

И*Л

*Государственное издательство
иностранной
литературы*
*

**AN INTRODUCTION
TO THE
THEORY OF ELASTICITY
FOR ENGINEERS AND PHYSICISTS**

by

R. V. SOUTHWELL

Second edition

1941

*

Р. В. САУСВЕЛЛ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРУГОСТИ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И ФИЗИКОВ

*Перевод
со второго английского издания
И. Е. САХАРОВА*

1948

*Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва*

Предлагаемая вниманию советского читателя книга Р. В. Саусвелла „Введение в теорию упругости для инженеров и физиков“ может служить хорошим дополнением к широко распространенным у нас курсам теории упругости Лейбензона, Тимошенко, Филоненко-Бородича и др. Автор, ставя своей задачей выяснение физического содержания основных результатов теории, стремился объединить в одной книге сопротивление материалов, начала строительной механики и теорию упругости. Это повлекло за собой в одних местах повторения, в других — конспективность изложения, но в то же время позволило вскрыть связь между основными положениями теории упругости. Книга снабжена большим количеством задач, решение которых доведено до численного ответа. В русском издании все встречающиеся английские меры пересчитаны на метрические.

Книга содержит полезный материал как для преподавателя высшей школы, так и для инженера-практика. Перевод сделан со 2-го английского издания, отличающегося от первого небольшими изменениями и дополнениями, которые отмечены знаками * перед номерами параграфов или их заглавиями.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ПЕРВОМУ АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Современное развитие техники, особенно в области авиации, требует более широкого, чем раньше, знания теории упругости. Большие скорости в машиностроении являются причиной постановки сложных вибрационных проблем. Легкие металлические конструкции привлекают внимание к вопросу упругой устойчивости. Случайные или умышленные концентрации напряжений вызывают следствия, которыми нельзя пренебрегать без риска. Испытания материалов стали более сложными, и их обработку следует проводить на основе теории.

Поэтому инженеру для решения возникающих перед ним задач приходится, наряду с другими руководствами, прибегать к помощи двух энциклопедических трудов: «Математической теории упругости» Лява и «Теории звука» Рэлея.

Чтение элементарных книг не подготавливает его, как правило, к полному освоению содержания этих двух больших трудов. Они написаны математиками для математиков и в малой степени представляют ту технику, с которой имеет дело инженер. Они большей частью посвящены задачам, с которыми инженер непосредственно не сталкивается, их обозначения ему непривычны, и их точка зрения чужда ему. Задача инженера была бы сильно облегчена, если бы он мог изучить эти книги в знакомом ему освещении, т. е. если бы он мог приблизиться к ним, имея уже некоторое представление об общих уравнениях теории упругости, и нашел бы в них обозначения, которыми он уже привык пользоваться. Дать такого рода подготовку для более глубокого изучения и в то же время воспроизвести обычное содержание (в отношении теории) известных курсов сопротивления материалов было моей задачей при составлении этой книги.

Для этой цели я, во-первых, стремился показать, что напряженное состояние является следствием физических законов, лежащих в основе всей теории упругости. Во-вторых, я пытался иллюстрировать развитие математической техники от простых решений, основанных на предположениях, которые должны быть оправданы обращением к интуиции, вплоть до решений, которые представляют интерес для профессионального математика.

Главы VIII—XII можно опустить при первом чтении. Однако я надеюсь, что, вернувшись к ним позже, изучающий будет в состоянии использовать большой труд Лява, а из глав, посвященных устойчивости упругих систем и колебаниям, он почерпнет некоторое представление о тех мощных методах, которым мы обязаны Рэлею. Я пытался сразу же приучить читателя думать в трех измерениях, считая, что инженеры подготовлены к этому занятиями по черчению и геодезии.

Задачи, взятые здесь в качестве примеров, на мой взгляд, имеют чисто практический характер. Однако большая часть из них была выбрана скорее для иллюстрации изложения, чем из-за их практической важности. Считая, что только некоторые изучающие прочтут этот курс без руководителя, я позволил себе сократить число *решенных* примеров*), но приводил много указаний и всюду дал ответы. Историческим сведениям посвящены полутные замечания в подстрочных примечаниях, но специально я не заботился об исчерпывающих ссылках на первоисточники: они не касаются начинающего, а более подготовленный читатель может найти их в другом месте.

ГЛАВА I

ЗАКОН ГУКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В РАВНОВЕСИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ К НИМ ВНЕШНИХ СИЛ

Предварительные соображения

1. Ни один из известных нам в природе материалов не является абсолютно твердым. Тела неизбежно деформируются под действием приложенных к ним сил, хотя иногда деформации настолько малы, что требуются весьма чувствительные инструменты для того, чтобы их обнаружить. Мы сразу можем отличить пластичные материалы, как, например, свинец или вар, которые почти не стремятся возвратиться к своей первоначальной форме после удаления деформирующих сил, от упругих, как, например, эбонит или сталь, у которых (если приложенные силы были не слишком велики) восстановление формы практически полное.

Процесс деформирования в каждом отдельном случае идет так, что приложенные силы, взятые в целом, производят над материалом некоторую работу. Если материал упругий, то эта работа запасается в виде потенциальной энергии, которая освобождается по мере того, как уменьшаются деформирующие силы. Если материал пластичный, то работа, произведенная приложенными к нему внешними силами, пойдет на изменение его физического состояния или вызовет нагревание. Чем больше жесткость материала, тем меньше при данной системе приложенных сил запасенная работа. Иногда неабсолютная жесткость является помехой. Например, это имеет место при точных измерениях, когда приходится учитывать деформацию измерительных инструментов, эталонов длины и т. д., происходящую вследствие их собственного веса. Но в очень большом числе случаев деформируемость является положительным качеством. Так, пластичность свинца или резины позволяет употреблять эти материалы в качестве «прокладок» в машинах высокого давления, где они, деформируясь, обеспечивают

плотное соединение фланцев машины. Способность упругих материалов запасать и отдавать назад механическую работу используется, например, в пружинах. В соответствии с характером поставленной задачи, целью конструктора является достижение либо больших, либо малых деформаций. В каждом из этих случаев конструктор нуждается в теории, с помощью которой деформации могут быть подсчитаны.

2. Теория такого рода имеет и другие приложения. Во-первых, она включает в область теоретической механики задачи, которые неразрешимы методами статики или динамики твердого тела. Простейший пример такой задачи дан на рис. 1. Два жестких бруса A , B , соединенных тремя параллельными стержнями a , b , c , подвержены действию сил P так, как показано на рисунке. Одни только теоремы статики не дают нам возможности сказать, как нагрузка распределится между стержнями. Ясно, что ответ зависит от относительной жесткости стержней. Основным требованием является равенство удлинений всех трех стержней.

Во-вторых, теория деформаций под нагрузкой представляет собой существенную часть ветви прикладной механики, известной под названием сопротивления материалов. В сопротивлении материалов стремятся отыскать правила, позволяющие каждой части конструкции или машины придать размеры, соответствующие тем силам, действию которых она должна противостоять.

Деформация детали может быть настолько малой, что не будет иметь значения сама по себе; но ее нужно учитывать, *потому что она определяет напряженное состояние* (т. е. внутренние усилия).

В только что приведенной задаче мы не можем сказать, будет ли иметь каждый из стержней a , b , c соответствующую прочность, до тех пор, пока мы не определим нагрузку, которую каждый из них должен удерживать. Следовательно, как мы видели, в первую очередь надо определить их удлинения. В качестве другого примера возьмем стержни A и B (рис. 2), сделанные из одинакового материала. Поперечное сечение стержня A равно наименьшему поперечному сечению (ab) стержня B , имеющего треугольные вырезы. Без учета деформации вблизи вырезов мы не сможем сказать, который из стерж-

ней и насколько будет прочнее, потому что мы не будем знать, как общая сила растяжения распределится по сечению ab .

Предыдущие примеры были типичными задачами сопротивления материалов, и они показывают, что развитие этой науки должно идти по двум направлениям. Во-первых, следует развивать методы для определения напряженного состояния, появляющегося в теле заданной формы при действии на него

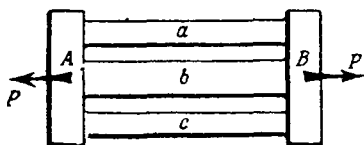


Рис. 1.

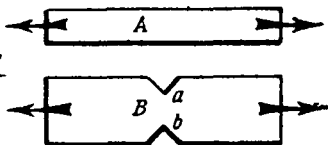


Рис. 2.

заданных сил. Во-вторых, нужно найти способы для решения вопроса о том, может ли данный материал выдержать данное напряженное состояние. Первое направление исследований касается теории упругости, которая является предметом настоящей книги. Второе относится к изучению реальных материалов, и им следует заниматься в лабораториях испытания материалов, металлографии и тому подобных. В идеальном случае наука должна развиваться по обеим линиям *pari passu**). Однако нужно сразу же признать, что прогресс в нашей науке еще не достиг той стадии, на которой становится возможным учет всех, а не только наиболее простых свойств материалов.

3. Первым начал изучать сопротивление твердых тел разрушению, по видимому, Галилей¹⁾). Галилей рассмотрел задачу о стержне, заделанном одним концом в стену и нагруженном

*) В равной степени (лат.). (Прим. перев.)

¹⁾ Galileo Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni matematiche*, Leiden (1638). Интересное изложение этого мемуара и многих исследований «задачи Галилея», которые были сделаны в следующем веке, дается в первой главе «History of the Theory of Elasticity», Todhunter and Pearson, Cambridge (1886). Ср. также Ляв, Математическая теория упругости, Введение, стр. 15.

собственным весом или приложенной силой. Его исследования не привели к удовлетворительному результату, потому что в то время не было известно соотношение между силой и перемещением. Нужное соотношение было открыто Робертом Гуком, который опубликовал в 1678 г. свой знаменитый закон о пропорциональности между напряжением и деформацией (*Ut tensio sic vis*¹⁾). Этот закон явился фундаментом математической теории упругости. Значительный прогресс в теории упругости был достигнут к 1821 г., когда Навье установил общие уравнения²⁾.

Выводом этих уравнений и их решением мы займемся позже. В этой главе мы будем иметь дело с основными теоремами, которые можно получить из закона Гука, не обращаясь к подробным теориям напряжений и деформаций. Это те выводы, которые сам Гук мог бы сделать из своих наблюдений, если бы он обратился к закону сохранения энергии. Однако заметим, что закон сохранения энергии не был четко сформулирован даже во времена появления мемуара Навье, и только в 1837 г. Грин вывел общие уравнения новым методом, в основе которого лежал закон сохранения энергии³⁾.

¹⁾ Robert Hooke, *De potentia restitutiva*. London (1678). Гук (1635—1703, профессор геометрии в Gresham College, 1665; архитектор Лондонского Сити, 1666) был едва ли не самым выдающимся из ученых Оксфорда, объединение которых привело к основанию в 1660 г. Королевского общества. Его биографию, написанную Уэллером (Waller) (R. T. Gunther, *Early Science in Oxford*, т. VI), следует прочесть, так как она хорошо передает его чрезвычайный интерес к науке и целеустремленность (ср. также примечание на стр. 658).

С работами Гука по теории упругости связано его замечательное изобретение — замена в хронометрах маятника, использующего силу тяжести, спиральной пружиной. Гук открыл свой закон в 1660 г., но забота о правах патента на изобретение задержала опубликование закона до 1676 г. В 1676 г. Гук сформулировал его в виде анаграммы — *ceiinnosstttu*, расшифровку которой он дал в своем труде в 1678 г.

Этот закон независимо от Гука был высказан в 1680 г. Мариоттом, который также применил его к задаче Галилея (*Traité du mouvement des eaux*, Paris, 1686).

²⁾ Paris, *Mém. Acad. Sciences*, 7 (1827). Этот мемуар был прочитан в мае 1821 г. (Ср. Ляв, цитир. соч., стр. 20—21).

³⁾ *Camb. Phil. Soc. Trans.*, 7 (1839). Перепечатано в *Mathematical Papers of the late George Green*, London (1871), 245.

Закон Гука и принцип суперпозиции

4. Закон Гука, которому в некоторых пределах подчиняется большое количество материалов, употребляемых в технике, был установлен Гуком в применении к какому-либо «пружинящему» телу. Закон утверждает (по современной терминологии), что *перемещения пропорциональны силам, их производящим*. Не ограничивая себя формой или размером нагружаемого тела, рассмотрим следствия этого очень общего утверждения. В качестве примера (чтобы конкретизировать представления) берем ферму, показанную на рис. 3.

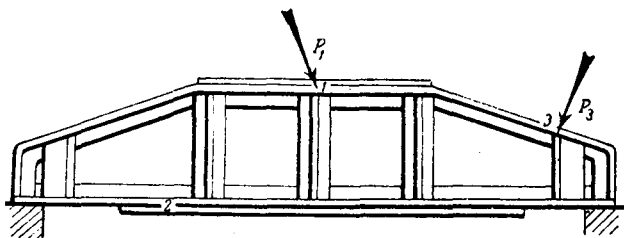


Рис. 3.

Пусть сила P_1 приложена к точке 1. Под действием этой силы другая точка 2 переместится на некоторую величину, которая, согласно гипотезе, пропорциональна P_1 . Мы не можем сказать заранее, каково будет направление этого перемещения, но каждая из его нескольких составляющих (согласно закону Гука) будет пропорциональна P_1 . Отсюда, фиксируя внимание на вертикальной составляющей (которую мы будем обозначать d_2), мы можем сказать, что

$$d_2 = a_{21}P_1, \quad (1)$$

где a_{21} —некоторая постоянная для рассматриваемого упругого тела величина. Эту постоянную мы будем называть коэффициентом влияния для вертикального перемещения в точке 2 силы, приложенной в данном направлении (направлении P_1) в точке 1. Очевидно, если сила P_1 была бы единичной, то величина a_{21} была бы действительным значением вертикального перемещения в точке 2.

5. Согласно закону Гука соотношение (1) сохраняется при любом знаке P_1 . Таким образом, сила, равная и противоположная P_1 , будучи приложена в точке 1, вызовет перемещение равное и противоположное тому, которое вызвала сама сила P_1 , приложенная в 1. Далее, если несколько сил, *имеющих направление P_1* , приложены одновременно в 1, то результирующее перемещение, вызванное ими в точке 2, будет равно сумме перемещений, которые они вызвали бы, будучи приложены отдельно. Другими словами, эффект таких сил в отношении перемещений может быть найден «суперпозицией».

Сила P_3 , приложенная в точке 3 в некотором данном направлении, как показано на рис. 3, также, вообще говоря, вызовет перемещение в точке 2. Если P_3 *действует одна*, то на основании закона Гука мы будем иметь второе соотношение, подобное (1), а именно

$$d_2 = a_{23}P_3, \quad (2)$$

где d_2 обозначает, как и раньше, вертикальную составляющую перемещения, вызванного в 2 действием силы P_3 , а a_{23} —постоянная (неизвестная), которую мы называем коэффициентом влияния для вертикального перемещения в точке 2 силы, приложенной в данном направлении (направлении P_3) в точке 3.

Теперь сам собой возникает вопрос: сохраняется ли принцип суперпозиции, который, как мы только что установили, имеет место для сил, имеющих общую линию действия и приложенных в одной и той же точке, также и для двух или большего числа сил, таких, как P_1 и P_3 , которые действуют в различных направлениях и в различных точках? Если вопрос решается положительно, то мы можем утверждать, что вертикальное перемещение в точке 2 под действием P_1 и P_3 , приложенных одновременно, дается соотношением

$$d_2 = a_{21}P_1 + a_{23}P_3 \quad (3)$$

и что аналогичные соотношения будут иметь место в случае действия на тело любого числа сил. Изучим этот вопрос.

Мы примем, на основании закона Гука, что P_3 , приложенная в то время, когда P_1 действует, вызывает пропорциональный P_3 добавок к вертикальной составляющей перемещения

в точке 2. Мы также допустим, что коэффициент пропорциональности не имеет той величины, которую он имел бы, если P_3 действовала одна. То-есть, мы заменим соотношение (3) следующим:

$$d_2 = a_{21}P_1 + a'_{23}P_3. \quad (4)$$

Оно имеет место тогда, когда P_3 приложена после P_1 , и нами допущена возможность того, что a'_{23} может быть отличным от a_{23} .

*6. Теперь мы примем следующую последовательность действий:

(а) На упругое вначале ненагруженное тело (ферму) мы подействовали силой P_1 и получили перемещение, данное (1).

(б) Оставляя P_1 приложенной, мы подействовали силой P_3 . Согласно нашему предположению, общее перемещение возрастет до величины, данной (4).

(с) Оставляя P_3 приложенной, мы удалим силу P_1 , т. е. приложим силу $-P_1$ в точке 1. Закон Гука утверждает, что получающееся изменение d_2 будет пропорционально приложенной силе, но так как сила $-P_1$ приложена, когда P_1 и P_3 уже действуют, и так как мы не предполагаем, что коэффициент пропорциональности тот же, каким он был бы, если сила $-P_1$ действовала одна, то мы должны обозначить его a'_{21} , и допустить возможность того, что a'_{21} может быть отличным от a_{21} и частично зависящим от P_3 .

Таким образом для вертикального перемещения точки 2 после удаления силы P_1 будем иметь

$$d_2 = a_{21}P_1 + a'_{23}P_3 + a'_{21}(-P_1).$$

(д) Удалим P_3 , т. е. приложим силу $-P_3$ в точке 3. Так как никакая другая сила в это время не действует, то коэффициент влияния будет равняться a_{23} . Итак, окончательное перемещение будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} d_2 &= a_{21}P_1 + a'_{23}P_3 + a'_{21}(-P_1) + a_{23}(-P_3) = \\ &= (a_{21} - a'_{21})P_1 + (a'_{23} - a_{23})P_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь тело больше не подвержено действию внешних сил и поэтому (будучи упругим) вернется к своей первоначальной форме.

чальной форме, т. е. окончательное перемещение, данное (5), должно обратиться в нуль. Следовательно, мы имеем равенство

$$(a_{21} - a'_{21}) P_1 = (a_{23} - a'_{23}) P_3. \quad (6)$$

Согласно сформулированному нами закону Гука a_{23} , a'_{23} не зависят от P_3 , а a_{21} , a'_{21} — от P_1 . Следовательно, мы имеем

$$\left. \begin{aligned} a'_{21} &= a_{21} - kP_3, \\ a'_{23} &= a_{23} - kP_1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где k — постоянная; теперь из (4), если закон Гука постулируется для *всех* типов нагрузки, мы видим, что k должно быть нулем. Отсюда видно, что, если P_1 и P_3 возрастают одновременно и в одном и том же отношении, то d_2 тоже будет возрастать в том же отношении¹⁾. Итак, мы установили принцип суперпозиции для любых двух сил.

Подобное же доказательство показывает, что величина коэффициента влияния третьей силы будет одной и той же, независимо от того, действуют другие две силы или нет, т. е. мы можем распространить наш принцип на любые три силы. По индукции мы можем доказать, что принцип суперпозиции сохраняется для любого числа каких-либо сил. Перемещение, вызванное в точке 2 некоторым числом сил P_1, P_2, P_3, \dots ²⁾, будет даваться выражением вида

$$d_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + \dots, \quad (8)$$

где $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$ «коэффициенты влияния», значения которых *не зависят от порядка, в котором приложены силы*. Заметим, что наше доказательство опиралось на два различных постулата. Первый: любая система нагрузок (взятые силы приложены в любом числе точек и в любых направлениях) вызывает определенное и пропорциональное силам перемещение в какой-нибудь точке (закон Гука). Второй:

¹⁾ Подставляя (7) в (4), мы имели бы при k , не равном нулю, $d_2 = a_{21}P_1 + a_{23}P_3 - kP_1P_3$, откуда видно, что последний член в этом выражении несовместим с законом Гука.

²⁾ Мы можем, очевидно, в эту систему сил включить самой силу P_2 , приложенную в этой точке.

тело, о котором идет речь, возвращается к своей первоначальной форме, после того как произвольная система приложенных сил удалена. Последний постулат можно принять как определение упругости. Очевидно, что эти постулаты образуют основу любой из тех теорем, которые мы впоследствии будем доказывать, пользуясь принципом суперпозиции.

«Соответствующие» силы и перемещения

* 7. Рассмотрим упругое тело, находящееся под действием уравновешенной системы сил P_1, P_2, P_3, \dots . В эту систему сил включены также реакции, вызванные в опорах. В любой фиксированной точке, независимо от того, приложена в ней сила или нет, мы для перемещения, измеренного в каком-либо заданном направлении, имеем выражение вида (8). Будем рассматривать только те точки, в которых приложены силы. Изучая перемещение какой-либо нагруженной точки, будем ограничиваться изучением его составляющей в направлении приложенной там силы.

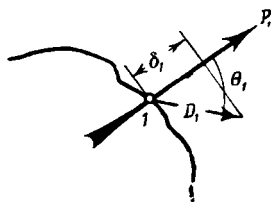


Рис. 4.

Так, если 1 (рис. 4) является точкой, в которой приложена сила P_1 , то направление, в котором 1 действительно переместится, может иметь любой наклон θ_1 к направлению P_1 . Если D_1 фактическое перемещение, то его проекция на направление P_1 будет $D_1 \cos \theta_1$. На этой составляющей, обозначив ее через δ_1 , мы и сосредоточим наше внимание. Через P_1 будем обозначать силу, а через δ_1 — соответствующее перемещение¹⁾ в точке 1. Пара таких связанных между собой величин будет существовать для любой точки приложения силы (в опоре, а, возможно, и в других точках, перемещения могут равняться нулю). Но каков бы ни был характер нагружения или форма нагружаемого тела (если только оно упругое и подчиняется закону Гука), выражение типа (8)

¹⁾ Ср. Рэлей, Теория звука, 1, § 74.

сохраняется для любого перемещения независимо от того, равно оно нулю или нет, и мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + \dots, \\ \delta_2 &= a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и так далее.

Здесь a_{11}, a_{12}, \dots являются коэффициентами влияния вида, рассмотренного в §§ 4—6.

Работа, совершаемая силами, приложенными к упругому телу

8. Мы видели, что каждое из $\delta_1, \delta_2, \dots$ зависит, вообще говоря, от всех сил P_1, P_2, \dots так, что (например) δ_1 не будет в общем пропорционально P_1 . Но если все силы возрастают одновременно и в одном и том же отношении, то все перемещения возрастают тоже в том же отношении. В этом случае соотношение между P_1 и δ_1 будет линейным. Другими словами, мы имеем:

$$\frac{\delta_1}{P_1} = a_{11} + a_{12} \frac{P_2}{P_1} + a_{13} \frac{P_3}{P_1} + \dots = \text{const.}$$

Это имеет место лишь тогда, когда отношения $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \dots$ имеют постоянные значения.

Мы ранее видели (§ 6), что окончательные значения перемещений не зависят от способа приложения силы. Пусть силы при нагружении возрастают в постоянном отношении и скорость возрастания *мала* (так что на каждой стадии процесса сохраняется равновесие)¹⁾. При этих условиях работа, совершаемая (например) силой P_1 , когда точка ее приложения испытывает перемещение δ_1 , очевидно, дается выражением:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} P_1 \delta_1 = && \text{[согласно (9)]} \\ &= \frac{1}{2} P_1 [a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + \dots] && (10), \end{aligned}$$

¹⁾ Внезапное приложение силы вызывает колебания в нагружаемом теле.

Аналогичные выражения можно написать для других сил. Общая работа, совершенная внешними силами, будет:

$$W_1 + W_2 + W_3 + \dots = \frac{1}{2} [P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \dots].$$

Выражение (10) представляет собой половину суммы произведений сил на «соответствующие перемещения».

Значения реакций, возникающих в *абсолютно жестких* опорах, не содержатся в этом выражении, так как перемещения, «соответствующие» им, равны нулю. Если же опоры перемещаются под нагрузкой, то работа совершается *против* сил, которые в них возникают.

9. Если равновесие сохраняется в течение всего процесса нагружения, то можно сказать, что работа, совершаемая приложенными силами, запасается в нагружаемом теле в виде потенциальной энергии. В самом деле, если силы будут медленно убывать, причем их отношение, как и раньше, будет сохраняться постоянным, то та же работа будет совершаться *против* сил, и к моменту, когда перемещения обратятся в нуль, будет возвращена вся работа в целом. Это последнее соображение показывает, что общее количество запасенной потенциальной энергии (подобно окончательным значениям перемещений) не может зависеть от порядка, в котором данные силы прикладываются, так как разгружая, подобно тому как описывалось выше, мы можем вновь получить от упругого тела при возвращении его в ненапряженное состояние определенное количество работы. Если же мы допустим, что упругое тело может запастись большее или меньшее количество потенциальной энергии при приложении сил в каком-нибудь специальном порядке, то мы придем к противоречию с законом сохранения энергии.

* Упругая энергия деформации.

Соотношения между коэффициентами влияния

10. Мы пришли к представлению о потенциальной энергии, запасаемой в теле и возвращаемой при желании, в такой форме, в которой эта величина зависит только от характера и величины деформации. Мы назовем ее упругой энергией

деформации. Если P_1, P_2, \dots, P_n — силы, необходимые для того, чтобы сохранять равновесие в какой-либо частной конфигурации, и если $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — «соответствующие перемещения» (§ 7) точек, в которых действуют силы, то общее количество упругой энергии деформации равно

$$U = \frac{1}{2} [P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \dots + P_n\delta_n]. \quad (11)$$

При выводе этого выражения мы принимали, что силы прикладываются определенным способом, но закон сохранения энергии вместе с принципом суперпозиции показывают, что оно должно сохраняться при любом способе приложения сил.

Обращаясь опять к этим основным законам, мы можем показать, что a_{12} и a_{21} в выражениях (9) обязательно имеют равные постоянные значения. Представим себе, что действуют только две силы P_1 и P_2 , и пусть процесс нагружения состоит в приложении сначала силы P_1 , а затем P_2 — в обоих случаях столь *медленного*, что равновесие сохраняется в течение всего процесса. По мере того, как P_1 возрастает от нуля до окончательного значения, δ_1 возрастает от нуля до величины $\delta_1 = a_{11}P_1$; работа, совершаемая при этом P_1 , будет $\frac{1}{2} a_{11}P_1^2$. Когда же затем прикладывается P_2 , δ_1 возрастает на величину $a_{12}P_2$ и δ_2 — на величину $a_{22}P_2$. Работа, совершаемая при этом P_2 , будет $\frac{1}{2} a_{22}P_2^2$, а работа, совершаемая P_1 (величина которой постоянна в течение второго процесса), равна $(a_{12}P_2)P_1$. Таким образом, когда P_1 прикладывается раньше P_2 , общая работа, совершенная двумя силами, действующими на упругое тело, будет равна

$$W = \frac{1}{2} (a_{11}P_1^2 + a_{22}P_2^2) + a_{12}P_1P_2. \quad (12)$$

Если мы примем, что P_2 прикладывается раньше, чем P_1 , то аналогичные соображения для общей работы, совершаемой обеими силами, дадут выражение

$$W' = \frac{1}{2} (a_{22}P_2^2 + a_{11}P_1^2) + a_{21}P_1P_2. \quad (13)$$

В обоих случаях вся совершенная работа запасается в виде упругой энергии деформации, величина которой должна быть одной и той же, так как окончательная конфигурация сил в обоих случаях одинакова. Таким образом, согласно *закону сохранения энергии, соединенному с принципом суперпозиции*, мы имеем:

$$W = U = W',$$

что, согласно (12) и (13), требует, чтобы

$$a_{12} = a_{21}. \quad (14)$$

*11. Результат, выраженный равенством (14), имеет очень большое значение в теории упругости. Обращаясь к опреде-

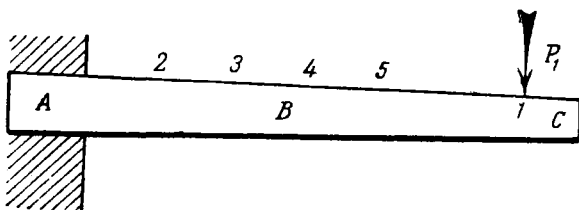


Рис. 5.

лению коэффициентов влияния, данному в § 4, мы можем установить следующее: *Если δ_1 , δ_2 являются перемещениями, которые «соответствуют» (§ 7) силам P_1 , P_2 , приложенным в двух точках упругого тела, то приращение δ_2 от единичной силы, приложенной в направлении P_1 , равно приращению δ_1 от единичной силы, приложенной в направлении P_2 .*

Интересное приложение этого результата было дано Рэлеем ¹⁾. Пусть ABC (рис. 5) является консольной балкой. Предположим, что нам требуется экспериментально определить кривую, форму которой примет балка, нагруженная сосредоточенной силой, приложенной в точке I. Естественно было бы измерить прогибы, вызванные силой P_1 в некото-

¹⁾ *Phil. Mag.*, 48 (1874), 452—456, и 49 (1875), 183—185 (перепечатано в *Scientific Papers*, 1, № 32).

ром числе точек 2, 3, 4, 5... Обычно эти прогибы очень малы, и для их точного измерения необходимо было бы установить визирную трубу для наблюдения над отметкой в каждой из указанных точек. С другой стороны, наша теорема устанавливает, что вертикальный прогиб, вызванный P_1 в точке 2, равен прогибу, который вызовет в точке 1 вертикальная сила той же величины, приложенная в 2. Следовательно, мы можем достичь нашей цели, установив только одну визирную трубу для наблюдения над отметкой в точке 1 и прикладывая силу последовательно в точках 2, 3, 4, 5, ...¹⁾.

Теорема взаимности

*12. Так же, как в § 10, мы можем показать, что

$$\left. \begin{aligned} a_{13} &= a_{31}, \\ a_{23} &= a_{32} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В силу этих соотношений число *независимых* постоянных в выражениях (9) сильно уменьшается.

Пусть $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n$ перемещения, которые вызываются в точках 1, 2, 3, ..., n силами P'_1, P'_2, \dots, P'_n , приложенными в тех же точках и в тех же направлениях, что и P_1, P_2, \dots, P_n . Перемещения, соответствующие P_1, P_2, \dots, P_n , обозначим $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда, используя соотношения (15), мы из (9) имеем:

$$\begin{aligned} &P'_1\delta_1 + P'_2\delta_2 + \dots + P'_n\delta_n = \\ &= P'_1(a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n) + \\ &+ P'_2(a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \dots + a_{2n}P_n) + \\ &+ \dots + P'_n(a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + \dots + a_{nn}P_n) = \\ &= (a_{11}P_1P'_1 + a_{22}P_2P'_2 + \dots + a_{nn}P_nP'_n) + \\ &+ a_{12}(P_1P'_2 + P_2P'_1) + a_{13}(P_1P'_3 + P_3P'_1) + \dots \quad (16) \end{aligned}$$

¹⁾ Другими словами, кривая прогиба под действием единичной силы, приложенной в точке 1, является *линией влияния* для прогиба в точке 1 под действием единичной силы, двигающейся по консоли, а линию влияния относительно легко определить.

Симметрия по отношению к P и P' выражения в правой части (16) показывает, что эта величина также равна $(P_1\delta_1' + P_2\delta_2' + \dots + P_n\delta_n')$.

Таким образом мы получаем равенство:

$$P_1\delta_1' + P_2\delta_2' + \dots + P_n\delta_n' = P_1'\delta_1 + P_2'\delta_2 + \dots + P_n'\delta_n, \quad (17)$$

которое можно сформулировать следующим образом: *силы первой системы (P_1, P_2, \dots, P_n), действуя на «соответствующих» перемещениях, вызванных второй системой ($P_1', P_2', P_3', \dots, P_n'$), производят ту же работу, что и силы второй системы, действуя на «соответствующих» перемещениях, вызванных первой системой.*

Это «теорема взаимности» Максвелла¹⁾, Бетти²⁾ и Рэлея³⁾.

Она является обобщением соотношений (14) и (15), обычно известных как «соотношения взаимности Максвелла».

Примеры

1. В опыте, описанном в § 11, кривая прогиба для консоли, нагруженной вертикальной силой P , приложенной на свободном конце, дается уравнением

$$y = \lambda P (3 l^2 x^2 - 3 l x^3 + x^4),$$

где y — прогиб (направлен вниз), x измеряется от заделанного конца, l — общая длина стержня.

Чему будет равен прогиб свободного конца, если две равные силы, каждая величины W , прикладываются на расстоянии $\frac{1}{3} l$ и $\frac{2}{3} l$ от заделанного конца?

$$\left[\frac{71}{81} \lambda W l^4 \right]$$

2. Показать, что для любой консоли, расположенной как на рис. 5, средний прогиб, вызванный вертикальной силой, приложенной в точке I , равен прогибу, вызванному в I той же по величине силой, но равномерно распределенной по длине балки.

¹⁾ J. Clerk Maxwell, *Phil. Mag.*, 27 (1864), 294—299. Ср. J. Morris, *R. Aer. Soc. J.*, 43 (1939), 467—468.

²⁾ E. Betti, *Il nuovo Cimento* (серия 2), 7 и 8 (1872). Ср. Ляв, цит. соч., § 121.

³⁾ *Phil. Mag.*, 48 (1874), 452—456; 49 (1875), 183—185, *Scientific Papers*, 1, № 32.

3. Арка имеет в опорах A, B шарниры без трения (см. рис. 21 главы II). Сосредоточенная сила W , приложенная в какой-нибудь точке, в том случае, когда может произойти удаление шарниров друг от друга, вызывает «соответствующее» перемещение δ . Когда же это удаление невозможно, то возникает распор H , и «соответствующее» перемещение равно δ' (см. рисунок).

Показать, что если распор далее возрастет на величину H' , то опоры сблизятся на величину

$$\frac{(\delta - \delta') WH'}{H^2}.$$

Полная упругая энергия деформации, выраженная как функция приложенных сил

13. Если в (11) мы подставим для $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ их значения из (9) и воспользуемся соотношениями (14) и (15), то для полной упругой энергии мы получим другое выражение:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} P_1 (a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + \dots + a_{1n} P_n) + \\ &+ \frac{1}{2} P_2 (a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + \dots + a_{2n} P_n) + \\ &+ \dots + \frac{1}{2} P_n (a_{n1} P_1 + a_{n2} P_2 + \dots + a_{nn} P_n) = \\ &= \frac{1}{2} (a_{11} P_1^2 + a_{22} P_2^2 + \dots + a_{nn} P_n^2) + \\ &+ (a_{12} P_1 P_2 + a_{13} P_1 P_3 + \dots + a_{1n} P_1 P_n + \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

Его можно записать в форме:

$$U = \frac{1}{2} \sum [a_{11} P_1^2] + \sum [a_{12} P_1 P_2], \quad (19)$$

где суммирование производится по каждому из встречающихся членов типа $a_{11} P_1^2$ или $a_{12} P_1 P_2$. Очевидно, в (19) будет n членов первого типа и $\frac{1}{2} n(n-1)$ второго.

Как было установлено в § 1, мы всегда можем принять, что приложенные силы, *взятые в целом*¹⁾, совершают над телом, подверженным их действию, работу. Если тело упругое, то совершенная работа запасается в виде упругой энер-

¹⁾ Одно или несколько из произведений $P_1 \delta_1, P_2 \delta_2, \dots$ в (11) может быть отрицательным. Мы только постулируем, что сумма всех таких произведений положительна.

гии, — это положение приводит к утверждению, что U существенно положительная величина. Противоположное (U отрицательная величина) едва ли мыслимо, ибо это означало, что приложением соответствующей системы сил мы могли бы извлекать из тела энергию. Другими словами, материал был бы *механически неустойчив*. Но мы не можем представить себе сохраняемость таких материалов в природе.

Для того чтобы U , данное формулой (19), было положительным для всех действительных значений P_1, P_2, \dots, P_n , коэффициенты влияния $a_{11}, \dots, a_{12}, \dots$ должны удовлетворять некоторым соотношениям. Соотношения эти изучены ¹⁾, но мы их здесь пока не будем касаться.

Теорема Кирхгофа о единственности решения ²⁾

14. Установлено, что полная упругая энергия U должна быть положительной. Вместе с тем и каждая часть тела должна запасать либо положительное количество энергии, либо нуль, ибо при нашем предположении о том, что ненагруженный материал механически устойчив, ни одна часть тела в результате действия на него сил не может отдавать энергии. *В соответствии с этим U может обратиться в нуль только тогда, когда любая часть тела не деформирована, т. е. энергия не запасена ни одной из частей тела.*

На этом заключении и на принципе суперпозиции (§ 6) мы можем основать доказательство того, что только одна конфигурация равновесия совместима с заданными силами или заданными перемещениями.

15. Возьмем наиболее общий случай. Примем, что в одних точках заданы перемещения, а в других силы (очевидно, что мы не свободны в задании одновременно и сил и перемещений в одной и той же точке). Обозначим заданные перемещения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$, а заданные силы P_s, P_t, \dots, P_n . Далее

¹⁾ J. Mercer, «Functions of positive and negative type...», *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 209 (1909), 415 [имеется у Temple and Bickley, *Rayleigh's Principle and its Applications to Engineering*, Oxford (1933), 54].

²⁾ G. Kirchhoff, *J. f. Math.* (Crelle), 56 (1859). Ср. Ляв, цит. соч., § 118.

допустим, что возможны две различные конфигурации равновесия. Пусть силы, соответствующие $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$, суть P_1', P_2', \dots, P_r' в первой конфигурации и $P_1'', P_2'', \dots, P_r''$ во второй, а перемещения, соответствующие P_s, P_t, \dots, P_n , суть $\delta_s', \delta_t', \dots, \delta_n'$ в первой конфигурации и $\delta_s'', \delta_t'', \dots, \delta_n''$ во второй. Таким образом имеем две различные системы сил и перемещений, а именно:

$$\begin{array}{l} \text{Первая} \\ \text{система:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Силы:} \quad P_1', P_2', \dots, P_r', P_s, P_t, \dots, P_n \\ \text{Соответствующие} \\ \text{перемещения:} \quad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \delta_s', \delta_t', \dots, \delta_n' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Вторая} \\ \text{система:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Силы:} \quad P_1'', P_2'', \dots, P_r'', P_s, P_t, \dots, P_n \\ \text{Соответствующие} \\ \text{перемещения:} \quad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \delta_s'', \delta_t'', \dots, \delta_n'' \end{array} \right.$$

По принципу суперпозиции эти две системы сил и перемещений можно скомбинировать друг с другом любым способом. Комбинация их должна дать систему сил и соответствующих перемещений, образующих третью конфигурацию равновесия. Скомбинируем первую систему со второй, *обращенной* (т. е. силам и перемещениям второй системы приписываются отрицательные знаки). Тогда в третьей (комбинированной) системе мы имеем:

$$\text{Силы:} \quad (P_1' - P_1''), (P_2' - P_2''), \dots, (P_r' - P_r'')$$

$$0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0,$$

$$\text{Соответствующие} \\ \text{перемещения:} \quad 0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0,$$

$$(\delta_s' - \delta_s''), (\delta_t' - \delta_t''), \dots, (\delta_n' - \delta_n'').$$

Третья система, по нашему предположению, тоже является системой, удерживающей тело в равновесии. Но в ней все произведения сил на соответствующие перемещения равны нулю так, что, согласно (11), мы имеем $U = 0$. Таким образом, третья (комбинированная) система не запасает упругой энергии, а поэтому (в соответствии с доказательствами § 14) она не вызывает деформаций ни одной из частей тела. Отсюда мы заключаем, что первая и вторая системы сил и перемещений должны быть тождественны. Мы пришли к противо-

речию с нашим первоначальным предположением о возможности двух различных конфигураций равновесия. Полученное противоречие доказывает теорему Кирхгофа о единственности решения.

Первая теорема Кастилиано ¹⁾

16. Теперь рассмотрим, как влияет на U изменение какой-нибудь одной силы (скажем, P_1), когда остальные силы остаются постоянными. Все перемещения в результате изменения P_1 станут другими. Скорость, с которой будет изменяться U , равна $\frac{\partial U}{\partial P_1}$. Из выражения (18) мы получим, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + \dots + a_{1n}P_n = \\ &= \delta_1 \text{ [согласно (9)],} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

аналогично мы можем показать, что

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \delta_2, \quad \frac{\partial U}{\partial P_3} = \delta_3, \dots,$$

т. е. перемещение, «соответствующее» какой-нибудь одной (скажем, P_r) из системы сил P_1, P_2, \dots, P_n , можно найти путем образования выражения полной упругой энергии как функции сил и дифференцирования последней частным образом по P_r . В этом заключается «первая теорема Кастилиано».

В частности, если P_r сила, вызванная связью (т. е. жесткой опорой, не допускающей перемещения) в точке под номером r , то частная производная от U по P_r обращается в нуль, и мы имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial P_r} = \delta_r = 0.$$

17. Мы увидим, что «первая теорема Кастилиано», выраженная соотношениями (20), имеет очень большое практическое значение. Надо заметить, что если мы будем исходить

¹⁾ Ср. гл. III, §§ 88 - 91 и подстрочные примечания.

из выражения для U в форме (11), то мы получим, что

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{1}{2} \left[\delta_1 + \left\{ P_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial P_1} + \dots + P_n \frac{\partial \delta_n}{\partial P_1} \right\} \right]. \quad (21)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что P_2, P_3, \dots, P_n остаются постоянными, во время изменения P_1 . Изменение P_1 будет (в общем) влиять на все перемещения. Но из (9) мы получим (так как a_{11}, a_{12}, \dots — постоянные величины), что

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial P_1} = a_{11}, \quad \frac{\partial \delta_2}{\partial P_1} = a_{21}, \quad \dots,$$

откуда, используя соотношения типа (15), мы найдем, что выражение, содержащееся в фигурных скобках в (21), эквивалентно $a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n$, что, согласно первому соотношению из (9), дает

$$a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n = \delta_1.$$

Таким образом, из (21) мы имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta_1, \quad (20) \text{ bis}$$

что и было получено раньше.

*Теорема, взаимная с первой теоремой Кастилиано

18. Теперь, вместо того чтобы изменять одну силу, будем изменять одно перемещение. Если мы сохраним $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ постоянными, закрепляя точки, в которых приложены P_2, P_3, \dots, P_n , но увеличим немного δ_1 , то это повлияет, вообще говоря, на все силы. Однако точки приложения всех сил, кроме P_1 , не перемещаются, а *поэтому* P_2, P_3, \dots, P_n не будут совершать работы. Единственной силой, совершающей работу, будет сила P_1 . Ее работа (если δ_1 возрастает медленно) должна идти на увеличение полной упругой энергии U .

Если изменение δ_1 очень мало, то во время этого изменения P_1 (в первом приближении) можно считать постоянной. В таком случае мы будем иметь соотношение:

$$\text{возрастание } U = P_1 \times (\text{возрастание } \delta_1)$$

(это равенство имеет место при $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ постоянных). Выражая полученный результат в математических символах, мы будем иметь соотношение:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_1} = P_1 \text{ [первое из соотношений (22)].}$$

Таким образом, наряду с равенствами (20), мы получаем равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_1} = P_1, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta_2} = P_2, \quad \dots, \quad (22)$$

т. е. силу, «соответствующую» какому-нибудь одному (скажем δ_r) из системы вызванных перемещений $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, можно найти путем образования выражения полной упругой энергии как функции перемещений и дифференцирования последней частным образом по δ_r .

В частности, если в рассматриваемой точке не приложено никакой силы, то частная производная U по δ_r равна нулю, и мы имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_r} = P_r = 0. \quad (23)$$

Связь с общей теоремой механики

***19.** Уравнения (22) устанавливают теорему, взаимную с первой теоремой Кастилиано, и представляют собой частные производные от U по $\delta_1, \delta_2, \dots$. Нужно заметить, что при нашем доказательстве мы предполагали, что упругая система под действием соответствующих сил P_1, P_2, \dots, P_n находится в равновесии, но *не обращались к закону Гука*. В действительности соотношения (22) просто устанавливают «принцип виртуальных перемещений».

При возрастании δ_1 сила P_1 совершает работу. Эта работа производится за счет потенциальной энергии P_1 . Если возрастание δ_1 очень мало и если V_1 является потенциальной энергией P_1 , то с точностью до малых величин первого порядка мы имеем:

$$\begin{aligned} \text{уменьшение } V_1 &= \text{работе, совершенной } P_1 = \\ &= P_1 \times (\text{возрастание } \delta_1). \end{aligned} \quad (I)$$

Пусть V_2, V_3, \dots, V_n являются потенциальными энергиями сил P_2, P_3, \dots, P_n и пусть

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad (II)$$

так, что V — общая потенциальная энергия приложенных сил. Если возрастание δ_1 не сопровождается изменениями $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, то V_2, V_3, \dots, V_n не изменяются при возрастании δ_1 , и из (II) следует, что уменьшение V является уменьшением только V_1 . Итак, если δ_1 является единственным изменяющимся перемещением, то мы можем подставить в (I) V вместо V_1 . Если возрастание δ_1 бесконечно мало, то это уравнение можно заменить следующим:

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_1} = P_1 = \frac{\partial U}{\partial \delta_1};$$

последнее равенство имеет место согласно первому из (22).

Записав этот результат в форме

$$\frac{\partial}{\partial \delta_1} (U + V) = 0, \quad (24)$$

мы заключаем, что возрастание δ_1 не вызывает с точностью до малых величин первого порядка изменения $U + V$. Аналогичные результаты можно установить и в отношении других перемещений. $(U + V)$ является суммой полной потенциальной энергии внешних сил и полной упругой энергии, т. е. $(U + V)$ представляет собой полную потенциальную энергию (любого рода) упругой системы. Согласно (24) и другим уравнениям той же формы, для упругой системы устанавливается общая теорема механики, а именно: *полная потенциальная энергия любой системы имеет стационарное значение, когда эта система находится в равновесии, и имеет минимальное значение, когда это равновесие устойчиво*¹⁾.

Доказательство сформулированной теоремы не опиралось на закон Гука. Теорема будет использована нами в § 106²⁾.

¹⁾ Ср. Лэмб, Динамика, § 32 и Статика, §§ 48—49. Фактически мы здесь имеем дело с «принципом виртуальных перемещений».

²⁾ Ср. «Relaxation Methods», §§ 93—97.

РЕЗЮМЕ

Замечания к закону Гука

20. Теперь мы имеем несколько теорем, имеющих большую общность. Большинство из них выведено из закона Гука в комбинации с законом сохранения энергии. В главе II мы применим их к частным задачам. Сейчас же просмотрим определения и предположения, на которых основаны наши результаты.

Мы не ограничивали ни по форме, ни по размеру нагружаемое тело или материал, из которого оно состоит, мы только постулировали: (а) что тело идеально упруго в смысле § 1 (т. е. полагали, что перемещения принимают нулевые значения, когда силы удалены) и (б) что приложенные силы и вызванные ими перемещения связаны законом Гука. Мы видели, что наше определение упругости, взятое само по себе, требует только, чтобы перемещения были однозначными функциями сил и исчезали, когда силы обращаются в нуль. Закон Гука дает больше, чем это определение, ибо он устанавливает, что перемещения точно *пропорциональны* силам. Однако он не делает постулат (а) излишним. Так, мы видели (§ 6), что упругость нужно постулировать при выводе принципа суперпозиции из закона Гука или принимать этот принцип в качестве дополнительного предположения.

21. Далее мы заметим, что область применимости закона Гука в практике должна быть ограничена. Например, предположим, что мы имеем две упругие нити длины l , каждая из которых под действием растягивающей силы T удлинится на величину

$$e = kT \quad (k \text{ упругая постоянная})$$

и, следовательно, для силы такого характера удовлетворяет закону Гука. Представим себе, что мы соединили их так, что образовалась одна нить длины $2l$, и прикрепили ее концы к двум неподвижным опорам, находящимся на одном и том же уровне на расстоянии $2l$ друг от друга (рис. 6). В середине (т. е. в месте соединения двух нитей)

приложим силу W . Вычислим теперь силу, необходимую для того, чтобы вызвать вертикальное перемещение d нагруженной точки, и увидим, что она *не* будет пропорциональна d .

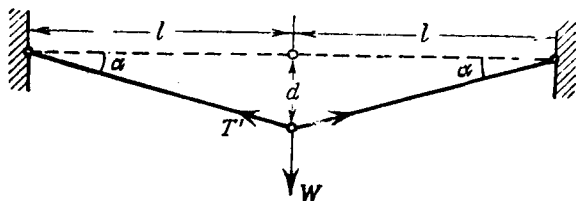


Рис. 6.

Если мы обозначим растянутую длину каждой нити через l' , то удлинение каждой из них будет $(l' - l)$. Силу растяжения в каждой нити обозначим через T' и получим

$$l' - l = kT'.$$

Из законов статики имеем, что

$$W = 2 T' \sin \alpha = 2 T' \frac{d}{l'} = \frac{2}{k} d \left(1 - \frac{l}{l'} \right),$$

где (смотри рисунок)

$$l'^2 = l^2 + d^2.$$

Следовательно,

$$W = \frac{2}{k} d \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}} \right),$$

т. е. W *не* пропорционально d . W будет почти пропорционально d тогда, когда d велико, если мы можем предполагать, что закон Гука сохраняется для больших удлинений нитей.

Этот пример показывает, что для некоторого типа нагрузок упругое тело может удовлетворять закону Гука и в то же время по кинематическим причинам может не удовлетворять закону для других типов нагрузки. К этому факту мы обратимся позже в связи с теорией «устойчивости упругих систем» (глава XIII).

22. Наконец, заметим, что закон Гука является утверждением, основанным на экспериментальных наблюдениях, и,

следовательно, имеет дело с перемещениями, которые можно измерить, и с силами, которые можно оценить. Он не высказывает соображений относительно деформаций, происходящих внутри тела, и поэтому ни одна теорема этой главы не включает (количественно) жесткости рассматриваемого тела. Мы только знаем, что внутренняя деформация должна соответствовать запасу работы в виде полной упругой энергии. Полное количество этой энергии мы записывали как функцию приложенных сил и «коэффициентов влияния» [выражение (19)]. Последние можно получить из наблюдений над перемещениями точек, в которых приложены силы, но пока они не могут быть вычислены.

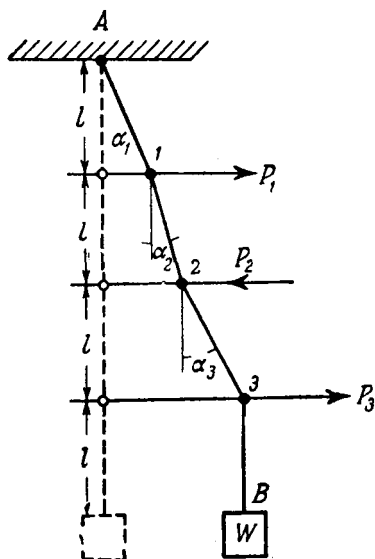


Рис. 7.

