n-мерный ∇-цикл, произведение в смысле Александера n циклов из класса (X^1). Через (X^n) обозначим класс ∇-циклов, ∇-гомологичных X^n.

Пусть Δ-цикл x_n входит в P_c и $P_{c'}$. Индекс пересечения $x_n\times X^n$ в P_c и $P_{c'}$ один и тот же. Будем поэтому говорить просто об индексе пересечения $x_n\times X^n$.

Обозначим через (x_n) класс Δ-циклов из любых P_c, для которых $x_n\times X^n\neq 0$.

Лемма 2. Проективное пространство z_n входит в класс (x_n).

Для $n=1$ непосредственно убеждаемся: $X_1^1\times x_1=1$. Найдем

$$X^n\times z_n=(X_1^1\times X_2^1\times\ldots\times X_n^1)\times z_n.$$

Пусть ∇-цикл X_i^1 индуцирует в проективном пространстве z_n одномерный ∇-цикл $\overline{X}_i^1$, $i=1,2\ldots,n$. Так как $X_i^1\times z_1=1$, то циклы $\overline{X}_i^1$ суть одномерные ∇-циклы в z_n, двойственные в нем проективной прямой; поэтому одномерный ∇-цикл $\overline{X}_i^1$ эквивалентен в z_n $(n-1)$-мерной проективной гиперплоскости. И индекс произведения $(\overline{X}_1^1\times\overline{X}_2^1\times\ldots\times\overline{X}_n^1)\times z_n$ в z_n

равен индексу пересечения n таких $(n-1)$-мерных гиперплоскостей в z_n, т. е. 1.

Итак

$$X^n \times z_n = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Каждый цикл x_n класса (x_n) гомологичен в P проективному пространству z_n.

Пусть $x_n \in P_c$. Для некоторого c', $0 < c' < c$, $\overline{P}_{c'} \in z_k$, $k \geqslant n$ и путем непрерывной деформации в $P_{c'}$ P_c переходит в z_k. При этом x_n переходит в Δ-цикл $\bar{x}_n$ из z_k, Δ-гомологичный x_n в P_c. Так как $X^n \times x_n = 1$, то $X^n \times \bar{x}_n = 1$, и этот индекс пересечения равен 1 и в z_k. Поэтому x_n негомологично нулю в z_k, но всякий негомологичный нулю n-мерный Δ-цикл в проективном пространстве z_k гомологичен в нем z_n. Тем самым $\bar{x}_n$, а значит и x_n, гомологично z_n.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Пусть

$$\lambda_n = \sup_{x_n \in (x_n)} \min_{a \in x_n} f_1(a). \tag{15}$$

Если $0 < c < \lambda_n$, то $(f_1 \geqslant c)$ содержит циклы x_n класса (x_n).

Путем непрерывной деформации $(f_1 \geqslant c)$ переходит в компакт P_c, причем значения функции $f_1(a)$ при этой деформации не убывают. Цикл x_n из $(f_1 \geqslant c)$ перейдет при этом в цикл $\bar{x}_n$ того же класса (x_n), из P_c.

Обозначим через $(x_n)_c$ совокупность всех циклов из (x_n), лежащих в P_c. Класс $(x_n)_c$ непустой. Обозначим

$$(\lambda_n)_c = \sup_{x_n \in (x_n)_c} \min_{a \in x_n} f_1(a); \tag{16}$$

имеем

$$(\lambda_n)_c = \lambda_n.$$

В самом деле, поскольку класс $(x_n)_c$ есть часть класса x_n, из формул (15) и (16) следует

$$\lambda_n \geqslant (\lambda_n)_c.$$

Далее, в определении λ_n по формуле (15) достаточно ограничиться теми x_n из (x_n), которые лежат в $(f_1 \geqslant c)$. Но при деформации D каждое такое x_n переходит в x'_n из класса $(x_n)_c$, причем

$$\min_{a \in x'_n} f_1(a) \geqslant \min_{a \in x_n} f_1(a)$$

(в силу того, что значения функции f_1 не убывают при операции D). Отсюда $\lambda_n \leqslant (\lambda_n)_c$.

Итак, $\lambda_n = (\lambda_n)_c$ есть критическое значение функции f на компакте P_c, определяемое классом $(x_n)_c$. Поэтому $(f_1 = \lambda_n)$ должно содержать непустое критическое множество, которое в силу леммы 1 состоит из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ_n.

Итак, существование последовательности λ_n доказано. Очевидно,

$$\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n, \quad \lambda_n > c > 0.$$

Докажем, что $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$. самом деле, пусть существует такое $c > 0$, что все $\lambda_n > c$. Тогда при любом n множество $(f \geqslant c)$, а значит и P_c, содержало бы циклы класса (x_n). Но существует такое k, что путем деформации в некотором $P_{c'}$, $0 < c' < c$, P_c деформируется в z_k. При этой деформации цикл x_{k+1} класса (x_{k+1}), заключенный в P_c, переходит в цикл $\bar{x}_{k+1}$ того же класса, заключенный в z_k. А значит для

$$X^{k+1} = (X_1^1 \times X_2^1 \times \ldots \times X_{k+1}^1), \quad X^{k+1} \times \bar{x}_{k+1} = 1$$

это произведение можно рассматривать в k-мерном проективном пространстве z_k, и мы придем к противоречию: произведение $(k+1)$ одномерных ∇-циклов в z_k обязательно гомологично нулю, и этот индекс должен равняться 0.

Итак, существование такого числа $c > 0$ ведет к противоречию, и $\lambda_n \to 0$.

Остается рассмотреть случай $\lambda_n = \lambda_{n+p} = \lambda$. Пусть $0 < c < \lambda$. В P_c мы имеем: λ есть критическое значение, порождаемое классами (x_n) и $(x_{n+p})_c$. Класс $(x_n)_c$ подчинен $(x_{n+p})_c$ посредством ∇-класса (X^p). В силу общей теоремы, критическое множество на $(f = \lambda)$ содержит p-мерный Δ-цикл x_p, такой, что $x_p \times X^p = 1$. По лемме (3) x_p гомологичен p-мерному проективному пространству z_p. Мы доказали последнюю часть теоремы 1 со следующим ее уточнением:

Если $\lambda_n = \lambda_{n+p} = \lambda$, то собственному значению λ отвечает множество нормированных собственных элементов, содержащее p-мерный цикл, гомологичный в P p-мерному проективному пространству.

§ 9. Нечетные операторы

Пусть $f(a)$ теперь означает четную непрерывную, но, вообще говоря, неоднородную функцию: $f(-a) = f(a)$; пусть $f(a)$ дифференцируема: $df(a, h) = (La, h)$. Оператор La, порождаемый дифференцированием f, есть симметрический оператор, притом нечетный: $L(-a) = -La$. Обозначим: $\psi(a) = (La, a)$. Положим: $\psi(a) > 0$ при $a \neq 0$ (L — позитивный оператор) и дополнительно: $f(a) \to 0$; если $\psi(a) \to 0$ и для каждого $\alpha > 0$ можно найти такое $\beta > 0$, что если $\psi(a) < \alpha$, то $f(a) < \beta$. При $a = \theta$, $f(\theta) = 0$.

Примечание: при $||a||=1, f(a)>0$. В самом деле, при $0<t\leqslant 1$,

$$\frac{d}{dt}f(ta)=\frac{df(ta, dt\cdot a)}{dt}=df(ta, a)=\frac{1}{t}df(ta, ta)>0.$$

$f(ta)$ возрастает при $0<t\leqslant 1$ и если $f(\theta)=0$, $f(ta)\underset{t\to 0}{\to} 0$, то $f(a)=f(1\cdot a)>0$.

Попрежнему будем называть нормированными собственными элементами элементы a, удовлетворяющие уравнениям: $La=\lambda a$, $||a||=1$, λ — соответственными собственными значениями.

Теорема 2. Пусть La нечетный симметрический позитивный вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий поставленному выше дополнительному условию. Существует последовательность положительных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, где $\lambda_n \to 0$ и для соответственных собственных элементов a_n числа $\mu_n=f(a_n)$ образуют стремящуюся к нулю невозрастающую положительную последовательность. Если $\mu_n=\mu_{n+p}=\mu$, то существует множество собственных элементов a, для которых $f(a)=\mu$, причем оно содержит p-мерный Δ-цикл, гомологичный в P p-мерному проективному пространству.[1]

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1. Рассмотрим область $(f>d>0)$ в P. Существует такое $c>0$, что эта область заключена в $(\psi=(La, a)\geqslant c)$. Последнюю же область можно перевести путем деформации, аналогичной деформации D, в некоторый компакт P_c, заключающий в себе все собственные элементы области $(\psi\geqslant c)$, а значит и $(f\geqslant d)$, причем элементы P_c при этой деформации не меняются, а значения $f(a)$ не убывают. Обозначим $P_d=P_c\times(f\geqslant d|)$. Итак, $(f\geqslant d)$ перейдет в P_d. Далее, повторяя все предыдущие рассуждения (с заменой P_c компактом P_d), получим: если

$$\mu_n=\sup_{x_n\in(x_n)}\max f(a),$$

то на $f=\mu$ найдутся нормированные собственные элементы. Если такой собственный элемент, $La_n=\lambda_n a_n$, то $f(a_n)=\mu_n$ и $\psi(a_n)=(La_n, a_n)=\lambda_n$.

Так же, как и в предыдущем случае, $f(a_n)=\mu_n\to 0$, а вместе с μ_n и $\lambda_n\to 0$. Далее при слиянии $\mu_n=\mu_{n+p}=\mu$, поверхность уровня $(f=\mu)$ заключает p-мерный негомологичный нулю Δ-цикл, состоящий из собственных элементов, гомологичный в P проективному пространству z_n.

Пример. Пусть $K_i(s_1, s_2, \ldots, s_{2i})$ — такое ядро, что

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K_i(s_1, s_2, \ldots, s_{2i})\prod_{j=1}^{2i}\varphi(s_j)\prod_{j=1}^{2i}ds_j>0$$

---

[1] Несколько другой класс нечетных операторов рассматривался в диссертации В. Соболева [1].

для любого φ, у которого

$$\int_0^1 \varphi^2\,ds = 1.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s_1, s_2, \ldots, s_{2i-1}\, x) \prod_{j=1}^{2i-1} \varphi(s_j) \prod_{j=1}^{2i-1} ds_j =$$

$$= \lambda\varphi(x), \quad \int_0^1 \varphi^2\,ds = 1.$$

Существует счетное множество „собственных“ решений $\varphi_n(x)$ этой системы и соответственно собственных чисел λ_n, удовлетворяющих высказанной теореме.

ГЛАВА III

Критические множества геодезических линий

§ 10. Пространства R кривых с общими концами на сфере

Метрика Фреше. Пусть в метрическом пространстве даны две дуги p и r, образы отрезка $[0,1]$. Установим параметрическое представление кривых p и r; каждому $t \in [0,1]$ отвечают точки a_t и b_t кривых p и r, причем a_t и b_t непрерывно зависят от t. Расстоянием $\rho(p, r)$ в смысле Фреше между кривыми p и r называют нижнюю границу по всевозможным параметрическим представлениям максимумов расстояний между парами точек a_t и b_t обеих кривых p и r, отвечающих общему значению параметра.

Пусть m и n замкнутые кривые, непрерывные образы окружности На m и n можно ввести циклические координаты φ с одинаковым периодом 1, именно каждому $\varphi \subset [0,1]$ отвечают точки a_φ и b_φ кривых m и n, причем $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$. Расстоянием $\rho(m, n)$ в смысле Фреше этих кривых называют нижнюю границу по всевозможным параметрическим представлениям максимумов расстояний между парами точек a_φ и b_φ обеих кривых с общими значениями циклических координат.

В дальнейшем R_n будет отвечать n-мерное трижды дифференцируемое замкнутое многообразие. Число $h = h(R_n)$ означает такое положительное число, зависящее от многообразия R_n, что геодезическая дуга $\overline{ab}$ на R_n длины $\leqslant h$ с концами в a и b дает минимум длин кривых, соединяющих a и b.

Пусть $\smile{ab}$ дуга, соединяющая точки a и b длины $\leqslant h$. Минимальная геодезическая дуга $\overline{ab}$, соединяющая a и b, называется хордой, стягивающей дугу $\smile{ab}$. Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$ есть зависящая от многообразия R_n и числа $\delta > 0$ положительное число, такое, что, если разность длин $\smile{ab}$ и $\overline{ab}$ меньше $\delta > 0$, расстояние Фреше между $\smile{ab}$ и $\overline{ab}$ меньше $\alpha = \alpha(\delta)$. При $\delta \to 0$ $\alpha(\delta) \to 0$. Итак, каждому многообразию R_n отвечают константа h и функция $\alpha(\delta)$.

Деформация семейства кривых. Пусть P семейства отрезков или окружностей (заданное абстрактно), так что установлено расстояние между кривыми $p \in P$ и точками на них. Каждой точке a_p кривой p отнесем точку $m(a_p, p)$ в R_n, где функция $m(a_p, p)$ непрерывна относительно a_p и p. Совокупность точек $m(a_p, p)$ при фиксированном p и всевозможных a_p составляет кривую $m(p)$ — образ p на R_n. Совокупность $m(P)$ всех кривых $m(p)$ называется образом семейства P, определяемым функцией $m(a_p, p)$.

Отнесем теперь каждой точке a_p каждой кривой p из P и каждому значению параметра $t \subset [0,1]$ точку $m(a_p, p, t)$ на R_n, причем $m(a_p, p, t)$ непрерывно зависит от точки a_p кривой p и параметра t. При фиксированном t функции $m(a_p, p, t)$ определяют на R_n семейство кривых $m(P, t)$ образ семейства P. Преобразование, переводящее $m(P, 0)$ в $m(P, 1)$, называется непрерывной деформацией семейства $P_0 = m(P, 0)$ как образа семейства P. Если $m(a_p, p, 0) = a_p$ и, следовательно, $P_0 = P$, мы говорим просто о деформации семейства P.

Пространство R дуг на сфере с общими концами. Пусть S_n есть риманово трижды дифференцируемое многообразие, гомеоморфное n-мерной сфере. Через $R = R(S_n, a, b)$ обозначим метрическое пространство, элементами которого являются спрямляемые кривые (образы отрезков), соединяющие точки a и b на S_n, причем расстояние $\rho(p, q)$ между двумя кривыми p и q из R определяется в смысле Фреше. $l(q)$ — функционал на R, означающий длину кривой q; совокупность всех кривых q из R, для которых длина не превосходит $N: l(q) \leqslant N$ — есть компактная часть R которую обозначим R_N.

Пусть p кривая из R. Будем двигаться по p по направлению от a к b. Если s есть длина пути, который мы описали, двигаясь по p от a и дойдя до точки c этой кривой, то положим, что этой точке c отвечает значение параметра t, равное $\frac{1}{l(p)} s$. При этом началу a кривой p отвечает значение $t = 0$, а концу b — значение $t = 1$. Введенный таким образом параметр будем называть нормальным, точку кривой P, отвечающей значению t нормального параметра, обозначим a_p^t.

Замкнутое семейство B кривых из R будем называть K-множеством, если на кривых p из B точки a_p^t непрерывно зависят от кривой p и нормального параметра t. Например, замкнутое семейство геодезических полигонов с ограниченным числом сторон или замкнутое семейство линий с ограниченной кривизной суть K-множества.

Каждое K-множество B можно рассматривать как образ некоторого множества $B_0 = m^{-1}(B)$ отрезков $[0,1]$ числовых прямых, так что точкам 0 и 1 этих отрезков отвечают точки a и b. Отрезок, образцом которого является кривая $p \subset B$, будет обозначать $m^{-1}(p)$. Числу t отрезка $m^{-1}(p)$ отвечает точка a_p^t кривой p. Топология на отрезках установлена так, что окрестности кривой p на B отвечает окрестность соответственного отрезка $m^{-1}(p)$ на B_0. Деформацией D семейства кривых B называется его деформация как образа $m^{-1}(B)$.

Если d есть двойная точка кривой p, т. е. она отвечает двум значениям нормального параметра t и t_1, $0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant 1$, то в результате деформации она переходит, вообще говоря, в две различные точки.

K-деформацией в R_N мы называем такую деформацию множества в R_N, при котором оно переходит снова в K-множество. K-деформацией в R называется K-деформация в некотором R_N.

§ 11. Критические множества в R

Теорема 1. Функционал $I(q)$ в R обладает K-свойством, и K-критическое множество на $I=l$ содержится в множестве A геодезических дуг длины l, соединяющих точки a и b.

Другими словами, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha > 0$, что любое K-множество из $(I \leqslant l+\alpha)$ может быть деформировано в

$$(I \leqslant l-\alpha)+S(A, \varepsilon).$$

Пусть дана дуга $\breve{cd}$ длины $<h$ и стягивающая ее хорда $\overline{cd}$.

Определим деформацию, переводящую дугу $\breve{cd}$ в $\overline{cd}$, именно: введем на обеих дугах нормальный параметр t так, что точка c на обеих дугах отвечает значению 0, точка d — значению $t=1$, Соединим точки l_t и l_t' обеих дуг, отвечающие общему значению параметра t, минимальной геодезической $\overline{l_t l_t'}$. Деформация будет заключаться в движении точки l_t по дуге $l_t l_t'$ со скоростью, пропорциональной длине $\overline{l_t l_t'}$ до положения l_t'. В результате $\breve{cd}$ перейдет в $\overline{cd}$.

Для каждого δ, $0<\delta \leqslant h$ можно найти такое $\alpha=\alpha(\delta)$, что если $I(\breve{cd})-I(\overline{cd}) \leqslant \delta$, то все пути $\overline{l\,l_t'}$ по длине меньше $\alpha(\delta)$; при $\delta \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ (функция $\alpha(\delta)$ зависит от S_n).

Если задано K-множество M и на кривых q этого множества нормальные параметры и если все M заключены в области $(I<l+1)$, то выбрав $n > \frac{4(l+1)}{h}$, мы получим: дуга $a_q^t a_q^{t+\frac{1}{n}}$ кривой q, отвечающая интервалу $\left(t, t+\frac{1}{n}\right)$ нормального параметра, по длине меньше $\frac{h}{4}$. Будем считать n четным. Выберем на каждой кривой $q \subset M$ по $n+1$ точек

$$a_q^0=a,\ a_q^{\frac{1}{n}}, \ldots, a_q^{\frac{i}{n}}, \ldots, a_q^{\frac{n-1}{n}},\ a_q^1=b.$$

Определим операцию D_1 следующим образом: каждую дугу

$$a_q^{\frac{j}{n}} a_q^{\frac{j+2}{n}}, \quad j=0, 2, 4, \ldots, n-2$$

кривой q деформируем описанным выше методом в стягивающую ее хорду.

После этой деформации q перейдет в геодезический полигон p. Точки $a_q^{\frac{i}{n}}$, $i=1, 3, \ldots, n-1$ перейдут в середины b_i сторон этого полигона. Заменим теперь дуги $b_i b_{i+2}$ полигона p (состоящие из половины двух смежных сторон) стягивающей хордой $\overline{b_i b_{i+2}}$. Получим новый полигон r. Так определенный переход от q к r и есть деформация D.

Деформация D не меняет геодезических линий, соединяющих a и b.

Пусть A множество геодезических соединяющих a и b длины l. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что все кривые, лежащие в $S(A, \varepsilon_1)$, останутся после деформации D в $S(A, \varepsilon)$ (кривые, достаточно близкие к геодезическим, изменяются сколь угодно мало). Далее, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\varepsilon_2 > 0$, что все геодезические соединяющие a и b, длины которых заключены между $l-\varepsilon_2$ и $l+\varepsilon_2$, лежат в $S(A, \varepsilon_1)$.

Если при первой части деформации D кривая p $(l-\varepsilon_2 < I(p) < l+\varepsilon_2)$ изменится на достаточно малое число $\eta > 0$, она лежит сколь угодно близко к геодезическому полигону с n сторонами; при этом, если $\eta < \frac{l}{2n}$, при деформации D ни одна дуга, отвечающая одному из интервалов параметра $t: \left(\frac{j}{n}, \frac{j+2}{n}\right)$ не сведется к точке; если бы такая дуга свелась к точке, длина l уменьшилась бы на число $\geqslant \frac{l}{2n}$.

Пусть после первой части деформации q перейдет в полигон $p = Dq$. Если при второй части деформации D длина полигона уменьшилась достаточно мало, то значит углы этого полигона сколь угодно близки к π. Итак, если уменьшение длины кривой q при D достаточно мало, кривая сколько угодно близко расположена от геодезического полигона со сторонами, отличными от точки, и углами сколь угодно близкими к π. Такие полигоны, в свою очередь, при достаточной близости углов к π, лежат в сколь угодно малой окрестности от геодезических дуг.

Можно выбрать столь малое $\alpha > 0$ и притом $\alpha \leqslant \varepsilon_2$, что всякая кривая q из $(l-\varepsilon_2 \leqslant I \leqslant l+\varepsilon_2)$, не лежащая в $S(A, \varepsilon_1)$, уменьшит при D свою длину по крайней мере на 2α. Если q лежит в $(l-\alpha \leqslant I \leqslant l+\alpha)$, то Dq попадет в $(I \leqslant l-\alpha)$. Кривые из $S(A, \varepsilon_1)$ останутся после D в $S(A, \varepsilon)$; кривые из $I \leqslant l-\alpha$ останутся там же после операции D. Итак, каждое K-множество из $(I \leqslant l+\alpha)$ перейдет в $(I \leqslant l-\alpha) + S(A, \varepsilon)$ Теорема доказана.

§ 12. Пространство P замкнутых кривых на сфере

Рассмотрим на S_n совокупность P всех замкнутых непрерывных образов круга. Введем метрику, определив расстояние между кривыми q и q_1 из P в смысле Фреше. $I(q)$ — функционал в P, означающий длину $q \subset P$, P_N — компактная часть P, определяемая неравенством $I \leqslant N$.

Каждое S_n можно рассматривать как n-мерную евклидову сферу с заданной римановой метрикой. Пусть B совокупность всех окружностей этой сферы.

Будем называть деформацию части B нормальной, если при ней достаточно близкие дуги достаточно близких окружностей на сфере переходят дуги кривых, сколь угодно близкие по длине.

K-множеством на P назовем результат нормальной деформации семейства окружностей из B.

Пусть A есть K-множество, результат нормальной деформации D множества окружностей $B' \subset B$. Подвергаем A деформации D_1 как образа B', так что $D_1 D$ — опять нормальная деформация B'. Такую операцию D_1 назовем K-деформацией. Она переводит K-множество в K-множество.

Деформация D'. Определим следующую нормальную операцию. На совокупности всех окружностей B на S_n нельзя однозначно и непрерывно определить направление обхода всех окружностей. Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в окрестности $S(r, \varepsilon)$ данной окружности r можно непременным образом ввести однозначный порядок обхода всех окружностей, входящих в $S(r, \varepsilon)$, а также непрерывным образом выбрать на каждой окружности из $S(r, \varepsilon)$ по точке.

K-множество A есть непрерывный образ некоторой части B' множества окружностей $B: A = D(B')$. Каждая кривая $p = D(r)$ из A есть образ окружности $r = D^{-1}(p) \subset B'$. Окрестности $U_\varepsilon(r)$ окружности r: $U_\varepsilon(r) = B' \times S(r, \varepsilon)$, отвечает множество $V_\varepsilon(p) = D(U_\varepsilon(r))$ из A. На всех $p' = Dr'$ из $V_\varepsilon(p)$, т. е. образах кругов $r' \subset U_\varepsilon(r)$, можно однозначно и непрерывно установить направление обхода и выбрать по точке (непрерывно с точки зрения топологии прообраза $U_\varepsilon(r) = D^{-1} V_\varepsilon(p)$). Мы будем считать сейчас расстоянием между образами $p = D(r')$ и $p_1 = D(r'')$ двух кругов r' и r'' расстояние между прообразами r' и r''. Одну и ту же кривую p из A, являющуюся образами двух окружностей r' и r'' из B', мы будем считать парой совпавших образов, причем расстояние между $p = D(r')$ и $p = D(r'')$ будем считать отличным от нуля; непрерывность выбора точек и направлений на кривых p из A понимается в отношении к этой метрике, т. е. по отношению к прообразам $D^{-1}(p)$.