Пример механической системы, подчиняющейся закону Гука

23. Для того чтобы было легче понять наши теоремы, иллюстрируем их на характерном примере. Нам придется выбрать пример несколько специального вида, чтобы избежать оережения результатов, содержащихся в последующих главах и относящихся к внутренним деформациям.

Итак, для иллюстрации наших теорем, выберем такой пример, в котором имеет место закон Гука и не фигурирует *жесткость*. Решение примера еще больше подчеркнет тот факт, что наши теоремы зависят только от закона Гука совместно с законом сохранения энергии.

Рассмотрим гибкую нерастяжимую висющую нить AB , закрепленную в неподвижной точке A и несущую груз W

на свободном конце B . Мы приложим горизонтальные силы (P_1, P_2, P_3) в точках, которые находятся друг от друга на расстоянии $\frac{1}{4}$ длины нити (рис. 7).

Под действием этих сил нить отклонится от своего вертикального положения. Пусть общая длина нити будет $4l$, а d_1, d_2, d_3 — горизонтальные перемещения точек приложения сил (P_1, P_2, P_3) , *положительные направо*, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, которые образуют различные части нити с вертикалью (рис. 7).

Теперь, введя все обозначения и полагая, что *перемещения малы*, мы можем написать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \alpha_1 = \frac{d_1}{l}, \\ \alpha_2 &= \sin \alpha_2 = \frac{d_2 - d_1}{l}, \\ \alpha_3 &= \sin \alpha_3 = \frac{d_3 - d_2}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

В случае *малых перемещений* сила растяжения по всей нити равна W , и тогда условия равновесия точек 1, 2, 3 будут:

$$\begin{aligned} W (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) &= P_1, \\ W (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_3) &= -P_2 \text{ (учитываем направление } P_2), \\ W \sin \alpha_3 &= P_3. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (I) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= W \frac{2d_1 - d_2}{l}, \\ -P_2 &= W \frac{2d_2 - d_3 - d_1}{l}, \\ P_3 &= W \frac{d_3 - d_2}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

складывая, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{l} d_1 &= P_1 - P_2 + P_3, \\ \text{аналогично:} \\ -\frac{W}{l} d_2 &= 2P_2 - 2P_3 - P_1, \\ \frac{W}{l} d_3 &= 3P_3 + P_1 - 2P_2. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Таким образом, наша механическая система, *при малых перемещениях*, подчиняется закону Гука в том смысле, что приложение какой-нибудь одной силы вызывает пропорциональное возрастание каждого перемещения. Из (III) также видно, что применим принцип суперпозиции.

24. В нашем примере потенциальная энергия запасается при подъеме груза W , который поднимается в силу отклонения нерастяжимой нити от вертикали. Очевидно, что в отклоненном положении (рис. 7) вертикальное расстояние W от A будет равно:

$$l (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + 1).$$

Первоначальное расстояние равнялось $4l$. Для величины подъема W получаем:

$$l (3 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3).$$

Считая $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ малыми, мы для потенциальной энергии силы W в отклоненном положении получим значение:

$$\begin{aligned} U &= Wl \{ (1 - \cos \alpha_1) + (1 - \cos \alpha_2) + (1 - \cos \alpha_3) \} = \\ &= \frac{1}{2} Wl (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{W}{l} \{ d_1^2 + (d_2 - d_1)^2 + (d_3 - d_2)^2 \} = \quad [\text{согласно (I)}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{W}{l} \{ 2d_1^2 + 2d_2^2 + d_3^2 - 2(d_1d_2 + d_2d_3) \} \quad (25) \end{aligned}$$

В соответствии с доказанным в §§ 8—9 это выражение должно равняться работе, совершенной внешними силами, т. е. половине суммы произведений сил на «соответствующие» перемещения.

Перемещения, «соответствующие» P_1, P_2, P_3 (§ 7), равны:

$$\delta_1 = d_1, \quad \delta_2 = -d_2, \quad \delta_3 = d_3; \quad (IV)$$

из (III) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{l}{W} (P_1 - P_2 + P_3), \\ \delta_2 &= \frac{l}{W} (-P_1 + 2P_2 - 2P_3), \\ \delta_3 &= \frac{l}{W} (P_1 - 2P_2 + 3P_3). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} [P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3] = \frac{1}{2} \frac{l}{W} [P_1^2 + 2P_2^2 + 3P_3^2 - 2P_1P_2 - 4P_2P_3 + 2P_3P_1] \quad (27)$$

и, если мы подставим сюда значения для P_1, P_2, P_3 из (II), то мы найдем, что выражение в правой части (27) равно (25). Таким образом выражение (11) подтверждается на нашем частном примере.

25. Сравнивая выражение (26) с (9) из § 7, мы найдем, что значения коэффициентов влияния (§ 4) в нашей задаче следующие:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{l}{W}, & a_{12} &= -\frac{l}{W}, & a_{13} &= \frac{l}{W}, \\ a_{21} &= -\frac{l}{W}, & a_{22} &= 2\frac{l}{W}, & a_{23} &= -2\frac{l}{W}, \\ a_{31} &= \frac{l}{W}, & a_{32} &= -2\frac{l}{W}, & a_{33} &= 3\frac{l}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Вспомним, что для этих величин должны иметь место соотношения

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}.$$

Наш пример подтверждает и их справедливость.

26. Для того чтобы иллюстрировать теорему взаимности (§ 12), припишем определенные значения силам P_1, P_2, P_3 . Возьмем две различные системы:

$$\left. \begin{aligned} \text{в системе I: } & P_1 = 3w, \quad P_2 = 2w, \quad P_3 = w, \\ \text{в системе II: } & P'_1 = 2w, \quad P'_2 = 0, \quad P'_3 = 2w. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Тогда для соответствующих перемещений из (26) мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \text{в системе I: } & \delta_1 = 2\frac{lw}{W}, \quad \delta_2 = -\frac{lw}{W}, \quad \delta_3 = 2\frac{lw}{W}, \\ \text{в системе II: } & \delta'_1 = 4\frac{lw}{W}, \quad \delta'_2 = -6\frac{lw}{W}, \quad \delta'_3 = 8\frac{lw}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Теперь найдем, что

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 + P_3\delta'_3 = 8\frac{lw^2}{W} = P'_1\delta_1 + P'_2\delta_2 + P'_3\delta_3.$$

Таким образом, соотношение (17), выражающее теорему взаимности, тоже подтверждается.

27. Формула (27), совпадающая по доказанному с (25), дает выражение полной потенциальной энергии. Она, как легко показать, тождественна с результатом, который можно получить из (19), подставив туда в качестве «коэффициентов влияния» a_{11} , a_{12} , ... выражения (28). Проверим «первую теорему Кастилиано» (§§ 16, 17). Согласно (27) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P_1} &= \frac{l}{W} (P_1 - P_2 + P_3), \\ \frac{\partial U}{\partial P_2} &= \frac{l}{W} (-P_1 + 2P_2 - 2P_3), \\ \frac{\partial U}{\partial P_3} &= \frac{l}{W} (P_1 - 2P_2 + 3P_3). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

Это как раз выражения, даваемые для δ_1 , δ_2 , δ_3 соотношениями (26). Аналогичным образом из (25), воспользовавшись (IV), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \delta_1} &= \frac{W}{l} (2\delta_1 + \delta_2), \\ \frac{\partial U}{\partial \delta_2} &= \frac{W}{l} (\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3), \\ \frac{\partial U}{\partial \delta_3} &= \frac{W}{l} (\delta_2 + \delta_3), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII})$$

что [если мы опять используем (IV)] для P_1 , P_2 , P_3 даст выражения, одинаковые с (II) § 23. Таким образом, теорема, взаимная с первой теоремой Кастилиано (§ 18), тоже подтверждена.

Замечания по поводу определений «соответствующих» сил и перемещений

28. Остается еще несколько обобщить наши теоремы, дав более широкую интерпретацию понятиям сил и «соответствующих» перемещений.

Если тщательно изучить доказательства этой главы, то можно увидеть, что фактически из свойств перемещения (например, δ_1) мы использовали только то, что *при возрастании*

нии перемещения на бесконечно малую величину сила P_1 производит работу, равную произведению P_1 на возрастание δ_1 . Следовательно, δ_1 должно всегда обозначать перемещение в точке приложения силы и должно быть измерено в направлении действия (в этот момент) силы P_1 . Наши теоремы применимы лишь тогда, когда имеет место закон Гука. Таким образом, только закон Гука должен быть верен для определенных нами соответствующих перемещений.

Когда перемещения достигают конечной величины, точки приложения сил двигаются по мере возрастания деформации (в общем) по кривым. И ясно, что закон Гука не может сохраняться по отношению ко всем составляющим каково-нибудь одного перемещения (ср. § 21). Сохраняется ли он действительно в отношении «соответствующей» составляющей, является вопросом, на который путем эксперимента очень трудно ответить, так как необходимы в высшей степени точные измерения. Но в действительности границы *упругой* деформации столь узки, что едва ли необходимо такое уточнение. Нужно только (как и выше) установить, какие предположения были использованы при наших доказательствах, и помнить, что в практике перемещения почти всегда очень малы.

Мы занимались пока только *сосредоточенными* силами, но, очевидно, что мы можем (по крайней мере с точностью, достаточной для практических целей) заменить распределенное растягивающее или сжимающее напряжение, действующее на очень маленькой площадке, его результирующей. Следовательно, мы можем считать, что в некоторой точке нашей площадки действует сосредоточенная сила. Таким образом, область применимости наших теорем расширена так, что она включает распределенную нагрузку.

Во всех наших доказательствах мы принимали, что приложенные силы образуют систему, находящуюся в равновесии. Отсюда ясно, что перемещения тела как «абсолютно твердого» (перемещения, которые не вызывают деформации) не оказывают влияния на полную упругую энергию. Рассмотрим, например, поступательное движение тела как абсолютно твердого в каком-нибудь данном направлении. Разлагая каждую из приложенных сил на направление движения и ему перпенди-

кулярное, мы получим уравновешенную систему сил P_1, P_2, \dots, P_n , действующих в направлении движения, вместе со второй уравновешенной системой P'_1, P'_2, \dots, P'_n , действующей в направлении, перпендикулярном последнему. Силы второй системы не производят работы, когда происходит поступательное движение тела, так как нет ни одного, отличного от нуля перемещения, «соответствующего» какой-нибудь из них. Работа, совершенная силами первой системы, очевидно, измеряется произведением вызываемого ими перемещения на их результирующую, которая равна нулю, так как система сил уравновешенная. Отсюда следует, что работа первой системы сил тоже обращается в нуль. Итак, наложение поступательного движения тела как абсолютно твердого не изменяет выражения (11) полной упругой энергии. Аналогичное доказательство может показать, что вращательное движение тела как абсолютно твердого также не окажет влияния на полную упругую энергию деформации.

Читатель может встретить затруднение, когда попытается понять, почему в рассуждениях этой главы мы постулируем равновесие упругого тела, но не учитываем реакций опор. Причина этого заключается в том, что рассматриваются неподвижные опоры, и, следовательно, их реакции не производят работы. Как было показано, движения тела как абсолютно твердого не влияют на упругую энергию, а отсюда мы имеем некоторую свободу в выборе точек, рассматриваемых как опоры. Так, можно закрепить какую-нибудь одну точку A , другую точку B поместить на какой-нибудь неподвижной прямой AB , а какую-нибудь третью точку взять на неподвижной плоскости, содержащей AB . Это и будут условия закрепления тела.

29. Рассмотрим простейший случай. Пусть в двух точках A и B упругого тела действуют две равные и противоположные силы, направленные по прямой AB . Вращение тела как абсолютно твердого не вызовет изменения полной упругой энергии. В самом деле, при вращении тела точки A и B совершают перемещения перпендикулярные силам и, следовательно, не имеют составляющих, «соответствующих» силам. Поступательное движение тела как абсолютно твердого в направлении AB также не скажется, потому что добавочная

работа, совершаемая одной из сил, будет нейтрализоваться работой, затрачиваемой на преодоление другой.

Упругая энергия деформации запасается двумя силами только тогда, когда расстояние AB изменяется. Если действуют растягивающие силы величины P и если мы обозначим полное удлинение AB через ϵ , то работа, совершаемая на каком-нибудь малом перемещении, измеряется произведением:

$$P \times (\text{изменение } \epsilon).$$

Следовательно, мы можем рассматривать ϵ как перемещение, «соответствующее» силе растяжения P . Очевидно, что *все выводы и заключения этой главы останутся в силе, если P_1 , δ_1 (или какая-нибудь другая «сила» и «соответствующее» перемещение) будут интерпретироваться нами как сила растяжения и*

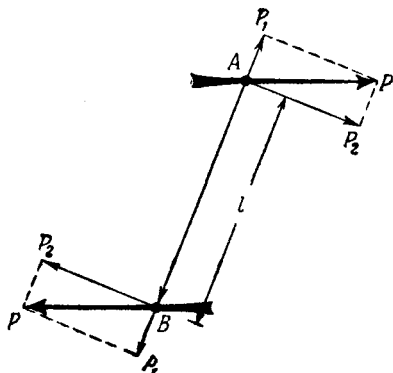


Рис. 8.

«соответствующее» ей удлинение.

Рассмотрим теперь влияние поворота тела как абсолютно твердого на работу, совершаемую двумя равными и противоположно направленными силами P (рис. 8), образующими пару с моментом M . Пусть A, B — точки их приложения — удалены друг от друга на расстояние l . Если мы разложим каждую из сил на составляющие P_1 и P_2 , действующие соответственно по направлению AB и перпендикулярно ему, то малый поворот θ прямой AB не дает (как мы только что видели) перемещений, «соответствующих» силам P_1 . Обе силы P_1 (как установлено выше) могут тогда рассматриваться как растягивающее усилие. Но поворот даст перемещения, соответствующие силам P_2 . Сумма этих перемещений, очевидно, всегда измеряется величиной $l\theta$. Поэтому работа, совершаемая двумя силами P_2 , вследствие поворота θ равна произведению $P_2 l\theta$, а вместе с тем

$$P_2 l\theta = M\theta, \quad (I)$$

так как момент пары M , очевидно, измеряется произведением P_2 на l .

Из (I) следует, что две силы P_2 могут рассматриваться вместе как пара с моментом M , а поворот θ прямой, соединяющей точки их приложения, как перемещение, «соответствующее» паре. При действии двух или большего числа пар, каждая из которых по условию вызывает один и тот же поворот θ , мы, согласно (I), можем принять их результирующий момент за обобщенную силу, а θ —за «соответствующее» ему перемещение. Однако следует подчеркнуть, что *таким образом могут рассматриваться только те силы, направления которых перпендикулярны прямой, соединяющей точки их приложения.*

Итак, силы величины P на рис. 8 образуют чистую пару с моментом M , но их составляющие P_1 (по AB) должны рассматриваться отдельно, так как при деформации, выражающейся в удлинении AB , силы производят работу и, следовательно, дают приращение упругой энергии деформации.

Выводы последнего параграфа весьма важны, потому что часто приходится сталкиваться с необходимостью рассматривать моменты, действующие на упругое тело со стороны другого тела, которое можно считать абсолютно твердым (например, гаечный ключ или какая-нибудь другая связь, *препятствующая* вращению). В таких случаях известна только величина результирующего момента M , а не сами силы, однако теперь это не вызовет затруднений, потому что M и связанный с ним поворот θ могут рассматриваться как специальный тип силы и «соответствующего» перемещения.

30. Как было установлено ранее (§ 28), относительно сил и перемещений (например P_1, δ_1) мы ничего не предполагаем, кроме того, что при возрастании δ_1 на бесконечно малую величину, P_1 производит некоторую работу, которая измеряется произведением P_1 на приращение δ_1 . Это замечание также справедливо для M и связанного с ним поворота θ . Отсюда следует, что *ни одно из наших заключений не нужно пересматривать, когда P_1, δ_1 (или какая-нибудь другая «сила» и «соответствующее перемещение») интерпретируются нами как момент и «соответствующий» ему поворот.*

Аналогично при изгибе или кручении стержня моментами, приложенными на концах, мы имеем изгибающее или крутящее усилие, производящееся двумя равными и противоположными моментами. И так же, как в § 29, где мы видели, что «растягивающее усилие» может рассматриваться как обобщенный тип «сил», а получающееся удлинение — как «соответствующее ему перемещение», мы можем сейчас рассматривать изгибающее и крутящее усилия как обобщенные силы, если в качестве соответствующих каждому из них перемещений мы возьмем *относительный* поворот фиксированных прямых, лежащих в плоскостях действия моментов, составляющих усилие.

Обобщение теорем

31. Теперь, после того как дана более широкая интерпретация нашим теоремам, нам осталось рассмотреть значение «коэффициентов влияния» (§ 4). Пусть P_1 представляет собой момент, а P_2 — сосредоточенную силу, тогда в первом из (9) δ_1 является поворотом в точке приложения P_1 по направлению P_1 . И легко видеть, что a_{11} есть поворот δ_1 , вызванный единичным моментом P_1 , действующим изолированно.

a_{12} представляет собой поворот δ_1 , вызванный единичной силой P_2 , действующей изолированно. Если P_3 также является моментом, то a_{13} есть поворот в точке приложения P_1 по направлению P_1 , который вызывается единичным моментом P_3 , и т. д.

Во второй формуле (9) δ_2 (так как оно «соответствует» P_2) представляет собой действительное перемещение точки 2, в которой приложена P_2 . Мы видим, что a_{21} есть перемещение δ_2 , вызванное единичным моментом P_1 , действующим изолированно.

a_{22} имеет прежнее значение и т. д.

Поэтому равенствам (14) может быть дана следующая новая интерпретация:

Поворот в точке приложения P_1 по направлению P_1 , вызванный единичной силой P_2 , действующей в 2, по величине равен перемещению в точке приложения P_2 по направлению P_2 , вызванному единичным моментом P_1 .

Конечно, здесь предполагается соответствующий выбор *единиц измерения*. Так, когда единицы для P_2 и δ_2 , т. е. для

сил и длины выбраны, мы должны в качестве P_1 взять две единичные в нашей системе единиц измерения силы, действующие в противоположных направлениях по прямым, удаленным друг от друга на единичное в нашей системе единиц измерения расстояние, т. е. пару сил с единичным моментом.

Случаи, в которых P_1 представляет собой «растягивающее усилие» (§ 29) или «усилие», состоящее из изгибающих или крутящих моментов (§ 30), рассматриваются аналогично.

32. Определив так обобщенные значения «коэффициентов влияния», мы без труда сможем по-новому интерпретировать уравнение (17), т. е. теорему взаимности, и выражение для U — полной упругой энергии в форме (19). Так, если P_1 представляет собой приложенный момент, то в теореме Кастилиано (§ 16) первое из равенств (20) устанавливает, что частная производная U по этому моменту дает «соответствующий» поворот. В частности, если P_1 является моментом, возникающим в связи, препятствующей повороту, то мы будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta_1 = 0.$$

Теорему, взаимную с первой теоремой Кастилиано (§ 18), выраженную соотношениями (22), можно интерпретировать таким же образом.

При изучении «флаттера» крыла самолета, т. е. некоторых незатухающих колебаний крыла, происходящих вследствие действия аэродинамических сил, удобно в поперечном сечении крыла различать некоторые точки, обладающие характерными свойствами. Эти точки называются «центром изгиба» и «центром кручения» поперечного сечения крыла самолета. На рис. 9 представлена половина крыла, заделанная в основную конструкцию самолета. Обратившись к этому рисунку, читатель увидит, что вертикальная сила, приложенная к заштрихованному сечению в точке A , стремится вращать это сечение против часовой стрелки, а та же сила, приложенная в точке B , вращает его по часовой стрелке. Где-то между A и B (скажем в C) имеется точка, в которой можно приложить нагрузку, не вызывая вращения крыла. Эта точка называется *центром изгиба*. Если к заштрихованному сечению приложен вращающий момент, то сечение будет вращаться как целое, и только одна точка («мгновенный центр» вращения) останется в покое. Эта точка называется *центром кручения*¹⁾.

¹⁾ Ср. §§ 2 и 3 статьи W. J. D u p s a n, D. L. E l l i s and C. S c r u t o n, «The flexural centre and the centre of twist of an elastic cylinder»,

Если дальний конец крыла (см. рис. 9) удерживается жесткими связями, так что точки приложения реакций связей не перемещаются, то мы сразу можем показать, что центр изгиба каждого сечения совпадает с центром кручения. Обозначим вращающий момент через P_1 , а вертикальную силу, приложенную в центре изгиба, через P_2 , тогда δ_1 должно представлять собой поворот сечения, а δ_2 — перемещение центра изгиба. По определению δ_1 не зависит от P_2 , так что $a_{12} = 0$. Следовательно, согласно (14) (§ 10) $a_{21} = 0$, т. е. δ_2 не зависит от P_1 . Другими словами, точка приложения P_2 (т. е.

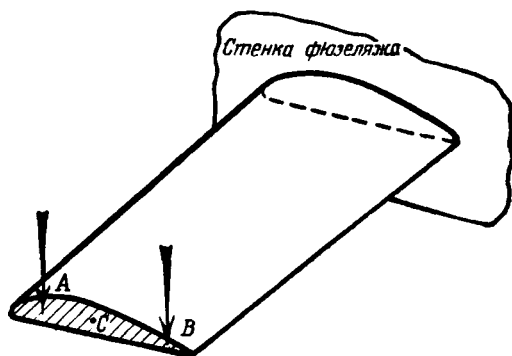


Рис. 9.

центр изгиба) совпадает с центром кручения. Жесткость связей существенна при доказательстве, так как реакции связей зависят от P_1 и P_2 , и, таким образом, если в связях имеются неравные нулю перемещения, то полная работа P_1 и P_2 не будет измеряться, как выше, произведениями $P_1\delta_1$ и $P_2\delta_2$.

Пример

4. (Oxford F. E. E. S. *) 1934.) На горизонтальную консоль, жесткость которой при изгибе меняется по длине, действует вращающий левую часть консоли против часовой стрелки изгибающий момент M , приложенный на свободном конце. Найдена кривая прогиба. Она имеет вид $y = \lambda M (3lx^2 + x^3)$, где λ — постоянная, x измеряется от заданного конца, а l — общая длина балки.

Phil. Mag., 16 (1933), 201. Приведенное здесь доказательство представляет собой несколько упрощенный вывод, содержащийся в § 7 этой статьи.

*) Выпускные экзамены в Оксфордском университете. (Прим. перев.)

Чему будет равен дополнительный угол наклона касательной на свободном конце, вызываемый грузом W , приложенным в середине балки?

$$\left[\frac{7}{8} \lambda W l^3 \right].$$

Условия, при которых упругие энергии деформации можно складывать

33. Сделаем последнее замечание. Если в выражении

$$U = \frac{1}{2} [P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n] \quad (11) \text{ bis}$$

δ_1 является следствием действия *только* P_1 , δ_2 — *только* P_2 и т. д., то $\frac{1}{2} P_1 \delta_1$ будет упругой энергией, запасенной при действии только одной «силы» P_1 . Такой же смысл имеют и другие члены. При этих условиях величина U будет суммой упругих энергий, соответствующих P_1, P_2, \dots, P_n , действующих в отдельности. Другими словами, упругие энергии складываются. Если P_1, P_2, \dots являются обычными силами, то это обстоятельство встречается редко. Однако, если при нашей более широкой интерпретации P_1 представляет собой силу растяжения, P_2 — изгибающее усилие, а P_3 — крутящее усилие и если эти усилия приложены одновременно к прямому стержню, то δ_1 будет представлять собой удлинение стержня, δ_2 — относительный угол поворота его концов вследствие изгиба, а δ_3 — относительный угол поворота его концов вследствие кручения. Два последних поворота имеют в качестве своих осей вектора моментов, их вызывающих. Вектора моментов перпендикулярны, и, следовательно, на δ_1 не влияет ни P_2 , ни P_3 ; на δ_2 — ни P_3 , ни P_1 ; на δ_3 — ни P_1 , ни P_2 , т. е. в этом случае мы имеем, что $U = U_1 + U_2 + U_3$, где U_1 — упругая энергия, соответствующая действию только одной P_1 , U_2 только P_2 , U_3 только P_3 .

* «Деформометр» Беггса

34. В заключение этой главы опишем прибор, изобретенный профессором Д. Е. Беггсом¹⁾. Этот прибор на основе гео-

¹⁾ Ср. его статью «The use of models in the solution of indeterminate structures» в *Journal of the Franklin Institute*, 203 (1927),

ремы взаимности в более широкой интерпретации (§ 32) дает возможность экспериментальным путем решать весьма сложные для точного математического решения задачи.

Обратимся к рис. 10, где кривые представляют собой средние линии модели виадука, имеющего два устоя и три арки. Пусть P приложенная сила. Предположим, что мы хотим знать, какие реакции появятся на конце B заделанного устоя в результате приложения P . Зная эти величины и соответствующие величины для конца C другого устоя,

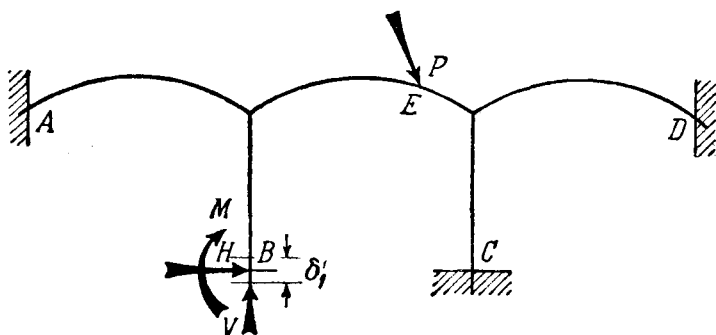


Рис. 10.

мы можем с помощью очень простых вычислений получить напряжения во всех частях конструкции. Теоретическое определение реакций в устоях трудно. Используя принцип суперпозиции, мы исследуем отдельно вертикальную силу V , горизонтальную силу H и момент M , заменяющие полное действие связи в точке B . В каждом из этих случаев вместо фактического приложения P мы введем известное перемещение в точке B и воспользуемся теоремой взаимности (§ 12).

35. Так, для того чтобы определить V , мы, сохраняя A , C , D неподвижными и не допуская в B поворота и горизонтального перемещения, зададим в B некоторое вертикальное перемещение δ_1 . Затем измерим получившееся в результате

375 — 386. Отчасти такой же метод описан С. Н. L o b b a n, Mechanical Methods of Solution of Stresses in Frames, *Trans. Inst. of Engineers and Shipbuilders in Scotland*, Paper, № 923 (1933).

этого перемещение (скажем, δ'_2) в точке приложения E в направлении P , но мы не сможем измерить те усилия, которые возникнут при этом в B . Обозначим их V' , H' , M' и в качестве двух систем сил и перемещений, фигурирующих в теореме взаимности, получим:

Система 1 (экспериментальная).

Силы: V' , H' , M' (неизвестные) в B ;

0 в E (в точке приложения P).

Соответствующие перемещения:

δ'_1 (заданное), 0, 0 в B ; δ'_2 (измеренное) в E .

Система 2 (заданная).

Силы: V , H , M (неизвестные) в B ; P в E .

Соответствующие перемещения:

0, 0, 0 в B ; δ_2 (неизвестное) в E .

Теперь, по теореме взаимности (17) мы имеем ¹⁾:

$$V\delta'_1 + (H \times 0) + (M \times 0) + P\delta'_2 = (V' \times 0) + (H' \times 0) + \\ + (M' \times 0) + (0 \times \delta_2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$V = -P \frac{\delta'_2}{\delta'_1}, \quad (29)$$

т. е. V дается как произведение известного отношения $\frac{\delta'_2}{\delta'_1}$

на силу P . (Обращаясь опять к рисунку, мы видим, что $\frac{\delta'_2}{\delta'_1}$

будет отрицательной величиной, так как заданное вверх перемещение B будет сопровождаться перемещением вверх точки приложения P .)

¹⁾ Строго говоря, нам следует также учесть усилия в других связях (например в A, C, D). Но последние, так же как H и M , не добавляют ничего к приведенным ниже уравнениям, так как соответствующие им перемещения в обеих системах равны нулю.

36. Для определения H (рис. 10) мы поступаем подобным же образом. Только теперь δ'_1 будет обозначать заданное перемещение в направлении H , а δ'_2 (как и раньше) — перемещение в точке E . Результат будет аналогичен (29), а именно

$$H = -P \frac{\delta'_2}{\delta'_1}.$$

Для определения M (рис. 10) мы зададим в B некоторый малый поворот θ' , имеющий то же направление, что и M , и измерим получившееся перемещение (δ'_2) в E . И тогда, в соответствии с § 30, будет получена формула, аналогичная формуле (29), в которой M и θ' заменяют V и δ'_1 . Таким образом, согласно теореме взаимности, мы имеем:

$$M = -P \frac{\delta'_2}{\theta'}. \quad (30)$$

Формулой (30) M дается как произведение известного отношения $\frac{\delta'_2}{\theta'}$ на P . Эта формула дает, конечно, изгибающий момент, возникающий в результате приложения силы P на модели. Изгибающий момент устоя в натуре, очевидно, будет nM , если $1:n$ — масштаб, в котором построена модель.

Для изучения способов, с помощью которых вызываются заданные перемещения и углы поворота, и для ознакомления с практическими подробностями использования прибора читатель может обратиться к статье, указанной в подстрочном примечании § 34.

ГЛАВА II

ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ УПРУГИХ СИСТЕМ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ЗАКОНУ ГУКА

Прямые стержни, подверженные действию сил растяжения или сжатия

37. Простейшим типом нагрузки, приложенной к упругому телу, является пара равных сил, действующих в противоположных направлениях по прямой, соединяющей точки их приложения. Случай такой нагрузки был рассмотрен в § 29 главы I. Теперь проиллюстрируем его на примере стержня AB (рис. 11), испытывающего растяжение. Упругая энергия,



Рис. 11.

запасенная растягивающей силой P в результате малого изменения ε — полного удлинения AB , дается формулой

$$P \times (\text{изменение } \varepsilon),$$

а отсюда следует, что силу растяжения P и удлинение ε можно считать «соответствующими» силой и перемещением.

При таком представлении выражение (11) предшествующей главы для упругой энергии, запасенной в AB при растяжении силой P , дает величину

$$U = \frac{1}{2} P \varepsilon = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} a P^2, \quad (1)$$

ибо закон Гука требует, чтобы

$$\varepsilon = a P. \quad (II)$$

Постоянный множитель a в (I) и (II) является коэффициентом влияния (гл. I, § 4) для удлинения ε , происходящего от действия сил растяжения P , приложенных в A и B .

38. Сейчас мы заранее выскажем выводы из исследований, приводимых ниже. Когда на прямой упругий брус постоянного поперечного сечения действует сила растяжения, то удлинение ε зависит до некоторой степени от способа приложения силы. Пределы этой зависимости очень узки. Так что практически мы можем сказать, что (*a*) плоские поперечные сечения (ненагруженного стержня) остаются также плоскими после приложения силы и что (*b*) полное удлинение распределяется поровну между различными частями длины бруса. Если A площадь поперечного сечения, то длина каждой части бруса увеличивается на одну и ту же *относительную* величину e , где¹⁾

$$e = \frac{1}{E} \frac{P}{A}, \quad (2)$$

здесь E является «упругой постоянной», которая называется модулем Юнга²⁾.

Полное удлинение стержня будет

$$\varepsilon = e l, \quad (III)$$

где l — длина стержня, испытывающего растяжение. Из (II) и (2) мы можем получить, что коэффициент влияния

$$a = \frac{l}{EA}. \quad (3)$$

Выражение (1) после подстановки в него значения коэффициента влияния приобретет вид

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}. \quad (4)$$

¹⁾ Заметим, что так как e безразмерная величина, E и P/A должны иметь одинаковую размерность, а именно — силы на единицу площади. E , P и A должны измеряться в соответствующих единицах.

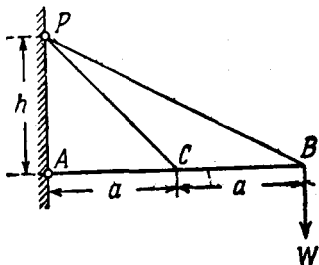
²⁾ Томас Юнг (1733—1829) — математик, врач, физик и египтолог». Наиболее важные из опубликованных им сочинений относятся к астигматизму и интерференции света, а также к капиллярному действию жидкости. Он оказывал помощь при расшифровке надписи на камне Розетты.

Здесь, как и во всех других случаях, где применяется закон Гука, на знак P не накладывается никаких ограничений.

Пример

1. (Самб. M.S.T. *) 1934.) Стержень AB , который можно предполагать абсолютно жестким, шарнирно укреплен в неподвижной точке A и удерживается в горизонтальном положении двумя упругими тросами PC и PB одинакового сечения. Тросы имеют одинаковые упругие свойства. Прикреплены они в точке P , находящейся на вертикали, проходящей через A (см. рисунок).

Если груз W приложен в B , то можно показать, что силы растяжения в PC и PB возрастают соответственно на величины



$$\frac{2W}{h} \frac{PC \cdot PB^3}{PB^3 + 4PC^3} \quad \text{и} \quad \frac{4W}{h} \frac{PB \cdot PC^3}{PB^3 + 4PC^3}.$$

[Стержень AB абсолютно жесткий, поэтому перемещения B и C должны быть вертикальными и $\delta_B = 2\delta_C$. Полные удлинения PC и PB даются выражениями

$$\epsilon_1 = \delta_C \frac{AP}{PC} \quad \text{и} \quad \epsilon_2 = \delta_B \frac{AP}{PB} = 2\delta_C \frac{AP}{PB},$$

а их относительные удлинения

$$e_1 = \delta_C \frac{AP}{PC^2} \quad \text{и} \quad e_2 = 2\delta_C \frac{AP}{PB^2}.$$

Согласно уравнению (2), силы растяжения T_1 и T_2 в каждом из тросов пропорциональны соответственно e_1 и e_2 . Тросы одинаковы, и мы имеем

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{1}{2} \frac{PB^2}{PC^2}. \quad (1)$$

Моменты этих сил относительно A будут

$$aT_1 \frac{AP}{PC} \quad \text{и} \quad 2aT_2 \frac{AP}{PB}.$$

*) Выпускные экзамены в Кэмбриджском университете. (Прим. перев.)

Сумма этих величин равна $2aW$. Используя (I), мы имеем

$$haT_2 \left(\frac{1}{2} \frac{PB^2}{PC^2} + \frac{2}{PB} \right) = 2aW,$$

откуда получим выражение для T_2 . Выражение для T_1 получим из (I).]

39. Площадь поперечного сечения A растягиваемого стержня, вообще говоря, будет изменяться по длине. Но мы сможем применить уравнение (2) на малых участках длины, если предположим, что изменение поперечного сечения растягиваемого стержня по его длине невелико¹⁾.

Тогда, определяя данное сечение его расстоянием x от одного из концов, мы можем сказать, что малый отрезок δx удлинится на величину

$$e\delta x = \frac{P\delta x}{EA},$$

где P и E постоянны. Отсюда следует, что полное удлинение стержня равно

$$\epsilon = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dx}{A}. \quad (IV)$$

Из (II) и (IV) в качестве коэффициента влияния мы получим величину

$$a = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{dx}{A} \quad (5)$$

и тогда, согласно (I), упругая энергия, запасенная стержнем при действии на него силы растяжения P , будет равна

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{P^2}{A} dx. \quad (6)$$

Очевидно, что при A постоянном выражения (5) и (6) тождественны с (3) и (4). Ниже мы увидим, что иногда

¹⁾ При резком изменении сечения нельзя применять уравнение (2), так как оно основано на предположении о равномерном распределении силы по площади поперечного сечения.

(особенно в случае ферм) упругие свойства растягиваемого стержня удобнее определять, записав выражение для упругой энергии в виде

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2}{P^0}, \quad (7)$$

где Ω — постоянная.

Сравнивая (6) с (7), мы видим, что Ω для стержня с переменным поперечным сечением дается соотношением

$$\Omega = E : \left(l^3 \int_0^l \frac{dx}{A} \right), \quad (8)$$

которое при постоянном A сводится к

$$\Omega = \frac{EA}{l^3}. \quad (9)$$

40. В этой главе мы будем рассматривать стержни постоянного поперечного сечения, подверженные растяжению или сжатию. Их упругая энергия дается соотношением

$$U = \frac{1}{2} P \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}, \quad (4) \text{ bis}$$

что, согласно (II) и (3), дает

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \varepsilon^2. \quad (10)$$

Применяя первую теорему Кастилиано (глава I, § 16) к (4), получим

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{EA}, \quad (11)$$

что совпадает с тем выражением для ε , которое можно получить с помощью (2) и (III). Теорема, взаимная с первой теоремой Кастилиано (глава I, § 18), примененная к (10), дает:

$$P = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \frac{EA}{l} \varepsilon, \quad (12)$$

т. е. для силы растяжения P с помощью указанной теоремы получено значение, одинаковое с тем, которое можно получить из (2) и (III).

Некоторые приложения теоремы, взаимной с первой теоремой Кастилиано

41. Рассмотрим теперь задачу, изображенную на рис. 12, где OA , OB , OC — три одинаковых стержня, имеющие шарниры в O , A , B , C и составляющие между собой одинаковые углы в точке O . Пусть сила растяжения T , приложенная к одному из стержней, растягивает его на 1 см. Чему будет равно перемещение точки O под действием вертикального груза W ?

Из соображений симметрии можно заключить, что точка O будет опускаться вертикально. Пусть δ — ее перемещение в сантиметрах. Тогда при δ малом укорочение OB будет δ , а удлинения OA и OC будут $\frac{1}{2}\delta$. Следовательно, перемещение точки O вызывает в OB силу сжатия величины $T\delta$ и силы растяжения в OA и OC величины $\frac{1}{2}T\delta$. Используя формулу (1) для упругих энергий, запасенных в стержнях OB , OC и OA ,

получим соответственно

$$\frac{1}{2}T\delta^2, \frac{1}{8}T\delta^2 \text{ и } \frac{1}{8}T\delta^2.$$

Полная упругая энергия, запасенная системой, равняется

$$U = \frac{3}{4}T\delta^2,$$

где δ является перемещением, «соответствующим» внешней силе W и, следовательно, по теореме, взаимной с первой теоремой Кастилиано, мы получим

$$W = \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{3}{2}T\delta,$$

Рис. 12.

$$\text{откуда } \delta = \frac{2}{3} \frac{W}{T}. \text{ [Ответ.]}$$

42. Аналогичный пример дан на рис. 13. Стержни DA , DB , DC прикреплены с помощью шарниров без трения к абсолютно жесткой стене ABC . Их упругие свойства таковы, что под действием растягивающей силы 1000 кг стержень BD длины 100 см получает приращение в 0,1 см,

а каждый из стержней AD и CD , длины которых 200 см, — в 0,2 см. Каково будет перемещение точки D под действием силы в W кг?

Здесь (так как мы не можем воспользоваться симметрией) мы должны предполагать, что под действием приложенной силы W шарнир D получит как горизонтальное, так и вертикальное перемещения. Пусть δ_1 вертикальная, а δ_2 горизонтальная составляющие перемещения точки D в сантиметрах, тогда δ_1 соответствует W , а сила, соответствующая δ_2 , равна нулю. И мы, используя теорему, взаимную с первой теоремой Кастigliано, можем написать:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_1} = W, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta_2} = 0, \quad (I)$$

где U , как и раньше, обозначает полную упругую энергию системы.

δ_1 не вызывает изменения в длине BD , но оно удлиняет AD и укорачивает CD на величину $\frac{1}{2} \sqrt{3} \delta_1$; δ_2 удлиняет BD на величину δ_2 , а каждый из AD , CD на $\frac{1}{2} \delta_2$. Таким образом, полные удлинения стержней будут следующими:

$$AD \text{ удлинится на } \frac{1}{2} (\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2) \text{ см,}$$

$$BD \quad \quad \quad \delta_2 \text{ см,}$$

$$CD \quad \quad \quad \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2) \text{ см.}$$

Из условий задачи мы получим, что силы растяжения в стержнях будут следующими:

$$\left. \begin{array}{l} \text{в } AD \quad 5000 \times \frac{1}{2} (\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2) \text{ кг,} \\ \text{„ } BD \quad 10000 \times \delta_2 \text{ кг,} \\ \text{„ } CD \quad 5000 \times \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2) \text{ кг.} \end{array} \right\} \quad (II)$$

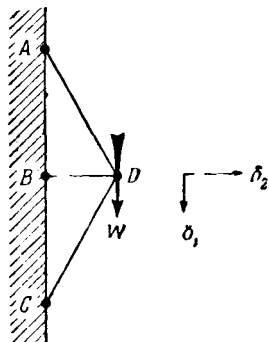


Рис. 13.

Для полной упругой энергии системы, используя (1), мы получим:

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{5000}{4} \left\{ (\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2)^2 + (-\sqrt{3} \delta_1 + \delta_2)^2 \right\} + 10\,000 \delta_2^2 \right] = \\ = 5000 \left\{ \frac{1}{4} (3\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_2^2 \right\} \text{ кгсм.}$$

Из соотношений (1) мы находим:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\partial U}{\partial \delta_1} = 2\,500 \cdot 3\delta_1, \\ 0 &= \frac{\partial U}{\partial \delta_2} = 2\,500 \cdot 5\delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Откуда видим, что перемещение точки D не имеет горизонтальной составляющей. Итак, перемещение точки D направлено вертикально вниз и имеет величину $\delta_2 = \frac{W}{7\,500}$ см. [Ответ.]

С помощью (II) мы получим значения усилий в стержнях. Они будут:

$$\begin{aligned} &\frac{W}{\sqrt{3}} \text{ кг (сила растяжения) в } AD, \\ &0 \text{ кг в } BD, \\ &-\frac{W}{\sqrt{3}} \text{ кг (сила сжатия) в } CD. \end{aligned}$$

Полное удлинение, выраженное через составляющие перемещения

43. В частных примерах §§ 41—42 мы легко получили значения удлинений, происшедших от заданных перемещений. Однако в некоторых приложениях (например, когда не все растягиваемые стержни лежат в одной плоскости) определение удлинений несколько трудно, поэтому полезно иметь общую формулу. К выводу этой общей формулы мы сейчас приступим.

Рассмотрим стержень AB , связывающий два узла A и B . Пусть координаты узлов отнесены к некоторой подходящим образом выбранной системе осей координат и в недеформированной конфигурации равны (x_A, y_A, z_A) и (x_B, y_B, z_B) . Пусть перемещения узлов A, B , отнесенные к тем же осям, будут соответственно u_A, v_A, w_A и u_B, v_B, w_B . Тогда длина AB , которая до приложения нагрузки равна l , где

$$l^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2, \quad (I)$$

после нагружения будет $l + \epsilon$, где

$$(l + \epsilon)^2 = (x_B + u_B - x_A - u_A)^2 + (y_B + v_B - y_A - v_A)^2 + (z_B + w_B - z_A - w_A)^2.$$

Преобразуем это выражение:

$$\left. \begin{aligned} l^2 + 2l\epsilon + \epsilon^2 = & (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + \\ & + 2 \{ (x_B - x_A)(u_B - u_A) + (y_B - y_A)(v_B - v_A) + \\ & + (z_B - z_A)(w_B - w_A) \} + \\ & + (u_B - u_A)^2 + (v_B - v_A)^2 + (w_B - w_A)^2. \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Полное удлинение ϵ и отношения типа $\frac{u_B - u_A}{x_B - x_A}$ обычно очень малы. Поэтому мы можем пренебречь их квадратами по сравнению с первыми степенями.

Тогда из (II), заметив еще, что первые три члена в правой части в силу (I) дают l^2 , стоящий слева, мы получим:

$$l\epsilon = (x_B - x_A)(u_B - u_A) + (y_B - y_A)(v_B - v_A) + (z_B - z_A)(w_B - w_A). \quad (13)$$

Мы видим, что выражение для $l\epsilon$ состоит из суммы трех произведений, первое из них $(x_B - x_A)(u_B - u_A)$ является выражением для $l\epsilon$, которое мы получили бы, если AB был бы параллелен Ox . Второе и третье имеют аналогичный смысл. Полученный результат следует запомнить, ибо он имеет весьма много важных приложений.

Пример пространственной задачи

44. Теперь мы сможем рассмотреть следующую задачу (Самб. М. S. T. 1925.): на рис. 14 ABC и $A'B'C'$ — равносторонние треугольники. Длины их сторон 12 см, Треугольники образованы жесткими стержнями AB, BC, CA и $A'B', B'C', C'A'$. Треугольники связаны друг с другом тремя алюминиевыми трубами AA', BB', CC' . Каждая из труб имеет площадь поперечного сечения 0,5 см² и длину 24 см. Система стержней и труб образует треугольную призму. Стороны этой призмы расчалены тремя стальными тросами

AB' , BC' , CA' , каждый из которых имеет площадь поперечного сечения в $0,25 \text{ см}^2$.

Вычислить поворот $A'B'C'$ относительно ABC , когда к $A'B'C'$ приложен крутящий момент в $12\,000 \text{ кг см}$, а основание ABC закреплено. Все узлы можно считать шарнирными.

Модуль Юнга E для стали равен $2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, а для алюминия $0,7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Треугольники при этом остаются равносторонними, так как стержни, их образующие, абсолютно жесткие. Соображения симметрии показывают, что плоскости треугольников остаются параллельными, так что все три продольных стержня будут удлиняться на одну и ту же величину. Обозначая это продольное удлинение

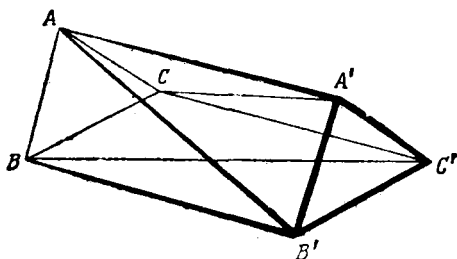


Рис. 14.

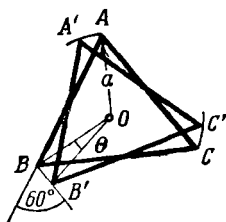


Рис. 14А.

через ϵ_l , мы с помощью (13) для удлинения ϵ_d диагональных тросов AB' , BC' , CA' получим выражение $\sqrt{5}\epsilon_d = 2\epsilon_l + 1 \times$ (составляющая перемещения B' относительно A в направлении $A'B'$) $= 2\epsilon_l + a\theta \cos 60^\circ$, где θ (малый) поворот $A'B'C'$ относительно ABC , а a (рис. 14 А) равно $\frac{2}{\sqrt{3}} \times 6 = 4\sqrt{3} \text{ см}$. Следовательно, когда ϵ_l и ϵ_d измерены в сантиметрах, мы имеем, что

$$\sqrt{5}\epsilon_d = 2(\epsilon_l + \sqrt{3}\theta). \quad (I)$$

Используя индексы l и d для обозначения величин, относящихся соответственно к продольным стержням и диагональным тросам, на основании (10) для упругой энергии, запасенной в каждом продольном стержне, имеем выражение

$$U_l = \frac{1}{2} \frac{E_l A_l}{24} \epsilon_l^2 \quad (II)$$

и для упругой энергии, запасенной в каждом диагональном тросе,

$$U_d = \frac{1}{2} \frac{E_d A_d}{12\sqrt{5}} \epsilon_d^2 = \frac{E_d A_d}{30\sqrt{5}} (\epsilon_l + \sqrt{3}\theta)^2. \quad (III)$$

Полная упругая энергия

$$U = 3 (U_l + U_d). \quad (IV)$$

А по теореме, взаимной с первой теоремой Кастилиано, $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_l} =$ приложенной силе растяжения, соответствующей удлинению ε_l фермы как целого = 0 и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= \text{силе, соответствующей углу поворота } \theta = \\ &= \text{приложенному крутящему моменту} = \\ &= 12\,000 \text{ кг см.} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Воспользовавшись формулами (I) — (IV), мы из первого соотношения (V) получим

$$\left. \begin{aligned} 3 \left\{ \frac{E_l A_l}{24} \varepsilon_l + \frac{E_d A_d}{15 \sqrt{5}} (\varepsilon_l + \sqrt{3} \theta) \right\} &= 0, \\ \text{а из второго} \quad 3 \frac{E_d A_d}{15 \sqrt{5}} (\varepsilon_l + \sqrt{3} \theta) \sqrt{3} &= 12\,000 \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Подставив заданные значения, мы из первого равенства (VI) после сокращения некоторых числовых коэффициентов получим

$$(0,7 \cdot \sqrt{5} + 1,68) \varepsilon_l + 1,68 \cdot \sqrt{3} \theta = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_l + 0,893 \theta = 0. \quad (VII)$$

Из второго (VI) мы имеем

$$\varepsilon_l + \sqrt{3} \theta = \frac{114,5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}. \quad (VIII)$$

Подставляя ε_l из (VII) в (VIII), мы получим

$$0,837 \theta = 0,148,$$

откуда

$$\begin{aligned} \theta &= 0,176 \text{ радиан,} \\ &= 10,1^\circ. \quad [\text{Ответ.}] \end{aligned}$$

Приложение первой теоремы Кастилиано

45. При решении предыдущих задач мы пользовались теоремой, взаимной с первой теоремой Кастилиано, очевидно, потому, что в них были заданы величины сил. Согласно этой теореме, заданные силы можно приравнять $\frac{\partial U}{\partial \delta_1}$, $\frac{\partial U}{\partial \delta_2}$, ... Откуда, если только U будет выражено как функция неиз-

вестных перемещений узлов, легко можно получить величины $\delta_1, \delta_2, \dots$. В наших примерах число неизвестных перемещений не превышало двух и поэтому труд, затрачиваемый на такой путь решения, был невелик.

Обычно же встречается большее число неизвестных, и для нахождения их значений с помощью теоремы, взаимной с первой теоремой Кастилиано, приходится решать системы n уравнений с n неизвестными перемещениями¹⁾.

В силу этого взаимная теорема хотя в теории и дает подходящий метод для решения любой статически неопределимой задачи в стиле тех, которые были разобраны выше, но удобна в своем применении только к фермам частного вида. С другой стороны, первая теорема Кастилиано дает простой и непосредственный способ вычисления перемещений в фермах, когда усилия в составляющих ее стержнях статически определены.

Рассмотрим для примера следующую задачу (Camb. M. S. T. 1931). Ферма, показанная на рис. 15, прикреплена с помощью шарниров в двух неподвижных точках A и B . В узле фермы C постепенно прикладывается сила W . Все стержни имеют одинаковую площадь поперечного сечения S . Можно предположить, что потери устойчивости не происходит. Рассмотрев энергию, запасенную фермой, или иначе, показать, что прогиб конца C равен $\frac{97}{3} \frac{Wa}{ES}$, где E модуль Юнга материала фермы.