Пусть на семействе B'' окружностей выбраны непрерывно направления и точки. Тем самым на K-множестве $A'' = D(B'')$ они выбраны непрерывно (в отмеченном выше смысле). Пусть на p выбраны точки a^p и порядок обхода. Введем на p циклический параметр φ так, что точке a_p отвечает значение параметра $\varphi = 0$; двигаясь по p от точки a_p в направлении положительного обхода кривой p и описав дугу длины s, мы концу этой дуги отнесем значение параметра $\varphi = \frac{1}{l(p)} s$. Такую параметризацию назовем нормальной. При φ, меняющемся от 0 до 1, мы обойдем всю кривую p.

Точка a_p^φ обозначает точку кривой p, отвечающую данному значению нормального циклического параметра $\varphi \cdot a_p^0 = a_p^1 = a_p$.

Пусть n четное число, такое, что $\frac{1}{n} l(p) < \frac{h}{4}$. Отметим на p циклическую систему n точек $a_p^0 = a_p$, $a_p^{\frac{1}{n}}$, $a_p^{\frac{2}{n}}, \ldots, a_p^{\frac{n-1}{n}}$, $a_p^1 = a_p$.

Произведем теперь следующую деформацию кривой p как образа некоторой окружности r. Каждую дугу $a_p^{\frac{j}{n}} a_p^{\frac{j+2}{n}}$ при n четном,

$$j = 0, 2, \ldots, n-2,$$

стянем в соответствующую хорду.

В результате кривая p перейдет в геодезический полигон p' с $\frac{n}{2}$ сторонами и вершинами $a_n^{\frac{j}{n}}$, j — четные: $j = 0, 2, \ldots$ Точки $a_p^{\frac{i}{n}}$, $i = 1, 3, \ldots, n-1$, нечетные, перейдут в точки b_i — середины сторон полигона p'.

Заменим теперь каждую дугу $b_i b_{i+2}$, $i = 1, 3, 5, \ldots, n-1$ полигона p' стягивающей ее хордой. В результате этой операции p' перейдем в новый геодезический полигон p'' с вершинами в серединах сторон p'.

Последовательно применение двух таких операций к любой кривой q, множества $A' = D(B')$ есть K-деформация D' K-множества A' $\left(\text{нужно лишь, чтобы } n > \frac{4l}{h}\right.$, где l — максимум длин кривых из $\left.B'\right)$. D' оставляет неизменным кривую q, являющуюся замкнутой геодезической, уменьшает длины всех остальных кривых; D' сколь угодно мало меняет кривые q, достаточно близкие к замкнутым геодезическим, и, наоборот, уменьшает на некоторое число $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ длины кривых, удаленных от любой замкнутой геодезической на расстояние $\delta > 0$.

§ 13. Критические множества в P

Теорема 2. Функционал $I(q)$ в P обладает K-свойством, и K-критическое множество на $(I = l)$ в P состоит из замкнутых геодезических длины l.

Пусть теперь K-множество $A = D(B_1)$ есть образ множества окружностей B_1 и пусть l_1 максимум длин кривых из A: $l_1 \geqslant l > 0$. Обозначим через B_2 часть множества окружностей B_1, состоящую из элементов B_2, образы которых на A имеют длины $\geqslant \frac{l}{2}$, т. е. $D(B_2) \subset \left(I \geqslant \frac{l}{2}\right)$. При достаточно малом $\eta > 0$ на каждой окружности из $U_\eta(r) \subset S(r, \eta)^*$ — окружности r из B_2 можно выбрать непрерывным образом по точк и установить порядок обхода.

Замкнутое множество A_2 покрыто системой окрестностей $U_\eta(r)$. Если m есть размерность B, то можно выбрать окрестности $U_\eta(r_i)$ так,

---

* $U_{\bar\eta}$ и U_η не обязательно сферы радиусов $\bar\eta$ и η в B_2.

что не более $(m+1)$ из них имеют общие элементы. Выберем конечное число окружностей $r_1, r_2, \ldots, r_k$ так, что система $U_\eta(r_1), \ldots, U_\eta(r_k)$ покрывает A_2. Далее, выберем более широкие окрестности $U_{\bar\eta}(r_i)$ такие, что в них попрежнему можно выбирать непрерывно систему обхода входящих в них окружностей и по точке на окружности и попрежнему не более $(m+1)$ из них пересекаются.

Обозначим через V_η^i и $V_{\bar\eta}^i$ образы на A окрестностей $U_\eta(r_i)$ и $U_{\bar\eta}(r_i)$.

На всех кривых p из $V_{\bar\eta}^i$ можно выбрать непрерывным образом по точке a_p и установить порядок обхода. Тем самым можно непрерывным образом ввести нормальный параметр φ; обозначим через a_p^φ точку кривой p, отвечающей параметру φ. Точки $a_p^{\frac{j}{n}}$, $j=0, 1, \ldots, n-1$ образуют циклическую систему точек, выбранных на кривых p из $V_{\bar\eta}^i$ непрерывным образом. Положим для кривых p из более узкой окрестности $V_{\bar\eta}^i$

$$b_p^j = a_p^{\frac{j+2}{n}}.$$

Тем самым выбраны непрерывно $\frac{n}{2}$ дуг $a_p^{\frac{j}{n}} b_p^j$ равной длины $\frac{2}{n} l(p)$ на всех кривых $p \subset V_\eta^i$.

Выбор этих дуг $a_p^{\frac{j}{n}} b_p^j$ можно распространить на кривые более широкой окрестности $V_{\bar\eta}^i$ так, чтобы на границе этой окрестности эти дуги свелись к точкам $\left[b_p^j = a_p^{\frac{j}{n}}\right]$.

Обозначим через D_i операции, не меняющие кривых, не входящих в $V_{\bar\eta}^i$, а для кривых p из $V_{\bar\eta}^i$, заменяющих сначала все дуги $a_p^{\frac{j}{n}} b_p^j$ с четными j стягивающими их хордами, а затем проделывающие то же с дугами $a_p^{\frac{i}{n}} b_p^i$ при нечетных i. Для кривых V_η^i это есть описанная выше операция D'.

Применим теперь к A последовательно деформации $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Каждая кривая p из A входит не более чем в $(m+1)$-ую окрестность $V_{\bar\eta}^i$ и, значит, не более чем $(m+1)$ раз подвергается деформациям.

Кривые — замкнутые геодезические из A — не изменятся в результате этих операций. Кривые, достаточно близкие к замкнутым геодезическим, изменятся сколь угодно мало. Можно указать для каждого $\varepsilon > 0$ такое $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, что кривые лежат в $S(A^0, \varepsilon_1)$, где A^0 множество всех замкнутых геодезических из S_n останутся в $S(A^0, \varepsilon)$.

Далее можно указать также $\alpha > 0$ такое, что кривые p из A, длины которых $\geqslant \frac{l}{2}$, лежащие вне $S(A^0, \varepsilon_1)$ уменьшат при операции $D_k D_{k-1} \ldots D_1$ свою длину на число $\geqslant 3\alpha$.

Пусть $l > 0$. Обозначим через A_l^0 совокупность замкнутых геодезических длины l. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$. Далее, подберем такое $\varepsilon_2 > 0$, что все замкнутые геодезические из области $(l - \varepsilon_2 \leqslant l \leqslant l + \varepsilon_2)$ лежат в $S(A_l^0, \varepsilon_1)$. Всякая кривая, лежащая в $S(A_l^0, \varepsilon_1)$, в результате $(m+1)$ описанных операций стягивания дуг в хорды остается в $S(A_l^0, \varepsilon)$.

Далее, выберем такое α, $0 < \alpha < \varepsilon_2$, что кривая из области $l - \varepsilon_2 \leqslant l \leqslant l + \varepsilon_2$, лежащая вне $S(A_l^0, \varepsilon_1)$, при описанной выше операции уменьшает свою длину на число $\geqslant 3\alpha$.

Пусть B есть произвольное K-множество, заключенное в $(l \leqslant l + \alpha)$ Определим для B предыдущие построения — выбор окрестностей V_η^i и операций D_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Если $p \in B \times (l - \alpha \leqslant l \leqslant l + \alpha)$, то p входит в одно из V_η^i. В результате операций $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$ кривая p или попала в окрестность $S(A^0, \varepsilon_1)$, но тогда она остается при дальнейших операциях $D_i, D_{i+1}, \ldots, D_l$ в $S(A^0, \varepsilon)$; или p находится в $(l - \alpha < l < l + \alpha)$, но вне $S(A^0, \varepsilon_1)$; тогда при операции D_i длина $l(p)$ уменьшится на число $\geqslant 3\alpha$, и p попадет в область $(l \leqslant l - \alpha)$ и останется там при всех последующих операциях; или p уже попала в $(l < l - \alpha)$ и останется там при всех последующих деформациях. Таким образом, наша деформация $D_k D_{k-1} \ldots D_1$ переводит наше произвольное K-множество B из $(l \leqslant l + \alpha)$ в $(l \leqslant l - \alpha) + S(A^0, \varepsilon)$. Тем самым доказана наша теорема.

Примечание 1. Введем дополнительные ограничения на K-деформации, именно:

1) K-деформация не меняет кривые достаточно малой длины $l \leqslant \beta$ (число $\beta > 0$ зависит от деформации).

2) K-деформации не превращают кривые q в изолированные точки (если сама кривая q не является вырожденной в точку).

3) K-деформации не превращают ни одну кривую q в дважды (или большее число раз) покрытую простую дугу (непрерывный образ отрезка).

K-множествами мы будем называть результаты K-деформации замкнутых множеств окружностей.

При таком более узком определении K-множеств теорема 2 сохраняет свою силу.

Заметим, что операции $D_1, D_2, \ldots, D_k$, примененные при доказательстве теоремы 2, выполняют условия (1). Но они, вообще говоря, нарушают новые условия 2—3 K-операций.

Замкнутые геодезические и кривые, достаточно к ним близкие не сводятся к точке или k раз повторенному образу отрезка.

Рассмотрим окрестность V_η^i; после деформаций $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$ эта окрестность перейдет в некоторое множество (V_η^i). Обозначим

$$B_i = V_\eta^i - S(A^0, \varepsilon).$$

Пусть $p \in B_i$. На p выбраны n дуг. Первая часть деформации D_i должна $\frac{n}{2}$ из этих дуг обратить в стягивающие их хорды. Пусть a_p конец одной из этих дуг. Произведем предварительно новую деформацию кривой p, заключающуюся в том, что около точки a_p наращивается к кривой p петля с узлом в точке a_p. Эту петлю можно выбрать так, что при операции стягивания наших $\frac{n}{2}$ дуг хордами кривая p с петелькой во все время и в результате деформации будет удовлетворять условиям 2 и 3. Построение этих петелек можно производить в достаточно узкой окрестности $W(p)$ кривой p так, что на границах этой окрестности петельки свелись к точкам. Наращивание этих петелек в окрестности $W(p)$ есть K-деформация. Конечное число таких окрестностей $W(p_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, покроет множество B_i, причем эти окрестности $W(p_1), W(p_2), \ldots, W(p_s)$ можно выбрать так, что не более $(m+1)$ из них имели бы общие элементы. При этом длину петельки установим не превосходящей для каждой кривой числа $\frac{1}{3(m+1)}\delta$, где δ — число, на которое уменьшается длина кривой p при первой части деформации D_i. Так как на каждой кривой наращено не более $(m+1)$ петелек, то удлинение кривой от наращения петелек не превосходит $\frac{\delta}{3}$. При первой части операции D_i кривая p укоротится на δ. В результате наращения петелек и первой части операции D_i кривая p укоротится на число $\geqslant \frac{2}{3}\delta$. Далее произведем аналогичные наращения петелек на концах одной из дуг с нечетным индексом (стягиваемой при второй части операции D_i). Если δ' есть укорочение кривой при второй части операции D_i, то в результате наращивания петелек и второй части этой операции произойдет укорочение p на число $\geqslant \frac{2}{3}\delta'$. Выше было указано, что кривые B, лежавшие вне $S(A^0, \varepsilon)$, а значит и вне $S(A^0, \varepsilon_1)$, укорачивались при операции D_1 на число $\geqslant 3\alpha$ т. е. $\delta \geqslant 3\alpha$. Теперь при дополнительном наращивании петелек произойдет после D_i укорочение кривых p из B_i на число $\geqslant \frac{2}{3}\delta \geqslant 2\alpha$, т. е. из области $(I \geqslant l + \alpha)$ они попадут попрежнему в $(I \leqslant l - \alpha)$.* Все предыдущие рассуждения останутся в силе, если заменить операцию D_i операцией D_i', отличающейся от D_i предварительным наращением петелек. При этом операции D_i' удовлетворяют всем новым условиям. Последовательность операций $D_1', D_2', \ldots, D_l'$ переводит K-множество B из $(I \leqslant l + \alpha)$ в $(I \leqslant l - \alpha) + S(A^0, \varepsilon)$. Тем

* Если они уже не попали в область $(I \leqslant l - \alpha)$.

самым теорема 2 остается верной, если K-множества и K-операции понимать в новом более узком смысле.

Примечание 2. Для случая $n=2$ можно определить K-множества как множества самонепересекающихся кривых, получаемые K-деформациями (в прежнем смысле) из множеств окружностей. Заменив операцию стягивания дуги хордой более сложной операцией, определенной к гл. III монографии Люстерника и Шнирельмана „Топологические методы вариационного исчисления" (переводящей кривую без двойных точек в такую же), мы можем, сохранив все рассуждения и оценки настоящего параграфа, получить следующую теорему:

Теорема 3. K-критическое множество на $P=P(S_2)$ на поверхности уровня $(l=l)$ состоит из замкнутых самонепересекающихся геодезических длины l.

Воспроизведем доказательство этого предложения, приведенное в цитированной монографии Л. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана [3].

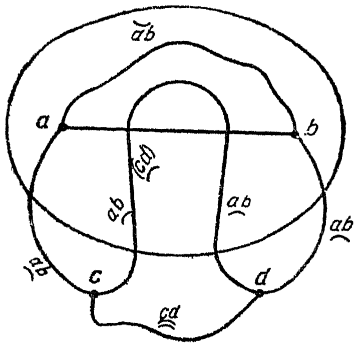

Рис. 2.

Поскольку операция сведения дуги в стягивающую ее хорду превращает самонепересекающуюся кривую, вообще говоря, в самопересекающуюся, определим дополнительную операцию „распрямления", снова переводящую преобразованную кривую в самонепересекающуюся. Для простоты начнем с случая плоской кривой.

Будем рассматривать плоскость комплексного переменного $z=x+iy$. Пусть на ней дана кривая P (рис. 2), на которой две точки a и b с комплексными координатами α и β: $a(\alpha)$ и $b(\beta)$. Эти точки разбивают кривую P на две дуги $\overset{\frown}{ab}$ и $\underset{\smile}{ab}$ и пусть длина $\overset{\frown}{ab}$ не превосходит $\frac{1}{4}d$, где d — диаметр P.

Проведем эллипс E с фокусами в $a(\alpha)$ и $b(\beta)$ и большой осью, равной длине $\overset{\frown}{ab}$. Дуга $\overset{\frown}{ab}$ расположена внутри E, тогда как часть $\underset{\smile}{ab}$ расположена вне E.

Рассмотрим функцию

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=\ln\frac{z-\alpha}{z-\beta}+\pi i.$$

Эта функция многозначна, ее мнимая часть v определена с точностью до $2k\pi$ (k — целое). Определим теперь однозначно $f(z)$, а значит и v во всех точках $\underset{\smile}{ab}$ следующим образом. В некоторой точке c этой дуги, лежащей вне E, положим, что $v(c)$ заключено между 0 и 2π. Далее, если

d — произвольная точка $\underset{\frown}{ab}$ (отличная от a и b), то, обозначая через $\underset{\frown}{cd}$ часть $\underset{\frown}{ab}$, заключенную между c и d, положим

$$f(d)=f(c)+\int\limits_{\underset{\frown}{cd}} f'(z)\,dz=f(c)+\int\limits_{\underset{\frown}{cd}}\left(\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}\right)dz. \qquad (1)$$

Если дуга $\underset{\frown}{cd}$ не пересекает хорды $\overline{ab}$, то $v(d)$ тоже заключено между 0 и 2π. В самом деле, $v(d)$ может равняться нулю лишь на хорде $\overline{ab}$.

Лемма 1. Если точка d лежит вне E, то $0<v(d)<2\pi$ (хотя бы дуга $\underset{\frown}{cd}$ и пересекала хорду $\overline{ab}$.

В самом деле, точки c и d можно соединить дугой $\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}$, целиком лежащей вне эллипса E. Замкнутая кривая $\underset{\frown}{cd}-\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}$ не пересекает $\overset{\smile}{ab}$. В самом деле, $\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}$ лежит вне, а $\overset{\smile}{ab}$ внутри E; $\underset{\frown}{cd}$ и $\overset{\smile}{ab}$ не имеют общих точек, так как кривая P самонепересекающаяся. Точки a и b лежат поэтому в одной и той же из частей $\underset{\frown}{cd}$, на которые кривая $\underset{\frown}{cd}-\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}$ разбивает плоскость. Поэтому интеграл

$$\int\limits_{\underset{\frown}{cd}-\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)dz=0,$$

или

$$\int\limits_{\underset{\frown}{cd}}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)dz=\int\limits_{\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)dz$$

и в силу (1)

$$f(d)=f(c)+\int\limits_{\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)dz.$$

Но так как $\underset{\frown}{\underset{\frown}{cd}}$ не пересекает хорды $\overline{ab}$, то в силу предыдущих рассуждений, $0<v(d)<2\pi$. Лемма доказана.

Если ρ_1 и ρ_2 — расстояния от некоторой точки $l(z)$ до $a(\alpha)$ и $b(\beta)$, то

$$u(l)=\ln\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|}=\ln\frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$v(l)=\arg(z-\alpha)-\arg(z-\beta)+\pi i.$$

Линии $v=\text{const}$ (рис. 3) суть дуги окружностей, соединяющих a и b; линии $u=\text{const}$ — ортогональные им окружности. Если радиусы окружностей $u=\text{const}$ стремятся к нулю, то их центры стремятся к a или b.

При достаточно малом $\delta>0$ дуги $v=\delta$ и $v=2\pi-\delta$ лежат внутри E по разные стороны хорды $\overline{ab}$. Из леммы 1 следует, что для точки d дуги $\underset{\frown}{ab}$, лежащей вне E, $\delta<v(d)<2\pi-\delta$.

Рассмотрим функцию $\varphi_\delta(\xi)$ вещественного переменного ξ:

при

$$\delta\leqslant\xi\leqslant2\pi-\delta, \qquad \varphi_\delta(\xi)=\xi;$$

при

$$\xi<\delta, \quad \varphi_\delta(\xi)=\delta-\frac{\delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(\delta-\xi);$$

при

$$\xi>2\pi-\delta, \quad \varphi_\delta(\xi)=2\pi-\delta+\frac{\delta}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(\xi-2\pi+\delta).$$

$\varphi_\delta(\xi)$ непрерывная и монотонно возрастающая функция ξ; при

$$\xi \to \infty, \quad \varphi_\delta(\xi) \to 2\pi - \frac{\delta}{2}; \quad \text{при } \xi \to -\infty, \quad \varphi_\delta(\xi) \to \frac{\delta}{2}.$$

Применим теперь к кривой P операцию D_1 стягивания дуги $\overset{\frown}{ab}$ к хорде $\overline{ab}$. Кривая P переходит в $D_1(P)$. Обозначим разность длин

$$l(\overset{\frown}{ab}) - l(\overline{ab}) = \alpha \geqslant 0.$$

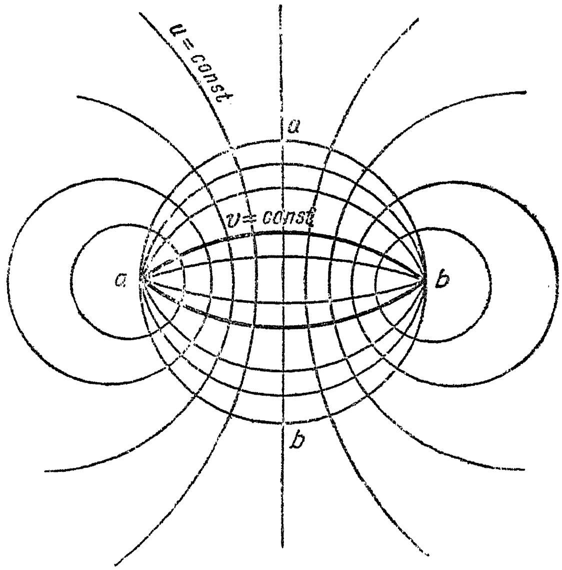

Рис. 3.

Определим теперь новую деформацию D_2^δ кривой $D_1 P$ — операцию распрямления, именно: хорда $\overline{ab}$ (в которую перешла дуга $\overset{\frown}{ab}$) остается неподвижной. Будем рассматривать u и v как криволинейные координаты точки плоскости. Каждую точку $d(u, v)$ дуги $\overset{\frown}{ab}$, отличную от a и b, переведем в точку $(u, \varphi_\delta(v))$.

В силу леммы 1 и определения функции φ_δ все точки d перейдут в точки $D_2^\delta(d)$, лежащие вне $\overline{ab}$.

Переход от точки d к ее образу $D_2^\delta(d)$ совершается по соединяющему их отрезку.

Точки d и $D_2^\delta(d)$ лежат на одной и той же окружности $u = \text{const}$. Если точка d достаточно близка к a или b, то центр такой окружности сколь угодно близок соответственно к a и b, и радиус окружности сколь угодно мал. В достаточно узкой окрестности точек a и b деформация D_2^δ смещает точки d сколь угодно мало. Так как сами точки a и b остаются при этом неподвижными, то D_2^δ непрерывна в этих точках, D_2^δ есть непрерывная деформация.

В результате деформации D_2^δ дуга $\overset{\frown}{ab}$ перейдет в дугу $D_2^\delta(\overset{\frown}{ab})$, не пересекающую хорды $\overline{ab}$.

В результате деформации $D = D_2^\delta \times D_1$ кривая P перейдет в самонепересекающуюся кривую $P_1 = D(P)$.

После деформации D_1 длина кривой P уменьшится на число

$$\alpha = l(\overset{\frown}{ab}) - l(\overline{ab}).$$

Мы покажем, что при достаточно малом δ деформация D_2^δ увеличит длину кривой не более чем на $\frac{\alpha}{2}$.