Если начертить силовые многоугольники, то можно легко найти растягивающие и сжимающие усилия, вызванные в стержнях силой W . Они будут:

в верхних горизонтальных стержнях, взятых слева направо,

$$\frac{W}{\sqrt{3}} \times (6, 4, 2),$$

в наклонных стержнях, взятых слева направо,

$$\frac{W}{\sqrt{3}} \times (-2, 2, -2, 2, -2, 2),$$

¹⁾ Так, например, в § 44 мы имели две неизвестные (ϵ_1 и θ), связанные двумя совместными уравнениями (VII) и (VIII).

в нижних горизонтальных стержнях, взятых слева направо,

$$\frac{W}{\sqrt{3}} \times (-5, -3, -1).$$

Отсюда, согласно уравнению (4), упругая энергия, запасенная в стержнях, будет следующей:

в верхних горизонтальных стержнях

$$\frac{1}{6} \frac{W^2 a}{ES} \times (18, 16, 4),$$

в наклонных стержнях

$$\frac{1}{6} \frac{W^2 a}{ES} \times (4, 4, 4, 4, 4, 4),$$

в нижних горизонтальных стержнях

$$\frac{1}{6} \frac{W^2 a}{ES} \times (25, 9, 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Полная} \\ \text{упругая} \\ \text{энергия} \end{array} \right\} U = \frac{97}{6} \frac{W^2 a}{ES}.$$

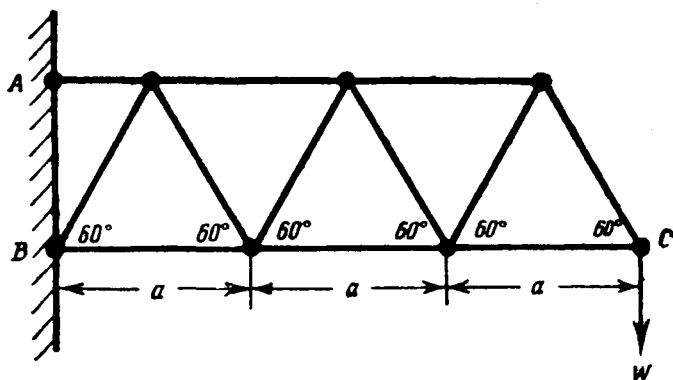


Рис. 15.

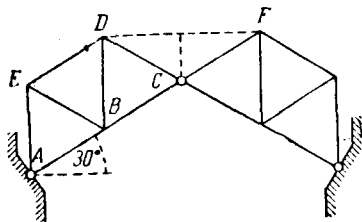
Отсюда перемещение, «соответствующее» W и по теореме Кастigliано равно $\frac{\partial U}{\partial W}$, будет

$$\frac{97}{3} \frac{W a}{ES}.$$

Пример

2. (Самб. М. С. Т. 1934.) Шарнирная ферма, показанная на рисунке, состоит из нескольких одинаковых равносторонних треугольников, стороны которых равны a . Площади поперечных сечений стержней AB, BC, DE равны A_1 , а стержней AE, EB, BD и DC равны A_2 .

Обе половины фермы прикреплены к опорам с помощью шарниров и соединены между собой шарнирно в C . Стержни, показанные пунктиром, устанавливаются после.



Пусть верхний горизонтальный стержень устанавливается так, что он производит распор R . Требуется показать, что удлинение DF , вызванное этим распором, равно

$$\frac{Ra}{3E} \left[\frac{7}{A_1} + \frac{6}{A_2} \right].$$

Пусть площадь поперечного сечения этого вставленного стержня равна A . Найти, насколько его длина должна превосходить первоначальную длину DF , чтобы при его установке на место вызывался бы распор R ?

Пусть площадь поперечного сечения этого вставленного стержня равна A . Найти, насколько его

длина должна превосходить первоначальную длину DF , чтобы при его установке на место вызывался бы распор R ?

$$\left[\frac{Ra}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{A} + \frac{7}{3A_1} + \frac{2}{A_2} \right) \right]$$

Упругая энергия изогнутого стержня или арки

46. Теперь рассмотрим некоторые другие приложения первой теоремы Кастилиано. Для этой цели нам придется использовать некоторые результаты относительно деформаций, вызываемых изгибающими усилиями. Эти результаты вытекают из исследований, которые приводятся несколько позже. В этом отношении мы поступаем здесь так же, как (§§ 38—39) при изучении действия сил растяжения и сжатия.

Начнем с того, что рассмотрим упругое тело в виде прямого цилиндрического бруса (рис. 16 А), на который могут действовать моменты от абсолютно жестких шайб A, B , прикрепленных к торцам. Нагрузка такого типа уже рассматривалась в § 30 главы I. Там было показано, что два равных и противоположно направленных момента M (рис. 16В), образующих изгибающее усилие, можно считать обобщенным типом «сил», если в качестве «соответствующего перемещения» взять *относительный поворот* A и B (ψ на рисунке). На основании закона Гука угол поворота ψ будет пропорционален M , так что мы можем написать

$$\psi = aM, \quad (1)$$

где a — коэффициент влияния (гл. I, § 4).

Упругая энергия, запасенная в теле, если оно под действием изгибающего момента находится в равновесии, будет даваться следующими выражениями

$$U = \frac{1}{2} M \psi = \frac{1}{2} a M^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{a} \quad [\text{согласно (I)}]. \quad (\text{II})$$

47. Если цилиндр достаточно длинный, то ясно, что моменты на концах могут согнуть его в полное круговое кольцо.

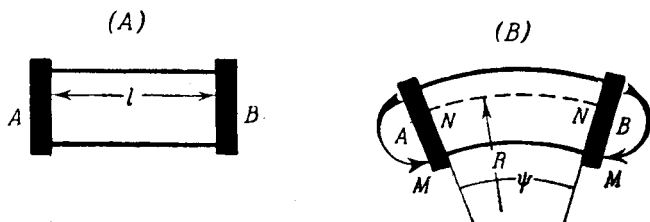


Рис. 16.

Тогда каждая часть кольца будет находиться в том же напряженном состоянии, что и цилиндр, показанный на рис. 16. Отсюда видно, что угол поворота ψ для данного M будет пропорционален длине l недеформированного цилиндра. Тогда из (I) следует, что a — коэффициент влияния будет также пропорционален l . Если дуга NN на рис. 16 (B)¹⁾ имеет длину, равную l , и если R радиус этой дуги, то мы можем записать, что

$$\psi = \frac{l}{R},$$

а тогда из (I) мы получим, что $a = \frac{l}{MR}$.

Поэтому первое равенство (II) можно записать в форме

$$U = \frac{1}{2} \frac{M}{R} l,$$

¹⁾ Предполагается, что эта дуга обязательно лежит в пределах изогнутого цилиндра.

и упругая энергия на единицу длины цилиндра будет

$$u = \frac{1}{2} \frac{M}{R}, \quad (III)$$

где $\frac{1}{R}$ пропорционально M , например $\frac{1}{R} = \frac{M}{B}$. (IV)

Постоянная B называется «жесткостью при изгибе» цилиндра.

Исключая R из (III) и (IV), мы для упругой энергии изгиба на единицу длины цилиндра получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{M^2}{B} = \\ &= \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{R} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

48. Исследования, проводимые ниже¹⁾, покажут, что жесткость цилиндра при изгибе, когда цилиндр изгибается указанным здесь способом (моменты приложены на концах), дается соотношением

$$B = EI, \quad (15)$$

где E — модуль Юнга, а I — геометрический момент инерции площади поперечного сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной плоскости изгиба. Наиболее важно то, что упругая энергия изгиба дается тем же выражением (14) при подстановке в него значения B из (15) не только тогда, когда изгиб является следствием действия моментов на концах (и поэтому один и тот же во всех частях стержня), но также, с достаточной для практических целей точностью, и тогда, когда величина изгибающего момента M изменяется по длине стержня. Более того, выражение (14) верно даже тогда, когда поперечное сечение изменяется (степень изменения поперечного сечения не должна быть велика). Именно формула (14) приближенно остается верной для любого короткого участка стержня [B на этом участке в формуле (14) дается равенством (15)]. Применим формулу (14) к каждому малому участку длины dx подверженного изгибу стержня и получим, что полная упругая энергия длинного

¹⁾ Ср. гл. V, § 175.

изогнутого стержня (первоначально прямого) будет

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{B} dx, \quad (16)$$

где x — расстояние некоторого сечения от одного из концов, M — изгибающий момент в этом сечении, а l — общая длина стержня.

Другими словами, формула (16) *точна* для прямых цилиндрических стержней постоянного сечения, нагруженных моментами на концах (как на рис. 16). И точность этой формулы достаточна для обычных целей техники, когда M и B изменяются вместе с x (только степень изменения M и B не должна быть слишком велика).

Мало того, (14) *сохраняется приближенно также для первоначально искривленных стержней*, только тогда x следует заменить на s — расстояние сечения от одного из концов, измеренное по недеформированной оси стержня (т. е. по линии, проходящей через центры тяжести поперечных сечений недеформированного стержня).

Итак, мы можем использовать общую формулу

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{B} ds, \quad (17)$$

как достаточно точную в большом числе случаев.

Наконец, следует заметить, что в задаче, где изгиб является преобладающим типом деформации, упругая энергия, запасаемая в теле вследствие нагрузок другого вида, бывает обычно малой по сравнению с упругой энергией изгиба. И в такого рода задачах мы можем для практических целей рассматривать формулы (16) и (17) как выражения *полной* упругой энергии¹⁾.

¹⁾ Формулы (16) и (17) основаны на тех предположениях об изгибе, которые сделали Яков Бернулли (1705), Даниил Бернулли и Эйлер (1742; 1744) в задаче об *эластике* (ср. гл. XIII). Основанная на этих предположениях приближенная теория (обычно известная как «теория Бернулли-Эйлера») широко используется в технике. Область применения этой теории и степень ее

Подставляя (I) и (II) в (19), мы получим:

$$\delta_1 = \frac{1}{B} \int_0^l P_1 x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{P_1 l^3}{B}. \quad (20)$$

Для того чтобы найти угол наклона консоли на нагруженном конце, мы представим себе, что на этом конце приложен, как показано на рис. 17 (B), момент. Он будет «силой», соответствующей рассматриваемому типу «перемещения» (углу наклона). Обозначим

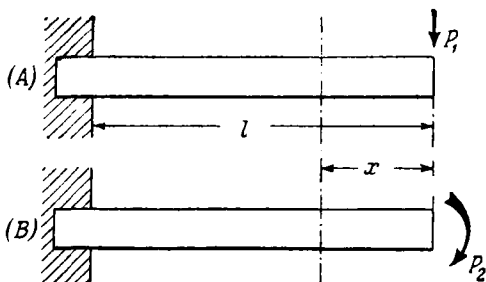


Рис. 17.

введенный на конце момент через P_2 , а угол наклона через δ_2 . По теореме Кастилиано получим, что угол наклона равен

$$\delta_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{1}{B} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P_2} dx. \quad (III)$$

Получено уравнение, аналогичное (19). Изгибающий момент в сечении x теперь будет $M = P_2 + P_1 x$, так что

$$\frac{\partial M}{\partial P_2} = 1.$$

Подставляя два последних выражения в (III), мы получаем:

$$\delta_2 = \frac{1}{B} \int_0^l (P_2 + P_1 x) dx$$

или при P_2 равно нулю, что как раз имеет место в рассматриваемой задаче:

$$\delta_2 = \frac{1}{B} \int_0^l P_1 x dx.$$

Итак,

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \frac{P_1 l^3}{B}. \quad (21)$$

На стр. 249 дана таблица стандартных случаев прогибов балок. Случай консоли постоянного поперечного сечения, нагруженной на конце сосредоточенной силой, помещен в ней под № 1. Результаты, выраженные формулами (20) и (21), помещены там же и под тем же номером.

50. При изучении настоящего метода, читателю, может быть, будет трудно понять, зачем на конце консоли вводится момент P_2 , который затем полагается равным нулю. Следует осознать, что, согласно теореме Кастилиано, мы должны *скорость* возрастания упругой энергии при изменении некоторой обобщенной «силы» приравнять «перемещению»,

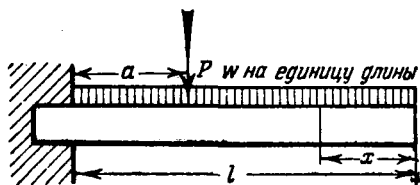


Рис. 18.

соответствующему этой силе. Возрастая, обобщенная сила может пройти через нуль, но это не скажется на эффекте такого изменения. Точно также ускорение, характеризующее скорость изменения скорости, вообще может иметь значение отличное от нуля, и вызывать существенное действие, несмотря на то, что в рассматриваемый момент скорость равняется нулю.

Короче говоря, применяя теорему Кастилиано, мы должны ввести силу, соответствующую тому перемещению, которое мы хотим вычислить.

Для вычисления всей кривой прогиба мы можем применить этот же метод, основанный на первой теореме Кастилиано.

51. Для примера можно рассмотреть консоль постоянного поперечного сечения (рис. 18), подверженную действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности w . Пусть нужно найти прогиб на расстоянии a от заделанного конца. Обозначим искомое перемещение через δ_1 и введем «соответствующую» силу P_1 .

Изгибающий момент в сечении, находящемся на расстоянии x от свободного конца, теперь будет:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \omega x^2, & \text{при } x < (l-a), \\ M &= \frac{1}{2} \omega x^2 + P_1 (x-l+a), & \text{при } x > (l-a), \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial P_1} &= 0, & \text{при } x < (l-a), \\ \frac{\partial M}{\partial P_1} &= (x-l+a), & \text{при } x > (l-a). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Как и раньше, мы имеем формулу

$$\delta_1 = \frac{1}{B} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P_1} dx, \quad (19) \text{ bis}$$

но, в силу первой строки из (II), интеграл обращается в нуль при $x < (l-a)$, и мы имеем

$$\delta_1 = \frac{1}{B} \int_{l-a}^l \left\{ \frac{1}{2} \omega x^2 + P_1 (x-l+a) \right\} (x-l+a) dx$$

или, при P_1 , равном нулю, что имеет место в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\omega}{2B} \int_{l-a}^l \left\{ x^3 - (l-a)x^2 \right\} dx = \frac{\omega}{2B} \left[\frac{1}{4} \left\{ l^4 - (l-a)^4 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} (l-a) \left\{ l^3 - (l-a)^3 \right\} \right] = \frac{\omega a^2}{24B} (6l^2 - 4la + a^2). \end{aligned} \quad (III)$$

Обычно прогиб обозначают через y и определяют кривую прогиба балки, находя y как функцию x — расстояния какого-либо сечения от *заделанного* конца. Перейдем в (III) к этим обычным обозначениям. Нужно δ_1 заменить на y , a — на x , и для кривой прогиба нашей консоли мы получим:

$$y = \frac{\omega x^2}{24B} (6l^2 - 4lx + x^2). \quad (22)$$

На свободном конце ($x=l$)

$$y = \frac{\omega l^4}{8B}. \quad (23)$$

Выражение для угла наклона i в каком-нибудь данном сечении можно вывести из (22). Мы имеем

$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{wx}{6B} (3l^2 - 3lx + x^2).$$

На свободном конце ($x=l$) мы получим

$$i = \frac{wl^2}{6B}. \quad (24)$$

Консоль с распределенной нагрузкой помещена под № 2 в таблице стандартных случаев прогибов балок, на стр. 249. Результаты, выраженные формулами (23) и (24), даются там же под тем же номером.

52. Читателю может показаться странным то, что мы получили правильное решение задачи о консоли, не вводя (как можно проследить) условия закрепления на заделанном конце. Это было объяснено в первой главе, где рассматривалась система сил P_1, P_2, \dots, P_n , каждая из которых могла изменяться независимо от остальных. При этом, не оговаривая, мы предполагали существование в опорах реакций, необходимых для поддержания равновесия тела. Однако мы опускали эти реакции в выражении для полной упругой энергии, а именно:

$$U = \frac{1}{2} [P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \dots + P_n\delta_n],$$

так как они (ср. § 28) не влияют на U , в силу того, что если опоры абсолютно жесткие, то соответствующие им перемещения равны нулю. В задаче § 49 сила на конце P_1 вызывает в заделанном конце вертикальную реакцию P_1 и пару с моментом P_1l . Если к упругой энергии от P_1 , как функции только перемещения на свободном конце δ_1 , мы не добавляем энергии от усилий в заделанном конце, то тем самым мы предполагаем, что на заделанном конце не допускается ни вертикальное перемещение, ни поворот.

Такой способ учета условий на концах без фактической записи их является типичной чертой метода Кастigliано.

Примеры

3. Используя метод § 51, найти кривую прогиба консоли постоянного сечения, нагруженной так, как показано на рис. 17 А. На этом

примере и на результатах § 51 проверить следующий вывод из теоремы взаимности: средний прогиб консоли, вызванный сосредоточенным грузом, приложенным на свободном конце, равен прогибу, вызванному на том же конце тем же грузом, равномерно распределенным по длине стержня (ср. пример 2 главы I, § 12).

4. Из кривых прогиба, полученных в примере 3 и в уравнении (22) § 51, вывести результаты, помещенные на стр. 249, для №№ 3 и 4 таблицы стандартных случаев прогибов балок.

5. Проверить для двух сосредоточенных сил, приложенных к консоли постоянного сечения, теорему, установленную в § 11 главы I.

53. В практике теорема Кастилиано, обычно, не используется как метод определения кривых прогиба, потому что



Рис. 19.

кривые прогиба можно получить проще другими способами. Но теорема становится весьма ценной в случае прямых балок, когда нам нужно знать не всю кривую прогиба, а только перемещение отдельных точек (т. е. точек приложения сосредоточенных сил). Для примера рассмотрим задачу, изображенную на рис. 19. Балка постоянного поперечного сечения покоится на трех абсолютно жестких опорах, расположенных на одном и том же уровне и симметрично по отношению к балке. Нужно найти распределение нагрузки между тремя опорами. Задача не может быть решена с помощью только теорем статики (ср. § 2).

Если общий вес балки $W = wl$, то он эквивалентен равномерно распределенной нагрузке интенсивности w . Из симметрии ясно, что крайние опоры будут воспринимать равные силы. Обозначим эти силы через P_1 . Тогда средняя опора несет нагрузку $W - 2P_1$. Предположим, что средняя опора неподвижна. Величина P_1 будет получена нами из того условия, что соответствующее ей перемещение равно нулю.

Рассматривая половину балки и измеряя x от одного из концов, мы имеем:

$$M = P_1 x - \frac{1}{2} w x^2 \quad \left(0 < x < \frac{1}{2} l \right). \quad (I)$$

Вследствие симметрии полная упругая энергия U должна быть разделена поровну между двумя половинами балки, так что из (18) мы имеем

$$U = \frac{1}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx. \quad (II)$$

Далее, в силу теоремы Кастилиано, условие неподвижности крайней опоры дает:

$$0 = \delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{2}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\partial M}{\partial P_1} dx,$$

подставив сюда (I), мы получим:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \left(P_1 x - \frac{1}{2} w x^2 \right) x dx = 0$$

или

$$\frac{1}{3} P_1 \left(\frac{1}{2} l \right)^3 = \frac{1}{8} w \left(\frac{1}{2} l \right)^4,$$

откуда

$$P_1 = \frac{3}{16} w l = \frac{3}{16} W.$$

Нагрузка, которую несет средняя опора, будет равна

$$W - 2P_1 = \frac{5}{8} W. \quad [\text{Ответ.}]$$

Пример

6. (Самб. M.S.T. 1930.) Балка постоянного поперечного сечения длины $2l$ свободно опирается на концах A , B и в середине C . Опоры в A и B абсолютно жестки, а опора C прогибается на величину, которая равна μ -кратной нагрузке, действующей на нее. Пусть на балку действует сила W , равномерно распределенная по всей длине. Требуется показать, что реакция средней опоры равна

$$\frac{5}{8} \frac{W}{1 + (6EI\mu/l^3)}.$$

*54. В качестве следующего примера на применение нашего метода рассмотрим балку постоянного поперечного сече-

ния (рис. 20), заделанную на обоих концах и несущую в середине сосредоточенную силу P_1 . Определить (а) величину момента в заделке одного из концов P_2 и (б) прогиб δ_1 посередине, т. е. в точке приложения силы.

[Здесь опять при первом чтении может возникнуть затруднение, так как читатель интуитивно чувствует, что P_2 связано некоторым образом с P_1 . Но мы можем изменять P_1 и P_2 независимо друг от друга, если поворот концов возможен. Приравнявая поворот на конце (обозначим его δ_2) нулю, мы фактически получаем ожидаемое соотношение, а именно, уравнение (25).]

При $0 < x < \frac{l}{2}$ мы
имеем

$$M = \frac{1}{2} P_1 x - P_2, \quad (I)$$

так что

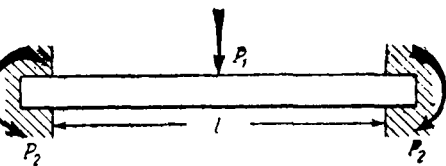


Рис. 20.

$$\frac{\partial M}{\partial P_1} = \frac{1}{2} x, \quad (II)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P_2} = -1. \quad (III)$$

При этом, так как полная упругая энергия делится поровну между половинами балки, мы имеем

$$U = \frac{1}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx. \quad (IV)$$

Тогда, (а) так как δ_2 «перемещение», соответствующее P_2 (т. е. поворот заделанного конца), равно нулю, мы, согласно (I) и (III), имеем:

$$0 = \delta_2 = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{2}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\partial M}{\partial P_2} dx = -\frac{2}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{2} P_1 x - P_2 \right) dx.$$

Таким образом

$$P_2 \left(\frac{1}{2} l \right) = \frac{1}{4} P_1 \left(\frac{1}{2} l \right)^2,$$

или

$$P_2 = \frac{1}{8} P_1 l. \quad (25)$$

(б) Предполагая, что концы балки неподвижны, мы, согласно (I) и (II), также получим

$$\delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{2}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\partial M}{\partial P_1} dx = \frac{1}{B} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{2} P_1 x - P_2 \right) x dx,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{6} P_1 \left(\frac{1}{2} l \right)^3 - \frac{1}{2} P_2 \left(\frac{1}{2} l \right)^2 \right\},$$

если подставить сюда P_2 из (25), то $\delta_1 = \frac{1}{192} \frac{P_1 l^3}{B}$. (26)

Этот пример помещен под номером 5 в таблице стандартных случаев прогибов балок на стр. 249. Результаты (25) и (26) даны там же под тем же номером.

Пример

7. Получить значения моментов на концах и прогиб в середине, если сила W равномерно распределена по длине заделанной балки (№ 6 таблицы стандартных случаев прогибов балок).

$$\left[\frac{1}{12} Wl; \frac{1}{384} \frac{Wl^3}{B} \right]$$

Применение первой теоремы Кастилиано к задачам об изгибе первоначально искривленных балок

55. Если ось балки первоначально искривлена или изогнута, то формула для упругой энергии изгиба записывается следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{B} ds. \quad (17) \text{ bis}$$

При B постоянном (т. е. в случае балки однородного материала и постоянного поперечного сечения) она приводится к виду:

$$U = \frac{1}{2B} \int_0^l M^2 ds. \quad (18) \text{ bis}$$

В обоих интегралах s измеряется по оси балки, длина которой берется равной l .

Решим несколько задач такого типа. При решении этих задач по сравнению с другими методами удобнее и выгоднее применять теорему Кастилиано, потому что она устраняет необходимость рассмотрения кинематических подробностей деформаций.

Арки

56. В каменных или кирпичных сооружениях с помощью арок перекрывают пролеты и удерживают вертикальную нагрузку при наличии только сжимающих усилий в местах, соединенных известью. Как в висячих мостах гибкий канат, в силу принимаемой им формы, может удерживать вертикальные силы одним растяжением, так и арка (которую можно рассматривать как обращенную «канатную подвесную дорогу») может удерживать их, в силу своей формы, сжатием. В стальных конструкциях нам не нужно (как в каменных) избегать растяжения. Однако и в стальных конструкциях вместо прямых балок иногда используют арки. Это делается потому, что балки такой формы большую часть приложенной силы могут уравнивать непосредственно силой сжатия. Мы, следовательно, уменьшая изгибающие усилия, можем сэкономить материал, что, очевидно, необходимо при большой величине перекрываемого пролета.

Если известен горизонтальный распор в пятах, то можно вычислить изгибающий момент в каком-нибудь сечении арки. Величину распора можно получить из уравнений статики, если арка спроектирована так, что она имеет три шарнира, по одному в пятах и третий еще в какой-нибудь точке (обычно в ключе арки). На рис. 21 вертикальные реакции в пятах известны, как функции вертикальной нагрузки. Так

что, если горизонтальный распор H в пятах был бы равен нулю, то изгибающий момент в каком-нибудь сечении независимо от формы арки был бы определенной функцией горизонтального расстояния x от одной из пят.

Пусть M_v обозначает вычисленный таким образом (вращающий левую часть арки по часовой стрелке) изгибающий момент.

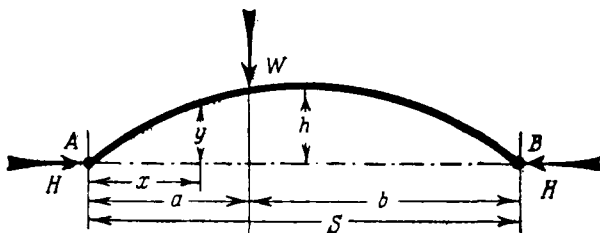


Рис. 21.

Тогда, если распор H отличен от нуля, действительный изгибающий момент в сечении с координатой x будет

$$M = M_v - Hy, \quad (27)$$

где y (см. рис. 21) — высота оси арки над уровнем пят в рассматриваемом сечении. Согласно условию равновесия M должен обращаться в нуль в каждом шарнире.

Рассматривая шарнир, для которого x и y имеют отличные от нуля значения, мы из уравнения (27) сможем вычислить H .

Примеры

8. Показать, что, если третий шарнир помещен в ключе арки (рис. 21), то горизонтальный распор, вызванный в пятах в результате приложения силы W , равен

$$H = \frac{1}{2} \frac{Wa}{h}.$$

9. (Самб. М. С. Т. 1932.) Арка, имеющая форму параболы с вертикальной осью, имеет шарниры в пятах и в ключе. Пята находятся на разных уровнях, горизонтальный пролет равен l , а высоты ключа над опорами h_1 и h_2 .

Показать, что горизонтальный распор, возникающий вследствие действия равномерно распределенной по длине проекции арки на горизонталь нагрузки интенсивности w , равен

$$\frac{wl^2}{2(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^3}.$$

Двухшарнирная арка

57. Если арка имеет два шарнира (в пятах), то, как и раньше, теоремы статики дают значение M_V . Но они не дают теперь возможности определить H . Для этой цели следует обратиться к теореме Кастилиано. Предположим, что под нагрузкой расстояние между пятами «раздается» на величину λ . Тогда, если в соответствии с нашими обычными обозначениями мы напомним P_1 вместо H , то «соответствующее» перемещение δ_1 будет равно $(-\lambda)$ и мы получим

$$-\lambda = \delta_1 = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial U}{\partial H},$$

что, согласно (17), равно

$$\int_0^l \frac{M}{B} \frac{\partial M}{\partial H} ds.$$

Подставляя M из (27), мы получаем уравнение

$$\lambda = \int_0^l \frac{M_V y}{B} ds - H \int_0^l \frac{y^2}{B} ds, \quad (28)$$

которое, если арка имеет постоянное по всей длине поперечное сечение, сводится к следующему:

$$B\lambda = \int_0^l M_V y ds - H \int_0^l y^2 ds. \quad (29)$$

Отсюда при известном λ можно вычислить H . M_V , как сказано выше, определится по заданной нагрузке.

Примеры

10. (Самб. М. S. Т. 1930.) Ось арки постоянного поперечного сечения представляет собой полуокружность радиуса R . Концы A и

B находятся на одинаковом уровне и имеют в пятах шарниры. Горизонтальная составляющая реакции в пятах, вызванной приложением силы W в ключе, равна H . Пролет AB может изменяться. Показать, что уменьшение пролета вследствие изменения кривизны арки равно

$$\frac{R^3}{EI} \left\{ \frac{H}{2} (\pi - 3) - \frac{W}{4} \left(2\sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

и что изменение пролета вследствие укорочения арки по оси будет

$$\frac{R}{EA} \left\{ \frac{H}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) + \frac{W}{4} \right\},$$

где A — площадь поперечного сечения арки и I — соответствующий момент инерции.

11. С помощью теоремы взаимности показать, что, если H возрастает на величину $4W$, то ключевая точка поднимается на величину

$$\left(2\sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{WR^3}{EI} - \frac{WR}{EA}.$$

Бесшарнирная арка

58. Если арка на концах «заделана» (рис. 22), то вертикальные реакции в пятах нельзя вычислить с помощью уравнений статики, потому что мы должны предполагать существование в этих точках моментов заделки.

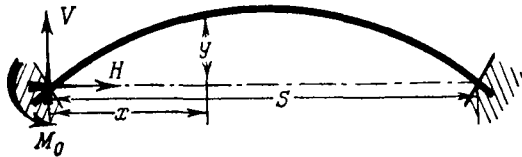


Рис. 22.

Пусть M_V имеет то же значение, что и раньше; V представляет собой *приращение* реакции в левой пяте, происходящее благодаря дополнительной связи, а M_0 представляет собой момент заделки в этой же пяте (рис. 22). (Н. В. На этом рисунке не показаны вертикальные силы,

дающие M_V .) Для изгибающего момента в сечении с координатой x мы будем иметь:

$$M = M_V + Vx - M_0 - Hy. \quad (30)$$

M_V (как и раньше) не зависит от характера связей. Пята предполагается абсолютно жесткими, и мы, следовательно, должны удовлетворить условиям равенства нулю перемещений, соответствующих V , M_0 и H . Тогда по теореме Кастigliано, мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{\partial U}{\partial H} = 0.$$

Подставляя U из (17) и M из (30), мы можем написать эти соотношения так:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{M}{B} \frac{\partial M}{\partial V} ds = \int_0^l \frac{1}{B} (M_V + Vx - M_0 - Hy) x ds, \\ 0 &= \int_0^l \frac{M}{B} \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = - \int_0^l \frac{1}{B} (M_V + Vx - M_0 - Hy) ds, \\ 0 &= \int_0^l \frac{M}{B} \frac{\partial M}{\partial H} ds = - \int_0^l \frac{1}{B} (M_V + Vx - M_0 - Hy) y ds. \end{aligned} \right\} (31)$$

Откуда V , M_0 и H могут быть определены.

Пример

12. Допустить перемещения в левой пяте и проверить, что теорема взаимности главы I, § 11 сохраняется в отношении V , M_0 , H и соответствующих им перемещений.

Пологие арки постоянного поперечного сечения

59. Интегралы общих формул (28) и (31) можно без труда вычислить приближенными графическими или численными методами. Чисто аналитическое решение было бы непрактично. С другой стороны, если жесткость при изгибе постоянна, то

входящие в формулы интегралы суть

$$\int_0^l M_V ds, \int_0^l M_V x ds, \int_0^l M_V y ds \quad (I)$$

и

$$\int_0^l x ds, \int_0^l y ds, \int_0^l x^2 ds, \int_0^l y^2 ds, \int_0^l xy ds, \quad (II)$$

а их можно вычислить весьма просто, если ось арки достаточно полого, так что ds можно заменить на dx .

Предыдущее решение неточно, так как мы допустили, что полная упругая энергия является следствием только изгиба, т. е. мы пренебрегли упругой энергией, вызванной непосредственно распором в арке. Ошибка, вызванная этим упрощением, в общем, мала. Но, очевидно, она будет больше для пологих арок, чем для арок, имеющих значительный «подъем». Распор учитывается в примере 10 (§ 57), и он будет также рассмотрен в § 64.

60. Рассмотрим двухшарнирную арку параболической формы, имеющую подъем h и пролет S . Пусть отношение $\frac{h}{S}$ достаточно мало. Это предполагается для того, чтобы оправдать отождествление ds с dx (а отсюда l с S). Мы вычислим распор H , который появляется от нагрузки W , приложенной посредине. При этом мы будем предполагать, что пята абсолютно жестки и, следовательно, увеличение расстояния совершенно не допускается.

Высота y и горизонтальное расстояние x , измеренные перпендикулярно и вдоль прямой, соединяющей пяты, связаны уравнением

$$\frac{y}{h} = 4 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (I)$$

Для $0 < x < \frac{1}{2} l$ мы получаем

$$M_V = \frac{1}{2} Wx, \quad (II)$$

отсюда, из соображений симметрии, обозначив через l длину пролета, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l M_V y dx &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} 2Whx \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) dx = \\ &= 4Whl^2 \left(\frac{1}{3} \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{48} Whl^3, \end{aligned} \quad (III)$$

также

$$\begin{aligned} \int_0^l y^2 dx &= \int_0^l 16h^2 \frac{x^2}{l^2} \left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right) dx = \\ &= 16h^2 l \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} h^2 l. \end{aligned} \quad (IV)$$

Тогда из (29), отождествляя ds с dx и полагая $\lambda = 0$, мы получаем:

$$H = \frac{25}{128} W \frac{l}{h}. \quad (32)$$

61. Рассмотрим арку той же формы, но заделанную в пятах. Из соображений симметрии мы можем видеть, что вертикальные реакции в опорах не будут меняться, когда нагрузка состоит из одной силы W , приложенной посредине (так как приращение должно быть одно и то же для обоих концов). Тогда V в уравнении (31) можно заменить нулем.

Выражения (III) и (IV) § 60 сохраняются. Обозначая длину пролета через l , мы имеем:

$$\int_0^l M_V dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} W x dx = \frac{1}{8} W l^2, \quad (V)$$

$$\int_0^l x dx = \frac{1}{2} l^2, \quad (VI)$$

$$\int_0^l x y dx = 4h \int_0^l x \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) dx = \frac{1}{3} h l^2, \quad (VII)$$

$$\int_0^l y dx = 4h \int_0^l \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) dx = \frac{2}{3} h l. \quad (VIII)$$

Из второго и третьего соотношений (31), отождествляя ds и dx и опуская члены с V , при B постоянном и в случае абсолютно жестких пят мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8} W l - M_0 - \frac{2}{3} h H &= 0, \\ \frac{5}{48} W l - \frac{2}{3} M_0 - \frac{8}{15} h H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (IX)$$

Из этих соотношений мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{15}{64} W \frac{l}{h}, \\ M_0 &= -\frac{1}{32} Wl, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

что с помощью (VII) и (VI) дает:

$$\left. \begin{aligned} H \int_0^l xy \, dx &= \frac{5}{64} Wl^3, \\ M_0 \int_0^l x \, dx &= -\frac{1}{64} Wl^3. \end{aligned} \right\}$$

Откуда мы имеем:

$$\int_0^l (M_0 x + Hxy) \, dx = \frac{1}{16} Wl^3 = \int_0^l M_V x \, dx,$$

что может быть легко проверено¹⁾.

Первое из равенств (31) при $V=0$ удовлетворяется (ds , как и раньше, заменяется на dx), и это убеждает нас в том, что наше предположение действительно выполняется. Если силы приложены не посредине, то мы, конечно, должны рассматривать V как величину, отличную от нуля, и использовать все три уравнения (31).

Пример

13. (Самб. М. S. T. 1932.) Имеем двухшарнирную арку (рис. 21) постоянного поперечного сечения параболической формы. Доказать, что горизонтальный распор в неподвижных пятах, возникающий вследствие действия сосредоточенной вертикальной силы W , приложенной в указанном сечении, будет

$$H = \frac{5}{8} \frac{ab}{hl} \left(1 + \frac{ab}{l^2} \right) W.$$

При этом предположить, что изменение пролета происходит только вследствие изгибающего момента и что длины по параболу не отличаются от длин своих горизонтальных проекций. (N. В. При этом предположении S на рис. 21 можно приравнять длине пролета арки l).

¹⁾ Путем вычисления момента около левой пяты треугольной эпюры изгибающего момента M_V . Высота и основание треугольника $\frac{1}{4} Wl$ и l . Центр тяжести его находится в середине пролета.

Влияние повышения температуры

62. Если допустить свободное изменение длины пролета арки S в силу повышения температуры, то всегда, зная коэффициент линейного расширения арки k , можно вычислить величину этого изменения. Так, повышение температуры на θ градусов должно вызвать относительное удлинение $k\theta$ или «раздачу» (§ 57) $k\theta S$.

Если увеличение длины пролета не допускается, то распор в пяте должен нейтрализовать эту раздачу. Таким образом для двухшарнирной арки постоянного поперечного сечения *дополнительный* распор (вследствие повышения температуры) можно найти, полагая в уравнении (29)

$$\lambda = -kS\theta, \quad M_V = 0.$$

Тогда мы имеем

$$H \int_0^l y^2 ds = BkS\theta. \quad (34)$$

Пример

В задаче § 60 (полагая параболическая двухшарнирная арка) мы из (IV) § 60 и из (34) имеем:

$$H = \frac{15}{8} \frac{Bk\theta}{h^2}.$$

63. Задача немного усложняется в случае бесшарнирной арки. Вместо третьего соотношения (31) мы должны написать

$$k'S = \int_0^l \frac{M}{B} \frac{\partial M}{\partial H} ds = - \int_0^l \frac{1}{B} (M_V + Vx - M_0 - Hy) y ds,$$

первое и второе уравнения (31) не изменяются. Из соображений симметрии мы видим, что во всех трех уравнениях мы можем изъять члены с V и положить M_V равным нулю,

так же, как было сделано при выводе (34). И наши три уравнения приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \int_0^l \frac{x ds}{B} + H \int_0^l \frac{xy}{B} ds &= 0, \\ M_0 \int_0^l \frac{ds}{B} + H \int_0^l \frac{y}{B} ds &= 0, \\ M_0 \int_0^l \frac{y}{B} ds + H \int_0^l \frac{y^2}{B} ds &= k\theta S. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

В силу симметрии системы первое и второе из соотношений (35) совпадают. Из (35) могут быть вычислены H и M_0 .

Пример

В задаче § 61 (пологая арка постоянного поперечного сечения) уравнения (35) после замены, как и раньше, ds на dx и S на l , принимают вид:

$$\begin{aligned} M_0 \int_0^l x dx + H \int_0^l xy dx &= \frac{1}{2} M_0 l^2 + \frac{1}{3} H h l^2 = 0, \\ M_0 \int_0^l dx + H \int_0^l y dx &= M_0 l + \frac{2}{3} H h l = 0, \\ B k \theta l &= M_0 \int_0^l y dx + H \int_0^l y^2 dx = \frac{2}{3} M_0 h l + \frac{8}{15} H h^2 l. \end{aligned}$$

Первое и второе уравнения, очевидно, тождественны.

Отсюда мы найдем, что

$$H = \frac{45}{4} B \frac{k\theta}{h^2}, \quad M_0 = -\frac{15}{2} B \frac{k\theta}{h}. \quad (36)$$

Учет упругой энергии сжатия

64. В § 59 мы заметили, что при выводе наших формул для арок мы пренебрегали упругой энергией сжатия. Следовательно, наши формулы должны быть несколько уточнены,

если мы хотим учесть этот эффект. Это необходимо, например, при применении формул к аркам малого подъема. Для примера рассмотрим двухшарнирную пологую арку параболической формы постоянного поперечного сечения (ср. § 60).

Отождествляя, как и раньше, ds с dx , мы, с достаточной степенью точности, можем считать, что H является результирующим распором в произвольном сечении арки. (Фактически это горизонтальная составляющая распора.) При таком предположении упругая энергия сжатия дается [ср. уравнение (4), § 38] выражением

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{H^2 l}{EA}, \quad (I)$$

где E обозначает модуль Юнга, а A — площадь поперечного сечения. В соответствии с § 33 главы I упругие энергии сжатия и изгиба можно сложить, и тогда вместо (18) мы имеем:

$$U = \frac{1}{2B} \int_0^l M^2 ds + U_1 = \frac{1}{2EA} \left[H^2 l + \frac{1}{k^2} \int_0^l M^2 ds \right], \quad (37)$$

где

$$B = EI = E A k^2,$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{1}{EA} \left[Hl + \frac{1}{k^2} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial H} ds \right]. \quad (II)$$

Если подставить M из (27) и отождествить ds с dx , то уравнение (29) примет вид

$$B\lambda = -k^2 l H + \int_0^l M_v y dx - H \int_0^l y^2 dx. \quad (38)$$

Теперь возьмем арку, рассмотренную в § 60. Воспользуемся (III) и (IV) того же параграфа и получим

$$B\lambda = -k^2 l H + \frac{5}{48} W h l^2 - \frac{8}{15} H h^2 l. \quad (I)$$

Если «раздача» абсолютно не допускается, то $\lambda = 0$, и вместо соотношения (32), мы имеем:

$$H = \frac{25}{128} W \frac{l}{h} : \left(1 + \frac{15}{8} \frac{k^2}{h^2} \right). \quad (39)$$

Аналогично, если мы положим, что, как в § 62,

$$\lambda = -kS\theta, \quad (S = l),$$

то мы найдем, что *добавочный* распор, вызванный повышением температуры на θ градусов, вместо соотношения, получившегося в приведенном там примере, будет выражаться соотношением:

$$H = \frac{15}{8} \frac{Bk\theta}{h^2} : \left(1 + \frac{15}{8} \frac{k^2}{h^2} \right).$$

При учете упругой энергии, запасенной распором, мы получаем для H меньшее, чем раньше, значение. Этого и следовало ожидать, ибо, по сути дела, раньше мы пренебрегали уменьшением длины арки вследствие распора, а его нужно добавлять к уменьшению пролета вследствие изгиба.

65. В обоих примерах относительная поправка H , вследствие учета упругой энергии сжатия, является величиной порядка $\frac{k^2}{h^2}$, где k — соответствующий радиус инерции площади поперечного сечения. Так как $\frac{k}{h}$ мало, то поправка не важна сама по себе; но она, как показывает ниже приводимый пример, может внести существенное изменение при вычислении изгибающих моментов.

Изгибающий момент в арке равен:

$$M = M_V - Hx, \quad (27) \text{ bis}$$

где M_V — вращающий левую часть арки по часовой стрелке изгибающий момент, вызванный вертикальными силами при отсутствии распора. В примере § 60 мы имели (при $0 < x < \frac{1}{2} l$)

$$M = \frac{1}{2} Wx - 4Hh \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (I)$$

M имеет максимальное значение при

$$0 = \frac{1}{2} W - 4H \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right). \quad (II)$$

Значение этого максимума равно:

$$M_{\max} = - \left(Hh - \frac{1}{8} Wl \right)^2 : Hh, \quad (\text{III})$$

отсюда, используя выражение (32), при выводе которого мы пренебрегли упругой энергией сжатия, имеем:

$$M_{\max} = - \frac{81}{3200} Wl, \quad (\text{IV})$$

а в соответствии с соотношением (39), в котором этот эффект был учтен,

$$M_{\max} = - \frac{81}{3200} Wl \left(1 - \frac{10}{3} \frac{k^2}{h^2} \right)^2 : \left(1 + \frac{15}{8} \frac{k^2}{h^2} \right). \quad (\text{V})$$

Сравнивая (IV) и (V), мы видим, что пренебрежение распором в первом исследовании увеличивает значение максимального изгибающего момента в отношении

$$\left(1 + \frac{15}{8} \frac{k^2}{h^2} \right) : \left(1 - \frac{10}{3} \frac{k^2}{h^2} \right)^2. \quad (\text{VI})$$

Если, например, $k = 10$ см, $h = 80$ см, то максимальный изгибающий момент увеличивается в отношении

$$\left(1 + \frac{15}{8 \cdot 64} \right) : \left(1 - \frac{10}{3 \cdot 64} \right)^2 = 1,03 : (0,948)^2 = 1,15,$$

т. е. на 15 процентов.

Пренебрежение упругой энергией сжатия при вычислении величины изгибающего момента приводит к ошибочным, но завышенным значениям, т. е. ошибка делается в сторону запаса. Сама по себе ошибка не очень важна, ибо (как было замечено в § 59 и подтверждается полученной формулой) пренебрежение сжатием дает большой эффект только при малом подъеме арки.

Таким образом, ясно, почему в практике обычно учитывается лишь упругая энергия изгиба. Это было, например, сделано в §§ 57—63. Для очень пологих арок все же иногда приходится учитывать эффект сжатия.

Но нам никогда не придется рассматривать тот случай, при котором в (38) ds нельзя заменить из dx , а результирующую распора нельзя отождествить с H . Итак,

если нужно учитывать упругую энергию сжатия, то, в силу пологости арки, ds всегда можно отождествить с dx . Общая задача не имеет большого практического интереса, а частные примеры можно решить без труда (ср. примеры, данные в конце § 57).

Вычисление вертикальных перемещений

66. Зная H (вместе с V и M_0 в случае бесшарнирной арки § 58), мы можем вычислить вертикальные перемещения, вызванные приложенной нагрузкой. Практически они обычно не имеют значения, так как слишком малы. Поступая согласно методу, объясненному в §§ 50—51, мы введем силу P , соответствующую тому перемещению δ , которое мы хотим вычислить. Дадим P его истинное (заданное) значение, *после того как* получим δ из формулы

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (I)$$

Надо подчеркнуть, что в случае арок P влияет не только на M_V , но и на H , V и M_0 . В наиболее общем случае (бесшарнирная арка) U дается выражением (17), а M следующей формулой

$$M = M_V + Vx - M_0 - Hy. \quad (30) \text{ bis}$$

Следовательно, предполагая, что B постоянно, мы из (I) имеем

$$\begin{aligned} B\delta &= \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} ds = \int_0^l M \left(\frac{\partial M_V}{\partial P} + x \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial M_0}{\partial P} - \right. \\ &\quad \left. - y \frac{\partial H}{\partial P} \right) ds = \int_0^l M \frac{\partial M_V}{\partial P} ds + \frac{\partial V}{\partial P} \int x M ds - \\ &\quad - \frac{\partial M_0}{\partial P} \int M ds - \frac{\partial H}{\partial P} \int My ds, \end{aligned} \quad (II)$$

где M дается выражением (30).

С другой стороны, если предположить абсолютную жесткость в пятах, то мы, как в § 58, будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \int Mx ds = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = - \int M ds = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial H} = - \int My ds = 0,$$

а тогда уравнение (II) можно свести к более простой форме

$$B\delta = \int_0^l M \frac{\partial M_V}{\partial P} ds. \quad (40)$$

Если арка шарнирно оперта в пятах, то не будет членов, зависящих от V и M_0 , и H будет связано с M_V при помощи (28), откуда, если раздача λ задана и следовательно не зависит от P , мы получим:

$$\frac{\partial H}{\partial P} \int_0^l y^2 ds = \int_0^l y \frac{\partial M_V}{\partial P} ds. \quad (III)$$

Более того, как в § 57, мы имеем:

$$- \int My ds = \frac{\partial U}{\partial H} = -\lambda.$$

Следовательно, из (II) и (III) вытекает, что

$$\begin{aligned} B\delta &= \int_0^l \frac{\partial M_V}{\partial P} ds - \lambda \left(\int_0^l y \frac{\partial M_V}{\partial P} ds \right) : \left(\int_0^l y^2 ds \right) = \\ &= \int_0^l M \frac{\partial M_V}{\partial P} ds, \text{ при } \lambda = 0. \end{aligned} \quad (40) \text{ bis}$$

Таким образом, если раздача не допускается, то δ дается выражением одного и того же вида как для арки с шарнирно опертыми пятами, так и для арки, пяты которой

заделаны. Но M под знаком интеграла для каждого из этих случаев имеет свое специальное выражение. Так,

$$M = M_V - Hy \quad (27) \text{ bis}$$

в первом случае и (30) во втором.

Нужно заметить, что в тех случаях, когда ds можно отождествить с dx , первый член в выражении для $B\delta$, а именно

$$\int_0^l M_V \frac{\partial M_V}{\partial P} dx$$

не зависит от формы арки. Он равен прогибу, который произойдет под действием той же нагрузки в соответствующей точке прямой балки.

Примеры

14. Обратимся к первому из примеров § 57. Мы видим, что, если пренебречь эффектом распора, то реакция в пяте будет:

$$H = \frac{1}{2} W \left(2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} \pi \right) : (\pi - 3) = 0,910 W. \quad (IV)$$

Пяты должны быть достаточно жесткими и не должны допускать горизонтального перемещения. Тогда изгибающий момент от рассматриваемой в этом примере силы W , приложенной посредине, в каждой половине пролета будет

$$M_V = \frac{1}{2} WR \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \theta \right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{и } Hy = HR \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для того чтобы найти вертикальное перемещение замка арки, мы в уравнении (40) силу P заменим на W . Тогда получим:

$$\begin{aligned} B\delta &= 2R \int_0^{\frac{\pi}{4}} (M_V - Hy) \frac{\partial M_V}{\partial W} d\theta = \\ &= R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} W \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \theta \right) - H \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \theta \right) d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} WR^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \sqrt{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta - \right. \\
&- \left. \frac{H}{W} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \sqrt{2} (\sin \theta + \cos \theta) - (1 + \sin 2\theta) \right\} d\theta \right] = \\
&= \frac{1}{2} WR^3 \left[0,121 - 0,129 \frac{H}{W} \right] \text{ (приближенно)}. \quad (V)
\end{aligned}$$

Этот результат подчеркивает преимущества арочной конструкции в отношении жесткости. Если H был бы равен нулю, то из (V) мы бы получили

$$B\delta = 0,06 WR^3,$$

тогда как, если раздача не допускается и, следовательно, H дается выражением (IV), мы имеем

$$B\delta = 0,0035 WR^3 \text{ (сделана грубая прикидка),}$$

что составляет только 6 процентов прежней величины.

15. (Camb M. S. T. 1933.) Форма двухшарнирной арки (рис. 21) задана уравнением $y = h \sin \frac{\pi x}{l}$. Начало координат в левом шарнире, ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально.

Предположим, что подъем h этой арки мал. Будем пренебрегать всеми деформациями, кроме изменения кривизны вследствие изгибающего момента. Показать, что H — горизонтальная составляющая распора в пьете, возникающая в силу действия сосредоточенной вертикальной силы W , приложенной на расстоянии a по горизонтали от левого шарнира, приближенно дается выражением

$$H = \frac{2W}{\pi^2} \frac{l}{h} \sin \frac{\pi a}{l}$$

(l — длина пролета, «раздача» не допускается).

16. Для той же и так же нагруженной арки показать, что прогиб под силой W будет

$$\delta = \frac{W}{EI} \left\{ \frac{a^2}{3l} (l-a)^2 - \frac{2l^3}{\pi^4} \sin^2 \frac{\pi a}{l} \right\},$$

где EI — жесткость при изгибе арки (постоянная).

Спиральные пружины

67. Теперь мы приступим к изучению иной, но очень похожей задачи. Исследуем задачу о спиральной пружине, которая употребляется, например, в часах¹⁾. Сначала рассмотрим тот случай, когда конец A (рис. 23) закреплен так, что может свободно поворачиваться. Тогда M_0 равен нулю. Неизвестные силы, вызываемые связью, можно разложить на две перпендикулярные составляющие X и Y . Ось y выбрана так, что она проходит через центр закручиваемого валика.

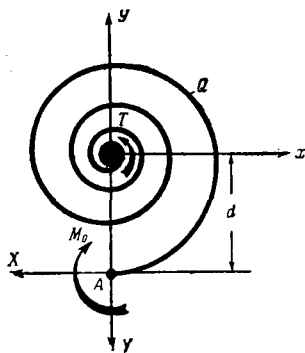


Рис. 23.

Конец A имеет шарнир. «Закручивающий момент» в A , направленный против часовой стрелки, равен

$$T = Xd. \quad (I)$$

И для изгибающего момента в точке Q , определяемой координатами x и y , мы имеем

$$\begin{aligned} M &= X(d + y) - Yx = \\ &= T \left(1 + \frac{y}{d}\right) - Yx. \end{aligned} \quad (II)$$

Последнее равенство получено на основании (I). Полная упругая энергия изгиба дается соотношением (17)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{B} ds, \quad (17) \text{bis}$$

где B — постоянная жесткость при изгибе, а l — полная длина пружины. Согласно замечаниям, сделанным в конце § 48, пренебрегаем упругой энергией, возникающей от других видов усилий.

¹⁾ См. примечание на стр. 658.

Тогда по теореме Кастилиано, вспомнив, что точка приложения Y неподвижна, мы имеем

$$0 = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{B} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y} ds = -\frac{1}{B} \int_0^l \left\{ T \left(1 + \frac{y}{d} \right) - Yx \right\} x ds. \quad (\text{III})$$

Для поворота валика, происходящего при приложении T , получаем:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{B} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial T} ds = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^l \left\{ T \left(1 + \frac{y}{d} \right) - Yx \right\} \left(1 + \frac{y}{d} \right) ds. \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Из (III) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y \int_0^l x^2 ds &= T \int_0^l \left(x + \frac{xy}{d} \right) ds \\ \text{и, согласно (IV),} \\ B\theta &= T \int_0^l \left(1 + 2\frac{y}{d} + \frac{y^2}{d^2} \right) ds - Y \int_0^l \left(x + \frac{xy}{d} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

Так как форма спирали будет вообще такова, что с большой точностью (в силу приблизительной симметрии) мы можем принять

$$\int_0^l x ds = \int_0^l y ds = \int_0^l xy ds = 0, \quad (\text{VI})$$

и тогда из (V) имеем

$$Y = 0, \quad B\theta = T \int_0^l \left(1 + \frac{y^2}{d^2} \right) ds. \quad (\text{41})$$

Конец А заделан. Если конец пружины А закреплен так, что он не может поворачиваться, то, как показано на

рис. 23, появится момент заделки M_0 . Мы в качестве условия заделки A будем иметь дополнительное соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = 0. \quad (\text{VII})$$

Для закручивающего момента T будем иметь равенство

$$T = Xd + M_0. \quad (\text{VIII})$$

Выражение (VIII) заменяет (I). Вместо (II) будем иметь

$$\begin{aligned} M &= X(d + y) + M_0 - Yx = \\ &= T\left(1 + \frac{y}{d}\right) - M_0 \frac{y}{d} - Yx \quad (\text{согласно VIII}). \end{aligned} \quad (\text{IX})$$

Условие (VII) требует, чтобы

$$\int_0^l \left\{ T\left(1 + \frac{y}{d}\right) - M_0 \frac{y}{d} - Yx \right\} \frac{y}{d} ds = 0. \quad (\text{X})$$

Уравнение (III) заменяется уравнением

$$\int_0^l \left\{ T\left(1 + \frac{y}{d}\right) - M_0 \frac{y}{d} - Yx \right\} x ds = 0 \quad (\text{XI})$$

и (IV) уравнением

$$B\theta = \int_0^l \left\{ T\left(1 + \frac{y}{d}\right) - M_0 \frac{y}{d} - Yx \right\} \left(1 + \frac{y}{d}\right) ds. \quad (\text{XII})$$

Упростив (X) и (XI) с помощью (VI) и (VIII), мы найдем, что

$$T = M_0, \quad X = Y = 0.$$

И тогда из (XII) мы имеем

$$B\theta = \int_0^l T ds = Tl. \quad (\text{42})$$

68. Таким образом, в зависимости от того, может или нет поворачиваться закрепленный конец пружины A , мы получили разные соотношения между T и θ .

Если пружина имеет много тесно намотанных витков, то приближенно имеет место равенство

$$\int_0^l y^2 ds = \frac{1}{4} d^2 l$$

и тогда приближенно для пружины с шарниром на конце имеем:

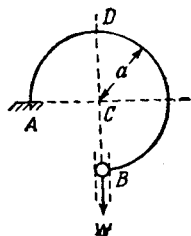
$$B\theta = 1,25 Tl. \quad (43)$$

А это, будучи сравнено с формулой (42) для пружины с заделанным концом, показывает, что заделка увеличивает жесткость примерно на 25 процентов.

Как существенную черту задачи следует отметить, что T и X связаны условиями равновесия, т. е. (I) при шарнирно-закрепленном конце и (VIII) при заделанном конце A . Если рассматривать T и X независимо друг от друга, то получатся ошибочные результаты. Мы можем рассматривать T как функцию X или X как функцию T . Нами была выбрана вторая зависимость, ибо мы хотели вычислить соотношение между T и соответствующим перемещением θ .

Примеры

17. Рассмотрим ту же задачу, предполагая, что закручиваемый валик неподвижен и что A (рис. 23) под действием X, Y и момента M_0 может двигаться свободно. Показать, что теорема взаимности главы I, § 11 выполняется для X, Y, M_0 и «соответствующих» им перемещений. Учтеь разницу между (42) и (43), показав, что при $M_0 = 0$ угол наклона оси пружины к прямой, соединяющей A с центром закручиваемого валика, изменяется приблизительно на угол, равный $\frac{1}{4} \frac{Tl}{B}$. Направление отсчета угла совпадает с направлением T .



18. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Пружина из однородного материала с постоянной площадью поперечного сечения, момент инерции которой I , имеет форму, показанную на рисунке. Она жестко заделана в A . Конiec B может свободно вращаться, но принужден двигаться без трения по направляющей, которая совпадает с вертикальным диаметром BCD .

Рассматривая только изгибающие усилия, получить выражение для вертикального перемещения B , когда в этой точке приложен груз W .

$$\left[\frac{Wa^3}{EI} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9\pi + 8} \right) \right]$$

19. (Самб. М. S. T. 1934.) Обод маховика имеет прямоугольное сечение с радиальной толщиной t . Толщина обода мала по сравнению с его средним радиусом r . Обод связан с втулкой шестью симметрично расположенными спицами. Пусть сила растяжения в каждой из этих спиц T . Найдите изгибающий момент и распор в каком-либо сечении обода как функцию T . Если u — уменьшение радиуса в точках соединения спиц с ободом, то покажите, что приблизительно

$$u = \frac{Tr}{AE} (0,96 + 0,02 \frac{r^2}{t^2}),$$

где A — площадь поперечного сечения обода.

Деформацией обода вследствие перерезывающей силы можно пренебречь.

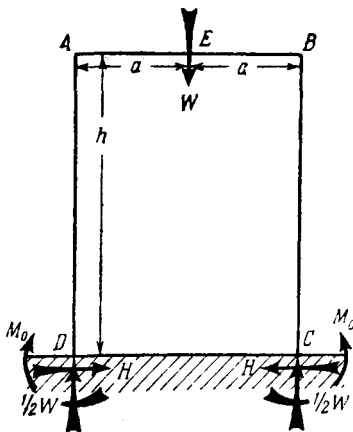


Рис. 24.

Прямоугольные рамы

69. В качестве последнего примера на применение первой теоремы Кастилиано к задачам, в которые входят изогнутые стержни, мы рассмотрим прямоугольную раму, показанную на рис. 24. Три балки постоянного поперечного сечения и одинаковой жесткости при изгибе, жестко соединены так, что образуют три стороны прямоугольника. Нижние концы вертикальных стержней заделаны. В середине горизонтального стержня приложен сосредоточенный груз W . Взяв упругую энергию только вследствие изгиба, мы вычислим моменты M_0 в заделке и распор H , появляющийся в горизонтальной балке.

Вследствие симметрии реакции *каждого* из заделанных концов, как показано на рисунке, могут быть представлены силами $\frac{1}{2} W$,

H и моментом M_0 . Тогда для изгибающего момента в стойке на высоте x над уровнем земли ($0 < x < h$) мы имеем

$$M = M_0 - Hx \left(\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1; \frac{\partial M}{\partial H} = -x \right).$$

А для изгибающего момента в горизонтальном стержне на расстоянии y от одного из концов ($0 < y < a$)

$$M = M_0 - Hh + \frac{1}{2} Wy \left(\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1; \frac{\partial M}{\partial H} = -h \right).$$

Откуда (так как перемещения, соответствующие M_0 и H равны нулю)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h (M_0 - Hx) dx + \int_0^a (M_0 - Hh + \frac{1}{2} Wy) dy &= 0, \\ \int_0^h (M_0 - Hx)x dx + h \int_0^a (M_0 - Hh + \frac{1}{2} Wy) dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

* (Н. В. Строго говоря, нужно учесть в пределах интегрирования длины, занятые шарнирами в A и B).

Беря интегралы, мы получим

$$\left. \begin{aligned} M_0 h - \frac{1}{2} H h^2 + \left\{ M_0 a - H h a + \frac{1}{4} W a^2 \right\} &= 0, \\ \frac{1}{2} M_0 h^2 - \frac{1}{3} H h^3 + h \left\{ M_0 a - H h a + \frac{1}{4} W a^2 \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

откуда, вычитая, мы находим

$$H h = 3 M_0. \quad (IV)$$

Подставляя найденное значение в первое из (III), мы получим, что

$$M_0 = \frac{W a^2}{2(h + 4a)}.$$

Тогда, согласно (IV), мы имеем

$$H = \frac{3 W a^2}{2h(h + 4a)},$$

так что изгибающие моменты в A и B (рис. 24) будут:

$$M_0 - H h = -2 M_0 = -\frac{W a^2}{h + 4a}.$$

Пример

20. (Camb. M. S. T. 1934.) Рама того же типа, что на рис. 24, состоит из двух вертикальных стоек AD и BC , заделанных в основаниях. Верхние концы стоек прикреплены к поперечной балке AB . Все три стержня имеют одинаковые поперечные сечения и одинаковую длину a .

Если рама нагружена в средней точке E стержня AB , вертикальной силой W , а в A горизонтальной силой P (действующей слева направо), то показать, что изгибающие моменты на концах в стержне AB будут $\frac{Wa}{12} \pm \frac{3}{14} Pa$ и что распор в этом стержне будет равен $\frac{W}{8} + \frac{P}{2}$.

Изгибом и изменением длины стержней вследствие аксиального распора можно пренебречь.

[N. В. При рассмотрении влияния горизонтальной силы P много труда могут сэкономить соображения симметрии. Если одновременно была бы приложена в точке B вторая горизонтальная сила, равная и противоположная первой, то в AB возник бы распор величины P , и вертикальные стержни остались бы ненапряженными (так как получающимся в AB сжатием можно пренебречь). Каждая сила должна (по симметрии) в суммарном распоре AB давать одну и ту же величину. Следовательно, распор, вызванный одной из них, равен $\frac{1}{2} P$.

Аналогичные рассуждения показывают, что одна сила P должна вызывать в A и B изгибающие моменты равные по величине, но противоположные по знаку, и равные, но противоположные по направлению вертикальные реакции в C и D . Далее, она не может вызывать изгибающего момента или вертикального перемещения в среднем сечении E . Поэтому мы можем рассмотреть только одну половину прямоугольной рамы, предполагая, что E может свободно двигаться по горизонтали, но соответствующая вертикальная сила не допускает в E вертикального перемещения.]

Теорема трех моментов Клапейрона

70. В заключение этой главы приведем доказательство (на основании первой теоремы Кастилиано) теоремы, высказанной Клапейроном¹⁾. Теорема относится к прямым балкам, покоящимся на трех и более опорах. Вообще, изгибающие моменты появляются во всех опорах, и если они все известны,

¹⁾ В. Р. Е. Слареугон, *Comptes rendus*, 90 (1857). Некоторые интересные приложения этой теоремы описаны V. Belfield, *Phil. Mag.*, 60 (1933), 562.

то можно вычислить изгибающие моменты в любом другом сечении. Но изгибающие моменты могут задаваться только в крайних опорах, в других сечениях они определяются жесткостью балки. Теорема Клапейрона делает возможным полное решение задачи, ибо дает соотношение между изгибающими моментами в любых трех последовательных опорах (ср. § 186).

71. В доказательстве, приводимом ниже, мы будем принимать, что жесткость балки при изгибе постоянна. Рассмотрим часть балки, лежащую на трех опорах. Пусть изгибающие моменты в крайних опорах будут M_1 и M_3 . Если балку рассечь по средней опоре, то она станет статически определимой. В средней опоре имеется изгибающее

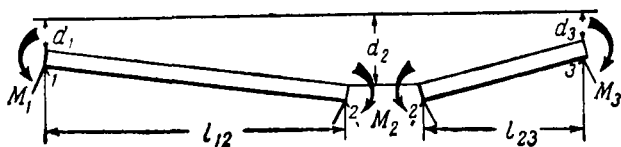


Рис. 25.

усилие; следовательно, после рассечения на концах каждого из участков появится неизвестный момент M_2 . Величина M_2 определится из условия равенства нулю величины разрыва угла наклона касательной к оси балки в средней опоре. Величина этого разрыва (рис. 25) равна

$$\frac{d_2 - d_1}{l_{12}} + \frac{d_2 - d_3}{l_{23}}. \quad (I)$$

Условия на левом участке показаны на рис. 26. M_V является (вращающим левую часть балки по часовой стрелке) изгибающим моментом, возникающим вследствие вертикальной нагрузки, а M_1 , M_2 , M_3 берутся положительными, когда они вращают левую часть балки против часовой стрелки. Суммарный изгибающий момент, вращающий левую часть балки по часовой стрелке, на расстоянии x от левой опоры будет

$$M = M_V - M_1 - \frac{x}{l_{12}} (M_2 - M_1). \quad (II)$$

Поворот по часовой стрелке правого конца (перемещение, «соответствующее» M_2) равен:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \frac{\partial U}{\partial M_2} = \frac{1}{EI} \int_0^{l_{12}} M \frac{\partial M}{\partial M_2} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{l_{12}} \left\{ M_V - M_1 - \frac{x}{l_{12}} (M_2 - M_1) \right\} \left(-\frac{x}{l_{12}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{M_1}{6} l_{12} + \frac{M_2}{3} l_{12} - \frac{A_{12} \bar{x}_{12}}{l_{12}} \right], \end{aligned} \quad (III)$$

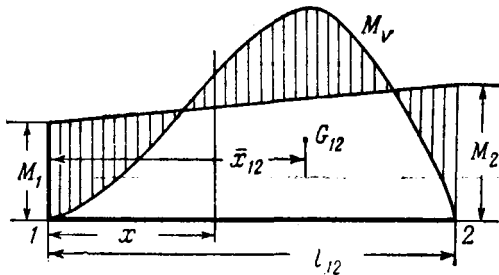


Рис. 26.

где EI представляет собой (постоянную) жесткость при изгибе балки (ср. § 48), A_{12} обозначает площадь эпюры M_V для участка 1—2, а \bar{x}_{12} — расстояние ее центра тяжести от левого конца.

72. Рассматривая аналогичным образом другой участок, мы найдем, что поворот левого конца против часовой стрелки будет

$$\theta_{23} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_2}{6} l_{23} + \frac{M_3}{3} l_{23} - \frac{A_{23} \bar{x}_{23}}{l_{23}} \right], \quad (IV)$$

где A_{23} обозначает площадь эпюры M_V для участка 2—3, а \bar{x}_{23} — расстояние ее центра тяжести от правого конца.

Для того чтобы разрыв, величина которого дается выражением (I), обратился в 0, мы должны иметь

$$\frac{d_2 - d_1}{l_{12}} + \frac{d_2 - d_3}{l_{23}} + \theta_{12} + \theta_{23} = 0, \quad (44)$$

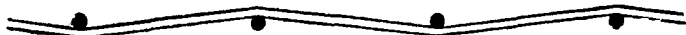
откуда, используя (III) и (IV), мы найдем, что

$$\frac{d_2 - d_1}{l_{12}} + \frac{d_2 - d_3}{l_{23}} + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} (M_1 l_{12} + M_3 l_{23}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} M_2 (l_{12} + l_{23}) - \frac{A_{12} \bar{x}_{12}}{l_{12}} - \frac{A_{23} \bar{x}_{23}}{l_{23}} \right] = 0. \quad (45)$$

Теперь M_2 можно определить как функцию M_1 и M_3 . В этом и заключается теорема Клапейрона.

Пример

21. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Используя эту теорему, или каким-нибудь иным путем, найти давление, которое оказывает на ряд стерженьков длинная стальная полоса, протертая между ними



так, как показано на рисунке. Стерженьки можно считать абсолютно жесткими, их диаметр 1,27 см; помещены они на одинаковом расстоянии 30,5 см друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой. Полоса стальная, ее ширина 2,54 см и толщина 0,158 см. (Взять E равным $2,1 \cdot 10^6$ кг/см².) [2,17 кг.]

73. Если мы имеем равномерно распределенные нагрузки интенсивности w_{12} и w_{23} , то

$$\frac{A_{12} \bar{x}_{12}}{l_{12}} = \frac{1}{l_{12}} \int_0^{l_{12}} \frac{w_{12}}{2} (l_{12} x - x^2) x dx = \frac{1}{24} w_{12} l_{12}^3,$$

и аналогичное выражение имеет место для $A_{23} \bar{x}_{23}$. Если в этом случае все опоры остаются на одном уровне, то соотношение (45) принимает вид:

$$M_1 l_{12} + M_3 l_{23} + 2M_2 (l_{12} + l_{23}) - \\ - \frac{1}{4} (w_{12} l_{12}^3 + w_{23} l_{23}^3) = 0. \quad (46)$$

Пример

22. Получить уравнение, соответствующее (45), когда жесткость при изгибе постоянна по длине одного участка, но меняется от участка к участку. Полученное соотношение использовать для решения следующей задачи (Самб. М. С. Т. 1930). Модуль Юнга E одинаков для всех участков. Пусть A, B, C, D — четыре жесткие опоры, расположенные на одном уровне. Пролеты между ними соединены различными по длине и сечению балками AB, BC, CD . AB и CD имеют одинаковую длину a и одинаковый момент инерции I_a , BC имеет длину b и момент инерции I_b . Каждая из AB и CD несет равномерно распределенную нагрузку, интенсивность которой на единицу длины равна w_a . BC несет равномерно распределенную нагрузку, интенсивность которой на единицу длины w_b .

Показать, что нагруженные таким образом балки можно заменить одной балкой постоянного поперечного сечения, прикладывая на ее концах B и C моменты величины

$$\frac{1}{4} \frac{w_a a^3 I_b + w_b b^3 I_a}{2a I_b + 3b I_a}.$$

ГЛАВА III

ТЕЛА С «НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ». ВТОРАЯ ТЕОРЕМА КАСТИЛИАНО И ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

Пример тела с «начальными напряжениями»

74. До сих пор мы предполагали, что упругая энергия деформации в теле запасается только тогда, когда на него действуют внешние силы. Если же к телу не приложены внешние силы, то оно *не* запасает упругой энергии. Теперь мы рассмотрим другой случай. Пусть наше тело имеет *начальные*

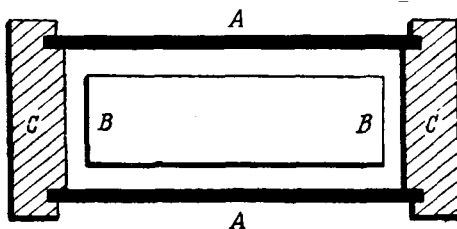


Рис. 27.

напряжения в том смысле, что оно обладает запасом упругой энергии и тогда, когда внешние силы на него не действуют. Эта энергия может быть обнаружена в теле, если тело определенным образом разрезать.

Рассмотрим, например, случай, данный на рис. 27. В прямую трубу *A*, закрытую с обоих концов *жесткими* крышками *CC*, помещен прямой стержень *B*. Длина стержня *B* несколько меньше длины трубы. Предположим, что труба *A* приложением сжимающей силы укорачивается до тех пор, пока крышки *CC* не соприкоснутся с концами *BB* внутреннего стержня. Соприкоснувшиеся поверхности жестко соединяются, а сжимающая сила, действовавшая на *A*, убирается. Очевидно, *A* будет стремиться удлинить так, чтобы освободиться от сжатия, но этому стремлению к удлинению

будет противостоять растяжению, вызываемое в B . При отсутствии внешних сил равновесие наступит тогда, когда сила сжатия в A и сила растяжения в B будут иметь одну и ту же величину P .

75. Величина силы P определяется из дополнительного условия, которое должно иметь место в окончательной конфигурации. Так, если λ обозначает ту величину, на которую длина A превосходит длину B , когда обе детали недеформированы, то это условие гласит:

$$\begin{aligned} & (\text{укорочение } A \text{ от силы сжатия } P) + \\ & + (\text{удлинение } B \text{ от силы растяжения } P) = \lambda. \end{aligned} \quad (I)$$

Удлинение B будет

$$\varepsilon_B = a_B P, \quad (II)$$

где a_B — коэффициент влияния, связывающий силу растяжения и удлинение стержня B (ср. § 37 главы II). Таким же образом, если a_A коэффициент влияния для силы растяжения и удлинения трубы A , то *укорочение* A от *силы сжатия* P будет $a_A P$. Следовательно, условие (I) можно записать

$$\text{в форме} \quad (a_A + a_B) P = \lambda. \quad (1)$$

Если детали из однородного материала и имеют постоянную площадь поперечного сечения, то в соответствии с (3) главы II мы можем написать

$$a_A = \frac{l_A}{E_A A_A}, \quad a_B = \frac{l_B}{E_B A_B}. \quad (2)$$

Если площадь поперечного сечения изменяется по длине, то согласно (5) той же главы,

$$a_A = \frac{1}{E_A} \int_0^{l_A} \frac{dx}{A_A}, \quad a_B = \frac{1}{E_B} \int_0^{l_B} \frac{dx}{A_B}, \quad (3)$$

где l_A , l_B — длины A и B , A_A , A_B — площади их поперечных сечений, E_A — модуль Юнга материала A , а E_B — модуль

Юнга материала B . Таким образом, можно определить величины a_A , a_B и найти P из формулы (1).

76. Основные условия нашей задачи весьма ясно могут быть изображены на диаграмме (рис. 28). Представим себе, что недеформированная труба A и стержень B соединены между собой на одной стороне, тогда на другой стороне

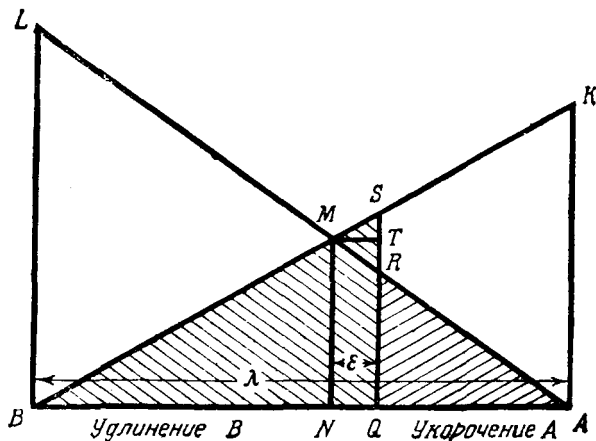


Рис. 28.

конец A находится от конца B на расстоянии λ . Пусть AB на нашей диаграмме представляет собой это расстояние. Соотношение между силой растяжения и удлинением стержня B (согласно закону Гука) изображается прямой BK . Отношение $\frac{BA}{AK}$ дает коэффициент влияния a_B .

Аналогично соотношение между силой сжатия и укорочением стержня A представляется прямой AL . Отношение $\frac{AB}{BL}$ дает коэффициент влияния a_A . Если BK и AL пересекаются в точке M , то ордината MN дает, очевидно, величину P (одинаковую для трубы A и стержня B). Условие (1) удовлетворяется. BN представляет собой удлинение B , а AN — укорочение A в окончательной конфигурации.

Упругая энергия деформации, запасенная в B силой растяжения P , согласно (II), будет

$$\frac{1}{2} P \varepsilon_B = \frac{1}{2} a_B P^2.$$

На диаграмме эта величина изобразится площадью треугольника BMN . Аналогично упругая энергия деформации, запасенная в A , равняется

$$\frac{1}{2} a_A P^2$$

и изображается на диаграмме площадью треугольника MNA . Таким образом, полная упругая энергия, запасенная в составном теле при наличии в нем начальных напряжений, полученных описанным путем, будет равна

$$U_0 = \frac{1}{2} (a_A + a_B) P^2 = \frac{1}{2} \lambda P \quad [\text{согласно (1)}]. \quad (4)$$

На диаграмме эта величина изображается площадью BMA . Очевидно, что начальная упругая энергия, запасенная в нашей системе, будет возвращена, если мы разрушим связь между A и B на одном из концов.

Применение принципа суперпозиции к телам с начальными напряжениями

77. Предположим теперь, что к составному телу приложена внешняя сила растяжения. Под действием этой силы тело как целое испытывает дополнительное удлинение ε , представленное на диаграмме отрезком NQ . Окончательное удлинение B изобразится отрезком BQ , а сила растяжения в B — отрезком QS . Укорочение A уменьшится до величины, равной отрезку QA , и сила сжатия в A до величины, равной отрезку QR . Очевидно, что внешняя сила, представленная на диаграмме отрезком $SR = ST + TR$, равна силе растяжения, вызывающей в B удлинение $MT (= \varepsilon) +$ сила растяжения, вызывающая в A удлинение $MT (= \varepsilon)$.

Таким образом мы видим, что сила сопротивления удлинению от внешней силы составного тела не зависит от λ ,

т. е. от величины, являющейся следствием начального напряжения. Отсюда вытекает, что *принцип суперпозиции сохраняется для тел с «начальными напряжениями»*.

При действии внешней силы, представленной отрезком SR , упругая энергия, запасенная в B , изображается площадью заштрихованного треугольника SBQ , а упругая энергия, запасенная в A , изображается площадью заштрихованного треугольника RQA . Следовательно, полная упругая энергия системы (изображенная всей заштрихованной площадью) превосходит энергию начального напряжения U_0 (изображаемую площадью BMA , ср. § 76) на величину, изображенную площадью треугольника SMR . Внешнюю силу растяжения обозначим через P_1 , а окончательное удлинение через ϵ . Энергия, представленная площадью треугольника SMR , равна $\frac{1}{2} P_1 \epsilon$ и (в соответствии с только что установленным результатом) не зависит от величины начальных напряжений. Наш вывод можно записать с помощью формулы

$$U = U_0 + \frac{1}{2} P_1 \epsilon, \quad (5)$$

где U обозначает общую величину упругой энергии, U_0 — величину энергии, вызванную начальными напряжениями до приложения внешней силы P_1 , а $\frac{1}{2} P_1 \epsilon$ — энергию, которая была бы запасена телом при действии на него силы P_1 , если λ (а отсюда и начальное напряжение) равнялось бы нулю. *Эта последняя величина обязательно положительна.*

Начальные напряжения иного происхождения. Температурные напряжения

78. Способ, с помощью которого в составном теле, указанном на рис. 27, были получены начальные напряжения, несколько искусствен. Но, условия, при которых в том же теле могут возникнуть начальные напряжения, можно создать совсем иным и более близким к практике путем.

Предположим, например, что стержень B может свободно проходить сквозь отверстия в жестких крышках CC и имеет

резьбу с гайками (рис. 29). Если гайки заворачивают так, что CC сближаются друг с другом, то труба A сжимается и оказывает сопротивление этому сближению. Пусть гайки завернуты, CC сблизились на определенную величину. Как и раньше, равновесие наступит (при отсутствии внешних сил) тогда, когда сила растяжения в B будет равна по величине силе сжатия в A , т. е. когда соотношение (1) § 75 удовлетворяется. В уравнении (1), как и раньше, λ представляет собой величину, на которую эффективная длина B короче той длины,

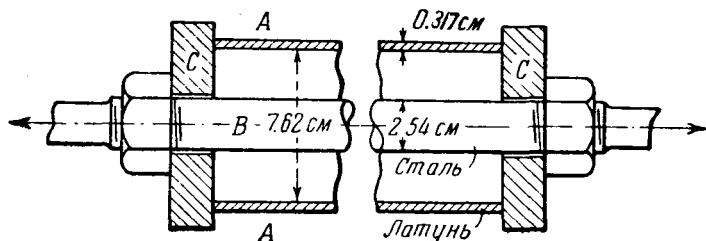


Рис. 29.

которую B должен был бы иметь для того, чтобы A и B могли бы подходить друг к другу без начальных напряжений. Таким образом задача (с теоретической точки зрения) не изменилась.

Если труба и стержень имеют различные коэффициенты линейного расширения, то, изменяя температуру, можно создать те же самые условия. Обратимся к рис. 29. Предположим, что при температуре θ_1 гайки завернуты так, что крышки как раз касаются (без давления) трубы. Затем температуру повысили до θ_2 . Если A могла бы свободно удлиняться, то ее конец испытал бы относительное удлинение $k_A(\theta_2 - \theta_1)$, k_A — температурный коэффициент линейного расширения. Полное удлинение было бы $l_A k_A(\theta_2 - \theta_1)$. Полное удлинение B (если этот стержень мог бы свободно расширяться) аналогично было бы $l_B k_B(\theta_2 - \theta_1)$.

Пусть

$$(l_A k_A - l_B k_B)(\theta_2 - \theta_1) = \lambda. \quad (6)$$

Теперь длина B при температуре θ_2 будет на λ меньше той величины, при которой стержень B можно было бы поставить на место без напряжения. В трубе A возникнет сила сжатия P , а в стержне B сила растяжения P . Величина P , как и раньше, определяется соотношением (1).

79. Рис. 29 взят из заданий, предложенных на выпускных экзаменах в Оксфорде (1932). Решим это задание в качестве примера.

Длинная латунная труба, имеющая средний диаметр 7,62 см и толщину 0,317 см, закрывается на концах, как показано на рис. 29, шайбами, соединенными стальной тягой с диаметром 2,54 см. Гайки вначале затянуты так, что в трубе вызывается сжимающее напряжение величины 310 кг/см². Затем к концам тяги прикладывается растягивающая сила, равная 5,08 т. Предполагая, что шайбы на концах абсолютно жесткие, вычислить:

I. Окончательные напряжения в трубе и тяге при постоянной температуре;

II. Напряжения в обеих деталях, когда температура возрастает на 50°C (растягивающая сила при этом действует).

Для стали модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см², температурный коэффициент линейного расширения $k = 1,11 \times 10^{-5}$ на 1°C.

Для латуны $E = 1,05 \cdot 10^6$ кг/см²,

$$k = 1,80 \times 10^{-5} \text{ на } 1^\circ\text{C}.$$

Полная растягивающая сила в трубе в тоннах равна

$$\begin{aligned} 310 \times (\text{площадь поперечного сечения трубы в см}^2) = \\ = 310 \times 7,62 \pi \times 0,317 = 750 \pi. \end{aligned} \quad (I)$$

Полная растягивающая сила в тяге должна иметь ту же величину, и потому напряжение в тяге в килограммах на кв. сантиметр равно

$$\begin{aligned} 750 \pi : (\text{площадь тяги в см}^2) = \\ = 750 \pi \times \frac{4}{\pi \cdot 2,54^2} = 464 \text{ кг/см}^2. \end{aligned} \quad (II)$$

I. Если приложена растягивающая сила, то как тяга, так и труба испытывают одно и то же удлинение ϵ . В § 77 мы видели, что на величину этого удлинения не влияют начальные напряжения. Обе детали достаточно длинные и поэтому в качестве эффективной длины для обеих деталей мы можем взять одну и ту же величину l

хотя тяга, строго говоря, немного длиннее трубы. И тогда из (II) главы II мы будем иметь:

$$\frac{P_r}{E_r A_r} = \frac{\varepsilon}{l} = \frac{P_t}{E_t A_t},$$

где P_r , E_r , A_r относятся к тяге, P_t , E_t , A_t — к трубе. Очевидно,

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{E_r A_r}{E_t A_t} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \frac{\pi}{4} 2,54^2}{1,05 \cdot 10^6 \pi 2,42} = \frac{4}{3}. \quad (\text{III})$$

Кроме того, мы имеем следующее соотношение:

$$P_r + P_t = 5,08 \text{ т.} \quad (\text{IV})$$

Из (III) и (IV) получим, что

$$P_r = \frac{20,32}{7} \text{ т, } P_t = \frac{15,24}{7} \text{ т.}$$

Дополнительное напряжение в тяге

$$\frac{20,320}{7} \times \frac{4}{\pi 2,54^2} = 572 \text{ кг/см}^2$$

и уменьшение сжимающего напряжения в трубе

$$\frac{15,240}{7} \times \frac{1}{\pi 7,62 \cdot 0,317} = 286 \text{ кг/см}^2.$$

II. Температура повышается на 50° , тогда относительное удлинение тяги, если оно ничем не стеснено, будет

$$50 \times 1,10 \times 10^{-5},$$

а относительное удлинение трубы, если оно ничем не стеснено, будет

$$50 \times 1,80 \times 10^{-5}.$$

Через l , как и раньше, обозначим эффективную длину тяги и трубы. Повышение температуры фактически укорачивает тягу на

$$50 \times 10^{-5} (1,80 - 1,11) l = 34,5 \times 10^{-5} l.$$

Согласно § 78, подставим эту величину вместо λ в уравнение (I) § 75. Мы получим (индексы r и t имеют прежние значения):

$$34,5 \times 10^{-5} l = (a_r + a_t) P = l P \left(\frac{1}{E_r A_r} + \frac{1}{E_t A_t} \right). \quad (\text{VI})$$

Последнее равенство получится, когда для a_r , a_t мы подставим выражения (2). Здесь P обозначает *дополнительную* силу растяжения

в тяге и *дополнительную* силу сжатия в трубе, возникающие при повышении температуры.

Записав (VI) в форме

$$34,5 \times 10^{-5} = \frac{P}{E_r A_r} \left(1 + \frac{E_r A_r}{E_t A_t} \right) = \frac{P}{E_r A_r} \left(1 + \frac{4}{3} \right)$$

{ последнее равенство имеет место согласно (III) мы для дополнительного растягивающего напряжения в тяге имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P}{A_r} &= \frac{3}{7} E_r \times 31,5 \times 10^{-6} = \\ &= \frac{3}{7} 21 \cdot 34,5 = 311 \text{ кг/см}^2 \\ &= \frac{3}{7} 21 \frac{34,5}{1000} = 0,311 \text{ т/см}^2. \end{aligned}$$

Соответствующее увеличение сжимающего напряжения в трубе будет

$$\frac{P}{A_t} = 0,311 \frac{A_r}{A_t} = 0,311 \frac{2}{3} = 0,207 \text{ т/см}^2.$$

(VII)

(II), (V) и (VII) дают решение нашей задачи. Приведем сводку имеющихся напряжений (в кг/см^2).

	В трубе (сжимающее напряжение)	В тяге (растягивающее напряжение)
Начальные напряжения (вследствие затяжки болтов) . .	310	464
I. После приложения силы растяжения 5,08 т (температура остается постоянной) . . .	310 — 286 = 24	464 + 572 = 1036
II. После повышения температуры на 50°C (сила растяжения остается)	24 + 207 = 231	1036 + 311 = 1347

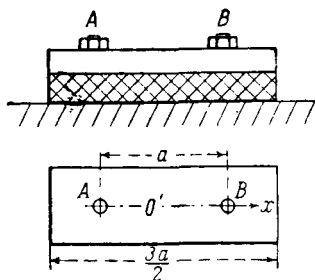
Другие примеры тел с начальными напряжениями

80. Соображения, подобные тем, которые были приведены в предшествующих параграфах, играют существенную роль во многих задачах техники. Например, если нужно к жесткому фундаменту прикрепить болтами машину, то обычно

между двумя жесткими поверхностями помещают упругие прокладки. Это делают для того, чтобы прокладки (вследствие испытываемого ими при затянутых гайках сжатия) продолжали вызывать растяжение в болтах, даже тогда, когда вследствие вибраций и т. п. одна или большее число гаек слегка ослабнет. В первых четырех из помещенных ниже примеров основным условием является жесткость фундамента и детали, присоединяемой к нему болтами. Это условие дает одно (кинематическое) соотношение между удлинениями болтов и величиной сжатия прокладки. Другие соотношения получаются из законов статики и упругих свойств элементов, входящих в ту или иную задачу.

Примеры

1. (Oxford F.E.E.S. 1934.) Жесткая прямоугольная плита прикреплена к фундаменту двумя одинаковыми и симметрично расположенными болтами (см. рис.). Между плитой и фундаментом



имеется лист упругой прокладки. Если каждый из болтов затянут так, что в нем развивается сила растяжения T , то удлинение каждого болта e_1 , а сжатие прокладки e_2 .

Показать, что если один из болтов затянуть сильнее, так что сила растяжения в нем станет $T(1 + \lambda)$, то сила растяжения в другом болте возрастет на

$$\frac{\lambda T}{7 + 6 \frac{e_1}{e_2}}$$

(Весом плиты и болтов можно пренебречь.)

[Неодинаковые растяжения в болтах вызовут наклон плиты. Соображения симметрии показывают, что короткая сторона прямоугольника останется параллельной фундаменту. Ось Ox проведем через центры болтов, начало O поместим посредине между ними. Пусть сжатия прокладки в точках A и B после того, как болт B затянут, будут соответственно e_A и e_B . Сжатие в прокладке на расстоянии x от O будет

$$\frac{1}{2}(e_A + e_B) + \frac{x}{a}(e_B - e_A).$$

Таково «кинематическое соотношение». Вся сила, с которой прокладка действует на плиту, равна:

$$k \int_{-\frac{3}{4}a}^{\frac{3}{4}a} \left\{ \frac{1}{2}(e_A + e_B) + \frac{x}{a}(e_B - e_A) \right\} dx = \frac{e_A + e_B}{e_1} T, \quad (I)$$

где

$$\frac{3a}{2} k e_2 = 2T.$$

Тогда как момент сжимающих сил, с которым прокладка действует на плиту относительно оси Oy , перпендикулярной Ox , будет:

$$k \int_{-\frac{3}{4}a}^{\frac{3}{4}a} \left\{ \frac{1}{2}(e_A + e_B) + \frac{x}{a}(e_B - e_A) \right\} x dx = \frac{3}{8} \frac{e_B - e_A}{e_2} a T. \quad (II)$$

Пусть $T(1+\mu)$ — сила растяжения в болте A после того как затянут болт B . Тогда из (I) и (II) мы имеем:

$$\frac{e_A + e_B}{e_2} = 2 + \lambda + \mu, \quad \frac{3}{4} \frac{e_B - e_A}{e_2} = \lambda - \mu. \quad (III)$$

Разность $(e_2 - e_A)$ представляет собой *уменьшение* сжатия прокладки, а также *увеличение* удлинения болта в A . Удлинение e_1 болта соответствует силе T . Отсюда

$$\mu T = \frac{e_2 - e_A}{e_1} T. \quad (IV)$$

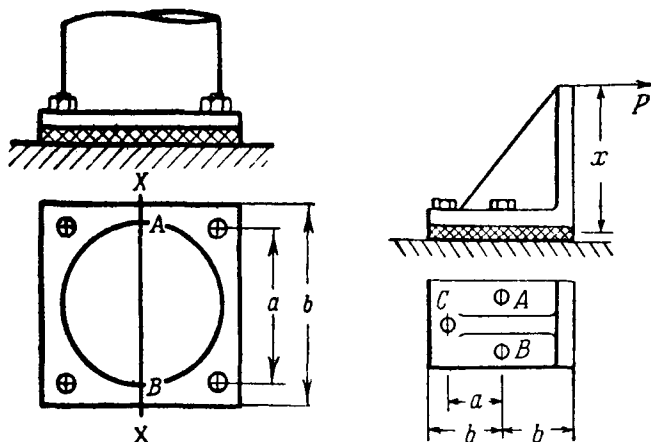
Исключая e_A и e_B из (III) и (IV), мы получим приведенный выше результат.]

2. (Самб. M.S.T. 1932.) Вертикальная колонна имеет в своем основании жесткую квадратную плиту, которая, как показано на рисунке, прикрепляется четырьмя одинаковыми, симметрично расположенными болтами к жесткому фундаменту. Между плитой и фундаментом имеется лист упругой прокладки. Если каждый из болтов затянут так, что в нем развивается сила T , то удлинение каждого болта e_1 . Колонна удерживает вертикальную нагрузку W . Сжатие прокладки вследствие действия W и растягивающих сил в болте равно e_2 .

Предполагая, что болты остаются затянутыми и прокладка сжатой, показать, что если линия действия силы сдвинется по

горизонтали на расстояние x в плоскости XX , то растягивающая сила в каждом болте изменится на величину

$$\frac{Wax}{2a^2 + \frac{b^2}{6} \frac{e_1}{e_2} \left(\frac{W}{T} + 4 \right)}$$



Влиянием отверстий для болтов в прокладке можно пренебречь и можно принять, что болты испытывают чистое растяжение.

3. (Camb. M.S.T. 1932.) Скоба, как показано на рис., прикреплена тремя одинаковыми болтами к жесткому фундаменту. Горизонтальная сторона скобы прямоугольная и покоится на упругой прокладке в виде пластинки. Вначале болты A и B растянуты так, что сила растяжения в них T . Эта сила вызывает удлинение e_1 в болтах и равномерное сжатие e_2 в прокладке. Болт C затянут точно так же. Показать, что сила P , приложенная к скобе, как показано на рисунке, вызовет растяжение в болте C , даваемое формулой

$$\frac{Px}{e_1} \frac{a(e_1 + e_2)}{\left[a^2 \left(1 + \frac{e_2}{e_1} \right) + b^2 \left(1 + \frac{2e_1}{3e_2} \right) \right]}$$

Влиянием отверстий для болтов в прокладке можно пренебречь и можно принять, что болты находятся в состоянии чистого растяжения, а прокладка всюду в сжатом состоянии.

4. (Самб. М. С. Т. 1931.) Цокольная плита машины покоится на четырех упругих шайбах, расположенных по углам прямоугольника $ABCD$, и прикрепена к бетонному фундаменту болтами, проходящими сквозь шайбы. Вначале каждый из болтов находился под действием растягивающей силы T . Удлинение болта на единицу растягивающей силы равно одной четвертой укорочения шайбы на единицу сжимающей силы. Пусть гайка в A удалена. Показать, что растягивающие силы в болтах B , C и D станут соответственно $\frac{3}{2}T$, $\frac{1}{2}T$ и $\frac{3}{2}T$.

[Следует предположить, что плита и бетонный фундамент жестки, по сравнению с болтами и шайбами, и что все шайбы остаются в состоянии сжатия.]

5. (Самб. М. С. Т. 1930.) Жесткость при изгибе вертикальной трубы AB , имеющей длину l и площадь поперечного сечения A_s , увеличена с помощью тросов, соединяющих концы трубы с четырьмя расходящимися в стороны рычагами в ее середине. Рычаги имеют равную длину и расположены так, что составляют друг с другом равные углы (см. рис.).

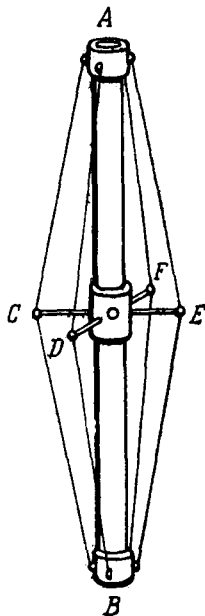
Тросы, соединяющие концы рычагов с концами трубы, наклонены под углом α к вертикали. Тросы имеют площадь поперечного сечения, равную A_w . Первоначально тросы растягиваются до одинакового натяжения и, следовательно, вызывают начальную силу сжатия P_0 в трубе. Показать, что если к трубе, закрепленной таким образом, приложить в A и B дополнительную силу давления P , то сила сжатия в трубе будет

$$P_0 + \frac{P}{1 + 4 \frac{E_w A_w}{E_s A_s} \cos^2 \alpha},$$

где E_w и E_s соответственно модули Юнга материалов тросов и трубы. Рычаги предполагаются абсолютно жесткими.

Первая теорема о минимуме упругой энергии

81. Теперь попытаемся установить ряд общих положений для систем с начальными напряжениями. Эти положения и



следствия из них были рассмотрены в §§ 74—77 на частном примере. Докажем следующую теорему¹⁾.

Если в теле, подчиняющемся закону Гука, заданы перемещения, то деформация, соответствующая конфигурации равновесия, обладает меньшей упругой энергией, чем деформация, соответствующая всякой другой конфигурации (не удовлетворяющей условиям равновесия), в которой перемещения имеют те же заданные значения.

Точки, в которых заданы перемещения, могут лежать и внутри и на поверхности тела. Их может быть как мало, так и много. Например, напряжение можно вызвать, задав перемещения каких-либо двух точек тела²⁾, но равным образом его можно вызвать, задав перемещение *каждой* точки поверхности тела.

Обратившись к § 19 главы I, мы видим, что эта теорема является не чем иным, как специальным случаем высказанного там общего принципа механики, который говорит, что полная потенциальная энергия какой-либо системы имсет минимальное значение тогда, когда эта система находится в равновесии. Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — заданные перемещения. Если они сохраняют постоянные значения, то рассматриваемые точки остаются неподвижными, и потенциальная энергия системы может изменяться только при изменении упругой энергии. Отсюда по общей теореме механики следует, что упругая энергия будет иметь минимальное значение в конфигурации равновесия.

82. *Если предположить, что рассматриваемое тело не имеет начальных напряжений*, то можно доказать теорему, не обращаясь к общему принципу механики. Доказательство ведется следующим образом.

Будем пользоваться обозначениями гл. I. Пусть $1, 2, 3, \dots, n$ — точки, в которых перемещения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ имеют заданные значения, а P_1, P_2, \dots, P_n «соответствующие» им силы, когда система находится в конфигурации равновесия. При всякой иной конфигурации, допускаемой задан-

¹⁾ Ср. Ляв, цитир. соч., § 119.

²⁾ Перемещение, задаваемое одной точкой, вызывает просто движение тела, как абсолютно твердого.

ными условиями, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ будут иметь те же значения, что и раньше, но величины P_1, P_2, \dots, P_n , вообще говоря, изменятся. И тогда для сохранения равновесия будут необходимы дополнительные силы, приложенные в других точках. Пусть P_1', P_2', \dots, P_n' будут измененные значения P_1, P_2, \dots, P_n , а P_r', P_s', \dots будут дополнительные силы. Через $\delta_r', \delta_s', \dots$ обозначим «соответствующие» перемещения точек r, s, \dots , т. е. тех точек, в которых приложены дополнительные силы во второй конфигурации. Через $\delta_r, \delta_s, \dots$ обозначим перемещения тех же точек в первой конфигурации (конфигурации равновесия). Полную систему сил и перемещений для двух конфигураций можно теперь записать следующим образом:

	Точки	1, 2, ..., n	r, s, ...
Первая конфигурация (конфигурация равновесия)	Силы	P_1, P_2, \dots, P_n	0, 0, ...
	Перемещения	$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$	$\delta_r, \delta_s, \dots$
Вторая конфигурация	Силы	P_1', P_2', \dots, P_n'	P_r', P_s', \dots
	Перемещения	$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$	$\delta_r', \delta_s', \dots$

Применяя теорему взаимности (глава I, § 12), мы получаем соотношение

$$P_1' \delta_1 + P_2' \delta_2 + \dots + P_n' \delta_n + (P_r' \delta_r + P_s' \delta_s + \dots) = \\ = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n + (0 \times \delta_r' + 0 \times \delta_s' + \dots). \quad (I)$$

Согласно (11) главы I, упругая энергия, запасенная в первой конфигурации (конфигурации равновесия), будет:

$$U_0 = \frac{1}{2} [P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n]. \quad (II)$$

Упругая энергия, запасенная во второй (или окончательной) конфигурации, будет:

$$U = \frac{1}{2} [(P_1' \delta_1 + P_2' \delta_2 + \dots + P_n' \delta_n) + \\ + (P_r' \delta_r' + P_s' \delta_s' + \dots)]. \quad (III)$$

Вычитая одно из другого и используя (I), мы найдем, что

$$U - U_0 = \frac{1}{2} [P'_r(\delta'_r - \delta_r) + P'_s(\delta'_s - \delta_s) + \dots]. \quad (7)$$

$(\delta'_r - \delta_r)$, $(\delta'_s - \delta_s)$, ... являются (по принципу суперпозиции) перемещениями, которые «соответствовали» P'_r , P'_s , ..., если эти силы были бы приложены к первоначально недеформированному телу в то время, как точки под номерами 1, 2, ..., n оставались бы неподвижными. Поэтому выражение в правой части (7) представляет собой упругую энергию, которая была бы запасена телом при только что указанных условиях. Известно, что упругая энергия существенно положительная величина (ср. § 13). И, следовательно, из (7) мы имеем $U > U_0$. Если мы совместно с конфигурацией равновесия рассмотрим любую возможную конфигурацию, не удовлетворяющую условиям равновесия, то получим точно такое же неравенство.

Таким образом U_0 представляет собой минимальное значение упругих энергий, соответствующих всем возможным деформациям, удовлетворяющим заданным условиям. Теорема доказана.

Пример

6. Плоская ферма, показанная на рисунке, имеет в узлах шарниры без трения и опирается в A и C . Стержни AB, BC, DE имеют одну и ту же длину и абсолютно жестки. Четыре наклонных элемента одинаковы как по длине, так и по упругим свойствам.

Показать, что если точке B дается вертикальное перемещение δ , то узлы D, E переместятся в том же направлении на расстоянии $\frac{1}{2} \delta$.

[Из симметрии видно, что D и E переместятся вертикально и на одинаковую величину δ' . Так как укорочения AD, EC и удлинения DB, BE будут пропорциональны δ' и $\delta - \delta'$, то упругие энергии будут пропорциональны δ'^2 и $(\delta - \delta')^2$. Согласно теореме δ' должно иметь то значение, при котором $\{\delta'^2 + (\delta - \delta')^2\}$ минимально].