В самом деле, линейный элемент ds в точке z равен

$$ds = |dz| = \frac{|df(z)|}{|f'(z)|} = \frac{1}{|f'(z)|}\,|du + i dv| =$$
$$= \sqrt{du^2 + dv^2} : \left|\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\right| = \frac{|z-\alpha|\,|z-\beta|\,\sqrt{du^2+dv^2}}{|\beta-\alpha|}$$

Если точка z, для которой $f(z) = u + iv$, переходит в точку z_1, для которой $f(z_1) = u_1 + iv_1$, то линейный элемент ds переходит в линейный элемент ds_1, где

$$ds_1 = \frac{|z_1-\alpha|\,|z_1-\beta|\,\sqrt{du_1^2+dv_1^2}}{|\beta-\alpha|},$$

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\frac{du_1^2+dv_1^2}{du^2+dv^2}}\left|\frac{z_1-\alpha}{z-\alpha}\right| \cdot \left|\frac{z_1-\beta}{z-\beta}\right|.$$

При операции D_2^δ точка $(z) = (u, v)$ переходит в $(z_1) = (u_1, v_1)$, где $u_1 = u$, $v_1 = \varphi_\delta(v)$. Так как $\frac{d}{dv}\varphi_\delta(v) \leqslant 1$, то

$$|du| = |du_1|, \quad |dv_1| \leqslant |dv|$$

и

$$\frac{ds_1}{ds} \leqslant \frac{|z_1-\alpha|\,|z_1-\beta|}{|z-\alpha|\,|z-\beta|}.$$

Так как точки z и z_1 лежат на одной и той же окружности $u = \mathrm{const}$, то

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \left|\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta}\right|$$

и

$$\frac{ds_1}{ds} \leqslant \left|\frac{z_1-\alpha}{z-\alpha}\right|^2 = \left|\frac{z_1-\beta}{z-\beta}\right|^2.$$

Пусть, например, $|z-\alpha| < |z-\beta|$. Рассмотрим дуги $v = \delta$ и $v = 2\pi - \delta$ и „линзу" F, ими ограниченную. Если точка z лежит на круге $u = \mathrm{const}$ вне F и смещается при деформации D_2^δ, то она попадет в точку этой окружности внутри линзы, и ее расстояние к центру α уменьшилось

$$|z_1 - \alpha| < |z - \alpha| \quad \text{и} \quad ds_1 < ds.$$

Если точка d лежит на круге $u=c$ внутри линзы F, то ее расстояние от точки α может увеличиться. Наибольшее увеличение может быть, если точка d лежит на хорде $\overline{ab}$ и сместилась к краям линзы. Но относительное увеличение расстояния не превосходит $\frac{1}{\cos\delta}<1+\delta^2$, т. е.

$$\frac{ds_1}{ds}<1+\delta^2, \quad ds_1<(1+\delta^2)\,ds. \tag{2}$$

Если $l(P)$ — длина P, то длина $D_1(P)$ не превосходит $l(P)$, и в силу (2) увеличение длины кривой при операции D_2^δ не превосходит $\delta^2 l(P)$.

Если $\alpha>0$, то, полагая $\delta\leqslant\sqrt{\frac{\alpha}{2l(P)}}$, получим, что увеличение длины кривой при операции D_2^δ не превосходит $\frac{\alpha}{2}$.

Если $\alpha=0$, $\breve{ab}=\overline{ab}$, дуга $\breve{ab}$ не пересекает хорды $\overline{ab}$, и мы будем считать операцию распрямления на меняющей кривой P.

Операция $D=D_2^\delta\times D_1$ обладает следующими свойствами:

1) Она превращает кривую P в самонепересекающуюся кривую P_1.

2) Если $l(\breve{ab})-l(\overline{ab})=\alpha$, то $l(P_1)-l(P)\geqslant\frac{\alpha}{2}$.

3) Точки кривой P, достаточно близкие к a и b, смещаются сколь угодно мало.

4) Деформация оставляет неподвижными точки кривой вне эллипса E. Части P, лежащие внутри E, остаются там в течение всего времени деформации.

5) Если длина дуги $\breve{ab}$ не превосходит числа $h>0$; то смещение каждой точки P во время деформации P не превосходит $2h\alpha$.

В самом деле, если длина $\overline{ab}$ равна $2c$, то длина $\breve{ab}$ равна $2c+\alpha$, при этом $c\leqslant c+\frac{\alpha}{2}\leqslant h$.

Фокусы расстояния, большая и меньшая оси эллипса E, равны соответственно c, $c+\frac{\alpha}{2}$,

$$\sqrt{\left(c+\frac{\alpha}{2}\right)^2-c^2}=\sqrt{\alpha c+\frac{\alpha^2}{4}}<\sqrt{2h\alpha}.$$

Деформация D_1 смещает точку дуги $\breve{ab}$, делящую эту дугу по длине в некотором отношении на соответствующую точку хорды $\overline{ab}$, делящую длину этой хорды в том же отношении. Наибольшее расстояние между соответственными точками дуги и хорды совпадает с малой осью (и достигается тогда, когда дуга $\breve{ab}$ состоит из двух равных отрезков $\overline{ad}$ и $\overline{db}$, точке d отвечает середина хорды ab). Итак, смещение при деформации D_1 не превосходит $\frac{1}{2}\sqrt{2h\alpha}$.

Деформация D_2^δ смещает точки, лежащие внутри E на окружности $u=l$ в другую точку той же окружности, лежащую внутри E. Смещение происходит по лежащей в E хорде окружности $u=l$ (центр которой лежит на продолжении большей оси). Длина такой хорды не превосходит длины малой оси E, т. е. $\sqrt{2h\alpha}$.

6) При достаточно малом $\varepsilon>0$ точки p, удаленные от a или b на расстояние $\leqslant\varepsilon$, переходят в точки, удаленные соответственно от a или b на расстояние $\leqslant 2\varepsilon$.

D-деформация семейства самонепересекающихся кривых. Пусть нам дано K-семейство (p) самонепересекающихся плоских кривых p, диаметры которых превосходят $d>0$, и на кривых p этого семейства выбраны по паре точек a_p и b_p с комплексными координатами α_p, β_p; пусть, далее, эти точки делят каждую кривую p на дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ и $\underset{\smile}{a_p b_p}$, причем длина $\overset{\frown}{a_p b_p}$ пусть не превосходит $\frac{d}{4}$. Определим, как выше, для каждой кривой p эллипсы, $E=E_p$, функции

$$f_p(z)=u_p+iv_p=\ln\frac{z-\alpha_p}{z-\beta_p}+\pi i,$$

числа $\alpha=\alpha_p$, $\delta=\delta_p$, $\varepsilon=\varepsilon_p$, функции $\varphi_{\delta_p}(v_p)$, деформации D_1^p сведения дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ к хорде $\overline{a_p b_p}$, деформацию $D_2^\delta=D_2^{\delta p}$ разглаживания дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ и итоговую деформацию $D=D^p=D_2^{\delta p}D_1^p$.

Одновременные применения деформаций D^p к кривым p семейства (p) есть некоторая K-деформация ϑ всего этого семейства. Чтобы доказать это утверждение, нам нужно установить непрерывность деформации ϑ, т. е. что достаточно близкие точки достаточно близких кривых остаются при деформации ϑ сколь угодно близкими.

Для деформаций стягивания D_1^p это очевидно; остается доказать эту непрерывность для операций сглаживания $D_2^{\delta p}$.

Пусть $\bar{p}$ некоторая кривая (p). На дуге $a_{\bar{p}} b_{\bar{p}}$ выделим прилегающие к $a_{\bar{p}}$ и $b_{\bar{p}}$ дужки $\overset{\frown}{a_{\bar{p}}\alpha_{\bar{p}}}$ и $\overset{\frown}{\beta_{\bar{p}} b_{\bar{p}}}$ длины $\frac{\varepsilon_{\bar{p}}}{2}$. Оставшаяся часть $\underset{\smile}{\alpha_{\bar{p}}\beta_{\bar{p}}}$ дуги $\underset{\smile}{a_{\bar{p}} b_{\bar{p}}}$ удалена от точек a и b на расстояние $\eta>0$. Выберем теперь столь узкую окрестность $u_{\bar{p}}$ кривой $\bar{p}$ на семействе (p) так, что:

1) Числа $\varepsilon=\varepsilon_p$ для кривых p из $u_{\bar{p}}$ не меньше $2\varepsilon_{\bar{p}}$. Если поэтому отделить на каждой дуге $\underset{\smile}{a_p b_p}$ кривой p из $u_{\bar{p}}$ дужки $\underset{\smile}{\alpha_p a_p}$ и $\underset{\smile}{\beta_p b_p}$ длины $\gamma<\frac{\varepsilon_p}{2}$, то точки этих дужек смещаются при операциях $D_2^{\delta p}$ на расстояние не больше 2γ (см. свойство 6).

2) Оставшиеся части $\underset{\smile}{\alpha_p\beta_q}$ дуг $\underset{\smile}{a_p b_p}$ удалены от точек a_p и b_p на расстояние $\eta_0>0$.

3) Кривая p из $u_{\bar{p}}$ удалена от $\bar{p}$ на расстояние $\leqslant\rho$, где ρ — некоторое число меньшее $\frac{\varepsilon_p}{2}$.

Если рассмотреть функции $f_p(z)=u_p+iv_p$, определяя $v=v_p$ на дугах $\overset{\frown}{a_p b_p}$ однозначно, как выше, для каждой кривой p, то координаты v_p будут для всех дуг $\overset{\frown}{\alpha_p \beta_p}$ кривых p нашей окрестности определены (в силу свойства 3) непрерывно зависящими от кривой p и точки на кривой. Так как число δ_p непрерывно зависит от кривой p и функция $\varphi_{\delta_p}(v)$ непрерывно зависит от кривой, то определенная ею деформация $D_2^{\delta_p}$ будет на нашей окрестности u_p непрерывной деформацией дуг $\overset{\frown}{\alpha_p \beta_p}$.

Оставшиеся дужки $\overset{\frown}{a_p \alpha_p}$ и $\overset{\frown}{\beta_p b_p}$ в силу условий 1 и 2 во время деформации D_1^p остаются в кругах радиуса $\leqslant 2\gamma$ с центрами в точках a_p и b_p. Так как точки a_p и b_p выбраны непрерывно на кривых p и число γ можно взять сколь угодно малым, то тем самым можно доказать непрерывность деформации D_2^p в окрестности кривой $\bar{p}$. Итак, деформация D есть K-деформация. Мы определили деформацию „распрямления" для плоских кривых.

Пусть теперь дано K-семейство p кривых на поверхности S_2. Если эта поверхность гладкая, то достаточно малую часть ее диаметра $\leqslant h$ (где h зависит от S_2) можно аппроксимировать сколь угодно близко плоскостью. Если на кривых p этого семейства выбраны непрерывные дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ длины $\leqslant h_0$, то мы можем построить вокруг каждой такой дуги геодезический эллипс E_p с фокусами в a_p и b_p и с суммой расстояний до фокусов, равной длине $\overset{\frown}{a_p b_p}$.

Этот эллипс будет сколь угодно мало отличаться от плоского эллипса E_p. Поскольку деформация распрямления D_2^{δ} для плоских кривых меняла только те части их, которые расположены внутри соответственного плоского эллипса, то мы можем ее определить и для части кривой p, лежащей внутри геодезического эллипса E_p. При достаточно малом h_0 все оценки в виде неравенств, выведенные выше для плоского случая, сохранят свою силу, и, определив операцию D — последовательное применение операций стягивания дуги к хорде и распрямления — для кривых семейства p на поверхности S_2, мы сохраним для этой операции все свойства 1—4, формулированные в конце этого параграфа. Выбрав непрерывным образом такие дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ и применяя соответственные D-операции к соответственным кривым p, получим непрерывные деформации семейства (p). Они являются K-деформациями.

Повторяя теперь все рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 2, с заменой операций стягивания D-операциями, докажем теорему 3.

§ 14. Базы гомотопии

Для компактных семейств самонепересекающихся кривых на двумерной сфере S_2 имеет место следующая теорема.

Любое компактное семейство самонепересекающихся кривых на S_2

может быть путем непрерывной деформации сведено к семейству окружностей (Lusternik [3, 4]).

Семейство A всех окружностей на сфере S_2 является в этом смысле базой гомотопии для совокупности самонепересекающихся кривых на S_2. Теорема была доказана сначала [3] для нормальных семейств, а затем для любых компактных семейств [4].

Докажем сначала, что любое компактное семейство B самонепересекающихся кривых (вообще говоря, неспрямляемых) может быть деформировано в семейство нормальное, т. е. семейство спрямляемых самонепересекающихся кривых, на которых длина дуги кривой непрерывно зависит от дуги и кривой.

Пусть B компактное семейство таких кривых. Докажем, что доста точно узкая окрестность любой кривой q из B может быть преобразована в нормальное семейство.

Пусть q входит в B, точка a находится внутри одной из областей, на которые q делит сферу S_2, и пусть расстояние от a до кривой q равно $\beta > 0$, и пусть $0 < \alpha < \beta$. Тогда все кривые q' из окрестности U_q^α на семействе B кривой q, определяемой на B неравенством $\rho(q, q') < \alpha$, имеют точку a внутри одной из своих областей, на которые они делят S_2, причем эти области, которые обозначим $O[q', a]$, непрерывно меняются с q'. Рассматривая S_2 как комплексную плоскость и $O[q', a]$ как конечные области этой плоскости, можно определить конформное преобразование Tq' области $O(q', a)$ в единичный круг, так что точка a переходит в центр этого круга, а фиксированное направление в a, в фиксированное же направление. Тем самым конформное отображение Tq' определено однозначно. В силу теоремы Куранта, конформные преобразования Tq' непрерывно зависят от q'. Если обозначить через $b(\varphi, q')$ точку кривой q', которая при преобразовании Tq' переходит в точку $e^{i\varphi}$ границы единичного круга, то точка $b(\varphi, q')$ непрерывно зависит от циклической координаты φ и кривой q'. Таким образом, в окрестности U_q^α кривой q непрерывным образом можно выбрать на всех кривых циклические параметры φ с периодом 2π. Выберем более узкую окрестность $U'_q = U_q^{\frac{\alpha}{2}}$. Обозначим через $[\varphi_0, \varphi_1; q']$ дугу кривой q', отвечающую значениям интервала $[\varphi_0, \varphi_1]$ циклического параметра φ. Выберем число n настолько большим, что диаметр дуг

$$\left[\varphi_0, \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}, q'\right]$$

меньше $\frac{h}{4}$. Выберем на кривых

$$q' \in U_q^\alpha \text{ дуги } [0; \varepsilon],\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{n},$$

если $q' \in U_q'$, т. е. если $\rho(q, q') < \frac{\alpha}{2}$,

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{n}(\alpha - \rho(q', q)),$$

если

$$\alpha \geqslant \rho(q, q') \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

На границе U_q^α выбранная дуга сводится к точке; получим n дуг диаметра меньше $\frac{h}{4}$ на каждой кривой $q' \in U_q^\alpha$, которые для каждой кривой из U_q' заполняют всю кривую. Применим деформацию, заменяющую дуги $[0, \varepsilon; q']$ кривых $q' \in U_q^\alpha$ стягивающими их хордами, а затем если эти дуги пересекают дополнительные части q', то упомянутую выше операцию разглаживания. Это есть деформация D_0 семейства U_q^α. Если обозначить через D_k аналогичную операцию, примененную к дугам

$$\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi k}{n} + \varepsilon\right],$$

то последовательно примененные операции $D_0, D_1, \ldots, D_n$ дают деформацию $D = D_q$ окрестности U_q^α, которая более узкую окрестность U_q' превращает в нормальное семейство спрямляемых самопересекающихся кривых. На границе U_q^α кривые не меняются от операции D_q. Если считать, что кривые, лежащие вне U_q^α, не меняются при D_q, то D_q есть непрерывная деформация всего семейства B.

Построив подобные более узкие окрестности U_q' и более широкие окрестности U_q^α, выберем конечную систему окрестностей

$$U_{q_1}', U_{q_2}', \ldots, U_{q_l}',$$

покрывающую все множество B. Последовательно применение к B деформаций $D_{q_1}, D_{q_2}, \ldots, D_{q_l}$ есть деформация D^1, которая превратит B в нормальное семейство B_1 самонепересекающихся кривых.

Будем называть K-множествами множества самонепересекающихся кривых, получаемые нормальной деформацией B_1, и пусть $[B_1]$ — класс таких множеств. Если $c = \inf\limits_{B_1' \in [B_1]} \sup\limits_{q \in B_1'} I(q)$, то, в силу рассуждений § 13, поверхность уровня $(I = c)$ содержит непустое множество самопересекающихся замкнутых геодезических длины c.

Если S_2 есть единичная сфера, эти замкнутые геодезические могут быть лишь большими кругами или изолированными точками, $c = 2\pi$ или 0. В силу определения c при любом $\alpha > 0$, в частности при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, в области

$$(I \leqslant 2\pi + \alpha) = \left(I \leqslant 2\frac{1}{2}\pi\right)$$

содержится семейство B_2 класса (B_1). B_2 получается как результат некоторой деформации D^2 множества B_1.

Построим опять на B_2 окрестность U_q^α кривой $q \in B_2$, на которой можно определить непрерывным образом циклический параметр

$$\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

При этом можно выбрать этот параметр нормальным так, чтобы длины дуг $[0, \varphi; q']$ кривых q' из U_q^α были пропорциональны φ, т. е. чтобы их длина равнялась $\frac{1}{l(q')} \cdot \varphi$. Выберем на всех кривых $q' \in U_q^\alpha$ дуги $[0, \varepsilon; q']$ $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon; q'\right]$, $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + \varepsilon; q'\right]$.

Именно, при

$$q' \in U_q', \ \rho(q', q) \leqslant \frac{\alpha}{2}, \ \varepsilon = \frac{2\pi}{3};$$

при

$$\alpha \geqslant \rho(q', q) \geqslant \frac{\alpha}{2},$$

ε определяется по формуле,

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3}\left[\alpha - \rho(q_1' q)\right].$$

ε непрерывно зависит от $\rho(q'.q)$ и $\varepsilon = 0$ при $\rho(q', q) = \alpha$, так что на границе U_q^α эти дуги сводятся к точке. Каждая из этих дуг по длине не превосходит трети длины q $\left(\text{не превосходящей } 2\frac{1}{2}\pi\right)$, т. е. длина такой дуги строго меньше π.

Обозначим через E_q деформацию, не меняющую кривых, лежащих вне U_q^α, и превращающая выбранные нами три дуги на каждой кривой q' из U_q^α в стягивающие их геодезические хорды; так как длины этих дуг $< \pi$, можно произвести эту операцию E_q непрерывным образом. Выберем конечную систему кривых $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_r$ из B_2, таких, что окрестности $U_{\bar{q}_i}'$, $i = 1, 2, \ldots, r$ покрывают B_2. Обозначим через D^3 деформацию, состоящую в последовательном применении к B_2 операции

$$E_{\bar{q}_1}, \ E_{\bar{q}_2}, \ \ldots, E_{\bar{q}_{r}}.$$

Пусть кривая $q' \in B_2$ входит в некоторую окрестность $U_{\bar{q}_i}'$. Операция $E_{\bar{q}_i}$ превратит эту кривую в сферический треугольник или в большой круг q''. Последующие деформации $E_{\bar{q}_{i+1}}, \ldots, E_{\bar{q}_r}$ не меняют q'', если q'' является большим кругом, или, заменя части периметра q'' геодезическими дугами, если q'' есть сферический треугольник, превращают q'' в выпуклый сферический многоугольник, лежащий в q'' (а значит в какой-то полусфере). Итак, D^3 превращает B_2 в множество B_3 больших кругов и выпуклых полигонов.

Пусть p полигон из B_3, лежащий в некоторой полусфере S_2; d_p — центр тяжести p (в этой же полусфере), g_p — наибольшая окружность с центром в d_p, лежащая в p (касающаяся p), которую назовем „вписанной в p». Если p неограниченно приближается к большому кругу p_0, соответственная вписанная окружность стремится также к p_0. Определим деформацию D^4 множества B_2, не меняющую больших кругов из B_3 и приводящую всякий отличный от большого круга полигон p из B во вписанную в p окружность g_p (для этого нужно каждую точку b из p двигать по геодезической дуге $\overline{bd_p}$ до пересечения с g_p). B_3 превратится в множество окружностей B_4. Деформация $D^4 D^3 D^2 D^1$ превращает исходное множество кривых B в множество окружностей B_4.

ГЛАВА IV

Функциональное пространство R кривых с общими концами на сфере

§ 15. ∇-циклы в R

Одномерные ∇-циклы. Рассмотрим пространство

$$R = R(S_2, a, b)$$

спрямляемых кривых на сфере S_2 с общими концами в точках a и b и функционал $I(q)$ на S_2 — длину кривой q из S_2; R_N — компактная часть R, определяемая неравенством $I \leqslant N$ (метрика в R рассматривается в смысле Фреше).* Во всем дальнейшем в качестве Δ-циклов в R мы будем рассматривать Δ-циклы, расположенные в R_N (при достаточно большом N); Δ-гомология в R означает гомологию во всех R_N при достаточно больших N. n-мерный ∇-цикл гомологичен нулю в R, если его произведения со всеми n-мерными Δ-циклами равны нулю, тем самым определены ∇-гомология в R.

Пусть q_1 и q_2 два элемента R_N, $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$, где ε — заданная малая положительная константа и $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} h$. На q_1 и q_2 можно установить параметризацию, что точки a_t и b_t этих кривых, отвечающие общему параметру t, отстоят друг от друга на расстоянии $< \varepsilon$ при этом

$$[a_0 = b_0 = a, \ a_1 = b_1 = b].$$

Пусть

$$q_1, q_2 \in R_N, \varepsilon < \frac{\alpha}{10N},$$

где α — площадь S_2. Соединив точки a_t и b_t минимальной геодезической дугой $\overline{a_t b_t}$, мы по совокупности всех дуг $\overline{a_t b_t}$ образуем пленку Q_1 с границей $q_1 - q_2$. Пусть c — точка S_2, такая, что c лежит вне q_1 и q_2. Обозначим через $\Psi(1; q_1, q_2; c)$ степени покрытия точки c этой пленкой Q_1.

* Без оговорок полагаем, что N больше расстояния между a и b на S_2 и поэтому R_N непусто.

Выбор параметра не влияет на значение этой функции, лишь бы соответственные точки отстояли друг от друга на расстояние, меньшее ε. Можно заменить дуги $\overset{\frown}{a_t b_t}$ произвольной непрерывной системой дуг $\overset{\frown}{a_t b_t}$ длины $\leqslant 2\varepsilon$. При этом индекс покрытия точки c, образованной этими дугами пленкой, не изменится.

Обозначим для любой пары q_1, q_2 дуг из R, $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$,

$$f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2) = \Psi(1; q_1, q_2; c).$$

Последовательность функций f_1^{ε} при $\varepsilon \to 0$ определяет одномерный ∇-комплекс и так как

$$f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2) + f_1^{\varepsilon}(q_2, q_3) + f_1^{\varepsilon}(q_3, q_1) = 0, \tag{1}$$

то этот комплекс есть одномерный ∇-цикл в R и любом R_N. Обозначим его через T_c^1.

n-мерные ∇-циклы. Вернемся к пленке, образованной дугами $\overset{\frown}{a_t b}$ с концами на кривых q_1, q_2. Совокупность дуг $\overset{\frown}{a_{t'} b_{t'}}$ при $0 < t' \leqslant t$ образует пленку, и степень покрытия этой пленкой точки c обозначим через $\Psi_1(t; q_1, q_2; c)$ Дуги $\overset{\frown}{a_t b_t}$ выберем так, что лишь конечное число этих дуг проходит через c. Функция $\alpha(t) = \Psi_1(t; q_1, q_2; c)$ как функция t есть целочисленная функция, имеющая конечное число скачков при значениях t, для которых $\overset{\frown}{a_t b_t}$ проходит через точку c. Соответственный скачок $\alpha(t+0) - \alpha(t-0)$ обозначим $d\alpha(t) = d\Psi_1(t; q_1, q_2; c)$. Если $\overset{\frown}{a_t b_t}$ не проходит через c, этот скачок нужно считать равным нулю.

Пусть даны $(n+1)$ кривых $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ из $R, \rho(q_i, q_j) < \varepsilon$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$. Установим на всех кривых $q_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$ параметризацию так, что точки a_i^t кривых q_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ с общим значением параметра t удалены друг от друга на расстояние $< \varepsilon$. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — n точек S_2, отличных от a и b, и кривые $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ не проходят через них. Обозначим (реккурентно):

$$\Psi_n[t; q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots, c_n] =$$
$$= \int_0^t d\Psi_1(t'; q_1, q_2; c_1) \int_{t_1}^t d\Psi_{n-1}(t''; q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}; c_2, c_3, \ldots, c_n).$$

В развернутом виде для $t = 1$ имеем

$$\Psi_n(1; q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \int_{t_1=0}^{1} d\Psi_1(t_1; q_1, q_2; c_1) \int_{t_2=t_1}^{1} d\Psi_1(t_2; q_2, q_3; c_2) \ldots \int_{t_n=t_{n-1}}^{1} d\Psi_1(t_n; q_n, q_{n+1}; c_n). \tag{2}$$

Так как дифференциалы $d\Psi_1$ (скачки) отличны от нуля лишь для конечного числа значений параметров t_i (когда соответственные дуги проходят через точки c_i), то интеграл в правой части (1) равен сумме произведений скачков

$$\sum_{0<t_1<t_2<\ldots<t_n<1} \prod_{i=1}^{n} d\Psi_1(t_i; q_i, q_{i+1}; c_i). \tag{3}$$

Сумму надо брать для тех систем $t_1, t_2, \ldots, t_n$, для которых все перемноженные скачки $d\Psi_1$ отличны от нуля и $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<1$.