Применение к упругой энергии, запасенной «начальными напряжениями»

83. Уравнение (7) предыдущего параграфа по форме вполне аналогично уравнению (5) из § 77. Поэтому вывод § 77, касающийся частной системы с начальными напряжениями, применим к системам с начальными напряжениями вообще, *если только их можно ввести в область применимости предыдущей теоремы.*

В § 74 мы заметили, что энергию, запасенную в результате начальных напряжений, можно возратить, если тело разрезать подходящим образом. Ясно, что наоборот можно осуществить условия начальных напряжений, если разрезанному телу задать подходящим образом выбранные перемещения. Эти перемещения надо задавать так, чтобы было возможно соединение отделенных поверхностей¹⁾. Так, в задаче, данной на рис. 27, мы предполагали, что B вначале соединено с A только на левом конце. Получающееся при этом условие для возникновения начального напряжения можно представить себе в виде задания перемещения λ на правом конце B при условии, что правая крышка C остается неподвижной, т. е. при условии, что заданное перемещение правого конца A равно нулю.

Рассмотрим тело (рис. 30), которое с помощью подходящим образом выбранных разрезов освобождено от начальных напряжений. Каждую пару точек на противоположных сторонах разреза, как например A, B , которые вначале соприкасались, можно опять привести в соприкосновение приложением двух равных и противоположно направленных сил, образующих «растягивающее усилие» нужной величины. Если все такие пары точек привести в соприкосновение, то

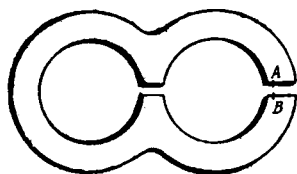


Рис. 30.

¹⁾ Такие деформации V. Volterra назвал *distorsioni*. Им разработана общая теория этого вопроса. Ляв (цит. соч., добавление к главам VIII и IX) называет их «дислокациями»,

мы фактически получим тело с начальными напряжениями. Начальные напряжения, полученные таким путем, будут теми же, что и вначале. Таким образом, мы видим, что тело с начальными напряжениями эквивалентно телу *без начальных напряжений*, подверженному действию системы самоуравновешивающихся растягивающих сил (или в специальном случае сжимающих сил). Поведение этого тела под действием внешних сил будет точно представляться последней системой растягивающих (или сжимающих) сил, *если последняя всегда такова, что входящие в нее силы не допускают никакого изменения в «соответствующих» перемещениях.*

84. Пусть в уже ненапряженном, в результате проведения разрезов, теле λ_1 представляет собой расстояние между какими-либо двумя точками A, B (рис. 30), которые до разрезания были в соприкосновении. Пусть T_1 — величина растягивающей силы, приложенной в этих точках тогда, когда все отделенные поверхности приведены в соприкосновение. В соответствии с § 29 главы I T_1 и другие растягивающие силы, нужные для образования конфигурации с начальными напряжениями, скажем, T_2, T_3, \dots, T_n , можно рассматривать как «силы», а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ как величины «соответствующих» им перемещений. Применим (7) § 82 к введенным силам и перемещениям. Силы P_1, P_2, \dots, P_n § 82 будем интерпретировать как наши растягивающие силы. Так что P_1 теперь представляет собой T_1 , а δ_1 — λ_1 . Таким образом, «первая конфигурация» § 82 представляет собой состояние при начальном напряжении. Это первоначальное состояние нарушалось проведением разрезов, но оно было восстановлено, когда зазоры, появившиеся в результате разрезов, были закрыты.

Во «второй» (или окончательной) конфигурации § 82 перемещения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ остаются без изменения, но действуют добавочные силы (P'_r, P'_s, \dots), а прежние силы P_1, P_2, \dots, P_n изменяют свои значения. Согласно проводимой нами интерпретации величин $P_1, \dots, \delta_1, \dots$, тело с начальными напряжениями в этой конфигурации подвержено действию внешних сил P'_r, P'_s, \dots при этом, так как $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ все еще имеют значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, зазоры закрыты. Естественно ожидать, что растягивающие силы, нужные для сохранения их закрытыми, в случае действия сил P'_r, P'_s, \dots будут иметь значения, от-

личные от прежних значений, которые они имели когда P'_r, P'_s, \dots не действовали.

После всего сказанного уравнение (7) можно записать в форме

$$U = U_0 + U_1, \quad (8)$$

где U обозначает полную упругую энергию, запасенную в теле с «начальными напряжениями» после приложения внешних сил P'_r, P'_s, \dots . U_0 обозначает упругую энергию только начальных напряжений, равную:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum (T_1 \lambda_1) \quad (9)$$

и U_1 обозначает упругую энергию, которая была бы запасена в теле в результате действия P'_r, P'_s, \dots при отсутствии начальных напряжений.

85. U_1 — обязательно положительная величина, и мы, следовательно, для тел с начальными напряжениями доказали неравенство $U > U_0$. Уравнение (8) является обобщением (5) из § 77. Как теперь показано, частный вывод § 77 сохраняется для систем с начальными напряжениями вообще. То-есть, если имеется некоторое тело с начальными напряжениями, то *энергия начальных напряжений* (а именно, энергия, запасенная в теле до того как на него подействовали внешние силы) *всегда меньше, чем всякая другая энергия, которая может быть запасена в том же теле при условии сохранения связей между его различными частями.*

Мы кроме того попутно установили в § 84, что принцип суперпозиции имеет место для тел с начальными напряжениями вообще (ср. § 77). Наконец, уравнение (9) § 84 является обобщением (4).

86. Для иллюстрации теоремы рассмотрим следующий пример (*выпускные экзамены в Оксфорде, 1932 г.*). Квадратная ферма $ABCD$ (рис. 31) составлена из шести стержней. Стержни имеют одинаковую площадь поперечного

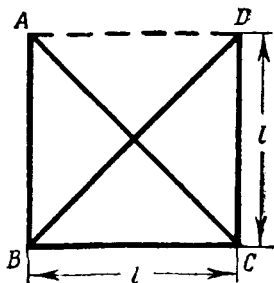


Рис. 31.

сечения a . Когда последняя сторона AD помещалась на свое место, то было обнаружено, что она длиннее остальных на величину λ . AD была силой установлена в нужное положение и вызвала в конструкции напряжения. Найти усилия во всех элементах фермы, предполагая, что потери устойчивости не произошло.

Из симметрии ясно, что полные удлинения AB и CD имеют одно и то же значение. Пусть ε_1 — полное удлинение AB и CD , ε_2 полное удлинение BC , а ε_3 — полное увеличение расстояния между A и D . Тогда общая формула (13) главы II для полного удлинения AC или BD , обозначенного через ε , дает величину:

$$\varepsilon V \sqrt{2} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} l + \varepsilon_1 l,$$

так что:

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2V\sqrt{2}}. \quad (III)$$

Полное удлинение, которое должен испытывать стержень AD , после установки на место равно

$$\varepsilon_3 - \lambda. \quad (IV)$$

Полную упругую энергию в собранной (и имеющей начальные напряжения) ферме можно, следовательно, записать так:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{Ea}{l} \left[2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + (\varepsilon_3 - \lambda)^2 + 2 \frac{\varepsilon^2}{V\sqrt{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Ea}{l} \left[2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + (\varepsilon_3 - \lambda)^2 + \frac{2}{V\sqrt{2}} \left(\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2V\sqrt{2}} \right)^2 \right]. \quad (V) \end{aligned}$$

Согласно теореме § 85, удлинения должны иметь те величины, при которых U минимально. Таким образом, для определения их мы имеем соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3} = 0$$

и мы получаем, что

$$4(1 + V\sqrt{2})(\varepsilon_3 - \lambda) + \lambda = 0. \quad (VI)$$

Отсюда, используя (IV), мы найдем, что полное укорочение AD

$$\lambda - \varepsilon_3 = \frac{\lambda}{4(1 + V\sqrt{2})}. \quad (VII)$$

А тогда сила сжатия в AD равна

$$Ea \frac{\lambda - \varepsilon_3}{l} = \frac{Ea\lambda}{4l(1 + \sqrt{2})}.$$

*Теорема о влиянии связей

87. Доказательство, в общем аналогичное доказательству § 82, дает возможность установить важную теорему о связях, не позволяющих перемещаться отдельным точкам нагруженного тела. Эта теорема была установлена на *выпускных экзаменах в Оксфорде* в 1939 г. в общих чертах следующим образом.

В двух последовательных опытах исследовалось первоначально ненапряженное тело, материал которого подчинялся закону Гука:

(1) в точках тела, обозначенных a, b, \dots, k , прикладывались заданные силы P_a, P_b, \dots, P_k ;

(2) точки тела, обозначенные p, q, \dots, w , получали заданные перемещения $\delta_p, \delta_q, \dots, \delta_w$.

Далее допускалось, что в каждом из опытов действуют связи, препятствующие перемещениям некоторых точек тела, которые обозначались $1, 2, \dots, n$. Точки $1, 2, \dots, n$ не входили ни в ряд a, b, \dots, k , ни в ряд p, q, \dots, w .

Требовалось показать, что после введения связей полная упругая энергия U , запасаемая в теле при условиях опыта (1), или остается неизменной, или уменьшается, а полная упругая энергия, запасаемая в теле при условиях опыта (2), или остается неизменной, или увеличивается.

Составим выражение для полной упругой энергии, запасаемой в теле, предполагая, что тело находится одновременно и в условиях опыта (1) и в условиях опыта (2).

Рассмотрим сначала тот случай, когда связи не действуют. Введем обозначения $\delta_a, \delta_b, \dots, \delta_k$ для перемещений, соответствующих P_a, P_b, \dots, P_k ; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ для перемещений точек $1, 2, \dots, n$, и P_p, P_q, \dots, P_w для сил, соответствующих перемещениям $\delta_p, \delta_q, \dots, \delta_w$. Связи в этой конфигурации отсутствуют, следовательно $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$. Полная упругая энергия будет:

$$U_0 = \frac{1}{2} [(P_a \delta_a + P_b \delta_b + \dots + P_k \delta_k) + (P_p \delta_p + P_q \delta_q + \dots + P_w \delta_w)]. \quad (1)$$

Теперь допустим, что связи действуют. Введем обозначения: $\delta'_a, \delta'_b, \dots, \delta'_k$ для изменившихся перемещений, соответствующих P_a, P_b, \dots, P_k ; P'_1, P'_2, \dots, P'_n для реакций связей в точках 1, 2, ..., n и P'_p, P'_q, \dots, P'_w для изменившихся сил, соответствующих перемещениям $\delta_p, \delta_q, \dots, \delta_w$. Связи в этой новой конфигурации действуют, следовательно, $\delta'_1 = \delta'_2 = \dots = \delta'_n = 0$. И полная упругая энергия будет:

$$U' = \frac{1}{2} [(P_a \delta'_a + P_b \delta'_b + \dots + P_k \delta'_k) + (P'_p \delta_p + P'_q \delta_q + \dots + P'_w \delta_w)]. \quad (II)$$

Обе системы сил и перемещений соответствуют конфигурации равновесия и, следовательно, согласно принципу суперпозиции, возможна третья конфигурация равновесия, в которой силам 0, 0, ..., 0 соответствуют перемещения

$$\left. \begin{array}{l} (\delta_a - \delta'_a), (\delta_b - \delta'_b), \dots, (\delta_k - \delta'_k), \\ \text{перемещениям } 0, 0, \dots, 0 \text{ соответствуют силы} \\ (P_p - P'_p), (P_q - P'_q), \dots, (P_w - P'_w) \\ \text{и перемещениям } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \text{ соответствуют силы} \\ (-P'_1, -P'_2, \dots, -P'_n), \end{array} \right\} \quad (III)$$

остальные точки не нагружены.

Упругая энергия в этой третьей конфигурации будет:

$$U'' = -\frac{1}{2} (P'_1 \delta_1 + P'_2 \delta_2 + \dots + P'_n \delta_n). \quad (IV)$$

Вычитая (II) из (I), мы получим

$$U' - U_0 = \frac{1}{2} [\{ P_a (\delta'_a - \delta_a) + P_b (\delta'_b - \delta_b) + \dots + P_k (\delta'_k - \delta_k) \} + \{ (P'_p - P_p) \delta_p + (P'_q - P_q) \delta_q + \dots + (P'_w - P_w) \delta_w \}]. \quad (V)$$

Применив теорему взаимности (§ 12) к первой и второй конфигурациям, мы будем иметь:

$$\begin{aligned} & (P_a \delta'_a + P_b \delta'_b + \dots + P_k \delta'_k) + (P_p \delta_p + P_q \delta_q + \dots + P_w \delta_w) + 0 = \\ & = (P_a \delta_a + P_b \delta_b + \dots + P_k \delta_k) + (P'_p \delta_p + P'_q \delta_q + \dots + P'_w \delta_w) + \\ & + (P'_1 \delta_1 + P'_2 \delta_2 + \dots + P'_n \delta_n). \end{aligned} \quad (VI)$$

(1) Если заданы только силы, действующие в точках a, b, \dots, k , но не заданы перемещения в точках p, q, \dots, w , то все силы типа P_p и P'_p равны нулю, и мы из (V) получим:

$$\begin{aligned} U' - U_0 &= \frac{1}{2} \{ P_a (\delta'_a - \delta_a) + P_b (\delta'_b - \delta_b) + \dots + P_k (\delta'_k - \delta_k) \} = \\ &= \frac{1}{2} (P'_1 \delta_1 + P'_2 \delta_2 + \dots + P'_n \delta_n) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[согласно (VI)]} \\ \text{[согласно (IV)].} \end{array} \right\} \text{(VII)} \\ U' - U_0 &= -U'' \end{aligned}$$

(2) Если, с другой стороны, заданы только перемещения в точках p, q, \dots, w , а все силы P_a, P_b, \dots, P_k и P'_a, P'_b, \dots, P'_k равны нулю, то из (V) мы получим:

$$\begin{aligned} U' - U_0 &= \frac{1}{2} \{ (P'_p - P_p) \delta_p + (P'_q - P_q) \delta_q + \dots + (P'_w - P_w) \delta_w \} = \\ &= -\frac{1}{2} (P'_1 \delta_1 + P'_2 \delta_2 + \dots + P'_n \delta_n) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[согласно (VII)]} \\ \text{[согласно (IV)].} \end{array} \right\} \text{(VIII)} \\ U' - U_0 &= U'' \end{aligned}$$

Упругая энергия необходимо положительная величина (§ 13). Используя это из (VII), получим, что $U' \leq U_0$ (заданы только силы), а из (VIII), что $U' \geq U_0$ (заданы только перемещения). Неравенства превращаются в равенства только при $U'' = 0$. Нами доказано то, что требовалось.

Вторая теорема о минимуме упругой энергии («вторая теорема Кастилиано»)

88. Возвратимся к § 84, где мы для всякого тела, подчиняющегося закону Гука и имеющего начальные напряжения, установили соотношение

$$U = U_0 + U_1, \quad (8) \text{ bis}$$

где U полная упругая энергия, запасенная в теле, после приложения данной системы внешних сил;

U_0 — упругая энергия, запасенная в теле до того, как были приложены внешние силы (энергия начальных напряжений);

U_1 — добавок к упругой энергии начальных напряжений, вызванный приложением внешних сил, — величина независимая от значения U_0 . То-есть, если тело не было бы первоначально напряжено и подвергалось бы действию тех же внешних сил, то U_1 представляло бы собой значение полной упругой энергии, запасенной при этом в теле.

В § 85 мы из формулы (8) получили неравенство $U > U_0$. Откуда мы вывели, что деформации, вызванные начальными напряжениями, при отсутствии внешних сил и не нарушающие непрерывности в теле с начальными напряжениями всегда таковы, что запасенная в теле упругая энергия начальных напряжений имеет минимальное значение. Но равным образом, так как U , U_0 , U_1 обязательно положительные величины, из формулы (8) можно получить неравенство

$$U \geq U_1. \quad (10)$$

Другими словами, значение U (полной упругой энергии при действии заданных внешних сил) в теле с начальными напряжениями всегда больше, чем в теле без начальных напряжений. U принимает свое минимальное значение, при $U_0 = 0$, т. е. при отсутствии начальных напряжений.

89. Фактически¹⁾ это «вторая теорема Кастилиано», названная им «теоремой наименьшей работы». Ниже мы будем ссылаться на нее, называя ее «второй теоремой о минимуме упругой энергии».

Очень важно, чтобы читатель понял разницу между ней и «первой теоремой», сформулированной в § 81.

В «первой теореме о минимуме упругой энергии» некоторые точки упругого тела получали заданные перемещения. При ее доказательстве мы рассматривали все виды деформаций, которые удовлетворяли этому поставленному условию. Из всех возможных конфигураций (т. е. конфигураций, совместных с поставленным условием) только одна не требует наличия внешних сил для сохранения равновесия²⁾.

¹⁾ Ср. § 91 и подстрочное примечание.

²⁾ В §§ 14—15 главы I было показано, что может существовать только одна конфигурация равновесия, соответствующая заданному характеру начальных напряжений.

Отсюда и получается, что во всех других конфигурациях упругой энергии запасается больше, чем в «конфигурации равновесия», которая не требует наличия внешних сил для сохранения равновесия.

Во «второй теореме о минимуме упругой энергии» в некоторых точках тела действуют *заданные силы*. При ее доказательстве мы рассматриваем *только такие конфигурации, которые можно удержать в равновесии этими силами*. Разница между этими конфигурациями может происходить только от разницы в начальных напряжениях. Мы показали, что полная упругая энергия при наличии начальных напряжений будет всегда больше. Поэтому она является наименьшей в той конфигурации, в которой не имеется начальных напряжений.

Понятно, что обе теоремы совершенно различны и что каждая из них применяется в своем частном классе задач. Так, когда заданы перемещения (а также недостаточные или избыточные длины лишних стержней, влекущие за собой возникновение начальных напряжений, ср. § 86), мы можем обратиться к первой теореме. Вторая теорема применяется тогда, когда заданы силы.

90. Для того чтобы иллюстрировать приложение «второй теоремы Кастилиано», мы рассмотрим следующий пример (*выпускные экзамены в Кембриджском университете, 1910 г.*).

Ферма, показанная на рис. 32, содержит лишний стержень. Стержни фермы имеют одинаковые площади поперечных сечений, сделаны из одного и того же материала и соединены между собой шарнирами. Требуется найти усилие в нижнем горизонтальном стержне.

Обозначим через T растягивающую силу в нижнем горизонтальном стержне. Если предположим, что нижний стержень удален, а в точках A и B приложены равные и противоположные горизонтальные силы T , то усилия в других (кроме AB) стержнях можно выразить как функции T .

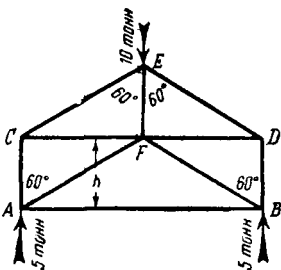


Рис. 32.

Согласно принципу суперпозиции можно рассмотреть действие наших горизонтальных сил T отдельно от действия всех заданных вертикальных сил. Затем рассмотреть действие только одних вертикальных сил и соединить оба результата.

Взяв отдельно горизонтальные силы, мы без труда найдем, что они вызывают те усилия, которые приведены во втором и третьем столбцах приложенной таблицы.

Стержень	Вследствие горизонтальных сил		Вследствие вертикальных сил		Длина	Упругая энергия деформации, умноженная на $2E \frac{A}{h}$
	растягивающая сила	сжимающая сила	растягивающая сила	сжимающая сила		
AB	T	—	—	—	$2\sqrt{3} h$	$2\sqrt{3} T^2$
AC, BD	$\frac{T}{\sqrt{3}}$	—	—	5	h	$\left(5 - \frac{T}{\sqrt{3}}\right)^2$
AF, BF	—	$\frac{2T}{\sqrt{3}}$	0	0	$2h$	$\frac{8T^2}{3}$
CF, DF	—	T	$5\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3} h$	$\sqrt{3}(T - 5\sqrt{3})^2$
CE, DE	$\frac{2T}{\sqrt{3}}$	—	—	10	$2h$	$8\left(5 - \frac{T}{\sqrt{3}}\right)^2$
FE	—	$\frac{2T}{\sqrt{3}}$	0	0	h	$\frac{4T^2}{3}$

Аналогично можно рассмотреть вертикальные силы, и тогда мы заполним четвертый и пятый столбцы таблицы. Шестой и седьмой столбцы понятны без объяснений. Полная упругая энергия U для всей фермы (включая все стержни) будет:

$$\begin{aligned} \frac{2EAU}{h} = & 2\sqrt{3} T^2 + 2 \left(25 - \frac{10T}{\sqrt{3}} + \frac{T^2}{3} \right) + \frac{16T^2}{3} + \\ & + 2\sqrt{3} (T^2 - 10\sqrt{3}T + 75) + 16 \left(25 - \frac{10T}{\sqrt{3}} + \frac{T^2}{3} \right) + \frac{4T^2}{3}. \end{aligned}$$

Условие минимума упругой энергии, а именно

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 0,$$

дает: $T \left(4\sqrt{3} + \frac{4}{3} + \frac{32}{3} + 4\sqrt{3} + \frac{32}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{20}{\sqrt{3}} + 60 + \frac{160}{\sqrt{3}}$
 или: $\left(2\sqrt{3} + \frac{19}{3} \right) T = 15(1 + \sqrt{3}),$

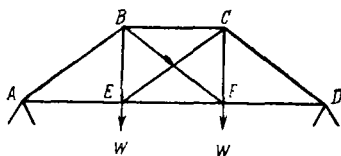
откуда окончательно мы имеем:

$$T = 4,18 \text{ т. [Ответ.]}$$

Примеры

7. (Самб. М. С. Т. 1933.) Шарнирная ферма, как показано на рисунке, опирается в точках *A* и *D* и несет одинаковые грузы *W* в *E* и *F*. Длины различных стержней равны

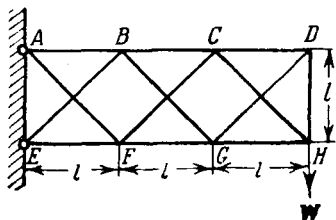
$$\begin{aligned} AE = EF = FD = BC = a, \\ BE = CF = h, \\ BF = CE = AB = CD = \\ = l = \sqrt{a^2 + h^2}. \end{aligned}$$



Площади поперечных сечений стержней *BF* и *CE* равны A_1 , а всех других стержней A_2 .

Показать, что грузы *W* в каждом из стержней *BF* и *CE* вызывают силу растяжения, равную

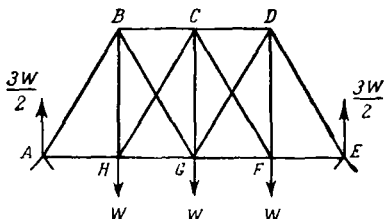
$$\frac{WA_1 h^2 l}{A_1(a^2 + h^2) + A_2 l^2}.$$



BC и *CD* равны $2A$. Площади поперечных сечений стержней *EF*, *FG* и *GH* равны $3A$. Все остальные стержни имеют площади поперечных сечений A . Показать, что растяжение в *DH* равно

$$\frac{12\sqrt{2} + 2}{24\sqrt{2} + 7} W.$$

8. (Самб. М. С. Т. 1930.) Консольная ферма прикреплена шарнирами к стене в *A* и *E* и удерживает вертикальную сосредоточенную силу *W*. Площади поперечных сечений стержней *AB*,



9. (Самб. М. С. Т. 1932.) В ферме, показанной на рисунке, имеется три равнобедренных треугольника *ABG*, *HCF* и *GDE*. Стержни *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *BH*, *CG*, *DF* имеют площади поперечных сечений $2a$. Площади поперечных сечений остальных стержней равны a .

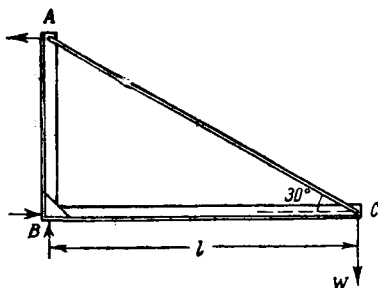
Рассматривая вертикали BH и DF как лишние стержни, показать, что они подвержены растяжению величины

$$\frac{42 + 6\sqrt{3}}{35 + 9\sqrt{3}} W.$$

(В следующих примерах упругую энергию изгиба можно получить методами главы II. Растягивающая сила в тяге берется за неизвестную, а ее значение получается из условия минимума *полной* упругой энергии.)

10. (Самб. М. С. Т. 1933.) Стальная рама, как показано на рисунке, состоит из двух балок AB и BC постоянного поперечного сечения, жестко соединенных в B , и тяги AC .

Рама в A и B удерживается силами, действующими так, как показано, и несет сосредоточенную силу W в C . Тяга имеет площадь поперечного сечения S .



Концы тяги присоединены к раме. Поперечное сечение каждой из балок при изгибе в плоскости ABC имеет момент инерции I .

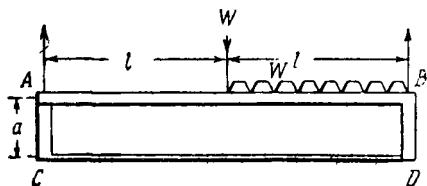
Пренебрегая эффектом сжатия балок, получить выражение для усилия в тяге вследствие действия силы W .

$$T = \frac{2W}{1 + 12(\sqrt{3} - 1)\frac{I}{l^2S}}.$$

Для случая $l = 120$ см, $S = 0,2$ см² и $I = 8$ см⁴ показать, что мы получим ошибку около 2,4 процента, если предположим, что в B балки соединены шарнирно.

11. (Самб. М. С. Т. 1932.) Балка AB постоянного поперечного сечения, как показано на рисунке, несет сосредоточенную силу W в середине и равную ей равномерно распределенную по половине пролета нагрузку.

Балка упрочнена скобами AC и BD , имеющими тот же, что и балка, момент инерции площади поперечного сечения и жестко прикрепленными к ней. Концы их шарнирно прикреплены к тяге CD .



Тягу можно считать нерастяжимой. Когда балка ненагружена, тяга не напряжена и не провисает.

Доказать, что растягивающая сила, возникающая в тяге от нагрузки, равна

$$\frac{5Wl^2}{4a^2 + 12al}$$

Влиянием на балку силы сжатия можно пренебречь.

91. Ни формулировка, ни доказательство второй теоремы Кастилиано, данные в § 88, не воспроизводят оригинальной работы Кастилиано¹⁾. Сущность доказательства Кастилиано можно передать (в наших обозначениях) следующим образом.

Пусть λ_1 на рис. 30 (как и в § 84) представляет собой расстояние между двумя точками A и B тела, освобожденного от начальных напряжений с помощью подходящим образом выбранных разрезов. Пусть T_1 представляет собой растягивающую силу, которую нужно приложить в этих точках для того, чтобы закрыть зазор и восстановить состояние начального напряжения. Пусть T_2, T_3, \dots, T_n представляют собой другие растягивающие силы того же рода, а $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ —

¹⁾ Две теоремы Кастилиано имеют фундаментальное значение в нашей науке. Очень трудно понять, почему упругисты — современники Кастилиано оставили без внимания его работы. Его имени нет в монументальной «History...» Todhunter and Pearson или в 11-м издании Encyclopaedia Britannica (Cambridge, 1910—1911).

Альберто Кастилиано, инженер, служивший на итальянских железных дорогах, впервые высказал свою «теорему наименьшей работы» в тезисах к дипломной работе в Турине в 1873 г. Теорема доказывалась прямым сравнением вычисленных результатов. Затем в январе и ноябре 1875 г. он представил в Туринскую Академию наук два мемуара, посвященных этой теме. Первый [Trans. Acad. Sci., Turin, 10 (1875), 380—423] дает исторический обзор задач и содержит частичные формулировки теоремы, которые дали Vène (1827) и Menabrea (1857). В этом же мемуаре теорема применяется к фермам и аркам. Второй [Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici, там же, 11 (1876), 127—286] содержит много стандартных задач теории сооружений; теорема наименьшей работы представлена как вывод первой теоремы Кастилиано. Рассуждения, в основном, аналогичны тем, которые излагаются в этом параграфе.

Идеи, содержащиеся в последнем мемуаре, были далее развиты Кастилиано в труде «Théorème de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications», Paris, (1879), который переведен на английский язык E. S. Andrews (Elastic Stresses in Structures) Scott, Greenwood & Son, London (1919).

расстояния между теми парами точек, которые они должны привести в соприкосновение. Пусть P_1, P_2, \dots обозначают данную систему внешних сил.

Как и в § 83 мы можем рассматривать тело с начальными напряжениями, подверженное действию внешних сил P_1, P_2, \dots , как эквивалентное первоначально ненапряженному телу, находящемуся под действием P_1, P_2, \dots и *одновременно под действием растягивающих сил* T_1, T_2, \dots, T_n . При этом следует наложить условие, что перемещения, соответствующие растягивающим силам, имеют величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Рассматриваемые с этой точки зрения растягивающие силы являются внешними силами. Если U — полная упругая энергия, запасенная в теле, то, согласно первой теореме Кастилиано,

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = \lambda_1, \quad \frac{\partial U}{\partial T_2} = \lambda_2, \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial T_n} = \lambda_n. \quad (11)$$

Т. е. деформации таковы, что упругая энергия, имеющая определенную величину, соответствующую заданным значениям T_1, T_2, \dots, T_n , удовлетворяет дифференциальным соотношениям (11).

Если все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю, т. е. рассматриваемое тело *не является* телом с начальными напряжениями, то эти соотношения дают

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial T_n} = 0. \quad (12)$$

Их можно сформулировать следующим образом. Упругая энергия имеет стационарное значение для малых изменений T_1, T_2, \dots, T_n . То, что это стационарное значение является *минимумом*, будет очевидно, если мы вспомним, что величина U не ограничена сверху. В доказательстве Кастилиано свойство минимума появляется как несколько искусственная интерпретация соотношений (12). Поэтому доказательство § 88¹⁾ имеет некоторые преимущества.

¹⁾ Это доказательство, повидимому, было дано впервые в статье «On Castigliano's Theorem of Least Work, and the Principle of Saint-Venant», опубликованной в *Philosophical Magazine*, 45 (1923), 193—212, (см. прим. на стр. 658).

Общие соотношения (11) были записаны Кастилиано в форме (13). Как легко видеть, (13) и (11) эквивалентны.

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \{U - (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_n T_n)\} = 0, \dots \quad (13)$$

Соотношения (13) можно рассматривать как обобщение соотношений (12). Соотношения (13) можно также установить с помощью доказательства, аналогичного тому, которое было приведено в § 88¹⁾.

Принцип Сен-Венана

92. Нами было доказано, что упругая энергия принимает наименьшее значение, удовлетворяющее условиям задачи в следующих случаях: (а) когда упругая энергия является следствием наложения заданных перемещений, (б) когда упругая энергия всецело зависит от начальных напряжений, т. е. когда не действуют внешние силы²⁾ и (с) когда она всецело зависит от внешних сил и тело вначале свободно от напряжений.

Более того, мы показали, что принцип суперпозиции сохраняется для сил, приложенных к телу с начальными напряжениями. Из принципа суперпозиции и из (с) следует, что *добавочные* перемещения, вызванные в теле с начальными напряжениями в результате действия внешних сил, будут такими, что соответствующая им упругая энергия имела бы наименьшее значение, *если эти перемещения возникли бы в теле той же формы, но без начальных напряжений*.

Все эти выводы имеют место для любого тела, подчиняющегося закону Гука, и не зависят от формы и размеров тела. Поэтому *стремление материалов всегда принять (в пределах заданных условий) конфигурацию, соответствующую минимальной упругой энергии*, мы можем рассматривать как общее свойство материалов, подчиняющихся закону Гука.

¹⁾ Ср. § 7 цитированной выше статьи из *Phil. Mag.*

²⁾ Случай (б) является частным случаем (с), ср. §§ 83 — 84.

93. Теперь рассмотрим длинный стержень или балку (не обязательно постоянного поперечного сечения или однородного материала), изгибаемую моментами, приложенными на концах. Моменты можно приложить бесконечным числом способов в соответствии с бесконечным числом способов распределения сил, дающих результирующую пару. Можно думать, что характер деформации будет различным в каждом случае. Но во всех случаях деформация определяется тем условием, что соответствующая ей полная упругая энергия деформации имеет наименьшее из возможных, удовлетворяющих наложенным условиям, значений. *Наложённые условия в каждом из наших случаев отличаются только в области приложения сил.* Для равновесия необходимо только, чтобы в средней части балки усилия имели заданную результирующую, т. е. момент заданной величины. Следовательно, в средней части балки деформация будет приблизительно такого типа, который требует наименьшего запаса упругой энергии, при условии передачи данного результирующего момента. Отсюда мы можем заключить, что деформация во всех рассматриваемых случаях будет приблизительно одна и та же в частях балки, не примыкающих непосредственно к концам, несмотря на то, что на концах она удовлетворяет специфическим условиям, характеризующим каждый частный случай.

Изложим это несколько иначе¹⁾. Предположим, что A представляет собой те части тела, в которых приложены силы, B — остальные части тела.

Условия равновесия требуют, чтобы результирующее усилие, развиваемое в B , имело определенную величину. Деформация определяется другим основным условием, а именно: полная упругая энергия, запасенная в A и B , должна иметь минимальное значение. Тогда, очевидно, что деформации, имеющие место в действительности в конфигурации равновесия, удовлетворяют несколько компромиссным между требованиями со стороны частей тела A и B условиям. Для того чтобы уменьшить до минимума упругую энергию, запасенную в A , реакции между A и B должны распределяться таким способом, характер которого зависит от распределения

¹⁾ Ср. § 8 цитированной выше статьи из *Phil. Mag.*

сил, приложенных к A . С другой стороны, требование части B (как бы ни были распределены силы в A) не изменяется, потому что B представляет собой первоначально свободное от напряжений тело, которое затем деформируется так, что запас упругой энергии, вызванный передачей данного результирующего усилия, является минимальным.

Процесс соединения этих двух условий, оканчивающийся действительной конфигурацией равновесия, мы образно можем представить себе как поединок между ненагруженными¹⁾ и нагруженными частями тела. Первые всегда борются за «стандартизацию», вторые для каждого заданного распределения сил, приложенных к ним, требуют специального решения. По мере того как от областей, в которых приложены силы, мы через последовательные сечения переходим к ненагруженной части тела B , мы замечаем, что все сильнее и сильнее становятся требования стандартизации. Поэтому деформация, независимо от способа распределения сил по поверхности нагруженной части A , все больше и больше приближается к некоторому стандартному типу.

94. Доказательства предшествующих параграфов сохраняются для любого типа нагрузки, имеющего одну и ту же результирующую силу в каждом сечении продолговатого тела. Обобщив наши результаты, мы приходим к доказательству принципа, данного Сен-Венаном²⁾. В последующих главах мы часто будем к нему обращаться.

Принцип известен как «принцип упругой равнозначности статически эквивалентных систем сил» или, короче, как «принцип Сен-Венана». Под статически эквивалентными системами подразумевают те системы, которые имеют одну и ту же результирующую. В предшествующем исследовании это были такие системы сил, которые, будучи приложены в A , вызывали передачу заданного результирующего

¹⁾ Т. е. теми частями, *внешние* поверхности которых свободны от нагрузки.

²⁾ Barre de Saint-Venant (1797—1886), биографическое подстрочное примечание помещено в § 332 (гл. XI). «Принцип» был установлен в его мемуаре о кручении (1855); ср. Ляв, Математическая теория упругости, § 89.

момента в В. Под «упругой равнозначностью» понимают эквивалентность в отношении вызванной деформации. Принцип Сен-Венана утверждает, что статически эквивалентные системы сил для практических целей могут рассматриваться, как упруго эквивалентные во всем теле за исключением той области, в которой приложены силы, и ее непосредственной окрестности. Другими словами, *силы, приложенные в некоторой части упругого тела, вызывают в теле напряжения, которые, за исключением области, близкой к этой части, почти полностью зависят от результирующей силы и очень мало—от распределения самих сил.*

Несколько другая формулировка принципа гласит:

Если к малой части тела приложена система сил, эквивалентная нулю, то деформации, вызванные ею в теле на большом по сравнению с линейными размерами этой области расстоянии, имеют пренебрежимо малую величину.

Это следует (по принципу суперпозиции) из прежнего утверждения (см. курсив), так как любую уравновешенную систему сил можно рассматривать как разность двух систем, имеющих одну и ту же результирующую. Там, где эффекты действия этих двух систем в основном тождественны, эффект действия их разности в основном равен нулю. Повидимому принцип Сен-Венана, как первоначально был предложен, так и сейчас еще остается без строгого доказательства. Но предшествующие рассуждения показывают, что он имеет прочное теоретическое обоснование.

Для инженера он очень ценен. Известно, что различные способы приложения заданного усилия вызывают в нагруженном теле различные деформации. Согласно же принципу Сен-Венана эта разница неощутима во всем теле за исключением ограниченной области и поэтому имеет для практики малое значение. Определяя деформации, являющиеся следствием заданных сил, мы можем заменить эти силы любой «статически эквивалентной» системой и притти к практически верному решению. Статически эквивалентную систему можно выбрать наиболее удобным для данной задачи образом. На этом основан известный «полуобратный» метод Сен-Венана решения задач теории упругости. Он будет изложен в последующих главах.

Обоснование нашей формулы изгиба и т. д.

95. Возвратимся к доказательству § 93. Рассмотрим балку постоянного поперечного сечения, сделанную из однородного материала. В этом случае условия для деформации, соответствующей минимальному значению упругой энергии, одинаковы для всех элементов длины ненагруженной части балки.

А поэтому мы можем ожидать, что усилия во всех сечениях средней части балки (B) будут одинаковы по величине и по распределению, т. е. по длине этой части балки будет равномерное распределение усилий. Наоборот, предполагая, что деформации от части к части не меняются, мы получим некоторые стандартные типы деформаций. Все частные типы деформаций, по мере того как мы отходим от областей, в которых приложены внешние силы, приближаются к стандартным. Это и есть предположение Сен-Венана, сделанное им в его знаменитом исследовании изгиба и кручения в применении к стержню постоянного поперечного сечения.

Для упругой энергии растяжения и изгиба это предположение дает те выражения, которые мы использовали в главе II.¹⁾ Предшествующие рассуждения показывают, что в действительности это больше чем только упрощающее допущение. Любая приближенная формула, которой пользуются в *общих случаях* в качестве зависимости между изгибающим моментом и получающейся кривизной, должна удовлетворять условию минимума упругой энергии, потому что, как мы видели (§ 92), это условие выражает определенную физическую тенденцию упругих материалов. Наши формулы для растяжения и изгиба удовлетворяют этому требованию.

Пример

12. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Плоская ферма, имеющая форму правильного многоугольника с N сторонами, связана радиальными стержнями. Радиальные стержни соединяют центр с каждым из узлов. Все стержни, являющиеся сторонами многоугольника, имеют площадь поперечного сечения A ; все радиальные стержни — A' . Величины модулей Юнга материалов, из которых сделаны стержни-

¹⁾ Ср. §§ 38—39 и §§ 47—48 главы II, также примечание на стр. 658.

стороны многоугольника и радиальные стержни, соответственно равны E и E' . Какова степень статической неопределимости фермы?

Показать, что когда в углах многоугольника приложены радиальные силы, величины которых (взятые в порядке следования по периметру многоугольника) равны

$$R \cos n\alpha, R \cos 2n\alpha, \dots, R \cos Nn\alpha,$$

где n — целое число, большее 0 и меньшее $\frac{1}{2}N$, а $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, стержни, которые являются сторонами многоугольника, не будут напряжены, если ферма не имела начальных напряжений. *Рассмотреть также случай $n=0$.* Далее показать, что в отсутствии начальных напряжений при N четном, радиальные стержни не будут напряжены, если силы, направленные перпендикулярно радиусу и приложенные в узлах, имеют величины $T, -T, \dots, T, -T$ (узлы взяты в порядке следования по периметру многоугольника).

Вычислить относительные удлинения радиальных стержней и стержней, образующих стороны многоугольника, под действием данных выше двух систем нагрузок [степень статической неопределимости равна 1, так как ферма станет «простой», если мы удалим один из стержней, являющийся стороной многоугольника. Начальные напряжения в каждом стержне-стороне многоугольника вызовут одинаковые силы растяжения].

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ III

Вычисление напряжений в фермах

96. В этой главе мы уже рассмотрели несколько примеров, относящихся к фермам. Конструкции в виде ферм очень широко употребляются в практике, так как они дают экономию затрачиваемого материала. Кроме того, напряжения в фермах можно определить без большого труда и с большой точностью. Рассмотрим несколько специальных задач, относящихся к фермам, и покажем методы, которыми они решаются.

Ф е р м а — решетчатая конструкция, образованная соединением большого числа стержней (обычно тонких и прямых). Стержни соединяются шарнирами, помещенными на их концах. Если шарниры спроектированы подходящим образом, то усилие в каждом стержне с большой точностью будет просто силой растяжения или сжатия вдоль прямой, которая соединяет шарниры. Поэтому на первых этапах проектиро-

вания мы можем заменить ферму схемой, где стержни фермы заменены прямыми, по которым действуют силы растяжения или сжатия, а шарниры фермы являются узловыми точками, в которых эти прямые пересекаются. Для того чтобы это упрощение было возможным, внешние силы (включая те, которые являются следствием весов входящих в ферму стержней) должны быть приложены только в узловых точках.

Простые и статически неопределимые фермы

97. Пусть m — число стержней, а j — число узлов в ферме. Тогда, в общем случае пространственной фермы в силу того, что под действием сил, приходящих на узел как извне, так и от усилий в тех стержнях, которые пересекаются в нем, каждый из узлов должен быть в равновесии, мы можем написать $3j$ условий равновесия статики. Но эти условия не все независимы, потому что внешние силы сами по себе должны образовать систему, находящуюся в равновесии. Следовательно, $3j$ условий связаны шестью условиями равновесия системы внешних сил. Число независимых уравнений равно $3j - 6$. Оно будет как раз достаточным для определения усилий в каждом стержне, если будет выполняться равенство

$$m = 3j - 6. \quad (14)$$

Ферма, в которой усилия можно определить таким путем, т. е. с помощью чисто статических соображений, называется простой фермой. Ферма, для которой такое определение невозможно, называется статически неопределимой. Очевидно, (14) является *необходимым* условием «простоты» фермы. Ферма обязательно будет статически неопределимой, если $m > 3j - 6$. Число

$$N = m - 3j + 6 \quad (15)$$

называется степенью статической неопределимости фермы.

С другой стороны, легко видеть, что (14) не является *достаточным* условием «простоты» фермы. Так, например,

мы можем представить себе, что один дополнительный узел присоединен к ферме с помощью двух стержней, так что сохраняется одна степень свободы. Пусть до присоединения этого узла ферма имела степень статической неопределимости, равную 1. После добавления узла уравнение (14) будет удовлетворяться, а усилия в стержнях *не* будут статически определяемыми. Лучшим критерием «простоты» (достаточным, но не необходимым) является возможность составления фермы на тетраэдре как на ядре (4 узла и 6 стержней) путем добавления каждого нового узла с помощью трех и не большего числа стержней. При этом на каждом этапе процесса условие (14) удовлетворяется¹⁾.

Когда схема фермы целиком лежит в одной плоскости, как, например, в случае стропильной фермы, ферма называется плоской. Рассуждением, аналогичным данному выше, мы можем показать, что в этом случае m и j для того чтобы ферма была статически определяемой, должны быть связаны уравнением

$$m = 2j - 3. \quad (16)$$

Число

$$N = m - 2j + 3 \quad (17)$$

является степенью статической неопределимости плоской фермы.

Вследствие того, что растянутые стержни, по сравнению с сжатыми, не вызывают дополнительных осложнений, фермам часто придают форму параллелепипедов с двумя пересекающимися диагональными стержнями, каждый из которых может сопротивляться растяжению, но не сжатию. Два диагональных стержня заменяют один диагональный стержень, способный противостоять и сжатию и растяжению. В таких случаях соответствующая формула (15) или (17) указывает на большую, чем та, которая имеется в действительности, степень статической неопределимости, потому что вообще при частной системе нагрузок работает только одна из двух диагоналей. Поэтому фермы, подкрепленные таким образом,

¹⁾ Интересное исследование пространственных ферм с этой точки зрения дано Н. Р. Сох, «On the synthesis and analysis of simply-stiff frameworks». *Proc. Lond. Math. Soc.* (Ser 2), 40 (1936), 203—216.

называются псевдо-статически неопределимыми. При вычислении напряжений такие фермы требуют специальных исследований.

Определение напряжений в простых фермах.

(1) Графические методы

98. Если ферма плоская, и соотношение (16) удовлетворяется, то уравнений равновесия достаточно для того, чтобы определить усилия в стержнях. Решение таких ферм вообще не представляет труда. Обычно пользуются графическими методами, в которых существуют специальные приемы [обозначения*) Боу¹⁾] для соединения в одну диаграмму различных силовых многоугольников²⁾.

Эти графические методы хорошо известны, и мы здесь не будем их описывать. Но нужно заметить, что так как в плоских фермах равновесие каждого узла определяют два условия, то для того чтобы приступить к построению, мы должны иметь некоторый узел, в котором сходятся только два стержня. Каждый стержень имеет два конца, и, следовательно, при удовлетворенном условии (16) среднее число стержней, оканчивающихся в узлах, будет

$$\frac{2m}{j} = 4 - \frac{6}{j}. \quad (18)$$

Оно всегда меньше 4-х, а при $j < 6$ обязательно меньше 3-х. Если это число меньше 3-х, то, очевидно, существует некоторый узел, в котором сходятся только два стержня. Если же $j \geq 6$, то в каждом узле встречаются 3 или большее число стержней и тогда графическое построение начать не удается.

«Метод сечений» Риттера³⁾

99. Если ферму можно разбить на две части, соединенные тремя, но не большим числом стержней, то мы можем

*) В русской литературе этот прием называют построением диаграммы Кремоны-Максвелла. (Прим. перев.)

¹⁾ R. H. Bow, Economics of Construction in relation to Framed Structures, London, 1873.

²⁾ Это упрощение предложено Максвеллом в 1864 г. и систематически применялось к кровлям и мостам Флемингом Дженкином и М. Тейлором в 1869 г. Ср. Г. Лэмб, Статика, §§ 40—41.

³⁾ A. Ritter (1863), ср. Лэмб, цит. соч., § 44.

воспользоваться методом сечений. Рассмотрим, например, стропильную ферму, изображенную на рисунке 33 (для этой фермы стержень, соединяющий D и F , отсутствует). $m = 11$, $j = 7$, т. е. (16) удовлетворяется.

В каждом из узлов сходятся, по крайней мере, три стержня. Равновесие заштрихованной части фермы накладывает три

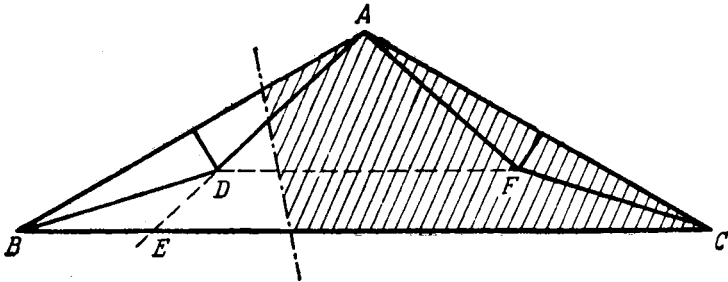


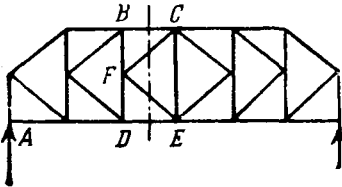
Рис. 33.

условия на усилия в стержнях, пересеченных прямой, разбивающей ферму на две части. Взяв моменты относительно узла A , мы можем усилие в BC связать с (данными) внешними силами, действующими на заштрихованную часть фермы.

Таким же образом, усилие в AD можно найти, если мы возьмем моменты относительно B . Усилие в AB можно найти, взяв моменты относительно E .

Пример

13. (Oxford F.E.E.S. 1934.) Ферма, показанная на рисунке, опирается на концах. Все углы между стержнями равны 45° или 90° . Все узлы могут рассматриваться как шарнирные. Используя метод сечений, определить силу, которая возникает в стержне BC вследствие действия силы в 12 т , равномерно распределенной по AE . Получить также силы в стержнях CF и FE .



$$\left[-5\text{ т в } BC; +\frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ т в } CF - \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ т в } FE. \right]$$

[Здесь мы можем использовать тот же метод, хотя разбивающая ферма на две части прямая пересекает *четыре* стержня.

Это можно сделать потому, что результирующая усилий в CF и FE не может иметь горизонтальной составляющей, так как другие стержни, сходящиеся в F , вертикальны. Поэтому результирующая усилий в CF и FE не даст момента относительно B . Таким образом, усилие в DE можно определить, взяв моменты относительно B , а усилие в BC , взяв моменты относительно D . После этого мы можем определить усилия в FE и FC , беря соответственно моменты относительно C и E .]

«Метод замены» Геннеберга¹⁾

100. Другой метод решения ферм известен как «метод замены». Вновь вернемся к рис. 33. Мы видим, что ферма останется «простой», если одновременно ввести новый стержень, соединяющий узлы D и F , и удалить стержень, соединяющий B и C . В модифицированной ферме в узлах B и C соединяются только два стержня, и, следовательно, к ней можно применить графический метод. Предположим, что для модифицированной фермы напряжения вычислены:

(I) когда действуют (заданные) внешние силы,

(II) когда в узлах B и C действуют по линии BC в противоположных направлениях единичные силы.

Вычисленную величину усилия в добавленном стержне DF обозначим через P в случае (I) и через p в случае (II).

Теперь после решения второго случая мы можем сказать, что сила растяжения T в BC , при отсутствии внешних сил, будет вызывать в DF силу растяжения pT . А после решения первого случая, когда внешние силы действуют, что полная сила растяжения в DF будет $(P + pT)$. Если положить

$$P + pT = 0, \quad (19)$$

то сила растяжения в DF обратится в нуль, и добавленный стержень можно удалить. Мы получили первоначальную ферму, в которой сила растяжения T в BC известна. Полное

¹⁾ L. Henneberg, Statik der starren Systeme, 1886. Ср. Лэмб, цит. соч., § 45.

решение фермы можно провести с помощью напряжений, вычисленных для случаев (I) и (II) в модифицированной ферме.

Определение напряжений в простых фермах.