Выберем теперь на R счетную всюду плотную сеть элементов, упорядоченную каким-нибудь образом. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ — элементы этой сети, и их порядок, определенный индексами, совпадает с их относительным порядком в сети. Пусть, далее, все q_i, $i=1, 2, \ldots, n+1$ входят в R_N, и для них $\rho(q_i, q_j)<\varepsilon$. Обозначим:

$$f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots, c_n)=$$

$$=f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})=\Psi_n(1; q_2, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{4}$$

Если, далее, $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}$ есть перестановка индексов $1, 2, \ldots, n, n+1$, и $\operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1})$ означает знак $+$ или $-$ в зависимести от четности или нечетности этой перестановки, то определим

$$f_n^\varepsilon(q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_{n+1}})=\operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}) f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}). \tag{5}$$

Примечание 1. В дальнейшем, определяя n-мерный ∇-комплекс функциями $f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1})$, будем задавать эти функции для групп элементов $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$ из выбранной всюду плотной сети, полагая при этом, что $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ упорядочены согласно их упорядочению в этой сети; будем всякий раз, без оговорок, предполагать, что при перестановке элементов $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ функция $f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ не меняется или изменяет только знак в зависимости от четности или нечетности перестановки.

Примечание 2. Пусть мы определили по предыдущему n-мерный ∇-комплекс Z^n функциями $f_\varepsilon^n(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1})$ и пусть эти функции не зависят от одного из аргументов, например от q_{n+1}. Тогда Z^n есть гомологичный нулю n-мерный ∇-цикл. В самом деле Z^n есть ∇-граница $(n-1)$ мерного ∇-комплекса Z^{n-1}, определяемого функциями $\varphi_\varepsilon^{n-1}(q_1, q_2, \ldots, q_n)=f_\varepsilon^n(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1})$.

Лемма 1. При достаточно малом ε функция

$$f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

не зависит ни от выбора параметра t на кривых $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ (лишь бы точки a_i^t кривых q_i, $i=1, 2, \ldots, n+1$, отвечающие общему значению параметра t, отстояли друг от друга на расстоянии меньше ε), ни от выбора системы дуг $a_i^t a_{i+1}^t$, лишь бы эти дуги по длине превосходили 2ε.

Пусть $2\alpha>0$ число меньшее, чем наименьшее расстояние между точками $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n$; пусть $2\varepsilon < \frac{\alpha}{10}$. Круги $S(c_i, 2\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ не имеют общих точек и не содержат точек a и b. Пусть на кривых $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ выбран параметр, удовлетворяющий поставленным выше условиям. Если $d\Psi_1(t_i, q_i, q_{i+1}, c_i)$ отлично от нуля, то кривые q_i и q_{i+1} пересекают круг $S(c_i, 2\varepsilon)$ и, следовательно, все остальные из кривых $q_1, \ldots, q_{n+1}$ пересекают $S(c_i, \alpha)$. Значит, каждая из кривых $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ пересекает все круги $S(c_i, \alpha)$, если (3) отлично от нуля. Обозначим через $[\beta, \gamma; q_i]$ часть кривой q_i, отвечающей интервалу $[\beta, \gamma]$ значения параметра. Интервал $[\beta, \gamma]$ назовем i — интервалом, если дуга $[\beta, \gamma, q_i]$ лежит в $S(c_i, \alpha)$, пересекает $S(c_i, 2\varepsilon)$ и концы a_i^β, a_i^γ этой дуги лежат на границе $S(c_i, \alpha)$. Так как $[\beta, \gamma, q_i] \in S(c_i, \alpha)$, $\rho(q_i, q_j) < \varepsilon$, и $\rho(c_i, c_j) > > 2\alpha > \alpha + 2\varepsilon$, то дуги $[\beta, \gamma, q_j]$, $j \neq i$, лежат вне $S(c_j, \alpha)$. Поэтому i-интервал $[\beta, \gamma]$ и j-интервал $[\beta_1, \gamma_1]$, $i \neq j$, не пересекаются. Если произведение скачков из (3)

$$\prod_{i=1}^{n} d\Psi_1(t_i; q_i, q_{i+1}; c_i) \neq 0; \; 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1,$$

то t_i лежит в некотором i-интервале $[\beta_i, \gamma_i]$ (так как иначе дуга $a_i^{t_i} a_{i+1}^{t_{i+1}}$ не содержала бы точки c_i). Так как при $i < j$, i-интервал $[\beta_i, \gamma_i]$ и j-интервал, содержащий $t_j > t_i$ не пересекаются, то $\gamma_j > \beta_j > \gamma_i > \beta_i$. Системы 1-интервала $[\beta_1, \gamma_1]$, 2-интервала $[\beta_2, \gamma_2]$ и, наконец, n-интервала $[\beta_n, \gamma_n]$, где $\beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \gamma_n$, называются допустимой системой i-интервалов, $i = 1, 2, \ldots n$.

Имеем: правая часть (2) равна

$$\sum{}' \int\limits_{t_1=\beta_1}^{\gamma_1} d\Psi_1(t_1, q_1, q_2; c_1) \int\limits_{t_2=\beta_2}^{\gamma_2} d\Psi_1(t_2, q_2, q_3, c_2) \ldots \int\limits_{t_{n-1}=\beta_n}^{\gamma_n} d\Psi_1(t_n; q_n, q_{n+1}; c_n), \quad (2')$$

где сумма Σ' распространяется на все допустимые системы i-интервалов

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n].$$

В самом деле, произведение скачков

$$\Pi \, d\Psi_1(t_i, q_i, q_{i+1}, c_i), \quad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1,$$

отлично от нуля, лишь если все t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат допустимой системе i-интервалов; поэтому левую часть (2) можно заменить (2′), выкинув те системы интервалов интеграции, на которых это произведение $= 0$.

Но для допустимой системы интервалов $[\beta_i, \gamma_i]$,

$$i = 1, 2, \ldots, n, \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{t_i=\beta_i}^{\gamma_i} d\Psi_1(t_i; q_i, q_{i+1}; c_i)$$

не зависит от выбора дуг $\widetilde{a_i^t a_{i+1}^t}$, лишь бы эти дуги были по длине меньше 2ε. В самом деле, пленка, образованная дугами $\widetilde{a_i^t a_{i+1}^t}$, где t пробегает i-интервал $[\beta_i, \gamma_i]$, имеет границей

$$[\beta_i, \gamma_i; q_i] + \widetilde{a_i^{\gamma_i} a_{i+1}^{\gamma_i}} - [\beta_i, \gamma_i, q_{i+1}] - \widetilde{a_i^{\beta_i} a_{i+1}^{\beta_i}};$$

степень покрытия этой пленкой точки c_i равна интегралу

$$\int\limits_{t_i=\beta_i}^{\gamma_i} d\Psi_1(t_i, q_i, q_{i+1}, c_i);$$

при переходе к новой системе дуг $\widehat{a_i^t a_{i+1}^t}$ длины меньше 2ε наша пленка заменится новой, граница которой отличается от прежней границы тем, что дуги $\widetilde{a_i^{\gamma_i} a_{i+1}^{\gamma_i}}$, $\widetilde{a_i^{\beta_i} a_{i+1}^{\beta_i}}$ заменены на $\widehat{a_i^{\gamma_i} a_{i+1}^{\gamma_i}}, \widehat{a_i^{\beta_i} a_{i+1}^{\beta_i}}$. Так как $\alpha = 10\varepsilon$, концы этих дуг лежат на границе $S(c_i, \alpha)$ и длины их меньше 2ε, то такая замена не меняет степени покрытия пленкой точки c_i, т. е. значения нашего интеграла, а значит и (2′) не меняет функции f_n^ε, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать независимость от системы дуг значения $\Psi_n^\varepsilon[t; q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, \ldots, c_n]$, если t, $0 < t \leqslant 1$, лежит вне любого i-интервала.

Мы доказали независимость (2′) от выбора систем дуг. К этому случаю сведется и независимость (2′) от выбора параметра. Пусть на кривых $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ выбраны две системы параметров t и τ, так что все точки b_i^τ, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, кривых q_i, отвечающие общему значению параметра τ (так же как и точки a_i^t кривых q_i, отвечающие общему значению параметра t), друг от друга удалены на расстояние меньшее ε. И пусть, далее, проведены системы геодезических дуг $\overline{b_i^\tau b_{i+1}^\tau}$ (длины $\leqslant \varepsilon$), соединяющих точки кривых b_i^τ и b_{i+1}^τ. Пусть на кривой q_i переход от параметра τ к t определяется монотонной функцией $t = \varphi_i(\tau)$; тогда $b_i^\tau = a_{i+1}^{\varphi_i(\tau)}$, $b_{i+1}^\tau = a_{i+1}^{\varphi_{i+1}(\tau)}$; если $t = \varphi_i(\tau)$, $t' = \varphi_{i+1}(\tau)$, то, вообще говоря, $t \neq t'$, $\varphi_{i+1}(\tau) \neq \varphi_i(\tau)$. Обозначим через $\widehat{a_i^t a_{i+1}^t}$, $t = \varphi_i(\tau)$ дугу

$$\overline{b_i^\tau b_{i+1}^\tau} + [\varphi_{i+1}(\tau); \varphi_i(\tau); q_{i+1}] = \overline{a_i^t a_{i+1}^{t'}} + [t', t; q_{i+1}],$$

где выражение в квадратных скобках означает часть дуги q_{i+1}, отвечающую интервалу $[t, t']$ значений параметра t. Пленка, образованная дугами $\widehat{a_i^t a_{i+1}^t}$, совпадает с пленкой, образованной дугами $\overline{b_i^\tau b_{i+1}^\tau}$. В самом деле, дуги обеих систем отличаются только частями одной и той же граничной для пленок кривой q_{i+1}. Значит, мы свели влияние замены параметра на пленки, заменой влияния на них перемены системы дуг при той же параметризации, т. е. к уже доказанному случаю. Лемма доказана полностью.

Функции f_n^ε при $\varepsilon \to 0$ определяют на R n-мерный ∇-комплекс $T^n_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$. Мы докажем, что он есть ∇-цикл

Обозначим символически кратный интеграл

$$\int_0^d d\Psi_1(t_1; q_{i_1}, q_{j_1}; c_1) \int_{t_1}^d d\Psi_1(t_2; q_{i_2}, q_{j_2}; c_2) \ldots \int_{t_{n-1}}^d d\Psi_1(t_n; q_{i_n}, q_{j_n}; c_n)$$

через

$$(q_{i_1}, q_{j_1})(q_{i_2}, q_{j_2}) \ldots (q_{i_n}, q_{j_n}). \tag{6}$$

Символическое произведение (6) есть сумма обычных произведений [типа (3)] скачков соответственных функций Ψ_1.

Лемма 2. $T^n_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ *есть n-мерный* ∇*-цикл.* Для этого надо доказать для $(n+2)$ элементов R: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}$ равенство

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (q_1, q_2)(q_2, q_3) \ldots (q_{i-1}, q_i)(q_i, q_{i+2})(q_{i+2}, q_{i+3}) \ldots (q_{n+1}, q_{n+2}) = 0$$

[первое слагаемое в левой части (6) $(i=0)$ есть $\prod_{j=2}^{n+1}(q_j, q_{j+1})$, последнее: $(-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (q_j, q_{j+1})$].

Докажем это предложение методом индукции по n. При $n=1$ оно верно [ср. (1)]:

$$(q_2, q_3) - (q_1, q_3) + (q_1, q_2) = 0. \tag{7}$$

Пусть при $n=k$ для $k+1$ элементов $q_1, q_2, \ldots, q_{k+1} \subset R$ имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (q_1, q_2)(q_2, q_3) \ldots (q_{i-1}, q_i)(q_i, q_{i+2}) \ldots (q_k, q_{k+1}) = 0.$$

Отсюда, добавляя лишний множитель (q_{k+1}, q_{k+2}), имеем

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (q_1, q_2)(q_2, q_3) \ldots (q_{i-1}, q_i)(q_i, q_{i+2})(q_k, q_{k+1})(q_{k+1}, q_{k+2}) = 0. \tag{8}$$

Вычтя левую часть (8) из (9),

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (q_1, q_2)(q_2\ q_3) \ldots (q_{i-1}, q_i)(q_i, q_{i+2}) \ldots (q_k, q_{k+1})(q_{k+1}, q_{k+2}), \tag{9}$$

получим [так как у них отличны лишь последние два слагаемые в (9) и последнее слагаемое в (8)]:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(q_1, q_2)(q_2, q_3)\dots(q_{i-1}, q_i)(q_i, q_{i+2})\dots(q_k, q_{k+1})(q_{k+1}, q_{k+2}) =$$
$$= (-1)^k(q_1, q_2)(q_2, q_3)\dots(q_{k-1}, q_k)(q_k, q_{k+2}) +$$
$$+ (-1)^{k+1}(q_1, q_2)(q_2, q_3)\dots(q_{k-1}, q_k)(q_k, q_{k+1}) -$$
$$- (-1)^k(q_1, q_2)(q_1, q_3)\dots(q_{k-1}, q_k)(q_{k+1}, q_{k+2}) =$$
$$= (-1)^k(q_1, q_2)(q_2, q_3)\dots(q_{k-1}, q_k)\{(q_k, q_{k+2}) - (q_k, q_{k+1}) - (q_{k+1}, q_{k+2})\} = 0$$

[в силу (7)]. Тем самым наше равенство (6) доказано по индукции от k к $k+1$, и доказана лемма.

Лемма 3. Если $c_1, c_2, \dots, c_n$ *и* $d_1, d_2, \dots, d_n$ *две системы из* n *точек (отличных от* a *и* b *на* S_2*), то* $T^n_{c_1c_2\dots c_n} \underset{\nabla}{\infty} T^n_{d_1d_2\dots d_n}$. Мы можем непрерывным и дифференцируемым образом деформировать сферу S_2 в себя, так что точки c_i, $i=1, 2, \dots, n$ перейдут в d_i, пространство R перейдет в себя, а каждое R_N перейдет в часть некоторого $R_{N'}$. Пусть x_n — n-мерный Δ-цикл. Он перейдет в Δ-цикл x_n', Δ-гомологичный x_n. Пусть N' — максимум длин образов x_n во время деформации x_n в x_n'. $x_n \Delta$ -гомологично x_n' во всяком $R_{N''}$ при $N'' \geqslant N'$. Индекс пересечения $T^n_{c_1c_2\dots c_n} \times x_n$ совпадает с индексом пересечения $T^n_{d_1d_2\dots d_n} \times x_n'$, но так как $x_n' \underset{\Delta}{\infty} x_n$, то последний индекс равен $T^n_{d_1d_2\dots d_n} \times x_n$. Итак, при любом n-мерном Δ-цикле x_n

$$(T^n_{d_1d_2\dots d_n} - T_{c_1c_2\dots c_n}) \times x_n = 0. \tag{10}$$

Отсюда следует ∇-гомологичность нулю разности в левой части (10) в любом $R_{N'}$ при достаточно большом N', что доказывает лемму.

Будем обозначать через T^n любой из гомологичных друг другу ∇-циклов $T^n_{c_1c_2\dots c_n}$.

Для полноты изложения, мы покажем, что определенные выше классы ∇-гомологии не зависят от упорядочения всюду плотной сети.

Функции g_n^ε, определяющие n-мерный ∇-цикл, гомологичный нулю, будем называть эквивалентными нулю и будем писать $g_n^\varepsilon \simeq 0$, равенство $h_n^\varepsilon \simeq g_n^\varepsilon$ означает

$$h_n^\varepsilon - g_n^\varepsilon \simeq 0.$$

Обозначим через s_{ij} $(i \neq j)$ символическое произведение

$$(q_1, q_2)(q_2, q_3)\dots(q_{i-1}, q_i)(q_{i+1}, q_{i+2})(q_{i+2}, q_{i+3})\dots(q_j, q_{j+1}),$$
$$(q_j, q_{j+1})(q_{j+1}, q_{j+2})\dots(q_n, q_{n+1})$$

[отсутствует „множитель" (q_i, q_{i+1}) и дважды повторяется (q_j, q_{j+1})].

Лемма 4. $s_{ij} \cong 0$.

При $i=1$ или $i=n$ это вытекает из того, что s_{ij} и s_{nj} не зависят от q_1, соответственно, от q_n. Пусть $i<j$. Так как

$$(q_{i-1}, q_i) = (q_{i-1}, q_{i+1}) - (q_{i-1}, q_i),$$

то

$$s_{ij} = -s_{i-1,j} + (q_1, q_2) \dots (q_{i-2}, q_{i-1})(q_{i-1}, q_{i+1})(q_{i+1}, q_{i+2}) \dots (q_n, q_{n+1}),$$

где второе слагаемое, не зависящее от q_i, эквивалентно нулю. Итак, $s_{ij} \cong s_{i-1,j}$ и далее, $s_{ij} \cong s_{i-1,j} \cong s_{i-2,j} \cong (-1)^{i-1} s_{1j} \cong 0$. Аналогично, при $i>j$,

$$s_{ij} \cong s_{i-1,j} \cong s_{i+2,j} \cong (-1)^{n-i} s_{1j} \cong 0.$$

Лемма 5.

$$(q_{i_1}, q_{i_2})(q_{i_2}, q_{i_3}) \dots (q_{i_n}, q_{i_{n+1}}) \cong$$
$$\cong \operatorname{sign}(i_1, i_2, \dots, i_n)(q_1, q_2)(q_2, q_3) \dots (q_n, q_{n+1}). \qquad (11)$$

Достаточно доказать эту лемму для случая транспозиции, переставляющей пару элементов q_i и q_{i+1}. В этом случае (11) принимает вид $(q_1, q_2) \dots (q_{i-2}, q_{i-1})(q_{i-1}, q_{i+1})(q_{i+1}, q_i)(q_i, q_{i+2})(q_{i+2}, q_{i+3}) \dots (q_n, q_{n+1}) \cong$

$$\cong -(q_1, q_2)(q_2, q_3) \dots (q_{i-2}, q_{i-1})(q_{i-1}, q_i) \cdot$$
$$(q_i, q_{i+1})(q_{i+1}, q_{i+2}) \dots (q_n, q_{n+1}). \qquad (12)$$

Имеем

$$\begin{aligned}(q_i, q_{i+2}) &= (q_i, q_{i+1}) + (q_{i+1}, q_{i+2})\\ (q_{i+1}, q_i) &= -(q_i, q_{i+1})\\ (q_{i-1}, q_{i+1}) &= (q_{i-1}, q_i) + (q_i, q_{i+1}).\end{aligned} \qquad (12')$$

Подставив в левую часть (12), вместо множителей (q_{i-1}, q_{i+1}), (q_{i+1}, q_i), (q_i, q_{i+2}), их выражения из (12'), мы заменим ее несколькими слагаемыми, из которых одно совпадает с правой частью, а остальные, в силу предыдущей леммы, эквивалентны нулю. Итак, для случая транспозиции лемма доказана. Последовательным применением она докажется в общем случае. Из леммы 5 и определения функции f_n следует:

Определение цикла $T^n_{c_1 c_2 \dots c_n}$ не зависит с точностью до гомологии от упорядочения всюду плотной сети.

§ 16. Δ-циклы в R

Пусть a и b диаметрально противоположные точки сферы S_2. Установим на S_2 сферическую систему координат, причем a и b примем за полюсы и полукруги, соединяющие эти точки, — за меридианы; один из этих меридианов — за нулевой. Долготы будем выражать в радианах; долгота λ есть циклическая координата. Меридиан $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ будем обозначать символом (λ_0). При изменении λ от 0 до 2π меридиан (λ) описывает всю сферу. Принимая полюс a за начало, и b за конец, установим на S_2 ориентацию, совпадающую с ориентацией двуугольника, ограниченного парой близких меридианов (λ_1) и (λ_2), $(\lambda_1)-(\lambda_2)$, где (λ_1) обходится в направлении от a и b.

В дальнейшем мы будем считать циклическую координату (λ) удовлетворяющей условию $0 \leqslant \lambda < 2\pi$, если нет специальных оговорок.

Будем называть n-меридианом или полимеридианом из n звеньев и обозначать $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ кривую q, составленную из меридианов $(\lambda_1), (\lambda_2), \ldots, (\lambda_n)$, последовательно обходимых, начиная от точки a, так что (λ_1) обходится от a к b, (λ_2) от b к a. Вообще (λ_i) при i нечетном — от a к b, при i четном — от b к a, т. е.

$$q = (\lambda_1) - (\lambda_2) + \ldots + (-1)^n (\lambda_n).$$

При n нечетном n-меридиан имеет a в качестве начальной и в качестве конечной точки, т. е. входит в $R(S_2, a, b)$.

Обозначим через t_n при n нечетном совокупность всех n-меридианов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ при всевозможных значениях координат $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Обозначим через t_n при n четном совокупность всех $(n+1)$ меридианов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}^0)$ при всевозможных значениях координат $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и фиксированном значении $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}^0$. Так определенные множества кривых t_n при n нечетном и четном суть подмножества $R = R(S_2, a, b)$ и представляют собой n-мерные Δ-циклы в R и для фиксированного n — во всех R_N при достаточно больших N.

Каждое t_n представляет собой n-мерный тор, причем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — циклические координаты на этом торе.

Циклы в t_n. Тор t_n имеет n независимых одномерных Δ-циклов t_1^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, задаваемых системами $(n-1)$ уравнений $\lambda_j = \text{const}$, где $j \neq i$.

Двойственным к t_1^i $(n-1)$-мерным Δ-циклом является $(n-1)$-мерный тор t_{n-1}^i, определяемый уравнением $\lambda_i = \text{const}$. Имеем

$$t_{n-1}^i \times t_1^j = \delta_{ij} \; [\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j].$$

Примечание. В случае n четного, положив фиксированную координату $\lambda_{n+1}^0 = 0$, будем сокращенно писать $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, вместо $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0)$.

Мы этим $(n-1)$-мерным Δ-циклом будем относить эквивалентные им одномерные ∇-циклы.

Рассмотрим две „точки" в t_n: $q_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), q_2(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, расстояние между которыми меньше некоторого фиксированного ε (достаточно малого: $\varepsilon < h$) и, следовательно,

$$|\bar{\lambda}_i - \lambda_i| < \varepsilon, \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим через $F_1^\varepsilon(q_1 q_2)$ функцию от пар точек q_1 и q_2 тора t_n, для которых $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$,

$$q_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \quad q_2 = (\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots, \bar\lambda_n),$$

определенную следующим образом. Именно, предполагая для простоты $\lambda_i^0 \neq 0$, положим

$$\begin{aligned} &F_i^\varepsilon(q_1, q_2) = 1, \text{ если } \lambda_i < \lambda_i^0 < \bar\lambda_i, \\ &F_i^\varepsilon(q_1, q_2) = -1, \text{ если } \lambda_i > \lambda_i^0 > \bar\lambda, \\ &F_i^\varepsilon(q_1, q_2) = 0, \text{ если } \lambda_i - \lambda_i^0 \text{ и } \bar\lambda_i - \lambda_i^0 \end{aligned} \tag{13}$$

имеют равные знаки.

Система функций F_i^ε при $\varepsilon \to 0$ определяет одномерный ∇-цикл, носителем которого является $n-1$-мерный тор t_i^{n-1}. Обозначим этот цикл через Z_1^i. Цикл Z_1^i двойственен одномерному Δ-циклу t_1^i,

$$Z_1^i \times t_1^j = \delta_{ij}.$$

Отсюда следует эквивалентность ∇-цикла Z_1^i, Δ-циклу t_{n-1}^i дополнительной размерности.

Рассматривая t_n как n-мерный цикл на самом себе, имеем

$$(Z_1^1 \times Z_1^2 \times \ldots \times Z_1^n) \times t_n = 1.^*$$

Это следует из эквивалентности Z_1^i и t_{n-1}^i и равенства в $t_n : t_{n-1}^1 \times \times t_{n-2}^2 \times \cdots \times t_{n-1}^n = 1$.

Дадим другое выражение для функций F_i^ε. Определим на полимеридианах $q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ параметр τ так, что при обходе меридиана (λ_1) от a к b τ менялось от 0 до 1, при обходе меридиана (λ_2) от b к a, τ менялось от 1 до 2 и т. д. Вообще при соответственном обходе (λ_i) τ меняется от $i-1$ до i; в целом τ меняется от 0 до n**. При этом точки, отвечающие одному значению τ на разных полимеридианах, лежат на одной параллели.

Пусть $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$. Соединяя точки a_τ и b_τ кривых q_1 и q_2, отвечающих одинаковым значениям параметра τ, малыми дугами параллелей $a_\tau b_\tau$, мы обозначим через $\Psi_1^\varepsilon(\tau_1, \tau_2; q_1, q_2; c)$ степень покрытия точки c пленкой, составленной из дуг $a_\tau b_\tau$ при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$.

Лемма 6. Пусть точка a_i лежит на меридиане (λ_i^0). Имеем

$$\Psi_1^\varepsilon(i-1, i; q_1, q_2; a_i) = (-1)^{i-1} F_i^\varepsilon(q_1, q_2).$$

На кривых $q_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и $q_2(\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots, \bar\lambda_n)$ меридианы $(-1)^i(\lambda_i)$ и $(-1)^i(\bar\lambda_i)$ отвечают интервалам $(i-1, i)$ параметра τ. Соединив точки a_τ и b_τ при

---

* Произведение в скобках означает произведение в смысле Александера.

** При n четном дополнительному интервалу параметра τ $[n, n+1]$ отвечает общая фиксированная часть всех полимеридианов из t_n.

всех $i-1 \leqslant \tau \leqslant i$ дугами $a_\tau b_\tau$, получим пленку, натянутую на двуугольнике, образованном меридианами (λ_i) и $(\bar{\lambda}_i)$ с границей $(-1)^{i-1}[(\lambda_i)-(\bar{\lambda}_i)]$. Если $\lambda_i < \lambda_i^0 < \bar{\lambda}_i$, точка a_i лежит на этой пленке, ориентация $(-1)^{i-1}[(\lambda_i)-(\bar{\lambda}_i)]$ совпадает с ориентацией сферы S_2 и порядок точки a_i относительно этой пленки равен $(-1)^{i-1}$.

Если $\lambda_i > \bar{\lambda}_i > \bar{\lambda}$, то эта пленка покрывает a_i, но порядок a_i относительно пленки равен $-(-1)^{i-1}$ (так как ориентация $(-1)^{i-1}[(\lambda_i)-(\bar{\lambda}_i)]$ обратна ориентации сферы S_2).

В остальных случаях точки a_i лежат вне соответственной пленки, и соответственный порядок равен 0.

Сравнивая полученные результаты с (13), получаем

$$F_1^\varepsilon(q_1, q_2) = (-1)^{i-1}\Psi_1^\varepsilon(i-1, i, q_1, q_2; a_i).$$

Лемма доказана.

§ 17. Индекс пересечения ∇ и Δ-циклов в R

В пространстве R (при достаточно больших N) во всех R_N определены ∇-циклы T^n и Δ-цикл t_n. Эти n мерные циклы двойственны. Именно:

Теорема 1. $T^n \times t_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Для определения индекса пересечения $T^n \times t_n$ в пространстве R_N, где $R_N \supset t_n$, найдем индекс пересечения в многообразии t_n n-мерного ∇-цикла $\overline{T^n}$ индуцированного T^n с самим t_n, рассматриваемым как n-мерный Δ-цикл.

Но, как мы сейчас покажем, в торе t_n цикл $\overline{T^n}$ совпадает с

$$\overline{T^n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} Z_1^1 \times Z_1^2 \times \ldots \times Z_1^n, \tag{14}$$

т. е. с точностью до знака с произведением Александера n ∇-циклов Z_1^i, определенных в прошлом параграфе. Из (13) и (14) будет следовать наша теорема.

Выбрав всюду плотную сеть на R_N, содержащую всюду плотную подсеть на t_n, мы для группы $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ полимеридианов из t_n, принадлежащих этой сети, и с индексами, растущими вместе с порядковым номером кривой как элемента этой сети, сравним функции

$$f_n^\varepsilon(q_1, q_2 \ldots, q_{n+1}),$$

определяющие цикл $\overline{T^n}$, индуцированный T^n на t_n, с функциями

$$F_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}),$$

определяющими $Z_1^1 \times Z_1^2 \times \ldots \times Z_1^n$. Параметр τ на полимеридианах выбран, как в предыдущем параграфе. В силу леммы 7 и определения произведения Александера, имеем

$$F_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n} F_i^\varepsilon(q_i, q_{i+1}) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Psi_1^\varepsilon(i-1, i; q_i, q_{i+1}; a_i) = \tag{15}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} d\Psi_1^\varepsilon(\tau_i; q_i, q_{i+1}; a_i).$$

Далее [см. (4) и (2)]

$$f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) =$$
$$= \int_0^n d\Psi_1^\varepsilon(\tau_i; q_1, q_2; a_1) \int_{\tau_1}^{n} d\Psi_1^\varepsilon(\tau_2; q_2, q_3; a_2) \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{\tau} d\Psi^\varepsilon(\tau_n, q_n, q_{n+1}; a_{n+1}). \tag{16}$$

Для доказательства теоремы нужно доказать совпадение правых частей (15) и (16).

Выберем точки a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, лежащими на разных меридианах (λ_i), а числа $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ такими, чтобы ни один меридиан не пересекал двух из кругов $S(a_i, \alpha)$; далее $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{4}$; рассмотрим $n+1$ полимеридианов q_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, где $S(q_i, q_0') < \varepsilon$. Легко убедиться в этих предположениях в совпадении интегралов, стоящих в правых частях (15) и (16). В самом деле, рассмотрим при $\tau \in [i-1, i]$ дуги $a_i^\tau\, a_{i+1}^\tau$, соединяющие точки кривых q_i и q_{i+1}, с общим значением параметра τ. Если

$$d\psi_1^\varepsilon(\tau_i, q_i, q_{i+1}, \varepsilon) \neq 0,$$

дуги $a_i^\tau\, a_{i+1}^\tau$ содержат точку a_i; кривая q_i пересекает круг $S(a_i, \varepsilon)$, остальные кривые $q_1 \cdots q_n$ пересекают $S(a_i, \alpha)$. Произведение

$$\prod_{i=1}^{n} d\psi_1(\tau_i, q_i, q_{i+1}, a_i), \qquad 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < n, \tag{17}$$

может быть отлично от нуля, если все кривые q_j, $j = 1, \ldots, n+1$, пересекают все круги $S(a_i, \alpha)$, причем последовательно в порядке индексов τ_i. А так как каждый составляющий меридиан кривых q_j пересекает лишь один из этих кругов, то, очевидно, в таком случае круг $S(a_i, \alpha)$ пересекает i-тый составляющий меридиан этих кривых.

Для значения параметра τ_i, при котором произведение (17) отлично от нуля, дуга $a_i^{\tau_i}\, a_{i+1}^{\tau_i}$ содержит a_i, и значит τ_i лежит в интервале $[i-1, i]$, отвечающем i-тому меридиану. Поэтому, заменяя в интегралах пределы в правой части (16) числами $i-1$ и i, мы не изменим величины этого интеграла. Тем самым доказано совпадение правых, а значит и левых частей (15) и (16) и, в силу предыдущего, доказана теорема.

Из теоремы 1 следует негомологичность нулю (по любому модулю $p>0$) Δ-циклов t_n и ∇-циклов T^n.

Лемма 6. В пространстве $R=R(S_2, a, b)$ не существует n-мерных Δ-циклов, линейно независимых от t_n.

Пусть на S_2 установлена метрика эвклидовой сферы. Выберем точки a и b не диаметрально противоположными. Пусть r_1 и r_2 — меньшая и большая дуги большого круга r, соединяющие a и b, и пусть направление от a к b по дуге r_1 есть положительное. Обозначим через r_{2n+1} дугу r_1+nr, через r_{2n+1} — дугу r_2-nr (они состоят из дуг, соответственно, r_1 и r_2 и n раз обойденной окружности r). Совокупность дуг r_k, $k=1$, 2, 3, 4... исчерпывает все геодезические дуги, соединяющие a и b. Дуга r_k содержит $(k-1)$-у точку, сопряженную с a, причем b не сопряжено с a, т. е. дуга r_k есть невырожденная в смысле Mors'a [1] геодезическая дуга $(k-1)$-ого порядка. Число линейно независимых n-мерных Δ-циклов в R не больше числа геодезических дуг k-го порядка, соединяющих a и b, это доказано Morse'ом для случая гомологий по модулю 2. Но доказательство Morse'a остается справедливым и при гомологиях по любому простому модулю (и с любым полем коэффициентов, которое будем рассматривать ниже). Поэтому в R не существует двух линейно независимых Δ-циклов любой размерности (так как существует единственная геодезическая дуга любого порядка, соединяющая a и b).

Так как t_n негомологично нулю, то любой n-мерный цикл линейно зависит от t_n, т. е.

$$z_n \sim 0 \text{ или } z_n \sim qt_n,\ 0<q<p. \tag{18}$$

Лемма 7. Если Z^n есть n-мерный Δ-цикл, такой, что $Z^n \times t_n = q$, то

$$Z^n \overset{\sim}{\nabla} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} qT^n. \tag{19}$$

В самом деле, если

$$U^{(n)} = Z^n - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} qT^n,$$

то из условий леммы и теоремы 1:

$$U^{(n)} \times t_n = 0.$$

Но для любого n-мерного Δ-цикла z_n в силу (18)

$$U^n \times z_n = 0;$$

поэтому $U^n \overset{\sim}{\nabla} 0$, что доказывает лемму. Всякий n-мерный ∇-цикл гомологичен 0 или qT^n $0<q<p$.

Мы нашли структуру всех групп Δ и ∇-гомологий по любому простому модулю p. Пусть теперь Δ-гомологии рассматриваются с группой коэффициентов K-аддитивной группой вещественных чисел по модулю 1 и, соответственно ∇-гомологии „по модулю 0“, т. е. с аддитивной группой коэффициентов — целых чисел.

Теорема 1 сохранит силу, если ее формулировать: для любого α, $0<\alpha<1$,

$$T^n \times \alpha t_n = \alpha \neq 0,$$

что доказывает негомологичность нулю T^n и αt_n.

Аналогично доказывается, что всякий n-мерный Δ-цикл гомологичен 0 или αt_n, $0<\alpha<1$, всякий n-мерный ∇-цикл гомологичен 0 или qT^n, q — любое целое число.

§ 18. Произведения ∇-циклов в R. Произведение $T^n \times T^m$

Введем следующее понятие. Пусть даны две системы элементов, например чисел $(1, 2, \ldots, n)$ и $(n+1, n+2, \ldots, n+m)$.

Назовем перестановку $(n+m)$ элементов обеих систем *допустимой*, если она сохраняет относительный порядок следования для элементов первой системы и для элементов второй системы. Например, из элементов $(1, 2)$, $(3, 4)$ можно составить 6 допустимых перестановок: $(1, 2, 3, 4)$; $(1, 3, 2, 4)$; $(1, 3, 4, 2)$; $(3, 1, 2, 4)$; $(3, 1, 4, 2)$; $(3, 4, 1, 2)$. Перестановка же $(2, 1, 3, 4)$ не есть допустимая, ибо она нарушает порядок следования элементов $(1, 2)$ первой системы.

Образуем всевозможные допустимые перестановки $(n+m)$ элементов двух систем $(1, 2, \ldots, n)$, $(n+1, n+2, \ldots, n+m)$ из n и m элементов. Будем обозначать через $C_{n,m}$ разность между числом четных и нечетных из этих допустимых перестановок. Например, из 6 допустимых перестановок элементов $(1, 2)$, $(3, 4)$, приведенных выше, 4 четных $(1, 2, 3, 4)$; $(1, 3, 4, 2)$; $(3, 1, 2, 4)$; $(3, 4, 1, 2)$ и 2 нечетных $(1, 3, 2, 4)$; $(3, 1, 4, 2)$. Итак, $C_{2,2} = 4 - 2 = 2$. Иначе говоря,

$$C_{n,m} = \Sigma' \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}),$$

где сумма Σ' берется по всем допустимым перестановкам $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m})$ элементов $(1, 2, \ldots, n)$, $(n+1, n+2, \ldots, n+m)$.

Теорема 2.

$$T^n \times T^m \overset{\infty}{\nabla} C_{n,m} T^{n+m}. \tag{20}$$

Пусть циклы $T^n_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ и $T^m_{c_{n+1} \ldots c_{n+m}}$ определяются по формулам (4) и (5) функциями f^n_ε и f^m_ε.

В силу определения произведения циклов по Александеру, для $(n+m)$ элементов $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots q_{n+m+1}$,

$$\rho(q_i, q_j) < \varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n+m+1,$$

взятых из сети упорядоченных согласно их порядку в сети, строится функция

$$F^\varepsilon_{n+m}(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+m+1}) =$$
$$= f^\varepsilon_n(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}; c_1, c_2, \ldots c_n) \cdot f^\varepsilon_m(q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+m+1}; c_{n+1}, c_{n+m}).$$

В силу определения f_n^ε и f_ε^m, переходя от записи их в виде интегралов Стильтьеса к записи (3) в виде произведения скачков

$$F_{n+m}^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+m+1}) =$$

$$= \sum{}' \prod_{i=1}^{n} d\Psi_1^\varepsilon(t_i, q_i, q_{i+1}, c_i) \cdot \prod_{j=1}^{m} d\Psi_1^\varepsilon(t_{n+j}, q_{n+j}, q_{n+j+1}, c_{n+j}), \qquad (21)$$

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1 \quad 0 < t_{n+1} < t_{n+2} < \ldots < t_{n+m} < 1,$$

где сумма Σ' распространяется на все произведения скачков, отличные от 0, для которых значения t_i, t_{n+j} удовлетворяют соответственным неравенствам.

Правую часть (19) можно представить в виде

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m})}'' \left\{ \prod_{k=1}^{n+m} d\Psi_1^\varepsilon(\tau_k, q_{i_k}, q_{i_{k+1}}, c_{i_k}) \right\}, \qquad (22)$$

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n+m} < 1,$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m})$ — допустимая перестановка

$$(1, 2, \ldots, n), \ (n+1, n+2, \ldots, n+m).$$

Сумма Σ'' берется по всем допустимым перестановкам этих $(n+m)$ элементов, а для всякой допустимой перестановки сумма Σ' берется по всем отличным от нуля произведениям скачков для значений параметров τ_k, удовлетворяющих соответственным неравенствам.

Переходя от записи в виде сумм к записи в виде интегралов Стильтьеса, получим

$$F_{n+m}^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+m+1}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_{n+m}}'' \int_0^1 d\Psi_1^\varepsilon(\tau_1, q_{i_1}, q_{i_2}, c_{i_1}) \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau_1}^1 d\Psi_1^\varepsilon(\tau_2, q_{i_2}, q_{i_3}, c_{i_2}) \ldots \int_{\tau_{n+m-1}}^1 d\Psi_1^\varepsilon(\tau_{n+m}, q_{i_{n+m}}, q_{i_{n+m+1}}, \bar{c}_{i_{n+m}}), \qquad (23)$$

где сумма Σ'' берется по всем допустимым перестановкам.

Зависящая от перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m})$ функция, стоящая под знаком суммы в первой части (21), определяет некоторый $(n+m)$-мерный ∇-комплекс, который обозначим $T^{n+m}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}}$.

Из (21) следует:

$$T^n \times T^m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}} T^{n+m}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}}.$$

Отсюда.

$$(T^n \times T^m) \times (t_{n+m}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}}'' T^{n+m}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}} \times t_{n+m}. \qquad (24)$$

Каждое произведение в правой части (24) равно, в силу рассуждений, повторяющих доказательство теоремы 1 (§ 17), произведению в t_{n+m} группы $(n+m)$ одномерных ∇-циклов:

$$(-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} Z_1^{i_1} \times Z_1^{i_2} \times \ldots \times Z_1^{i_{n+m}} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}).$$

Подставляя в (22), получим:

$$(T^n \times T^m) \times t_{n+m} = (-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}}'' \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+m}) =$$

$$= (-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} C_{n,m}.$$

Из последнего равенства и равенства (19) следует доказываемое равенство (20).

Примеры. Из элементов $(1, 2, \ldots, m)$ и $(m+1)$ можно образовать $m+1$ допустимую перестановку

$$(1, 2, \ldots, i, m+1, i+1, \ldots, m), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

При этом $\operatorname{sign}(1, 2, \ldots, i, m+1, i+1, \ldots, m) = (-1)^{m-i}$. Поэтому

$$C_{m,1} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} = \begin{cases} 1, & \text{при } m \text{ четном} \\ 0, & \text{при } m \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Итак,

$$T^{2k} \times T^1 \underset{\nabla}{\sim} T^{2k+1},$$

$$T^{2k+1} \times T^1 \underset{\nabla}{\sim} 0.$$

Далее,

$$C_{n,2} = \left[\frac{n+2}{2}\right].$$

В самом деле, все допустимые перестановки из $(1, 2, \ldots, n)$ $(n+1, n+2)$ имеют вид

$$(1, 2, \ldots, i, n+1, i+1, \ldots, j, n+2, j+1, \ldots, n),$$

$$0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$$

$$\operatorname{sign}(1, 2, \ldots, i, n+1, i+1, \ldots, j, n+2, j+1, \ldots, n) =$$

$$(-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}.$$

Отсюда

$$C_{n,2}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1-(-1)^{n-i+1}}{2}=$$

$$=\frac{n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{n+1}}{2}=\left[\frac{n+2}{2}\right].$$

Итак,

$$T^n\times T^2 \overset{\sim}{\underset{\nabla}{>}} \left[\frac{n+2}{2}\right] T^{n+2}.$$

§ 19. Применение к геодезическим дугам

Классы K-циклов в R. Мы полагали, что на S_2 принята метрика эвклидовой сферы; можно задать на S_2 на любую риманову метрику, тогда на кривых $q\in R$ определится функционал $I(q)$ — длина кривой q. При достаточно большом N, R_N содержит семейство t_n. На R определены l-мерные ∇-циклы T^l и класс (Z^l) ∇-циклов, гомологичных qT^l, где q — произвольное целое число, если гомологии по модулю 0, и $0<|q|<p$, если гомологии берутся по достаточно большому простому числу p и т. д.

Имеем при $Z^l\subset[Z^l]$, $Z^r\subset[Z^r]$, $Z^{l+r}\subset[Z^{l+r}]$

$$Z^l\times Z^r \overset{\sim}{\underset{\nabla}{>}} C_{n,r}Z^{l+r},$$

Так как $C_{n,1}=1$ при n четном, 0 при n нечетном, $C_{n,2}=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $Z^l\times Z^2 \not\sim 0$, если $p>l$ (гомологии mod p)

$$(Z^l\times Z^2)\in[Z^{l+2}], \tag{25}$$

и если l четное,

$$(Z^l\times Z^1)\in[Z^{l+1}]. \tag{25'}$$

Обозначим через (z_k), K-класс k-мерных Δ-циклов, для которых $Z^k\times z_k\neq 0$ при $Z^k\subset[Z^k]$, $z_k\subset[z_k]$. Тор t_k является представителем такого класса; эти классы непустые.

В силу (25) класс (z_k) подчинен классу (z_{k+2}) посредством класса $[Z^k]$, а при k четном, в силу (25'), класс $[Z^k]$ подчинен классу $[Z^{k+1}]$ посредством класса $[Z^1]$.

М. Морзе [10] обнаружил счетное множество геодезических дуг, соединяющих точки a и b на S_2; уточним этот результат.

Обозначим через c_k нижнюю границу максимумов I на циклах z_k класса (z_k). Имеем $c_k\leqslant c_{k+1}$.

Теорема 3. 1) Каждому c_k отвечает геодезическая длина c_k порядка k.

2) Числа c_k растут неограниченно, оставаясь заключенными между членами двух арифметических прогрессий.

3) Всегда $c_k<c_{k+2}$.

4) При k четном, если $c_k = c_{k+1} = c$, все геодезические дуги, исходящие из точки a, проходят через точку b, причем дуги их, ограниченные точками a и b, имеют равные длины c.

Первое из предложений непосредственно следует из теоремы 1 гл. I и 1 гл. III.

Поверхность уровня $(I = c_k)$ содержит непустое критическое множество; последнее содержится в множестве геодезических дуг длины c_k, соединяющих a и b.

То, что существует на $(I = c_k)$ геодезическая дуга порядка k т. е. содержащая k точек сопряженных с a, следует непосредственно из теории Морза, который доказал, что геодезическая дуга, порождаемая классом k-мерных циклов, может быть только порядка k. Морз [1] ограничился гомологиями по модулю 2, но его доказательства дословно переносятся на случай любого модуля.

Для доказательства 2) заметим следующее. Пусть H есть максимум расстояний между точками S_2, e и f — точки S_2, для которых $\rho(e, f) = H$; выберем точки a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ так, что a_i при нечетных индексах лежат в достаточной близости от e и при четных индексах лежат в достаточной близости от f так, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \rho(a_i, a_{i+1}) = nH - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Кривая q, проходящая через $a_1, a_2, \ldots, a_k$, имеет длину не меньше $nH - \varepsilon$. Так как для любого цикла $z_k \in [z_k]$ и ∇-цикла $T^k_{a_1 a_2 \ldots a_k}$, индекс пересечения отличен от нуля, то z_k и носитель $T^k_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ имеют непустое теоретико-множественное пересечение; z_k содержит кривую q, входящую в носитель $T^k_{a_1 a_2 \ldots a_k}$, обходящую последовательно k точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Длина такой кривой не меньше $kH - \varepsilon$. Поэтому

$$c_k = \underset{z_k \in (z_k)}{\mathrm{ikf}} \ \sup_{q \in z_k} I(q) \geqslant kH - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \geqslant 0$ произвольно, то $c_k \geqslant kH$.

С другой стороны, отобразим аналитически сферу S_2 на самое себя так, что пара диаметрально противоположных точек a' и b' перейдет в a и b-меридианы, соединяющие a' и b' перейдут в некоторые кривые — искаженные меридианы. Пусть d максимум длин этих кривых. Полимеридианы с полюсами в a' и b', образующие семейство t_k' кривых, состоящих из k или $k+1$ меридианов, перейдут в кривые, состоящие из k или $k+1$ искаженных меридианов, и длины таких кривых не превосходят $(k+1)d$. Семейство t_k' полимеридианов перейдет в семейство t_k, на котором $I(q) \leqslant (k+1)d$. Но $t_k' \in [z_k]$, поэтому

$$\sup_{q \in t_k} I(q) \leqslant (k+1)d$$

$$c_k = \inf_{z_k \in (z_k)} \sup_{q \in z_k} I(q)$$

Итак,

$$c_k \leqslant (k+1)\,d,$$

$$kH \leqslant c_k \leqslant (k+1)\,d.$$

Случай слияния c_k. Перейдем теперь к разбору случая, когда

$$c_k = c_{k+i}.$$

Прежде всего покажем, что $c_k < c_{k+2}$. В самом деле, если $c_k = c_{k+2} = c$, то $(I = c)$ содержит критическое множество размерности 2. Класс (z_k) подчинен классу (z_{k+2}) посредством класса $[Z^2]$. В силу основной теоремы, при $c_k = c_{k+2} = c$, „поверхность уровня“ $I = c$ содержит критическое множество размерности 2. А значит существует множество геодезических дуг, соединяющих a и b длины c, имеющее размерность 2. Но так как множество всех таких дуг не может иметь размерность 2, то это доказывает пункт (3) теоремы.