(2) Аналитические методы

101. Графические методы, разработанные к настоящему времени, теряют свои преимущества, когда мы имеем дело с пространственными фермами. Мы вынуждены проводить числовые расчеты ферм. Иногда и для плоских ферм удобнее и проще провести числовой расчет. При этом не возникает никаких трудностей, если употребляются систематические обозначения. В случае пространственной фермы, вычисления обычно сложнее и длиннее. Расчет плоских ферм облегчается, если существует узел, в котором сходятся только два стержня. В случае пространственной фермы удобно начинать расчет с узла, в котором сходятся только три стержня. Среднее число стержней, сходящихся в узле простой пространственной фермы, если условие (14) удовлетворяется, будет

$$\frac{2m}{j} = 6 - \frac{12}{j}.$$

Это число всегда меньше 6-ти, оно становится меньше 5-ти при $j < 12$ и меньше 4-х при $j < 6$. Итак, если $j \geq 6$, то мы будем иметь 4 или большее число стержней, сходящихся в каждом из узлов¹⁾. В таких случаях аналитический метод не теряет силы, но вычисления удлиняются, и возникает вопрос: нельзя ли воспользоваться одним из способов, изложенных в §§ 99—100.²⁾

Коэффициенты растяжения

102. Процесс вычисления можно значительно упростить, если вместо результирующих усилий в стержнях ввести

¹⁾ Пример, рассмотренный в § 44 главы II, принадлежит к этому случаю.

²⁾ Ср. статью Н. Р. Сох, указанную в подстрочном примечании к § 97.

в уравнения коэффициенты растяжения¹⁾. Коэффициент растяжения любого стержня определяется как результирующее усилие P в этом стержне, разделенное на его длину l . Предположим, что рассматриваемый стержень соединяет два узла A и B . Декартовы координаты узлов A и B обозначим через x_A, y_A, z_A и x_B, y_B, z_B .

Составляющая вдоль оси x силы, приложенной в узле A , очевидно, будет

$$P_{AB} \frac{x_B - x_A}{l_{AB}} = T_{AB}(x_B - x_A).$$

Последнее равенство имеет место в силу определения коэффициентов растяжения.

Сила, действующая на узел B в том же направлении оси x , будет

$$T_{AB}(x_A - x_B).$$

T_{AB} — скалярная величина. Как легко видеть по двум полученным равенствам, мы ввели обозначение, которое не противоречит самому себе. Если B, C, \dots, K — узлы, связанные с A стержнями, то условие равновесия A запишется:

$$\begin{aligned} X_A + T_{AB}(x_B - x_A) + T_{AC}(x_C - x_A) + \dots \\ \dots + T_{AK}(x_K - x_A) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

и два аналогичных уравнения для проекций на оси y и z . Через X_A, Y_A, Z_A обозначены составляющие внешней силы, приложенной в A .

Уравнения такого типа можно очень легко написать для каждого из узлов данной фермы. Пользоваться декартовыми координатами удобно, потому что величины $(x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)$ можно легко снять с обычного чертежа. После того как уравнения написаны, задача становится чисто алгебраической. Надо решать систему не более чем трех линейных уравнений. Для того чтобы можно было получить коэффициенты растяжения из сил растяжения, или *наоборот*, мы

¹⁾ Коэффициенты растяжения предложены в статье «Primary Stress Determination in Space Frames», опубликованной в *Engineering*, 109 (1920), 165—168. См. примечание на стр. 658.

должны знать действительные длины стержней. Очевидно, что, например, длина l_{AB} стержня AB выразится через декартовы координаты узлов следующим образом:

$$l_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2. \quad (21)$$

Пример

14. (Самб. М.С.Т. 1931) Рис. 34 в общих чертах воспроизводит конструкцию экскаватора. Основание, имеющее форму круга BCD ,

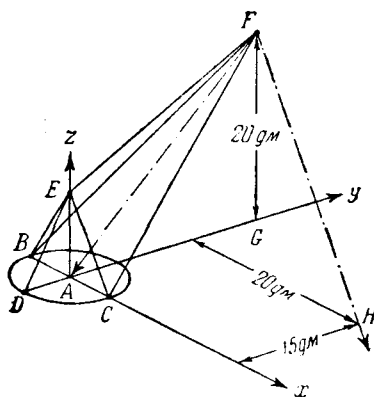


Рис. 34.

может с помощью шестерни и рейки поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр круга A . Цепь AFH , поднимающая ковш, проходит через точку A и через свободно вращающийся блок, помещенный в F . Диаметр основания BCD — 10 дм. Точка E находится на вертикали над A . Направление FG отвесно. $EA = 10$ дм. $AG = FG = 20$ дм. В заданных условиях ковш в таком положении, что часть цепи FH , наклоненная к вертикали, пересекает горизонтальную плоскость BCD в точке H , на расстояниях соответственно 15 дм и 20 дм от прямых BC и DA . Сила растяжения в цепи всюду 2000 кг. Найти силы в стержнях конструкции и кру-

тящий момент в основании BCD . Диаметром блока в F можно пренебречь.

[Начало координат поместим в A . Ось Ox проведем в направлении BAC , ось Oy — в направлении DAG . Ось Oz — вверх по вертикали (т. е. параллельно направлению GF). Взяв в качестве единицы длины дециметр, мы имеем:

$$\left. \begin{array}{lll} x_A = 0, & y_A = 0, & z_A = 0, \\ x_B = -5, & y_B = 0, & z_B = 0, \\ x_C = 5, & y_C = 0, & z_C = 0, \\ x_D = 0, & y_D = -5, & z_D = 0, \\ x_E = 0, & y_E = 0, & z_E = 10, \\ x_F = 0, & y_F = 20, & z_F = 20, \\ x_H = 20, & y_H = 15, & z_H = 0. \end{array} \right\} \quad (I)$$

Части AF и FH цепи можно рассматривать как стержни, растягиваемые силой в 2000 кг. Воспользовавшись (21), мы получим

$$\left. \begin{aligned} l_{AF}^2 &= 0 + 20^2 + 20^2 = 800, & l_{AF} &= 28,3, \\ l_{FH}^2 &= 20^2 + 5^2 + 20^2 = 825, & l_{FH} &= 28,7, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} T_{AF} &= \frac{2000}{28,3} = 70,7, \\ T_{FH} &= \frac{2000}{28,7} = 69,6. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Теперь для узла F мы можем записать три уравнения типа (20). Стержни, соединенные в F , суть AF , BF , CF , EF и HF , так что мы имеем первое уравнение

$$T_{AF}(x_A - x_F) + T_{BF}(x_B - x_F) + T_{CF}(x_C - x_F) + T_{EF}(x_E - x_F) + T_{HF}(x_H - x_F) = 0 \quad (IV)$$

или

$$0 - 5T_{BF} + 5T_{CF} + 0 + 20 \times 69,6 = 0.$$

Аналогично получаются два другие уравнения. Они суть:

$$\left. \begin{aligned} -20 \times 70,7 - 20T_{BF} - 20T_{CF} - 20T_{EF} - 5 \times 69,6 &= 0, \\ -20 \times 70,7 - 20T_{BF} - 20T_{CF} - 10T_{EF} - 20 \times 69,6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Из (V) мы найдем, что

$$10T_{EF} = 15 \times 69,6, \quad T_{EF} = 104,4, \quad (VI)$$

а из (IV) и второго (V) мы получаем

$$-20 \times 70,7 - 40T_{BF} - 10T_{EF} + 60 \times 69,6 = 0,$$

откуда, воспользовавшись (VI),

$$4T_{BF} = 417,6 - (104,4 + 141,4); \quad T_{BF} = 42,9. \quad (VII)$$

Наконец, из (IV)

$$T_{CF} = T_{BF} - 4 \times 69,6 = -235,5. \quad (VIII)$$

Теперь мы можем записать уравнения для узла E . T_{EF} известно

и эти уравнения будут системой трех уравнений с тремя неизвестными. Из них мы найдем:

$$T_{DE} = 4T_{EF} = 418; \quad T_{BE} = T_{CE} = -\frac{3}{2}T_{EF} = -156,75. \quad (\text{IX})$$

Выражения (VI) — (IX) дают коэффициенты растяжения всех стержней. Из уравнений типа (21) мы получим, что

$$l_{BE} = l_{CE} = l_{DE} = 11,2; \quad l_{BF} = l_{CF} = 28,7; \quad l_{EF} = 22,4. \quad (\text{X})$$

Теперь силы, возникшие в стержнях, имеют (приближенно) следующие значения:

$$P_{BE} = P_{CE} = -1750 \text{ кг}, \quad P_{DE} = 4670 \text{ кг}, \quad P_{BF} = 1230 \text{ кг}, \\ P_{CF} = -6760 \text{ кг}, \quad P_{EF} = 2335 \text{ кг}. \quad \text{Ответ.}$$

Далее нужно найти крутящий момент, действующий в основании. Мы заметим, что при этом мы должны рассматривать как внешнюю только силу растяжения в FH , потому что AF проходит через центр A круга-основания. Составляющие этой силы не дают крутящего момента, потому что F лежит в плоскости yAz . Составляющая по оси x силы растяжения в FH будет:

$$T_{FH}(x_H - x_F) = 20T_{FH} = 1392 \text{ кг}.$$

Она действует на плече (AG) в 20 дм. Итак, крутящий момент, действующий в основании, равен:

$$20 \times 1392 = 27\,840 \text{ кг дм}. \quad \text{Ответ.}]$$

Определение напряжений в статически неопределимых фермах

103. Мы можем находить усилия в статически неопределимых фермах как в плоском, так и в пространственном случаях с помощью второй теоремы Кастилиано. Если N , определяемое соотношениями (15) или (17), представляет собой степень статической неопределимости фермы, то, очевидно, мы можем сделать ферму простой, удалив N подходящим образом выбранных стержней. Другими словами, мы можем

дать произвольные значения силам растяжения в этих N стержнях и затем из условий равновесия найти силы растяжения в остальных стержнях.

Выберем N стержней, которые считаем лишними, заботясь только о том, чтобы ферма после их удаления осталась геометрически неизменяемой. В остальном этот выбор ничем не ограничен, и мы их можем выбирать так, как удобно в той или иной частной задаче (ср. §§ 98 и 101). Далее мы вычислим напряжения в стержнях получившейся простой фермы, сначала от заданных внешних сил, а потом от единичных сил растяжения, приложенных по очереди в каждом лишнем стержне, при *отсутствии внешних сил*. Применяя принцип суперпозиции, точно так же, как в § 100, мы для каждого из оставшихся стержней можем написать соотношение типа:

$$p_0 + p_1 T_1 + p_2 T_2 + \dots + p_N T_N, \quad (22)$$

которое выражает силу растяжения, вызванную в рассматриваемом стержне, через, пока неизвестные, силы растяжения T_1, T_2, \dots, T_N в лишних стержнях и через заданные внешние силы. Из предварительных вычислений мы уже получили значения p_0, p_1, \dots, p_N ¹⁾.

Силы растяжения в каждом стержне, включая и лишние стержни, известны нам как функции T_1, T_2, \dots, T_N . Мы можем образовать выражение полной упругой энергии U . После чего, пользуясь второй теоремой Кастилиано, мы получим N уравнений для T_1, T_2, \dots, T_N . Это будут уравнения типа (12). В специальных случаях, когда ферма имеет начальные напряжения, эти уравнения будут иметь форму (11) § 91. Число их в любом случае достаточно для определения N неизвестных сил растяжения T_1, T_2, \dots, T_N .

104. Изложенный метод уже применялся к частным примерам в § 90. Здесь мы не будем разбирать новые примеры.

¹⁾ p_0 — сила растяжения вследствие действия внешних сил.

Но они и не нужны, если методы расчета *простых* ферм известны. Если при расчете фермы мы пользуемся аналитическим методом § 102, то в уравнения вместо сил растяжения войдут коэффициенты растяжения. Однако изменять указанный выше метод не нужно. Выражения типа (22) имеют место как для сил растяжения, так и для коэффициентов растяжения.

При составлении выражения упругой энергии удобно ввести величину Ω , которая определена нами в § 39 главы II. Уравнение (7) главы II можно записать в форме:

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2}{\Omega}, \quad (23)$$

где U — упругая энергия, запасенная в стержне, T — коэффициент растяжения, а Ω — упругая постоянная, выраженная формулой (8) или (9) главы II.

Методы последовательных приближений

105. Руководствуясь указаниями § 103, мы можем принципиально решить любую задачу, относящуюся к фермам, если только, как в § 96, можно пренебречь жесткостью узлов. При этом нам нужно решать систему N совместных линейных уравнений, что формально просто, но практически очень трудно. Люди, сталкивавшиеся с такого рода вычислениями, наверное согласятся, что N , равное десяти или двенадцати, является наибольшим возможным для рассмотрения числом лишних элементов. Если N большее число, то мы не можем быть уверены в точности окончательного результата. В силу указанной причины приходится пользоваться методами последовательных приближений, которые предложены сравнительно недавно. Закончим эту главу кратким изложением основных принципов упомянутых методов. Читатель сможет детально ознакомиться с ними, если обратится к оригинальным статьям, или книгам, которые будут приведены в §§ 107 и 110.

Метод «релаксации»¹⁾ *)

*** 106.** Рассмотрим ферму, состоящую из упругих стержней, соединенных шарнирами без трения. Предположим, что в каком-нибудь одном или во всех узлах мы можем ввести жесткие связи, так что поступательное движение узла станет невозможным, а концы стержней смогут свободно поворачиваться. Предположим сначала, что таким образом закреплены все узлы. Приложим заданные внешние силы. Связи жестки, и, следовательно, каждый из узлов удерживает всю силу.

Затем предположим, что одна из связей освобождается, т. е. один из узлов может медленно²⁾ перемещаться на заданную величину в некотором заданном направлении. Теперь сила будет передаваться со связи на ферму. В ферме запасается упругая энергия. Если сначала сила в связи имела составляющую в направлении перемещения, то связь будет *разгружаться* (относительно этой составляющей), т. е. полная потенциальная энергия системы уменьшится. Если перемещается только один узел фермы, то можно найти ту часть силы, которая передается в результате заданного перемещения. Таким образом, мы можем подобрать перемещение так, чтобы связь разгрузилась на нужную нам величину.

Эту первую связь в новом положении жестко закрепим, а некоторые другие связи ослабим. Точно так же, как и раньше, мы можем установить факт разгрузки силы во второй связи и уменьшения полной потенциальной энергии системы на большую, чем при ослаблении только первой связи, величину. Поступая так же дальше, мы будем постепенно уменьшать

¹⁾ Ср. статьи с этим названием в *Proc. R. S. (A)*, 151, 56–95 и 153, 41–76 (1935).

^{*)} *The Method of «Systematic Relaxation of Constraints»* — название нового приближенного метода, предложенного Саусвеллом, ввиду отсутствия в русском языке соответствующего термина, переводится как *метод релаксации*. Не смешивать с *релаксацией* — явлением уменьшения напряжения в деформированном теле с течением времени. (*Прим. перев.*)

²⁾ Так что сохраняется равновесие и не возникают колебания.

величину полной потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии будет ощутимо на каждой ступени процесса, если только сила при этом будет разгружаться на заметную величину.

*** 107.** Метод, известный как метод «релаксации», точно следует в вычислениях за каждым шагом только что описанного физического процесса. Подробное изложение этого метода содержится в книге автора «Relaxation Methods in Engineering Science»¹⁾. Успех метода объясняется тем фактом, что ограниченная свобода, допускаемая при каком-нибудь одном «ослаблении», позволяет легко и точно определить распределение сил между узлами. Предварительные вычисления, по необходимости многочисленные, но крайне простые, дают нам возможность оперировать с любой заданной системой сил при помощи такого рода метода, в котором на каждой стадии расчета мы стараемся распределить или «ликвидировать» наибольшую силу, принадлежащую на какую-нибудь одну из связей. Внешние силы находятся в равновесии, и, следовательно, в процессе проведения метода они имеют тенденцию встретиться и уничтожить друг друга. Таким образом, по мере продвижения расчета «неликвидированные» силы стремятся уменьшиться. Когда все силы станут настолько малы, что практически не будут иметь значения, расчет можно будет прекратить.

108. Для того чтобы ускорить степень приближения к требуемому результату, можно использовать специальные приемы. Подобные же методы можно употреблять при расчете ферм, узлы которых имеют заметную жесткость и точное решение которых весьма трудно. Пользуясь «методом релаксации», мы часто, без серьезного ущерба для точности, можем иметь дело отдельно с «первичными напряжениями» (т. е. усилиями, которые приходятся на стержни, если все узлы шарнирные) и с «вторичными напряжениями» (т. е. дополнительными напряжениями от изгиба вследствие жесткости узлов).

¹⁾ Oxford Univ. Press, 1940. В последующих ссылках эта книга будет называться кратко «Relaxation Methods».

«Метод распределения момента» профессора Гарди Кросса

* 109. В тех случаях (здания из стальных рам или балки Виренделя), когда *вся* жесткость рамы обязана заделке узлов, задача об определении первичных напряжений отпадает. Тогда связи (§ 106) подвержены действиям моментов, а не сил. По нашему методу должны быть «ликвидированы» ослаблением моменты. Закрепим узлы, а потом ослабим одну из связей так, что в ней станет возможным поворот. Прилегающим узлам будет передаваться момент, который раньше приходился на эту связь. В конструкции вследствие изгиба соответствующих стержней запасется упругая энергия.

При исследовании ослабления такого вида обнаруживается очень важное следствие¹⁾. Сила в связи, передающаяся при ослаблении примыкающим связям, имеет неизменяемую результирующую. Когда же ослабляют связь в отношении *момента*, то только половина всего момента передается примыкающим связям — другая половина при этом исчезает²⁾. Таким образом, *неуравновешенные моменты (но не силы) уменьшаются простым процессом распределения.*

110. На основании «метода распределения момента» профессора Гарди Кросса в последние годы полностью изменен расчет рам. Подробное описание этого выходит за пределы нашей книги. Читатель отсылается к оригинальной работе профессора Кросса³⁾ или к написанной им в сотрудничестве с профессором Н. Д. Морганом книге «Continuous Frames of Reinforced Concrete»⁴⁾.

¹⁾ Ср. первую статью, указанную в подстрочном примечании к § 106 и §§ 35—36.

²⁾ Более точно: другая половина передается как перерезывающая сила, влиянием которой пренебрегают. Ср. «Relaxation Methods», §§ 91—92.

³⁾ Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments (статья № 1793), *Trans. Am. Soc. C.E.*, 96 (1932), 1—10. Ценное изложение метода дают J. F. Baker (*Steel Structures Research Committee Report*, 1934) и H. A. Williams [*Trans. Am. Soc. M.E.*, 56 (1934), 305—319]. Ср. примечание стр. 659.

⁴⁾ New York, John Wiley & Sons; London, Chapman & Hall Ltd. (1932).

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

111. Мы уже установили несколько важных положений относительно деформаций тел под действием систем внешних сил, находящихся в равновесии. В наших доказательствах постулировалось только то, что материал упругий и подчиняется закону Гука. Мы не касались деталей деформации тела или даже (за исключением частных случаев) формы тела в естественном состоянии. Само собой разумеется, что наши результаты не затрагивали вопросов, для которых эти факторы имеют значение — например, проблемы *прочности* (§ 2).

Если мы захотим рассмотреть подобные вопросы, то мы должны пойти дальше и искать методы, с помощью которых можно вычислить внутренние деформации. При этом мы сразу сталкиваемся с трудностью, заключающейся в том, что у нас имеется очень мало прямых экспериментальных данных, на которых можно было бы построить теорию. Внешнюю нагрузку, а также перемещения точек на поверхности тела можно измерить (в случае прозрачных материалов мы можем попытаться измерить перемещения внутренних точек); но напряжения (или внутренние усилия) никогда не измерялись и почти наверное никогда не будут измеряться непосредственно.

При этих условиях все, что нам остается делать, это строить теорию на предположениях, которые не противоречат возможным экспериментальным наблюдениям, и искать подтверждения этой теории в проверке частных результатов, а именно предсказаний о тех перемещениях, которые можно измерить¹⁾.

¹⁾ Динамика, в основном, развивалась таким же образом. Сначала она являлась индуктивной наукой, в которой каждое новое предположение основывалось на прямом опыте. Теперь в общем это абстрактная наука, выводы которой (логические следствия из предположений) имеют законность независимо от вопроса о

Экспериментальные основания теории внутренних деформаций

112. Мы начнем с наблюдений, сделанных при растяжении длинных и прямых цилиндрических стержней — например, образцов из проволоки постоянного диаметра. Наблюдения показывают (в соответствии с принципом Сен-Венана)¹⁾, что точный способ, которым такой образец нагружен, не имеет заметного влияния на его поведение в частях, удаленных от его концов. Кроме того, они показывают, что для данного материала и в определенном ограниченном интервале²⁾ относительное удлинение каждого элемента длины (кроме частей, примыкающих к концам) прямо пропорционально приложенной силе и обратно пропорционально площади поперечного сечения. Обозначая относительное удлинение через e_1 , мы можем выразить результат этих наблюдений в виде соотношения

$$e_1 = \frac{1}{E} \frac{P}{A} = \frac{p}{E}, \quad (1)$$

где P — общая растягивающая сила, A — площадь поперечного сечения и E — постоянная материала, которая (так как e_1 безразмерно) имеет ту же размерность, что и p . Величина $p \left(= \frac{P}{A} \right)$, являющаяся мерой интенсивности нагрузки по площади поперечного сечения, представляет собой продольное напряжение. E называется модулем Юнга, по имени открывшего его ученого Томаса Юнга³⁾.

С помощью очень точных экспериментальных методов мы можем обнаружить, что удлинение образца сопровождается

том, в каком соответствии они находятся с тем, что наблюдается прямо в природе. Это соответствие фактически настолько удовлетворительно, насколько можно было бы желать; но оно обнаруживается не прямыми испытаниями, лежащих в основе теории предположений, а точностью, с которой выводы нашей теории совпадают с наблюдениями в случае сложных явлений таких, как, например, астрономические. (Ср. H. Lamb, Dynamics, Appendix, стр. 345—349).

¹⁾ Глава III, §§ 92—94.

²⁾ Ср. § 142.

³⁾ Ср. подстрочное примечание к § 38.

изменением размеров поперечного сечения. Найдено, что относительное удлинение e_1 в продольном направлении сопровождается относительным сжатием в двух перпендикулярных (боковых) направлениях, которые (в случае употребляемых в технике материалов, как железо, сталь или латунь) равны одно другому и пропорциональны e_1 . Обозначая такие удлинения через e_2 и e_3 и рассматривая относительное сжатие как отрицательное относительное удлинение, мы можем результат этих наблюдений выразить в виде соотношения

$$e_2 = e_3 = -\sigma e_1 = -\sigma \frac{P}{E}, \quad (2)$$

где σ — безразмерная постоянная материала, известная под названием коэффициента Пуассона¹⁾.

113. Удлинения можно измерять только на поверхности стержня. Но тот факт, что P пропорциональна A , когда e_1 имеет данное значение, делает обоснованным представление стержня в виде совокупности продольных волокон постоянного сечения. Каждое из волокон удерживает часть общей нагрузки на концах, пропорциональную площади его поперечного сечения, и как по отношению к продольному удлинению, так и по отношению к боковому сжатию ведет себя подобно целому стержню.

Это, конечно, предположение, которое опытными наблюдениями, установленными в § 112, строго не оправдывается, но в последующем оно не дает противоречий. При постулируемых условиях каждое волокно деформируется так, что на него не влияют соседние. Совокупность волокон, если они остаются в соприкосновении, дает все черты наблюдаемой деформации исследуемого стержня.

Таким образом, мы приходим к допущению, что постоянное растягивающее напряжение (внутреннее усилие, которое вызывается растягивающей силой, равномерно распределенной по поперечному сечению цилиндрического стержня) сопровождается тремя относительными удлинениями e_1, e_2, e_3 , связанными с напряжением p уравнениями (1) и (2). На этом

¹⁾ С. Д. Пуассон (1781—1840).

постулате, для которого нельзя привести прямого опытного доказательства, мы построим нашу теорию внутренней деформации. Вопрос о том, действительно ли эта теория соответствует поведению реальных материалов, остается пока невыясненным.

Простое и сложное напряжение

114. Рассмотрим теперь маленький кубик материала (рис. 35), расположенный внутри нагруженного стержня и имеющий две грани, перпендикулярные к направлению приложенной силы растяжения. Ясно, что эта часть тела (которая может рассматриваться как очень короткий участок одного из составляющих волокон) также будет испытывать ту деформацию, которую мы постулировали во всем стержне. Напряжение на нагруженных гранях (отмеченных штриховкой на рисунке) будет p . Расстояние между гранями по отношению к его первоначальному (недеформированному) значению будет возрастать на относительную величину e_1 , связанную с p уравнением (1). Другие пары (ненагруженных) противоположных граней будут приближаться друг к другу так, что расстояния, которые были между ними в недеформированной конфигурации, возрастут на *отрицательные* относительные величины e_2 , e_3 , связанные с p уравнениями (2).

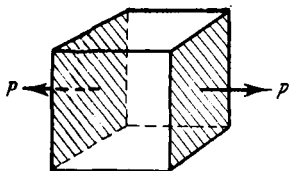


Рис. 35.

Равномерно распределенная нагрузка такого рода, когда ее направление перпендикулярно грани, на которую она действует, называется *нормальным напряжением*. Мы заметили (в § 28 главы I), что на случай нормального напряжения можно распространить общие теоремы, а поэтому при вычислении совместного действия двух или трех таких напряжений, приложенных одновременно, мы можем применять принцип суперпозиции. Таким образом, обращаясь к рис. 36, на котором три перпендикулярные направления характеризуются номерами 1, 2 и 3, мы видим, что

деформация первого кубика (а), вследствие простого продольного напряжения p_1 , будет определяться формулами

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} p_1, \\ e_2 &= e_3 = -\frac{\sigma}{E} p_1. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

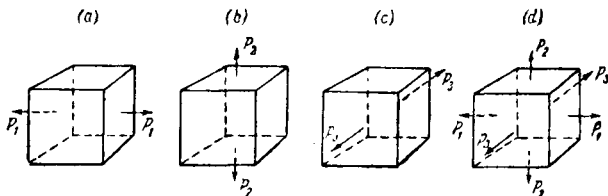


Рис. 36.

Кубики (b) и (c) находятся в тех же, за исключением направлений приложенных напряжений, условиях, и мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{\sigma}{E} p_2 = e_3, \\ e_2 &= \frac{1}{E} p_2 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

и

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_2 = -\frac{\sigma}{E} p_3, \\ e_3 &= \frac{1}{E} p_3. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Тогда в кубике (d), к которому напряжения p_1 , p_2 и p_3 приложены *одновременно*, деформации даются формулами

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} [p_1 - \sigma(p_2 + p_3)], \\ e_2 &= \frac{1}{E} [p_2 - \sigma(p_3 + p_1)], \\ e_3 &= \frac{1}{E} [p_3 - \sigma(p_1 + p_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) связывают напряжения и деформации в наиболее общем случае нагрузки нормальными напряжениями. Они, очевидно, согласуются с законом Гука. Однако следует повторить, что они утверждают больше того, что может быть проверено непосредственным опытом, и не являются столь значительными выводами из закона, как основные предположения для теории упругой деформации. Мы заметим, что e_2 и e_3 не могут вместе обратиться в нуль, если не выполняются равенства:

$$p_2 = p_3 = \frac{\sigma}{1 - \sigma} p_1. \quad (4)$$

Поэтому одномерная деформация будет вызывать напряжение во всех трех направлениях. В § 113 было найдено, что одномерное напряжение вызывает деформацию во всех трех направлениях. Это составляет одну из трудностей нашей науки. О кубике [таком, как (*d*) на рис. 36], который подвержен нагрузке на более чем одной паре противоположных граней, говорят, что он находится в состоянии «комбинированного» или сложного напряжения.

Упругая энергия, запасенная при сложном напряжении. Удельная упругая энергия деформации

115. Беря напряжение (т. е. интенсивность силы на единице площади) как меру сил, приложенных к паре противоположных граней, и удлинение (т. е. *относительное* увеличение расстояния между такими парами граней) как меру возникшей деформации, мы получим соотношения, которые не зависят от размеров рассматриваемого элементарного параллелепипеда тела. Если начальные размеры параллелепипеда a, b, c (рис. 37), то площади граней, к которым приложено p_1 , равны bc и величина сил, вызванных p_1 , равна $p_1 \times bc$. Первоначально расстояние между этими гранями равнялось a . Величина, на которую они отойдут в результате деформации, равна $e_1 a$. Это удаление является перемещением, «соответствующим» (в смысле гл. I, § 28) силе растяжения $p_1 bc$, приложенной к заштрихованным граням.

Поступив со всеми тремя парами граней таким же образом, мы из уравнения (11) главы I для полной упругой энергии, запасенной в параллелепипеде, получим выражение:

$$U = \frac{1}{2} [(p_1 bc) \times (e_1 a) + (p_2 ab) \times (e_2 c) + (p_3 ca) \times (e_3 b)] = \frac{1}{2} abc [p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3].$$

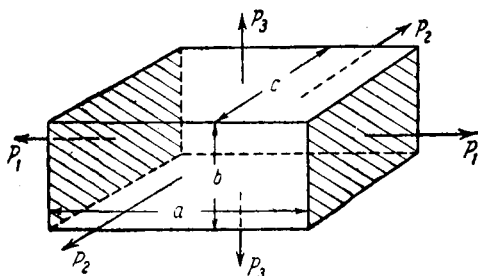


Рис. 37.

Разделив на abc (объем недеформированного параллелепипеда), мы найдем, что упругая энергия, запасенная напряжениями p_1, p_2, p_3 , действующими вместе, *отнесенная к единице объема*, будет:

$$u = \frac{1}{2} [p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3].$$

Если мы подставим e_1, e_2, e_3 из (3), то

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [p_1 \{p_1 - \sigma(p_2 + p_3)\} + \text{два аналогичных члена}] = \\ &= \frac{1}{2E} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2\sigma(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1)]. \end{aligned} \quad (5)$$

116. Энергия, запасенная в теле в результате действия приложенных сил, обычно называется энергией упругой деформации. Она также называется «полной упругой энергией». Технический термин удельная упругая энергия деформации введем для обозначения энергии, запасенной единицей объема, т. е. величины u в уравнении (5). Тогда мы можем

сказать, что выражение в правой части выражения (5) является мерой удельной упругой энергии деформации, соответствующей системе напряжений p_1, p_2, p_3 .

Реальные материалы при постепенном увеличении напряжения имеют предел, за которым закон Гука не выполняется, и тогда запасенная упругая энергия больше не дается этим выражением¹⁾. Величину u в тот момент, когда материал впервые перестает следовать закону Гука, называют допускармой удельной упругой энергией деформации материала при данной системе напряжений.

«Объемное расширение» и «модуль объемного сжатия»

117. Складывая три уравнения (3), мы можем написать:

$$\Delta = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1-2\sigma}{E}(p_1 + p_2 + p_3), \quad (6)$$

откуда при

$$\left. \begin{aligned} p_1 = p_2 = p_3 = \bar{p} \\ \Delta = \frac{3(1-2\sigma)}{E} \bar{p}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Величина, обозначенная через Δ , имеет важное физическое значение. За исключением одного или двух материалов, как, например, резина, все реальные материалы перестают подчиняться закону Гука, когда деформации имеют еще очень малые величины, и превышение их не допустимо в практике. Следовательно, мы не уменьшим ценности нашей теории, если примем, что произведениями двух деформаций, по сравнению с самими деформациями, можно пренебречь. Тогда с достаточной степенью точности мы можем принять, что объем прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 37, после деформирования будет:

$$\begin{aligned} & (1 + e_1) a \times (1 + e_2) c \times (1 + e_3) b = \\ & = abc (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) = abc (1 + e_1 + e_2 + e_3), \end{aligned}$$

¹⁾ Ср. § 142.

т. е. *относительное* изменение объема, получающееся от напряжений p_1, p_2, p_3 с достаточной для практических целей точностью, дается величиной Δ , определенной уравнением (6). Это относительное изменение объема мы назовем *объемным расширением*.

Во время деформации масса M кубика остается постоянной, и, следовательно, плотность должна меняться от M/abc до $M/abc(1 + \Delta)$, или от ρ до $\rho/(1 + \Delta)$. Относительное изменение плотности вследствие деформации будет $(1 + \Delta)^{-1} - 1$, что в нашем приближении равно $-\Delta$ или, согласно (6), равно

$$-\frac{1-2\sigma}{E} (p_1 + p_2 + p_3).$$

Если сумма p_1, p_2, p_3 положительна, то объем параллелепипеда возрастает и его плотность, как и следовало ожидать, уменьшается.

118. Предположим, что p_1, p_2, p_3 одинаковы по величине и *отрицательны*, что имеет место, когда к параллелепипеду приложено гидростатическое давление. Во втором соотношении (7) Δ и \bar{p} будут теперь отрицательны; но отношение

$$\frac{\text{приложенное давление}}{\text{окончательное (относительное) изменение объема}},$$

как и раньше, будет даваться величиной

$$\frac{\bar{p}}{\Delta} = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = K. \quad (8)$$

Величина K , определенная таким образом, называется *объемным модулем упругости*, или *модулем объемного сжатия материала*.

Подставляя первое из соотношений (7) в (5), мы найдем, что удельная упругая энергия деформации материала (§ 116)

при этих условиях выражается формулой:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3}{2E} (1 - 2\sigma) \bar{p}^2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{p}^2}{K} \text{ [согласно (8)]} \\ u &= \frac{1}{2} K \Delta^2 \text{ [также согласно (8)].} \end{aligned} \right\} (9)$$

В случае простого продольного растяжения из (5),
положив $p_2 = p_3 = 0$, мы получим:

$$u = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{E} = \frac{1}{2} E e_1^2.$$

Касательное напряжение, сдвиг и «модуль сдвига»

119. Вернемся к уравнениям (3) и примем, что

$$\left. \begin{aligned} -p_2 &= p_1 = p, \\ p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

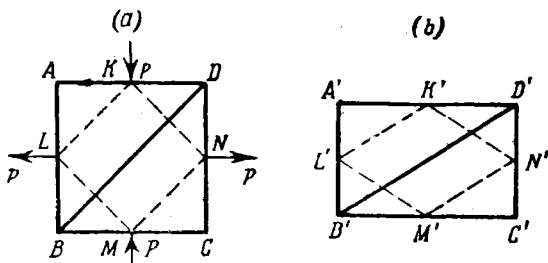


Рис. 38.

Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} -e_2 &= e_1 = \frac{1 + \sigma}{E} p, \\ e_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

Видно, что в этом случае плоская система напряжений соответствует плоской системе деформаций.

Характер деформации будет очевиден, если мы возьмем первоначально кубический элемент объема [рис. 38 (a)]. После деформации он примет форму, показанную (при значительном преувеличении деформации) на рис. 38 (b). Если l — длина каждой стороны квадратной грани $ABCD$ в недеформированной конфигурации, то длина $A'D'$ в деформированной

конфигурации будет $l(1 + e_1)$, а длина $A'B' = l(1 + e_2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(B'D')^2 &= (B'A')^2 + (A'D')^2 = l^2 \{(1 + e_1)^2 + (1 + e_2)^2\} = \\ &= 2l^2 \left\{ 1 + e_1 + e_2 + \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2) \right\}.\end{aligned}$$

Пренебрегая, как и раньше, e_1^2 и e_2^2 по сравнению с e_1 и e_2 и вспоминая, что $(BD)^2 = 2l^2$, мы с точностью до величин первого порядка получим

$$(B'D')^2 = (BD)^2 (1 + e_1 + e_2) = (BD)^2,$$

так как $e_1 + e_2 = 0$, согласно (11). Откуда видно, что при рассматриваемой теперь деформации длина диагонали BD не изменяется. Аналогичное доказательство показывает, что также не изменяется длина другой диагонали AC . Поэтому длины сторон внутреннего квадрата $KLMN$, образованного соединением средних точек сторон $ABCD$, остаются прежними.

Однако углы квадрата $KLMN$ при этой деформации изменятся. Угол $K'L'M'$ равен удвоенному углу $D'B'C'$, а для него:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \angle D'B'C' &= \frac{CD'}{B'C'} = \frac{1 + e_2}{1 + e_1} = \frac{1 - e_1}{1 + e_1} \quad [\text{согласно (11)}], \\ \operatorname{tg} \angle D'B'C' &= \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = e_1.\end{aligned}\quad (I)$$

Следовательно

$$\angle K'L'M' = 2 \angle D'B'C' = 90^\circ - 2\varphi.$$

$\angle KLM$ на рис. 38 (а) прямой и мы видим, что деформация рассматриваемого типа вызывает уменьшение угла KLM на величину $\gamma = 2\varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi$. [Последнее равенство достаточно точно, ибо, согласно (I), φ весьма мало.]

По формуле (I) $\gamma = 2e_1$, или, согласно первому из (11),

$$\gamma = \frac{2(1 + \sigma)}{E} p. \quad (12)$$

120. Теперь изучим характер напряженного состояния, вызванного этой деформацией во внутреннем квадрате $KLMN$. На рис. 39 в перспективе изображена треугольная призма KDN ,

являющаяся частью внешнего кубика рис. 38 (а). Площадь ее грани $KDdk$ равна $\frac{1}{2} l^2$. По этой грани, согласно нашему предположению, действует сжимающее напряжение величины p . Следовательно, по этой грани в направлении, параллельном DN , действует результирующая сила величины $\frac{1}{2} l^2 p$. Аналогичные соображения показывают, что на грани $DNnd$ в направлении, параллельном KD , действует сила той же величины. Очевидно, что результирующая этих двух сил имеет величину $l^2 p / \sqrt{2}$. Она приложена в середине наклонной грани $KNnk$ и действует в направлении, параллельном KN .

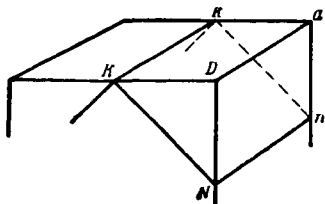


Рис. 39.

Треугольная призма находится в равновесии и, следовательно, рассматриваемая сила, подобно тому как это происходит в случае двух соприкасающихся шероховатых поверхностей, должна уравниваться усилием, возникающим на плоскости $KNnk$. Другими словами, сила передается внутреннему кубу $KLMN$ [рис. 38 (а)] через касательное усилие или напряжение, интенсивность которого (так как площадь $KNnk$ равна $l^2 / \sqrt{2}$) равна величине p . Если мы аналогично рассмотрим другие грани кубика $KLMN$ (рис. 38), то увидим, что нагрузки, действующие на его гранях, будут как раз теми, которые изображены на рис. 40 (а). Касательные напряжения на этом рисунке обозначены через q и имеют интенсивность, равную p .

121. Деформированный кубик показан на рис. 40 (b). Угол γ сильно преувеличен. Так как $q = p$ по интенсивности, то мы можем написать (12) в виде

$$\gamma = \frac{q}{C}, \quad (13)$$

где

$$C = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (14)$$

Таким образом, мы видим, что срезывающее или касательное напряжение вызывает относительное угловое перемещение граней, на которые оно действует. Такую деформацию мы называем угловой деформацией или сдвигом и измеряем ее углом γ , выраженным в радианной мере. Из (13) видно, что касательное напряжение и сдвиг связаны упругой постоянной C , которую мы назовем модулем сдвига. Модуль сдвига выражается через E и σ с помощью соотношения (14).

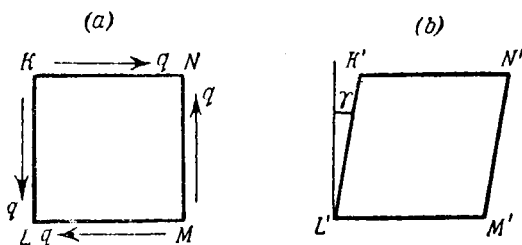


Рис. 40.

122. Вернемся к (5). Подставим в него (10) и для удельной упругой энергии деформации в случае простого сдвига будем иметь:

$$u = \frac{1 + \sigma}{E} p^2$$

или, согласно результатам предшествующего параграфа,

$$u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \gamma^2 \quad [\text{согласно (13)}]. \quad (15)$$

Соотношения между упругими постоянными.

Пределы для σ

123. Упругая постоянная E (модуль Юнга) обязательно положительна, ибо простое продольное растяжение должно (в механически устойчивом материале, ср. § 13 главы I) вызывать положительное продольное удлинение. Постоянные K и C , введенные соответственно в §§ 118 и 121, также должны быть положительными, ибо u , данная выражением (9) или (15),

представляет собой положительную величину

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad (8) \text{ bis}$$

и

$$C = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (14) \text{ bis}$$

Отсюда мы заключаем, что $(1-2\sigma)$ и $(1+\sigma)$ должны быть положительными, т. е. σ должно лежать в пределах

$$-1 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Ни один из известных нам в природе материалов в действительности не характеризуется отрицательной величиной коэффициента Пуассона. Для материалов, имеющих практическое значение, σ приблизительно лежит между 0,25 (стекло) и 0,45 (свинец)¹⁾. Но надо подчеркнуть, что мы можем, *не нарушая условий механической устойчивости, представить себе* материал, имеющий отрицательное значение коэффициента Пуассона, т. е. расширяющийся в стороны при простом продольном растяжении. Только при этом боковое расширение не должно быть больше, чем продольное удлинение.

Если условие (16) выполнено, то удельная упругая энергия деформации для любого напряженного состояния, рассмотренного в этой главе, будет положительна. На самом деле выражение (5) можно представить в форме

$$u = \frac{1}{6E} \left[(1-2\sigma)(p_1+p_2+p_3)^2 + (1+\sigma) \left\{ (p_2-p_3)^2 + (p_3-p_1)^2 + (p_1-p_2)^2 \right\} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9K} (p_1+p_2+p_3)^2 + \frac{1}{6C} \left\{ (p_2-p_3)^2 + (p_3-p_1)^2 + (p_1-p_2)^2 \right\} \right]. \quad (17)$$

Если (16) удовлетворено, то K и C оба положительны, т. е. u записано нами как сумма необходимо положительных слагаемых. Если K и C были бы отрицательны, то мы могли бы p_1, p_2, p_3 дать такие значения, которые сделали бы u отрицательным.

¹⁾ Ср. таблицу «Коэффициенты упругости» (Elasticities), данную Kaye and Laby, Physical and Chemical Constants, etc. Для жидкости E и C равны нулю, а $\sigma = \frac{1}{2}$.

124. Нами введены четыре упругие постоянные, а именно E , σ , K и C . Но из них только две независимы, ибо, как мы видели, K и C можно выразить через E и σ . Отсюда следует, что, задавая какие-нибудь две из четырех упругих постоянных, мы можем получить значения двух других. Так, если K и C заданы, то

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{9KC}{3K + C}, \\ \sigma &= \frac{1}{2} \frac{3K - 2C}{3K + C}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

K и C могут с физической точки зрения рассматриваться как основные упругие постоянные. Объемный модуль K измеряет сопротивление материала изменению объема, которое не сопровождается изменением формы (при гидростатическом давлении $e_1 = e_2 = e_3$). Модуль сдвига C измеряет сопротивление материала изменению его формы, которое не сопровождается изменением объема¹⁾.

Примеры

1. (Oxford F. E. E. S. 1931.) Вычислить значение коэффициента Пуассона для металла, у которого модуль Юнга $1,15 \cdot 10^6$ кг/см² и модуль сдвига $0,436 \cdot 10^6$ кг/см². Проверить каждую из используемых формул.

[0,317.]

Коротко проанализировать этот метод определения коэффициента Пуассона.

2. (Camb. M. S. T. 1906.) При проектировании конструкции было решено, что наибольшее удлинение не должно превосходить того удлинения, которое вызывается при простом опыте на растяжение нормальным напряжением в 945 кг/см². Показать, что максимальное допустимое касательное напряжение при чистом сдвиге

равно $\frac{945}{1 + \sigma}$ кг/см².

При этих ограничениях на деформации, вычислить в кгсм количество энергии, которую может запастись 1000 кг материала в случаях: (I) простого растяжения, (II) чистого сдвига. Взять $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см², $\sigma = 0,3$, удельный вес материала равным $0,00785$ кг/см³.

[(I) 27 600 кгсм; (II) 42 500 кгсм.]

¹⁾ Это было замечено Стоксом (1845).

Следствия сопротивления боковому расширению

125. В качестве примера на приложение общих уравнений (3), рассмотрим, как будет вести себя кубик, подверженный равномерному продольному напряжению p_1 , в том случае, когда боковое сжатие может свободно происходить в одном направлении (в направлении e_3), но не может происходить в другом направлении (в направлении e_2). Несколько трудно представить себе, как эти условия можно осуществить практически. Однако позже мы увидим, что эти результаты имеют приложение в теории изгиба балок и пластинок¹⁾.

Наложенные условия требуют, чтобы

$$e_2 = 0, p_3 = 0. \quad (I)$$

Подставив их в (3), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} (p_1 - \sigma p_2), \\ 0 &= \frac{1}{E} (p_2 - \sigma p_1), \\ e_3 &= -\frac{\sigma}{E} (p_1 + p_2). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Исключим p_2 из первого и второго соотношений (II) и найдем, что

$$e_1 = \frac{1 - \sigma^2}{E} p_1. \quad (III)$$

Таким же путем с помощью второго и третьего соотношений мы получим:

$$e_3 = -\frac{\sigma}{E} p_1 (1 + \sigma) = -\frac{\sigma}{1 - \sigma} e_1, \quad (IV)$$

откуда мы можем видеть, что эффективный модуль упругости ($= p_1/e_1$) увеличивается. Вместо E мы имеем E' , где

$$E' = \frac{E}{1 - \sigma^2}.$$

Эффективное значение коэффициента Пуассона ($= -e_3/e_1$) тоже изменилось и стало не σ , а σ' , где

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (19)$$

¹⁾ Ср. § 231 и подстрочное примечание.

126. Если боковому расширению оказывают препятствие в *обоих* направлениях, то вместо условия (I) имеем

$$e_2 = e_3 = 0, \quad (V)$$

при этом должно быть:

$$p_2 = p_3 = \frac{\sigma}{1 - \sigma} p_1. \quad (4) \text{ bis}$$

Подставляя (4) в первое из соотношений (3), мы получим, что

$$e_1 = \frac{p_1}{E} \frac{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}{1 - \sigma}.$$

Таким образом, эффективный модуль упругости ($= p_1/e_1$) увеличивается в этом случае от величины E до

$$E' = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} E. \quad (20)$$

Эффективное значение коэффициента Пуассона равно нулю.

Примеры

3. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Образец из изотропного материала подвержен продольному сжатию, действующему в направлении x . Боковые связи ограничивают величину e_{yy} половиной значения e_{zz} ; в направлении z связи не оказывают препятствия.

Показать, что эффективный модуль упругости материала (для продольного усилия) равен $\frac{2 + \sigma}{(2 - \sigma)(1 + \sigma)} E$.

4. (Camb. M. S. T. 1931.) Вертикальная колонна состоит из стальной трубы, с внутренним диаметром 91,5 см и толщиной 0,95 см, наполненной бетоном. Колонна подвержена действию вертикальной нагрузки, результирующая которой направлена по оси трубы.

Отношение модуля Юнга стали к модулю Юнга бетона = 15. Коэффициент Пуассона для бетона = 0,4. Коэффициент Пуассона для стали = 0,3.

Взяв поперечное сечение на некотором расстоянии от конца, найти, какую часть нагрузки воспринимает стальная труба. [0,38]

[N. В. Кольцевое напряжение в трубе в 48 раз больше поперечного напряжения бетона. Радиальным напряжением в трубе можно пренебречь (ср. главу V, §§ 152–154).]

Соотношения между напряжениями и деформациями в общем случае

127. В §§ 119—121 были изучены касательные напряжения и деформации сдвига. Еще раньше мы рассматривали нормальные напряжения. Если на трех парах граней прямоугольного параллелепипеда, принадлежащего телу, действуют касательные напряжения вместе с нормальными (рис. 37), то наш параллелепипед будет находиться в наиболее общем напряженном состоянии. Это напряженное состояние подчинено единственному условию: напряжение должно быть равномерно распределено по площади каждой грани. Эффект воздействия такой нагрузки на параллелепипед можно получить по принципу суперпозиции. Ребра параллелепипеда удлинятся на величины, данные формулами (3), а каждый из трех первоначально прямых углов между прилегающими гранями изменится на «угол сдвига». Таким образом деформация определяется шестью величинами, а именно: тремя удлинениями e_1, e_2, e_3 и тремя величинами «сдвига» (§ 121) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

***128.** Напряженное состояние определяется тоже шестью величинами, а именно: тремя нормальными напряжениями и тремя касательными напряжениями вида, изображенного на рис. 40 (а). Против этого положения сразу же хочется возразить, так как нет причин думать, что в общем случае существует равенство между касательными напряжениями, действующими на перпендикулярных гранях. В частном случае, рассмотренном в §§ 119—121, такое равенство было установлено.

Но если (как мы предположили) каждая составляющая напряжения распределена по грани, на которую она действует равномерно, то, основываясь на общих положениях механики, мы можем показать, что это равенство имеет место всегда.

Для доказательства рассмотрим кубик материала, показанный на рис. 41.

Каждое напряжение имеет постоянную интенсивность и поэтому его результирующая (интенсивность, умноженная на площадь грани) будет действовать в центре соответствующей прямоугольной грани. На рис. 41 (а) стрелками изображены эти результирующие силы, из которых три связаны с какой-нибудь одной из шести граней. Пусть A и B будут

центрами двух противоположных граней. Из рис. 41(a) видно, что только четыре силы, изображенные жирными стрелками, стремятся повернуть кубик около оси AB . Линии действия других сил или проходят через ось AB , или параллельны ей.

Таким образом, рассматривая поворот кубика около AB , мы можем ограничиться только четырьмя силами, показанными на рис. 41(b). Пусть интенсивность касательного напряжения

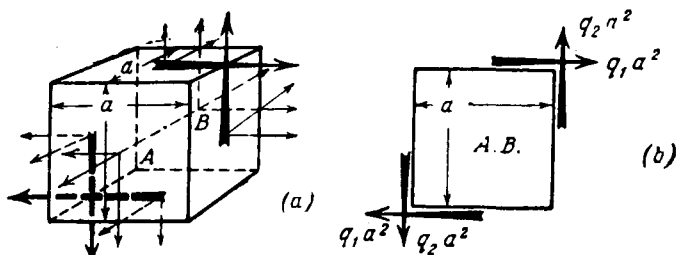


Рис. 41.

на верхней и нижней гранях будет q_1 , интенсивность касательного напряжения на двух боковых гранях — q_2 . Тогда соответствующие результирующие силы имеют значения $q_1 a^2$ и $q_2 a^2$, что показано на рис. 41(b). Моменты этих сил относительно оси AB будут: $q_1 a^3$ (направлен по часовой стрелке) и $q_2 a^3$ (направлен против часовой стрелки). Результирующий вращающий момент равен $(q_1 - q_2) a^3$ и направлен по часовой стрелке.