Пункт (4) вытекает из подчинения классов (z_k) классу (z_{k+1}) при k четном. В случае $c_k = c_{k+1} = c$, $k = 2l$, $(I = c)$ содержит одномерный негомологичный нулю Δ-цикл из геодезических дуг. А в этом случае эти геодезические дуги длины c, соединяющие a и b, должны исходить из a по всем направлениям.

Примечание. Мы ограничились лишь теми Δ-циклами, которые являются K-циклами. Но введение произвольных Δ-циклов в R (во всех R_N) не даст нам новых классов гомологии. Пусть $0 < \varepsilon < h$. Рассмотрим ε-симплекс $(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$. Можно ввести на кривых q_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ параметр τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, так что точки a_i^{τ} кривых q_i, отвечающие общему значению параметра τ, отстоят друг от друга на расстоянии $\leqslant \varepsilon$. Построим обычный геодезический симплекс с $(n+1)$ вершинами a_i^{τ}, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, и рассмотрим точку $c = c(\tau; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$, имеющую на этом симплексе барицентрические координаты λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$; $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i \lambda_i = 1$. При фиксированных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ совокупность точек $c(\tau; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$ $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ образует кривую $q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$. Совокупность кривых $q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$ при всевозможных λ_i, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$ образует „нормальный“ n-мерных ε симплекс в R с вершинами $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$. Этот симплекс есть K-множество в R. Любой ε-комплекс можно аппроксимировать ε-комплексом, состоящим из нормальных ε-симплексов с теми же вершинами. Такой комплекс есть K-множество. В частности, любой Δ-цикл можно ε-аппроксимировать K-циклом, и введение произвольных циклов в R_N (и в R) не даст ничего нового с точки зрения классов гомологии сравнительно с K-циклами.

§ 20. Некоторые вопросы гомотопии в R

Обобщая введенное С. Фроловым и Л. Эльсгольцем понятие „длины“ цикла в n-мерном многообразии, можно определить понятие длины Δ-цикла в компакте.

Δ-цикл x имеет длину l, $\operatorname{long} x = l$ в компакте M, если существуют l, но не больше ∇-циклов $X_1, X_2, \ldots, X_l$ в M таких, что

$$(X_1 \times X_2 \times X_3 \ldots \times X_l) \times x \neq 0.$$

Теорема 4. Категория Δ-цикла x в M не меньше его длины плюс 1:

$$\operatorname{cat} x \geqslant \operatorname{long} x + 1.$$

В самом деле, пусть $\operatorname{long} x = l$, $\operatorname{cat} x \leqslant l$. Тогда существует l замкнутых частей $m_1, m_2, \ldots, m_l$ множества x таких, что $x = \sum\limits_{i=1}^{l} m_l$, $\operatorname{cat} m_i = 1$.

Так как $\operatorname{long} x = l$, существует l циклов $X_1, X_2, \ldots, X_l$, таких, что $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_l) \times x \neq 0$. А значит, теоретико-множественное пересечение носителей циклов $X_1, X_2, \ldots, X_l$ и x не пусто.

Так как $m_i (i = 1, 2, \ldots, l)$ сводится деформацией к точке, то всякий Δ-цикл в m_i гомологичен нулю. В силу теоремы о снятии цикла, существует ∇-цикл $\overline{X_i}$ гомологичный X_i, лежащий вне m_i. И так как

$$\overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \ldots \times \overline{X_l} \overset{\infty}{\nabla} X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_l,$$

то

$$(\overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \ldots \times \overline{X_l}) \times x \neq 0.$$

Но с другой стороны, каждое $\overline{X_i}$ лежит вне m_i, и их теоретико-множественное пересечение лежит вне $\sum\limits^{i} m_i = x$, т. е. теоретико-множественное пересечение носителей $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_l}$ и x пустое. Полученное [1] противоречие доказывает теорему. Доказательство повторяет доказательство теоремы для n-мерного случая с заменой теоремы Понтрягина о снятии цикла ее обобщением П. С. Александрова [3] на случай компакта.

Теорема 5. Категория множества t_n в R заключена между $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ и $n+1$:

$$\left[\frac{n+3}{2}\right] \leqslant \operatorname{cat} t_n \leqslant n+1.$$

Семейство t_n полимеридианов непосредственно разбивается на $n+1$ частей, не покрывающих каждая сферу S_2 и сводимых к одному полимеридиану, т. е. имеющих категорию 1. Отсюда следует левая часть неравенства.

Правая часть неравенства будет следовать из формулы

$$Z^n \times Z^2 \overset{\infty}{\underset{\nabla}{\sim}} C_{n,2}\, Z^{n+2}, \qquad C_{n,2} = \left[\frac{n+3}{2}\right] \neq 0,$$

$$Z^{2k} \times Z^1 \overset{\infty}{\underset{\nabla}{\sim}} Z^{2k+1}, \qquad Z^{2k+1} \times Z^1 \overset{\infty}{\underset{\nabla}{\sim}} 0$$

и теоремы 1.

В самом деле, при n четном, $n = 2l$

$$\underbrace{Z^2 \times Z^2 \times Z^2 \times \ldots \times Z^2}_{l \text{ раз}} \overset{\infty}{\underset{\nabla}{\sim}} C_l Z$$

$$C_l = C_{2,2} \times C_{4,2} \times \ldots \times C_{2l-2,2}.$$

Если гомологии берутся по модулю $p > C_l$, то

$$\underbrace{(Z^2 \times Z^2 \times Z^2 \times \ldots \times Z^2)}_{l \text{ раз}} \times t_{2l} = C_l \neq 0.$$

Поэтому $\operatorname{long} t_{2l} \geqslant l$.

Больше чем l длина t_{2l} быть не может, ибо если мы имели бы произведение $\geqslant l+1$ ∇-циклов, сумма размерностей которых равнялась бы $2l$, то среди них были бы по меньшей мере два одномерных цикла, а произведение двух одномерных ∇-циклов (в силу $C_{1,1} = 0$) всегда ∇-гомологично нулю.

При $n = 2l+1$

$$\underbrace{Z^2 \times Z^2 \times \ldots \times Z^2}_{l \text{ раз}} \times Z^1 = C_l\, z_{2l} \times z_l = C_l Z^{2l+1}$$

$$\underbrace{(Z^2 \times Z^2 \times \ldots Z^2}_{l \text{ раз}} \times Z^1) \times t_{2l+1} = C_l \neq 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{long} t_{2l+1} \geqslant l+1.$$

Но более чем $l+1$ длина t_{2l+1} не может равняться, что следует из повторения аналогичных рассуждений для четного случая.

Итак,

$$\operatorname{long} t_n = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

При N достаточно большом (так что в t_n входит R_N) имеем поэтому

$$\operatorname{cat}_{R_N} t_n \geqslant \operatorname{long} t_n + 1 = \left[\frac{n+3}{2}\right].$$

Но $\operatorname{cat}_R t_n = \operatorname{cat}_{R_N} t_n$ при достаточно большом N. В самом деле, деформация множества полимеридианов в некоторую спрямляемую кривую q из R может быть аппроксимирована при достаточно большом N деформацией в эту кривую в пространстве R_N.

Тем самым доказана полностью и левая часть неравенства.

В пространстве R существуют множества сколь угодно высокой категории.

§ 21. Циклы с группой коэффициентов R

В этом § будем (без оговорок) рассматривать гомологии с группой коэффициентов R аддитивной — группой вещественных чисел.

Пусть на сфере S_2 распределена некоторая масса T, имеющая всюду нулевую или положительную плотность и пусть суммарная масса равна $\alpha > 0$. Будем называть T-мерой некоторой области меру той части массы T, которая попала в эту область. Положим для простоты вначале, что плотность этой массы положительна внутри некоторой области t, гомеоморфной кругу, и равна нулю вне этой области.

Пусть q_1 и q_2 две кривые из R, $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$; пусть на них введем параметр t так, что дуги $a_t\, b_t$, соединяющие пары точек q_1 и q_2 с общим значением параметра t, могут быть выбранными меньшими по длине, чем ε. Обозначим через $\varphi_1[t; q_1, q_2, T]$ T-меру пленки, образованной дугами $\overline{a_{t'}\, b_{t'}}$ при $0 \leqslant t' \leqslant t$. $\varphi_1(1, q_1, q_2, T)$ есть T-мера части S_2, ограниченной $q_1 - q_2$. Функции $f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2) = \varphi_1(1, q_1, q_2, T)$ определяют одномерный ∇-цикл Z_T^1 по модулю R. Так же, как в предыдущем случае, можно доказать, что все Z_T^2 ∇-гомологичны друг другу. Обозначим класс всех ∇-циклов ∇-гомологичных αZ_T^1, $\alpha \neq 0$, через (Z^1).

Пусть теперь даны n масс $T_1, T_2, \ldots, T_n$, которые имеют отличную от нуля плотность внутри областей $t_1, \ldots, t_n$, гомеоморфных кругу.

Далее, если $\rho(q_i, q_j) < \varepsilon$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$, обозначим

$$\varphi_n^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}, T_1, T_2, \ldots, T_n) =$$
$$= \int_0^1 d\varphi_1(t_1; q_1, q_2; T_1) \int_{t_1}^1 d\varphi_1(t_2; q_1, q_2, T_2) \ldots \int_{n-1}^1 d\varphi_1(t_n; q_1, q_2, T_n) \tag{26}$$

(дифференциалы уже не означают скачков, ибо все $\varphi_i(t_i, q_i, q_{i+1}, T_i)$ — непрерывные функции параметров t_i).

При достаточно малом ε значение функции φ_n^{ε} не зависит от выбора системы дуг, образующих пленки, соединяющие кривые q_i и q_{i+1} (доказательство такое же, как в лемме 1 § 15).

Функции элементов всюду плотной сети

$$f_n^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \psi_n^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, T_1, T_2, \ldots, T_n), \tag{27}$$

если $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ упорядочены, как в сети, и

$$f_n^{\varepsilon}(q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_{n+1}}) = \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}) f_n^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$$

определяют n-мерный ∇-комплекс $Z^n_{T_1 T_2 \ldots T_n}$.

Аналогично случаю простого модуля p доказывается:

1) все $Z^n_{T_1 T_2 \ldots T_n}$ суть n-мерные ∇-циклы;

2) все $Z^n_{T_1 T_2 \ldots T_n}$ гомологичны друг другу. Класс всех циклов, ∇-гомологичных $Z^n_{T_1 T_2 \ldots T_n}$, обозначим (Z^n);

3) если Z^n, Z^m, Z^{n+m} суть циклы, ∇-гомологичные

$$Z^n_{T_1 T_2 \ldots T_n}, \quad Z^m_{T_1 T_2 \ldots T_m}, \quad Z^{n+m}_{T_1 T_2 \ldots T_{n+m}},$$

то

$$Z^n \times Z^m \underset{\nabla}{\infty} C_{m,n} Z^{m+n}.$$

Гиперторы t_n, рассмотренные в § 17, суть n-мерные Δ-циклы и по модулю R.

Теорема 6. Индекс пересечения $Z^n \times t_n = \alpha^n$.

В случае $n=1$ это доказывается непосредственно. t_1 есть множество меридианов, покрывающее сферу S_2.

Если

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n = q_0, \quad \rho(q_i, q_{i+1}) < \varepsilon$$

есть циклическая последовательность меридианов, то

$$f_1^\varepsilon(q_i, q_{i+1}) = \varphi_1(q_i, q_{i+1})$$

есть T-мера полосы, ограниченной $(q_i - q_{i+1})$, а

$$\sum_{i=0}^{r-1} f_1^\varepsilon(q_i, q_{i+1})$$

есть T-мера всей сферы S_2. Поэтому эта мера равна α и

$$Z^1_T \times t_1 = \alpha. \tag{28}$$

Перейдем к общему случаю. t_n есть n-мерный тор, и его элемент полимеридиан $q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ определяется n циклическими кординатами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Введем новый параметр τ на полимеридиане $q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, так что i-тый меридиан полимеридиана q отвечает интервалу $(i-1, i)$ этого параметра; τ меняется в пределах от 0 до n. Поэтому в определении $f_n^\varepsilon(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ по формуле (27) для полимеридианов q_i в верхних пределах интегралов нужно ставить n. Обозначим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{bmatrix} &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\varphi_1(t_1, q_1, q_2, T_1), \\ &\cdot \int_{\alpha_2}^{\beta_1} d\varphi_1(t_2, q_2, q_3, T_2) \ldots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\varphi_1(t_n, q_n, q_{n+1}, T_n). \end{aligned} \tag{29}$$

В частности,

$$f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) = \begin{bmatrix} n\,n\,n & n \\ 0\,t_1\,t_2 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{bmatrix} n\,n & n \\ 0\,t_1 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,n & n \\ 0\,t_1 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n\,n & n \\ 1\,t_1 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Но

$$\begin{bmatrix} n\,n & n \\ 1\,t_1 & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong 0. \tag{30}$$

В самом деле, нижние пределы в интегралах (29), соответствующих левой части (30), все $\geqslant 1$, т. е. если этот интеграл есть функция $g(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ вершин $q_1, q_2, \ldots q_{n+1}$ n-мерного симплекса, где

$$q_i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_n^i),$$

то эта функция не зависит от первых координат λ_1^i вершин

$$q^i \; (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

так как первые меридианы λ_1^i полимеридианов q_i отвечают интервалам (0,1) параметров t_i, не входящим в интервалы интеграции. Если

$$q_i' \, (0, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_n^i)$$

есть проекция q_i на $(n-1)$-мерное многообразие $\lambda_1 = 0$, то

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) = g(q_1', q_2', \ldots, q_{n+1}').$$

Поэтому индекс пересечения n-мерного ∇-цикла, порождаемого функцией g с t_n, совпадает с его индексом пересечения с вырожденным n-мерным Δ-циклом t_n', составленным из проекций симплексов t_n на многообразие $\lambda_1 = 0$. Этот индекс равен нулю, что доказывает (30). Поэтому

$$\begin{bmatrix} n\,n\,n & n \\ 0\,t_1\,t_2 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1\,n\,n & n \\ 0\,t_1\,t_2 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Аналогично доказывается

$$\begin{bmatrix} 1\;n\;n & n \\ 0\;t_1\;t_2 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1\;2\;n & n \\ 0\;t_1\;t_2 \ldots t_{n-1} \end{bmatrix}$$

и вообще

$$\begin{bmatrix} 1\;2 \ldots i-1\;n & n & n \\ 0\;t_1 \ldots t_{i-2} & t_{i-1}\;t_i & \ldots t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1\;2 & i-1\;i & n & n \\ 0\;t_1 \ldots t_{i-2} & t_{i-1}\;t_i & \ldots & t_{n-1} \end{bmatrix}; \tag{31}$$

последовательное применение (31) доказывает нам

$$\begin{bmatrix} n & n & n & & n \\ 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Аналогично

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n \\ 0 & t_1 & \ldots t_{n-2} & & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n \\ 0 & t_1 & \ldots t_{n-2} & & n-1 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n-1 \\ 0 & t_1 & \ldots t_{n-2} & & t_{n-1} \end{bmatrix};$$

но второе слагаемое эквивалентно нулю, ибо оно не зависит от n-ых компонент „вершин" $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$. Поэтому

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n \\ 0 & t_1 & \ldots t_{n-2} & & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & & n-1 & n \\ 0 & t & \ldots t_{n-2} & & n-1 \end{bmatrix}$$

и вообще

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & i-1 & i & i+1 & n \\ 0 & t_1 & \ldots t_{i-2} & & t_{i-1} & i \ldots & n-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & & i-1 & i & i+1 & n \\ 0 & t_1 & \ldots t_{i-2} & & i-1 & i & n-1 \end{bmatrix}; \tag{33}$$

последовательное применение формул (33) дает

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}; \tag{34}$$

из (32) и (34) следует

$$\begin{aligned} & f_n^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & n & n & & n \\ 0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{bmatrix} = \\ & = \prod_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} d\varphi_1(t_i, q_i, q_{i+1}, T_i). \end{aligned} \tag{35}$$

Обозначим

$$F_i^{\varepsilon}(q_i, q_{i+1}) = \int_{i-1}^{i} d\varphi_1(t, q_i, q_{i+1}, T_i), \tag{36}$$

F_i^{ε} определяет на t_n одномерный ∇-цикл U.

Если t_1^i есть экватор из t_n, определяемый уравнениями

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_n = 0,$$

то $U_1^i \times t_1^i = \alpha$ (индекс пересечения берется в t_n). Это следует из тех же рассмотрений, которыми доказывалась формула (28).

Из (35) видно, что ∇-цикл Z^n, определяемый функциями f_n^{ε} на t_n, гомологичен произведению Александера циклов $U_1^1 \times U_1^2 \times \ldots \times U_1^{\kappa}$

Нам надо показать, что на t_n

$$U_1^1 \times U_1^2 \times \ldots \times U_1^n = \alpha^n.$$

Для этого заметим, что если $q_1(\lambda_1, 0, \ldots, 0)$ и $q_2(\lambda_1', 0, \ldots, 0)$ два близких полимеридиана из t_1', то $F_1^{\varepsilon}(q_1, q_2)$ [см. (36)] означает T_1-площадь полосы сферы S_2 между меридианами (λ_1) и (λ'). Это можно рассматривать как элемент длины экватора t_1', отвечающий его малому одномерному симплексу (q_1, q_2). Если от ∇-циклов по модулю R переходим к дифференциалам де-Рамма, то ∇-цикл U_1^1 означает дифференциал — элемент длины на экваторе t_1^1, и вообще ∇-цикл U_1^i означает дифференциал — элемент длины на экваторе t_1^i тора t_n. Выражение для произведения Александера циклов $U_1^1, U_1^2, \ldots, U_1^n$ показывает, что функция, определяющая это произведение, выражает элемент объема тора t_n (или того n-мерного параллелепипеда, идентификацией противоположных граней которого получается t_n). Объем t_n равен произведению длин, составляющих $t_1^1, t_1^2, \ldots, t_1^n$, т. е. α^n. Отсюда индекс пересечения на t_n произведения циклов $(U_1^1 \times U_1^2 \times \ldots \times U_1^n)$ с t_n равен α^n. На t_n это произведение ∇-гомологично ∇-циклу Z^n. Итак, $Z^n \times t_n = \alpha^n \neq 0$.

Этим доказывается негомологичность нулю как циклов Z^n с группой коэффициента R, так и Δ-циклов t_n.

В силу рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве лемм 6 и 7 (§ 17), получаем.

Всякий n-мерный Δ-цикл в R с группой коэффициентов R гомологичен γt_n, где γ — вещественное число. Всякий n-мерный ∇-цикл гомологичен γZ^n.

$$Z^n \times Z^m \underset{\nabla}{\sim} C_{n,m} Z^{n+m},$$

$$t_n \times Z^n = \alpha^n \neq 0.$$

Эти равенства характеризуют группы гомологии и кольцо произведений в R с группой коэффициентов R.

§ 22. n-мерный случай

Пространство дуг на n-мерной сфере. Методы и результаты § 15—22 распространяются на случай более общего пространства $R = R(S_n, a, b)$ всех спрямляемых дуг на n-мерной сфере, соединяющих ее точки a и b.

Обозначим через Z_c^{n-1} $(n-1)$ мерный ∇-цикл в $R(S_n, a, b)$, определяемый следующим образом. На n кривых

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \rho(q_i, q_j) < \varepsilon, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

натягивается n-мерная пленка. Например, вводится параметр t на кривых q_i так, что точки a_i^t кривых q_i с общим значением t удалены друг от друга на расстояние $\leqslant \varepsilon$; на точки $a_1^t, a_2^t, \ldots, a_n^t$ натягивается $(n-1)$-мерный сферический симплекс; совокупность этих симплексов при $0 \leqslant t \leqslant t_1$

образует некоторую n-мерную пленку. Степень покрытия этой пленкой точки c обозначается через

$$\psi_1(t_1;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, c).$$

Функции

$$f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \psi_1(1;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, c)$$

определяют $(n-1)$-мерный ∇-цикл Z_c^{n-1} по любому простому модулю p.

Далее, определим $m(n-1)$ мерный ∇-цикл следующим образом. Пусть

$$\psi_m(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{m(n-1)+1};\, c_1, c_2, \ldots, c_m) =$$

$$= \int\limits_0^1 d\psi_1(t_1;\, q_1, q_2, \ldots, q_n;\, c_1) \int\limits_{t_1}^1 d\psi_1(t_2;\, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{2n-1};\, c_2) \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{t_{m-1}}^1 d\psi_1(t_n;\, q_{(m-1)(n-1)+1}, \ldots, q_{m(n-1)+1};\, c_m).$$

Функции

$$\psi_m(q_1, q_2, \ldots, q_{m(n-1)+1};\, c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

определяют $m(n-1)$-мерный ∇-цикл $Z^{m(n-1)}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$, Обозначим через $Z^{m(n-1)}$ ∇-цикл, ∇-гомологичный любому $Z^{m(n-1)}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$. Имеем

$$Z^{k(n-1)} \times Z^{l(n-1)} \underset{\nabla}{\overset{\infty}{}} C_{k,l} Z^{(k+l)(n-1)},$$

где $C_{k,l}$ определяются, как в § 16.

При $r = m(n-1)$ все r-мерные ∇-циклы ∇-гомологичны qZ^r; при $r \neq m(n-1)$ все r-мерные ∇-циклы ∇-гомологичны нулю.

Если a и b диаметрально противоположные точки сферы S_n, то совокупность меридианов — полукругов, соединяющих a и b, гомеоморфна $(n-1)$-мерному проективному пространству. Если γ точка проективного $(n-1)$-мерного пространства, то через (γ) обозначим меридиан, отвечающий γ при отображении множества меридианов на это проективное пространство. Через $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ обозначим „полимеридиан", образованный суммой n меридианов $(\gamma_1) = (\gamma_2) + \ldots + (-1)^n(\gamma_n)$. Совокупность полимеридианов $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2k+1})$ образует $(n-1)(2k+1)$-мерный Δ-цикл в R, который обозначим $t_{(n-1)(2k+1)}$. Совокупность полимеридианов $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{2k}, \overset{0}{\gamma}_{2k+1})$ при фиксированном $\overset{0}{\gamma}_{2k+1}$ образует $2k(n-1)$-мерный ∇-цикл $t_{2k(n-1)}$.

Имеем

$$t_{m(n-1)} \times Z^{m(n-1)} = \pm 1.$$

Все r-мерные Δ-циклы при $r = m(n-1)$ Δ-гомологичны qt_r; при $r \neq m(n-1)$ все r-мерные Δ-циклы гомологичны нулю.

Обозначим через $l(q)$ длину дуги в S_n в римановой метрике. Пусть (z_n) совокупность Δ-циклов, для которых

$$z_r \times Z^r \neq 0.$$

Пусть

$$c_l = \inf_{z_{l(n-1)} \in (z_{l(n-1)})} [\sup_{q \in z_{l(n-1)}} l(q)].$$

Существует геодезическая дуга длины c_l, соединяющая любые точки a и b на сфере S_n при любой римановой метрике на ней (или на любом римановом многообразии, гомеоморфном S_n).

Если $c_{2k} = c_{2k+1} = c$, то существует $(n-1)$-мерный негомологичный нулю Δ-цикл, составленный из геодезических дуг, соединяющих a и b. В этом случае все проходящие через a геодезические проходят через b, и длины их дуг между a и b равны c.

Наконец, слияние $c_l = c_{l+2}$ невозможно. Всегда $c_l < c_{l+2}$.

Числа c_l растут с l как арифметическая прогрессия.