Мы предположили, что касательное напряжение имеет равную интенсивность на двух противоположных гранях. Это вполне справедливо, если размеры кубика достаточно малы. И вообще, если кубик мал, то мы *всегда* можем считать, что напряжения на гранях равномерно распределены и что плотность кубика ρ постоянна. Итак, если кубик достаточно мал, то его масса равна ρa^3 , а момент инерции относительно оси AB равен $(\frac{1}{6} a^2) \rho a^3$. Угловое ускорение кубика при его вращении около прямой AB , проходящей через его центр тяжести, будет иметь величину

$$\frac{(q_1 - q_2) a^3}{(\frac{1}{6} a^2) \rho a^3} = \frac{6 (q_1 - q_2)}{\rho a^2}.$$

Отсюда видно, что угловое ускорение, если только $(q_1 - q_2)$ не является малой величиной по крайней мере порядка a^3 , при беспредельном уменьшении размеров кубика будет стремиться к бесконечности. Если кубик составляет часть непрерывного материала, то *независимо от того, находится ли материал в равновесии или в движении под действием рассматриваемого напряжения*, полученный нами вывод недопустим. Мы заключаем, что во всех случаях должно быть $q_1 = q_2$, т. е. касательное напряжение на двух перпендикулярных гранях должно всегда иметь одинаковые интенсивности. В специальном случае (рис. 40) это было установлено раньше.

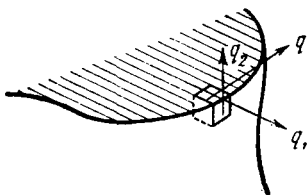


Рис. 42.

Вернувшись к § 127, мы можем теперь утверждать, что наиболее общий случай деформации включает три удлинения, связанные с соответствующими нормальными напряжениями формулами (3) и три «сдвига», связанные с соответствующими касательными напряжениями выражениями типа (13). Каждое касательное напряжение вызывает соответствующий ему сдвиг и не вызывает никаких других деформаций, напротив, каждое нормальное напряжение, как мы видели в § 113, вызывает деформации во всех трех направлениях.

Дальнейшее исследование общего случая мы отложим до тех пор, пока не разовьем более полные теории напряжений и деформаций. Сейчас рассмотрим важное следствие из теоремы, установленной в этом параграфе.

Касательное напряжение не может пересекать свободную от нагрузки поверхность тела

129. На рис. 42 заштрихованная поверхность представляет собой плоское сечение, перпендикулярное боковой поверхности тела. Пусть граница тела (изогнутая поверхность на рисунке) ненагружена, или, по крайней мере, свободна от касательных напряжений. Рассмотрим очень маленький прямоугольный кубик материала, одна грань которого принадлежит поверхности

тела, а другая — проведенному сечению. По предположению, касательное напряжение, обозначаемое q_2 , равно нулю. Из теоремы § 128 следует, что касательное напряжение, обозначаемое q_1 , тоже должно обращаться в нуль. Отсюда видно, что касательное напряжение, действующее в плоском сечении вблизи поверхности тела (где расположен наш элементарный кубик), не может иметь нормальную к поверхности тела составляющую. Другими словами, это напряжение должно быть направлено по касательной к поверхности тела, что и указано стрелкой с буквой q на рис. 42. *Касательное напряжение не может пересекать свободную от нагрузки поверхность тела.*

Сложение нормальных и касательных напряжений

130. В §§ 119 и 120 мы, зная нормальные напряжения, действующие на гранях данного кубика и соответствующие

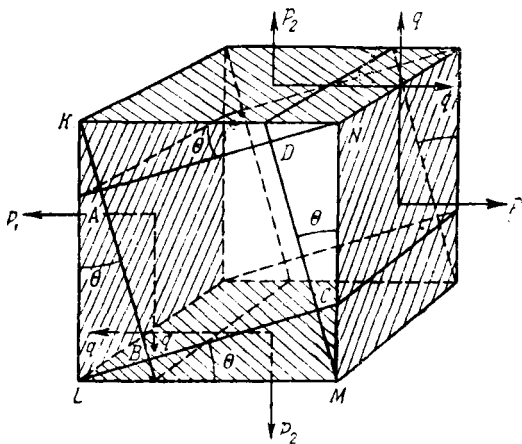


Рис. 43.

им деформации, определили напряжения, действующие на внутреннем кубике, грани которого имеют некоторый наклон к граням первоначального кубика, и возникающие в этом кубике деформации.

Методы, которыми проводилось это определение, могут быть использованы в более общем случае. Когда дело касалось напряжений (§ 120), мы пользовались только теоремами динамики. Когда же дело касалось деформации (§ 119), мы прибегали только к кинематике. С помощью тех же методов постараемся получить напряжения и деформации в прямоугольном кубике, грани которого под *любым* углом наклонены к граням первого, принимая, что на первоначальный кубик действуют не только нормальные (как в § 119), но и касательные напряжения.

Рассматривается кубик, вырезанный из тела. Ребра его имеют длину l (рис. 43). Две пары противоположных граней, отмеченные на рисунке штриховкой, подвержены действию нормальных напряжений интенсивности p_1 , p_2 и касательных напряжений интенсивности q (рис. 43). (В § 128 мы видели, что касательное напряжение должно иметь одну и ту же интенсивность на обеих парах граней.) Через ребра, по которым попарно пересекаются четыре нагруженные грани, проведены сечения плоскостями, наклоненными под углом θ к граням кубика. Внутри первоначального кубика образуется второй, меньший. Одна из его граней $ABCD$. Исследуем напряжения, которые действуют на гранях этого внутреннего кубика, и возникающие в нем деформации.

Рис. 44(a) показывает тот же кубик спереди. Рассмотрим напряжения, действующие на гранях треугольной призмы с основанием MNR . Нормальное напряжение на грани MN имеет интенсивность p_1 (рис. 43), а площадь этой грани равна $lL \cos \theta$, где $L (= l \sec \theta)$ обозначает длину MR . Сила, действующая на призму MNR и соответствующая p_1 , равна $p_1 lL \cos \theta$, а сила, соответствующая касательному напряжению q на грани MN , равна $q lL \cos \theta$, что показано стрелками на рис. 44 (b). Площадь грани RN равна $lL \sin \theta$, она подвержена нормальному напряжению интенсивности p_2 и касательному напряжению интенсивности q (рис. 43). Соответствующие силы суть $p_2 lL \sin \theta$ и $q lL \sin \theta$, что показано тоже на рис. 44 (b). Пусть p' , q' обозначают (неизвестные) нормальное и касательное напряжения на наклонной грани MR ; площадь которой равна lL . Соответствующие силы суть $p' lL$ и $q' lL$. Они тоже указаны на рис. 44 (b).

Силы, действующие на MNR , разложим на два направления: параллельное и перпендикулярное наклонной грани MR . Результирующая сила по направлению p' будет равна:

$$\begin{aligned} & IL (p' - p_1 \cos^2 \theta - p_2 \sin^2 \theta - 2q \sin \theta \cos \theta) = \\ & = IL \left\{ p' - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) - \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \cos 2\theta - q \sin 2\theta \right\}, \quad (I) \end{aligned}$$

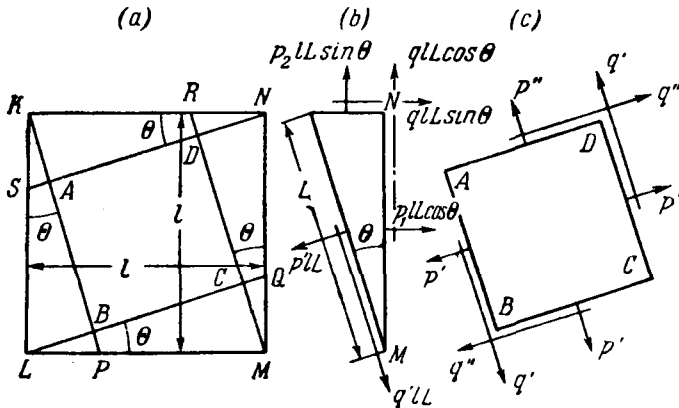


Рис. 44.

а результирующая сила в направлении q' :

$$\begin{aligned} & IL \{ q' + (p_1 - p_2) \sin \theta \cos \theta + q (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \} = \\ & = IL \left\{ q' + \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \sin 2\theta - q \cos 2\theta \right\}. \quad (II) \end{aligned}$$

Условие равновесия MNR дает:

$$\left. \begin{aligned} p' &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) + \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \cos 2\theta + q \sin 2\theta, \\ q' &= -\frac{1}{2} (p_1 - p_2) \sin 2\theta + q \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

131. Выше мы допускали, что напряжения равномерно распределены по площадям граней. Если размеры кубика достаточно малы, то это допущение всегда можно сделать. Теперь

покажем, что соотношения (21), подобно равенству касательных напряжений § 128, имеют место независимо от того, находится ли материал в равновесии или ускоренном движении.

Объем призмы MNR равен $\frac{1}{2} l^3 L \sin \theta$. Масса ее пропорциональна этой величине. Следовательно, если выражения, заключенные в фигурные скобки в (I) и (II), не равны нулю по отдельности, то материал подвержен ускорениям, которые возрастают беспрдельно по мере того, как размеры кубика уменьшаются.

132. Вернемся к рис. 44 и заметим, что усилия на наклонной грани MR треугольной призмы будут сопровождаться усилиями на соответствующей грани прямоугольного кубика $ABCD$. Интенсивности и направления последних указаны на рис. 44 (с). Аналогично можно показать, что напряжения на грани AD , равные p'' и q'' и действующие в указанных на рисунке направлениях, суть

$$\begin{aligned} p'' &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) - \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \cos 2\theta - q \sin 2\theta, \\ q'' &= -\frac{1}{2} (p_1 - p_2) \sin 2\theta + q \cos 2\theta = \\ &= q' \quad (\text{в соответствии с § 128}). \end{aligned} \quad (22)$$

Тот же результат можно получить другим путем. Плоскость NS образует с плоскостью MN угол $\theta + \frac{\pi}{2}$. Следовательно, мы можем получить p'' и q'' , если вместо 2θ в (21) подставим $(2\theta + \pi)^1$.

Также можно убедиться, что напряжения на AB и BC будут иметь (как и должно быть) ту же интенсивность, что и напряжения на CD , DA . Таким образом, прямым применением законов динамики можно показать, что напряжения на какой-либо наклонной плоскости, проходящей через некоторую точку, выражаются как функции напряжений, заданных на каких-либо двух перпендикулярных плоскостях, проходящих через эту точку²).

¹) Нужно принять во внимание направление, в котором измеряется q'' на рис. 44 (с).

²) Что касается рис. 43, то, рассматриваемая точка лежит на ребре, перпендикулярном LM , MN ; напряжения даны на (заштригованных) перпендикулярных плоскостях LM , MN , и мы найдем выражения для напряжений на наклонной плоскости, содержащей MD .

133. Рассмотрим деформации, испытываемые нашим внутренним кубиком. При исследовании используются методы, аналогичные методам § 119. На рис. 45 изображена деформация внешнего кубика $KLMN$. На этом рисунке сохранены обозначения рис. 44. Вследствие напряжений, действующих на гранях кубика $KLMN$, его ребра KN , LM испытывают удлинение e_1 . Ребра

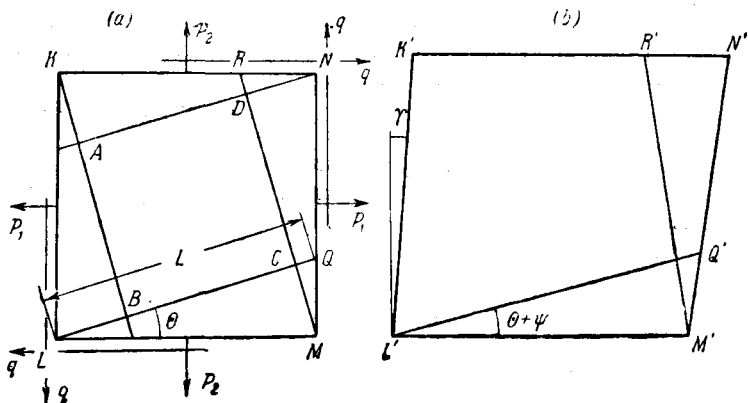


Рис. 45.

KL , MN испытывают удлинение e_2 . Первоначально прямые углы KLM , KNM , уменьшаются на угол «сдвига» γ . Остальные четыре ребра испытывают растяжение e_3 . Из (3), так как $p_3 = 0$, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E}(p_1 - \sigma p_2), \\ e_2 &= \frac{1}{E}(p_2 - \sigma p_1), \\ e_3 &= -\frac{\sigma}{E}(p_1 + p_2), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

и, как доказано в §§ 119—121,

$$\gamma = \frac{q}{C}. \quad (13) \text{ bis}$$

Очевидно, что удлинение e_3 будет также испытываться ребрами внутреннего кубика $ABCD$, перпендикулярными плоскости рис. 45.

134. Вычислим удлинения AB, BC, CD, DA . Начнем с того, что найдем удлинение LQ (рис. 45), которое обозначим e' . Длины LQ, LM, MQ (рис. 45a) до деформации суть $L, L \cos \theta$ и $L \sin \theta$ и после деформации (рис. 45b)

$$\left. \begin{aligned} L'Q' &= L(1 + e'), \\ L'M' &= L \cos \theta (1 + e_1), \\ M'Q' &= L \sin \theta (1 + e_2). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Первоначально прямой угол LMQ после деформации изменится, и мы будем иметь

$$\angle L'M'Q' = \frac{\pi}{2} + \gamma. \quad (II)$$

Очевидно,

$$L'Q'^2 = L'M'^2 + M'Q'^2 - 2L'M' \cdot M'Q' \cos \angle L'M'Q',$$

или, согласно (I) и (II),

$$(1 + e')^2 = \cos^2 \theta (1 + e_1)^2 + \sin^2 \theta (1 + e_2)^2 + \sin 2\theta (1 + e_1)(1 + e_2) \sin \gamma.$$

Отсюда, пренебрегая членами второго порядка малости по сравнению с e_1, e_2 и γ , мы получим, что

$$\begin{aligned} e' &= e_1 \cos^2 \theta + e_2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \gamma \sin 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} (e_1 + e_2) + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Удлинение MR можно найти точно тем же путем или путем подстановки $\theta + \frac{\pi}{2}$ вместо θ (см. рис. 45a) в (24). Мы получим, что

$$e'' = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) - \frac{1}{2} (e_1 - e_2) \cos 2\theta - \frac{1}{2} \gamma \sin 2\theta. \quad (25)$$

Итак, определены три удлинения, которые испытывают ребра внутреннего кубика $ABCD$ (рис. 45). Легко проверить, что

e' , e'' связаны с p' , p'' , выраженными формулами (21) и (22), соотношениями, тождественными по форме с первым и вторым из (23).

135. Найдем сдвиг кубика $ABCD$. Пусть угол $Q'L'M'$ (в деформированной конфигурации) будет $(\theta + \psi')$, тогда (см. рис. 45b)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta + \psi') &= \frac{Q'M' \cos \gamma}{L'M' + Q'M' \sin \gamma} = \\ &= \frac{QM(1 + e_2) \cos \gamma}{LM(1 + e_1) + QM(1 + e_2) \sin \gamma} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \theta (1 + e_2) \cos \gamma}{1 + e_1 + (1 + e_2) \sin \gamma \operatorname{tg} \theta} \end{aligned} \quad (I)$$

и $\operatorname{tg}(\theta + \psi') = \operatorname{tg} \theta$, если мы пренебрежем e_1 , e_2 , γ . Отсюда вытекает, что ψ' малая величина порядка деформации. Тогда, с точностью до малых первого порядка, из (I) мы имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta + \psi'}{1 - \psi' \operatorname{tg} \theta} = \operatorname{tg} \theta \frac{1 + e_2}{1 + e_1 + \gamma \operatorname{tg} \theta},$$

откуда получается, что

$$\psi' = -\frac{1}{2}(e_1 - e_2) \sin 2\theta - \gamma \sin^2 \theta. \quad (II)$$

Угол ψ' представляет собой изменение вследствие деформации угла QLM на рис. 45(a), т. е. поворот LQ против часовой стрелки. Угол QLM вследствие деформации возрастает. Подставив $(\theta + \frac{\pi}{2})$ вместо θ в (II), мы для поворота MR получим:

$$\psi'' = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \sin 2\theta - \gamma \cos^2 \theta. \quad (III)$$

Теперь сдвиг кубика $ABCD$, т. е. изменение вследствие деформации первоначально прямого угла BCD , очевидно, будет

$$\gamma' = \psi' - \psi'', \quad (IV)$$

или, после подстановки ψ' и ψ'' из (II) и (III),

$$\gamma' = -(e_1 - e_2) \sin 2\theta + \gamma \cos 2\theta. \quad (26)$$

А после подстановки e_1, e_2 из (23) и γ из (13):

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{1+\sigma}{E}(p_1-p_2)\sin 2\theta + \frac{q}{C}\cos 2\theta = \\ &= \frac{1}{C}\left[-\frac{1}{2}(p_1-p_2)\sin 2\theta + q\cos 2\theta\right]. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано соотношение (14) между E, C и σ . Отсюда, согласно (21),

$$\gamma' = \frac{q'}{C}.$$

Преобразования напряжений и деформаций. Главные плоскости напряжений и главные напряжения

136. Уравнения (21), (24) и (26) являются формулами преобразования напряжений и деформаций для плоских напряженных состояний. С их помощью напряженное или деформированное состояние, заданное компонентами по отношению к некоторой прямоугольной системе координат, может быть выражено в компонентах, отнесенных к другой прямоугольной системе осей, наклоненной к первой под углом θ .

Возьмем первое соотношение (21). Пусть в нем p_1, p_2, q заданы. Посмотрим, как будет меняться p' с изменением θ . Стационарные (максимум или минимум) значения p' соответствуют тем значениям θ , для которых $\frac{dp'}{d\theta} = 0$, т. е. корням уравнения

$$(p_1 - p_2) \sin 2\theta = 2q \cos 2\theta. \tag{27}$$

Пусть φ будет наименьший корень уравнения (27) в интервале $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Тогда из (27) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\varphi &= \frac{2q}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2}}, \\ \cos 2\varphi &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2}}, \end{aligned} \right\} \tag{I}$$

а поэтому (21) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} p' &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2} \cos 2(\theta - \varphi), \\ q' &= -\frac{1}{2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2} \sin 2(\theta - \varphi). \end{aligned} \right\} (28)$$

$\frac{\partial p'}{\partial \theta}$ равно нулю при

$$\sin 2(\theta - \varphi) = 0, \quad (II)$$

т. е. при $\theta = \varphi$ или $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Для обоих этих значений q' равно нулю. Таким образом, мы видим, что на плоскостях, для которых напряжения имеют стационарные значения, касательные напряжения не действуют. Такие плоскости называются главными плоскостями напряжений, а нормальные напряжения, которые действуют на этих плоскостях, называются главными напряжениями.

Для главных плоскостей имеет место (II), и следовательно

$$\cos 2(\theta - \varphi) = \pm 1, \quad (III)$$

а отсюда следует, что величины главных напряжений будут:

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2}; \quad (29)$$

знак (+) соответствует $\theta = \varphi$, а знак (-) $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = p_1 + p_2. \quad (30)$$

Главные плоскости деформаций и главные деформации

137. Также могут быть исследованы выражения (24) и (26), т. е. мы можем задать e_1, e_2, γ и проследить изменение e' при изменении θ . Стационарные значения e' соответствуют тем значениям θ , для которых $\frac{\partial e'}{\partial \theta} = 0$, т. е. корням уравнения

$$(e_1 - e_2) \sin 2\theta = \gamma \cos 2\theta, \quad (31)$$

которые, как и раньше, разнятся друг от друга на $\frac{\pi}{2}$. Корни (31), будучи внесены в (26), обратят γ в нуль. Отсюда мы видим, что плоскости, перпендикулярные направлениям, для которых удлинения (e') имеют стационарные значения, остаются перпендикулярными друг к другу после деформации. Такие плоскости называются главными плоскостями деформации, а соответствующие им удлинения называются главными деформациями.

Уравнение (31), если мы подставим e_1, e_2 из (23) и γ из (13), а затем используем соотношение (14) между E, C и σ , окажется тождественным с (27). Следовательно, главные плоскости напряжения и деформаций совпадают (в материалах такого рода, который мы рассматриваем в этой главе)¹⁾. Эти направления определяются значениями $\theta = \varphi$ или $\varphi + \frac{\pi}{2}$, а φ может быть задано или соотношениями (I) § 136 или эквивалентными им:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\varphi &= \frac{\gamma}{\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + \gamma^2}}, \\ \cos 2\varphi &= \frac{(e_1 - e_2)}{\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + \gamma^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Точно так же, как и раньше, мы можем показать, что главные деформации даются формулами

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + \gamma^2}; \quad (32)$$

знак (+) соответствует $\theta = \varphi$, а знак (-) $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = e_1 + e_2. \quad (33)$$

Стационарные значения касательного напряжения и сдвига

138. Рассмотрим значения θ , для которых q' имеет стационарные значения. Из второго соотношения (28) видно, что эти значения θ должны быть корнями уравнения

$$\cos 2(\theta - \varphi) = 0.$$

¹⁾ Т. е. в изотропных материалах. Ср. гл. X, § 315.

Таким образом, их значения равны:

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{4} \text{ или } \varphi + \frac{3}{4}\pi, \quad (34)$$

и мы можем сказать, что *касательное напряжение имеет максимальную интенсивность на плоскостях, являющихся биссектрисами углов между главными плоскостями*. Согласно второму соотношению (28), максимальная интенсивность касательного напряжения будет

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2}, \quad (35)$$

т. е. она равна половине разности главных напряжений, данной формулой (29), а соответствующее (максимальное) значение сдвига будет

$$\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 = \pm \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + \gamma^2}, \quad (36)$$

что представляет собой разность главных деформаций, данной формулой (32). В (35) и (36) знак (+) соответствует $\theta = \varphi + \frac{3}{4}\pi$, а знак (-) $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$ из значений (34).

Разложение напряженного состояния на касательное напряжение, сопровождаемое равными нормальными напряжениями

139. Мы видели, что напряженное состояние, изображенное на рис. 43, может быть представлено двумя чисто нормальными напряжениями \bar{p}_1, \bar{p}_2 . Направления \bar{p}_1, \bar{p}_2 можно найти из (27) § 136. Обратное, данная плоская система нормальных напряжений (\bar{p}_1, \bar{p}_2) может быть заменена нормальными напряжениями других направлений, действующими вместе с касательными напряжениями. Нормальные напряжения можно сделать *равными*, если специально выбрать их направление,

Положим

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= \bar{p} + \bar{p}', \\ \bar{p}_2 &= \bar{p} - \bar{p}', \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2), \quad \bar{p}' = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2).$$

Отсюда следует, что данное напряженное состояние мы можем рассматривать как состояние, получившееся в результате суперпозиции: (I) системы, составленной из двух равных нормальных напряжений \bar{p} , и (II) системы, составленной из двух равных и противоположно направленных нормальных напряжений $\pm \bar{p}'$.

Если в (21) положить

$$p_1 = p_2 = \bar{p}, \quad q = 0,$$

то мы получим

$$p' = \bar{p}, \quad q' = 0,$$

т. е. первая из составляющих систем (I) включает в себя напряжение \bar{p} , не сопровождаемое касательным напряжением на *любой* плоскости. Если в тех же уравнениях положить

$$p_1 = -p_2 = \bar{p}', \quad q = 0,$$

то мы получим

$$p' = \bar{p}' \cos 2\theta, \quad q' = -\bar{p}' \sin 2\theta,$$

откуда ясно, что вторая составляющая система (II) является чисто касательным напряжением интенсивности \bar{p}' на тех плоскостях, для которых $\cos 2\theta$ обращается в нуль (т. е. на плоскостях, наклоненных под углом в 45° к направлениям \bar{p}_1, \bar{p}_2).

Таким образом, напряженное состояние, представленное \bar{p}_1, \bar{p}_2 , эквивалентно касательному напряжению интенсивности $\frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ вместе с одинаковыми нормальными напряже-

ниями интенсивности $\frac{1}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2)$ на плоскостях, наклоненных под углом в 45° к направлениям \bar{p}_1, \bar{p}_2 .

Примеры

5. (Самб. М.С.Т. 1916.) Пластинка подвержена двум взаимно перпендикулярным напряжениям, из которых одно сжимающее 472 кг/см^2 , другое растягивающее 787 кг/см^2 , и касательному напряжению, параллельному этим направлениям в 472 кг/см^2 . Найти главные напряжения и удлинения, взяв коэффициент Пуассона равным 0,3, а $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ [945 кг/см^2 и -630 кг/см^2 ; 5,33 и $-4,29 \cdot 10^{-4}$.]

6. (Самб. М.С.Т. 1930.) Осевая сила тяги вызывает в валу винта сжимающее напряжение в 313 кг/см^2 . Касательное напряжение на поверхности вследствие крутящего момента равно 787 кг/см^2 . Вычислить наибольшее касательное напряжение в материале и указать плоскости, вдоль которых это напряжение действует. [803 кг/см^2 . Плоскости наклонены под углами $5^\circ 40'$ и $95^\circ 40'$ к оси вала.]

7. (Самб. М.С.Т. 1912.) Железный куб, длина ребра которого равна 254 см , на двух противоположных гранях подвержен действию равномерного давления в 1575 кг/см^2 . Боковое давление не дает другим граням раздаваться на величину большую, чем $0,0508 \text{ см}$. Определить давление на этих гранях и максимальное касательное напряжение в кубе. $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\sigma = 0,3$. [$72,3 \text{ кг/см}^2$, 750 кг/см^2 .]

8. (Самб. М.С.Т. 1933.) На одной из сторон металлической пластинки нанесены две прямые Ox и Oy под прямым углом друг к другу. Направление Ox фиксировано. Пластинка подвергается следующим напряжениям:

равномерному растягивающему напряжению в 1102 кг/см^2 на плоскостях, перпендикулярных Ox ;

равномерному сжимающему напряжению в 472 кг/см^2 на плоскостях, перпендикулярных Oy ;

равномерному касательному напряжению в 630 кг/см^2 на плоскостях, перпендикулярных к Ox и Oy в направлении, стремящемся уменьшить угол yOx .

Взяв E равным $2,05 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, а $\sigma = 0,3$, определить:

(а) Длины и направления полуосей эллипса, в который после деформации превратится окружность, заданная до деформации уравнением

$$x^2 + y^2 = (7,62)^2.$$

[7,62569 см и 6,61596 см, наклон к Ox $19^\circ 20'$ и $109^\circ 20'$.]

(б) Возрастание площади треугольника, вершины которого находятся в точках (0,0), (15,25; 0) и (10,16; 12,70). [0,0208 см².]

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ IV

**Поведение материала за пределом
пропорциональности.
Теории прочности**

140. В этой книге мы рассматриваем только те напряжения, которые лежат в границах применимости закона Гука. Очень трудные проблемы неупругой (или пластической) деформации не затрагиваются. Однако стоит дать краткое изложение методов, с помощью которых результаты теории упругости применяются в практике к вопросам прочности (гл. I, § 2). Изложим это весьма кратко и заметим, что многие высказанные здесь положения должны быть уточнены.

141. В таблице на стр. 186 для некоторых характерных материалов приведены результаты испытаний на растяжение. Эти испытания подобны тем, которые описаны в § 112, но теперь образец испытывался вплоть до разрушения. Автор не думает, что приведенные цифры весьма точны. Однако они дадут некоторое представление о значениях тех величин, с которыми приходится иметь дело¹⁾.

Модуль Юнга (E) и коэффициент Пуассона (σ) уже были определены. В следующих трех столбцах помещены значения напряжений, характеризующих важнейшие явления неупругого характера. Напряжения вычислены путем деления нагрузки на площадь первоначального поперечного сечения образца.

142. Если напряжения малы, то возникающие в образце удлинения им пропорциональны. С возрастанием нагрузки удлинения возрастают быстрее, чем напряжения. Первое отклонение от пропорциональности (закона Гука) происходит при так называемом пределе пропорциональности. Он может быть обнаружен только с помощью точных измерительных инструментов (экстензометров) и будет зафиксирован раньше или позже, в зависимости от того,

¹⁾ В целях получения более полных данных читатель может обратиться, например, к книгам: H. J. Gough, *The Fatigue of Metals* (London, 1924) или Тимошенко и Лессельс, *Прикладная теория упругости*. Ради значений E , C , K , σ — к Kaye и Labu, *Physical and Chemical Constants*. См. примечание на стр. 659.

ТАБЛИЦА I

ТИПОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ

[Напряжения и модули Юнга выражены в кг/см^2
 ($1 \text{ кг/см}^2 = 0,981 \times 10^6 \text{ дин/см}^2$)]

Материал	Модуль Юнга E	Коэффициент Пуассона σ	Предел пропорциональности f_p	Предел текучести f_y	Временное сопротивление (номинальное)	Удлинение при пределе пропорциональности e_p
Сварочное ¹⁾ железо	$2,05 \cdot 10^6$	0,275	1420	1560	3300	$0,69 \times 10^{-3}$
Мягкая сталь 3,5% никелевая	$2,13 \cdot 10^6$	0,29	2360	3120	4700	$1,11 \times 10^{-3}$
сталь	$1,89 \cdot 10^6$	0,29	13 200	13 600	15 600	$7,00 \times 10^{-3}$
Лагунь (отожженная)	$0,945 \cdot 10^6$	0,33	1580	—	4700	$1,67 \times 10^{-3}$
Медь (отожженная)	$1,05 \cdot 10^6$	0,27	нет	нет	2050	—

использованы при испытаниях приборы большей или меньшей чувствительности. Четвертый столбец таблицы дает *напряжения*, равные пределам пропорциональности данных материалов.

143. Предел текучести требует очень тщательного определения, но для наших целей его можно приравнять напряжению (обычно немного большему, чем предел пропорциональности), начиная с которого удлинения начинают возрастать почти без изменения нагрузки. Временное сопротивление, вычисленное так, как указано в § 141, является тем (номинальным) напряжением, при котором материал разрушается²⁾.

144. Из таблицы можно видеть, что *удлинения*, при которых тело следует закону Гука, малы.

¹⁾ В направлении прокатки.

²⁾ При этом никак не учитывается неравномерное распределение напряжений на поверхности разрушения.

Если взять напряжения, приведенные в четвертом столбце, и разделить их на значения E , данные во втором столбце, то получатся удлинения материалов, соответствующие пределу пропорциональности. Они приведены в последнем столбце таблицы. Видно, что эти величины подтверждают замечание, сделанное в § 117, о том, что реальные материалы перестают подчиняться закону Гука при очень малых значениях деформаций.

Следует заметить, что в практике, обычно, не допускаются напряжения, превосходящие предел пропорциональности, и, следовательно, допускаемые деформации столь малы, что пренебрежение (например, в § 117) их произведением по сравнению с ними самими вполне оправдано. Это обстоятельство весьма выгодно для теории, но оно не дает нам возможности ответить на вопрос, какой величины деформация может быть допущена в действительности? Мы все еще фактически не представляем себе условий, вызывающих переход материала за предел пропорциональности в опыте на простое растяжение. Он происходит при напряжениях, которые можно определить с большой точностью. Однако мы не знаем, является ли он следствием достижения предельного напряжения или предельной деформации.

145. Если материал перестает следовать закону Гука, в силу достижения предельного (нормального) *напряжения*, то четвертый столбец таблицы дает нам как раз те величины, которые нужны при проектировании. Так, мы можем утверждать, что сложное напряженное состояние будет допускаримым тогда, когда в каждой точке тела наибольшее из главных напряжений меньше напряжения, полученного из опытов на растяжение и равного пределу пропорциональности. На этом основана теория прочности, известная как теория максимального напряжения. С нею связано имя Рэнкина¹⁾. Поддерживали эту теорию прочно-сти Ламе²⁾ и другие.

¹⁾ W. J. M. Rankine, Applied Mechanics, London (1883).

²⁾ G. Lamé and B. P. E. Clapeyron, Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes., *J. f. Math.* (Crelle), 7 (1831).

146. С другой стороны, вслед за Понселе¹⁾ Сен-Венан предположил, что нарушение закона Гука происходит вследствие достижения предельного *удлинения*. На этом предположении основана теория максимальной деформации, согласно которой допускаемость сложного напряженного состояния зависит от того, будет ли наибольшее главное удлинение или деформация (§ 137) меньше значения, оказавшегося допускаемым в опыте на растяжение, или больше него. С точки зрения этой теории, необходимы величины, приводимые в последнем столбце таблицы.

147. Другие исследователи [Кулон²⁾, Треска³⁾, Д. Г. Дарвин⁴⁾, Гест⁵⁾] считали, что отклонение от закона Гука определяется наибольшим касательным напряжением в материале, т. е. (§ 138) наибольшей разностью главных напряжений. На этом предположении основана теория максимальной разности напряжений, которая теперь используется шире, чем теории максимального напряжения или деформации. Обычно она называется «законом Геста».

148. С именами Бельтрами⁶⁾ и Хейя⁷⁾ связана теория максимальной упругой энергии деформации.

Согласно этой теории, материал способен запасть упругую энергию только до некоторого предела, т. е. фактором, определяющим переход за предел пропорциональности, является *удельная упругая энергия деформации* (§ 116).

В опыте на растяжение допускаемая удельная энергия деформации (§ 116) представляет собой половину произведения напряжения (f_p) на удлинение (e_p) при пределе пропорциональности, т. е. его величина равна половине произведе-

¹⁾ J. V. Poncelet высказал ее в неопубликованных лекциях, прочитанных на факультете естественных наук в Париже. Ср. Todhunter and Pearson, цит. соч., §§ 994—995.

²⁾ C. A. Coulomb, Essai sur une application des règles de Maximis etc, *Mém... par divers savants*, Paris (1776).

³⁾ H. Tresca, там же, 18 (1868) и 20 (1872).

⁴⁾ *Phil. Trans. R. S.*, 173 (1776).

⁵⁾ *Phil. Mag.* (Ser. 5), 48 (1900).

⁶⁾ E. Beltrami, *Math. Annalen* (1903), стр. 94.

⁷⁾ B. P. Haigh, *British Association Reports*, 1921, стр. 324 и 1923, стр. 358.

ния цифр четвертого и седьмого столбцов таблицы I. Удельная энергия деформации, вызванная сложным напряженным состоянием, может быть вычислена по формуле (5) § 115 и (чтобы быть допускаемой) не должна превосходить удельной энергии деформации, полученной из испытаний.

Р. фон Мизес, а вслед за ним Губер и Генки¹⁾ изменили предшествующую теорию. Они предложили в выражении для удельной энергии деформации пренебречь той ее частью, которая получается от изменения объема, по сравнению с частью, зависящей от изменения формы. Если для удельной энергии деформации взять второе из выражений (17), то можно видеть, что предшествующее предположение фактически сводится к тому, что значение объемного модуля считается бесконечно большим. И теперь полное выражение для μ заменится следующим:

$$\frac{1}{12C} \{ (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2 + (p_1 - p_2)^2 \}. \quad (38)$$

В качестве критерия перехода за предел пропорциональности берется сумма квадратов разностей главных напряжений.

149. Мы не будем оказывать предпочтение ни одной из этих теорий и не будем излагать сущности других теорий, предложенных для объяснения нарушения закона Гука в материалах²⁾. Вопрос остается открытым, что еще раз подчеркивает наше незнание факторов, определяющих прочность материалов³⁾. В практике это незнание покрывается введением так называемого коэффициента безопасности. Максимальное напряжение, деформацию или удельную энергию деформации ограничивают не величиной, которая была найдена допускаемой в опыте на растяжение, а, приняв коэффициент безопасности равным 2, 3, 4... , позволяют им достигать $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... этой величины.

150. На примере напряженного состояния, имеющего следующие величины главных напряжений

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 = 624, -468, 0 \text{ кг/см}^2,$$

¹⁾ Ср. А. Надаи, Пластичность, глава XIII.

²⁾ Изменение теории максимальной разности напряжений, данное Мором, будет изложено в дополнении к гл. VIII.

³⁾ Ср. гл. I, § 2.

проиллюстрируем различные теории прочности. Для этого вычислим коэффициент безопасности, пользуясь каждой из указанных теорий. Материал — сталь, с пределом пропорциональности 2340 кг/см^2 (в опыте на простое растяжение), модулем Юнга $2,04 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ и коэффициентом Пуассона 0,3.

В опыте на растяжение мы имели:

$$\text{Максимальное напряжение } 2340 \text{ кг/см}^2. \quad (\text{I})$$

$$\text{Максимальное удлинение } 2340/2,04 \cdot 10^6. \quad (\text{II})$$

$$\text{Максимальная разность напряжений } 2340 \text{ кг/см}^2. \quad (\text{III})$$

$$\text{Допускаемая удельная упругая энергия деформации } \frac{1}{2} \times 2340 \times \frac{2340}{2,04 \cdot 10^6} \text{ кг/см}^2. \quad (\text{IV})$$

В сложном напряженном состоянии мы имеем:

$$\text{Максимальное напряжение } 624 \text{ кг/см}^2. \quad (\text{V})$$

Максимальное удлинение, согласно (3) § 114,

$$\frac{1}{2,04 \cdot 10^6} (624 + 0,3 \cdot 468) = 780/2,04 \cdot 10^6. \quad (\text{VI})$$

$$\text{Максимальная разность напряжений } 1092 \text{ кг/см}^2. \quad (\text{VII})$$

Удельная энергия деформации, согласно (5) § 115,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \times 2,04 \cdot 10^6} (624^2 + 468^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 468 \cdot 624) = \\ & = \frac{1}{2 \times 2,04 \cdot 10^6} \times 785000 \text{ кг/см}^2, \quad (\text{VIII}) \end{aligned}$$

отсюда мы найдем, что коэффициент безопасности равен:

(a) Согласно теории максимального напряжения (§ 145), из (I) и (V)

$$\frac{2340}{624} = 3,75.$$

(b) Согласно теории максимальной деформации (§ 146), из (II) и (VI)

$$\frac{2340}{780} = 3,06.$$

(c) Согласно теории максимальной разности напряжений (§ 147), из (III) и (VII)

$$\frac{2340}{1092} = 2,14.$$

(d) Согласно теории максимальной упругой энергии деформации (§ 148), из (IV) и (VIII)

$$\frac{2340 \times 2340}{785000} = 6,99,$$

* т. е. допускаемый предел удельной упругой энергии деформации равен 6,99-кратной удельной упругой энергии деформации, соответствующей заданному напряженному состоянию (ср. § 149). Чтобы получить значение допускаемого предела удельной упругой энергии деформации, надо умножить заданные напряжения на $\sqrt{6,99} = 2,65$.

ГЛАВА V

ПРОСТЫЕ ТИПЫ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ: ТОНКОСТЕННЫЕ КРУГЛЫЕ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ, КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ И КРУГЛЫХ ВАЛОВ, ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

151. Теория напряжений и деформаций, изложенная в предшествующей главе, позволяет нам рассмотреть несколько типов напряженных состояний, имеющих большое значение в практической деятельности инженера. В этой главе мы рассмотрим: (1) действие внутреннего гидростатического давления на тонкостенную круглую трубу, (2) действие на круглый стержень крутящих моментов, приложенных на концах, (3) действие на цилиндрический стержень (например, балку постоянного поперечного сечения) изгибающих моментов, приложенных на его концах.

Тонкостенная круглая труба под действием внутреннего гидростатического давления

152. Рассмотрим круглую трубу. Внутренний радиус трубы a , толщина t . Труба закрыта на концах жесткими крышками и подвержена внутреннему давлению¹⁾ интенсивности Π . Предположим, что труба *тонкостенная* (так, что отношение t к a мало) и *длинная* [так что отношение a к l (l длина трубы) мало].

Вследствие внутреннего давления, действующего на жесткие крышки (т. е. на площади πa^2), труба подвергается действию силы растяжения величины $\pi a^2 \Pi$. Линия действия этой силы растяжения совпадает с осью трубы. Кроме того, труба может быть подвержена действию силы растяжения T (с той

¹⁾ Точно такое же исследование применимо в случае давления, действующего *извне*. Только тогда задача усложняется тем, что равновесие трубы может стать *неустойчивым*. Потеря трубой устойчивости выразится в ее *сплющивании*.

же линией действия), вызванной приложением внешних сил. Мы знаем, что действие такого дополнительного растяжения можно (в силу принципа суперпозиции) исследовать отдельно. Заметим, что растяжение такого рода уже изучалось в одной из предыдущих глав и, следовательно, нет надобности рассматривать его еще здесь. Итак, примем, что растяжение является следствием только внутреннего давления, равного

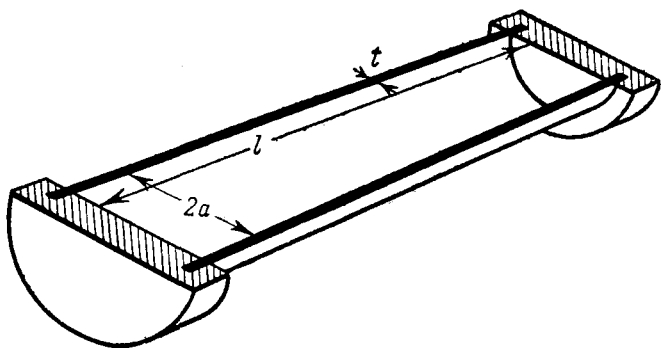


Рис. 46.

$\pi a^2 \Pi$. Площадь поперечного сечения трубы с большой степенью точности, так как t/a мало, равна $\pi \{(a+t)^2 - a^2\} = 2\pi a t$. Величина продольного напряжения, вызванного растяжением, с достаточной степенью точности дается формулой $p_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{t} \Pi$.

Предположим, что труба разделена на две части плоскостью, содержащей ее ось. Внутреннее давление стремится отделить обе половины трубы друг от друга. Этому стремлению противодействуют напряжения, возникающие по двум сечениям стенок трубы и по сечениям каждой из крышек на концах. Результирующее действие внутреннего давления (по известному принципу гидростатики) эквивалентно равномерно распределенному по площади прямоугольника $2al$ усилию. Поэтому оно равно силе $2a l \Pi$, приложенной к каждой

половине трубы. Сопротивление, оказываемое жесткими крышками, не будет (заметно) зависеть от l . Когда же l велико, им можно пренебречь по сравнению с сопротивлением стенок трубы. Приняв, что напряжение в стенке трубы равномерно распределено по площади поперечного сечения, мы в качестве величины этого напряжения будем иметь

$$p_2 = \frac{2a\Pi}{2tl} = \frac{a}{t} \Pi. \quad (1)$$

Третье напряжение (перпендикулярное к стенке трубы, т. е. перпендикулярное p_1 и p_2) изменяется от величины — Π на внутренней поверхности до нуля на внешней поверхности трубы. Желая решить задачу приближенно, мы можем им пренебречь в сравнении с p_1 и p_2 (которые являются величинами порядка $\Pi a/t$, где a/t велико).

153. Таким образом, имеем следующие выражения для напряжений:

$$p_1 = \frac{1}{2} p_2, \quad p_3 = 0, \quad (2)$$

здесь p_2 дается соотношением (1). Из уравнений (3) главы IV мы получим соответствующие удлинения:

$$\left. \begin{aligned} e_1 \text{ (продольное)} &= \frac{1-2\sigma}{2} \frac{p_2}{E}, \\ e_2 \text{ (тангенциальное)} &= \frac{2-\sigma}{2} \frac{p_2}{E}, \\ e_3 \text{ (радиальное)} &= -\frac{3}{2} \sigma \frac{p_2}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Очевидно, что e_2 (тангенциальное удлинение) измеряет также относительное возрастание радиуса трубы.

Вспомнив, что модуль объемного сжатия

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad (4)$$

и используя (1), мы первое из (3) можем написать в форме

$$\frac{a}{t} \Pi = p_2 = 6 K e_1. \quad (5)$$

Только что полученное выражение для e_1 подсказывает, что K можно непосредственно определить из эксперимента над тонкостенной трубой, подверженной действию гидростатического давления¹⁾.

154. Исследуя наше решение, мы заметим: во-первых, что в выражении для p_1 мы считали t^3 пренебрежимо малым по сравнению с $2at$. Подобное же предположение лежит в основе нашего пренебрежения (в § 152) радиальными напряжениями p_3 . Таким образом, выражения (2) и (3) пригодны только для *тонкостенных* труб. Во-вторых, считая, что e_2 — удлинение в тангенциальном направлении имеет одно и то же значение по всей длине трубы, мы предполагаем, что крышки, закрывающие концы нашей трубы, являются достаточно жесткими для того, чтобы сопротивляться давлению, приходящемуся на них, но не накладывают ограничений на радиальное удлинение трубы²⁾.

Можно воспользоваться принципом Сен-Венана (глава III, §§ 92—94) для того, чтобы показать, что наше решение достаточно точно *в центральной части длинной трубы*. Связь, осуществляемая крышкой на конце, вызывает (благодаря симметрии) систему равномерно распределенных по окружности трубы радиальных сил. Система этих сил уравновешенная, т. е. она не имеет результирующей. И, следовательно, принцип Сен-Венана (§§ 92—94) утверждает, что влияние крышек будет заметным только в непосредственной близости концов. Тогда в предложенном (§ 153) для прямого определения K эксперименте мы можем не обращать внимания на условия на концах трубы, если выберем для экспе-

¹⁾ Это замечание будет иметь место и тогда, когда отношение толщины к внутреннему диаметру трубы *не* будет малой величиной (ср. гл. XII, § 44). Практически этот метод использовал A. Mallock, *Proc. Roy. Soc. London*, 74 (1904), 50—52.

²⁾ Мы видим, что e_2 является относительным возрастанием длины окружности, а поэтому представляет собой также получающееся при деформации относительное увеличение радиуса. Внутренний радиус трубы, когда давление действует, равен $a(1+e_2)$. Если крышки на концах не расширяются точно на такую же величину, то они *вливают* на деформации (а отсюда на напряжения) в областях, близких к концам трубы.

римента трубу значительной длины и будем измерять продольное удлинение e_1 в ее центральной части.

Наше решение на частном примере объясняет замечание, сделанное в § 95 главы III. Там говорилось, что мы получим некоторый стандартный тип деформации, если рассмотрим однородное упругое тело с постоянным поперечным сечением и предположим, что деформация не изменяется от одной его части к другой. К этому стандартному типу деформации, по мере того как мы отходим от областей, в которых приложены действующие силы, должны приближаться все частные виды деформации.

Исследование, касающееся тонкостенной сферической оболочки, мы предоставляем читателю (см. ниже пример 1).

Примеры

(Для стали $E = 2,1 \cdot 10^8$ кг/см², $\sigma = 0,3$.)

1. Показать, что напряжения и деформации в тонкостенной сферической оболочке, подверженной равномерному давлению P , даются (в том же, что и раньше, приближении) формулами

$$p_1 = p_2 = a\Pi/2t, \quad p_3 = 0;$$

$$e_1 = e_2 = (1 - \sigma) p_1/E, \quad e_3 = -2\sigma p_1/E.$$

2. Длинная стальная трубка с внутренним диаметром 12,7 см и толщиной 0,0508 см закрыта на концах и подвержена внутреннему (гидростатическому) давлению жидкости, величина которого характеризуется тем, что максимальное напряжение в материале равно 1760 кг/см².

Найти увеличение емкости трубы в процентах. [0,16.]

3. (Oxford F. E. E. S. 1931.) Стальной сферический сосуд имеет диаметр 91,5 см и толщину оболочки 0,95 см. Найти внутреннее гидростатическое давление, необходимое для того, чтобы вызвать в материале напряжение в 630 кг/см². [26 кг/см².]

Какой дополнительный объем воды (при атмосферном давлении) нужно накачать для того, чтобы увеличить это напряжение до 787 кг/см²? (Модуль объемного сжатия для воды = $2,1 \cdot 10^4$ кг/см². Объем сферы с диаметром D равен $\frac{1}{6} \pi D^3$.)

4. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Тонкостенная стальная цилиндрическая оболочка с полусферами на концах подвержена действию внутреннего давления. Найти выражение для отношения толщины цилиндрической части к толщине полусферы на концах, при котором радиальные перемещения у обеих частей будут одинаковы. $\left[\frac{2 - \sigma}{1 - \sigma} \right]$.

Предполагая, что выведенное отношение между толщиной полусферы и толщиной цилиндрической части оболочки выполняется, и принимая в качестве критерия прочности теорию максимальной упругой энергии, показать, что отношение внутреннего давления, необходимого для того, чтобы достичь предела текучести в цилиндрической части, к давлению, необходимому для того, чтобы достичь предела текучести в полусферах на концах, приблизительно равно 1,47 : 1 (влиянием радиального напряжения пренебречь).

5. (Самб. М. S. Т. 1932.) Концы прямой металлической трубы с внутренним диаметром в 15,25 см и толщиной в 0,254 см закрыты жесткими пластинками. Труба наполнена водой. Давление воды измеряется манометром. Труба герметически закупорена, и к концам приложена внешняя растягивающая аксиальная сила в 1820 кг, которая уменьшает давление воды на 0,352 кг/см².

$$\text{для металла } E = 1,41 \times 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

$$\text{для воды } K = 2,25 \times 10^4 \text{ кг/см}^2.$$

Пренебрегая влиянием пластин на концах, определить значение коэффициента Пуассона для металла. [0,364.]

6. (Oxford F. E. E. S. 1933.) При температуре в 15° С латунная труба диаметром в 5,08 см и толщиной 0,0508 см вложена (без натяга) в стальную трубу той же толщины. Трубы соединяются жестко на концах и могут рассматриваться как тонкостенные (т. е. деформацией вследствие радиальных напряжений можно пренебречь).

Для латуни $E = 1,05 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\sigma = 0,33$.

Для латуни коэффициент линейного расширения = $18,0 \times 10^{-6}$ на 1° С.
Для стали » » » » = $11,1 \times 10^{-6}$ на 1° С.

Найти продольные и кольцевые напряжения в трубах и нормальное давление по поверхностям соприкосновения, после того как температура возрастет до 150° С.

[964 кг/см² растягивающее в стали, сжимающее в латуни. Нормальное давление 19,3 кг/см².]

7. (Самб. М. S. Т. 1934.) В прямую тонкостенную трубу из твердой меди при отсутствии в обеих трубах напряжений вложена прямая стальная труба той же толщины и диаметра в 2,54 см. Обе трубы жестко скрепляются на концах и подвергаются общему аксиальному растяжению силой в 227 кг.

Для меди $E = 1,05 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\sigma = 0,38$.

Определить (приблизительно) нормальное давление, устанавливающееся по поверхности соприкосновения труб, предполагая, что деформациями вследствие нормального радиального напряжения по сравнению с деформациями вследствие кольцевого и продольного напряжений можно пренебречь. [0,455 кг/см².]