ГЛАВА V

Замкнутые геодезические на многообразиях, гомеоморфных n-мерной сфере

Среди задач вариационного исчисления в целом наибольшее внимание, начиная от известных работ Пуанкаре, привлекали исследования замкнутых геодезических на многообразиях гомеоморфных n-мерной сфере. Для двумерного случая вопрос был полностью решен в совместной работе автора и Л. Г. Шнирельмана [2]. Именно, доказано, что для поверхности рода 0 существуют три замкнутых самопересекающихся геодезических. Доказательство основано на использовании инварианта категории и упомянутых в гл. III специальных деформаций. n-мерный случай исследован впервые Морзом в его книге. Именно, он доказал, что на n-мерном многообразии R_n, гомеоморфном сфере S_n, имеется, вообще говоря, $\frac{n(n+1)}{2}$ замкнутых геодезических. Для того чтобы гарантировать, что каждая из них не является дважды (или более) повторяемой дугой, Морз вводит метрическое ограничение: можно так отобразить R_n на S_n, что отношения длин соответственных линейных элементов заключены между m и $M<2m$. Но и при этих ограничениях все эти геодезические a priori могут слиться. Мы докажем, что на всяком, гомеоморфном сфере S_n многообразии имеется или $n+1$ геодезических разной длины, или континуальное семейство геодезических. При $n=2$, используя упомянутые специальные преобразования, получим новое доказательство теоремы о трех самопересекающихся геодезических. В общем случае $(n>2)$, чтобы быть уверенным в том, что эти геодезические не сводятся к повторениям одной, приходится сохранить ограничения Морза.

Доказательство основано на исследовании некоторых ∇-циклов и их произведений в пространстве $P(S_n)$, спрямляемых замкнутых кривых на S_n и на применении основной теоремы.

§ 23. Случай $n=2$

На сфере S_2 выберем точку a. Пусть q_1 и q_2 две кривые из $P=P(S_2)$, где $\rho(q_1, q_2)<\varepsilon<n$. Обозначим через $f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2)$ порядок обхода точки a по модулю 2 кривой q_1-q_2 или степень покрытия a пленкой, натянутой

на q_1 и q_2. Нужно выбрать на q_1 и q_2 циклический параметр φ, так что расстояние между точками $a_{q_1}^{\varphi}$ и $a_{q_2}^{\varphi}$ кривых q_1 и q_2 с общим значением параметра φ меньше ε. Соединяя все пары $a_{q_1}^{\varphi}$, $a_{q_2}^{\varphi}$ геодезическими дугами длины $<\varepsilon$, образуем пленку, степень покрытия которой точки a и есть $f_0^{\varepsilon}(q_1, q_2)$. Совокупность функций $f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2)$ при $\varepsilon \to 0$ определяет одномерный ∇-комплекс, который является ∇-циклом по mod 2; обозначим его через Z_1^a.

Все Z_1^a ∇-гомологичны между собой. Обозначим через $\varphi(q_1)$ индекс пересечения кривой q_1 с дугой, соединяющей a и b. Тогда

$$f_1^{\varepsilon}(q_1, q_2, a) - f(q_1, q_2, b) = \varphi(q_1) - \varphi(q_2). \tag{1}$$

$\varphi(q_1)$ определяет нульмерный ∇-цикл Z; равенство (1) показывает что $Z_1^a - Z_1^b$ есть $\overset{\infty}{\nabla}$-граница Z_0.

Отсюда $Z_1^a \overset{\infty}{\nabla} Z_1^b$. Общий класс гомологии всех циклов Z_1^a обозначим Z^1.

Далее, обозначим

$$Z^2 = Z^1 \times Z^1; \quad Z^3 = Z^2 \times Z^1.$$

Мы имеем классы $[Z^1]$, $[Z^2]$, $[Z^3]$ одно, двух и трехмерных ∇-циклов. Обозначим через z_3 трехмерный цикл, состоящий из всех кругов.

Имеем

$$Z^3 \times z_3 = 1.$$

В самом деле, множество z_3 всех кругов на сфере представляет собой трехмерное проективное пространство.* Обозначим через z_1^{ab} совокупность кругов (из z_3), проходящих через точки a и b. z_1^{ab} есть проективная прямая в Z_3. Z_1^c индуцирует на проективном пространстве z_3 одномерный ∇-цикл $\overline{Z}_1^c$, индекс пересечения которого в z_3 с z_1^{ab} равен 1, т. е. $\overline{Z}_1^c$ есть двойственный проективный прямой одномерный $\overset{*}{\nabla}$-цикл в проективном пространстве. Одномерный Δ-цикл, двойственный проективной прямой эквивалентен проективной плоскости, а потому

$$\overline{Z}_1^a \times \overline{Z}_1^b \times \overline{Z}_1^c = 1.$$

(Индекс пересечения трех проективных плоскостей в проективном пространстве равен 1).

Отсюда

$$Z^3 \times z_3 = (Z_1^a \times Z_1^b \times Z_1^c) \times z_3 = 1.$$

Назовем K-множествами замкнутые множества самонепересекающихся кривых — результаты нормальной деформации подмножества совокупности кругов на сфере S.

---

* Если идентифицировать все вырожденные в точку окружности z_3.

Обозначим через $[z_1]$, $[z_2]$, $[z_3]$ классы Δ-циклов, таких, что для

$$z_i \subset [z_i],\ z_i \times Z^i = 1;\quad (i=1, 2, 3).$$

Все классы $[z_i]$ непустые. Например, в класс $[z_3]$ входит z_3 [см. (3)]. При этом класс $[z_1]$ подчинен классу $[z_2]$ посредством Z^1 и классу $[z_3]$ посредством Z^2. Класс $[z_2]$ подчинен классу $[z_3]$ посредством Z^1.

Обозначим через c_i $(i=1, 2, 3)$ нижние границы максимумов длин кривых q на множествах циклов классов $[z_i]$

$$c_i = \inf_{z_i \in [z_i]} \sup_{q \in z_i} l(q).$$

Имеем $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3$.

Далее, $c_1 > 0$. В самом деле, семейство кривых длины меньше h может быть сведено к точкам.

Если z_1' есть цикл класса $[z_1]$, на котором максимум $l(q)$ меньше h, то z_1' может быть деформировано в одномерный цикл из выродившихся в точки кривых (попросту говоря, в множество точек, причем в множество размерности 1, не покрывающей сферы S_2). В некоторый момент деформации, достаточно близкий к финальному, кривые из z' перейдут в кривые очень малого диаметра, но пока отличного от нуля, и их совокупность z'' тоже не покрывает S_2. $z'' \in [z_1]$, $Z_1^a \in Z^1$. Но $z'' \times Z_1^a = 1$, поэтому для любой точки a $z'' \times Z_1^a = 1$ (хотя бы z'' не покрывал a), что невозможно, ибо теоретико-множественное пересечение z'' и носителя Z_1^a пусто. Итак, не существует циклов из $[z_1]$ в области $[l \leqslant h]$ и поэтому

$$c_1 \geqslant h.$$

Поверхности уровня $(l=c_1)$, $(l=c_2)$, $(l=c_3)$ содержат замкнутые самопересекающиеся геодезические длины c_1, c_2, c_3, так как на этих поверхностях уровня существуют непустые K-критические множества, а по теореме 2 § 13 K-критические множества состоят из таких геодезических.

Если $c_1 = c_2 = c$ или $c_2 = c_3 = c$, то поверхность уровня $l = c$ должна содержать одномерный Δ-цикл, заключенный в критическом множестве класса $[z_1]$. Это вытекает из основной теоремы, примененной к классам $[z_1]$ и $[z_2]$, соответственно $[z_2]$ и $[z_3]$, из которых первый подчинен другому посредством класса $[Z^1]$. Но тогда совокупность замкнутых самопересекающихся геодезических длин c покрывает S_2, иначе она не могла бы содержать негомологичных нулю циклов.

Если $c_1 = c_2 = c_3 = c$, то поверхность уровня $(l=c)$ содержит двумерный цикл z_2', такой, что $z_2' \in [z_2]$, $z_2' \overset{\infty}{\underset{\Delta}{}} 0$, причем z_2' заключен в K-критическом множестве, а значит z_2' содержится в можестве замкнутых самонепересекающихся геодезических длины c_1; существует значит двухпараметрическое семейство замкнутых самопересекающихся геодезических длины c. Через каждую пару точек a и b сферы должна проходить такая самонепересекающаяся замкнутая геодезическая, так как для цикла z_2', составленного из таких геодезических, $z_2' \times (Z_1^a \times Z_1^b) = 1$. Это вытекает из применения основной теоремы к классам $[z_1]$ и $[z_3]$, где $[z_1]$ подчинен $[z_3]$ посредством Z^2.

Нетрудно убедиться, что в этом случае все геодезические — замкнутые самопересекающиеся длины c. Итак, мы приходим к теореме, доказанной другим методом в нашей работе совместно с Л. Г. Шнирельманом.

На трижды дифференцируемой поверхности S_2 рода 0 существуют или три замкнутые самонепересекающиеся геодезические различной длины, или покрывающее S_2 семейство таких геодезических равной длины и одна такая геодезическая отличной длины, или все геодезические суть замкнутые самонепересекающиеся кривые одинаковой длины.

§ 24. Случай $n > 2$

Перейдем к исследованию замкнутых геодезических на многообразиях, гомеоморфных n-мерной сфере ($n > 2$). Для этого надо исследовать некоторые свойства кольца произведений пространства $P = P(S_n)$ спрямляемых замкнутых кривых на n-мерной сфере S_n. Отсюда вытечет, что на многообразии, гомеоморфном S_n, имеются либо замкнутые геодезические $(n+1)$ различной длины, либо континуальные системы таких геодезических, т. е. обобщается доказанная выше теорема для двумерной сферы S_2. При метрических ограничениях Морза соответственные геодезические не сводятся к повторениям одной из них.

Рассмотрим подробно случай $n = 3$. В пространстве $P = P(S_3)$ выделим два особых множества. Множество $\mathfrak{A}$ всех кривых, сведенных к точкам, в множестве $\mathfrak{B}$ всех кривых, сведенных к дважды и вообще кратно повторенной простой дуге. Можно так метризовать P, чтобы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ стали бесконечно удаленными элементами. Конечным множеством в P будем называть множество, расположенное вне некоторой окрестности $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$-конечным и $\mathfrak{B}$-конечным, множество, расположенное вне некоторой окрестности $\mathfrak{A}$ и соответственно $\mathfrak{B}$.

Положим S_3 расположенным в 4-мерном эвклидовом пространстве E_4. Совокупность A_6 всех окружностей на S_3 есть 6-мерный $\mathfrak{B}$-конечный Δ-цикл. Пусть A_5^f — совокупность всех окружностей, плоскости которых в E_4 ортогональны плоскости f (т. е. содержат прямую, ортогональную f), A_4^a — совокупность всех окружностей, проходящих через точку a, A_5^f, и A_4^f суть 5 и 4-мерные $\mathfrak{B}$-конечные Δ-циклы на P и в то же время в A_6. Будем рассматривать гомологию по модулю 2.

В A_6 мы имеем

$$A_4^a \times A_4^b \times A_5^f \times A_5^g = 1. \tag{2}$$

Для доказательства выберем в координатном пространстве $E_4(x, y, z, u)$ плоскость f, определенную уравнениями $x = z = 0$, и плоскость g, определенную уравнениями $y = u = 0$. Пусть $a(0, 0, 1, 0)$ и $b(0, 0, 0, 1)$ выбранные точки единичной сферы S_3.

Окружность r, лежащая в плоскости $x = y = 0$, представляет собой теоретико-множественное пересечение

$$A_5^f A_5^g A_4^a A_4^b.$$

В самом деле, плоскость p окружности, принадлежащей $A_4^a A_4^b A_5^f A_5^g$, проходит через a и b. Поскольку p ортогональна f, она содержит прямую l, ортогональную f, т. е. ортогональную двум прямым

$$y = z = u = 0; \quad x = y = u = 0.$$

Угловые коэффициенты l пропорциональны

$$0 : k_1 : 0 : k_2. \tag{3}$$

Плоскость p, аналогично, содержит прямую l, ортогональную g, с угловыми коэффициентами, ортогональными

$$k_3 : 0 : k_4 : 0. \tag{4}$$

Возможны два случая:

Случай 1. p содержит точку c вида $(x, y, 0, 0)$.

Тогда найдем, при каком c $(x^0, y^0, 0{,}0)$ плоскость p, проходящая через a, b, c, содержит прямые l и l_1 с угловыми коэффициентами, выражаемыми (3) и (4). Проведем через c прямые l и l_1. Эти прямые не параллельны прямой l_2, соединяющей a и b, и пересекают l_2 в точках d и d_1. Параметрическое уравнение l_2:

$$x = y = 0, \quad z = t, \quad u = 1 - t. \tag{5}$$

Пусть $d = d(0, 0, t_0, 1 - t_0)$ и $d_1 = d_1(0, 0, t_1, 1 - t_1)$. Угловые коэффициенты l, соединяющей c и d, пропорциональны разностям координат c и d, т. е.

$$x_0 : y_0 : (-t_0) : (t_0 - 1). \tag{6}$$

Из (6) и (3) $x^0 = 0$. Аналогично, угловые коэффициенты l_1 пропорциональны

$$x^0 : y^0 : (-t_1) : (t_1 - 1). \tag{7}$$

Из (7) и (4) следует: $y^0 = 0$.

Итак, в случае 1 плоскость p проходит через начало координат и ее уравнение $x = y = 0$.

Случай 2. Пусть p не содержит точки c вида $c(x_0, y_0, 0, 0)$. Тогда проекция p на плоскости $x = y = 0$ совпадет с прямой l_2, соединяющей a и b и состоящей из точек вида $(0, 0, t, 1 - t)$ Если. точка d' лежит на p вне l_2, то $d'=d'(x', y', t', 1-t')$, где $|x'|+|y'|>0$. По предположению плоскость p содержит прямую l_3, ортогональную f. Такую прямую можно провести через некоторую точку $d'(x', y', t', 1-t')$. Она пересечет l_2 в некоторой точке $d''(0, 0, t'', 1-t'')$. Угловые коэффициенты l_3 пропорциональны

$$x':y':(t'-t''):(t''-t'). \tag{8}$$

Сравнивая (8) с (2), получаем $x'=0$. Аналогично, проведя через d прямую l_4, ортогональную g, и сравнив (8) и (4), получим $y'=0$. Но это значит, что произвольно выбранная на p точка d лежит на прямой l_2. Значит, плоскости p не существует.

Таким образом, теоретико-множественное пересечение $A_4^a A_4^l A_4^k A_5^g$ состоит из единственного элемента r, лежащего в плоскости $x=y=0$. Для доказательства (2) нужно установить, что пересекаемые циклы лежат в окрестности r в общем положении. Плоскость окружности r проходит через точки $a(0, 0, 1, 0)$, $b(0, 0, 0, 1)$, $c(0, 0, 0, 0)$.

Плоскости окружностей, близких к r, проходят через точки

$$a'(x_1, y_1, 1, 0), \quad b'(x_2, y_2, 0, 1), \quad c'(x_3, y_3, 0, 0)$$

где x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 близки нулю).

В окрестности r числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 можно рассматривать как 6 координат плоскости, близкой к плоскости r (или соответственной окружности, лежащей в этой плоскости). A_4^a определяется в окрестности t_r уравнениями

$$x_1=0, \quad y_1=0 \tag{9}$$

и A_4^b — уравнениями

$$x_2=0, \quad y_2=0. \tag{10}$$

A_5^f, как следует из предыдущего, определяется уравнением

$$x_3=0, \tag{11}$$

A_5^g — уравнением

$$y_3=0. \tag{12}$$

Так как определитель системы (9)—(12) равен 1, то пересекаемые циклы находятся в r в общем положении, и (2) доказано.

Обозначим $A_2=A_2^{afg}=A_4^a\times A_5^f\times A_5^g$. Из (2) следует: $A_2\times A_4^b=1$. Семейство окружностей A_2 покрывает сферу S_3 (ибо A_2 с каждым A_4^b имеет общий элемент, т. е. в A_2 входит окружность, проходящая через любую точку из S_3).

∇-циклы в P. Перейдем к рассмотрению ∇-циклов в P. Пусть q_1, q_2, q_3 при конечных элементах P_1, $\rho(q_1, q_2)<\varepsilon$, $\rho(q_2, q_3)<\varepsilon$, $\rho(q_1, q_3)<\varepsilon$, где ε — выбранное положительное $\leqslant\frac{1}{2}$. На близких кривых q_1, q_2, q_3 можно выбрать циклические параметры φ так, что точки a_φ^1, a_φ^2, a_φ^3 этих кривых, отвечающие общему значению φ, отстоят друг от друга на расстояние $\leqslant \varepsilon$. На каждую пару кривых q_1, q_2; q_1, q_3; q_2, q_3 можно натянуть пленку, границей которой будет соответственно $q_1 + q_2$; $q_1 + q_3$; $q_2 + q_3$ (можно, например, для этой цели соединять дугами пары точек a_φ^1, a_φ^2; a_φ^1, a_φ^3; a_φ^2, a_φ^3, отвечающие общему значению параметра φ, так, что эти дуги непрерывно меняются с φ и имеют длину, не большую ε). Сумма этих пленок, натянутых на q_1, q_2, q_3, образует замкнутую поверхность. Индекс зацепления этой поверхности и точки a обозначим

$$f_1^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a).$$

Функции $f_1^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a)$ определяют двумерный ∇-цикл, который обозначим Z_2^a. (Можно показать, что с точностью до гомологии этот цикл не зависит от выбора пленок).

Примечание. Можно было бы рассматривать трехмерные трубки, натянутые на кривые q_1, q_2, q_3, границей которых и были бы определенные выше пленки, и функции $f_2^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a)$ определять как степени покрытия этими трубками точки a.

Далее определим одномерный ∇-цикл Z_1^f следующим образом. Для пары конечных кривых q_1, q_2, $\rho(q_1, q_2) < \varepsilon$, определяется общее направление обхода. Рассматривается проекция этих кривых на плоскости f. Если эти проекции имеют площадь одинакового значка, полагают

$$f_1^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; f) = 0,$$

если разного, полагают $f_1^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; f) = 1$. Функции f_1^ε определяют одномерный ∇-цикл Z_1^f.

Носителем ∇-цикла Z_2^a является множество всех конечных кривых, проходящих через точку a, носителем ∇-цикла Z_1^f — множество конечных кривых, проекции которых на f имеют площадь 0.

Лемма 1.

$$(Z_2^a \times Z_2^b \times Z_1^f \times Z_1^g) \times A_6 = 1.$$

На A_6 многообразии A_6 ∇-циклы Z_2^a, Z_2^b, Z_1^f, Z_1^g индуцируют Δ-циклы той же размерности

$$\overline{Z}_2^a, \overline{Z}_2^b, \overline{Z}_1^f, \overline{Z}_1^g.$$

На A_t трубки, натянутые на круги q_1, q_2, q_3, $\rho(q_i, q_j) < t$ ($i, j = 1, 2, 3$), будем строить следующим образом. Образуем совокупность $Q(q_1, q_2, q_3)$ всех кругов $q \in A_t$, образующих в A_6 трехмерный симплекс с вершинами q_1, q_2, q_3. Степень покрытия этой трубкой точки a обозначим $f_2^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a)$. Функция $f_2^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a)$ определяет в A_6 двумерный ∇-цикл Z_2^a.

Двумерный ∇-цикл Z_2^a эквивалентен на A_6 четырехмерному Δ-циклу A_4^a. Именно, пусть двумерные ε-симплексы (q_1, q_2, q_3) находятся в общем положении относительно 4-мерного многообразия A_4^a. Индекс пересечения этого симплекса, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ с A_4^a равен 1 или 0 в зависимости от того, содержит ли этот симплекс „точки" A_4^a, или нет. В первом случае трубка $Q(q_1, q_2, q_3)$ содержит единственную окружность, проходящую через точку a, и сама содержит точку a, и степень покрытия ею точки a равна 1. Во втором — степень покрытия этой трубкой точки a равна 0. Итак, эта степень покрытия, выражаемая функцией $f_2^\varepsilon(q_1, q_2, q_3; a)$, совпадает с индексом пересечения ε-симплекса (q_1, q_2, q_3) с Δ-циклом A_4^a.

∇-цикл $\overline{Z}_2^a$ определяется на A_6 функцией от двумерного симплекса, равной индексу пересечения этого симплекса с Δ-циклом A_4^a дополнительной размерности, т. е. ∇-цикл $\overline{Z}_2^a$ эквивалентен на A_6 Δ-циклу A_4^a.

Аналогично, ∇-цикл $\overline{Z}_1^f$ эквивалентен Δ-циклу A_5^f. Индекс пересечения одномерного ε-симплекса (q_1, q_2) с A_5^f равен 1 или 0 в зависимости от того, имеет ли этот симплекс общие элементы с A_5^f, или нет [ε — достаточно мало, и (q_1, q_2) находится относительно A_5^f в общем положении]. A_5^f состоит из окружностей, плоскости которых ортогональны f; ε-симплекс (q_1, q_2) состоит из однопараметрического семейства окружностей, на которых при достаточно малом ε выбран непрерывно порядок обхода. Если (q_1, q_2) не пересекает A_5^f, проекции этих окружностей на f имеют одинаковый порядок обхода (эти проекции суть эллипсы, не вырождающиеся в отрезки прямой), тогда $f_1^\varepsilon(q_1, q_2, q_3, f)$, по определению, равен 0. Если (q_1, q_2) пересекает A_5^f, соответственные проекции, превращаясь в одном месте в отрезок, меняют порядок обхода и знак площади, и $f_1^\varepsilon(q_1, q_2, f) = 1$. Таким образом, функции от симплекса (q_1, q_2), определяющие цикл $\overline{Z}_1^f$ на A_6, совпадают с индексом пересечения этого же симплекса с Δ-циклом A_5^f. Итак, Z_1^f эквивалентен на A_6 Δ-циклу A_5^f.

А поэтому на A_6 $(\overline{Z}_2^a \times \overline{Z}_2^b \times \overline{Z}_1^f \times \overline{Z}_1^g)$ совпадает с индексом пересечения на A_6.

$$(A_4^a \times A_4^b \times A_5^f \times A_5^g) = 1.$$

Но $(Z_2^a \times Z_2^b \times Z_1^f \times Z_1^g) \times A_6$ в P совпадает с индексом пересечения $\overline{Z}_2^a \times \overline{Z}_2^b \times \overline{Z}_1^f \times \overline{Z}_1^g$ в A_6 и поэтому равен 1.

Произведения ∇-циклов. Рассмотрим следующие циклы:

$$Z_{abfg}^6 = Z_2^a \times Z_2^b \times Z_1^f \times Z_1^g,$$

$$Z_{abf}^5 = Z_2^a \times Z_2^b \times Z_1^f,$$

$$Z_{ab}^4 = Z_2^a \times Z_2^b,$$

$$Z_{afg}^4 = Z_2^a \times Z_1^f \times Z_1^g,$$

$$Z_{af}^3 = Z_2^a \times Z_1^f,$$

$$Z_a^2 = Z_2^a,$$

$$Z_{fg}^2 = Z_1^f \times Z_1^g,$$

$$Z_f^1 = Z_1^f.$$

Обозначим через (Z^6) класс всех шестимерных ∇-циклов, гомологичных Z^6_{abfg}, (Z^5) — всех пятимерных, ∇-гомологичных Z^5_{abf}, (Z^4_{ab}) — четырехмерных, ∇-гомологичных Z^4_{ab}, (Z_4') — четырехмерных, ∇-гомологичных Z^4_{afg}, (Z^3) — трехмерных, ∇-гомологичных Z^3_{af}, (Z^2) — двумерных, ∇-гомологичных $Z_a{}^2$, (Z'^2) — двухмерных, ∇-гомологичных Z'^2_{jg}, и, наконец, (Z^1) — одномерных, ∇-гомологичных $(Z_1{}^f)$.

Нижние K-циклы. Будем рассматривать K-множества в P, определенные в смысле примечания к теореме 2, § 13, гл. III. K-деформации семейства окружностей суть нормальные их деформации, оставляющие неподвижными единичные точки и окружности достаточно малого радиуса и не преобразующие во время деформации ни одну окружность в кратно повторенную простую дугу. Другими словами, K-деформации суть нормальные деформации, меняющие лишь конечную часть подмножества A, и эта конечная часть A во все время деформации остается в конечной части P.

K-множества в P суть результаты K-деформаций некоторого подмножества A_6 (семейства окружностей), и соответственно K-циклы суть результаты K-деформаций Δ-цикла из A_6. Так как K-деформации Δ-цикла протекают в конечной части P, они не меняют индексов пересечений их с ∇-циклами.

(z_6), (z_5), (z_4), (z_4'), (z_3), (z_2), (z_2'), (z_1) суть классы Δ-циклов, индекс пересечения которых с циклами соответственных классов (Z^6), (Z^5), (Z^4), (Z'^4), (Z^3), (Z^2), (Z'^2), (Z^1) равен 1. Все эти классы непустые. Так, A_6 входит в (z_6), $A_5{}^f \in (z_5)$, $A_4{}^a \in (z_4)$, $A_4{}^{fg} \in (z_4')$, $A_3{}^{af} \in (z_3)$, $A_2{}^{afg} \in (z_2)$. При этом эти классы подчинены. Именно, (z_2) подчинен (z_3), (z_3) подчинен (z_4), (z_4') подчинен (z_5), (z_5) подчинен (z_6) посредством класса Z^1. Далее, (z_2) подчинен (z_4), (z_3) подчинен (z_5), (z_4) подчинен (z_6) посредством (Z^2); (z_4') подчинен (z_6) посредством (Z'^2); (z_2) подчинен (z_5), (z_3) подчинен (z_6) посредством (Z^3); (z_2) подчинен (z_6) посредством (Z^4).

Начертим схему подчинения этих классов (подчинение обозначается стрелкой):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& z_6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
z'_4 \arrow[d] & & z_5 \arrow[d] \\
z_3 \arrow[dr] & & z'_4 \arrow[dl] \\
& z_2 &
\end{tikzcd}$$

Циклы (z_1) конечно-негомологичны нулю, т. е. не могут быть границей конечного двумерного Δ-комплекса. Примером такого цикла из (z_1) может быть множество z_1 окружностей на двумерной сфере S_2, лежащей в S_3, проходящих через две точки a и b. Этот цикл путем бесконечной деформации может быть сведен к бесконечно удаленному элементу — точке или дважды повторенной простой дуге. Примером цикла класса (z_2') может быть совокупность всех больших кругов на сфере S_2. Циклы класса (z_2') путем бесконечных деформаций могут быть сведены к бесконечному элементу p, но они не гомологичны нулю в конечной части P.

Функционал $I(q)$ на P. Каждую гиперповерхность, гомеоморфную сфере S_3, можно рассматривать как сферу S_3, на которой задана некоторая метрика. Будем обозначать через $I(q)$ длину кривой q из P в естественной метрике.

Пусть $I(q)$ функционал, означающий длину дуги q. Обозначим через $c_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ и через $c_j' (j=2, 4)$ нижние границы максимумов $I(q)$ на циклах классов (z_i) и (z_j'); c_1 и c_2' равны нулю.

Покажем, что $c_2, c_3, c_4, c_4', c_5, c_6$ не равны нулю. Так как $c_4' \geqslant c_2$, $c_{2+k} \geqslant c_2$ при $k > 0$, то достаточно показать, что $c_2 > 0$.

Если $c_2 = 0$ существует, K—деформация, переводящая цикл $z_2 \in (z_2)$ и лежащий в A_6 в цикл $\overline{z_2}$, на котором максимум длин кривых меньше $\frac{h}{4}$.* Докажем, что это невозможно.

Введем понятие нормального двумерного ε-симплекса (q_1, q_2, q_3) в P. Выберем циклический параметр φ на q_1, q_2, q_3 так, что точки $a_1^{\varphi}, a_2^{\varphi}, a_3^{\varphi}$ удалены друг от друга на расстояние $\leqslant \varepsilon$. Построим сферический треугольник с вершинами $a_1^{\varphi}, a_2^{\varphi}, a_3^{\varphi}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$. Точка $c(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ есть точка сферического треугольника с барицентрическими координатами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Когда φ пробегает весь период своих значений, точка $c(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ при фиксированных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ пробегает кривую, которую обозначим через $q(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Очевидно, что, например, $q(q_1, q_2, q_3, 1, 0, 0) = q_1$. Будем говорить, что $q(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ имеет барицентрические координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в нормальном треугольнике (q_1, q_2, q_3) и т. д. Совокупность кривых $q(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$, и есть нормальный симплекс с вершинами q_1, q_2, q_3.

Пусть $\mathscr{E}$ двумерный ε-комплекс, состоящий из ε-симплексов, и дана деформация D всех вершин этих симплексов. В момент t этой деформации кривые q_1, q_2, q_3, вершины нормального ε-симплекса, перейдут в кривые $D(q_i, t)$ $(i=1, 2, 3)$. Точки $a_1^{\varphi}, a_2^{\varphi}, a_3^{\varphi}$ кривых q_1, q_2, q_3, расстояние между которыми не превосходило ε, перейдут в точки $D(a_i^{\varphi}, t)$ $(i=1, 2, 3)$ кривых $D(q_i, t)$, причем расстояние между парами таких точек при любом t не превосходит $\alpha > 0$, где α — сколь угодно мало при достаточно малом ε. Пусть $\alpha < h$. Распространим деформацию D на весь комплекс, и пусть $q(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ есть элемент нормального ε-симплекса (q_1, q_2, q_3), т. е. совокупность точек $c_{\varphi} = c(\varphi; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ треугольников $a_1^{\varphi}\ a_2^{\varphi}\ a_3^{\varphi}$. Положим, что $D(c_{\varphi}, t)$ есть точка сферического треуголь-

---

* Можно принять за h любое число, меньшее диаметра сферы.

ника с вершинами $D(a_i^\varphi, t)$ ($i=1, 2, 3$) и теми же барицентрическими координатами λ_1, λ_2, λ_3. Совокупность точек $D(c_\varphi, t)$ при разных значениях φ образует кривую $D(q, t)$. Кривые $D(q, t)$ заполняют нормальный ε-симплекс с вершинами $D(q_i, t)$ ($i=1, 2, 3$). Тем самым определена нормальная деформация всего ε-симплекса (q_1, q_2, q_3). Применим эти построения к любому ε-симплексу и всему нашему нормальному комплексу при нормальной деформации (q_1, q_2, q_3); кривая — элемент с барицентрическими координатами λ_1, λ_2, λ_3, переходит в кривую — элемент с теми же барицентрическими координатами в симплексе с вершинами — образами первоначальных вершин.

Рассмотрим цикл $z_2 \subset A_c$ класса (z_2). Пусть существует K-деформация D, переводящая его в некоторый цикл $\bar{z}_2$, на котором максимум длин кривых $q < \frac{h}{4}$. Для каждой кривой q' из $\bar{z}_2$ найдем центр тяжести (на сфере S_3) $d(q') = d_{q'}$ и определим деформацию D_1, сводящую кривую q' в ее центр тяжести [точка c кривой q' движется при деформации D_1 по геодезической дуге $cd_{q'}$ с равномерной скоростью и в конечный момент деформации D_1 попадет в $d_{q'} = d(q')$]. Произведение $D_1 D$ есть деформация D_2, переводящая z_2 в совокупность изолированных точек. Пусть конечный момент деформации D_2 соответствует значению параметра $t=1$, а начальный соответствует $t=0$. В любой момент $t \subset (0, 1)$, $t < 1$ деформации D_2 кривая $q \subset z_2$, отличная от точки, превращается в такую же кривую. В любой момент $t < 1$, образ z_2^t цикла z_2 должен покрывать любую точку сферы S_2 (так как $z_2^t \times Z_a^2 = z^2 \times Z_a^2 = 1$).

Выберем такое число ε, что любые кривые из z_2, удаленные друг от друга на расстояние, меньшее ε, остаются удаленными при деформации D_2 на расстояние $< \frac{h}{4}$. Произведем симплициальное разбиение z_2 на ε-симплексы (q_1, q_2, q_3). Определим деформацию D', переводящую каждый ε-симплекс (q_1, q_2, q_3) из z_2 в нормальный симплекс с теми же вершинами (q_1, q_2, q_3). Обозначим

$$\tilde{z}_2 = D' z_2.$$

В любой момент t, $0 < t < 1$, деформация D_2 переводит вершины любого ε-симплекса (q_1, q_2, q_3) в кривые $D_2(q_i, t)$, расстояния между которыми $< \alpha < \frac{h}{4}$.

Определим деформацию D^2 комплекса $\tilde{z}_2$, которая для вершин q_1, q_2, q_3 симплексов из $\tilde{z}_2$, совпадает с D_2, а затем распространяется как нормальная деформация на сами симплексы [кривая — элемент q из ε-симплекса (q_1, q_2, q_3) с барицентрическими координатами λ_1, λ_2, λ_3 переходит в кривую — элемент с теми же барицентрическими координатами в симплексе, вершины которого суть образы q_1, q_2, q_3, в соответственный момент t деформации].

В момент $t=1$ вершины q_i $(i=1, 2, 3)$ каждого ε-симплекса из $\bar{z}_2$ перейдут в точки $a_i = L^2(q_i, 1)$. Кривая $q(q_1, q_2, q_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ε-симплекса (q_1, q_2, q_3) с барицентрическими координатами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ перейдет точку $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ геодезического треугольника $a_1\, a_2\, a_3$ с барицентрическими координатами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Итак, весь симплекс (q_1, q_2, q_3) перейдет в результате D^2 в совокупность точек, заполняющих некоторый сферический треугольник.

Весь цикл $\bar{z}_2$ в результате деформации D^2 перейдет в совокупность точек B, заполняющих конечное или счетное число геодезических треугольников и не покрывающих поэтому всей трехмерной сферы S_3. В момент деформации $t_0 < 1$, достаточно близкий к конечному моменту 1, деформация переводит цикл $\bar{z}_2$ в множество кривых сколь угодно малой длины, заполняющих некоторую сколь угодно малую окрестность множества B и не заполняющее поэтому всей сферы S_3. Оборвем деформацию D^2 на этом моменте t_0 и обозначим эту оборванную деформацию через $D_{t_0}^2$.

Произведение $D_{t_0}^2\, D'$ есть деформация семейства кривых z_2, переводящая его в семейство $\bar{z}'_2$, не покрывающее сферы S_3; но такой деформации не существует, так как $\bar{z}'_2 \times Z_2^a = 1$ при любом $a \in S_3$. Мы пришли к противоречию, выход из которого заключается в неравенстве $c_2 > \frac{h}{4} > 0$.

Числа c_i $(i=2, 3, 4, 5, 6)$, c_4' суть k-критические значения $I(q)$.

Существуют, следовательно (см. теорему 2, гл. III), замкнутые геодезические длины c_2, c_3, c_4, c_4', c_5, c_6. Таким образом, вообще говоря, имеется 6 замкнутых геодезических.

В силу законов подчинения Δ-циклов классов (z_i) и (z_j) и основной теоремы имеем:

Если $c_2 = c_3 = c$; $c_3 = c_4 = c$; $c_4' = c_5 = c$; $c_5 = c_6 = c$, то существует одномерный Δ-цикл, состоящий из замкнутых геодезических длины c, принадлежащий классу (z_1). Так как все замкнутые геодезические расположены в конечной части P, этот цикл не может быть сведен к одному элементу.

Если $c_2 = c_4' = c$; $c_3 = c_5 = c$; $c_4 = c_6 = c$, то существует цикл, состоящий из замкнутых геодезических длины c, принадлежащий классу (z_2) и покрывающий всю гиперповерхность S_3.

Если $c_4' = c_6 = c$, то существует цикл, составленный из замкнутых геодезических длины c класса (z_2').

Если $c_2 = c_5 = c$; $c_3 = c_6 = c$, то существует цикл, составленный из замкнутых геодезических длины c класса (z_3).

Если $c_2 = c = c_6$, то существует цикл из замкнутых геодезических длины c класса (z_4). В этом случае все геодезические — закнумтые.

Во всяком случае либо выполняются обе группы строгих неравенств

$$c_2 < c_3 < c_4 < c_6,$$

$$c_2 < c_4' < c_5 < c_6,$$

и тогда существуют по крайней мере 4 замкнутые геодезические разной длины, либо существует континуальное семейство замкнутых геодезических.

Несколько слов об общем n-мерном случае. Пусть $P=P(S_n)$ пространство спрямляемых кривых на n-мерной сфере S_n. A_{3n-3} есть $(3n-3)$-мерный цикл из всех окружностей на S_n; Z_a^{n-1} — $(n-1)$-мерный ∇-цикл, носителем которого является совокупность всех кривых из P, проходящих через точку a; Z_f^1 — одномерный ∇-цикл, носителем которого является совокупность всех кривых из P, проекции которых на плоскость f имеют площадь 0. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\left(Z^a_{n-1} \times Z^b_{n-1} \times Z_1^{f_1} \times Z_1^{f_2} \times \ldots \times Z_1^{f_{n-1}}\right) \times A_{3n-3} = 1.$$

Тем самым повторение предыдущих рассуждений гарантирует существование по крайней мере $(n+1)$ замкнутой геодезической разной длины или континуального семейства таких геодезических на многообразии, гомеоморфном сфере S_n.

§ 25. Случай $n=2^k$

Для $n=2^k$ можно, опираясь на последнее исследование Л. С. Понтрягина о кольце пересечений в пространстве плоскостей с общей точкой, уточнить предыдущий результат: именно, число замкнутых геодезических на многообразии, гомеоморфном n-мерной сфере, равно $2n-1$. Прежде всего определим в пространстве P_n спрямляемых кривых на сфере S_n некоторый $(n-1)$-мерный ∇-цикл.

S_n пусть будет единичная сфера в пространстве E_{n+1} $(n+1)$ измерений. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ - $(n+1)$ кривых из P_n, где $S(q_i, q_j) < \varepsilon$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$; натянем на кривые $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ на сфере S_n n-мерную „колбасу“ $T_n(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ (материальный носитель $(n-1)$-мерного симплекса в P_n с вершинами $q_1, q_2, \ldots, q_n$). Каждой кривой q из P_n отнесем двумерную пленку в E_{n+1}, натянутую на q, именно, соединив центр тяжести q в E_{n+1} со всеми точками q прямолинейными отрезками. Совокупность таких пленок, натянутых на все кривые из симплекса $T_n(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$ образует $(n+1)$-мерный слой. Определим функцию $f_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — именно степень покрытия этим слоем (по модулю 2) точки O, центра сферы S_n в E_{n+1}; последовательность f_n определяет некоторый $(n-1)$-мерный ∇-цикл, который обозначим через Y. Носителем цикла Y будут все кривые, на которые натянуты пленки, проходящие через O. Этот носитель в пересечении с $3(n-1)$-мерным Δ-цикл $A_{3(n+1)}$ всех окружностей дает $2(n-1)$-мерный цикл A_{2n-2} — совокупность всех больших кругов.

Л. С. Понтрягин доказал, что длина пространства A^{2n-2} при $n=2^k$ равна $2n-2$, именно существует $2n-2$ одномерных ∇-циклов, произведение которых не равно нулю. Но в A_{2n-2} существуют единственные классы гомологии одномерных Δ- и ∇-циклов, и эти одномерные ∇-циклы гомологичны циклам, индуцированным в $A^{(n)}$ циклами $Z_f^{\prime}$ из предыдущего параграфа.

Итак,

$$A_{3n-3} \times (Y \times Z_1^{f_1} \times Z_2^{f_2} \times \ldots \times Z_1^{f_{2n-2}}) \neq 0.$$

Длина A_{3n-3} равна $2n-1$.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, получаем $2n-1$ класса подчиненных друг другу Δ-циклов, именно:

Класс $[y_0]$ $(n-1)$-мерных Δ-циклов, таких, что $y \times Y \neq 0$. Примером такого класса может быть совокупность всех окружностей, проходящих через данные две (недиаметрально противоположные точки на S_n). Классы $[y_i]$, $i=1, 2, \ldots, 2n-2$, $(n+i-1)$-мерных Δ-циклов, таких, что $y_i \times [Y \times Z_{f_1}^1 \times Z_{f_2}^1 \times \ldots \times Z_{f_i}^1] \neq 0$. Очевидно, класс $[y_i]$ подчинен классу $[y_{i+k}]$ посредством класса k-мерных ∇-циклов, полученных произведением k-циклов $Z_f^{\prime}$.

Отсюда, если c_i; $i=0, 1, 2, \ldots, 2n-2$, суть минимумы максимумов функции $y(q)$ на циклах y_i класса $[y_i]$, то, как в предыдущем параграфе, $0 < c_0 < c_1 < \ldots \leqslant c_{2n-2}$. Каждому c_i отвечает замкнутая геодезическая длины c_i. Если $c_i = c_{i+k} = c$, существует k-мерная система замкнутых геодезических длины c.

By L. LUSTERNIK

Topology of functional spaces and calculus of variations in the large

SUMMARY

In the present paper we consider the homological structure of some functional spaces of admissible curves of the corresponding variational problems. The fact is that this structure is closely connected with the number of solutions of the variational problem and, in particular, with the existence of continual families of extremals for the problem.

Bordering upon earlier works of the Moscow school of topoligical methods in the calculus of variations, this paper makes use of a number of results in the modern topology, by which we mean the principle of duality for compact and bicompact spaces generalized by P. Alexandroff and the theory of upper homologies and their products developed by W. Alexander and A. Kolmogoroff. Note that just for infinite-dimensional spaces the upper finite-dimensional complexes give essentially new images. Thereby the upper complexes have often simple geometrical definitions, such as sets of curves passing through a given point is a certain curve space. The ring of products is closely connected with the number of solutions of the variational problems.

In Chapt. I general methods of the calculus of variations in the large are exponded. A general principle is formulated which may serve to show when there arise infinite families of extremals and enables us to estimate the number of solutions of the variational problem in connection with the ring of products in the corresponding functional space.

In Chapt. II the general methods are applied to the theory of eigenvalues of some classes of non-linear integral equations.

Chapt. III deals with „critical sets" consisting of geodesics on manifolds. In addition to it the author's theorem is reproduced that every compact family of curves without self-intersections on the two-dimensional sphere can be deformed into a family of circles.

In Chapt. IV is studied the functional space of all rectifiable curves with common endpoints on the sphere (admissible curves for the variational

problem with fixed ends). Here we first give the thorough investigation of the topological structure of an essentially non-linear functional space. The upper and the lower homology groups and the ring of products (for various groups of coefficients) are constructed. The study of some homotopical properties of this space is carried through. As an application we give the full study of geodesics joining two given points on a surface of genus 0 with an improvement of Morse's results.

In Chapt. V closed geodesics on manifolds homeomorphic to n-dimensional spheres are investigated by general methods. For the case $n=2$ there is given a new proof of the theorem on the existence of three closed geodesic due to Schnirelmann and the author. Under some metrical restrictions the theorem can be extended to the cases $n>2$ the existence of at least $n+1$ closed geodesics is proved (for the case $n=2^k$ the existence of $2n-1$ geodesics is established). Thereby these geodesics have distinct lengths or else there arises a continual family of such geodesics.

ЛИТЕРАТУРА

Alexandroff P. 1. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. Ann. of Math., 1928—1929, **30**, 101—187.

Александров П. С. 2. Общая теория гомологии. Уч. зап. МГУ, 1940, вып. 45, 3—7.

—— 3. О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств. Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, **6**, № 5, 227—282.

Froloff S. et Elsholz. 1. Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donnée sur variété. Мат. сб., 1925, **42**, № 5, 637—643.

Lusternik L. 1. Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie. Monatsheft f. Math. u. Phys., 1930, **37**.

—— 2. Sur quelques méthodes topologiques dans géométrie différentielle. Atti dei congresso internationall dei Matematici Bologna, 1928, **4**, 291—296.

—— 3. Über die topologischen Eigenschaften der Kurvenfamilien. auf Flächen Мат. сб. 1931, **38**, в. $^3/_4$, 59—65.

Люстерник Л. А. 4. Замечания к некоторым вариационным задачам. Уч. зап. МГУ, 1934, вып. 2, 17—23.

—— 5. Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Изв. АН СССР, сер. мат., 1939, № 5, 257—264.

—— 6. Топологическая структура одного функционального пространства. ДАН СССР, 1940, **17**, № 8, 775—777.

—— 7. Кольцо пересечений в одном функциональном пространстве. ДАН СССР, 1943, **38**, № 2—3, 67.

—— 8. О семействах дуг с общими концами на сфере. ДАН СССР, 1943, **39**, № 3, 85—87.

—— 9. О категориях некоторых семейств дуг. ДАН СССР, 1943, **40**, № 4, 147.

—— 10. О размерности критических множеств. ДАН СССР, 1943, **39**, № 9, 371—372.

—— 11. О числе решений вариационной задачи. ДАН СССР, 1943, **40**, № 6, 243—245.

—— 12. Новое доказательство теоремы о трех геодезических. ДАН СССР, 1943, **41**. № 1, 3—5.

—— 13. Топология и вариационное исчисление. Усп. мат. наук, 1946, **1**, № 1 (11) 30—56.

Lusternik L. et Schnirelmann L. 1. Sur un principe topologique en analyse. Comp. Rend. de l'Acad. de Sci. de Paris, 1929, **188**, 295—297.

—— 2. Métodes topologiques dans les problèmes variationnels, 1934, Paris, 51 стр.

Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г. 3. Топологические методы в вариационных задачах. Труды Научно-исслед. инст. мат. и мех., 1930. Москва.

—— 4. Применение топологии к экстремальным задачам. Труды Второго всес. матсъезда, 1935, т. 1, 224—237.

Morse M. 1. The calculus of variations in the Large, 1934. New York. 368 стр.

—— 2. Functional topology and abstract variational theory. Mém. des Sci. math., 1938, Paris, fasc. 97, p. 78.

Pontriagin L. 1. Zur Alexanderschen Dualitäätssatz. Göttinger Nachrichten, 1927.

Schnirelmann L. 1. Über eine neue kombinatorische Invariante. Monatsheft für Math u. Phys., 1930, **37**, № 1.

Соболев В. 1. О собственных элементах некоторых нелинейных операторов. ДАН, 1941, XXXI, № 8.

Цитланадзе. Э. С. 1. Некоторые вопросы собственных значений для нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. ДАН, 1946, LIII, № 4, 311—315.

Шнирельман Л. Г. и Люстерник Л. А. 1. (См. Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г. 1, 2, 3).

Эльсгольц Л. Э. 1. Длина многообразия и ее свойства. Мат. сб., 1939, 5, № 3, 565—571.

—— 2. Теория инвариантов, дающих оценку числа критических точек непрерывной функции, заданной на многообразии. Мат. сб., 1939, 5 (47), № 3, 551—558.

Elzholz L. et Froloff S. (см. Froloff S. et Elzholz).

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета АН СССР № 2269

Технический редактор *О. В. Залышкина* Корректор *Л. К. Николаева*

А—00710. Подписано к печати 10/II 1947 г. Печатных лист. 6,25. Уч.-изд. лист. 7,25. Издат. № 601. Тип. Заказ № 663. Тираж 2000.

1-я Типография Издательства Академии Наук СССР, Ленинград, В. О., 9 линия, 12

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
15	14 св.	$z_{n-\iota}$	$\overline{z}_{n-l}$
16	12 сн.	ненульстепенный элемент	элемент
16	11 „	гомологии	гомологии, порядок которого равен порядку группы
26 27	1 „ 5 св.	$\Vert R_m\ a \Vert$.	$2 \Vert R_m\ (a) \Vert$.
27	3 сн.	2	4
28 29 32	12 „ 18 св. 9 „	f	f_1
45	7 „	a$\overline{\text{b}}$.	ab).
67	13 сн.	Δ-цикл	∇-цикл

На стр. 26, 17-ю строку снизу „причем первые два слагаемые отличны от 0" — исключить

Труды Матем. института им. В. А. Стек ова, XIX. Л. А. Люстерник