8. (Самб. М. S. Т. 1933.) Длинная прямая медная труба с внутренним диаметром в 10,2 см и толщиной в 0,127 см упрочнена одним слоем плотно намотанной стальной проволоки (диаметр 0,127 см). Концы закрыты пластинками, присоединенными к фланцам трубы болтами,

Пусть труба подвержена внутреннему давлению в 21 кг/см^2 и температура всего повышена до 100°C , показать, что растягивающее напряжение в обмотанной проволоке возрастет до величины, примерно, равной 1130 кг/см^2 .

Коэффициент линейного расширения для стали 11×10^{-6} , для меди 18×10^{-6} на 1°C .

Для меди $E=1,05 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\sigma=0,35$. [Давление проволоки на трубу эквивалентно внешнему гидростатическому давлению (действующему только на цилиндрической поверхности) величины $2,82 \frac{T}{d} \text{ кг/см}^2$, если T — сила растяжения в проволоке в килограммах, а d — внешний диаметр трубы в сантиметрах.]

Кручение тонкостенных круглых труб

155. В §§ 119—121 главы IV мы исследовали касательное напряжение и сдвиг. Мы видели, что касательное напряжение интенсивности q , приложенное к граням прямоугольного кубика, вырезанного из тела, изменяет углы кубика, но не меняет длин ребер. Величина, на которую изменяются первоначально прямые углы, равна

$$\gamma = \frac{q}{C},$$

где C — модуль сдвига материала.

При упомянутом исследовании мы рассматривали кубик, имеющий некоторые определенные пропорции¹⁾, но очевидно, что выводы сохраняются и для любого прямоугольного параллелепипеда, вырезанного из тела. Следовательно, тонкий прямоугольный лист материала $ABCD$ (рис. 47а), стороны которого подвержены действию касательного напряжения интенсивности q , деформируется и приобретет вид, примерно изображенный на рис. 47б (где деформации сильно преувеличены). Боковые плоскости листа свободны от напряжений.

156. Теперь представим себе, что пластинка (при действии касательных напряжений) согнута в круглую трубу (рис. 47д) так, что стороны $B'C'$ и $A'D'$ становятся окружностями, лежащими в параллельных плоскостях. Так как ширина деформированной пластинки (рис. 47б) постоянна, то стороны

¹⁾ Ср. § 119 и рис. 38 главы IV.

$A'B'$ и $D'C'$ можно привести в соприкосновение по всей их длине. Они примут форму крутой винтовой линии (т. е. винтовой линии с большим шагом), лежащей на поверхности круглой

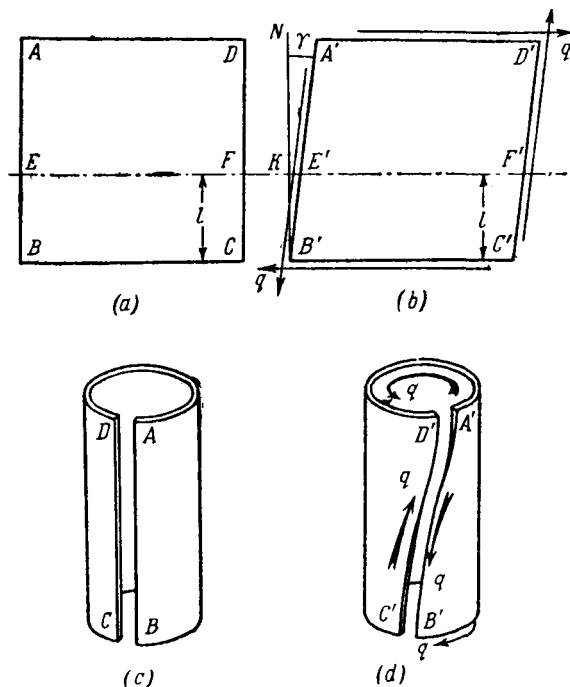


Рис. 47.

трубы. Касательные напряжения, приложенные к ним, действуют в противоположных направлениях, и, следовательно, $A'B'$, $D'C'$ можно скрепить вместе и убрать внешние силы, вызывающие эти касательные напряжения. Таким образом, мы будем иметь замкнутую круглую трубу, с приложенными на каждом из ее концов касательными напряжениями (интенсивности q) и со свободными от напряжений внутренней и внешней поверхностями.

Если ненапряженная пластинка (рис. 47а) будет изогнута подобным же образом (рис. 47с), то она примет форму круглой трубы тех же размеров. Однако эта труба будет отличаться от прежней тем, что скрепленные стороны AB и DC дадут прямую, параллельную оси трубы (образующую кругового цилиндра). Теперь мы можем сказать, что нам известно деформированное состояние, возникающее в тонкостенной трубе тогда, когда на ее свободных краях приложены касательные напряжения постоянной интенсивности.

Мы видим, что: (а) размеры трубы не меняются (так как стороны прямоугольной пластинки не удлиняются в результате действия касательных напряжений);

(б) образующие недеформированной трубы (т. е. прямые, параллельные оси) превращаются в крутые винтовые линии, имеющие постоянный наклон (γ) к образующим деформированной трубы;

(с) круговые сечения трубы, в результате деформации, поворачиваются одно относительно другого.

157. Величину поворота (с) легко вычислить. Обратившись к рис. 47б, мы видим, что прямая $B'KN$ (перпендикуляр к $B'C'$) является образующей деформированной трубы, а прямая EF , взятая на расстоянии l от BC , передвигается при деформации относительно BC на расстояние KE' или $l\gamma$. В трубе это перемещение $l\gamma$ будет направлено по окружностям поперечного сечения, т. е. будет вызывать поворот сечения, содержащего EF , относительно сечения, содержащего BC , на угол $\theta = \frac{l\gamma}{r}$, где r — радиус трубы. Подставив γ из (6), мы получим

$$\theta = \frac{ql}{Cr}$$

и видим, что θ пропорционально l . Таким образом, $\frac{\theta}{l}$ — угол поворота на единицу длины постоянен. Практически угол θ , подобно углу γ , очень мал.

158. Обозначив $\frac{\theta}{l}$ через τ , мы можем взять

$$q = C\tau r \quad (7)$$

за выражение для касательного напряжения на концах трубы.

Это напряжение должно вызываться внешними силами. Площадь поперечного сечения трубы равна $2\pi r t$. Касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения (t мало) относительно оси трубы действует на «плече» r , отсюда следует, что результирующее усилие внешних сил является моментом величины:

$$T = r \times 2\pi r t q = C\tau \times 2\pi r^3 t \quad [\text{согласно (7)}].$$

Геометрический момент инерции поперечного сечения относительно оси трубы равен $2\pi r^3 t$. Обозначим его (это «полярный момент инерции») через J . Теперь мы можем написать

$$T = C\tau J. \quad (8)$$

Исключив C из соотношений (7) и (8), мы получим:

$$q = \frac{T r}{J}. \quad (9)$$

Далее можно найти выражение для упругой энергии, запасенной единицей длины трубы. Торцы, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном единице длины, поворачиваются один относительно другого на величину τ . Этот относительный поворот является перемещением, «соответствующим» приложенному моменту T . Следовательно, искомое выражение будет:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} T \tau = \\ &= \frac{1}{2} C J \tau^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{T^2}{C J}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} T \tau = \\ &= \frac{1}{2} C J \tau^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{T^2}{C J}. \end{aligned}} \right\} [\text{согласно (8)}] \quad (10)$$

Мы можем получить тот же результат другим путем, подставив в (15) главы IV q из (7) и (9) настоящей главы.

Кручение круглых валов

159. Предыдущее исследование касалось *тонкостенных* круглых труб. Однако без большого труда можно показать, что полученные результаты могут быть распространены как на толстостенные круглые трубы, так и на сплошные

круглые валы. Мы видели (§ 156), что в нашем решении размеры тонкостенной трубы не изменяются и что ее поверхности свободны от напряжений. Следовательно, если мы составим толстостенный или сплошной круглый вал, собрав вместе много тонкостенных труб, *имеющих один и тот же угол закручивания на единицу длины* (τ), то трубы все время будут прилегать друг к другу, и первоначально соприкасающиеся точки прилегающих труб останутся в соприкосновении после того, как произойдет деформация. Совсем не важно, были или нет первоначально скреплены вместе составные трубы.

Для того чтобы τ могло иметь одно и то же значение в каждой из составляющих труб, q должно быть, как и раньше, связано с радиусом трубы r уравнением

$$q = C\tau r. \quad (7) \text{ bis}$$

Тогда выражение

$$T = C\tau J \quad (8) \text{ bis}$$

остаётся верным для каждой трубы. Равным образом это сохраняется и для вала (так как полярные моменты инерции различных труб складываются). При этом вал может быть и полым и сплошным. J должен теперь быть моментом инерции всего поперечного сечения¹⁾, а T — общим приложенным к нему крутящим моментом. И тогда из (7) и (8) мы имеем:

$$q = \frac{T}{J} r, \quad (9) \text{ bis}$$

т. е. то же, что и раньше, а полная упругая энергия, запасенная единицей длины вала, будет опять определяться формулой

$$U = \frac{1}{2} C J \tau^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{C J}. \quad (10) \text{ bis}$$

¹⁾ Для полого вала с внутренним радиусом a и внешним радиусом b полярный момент инерции равен:

$$J = \frac{1}{2} \pi (b^4 - a^4).$$

Полагая в этом выражении $a = 0$, мы получим значение момента инерции для сплошного вала радиуса b ,

Мы заметим, что единственной упругой постоянной, входящей в наше решение, является C . Поэтому с помощью эксперимента на кручение цилиндрического образца можно весьма просто определить модуль сдвига.

160. Изучая наше решение, мы видим, что оно предполагает специальное распределение касательных напряжений на торцевых сечениях стержня или трубы. В практике, когда круглый стержень (как например, вал винта парохода) передает крутящий момент от одного конца другому или когда образец подвергается испытанию на кручение, с целью определения C , нагрузка прикладывается не в виде касательного напряжения на торцах, а каким-нибудь иным способом на частях цилиндрических поверхностей, близких к концам. Но несмотря на то, что наше решение не отражает действительного состояния в областях, непосредственно примыкающих к нагруженным концам, мы, как и раньше (на основании принципа Сен-Венана), можем утверждать, что оно будет приближаться к действительному состоянию в центральной части вала или образца, если их цилиндрическая поверхность вдали от концов свободна от нагрузки.

В нашем решении касательное напряжение q в какой-нибудь точке поперечного сечения имеет направление, перпендикулярное радиусу, проходящему через эту точку, и величину, пропорциональную радиальному расстоянию (r) от оси. Сначала считали, что такое же распределение напряжений получается и тогда, когда поперечное сечение стержня (или трубы) некруговое¹⁾. Этот вывод, однако, противоречит теореме, установленной в § 129, главы IV, которая говорит, что касательное напряжение не может иметь компонента, перпендикулярного свободной от нагрузки поверхности тела. Согласно этой теореме, q во всех точках контура поперечного сечения должно быть направлено вдоль контура. Отсюда ясно, что q не может иметь направление, которое во всех точках перпендикулярно радиусу, если контур не является окружностью. Следовательно, наше решение применимо только к сплошным или полым круглым стержням. Другие

¹⁾ Ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 18.

формы поперечного сечения требуют специального решения, и будут рассмотрены в главе XI.

Значение этого ограничения можно видеть на примере прямоугольного поперечного сечения (рис. 48). Если решение предыдущих параграфов применить к этому случаю, то мы получим, что касательное напряжение будет иметь максимальную величину в угловых точках, где r наибольшее. Теорема же, на которую мы ссылались, показывает, что в какой-нибудь точке P на стороне AD касательное напряжение не может иметь компонента, перпендикулярного AD , а в какой-нибудь точке Q на стороне CD касательное напряжение не может иметь компонента, перпендикулярного CD . Отсюда, в угловой точке D поперечного сечения (которая принадлежит обеим сторонам), напряжение не может иметь компонентов ни в том, ни в другом направлении и таким образом обращается в нуль вместо того, чтобы достигать максимального значения.

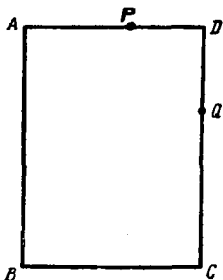


Рис. 48.

перечного сечения (которая принадлежит обеим сторонам), напряжение не может иметь компонентов ни в том, ни в другом направлении и таким образом обращается в нуль вместо того, чтобы достигать максимального значения.

Примеры

(Для стали берем $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см²; $C = 0,8 \cdot 10^6$ кг/см².)

9. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Полый стальной вал длины 183 см должен передать крутящий момент в 578 кгм. Найти наружный и внутренний диаметры вала, если угол кручения не должен превышать 2°, а касательные напряжения не должны превышать 703 кг/см². [9,12 см, 7,46 см.]

10. (Camb. M. S. T. 1932.) Полый круглый вал с внешним диаметром D и внутренним диаметром $\frac{1}{2} D$ должен передавать крутящий момент в 7740 кгм вместе с осевой силой растяжения в 182,6 т. Касательное напряжение в валу не должно превосходить 630 кг/см². Составить уравнение для определения D и показать, что оно приблизительно удовлетворяется при $D = 20,4$ см.

[В соответствии с (35) главы IV заданное условие требует, чтобы $\frac{1}{2} \sqrt{p_1^2 + 4q^2} \geq 0,63$, где $p_1 = 975,4/\pi D^2$ (D — диаметр в сантиметрах) и q (наибольшее касательное напряжение от крутящего момента), равное

$$\frac{1}{2} \frac{DT}{J} = \frac{16^2 \cdot 516}{\pi D^3}.$$

Отсюда мы получим условие

$$\pi^2 < (774/D^2)^2 + (20900/D^2)^2.]$$

11. (Oxford F.E.E.S. 1934.) Сплошной стальной вал предназначен для передачи 1014 л. с. при 90 об/мин. При испытании материала на растяжение металл достиг предела текучести при напряжении 3940 кг/см². Найти необходимый диаметр вала из условия, что упругая энергия, запасенная в материале вала (на единицу объема), нигде не превосходит половины той, которая была бы запасена при пределе текучести в случае простого растяжения. [13,36 см.]

Тонкостенные трубы некругового поперечного сечения

161. С другой стороны, методы, использованные в §§ 155 — 158, для того чтобы получить решение для тонкостенной круглой трубы, можно обобщить так, что они будут давать приближенное решение для труб других сечений малой постоянной толщины. Прямоугольный лист (рис. 47, *a* и *b*) с касательными напряжениями, действующими на его краях, можно представить себе изогнутым в цилиндр какой-нибудь некруговой формы. Боковые стороны листа приводятся в соприкосновение и скрепляются точно так же, как и раньше. Пусть поперечное сечение получившейся трубы имеет форму, показанную на рис. 49. Как и раньше, через *t* и *q* обозначим толщину и (постоянное) касательное напряжение. Элементу длины δs стенки трубы соответствует сила величины $q\delta s$, действующая в направлении касательной *TP*. Составляющая этой силы в каком-нибудь направлении *Ox* измеряется величиной qt , умноженной на проекцию δs на это направление. Полная проекция длины всего контура на направление *Ox* равна нулю, и отсюда следует, что усилия в каждом поперечном сечении не имеют результирующей силы. Для того чтобы вычислить результирующий (крутящий) момент, мы можем брать моменты относительно любой точки *O*.

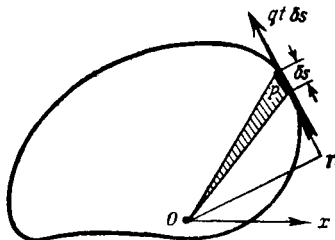


Рис. 49.

Если OT — прямая, перпендикулярная касательной (PT) к контуру в точке P , то момент относительно O касательного напряжения, действующего на элемент δs стенки трубы, равен

$$OT \times (qt\delta s) = \\ = qt \times (\text{двойную площадь заштрихованного треугольника на рис. 49}).$$

Отсюда результирующий крутящий момент в поперечном сечении дается формулой

$$T = 2tAq, \quad (11)$$

где A обозначает всю площадь, заключенную внутри контура трубы.

162. Мы также можем связать крутящий момент (T) с углом закручивания на единицу длины (τ), если *предположим, что деформация состоит только из относительных поворотов различных поперечных сечений друг относительно друга и не сопровождается изменением формы контура*¹⁾. При этом предположении упругая энергия, запасенная единицей длины трубы, будет $\frac{1}{2} T\tau$, а согласно формуле (15) главы IV, упругая энергия на единицу объема равна $\frac{1}{2} q^2/C$. Следовательно, если через s обозначить длину средней линии поперечного сечения трубы, то мы получим:

$$\frac{1}{2} T\tau = \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) \times st = \\ = \frac{1}{2} \frac{T^2 s}{4CA^2} \quad [\text{согласно (11)}],$$

¹⁾ Более полное доказательство (не использующее такого предположения) дается в главе XI (§ 393). Метод, данный здесь, следует в основном доказательству С. Batho, *Engineering*, 100 (1915), 392—393; 102 (1916), 497—498 и 521—522. Ср. примечание стр. 659. Мы можем рассматривать трубы и переменной толщины, но тогда q должно представлять собой среднее касательное напряжение.

откуда

$$\begin{aligned} T &= C\tau \times \frac{4A^{\frac{3}{2}}t}{s} = \\ &= C\tau \times 4st \left(\frac{A}{s}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Исключив T из (11) и (12), мы получим выражение

$$q = 2C\tau \frac{A}{s}. \quad (13)$$

163. Предыдущие результаты являются, конечно, только приближенными и требуют изменения в том случае, например, когда контур трубы имеет острые углы. Когда контур представляет собой окружность радиуса r , $A = \pi r^2$, и формула (11) принимает вид

$$\begin{aligned} T &= 2\pi t r^2 q = \\ &= q \frac{J}{r}, \end{aligned}$$

что совпадает с (9). Также, так как $s = 2\pi r$, формула (12) сводится к формуле (8), а формула (13) к (7).

Из (12), так как st — площадь поперечного сечения трубы, мы видим, что из тонкостенных труб наиболее жесткими трубами данного веса (т. е. трубами, для которых отношение T к τ наибольшее) являются те трубы, для которых отношение A к s имеет максимальное значение. Из (13) видно, что мы получим это же самое условие, если потребуем, чтобы касательное напряжение при данной степени кручения было максимальным. При данном периметре s круг имеет наибольшую, по сравнению со всеми другими геометрическими фигурами, площадь A . Нами, таким образом, доказано, что наиболее выгодной формой трубы с точки зрения сопротивления кручению является круглая.

Пример

12. Сравнить жесткость на кручение тонкостенной полукруглой (в форме буквы D) трубы с жесткостью круглой трубы того же радиуса. Показать, что для того, чтобы их жесткости были одинаковы, нужно, чтобы толщины имели отношение

$$\frac{\left(2 + \frac{4}{\pi}\right)}{1}, \text{ а веса — отношение } \frac{\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)^2}{1}.$$

Чистый изгиб цилиндрических стержней или балок

164. Теперь изучим изгиб — крайне важный для инженера-строителя вид деформации. Возьмем простейший случай, а именно, цилиндрический стержень (например, прокатная стальная балка), подверженный действию моментов на концах, вызывающих изгиб, и свободный от других видов усилий. Мы установим, что в этом случае не нужно накладывать ограничения (как в задаче о кручении) на форму поперечного сечения.

На первых этапах изучения мы можем предположить, что изгиб вызван любым способом. Так, мы можем сделать наиболее простое предположение, представив себе, что балка имеет большую длину и изгибается в замкнутое круглое кольцо так, что концевые сечения приводятся в соприкосновение. Если теперь поперечные сечения концевых сечений скрепить вместе, то все внешние силы можно удалить, и мы получим кольцо, поверхность которого совершенно свободна от напряжений. Таким образом, мы имеем пример тела с начальным напряжением (см. § 83, гл. III). Соображения симметрии показывают, что плоские сечения, перпендикулярные оси недеформированной балки, после деформации будут также недеформированными, и их плоскости будут содержать ось кольца.

165. Пусть L — длина балки, до того как она была изогнута в круглое кольцо, и пусть $L = 2\pi R$. На рис. 50¹⁾ CC является осью кольца, а ABD — сечением кольца плоскостью, содержащей CC . Начало координат помещено в какую-нибудь точку O , принадлежащую этой плоскости и находящуюся на расстоянии R от оси CC . Ось Ox проведена параллельно, а ось Oy перпендикулярно оси кольца CC . Положительное направление по оси Oy взято в сторону, противоположную CC . Точка P , принадлежащая поперечному сечению кольца и определяемая координатами x и y , будет находиться на расстоянии $(R + y)$ от CC . Точки, соответствующие P в других поперечных сечениях, расположатся на окружности радиуса $(R + y)$.

¹⁾ На этом рисунке размеры поперечного сечения по сравнению с радиусом кольца сильно преувеличены.

Длина этой окружности $2\pi(R+y)$. В недеформированной балке эти точки лежали на отрезке, направленном по длине балки, и длина его была $L=2\pi R$. Следовательно, при изгибе эта длина изменяется на величину:

$$2\pi(R+y) - L = 2\pi y.$$

Ее относительное удлинение равно $2\pi y/L$ или y/R , т. е. мы имеем:

$$e_1 = \frac{y}{R}, \quad (12)$$

где через e_1 обозначено продольное удлинение балки.

166. Предположив, что это продольное удлинение вызывается простым продольным напряжением p_1 , мы можем написать, что

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= E \frac{y}{R}, \\ p_2 &= p_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где p_2 и p_3 представляют собой нормальные напряжения, имеющие направления Ox и Oy . Но надо подчеркнуть, что соотношения (13) основываются на дополнительном предположении и не являются необходимым выводом из (12). На самом деле, согласно (3) главы IV, мы имеем:

$$e_1 = \frac{1}{E} [p_1 - \sigma(p_2 + p_3)],$$

т. е. какие-нибудь два напряжения из трех p_1 , p_2 , p_3 можно было взять произвольно. Позже мы увидим, что сделанное выше предположение может быть оправдано соображениями «о минимуме упругой энергии».

167. Возьмем для p_1 выражение (13) и исследуем результирующее усилие, вызываемое этим компонентом напряжения. Ясно, что по сечению, показанному на рис. 50, не может действовать результирующая растягивающая сила, так как такая же сила должна была бы действовать в каждом

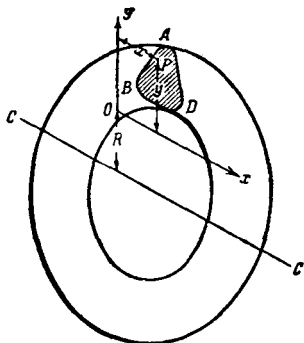


Рис. 50.

другом сечении, внешней же силы для сохранения равновесия нет. Поэтому мы имеем условие

$$\Sigma [p_1 dA] = \iint p_1 dx dy = 0,$$

где через $dA (= dx dy)$ обозначен элемент площади поперечного сечения. Интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения.

Подставляя p_1 из (13), мы получим, что

$$\Sigma [y dA] = \iint y dx dy = 0, \quad (14)$$

а это значит, что ось Ox должна проходить через центр тяжести поперечного сечения ABD . Обозначим центр тяжести поперечного сечения через G и вместо наших прежних осей Ox и Oy возьмем оси Gx и Gy (см. рис. 51). Выражения (13) сохраняются, и мы получаем, что в результате изгиба линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений, не испытывает ни растяжения, ни сжатия. Продольное напряжение p_1 обращается в нуль во всех точках оси Gx , которая в силу этого называется нейтральной осью.

168. Вычислим изгибающий момент, т. е. суммарный момент относительно Gx , вызываемый напряжением p_1 . Обозначим его через M и получим:

$$M = \Sigma [y p_1 dA] = \iint y p_1 dx dy. \quad (1)$$

После подстановки p_1 из (13) имеем:

$$M = \frac{EI}{R}, \quad (15)$$

где

$$I = \Sigma [y^2 dA] = \iint y^2 dx dy, \quad (16)$$

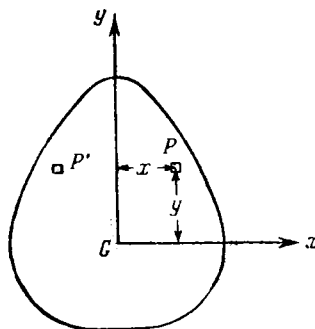


Рис. 51.

т. е. *геометрический момент инерции* площади поперечного сечения относительно оси (Gx), проходящей через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярной плоскости изгиба.

Уравнение (15) дает выражение для кривизны ($1/R$) оси балки как функции приложенного изгибающего момента M . Исключая R из (13) и (15), мы можем для p_1 получить формулу

$$p_1 = \frac{My}{I}, \quad (17)$$

которая показывает, что распределение продольного напряжения не зависит от упругих свойств материала балки.

169. Напряжение является чисто продольным, и, следовательно, его суммарное действие может состоять только из продольной силы растяжения (или сжатия) и из момента около некоторой оси, лежащей в плоскости поперечного сечения. В § 167 мы убедились в том, что результирующая сила равна нулю, а для момента относительно Gx мы получили выражение (9). Для того чтобы этот момент мог быть результирующим усилием в поперечном сечении, момент около Gy (рис. 51) должен равняться нулю. Для момента относительно Gy в соответствии с (I) мы имеем:

$$M_y = - \sum [x p_1 dA] = - \iint x p_1 dx dy. \quad (II)$$

После подстановки p_1 из (13) мы получим, что

$$M_y = - \frac{E}{R} \sum [x y dA] = - \frac{E}{R} \iint x y dx dy. \quad (III)$$

Отсюда, для того чтобы M_y могло быть нулем, мы должны иметь

$$\sum [x y dA] = \iint x y dx dy = 0. \quad (18)$$

Другими словами, оси Gx и Gy должны быть *главными осями инерции* поперечного сечения.

Условие (18), очевидно, будет удовлетворено тогда, когда сечение симметрично относительно Gy . На самом деле, тогда каждой элементарной площадке dA , содержащей точку P

с координатами x и y , будет соответствовать равная площадка dA , содержащая точку P' (рис. 51) с координатами — x и y , и поэтому эти две площадки при суммировании (или интегрировании) в формуле (18) уничтожатся. Аналогичное доказательство применяется и тогда, когда поперечное сечение симметрично относительно оси Ox . Сечения, не симметричные относительно Ox или Oy , должны быть исследованы специально.

Искажение поперечного сечения. «Антикластическая» кривизна

170. Предполагая, что плоскость изгиба содержит главные оси поперечного сечения (так что предыдущее решение остается в силе), мы имеем напряженное состояние, данное формулами (13) § 166. Из соотношений (3) главы IV, § 114, мы выведем, что соответствующие удлинения равны

$$e_1 = \frac{y}{R}, \quad (12) \text{ bis}$$

и

$$e_2 = e_3 = -\sigma \frac{y}{R}.$$

Удлинения e_2 и e_3 имеют направления, лежащие в плоскости поперечного сечения, и вызывают искажение формы поперечного сечения. Это искажение является вторичным эффектом изгиба. Если рассмотреть прямоугольное поперечное сечение, то можно легко получить характер вызванного искажения. Пусть Ox и Oy будут соответственно направлениями e_2 и e_3 . Тогда, если имеет место только удлинение e_3 , то оно вызовет сжатие в направлении Oy тех частей поперечного сечения, в которых продольное напряжение растягивающее, и расширение в том же направлении тех частей, в которых продольное напряжение сжимающее. Следовательно, поскольку дело идет о влиянии только e_3 , поперечное сечение остается прямоугольным.

Искажение, соответствующее e_2 , — другого рода. Продольная деформация, определяемая формулой (12), превращает ось балки (или линию центров тяжести поперечных сечений) в окружность радиуса R . Центр окружности лежит на стороне отрицательных значений y . Аналогично можно сказать, что деформация в направлении Ox , определяемая формулой

$e_2 = -\sigma \frac{y}{R}$, превращает ось Gx в окружность радиуса $\frac{R}{\sigma}$, имеющую центр по ту сторону от G , на которой y положителен. Таким образом, вследствие e_2 , прямоугольное сечение искажается и принимает форму, показанную (очень преувеличенно) на рис. 52. Две боковые стороны наклоняются одна к другой на угол $\sigma b/R$, где b — ширина поперечного сечения. Верхняя и нижняя поверхности (первоначально плоские) деформируются в антиклатические поверхности.

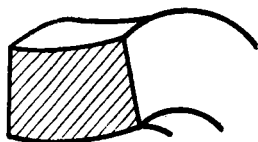


Рис. 52.

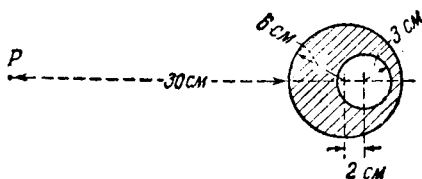
Эту антиклатическую кривизну легко наблюдать, если изогнуть кусок резины, имеющий приблизительно квадратное поперечное сечение. На факте существования антиклатической кривизны можно основать экспериментальный метод определения σ . В этом методе проводится сравнение между относительными поворотами боковых сторон поперечного сечения и относительным наклоном друг к другу самих поперечных сечений¹⁾. Кроме того, эффект антиклатической кривизны рассматривается в приближенной теории пластинок (см. гл. VII, §§ 230 — 232).

Совместное действие изгиба и растяжения (или сжатия)

171. В § 167 мы получили положение нейтральной линии (при чистом изгибе) из тех соображений, что при поставленных там условиях результирующая сила растяжения не действует по поперечному сечению. Однако очевидно, что в общем случае в поперечном сечении в комбинации с изгибающим моментом может действовать сила растяжения (или сжатия). Дополнительные вычисления проводить не нужно. Равномерное растягивающее напряжение p_1 , действующее по всей площади A поперечного сечения, будет давать резуль-

¹⁾ Этот метод использовали М. А. Cornu, *Comptes Rendus*, 69 (1869) и А. Маллок, *Proc. R. S.*, 29 (1879).

тирующую силу растяжения $p_1 A$, направленную по линии, проходящей через центр тяжести. Получающееся напряжение можно наложить на напряжение изгиба, даваемое соотношением (17). В первом примере, помещенном ниже, через l обозначено расстояние между G (центром тяжести поперечного сечения) и P (точкой на линии действия результирующей силы растяжения). Тогда сила F в точке P статически эквивалентна силе F в точке G и изгибающему моменту Fl . Результирующее растягивающее напряжение в какой-нибудь



точке дается выражением вида

$$\frac{F}{A} + \frac{My}{I},$$

где $M = Fl$.

Примеры

13. (Самб. М. S. Т. 1931.) Поперечное сечение вертикальной части станины радиального сверлильного станка показано на прилагаемом рисунке. Давление сверла вызывает действие на колонну вертикальной растягивающей силы. Линия действия силы направлена по прямой, проходящей через точку P .

Показать, что максимальное растягивающее напряжение, вызванное в колонне, приблизительно на 3 процента больше, чем то, которое было бы вызвано тогда, когда колонна имела бы постоянную толщину, но тот же наружный диаметр и ту же площадь поперечного сечения.

14. (Oxford F. E. E. S. 1930.) Две полосы одинаковой ширины и длины, но разных металлов спаяны вдоль их больших сторон, так что образуют одну прямую полосу длины l . Когда температура повышается на $\theta^\circ\text{C}$, они изгибаются в дугу радиуса r .

Показать, что

$$Or(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{E_1 t_1^3 + E_2 t_2^3}{6(t_1 + t_2)} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right),$$

где E — модуль Юнга, α — коэффициент линейного расширения, t — толщина, перпендикулярная плоскости спайки; r велико по сравнению с t_1 и t_2 .¹⁾

[При нагревании полосы стремятся удлиниться на разные величины, но так как они соединены, то одна из них подвергается растяжению, а другая — сжатию, и обе изгибаются. Их соприкасающиеся

¹⁾ См. примечание на стр. 659.

поверхности должны испытывать одно и то же продольное удлинение (при учете действия температуры), потому что они должны прилегать друг к другу. Кроме этого, составная полоса не подвержена действию результирующей силы, и поэтому результирующая сила растяжения в одной полосе должна равняться результирующей силе сжатия в другой. Момент, вызванный этими противоположными силами, должен уравновешивать суммарный изгибающий момент.]

Косой изгиб ¹⁾

172. На рис. 53, как и раньше, Gx и Gy являются главными осями инерции площади поперечного сечения. Плоскость приложенного момента M наклонена, как показано на рисунке, к осям Gx и Gy . Через θ обозначим угол между Gx и направлением M . Теперь мы можем разложить M на момент величины $M \cos \theta$, лежащий в плоскости xy , содержащей Gy , и направленный параллельно Gx , и момент величины $M \sin \theta$, лежащий в плоскости, содержащей Gx , и направленный противоположно Gy . Согласно принципу суперпозиции, действия этих двух составляющих моментов можно исследовать отдельно и сложить полученные результаты. Предыдущая теория применима, так как плоскость действия каждого момента содержит главную ось инерции поперечного сечения.

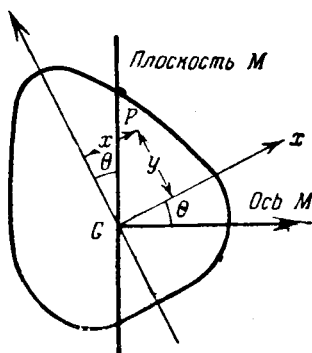


Рис. 53.

Рассматривая в поперечном сечении точку P с координатами x и y по отношению к осям Gx , Gy , мы из формулы (17) получим, что первый составляющий момент вызывает напряжение величины

$$p'_1 = \frac{(M \cos \theta) y}{I_x},$$

а второй — напряжение величины

$$p''_1 = \frac{(M \sin \theta) x}{I_y},$$

¹⁾ См. примечание на стр. 659.

где через $I_x (= Ak_x^2)$ и $I_y (= Ak_y^2)$ обозначены моменты инерции площади поперечного сечения соответственно около осей Gx и Gy .

Следовательно, оба момента, действуя вместе (т. е. первоначальный момент), вызовут напряжение, равное сумме:

$$p'_1 + p''_1 = \frac{M}{A} \left(\frac{y \cos \theta}{k_x^2} + \frac{x \sin \theta}{k_y^2} \right) = p_1. \quad (19)$$

Эта сумма обращается в нуль, когда

$$\frac{x \sin \theta}{k_y^2} + \frac{y \cos \theta}{k_x^2} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, для приложенного момента M соотношение (20) является уравнением нейтральной оси (§ 167). Эта ось не будет (вообще) перпендикулярна плоскости M .

173. Ее положение относительно плоскости M будет выяснено, если мы рассмотрим уравнение центрального эллипса инерции поперечного сечения¹⁾:

$$\frac{x^2}{k_y^2} + \frac{y^2}{k_x^2} = 1. \quad (I)$$

Прямая, изображающая на рис. 53 след плоскости M , имеет уравнение

$$x \cos \theta - y \sin \theta = 0 \quad (II)$$

и пересекает центральный эллипс инерции в точке с координатами x_1, y_1 , удовлетворяющими и (I) и (II). Уравнение касательной к эллипсу в точке (x_1, y_1)

$$\frac{xx_1}{k_y^2} + \frac{yy_1}{k_x^2} = 1.$$

Прямая, параллельная ей и проходящая через G , будет иметь уравнение

$$\frac{xx_1}{k_y^2} + \frac{yy_1}{k_x^2} = 0. \quad (III)$$

¹⁾ См. Лэмб, Статика, § 73.

Уравнение (III) эквивалентно (20), т. е. уравнению нейтральной оси, так как x_1, y_1 удовлетворяют (II). И теперь мы видим, что нейтральная ось параллельна касательной к центральному эллипсу инерции поперечного сечения в той точке, в которой эллипс пересекается плоскостью M , т. е. *нейтральная ось и след плоскости M являются сопряженными диаметрами эллипса инерции поперечного сечения.*

Для того чтобы изгиб мог произойти в плоскости приложенного момента, нейтральная ось [параллельная (рис. 50) оси изгиба] должна быть перпендикулярна этой плоскости. Следовательно, упомянутые сопряженные диаметры должны быть перпендикулярны, т. е. они должны быть главными осями эллипса инерции. Этот результат подтверждает вывод § 169.

174. Пусть Gx, Gy (рис. 54) будут главными осями инерции поперечного сечения. Рассмотрим влияние наложения продольного усилия, результирующая которого равна P и действует по прямой, проходящей через точку Q . Как и в § 171, легко показать, что усилие эквивалентно силе растяжения P , действующей в G вместе с изгибающими моментами $P \times QM$ и $P \times QN$, действующими соответственно в плоскостях, содержащих Gx и Gy . Отсюда напряжение в точке x, y поперечного сечения дается формулой

$$p_1 = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{QM \cdot x}{k_y^2} + \frac{QN \cdot y}{k_x^2} \right],$$

а уравнение нейтральной оси (или линии нулевого напряжения) будет:

$$1 + \frac{QM \cdot x}{k_y^2} + \frac{QN \cdot y}{k_x^2} = 0. \quad (I)$$

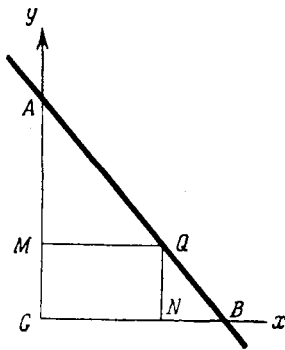


Рис. 54.

Пусть теперь точка Q движется по фиксированной прямой AB (рис. 54). Тогда можно показать, что *нейтральная ось будет всегда проходить через фиксированную точку*. Ибо, каково бы ни было положение Q на AB , мы можем написать, что

$$\left. \begin{aligned} QM &= \lambda \bar{x}, \\ QN &= (1 - \lambda) \bar{y}, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

где $\bar{x} = GB$, $\bar{y} = GA$. Подставив в (I), мы получим уравнение

$$1 + \lambda \left(\frac{x}{k_y^2} - \frac{y\bar{y}}{k_x^2} \right) + \frac{y\bar{y}}{k_x^2} = 0,$$

которое, если мы положим

$$\frac{x\bar{x}}{k_y^2} = \frac{y\bar{y}}{k_x^2} = -1, \quad (III)$$

удовлетворяется для всех значений λ . Следовательно, нейтральная ось всегда проходит через точку $(-k_y^2/\bar{x}, -k_x^2/\bar{y})$. Важность этого замечания иллюстрируется на первых двух задачах, приводимых ниже. Заметим, что в цементе, известии и других связывающих материалах, употребляемых в строительном деле, легко возникают трещины, и поэтому они не могут сопротивляться растяжению. Следовательно, в целях безопасности нужно, чтобы в каменных постройках, как, например, башнях или трубах, напряжение в каждой точке горизонтального поперечного сечения было бы сжимающим. Другими словами, нейтральная ось должна всегда проходить *вне* поперечного сечения.

Примеры

15. (Самб. М. S. Т. 1932.) Колонна удерживает груз, линия действия которого перпендикулярна ее поперечному сечению и пересекает его в точке P .

Сечение колонны — равносторонний треугольник со стороной a . Показать, что нагрузка не будет вызывать растяжения тогда, когда точка P находится внутри равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{4} a$.

[Площадь поперечного сечения выражается формулой

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2.$$

Соображения симметрии показывают, что эллипс инерции должен быть кругом. Мы легко найдем, что

$$k^2 = \frac{a^2}{24}.$$

Для того чтобы нейтральная ось могла лежать на стороне треугольника, нагрузка должна действовать в точке, расположенной между центром тяжести и противоположной вершиной на расстоянии не большем чем x от центра тяжести, где x определяется соотношением

$$\frac{P}{A} \left[1 - \frac{x}{k^2} \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] = 0.$$

Таким образом, три предельных положения груза образуют вершины второго равностороннего треугольника. Они отстоят от центра тяжести сечения на расстоянии, равном

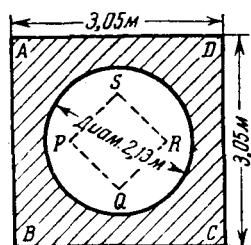
$$x = \frac{2\sqrt{3}k^2}{a} = \frac{a}{4\sqrt{3}},$$

т. е. они лежат в вершинах равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{4} a$. Теорема § 174 показывает, что когда груз движется по стороне этого меньшего треугольника, нейтральная ось поворачивается около вершины треугольника, являющегося поперечным сечением.]

16. (Самб. М. С. Т. 1930.) На рисунке изображено поперечное сечение вертикальной каменной трубы.

Показать, что кладка не подвергается растягивающему напряжению, если результирующая вертикальная сила давления по сечению находится внутри квадрата, который на рисунке обозначен буквами $PQRS$.

Показать, что длина диагонали этого квадрата равна приблизительно 142,3 см. Показать также, что по мере того как точка приложения силы сжатия вдоль линии PQ проходит от точки P к точке Q , нейтральная ось сечения поворачивается против часовой стрелки около D из положения DC в положение DA .



17. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Балка из прокатного углового железа лежит на двух опорах, причем стороны угла лежат в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Известны следующие геометрические данные сечения:

Размеры: $15,25 \times 15,25 \times 2,54$ см.

Центр тяжести находится на расстоянии 4,71 см от какой-нибудь из внешних сторон.

Главные моменты инерции: 2310 и 615 см⁴.

Вычислить напряжения, вызванные в трех внешних углах сечения изгибающим моментом в 930 кгм, действующим в вертикальной плоскости. [746, 133,9 — 709 кг/см².]

(Соображения симметрии показывают, что главные оси поперечного сечения наклонены под углом 45° к сторонам.)

Упругая энергия изгиба

175. Вернемся к обычному случаю, когда главная ось поперечного сечения лежит в плоскости изгиба. Мы установили формулу

$$M = \frac{EI}{R} \quad (15) \text{ bis}$$

для случая балки, изогнутой в сплошное круговое кольцо (рис. 50). Из соображений симметрии (§ 164) мы установили, что первоначально плоские сечения балки (перпендикулярные к ее оси) остаются плоскими в изогнутом кольце. Два сечения, первоначально находившиеся на расстоянии l друг от друга, после деформации станут двумя плоскими сечениями, плоскости которых проходят через ось кольца и образуют между собой угол $\frac{l}{R}$. Если мы выделим часть балки, лежащую между этими сечениями, то мы получим задачу, показанную на рис. 16 главы II, § 46, при

$$\psi = \frac{l}{R}. \quad (I)$$

Из первого уравнения (II) этого параграфа мы найдем, что упругая энергия, запасенная этой частью балки, равна:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} M\psi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{EI}{R^2} l. \end{aligned}$$

В выражение для U подставлены соотношения (I) и (15). Упругая энергия изгиба на единицу длины балки выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \frac{EI}{R^3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \text{ [опять согласно (15) и (21)].} \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с (14) главы II, мы увидим, что величина, названная жесткостью при изгибе и обозначенная через B , в нашем решении имеет значение EI . Этот результат был уже использован в § 48 главы II.

Общая (приближенная) теория изгиба

176. Наше решение будет точным тогда, когда изгибающие моменты приложены, как нормальные напряжения (p_1), распределенные по торцевым сечениям в точном соответствии с (13) или (17) §§ 166 и 168. Обычно это условие не выполняется. Соображения, приведенные в §§ 92 — 95 главы III, показывают, что наше решение является стандартным и к нему приближаются в соответствии с принципом минимума упругой энергии все решения для изгиба. На этом основании наше решение можно использовать с достаточной точностью во всех случаях.

В главах VI и VII мы рассмотрим некоторые приложения приближенной теории изгиба, в которой предполагается, что соотношения ¹⁾

$$\text{и } \left. \begin{aligned} e &= \frac{y}{R} \\ p &= E \frac{y}{R} = \frac{My}{I} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

остаются всегда верными. Первое утверждает, что «плоские поперечные сечения остаются плоскими», а второе, что *напряжение является чисто нормальным*.

¹⁾ Индекс 1, который первоначально был приписан e и p , можно теперь опустить, так как p_2 и p_3 равны нулю.

Составные балки

177. Оба соотношения можно сохранить для случая неоднородной балки, составленной из продольных волокон, имеющих различные упругие свойства в различных частях поперечного сечения. Такие балки называются составными и широко применяются в технических сооружениях.

В составных балках E является данной функцией x и y . Условие из § 167

$$\Sigma [p_1 \delta A] = \iint p_1 dx dy = 0$$

приводит теперь к соотношению

$$\Sigma [E y \delta A] = \iint E y dx dy = 0, \quad (23)$$

которое означает, что Ox должна проходить через центр тяжести площади поперечного сечения, в предположении, что плотность площади поперечного сечения пропорциональна E .

Подобным же образом условие из § 169

$$\Sigma [x p_1 \delta A] = \iint x p_1 dx dy = -M_y = 0$$

приводит теперь к соотношению

$$\Sigma [E x y \delta A] = \iint E x y dx dy = 0, \quad (24)$$

которое означает, что Gx и Gy должны быть главными осями инерции для упомянутой площади переменной плотности. Наконец, выражение из § 168

$$M = \Sigma [y p_1 \delta A] = \iint y p_1 dx dy$$

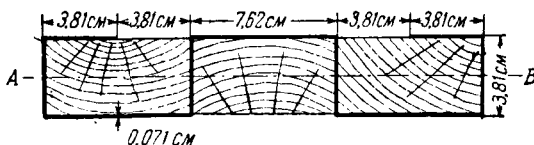
требует теперь, чтобы EI в уравнении (15) было заменено эффективной жесткостью при изгибе

$$B = \Sigma [E y^2 \delta A] = \iint E y^2 dx dy, \quad (25)$$

которая является моментом инерции (относительно Gx) той же упомянутой площади.

Пример

18. (Camb. M. S. T. 1921.) В целях использования узких полос дерева в качестве досок была предложена конструкция, изображенная на рисунке. Полосы охватываются стальной изогнутой пластинкой



и скрепляются болтами. Продольное напряжение в дереве не должно превосходить $157,5 \text{ кг/см}^2$, а напряжение в стали — 1181 кг/см^2 . Вычислить момент сопротивления ¹⁾ при изгибе ^{*} составной доски относительно оси AB . Взять E для стали в 20 раз больше, чем E для дерева. [90,5 кгм]

Железобетонные балки ²⁾

178. Наши результаты находят важное применение в теории железобетонных конструкций. Бетон можно производить на строительном участке, в этом заключается его большое преимущество перед другими материалами. Однако бетон не может сопротивляться растяжению по той причине, что в связывающем материале («портландский цемент») с течением времени появляются трещины. Это свойство было учтено в примерах 15 и 16 § 174. Если бетонные балки должны противостоять изгибающим моментам (так, что нормальные напряжения меняются от растяжения до сжатия), то их растягиваемые стороны надо снабжать железной арматурой и пренебрегать (для запаса) возможным растяжением в бетоне. Теоретические выводы иллюстрируются данными ниже примерами.

¹⁾ Т. е. наибольший момент, который можно приложить к сечению так, что вызванные в материалах напряжения не превзойдут допускаемых.

^{*} Эта величина отличается от момента сопротивления, принятого в русской литературе, множителем, равным допускаемому напряжению (прим. перев.).

²⁾ См. примечания на стр. 659.

Примеры

19. (Самб. М. С. Т. 1931.) Поперечное сечение железобетонной балки показано на приложенном рисунке. Определить максимальный момент сопротивления¹⁾ при изгибе около горизонтальной оси, если максимальное сжимающее напряжение в бетоне не превосходит $42,2 \text{ кг/см}^2$, а соответствующее растягивающее напряжение в стали 1125 кг/см^2 .

[297,5 кгм]

Какой должна быть площадь поперечного сечения железной арматуры? (Отношение модулей Юнга стали и бетона = 15).

[2,35 см²]

[Пусть расстояние нейтральной оси от верхней (горизонтальной) стороны будет $d \text{ см}$. Тогда ширина стержня на высоте y над нейтральной осью равна

$$b = [30,48 - 2(d - y)] \text{ см},$$

а относительное укорочение в бетоне на этой высоте ky , тогда как $k(12,7 - d)$ — относительное удлинение в стальной арматуре.

Мы имеем:

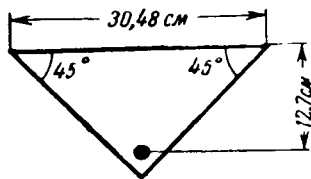
$$E_c k d = 42,4; \quad E_s k (12,7 - d) = 1125 \quad (1)$$

и

$$\frac{1125}{42,2} = \frac{E_s (12,7 - d)}{E_c d} = 15 \cdot \frac{12,7 - d}{d}.$$

Это уравнение дает $d = 4,57 \text{ см}$.

Если A_s — площадь стальной арматуры, то, так как результирующая сила растяжения равна нулю, мы имеем:



$$E_s k (12,7 - d) A_s - \int_0^d E_c k y b \, dy = 0,$$

или, согласно (1),

$$1125 A_s = \frac{42,2}{d} \int_0^d \{(30,48 - 2d)y + 2y^2\} \, dy,$$

что дает $A_s = 2,35 \text{ см}^2$.

Когда условия (1) выполнены, момент сопротивления равен

¹⁾ См. подстрочное примечание к примеру 18.

$$\begin{aligned}
 M &= E_s k (12,7 - d)^2 A_s + \int_0^d E_c k y^2 b dy = \\
 &= 1125 A_s (12,7 - d) + \frac{42,2}{d} \int_0^d \{(30,48 - 2d)y^2 + 2y^3\} dy.
 \end{aligned}$$

20. (Самб. М. С. Т. 1930.) Железобетонная балка имеет сечение, показанное на рисунке.

Арматура такова, что когда максимальное сжимающее напряжение в бетоне равно $42,2 \text{ кг/см}^2$, растягивающее напряжение в стали равно 1125 кг/см^2 .

Предполагая, что модуль упругости стали равен 10-кратному модулю упругости бетона, показать, что:

(1) Нейтральная ось сечения находится на $15,25 \text{ см}$ ниже верхней полки.

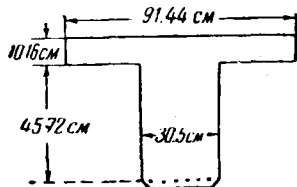
(2) Стальная арматура имеет полную площадь поперечного сечения $24,2 \text{ см}^2$.

(3) Изгибающий момент, который вызывает растягивающее напряжение 1125 кг/см^2 в стали, равен приблизительно 13950 кгм .

21. (Самб. М. С. Т. 1932.) Упрочненная для того, чтобы она могла сопротивляться растягивающим и сжимающим силам, бетонная балка имеет прямоугольное сечение ширины $50,8 \text{ см}$.

Упрочнение состоит в добавлении четырех стальных стержней с диаметром $3,18 \text{ см}$ и четырех стальных стержней с диаметром $2,54 \text{ см}$, расположенных соответственно на глубине $50,8 \text{ см}$ и $7,62 \text{ см}$ от верхней поверхности.

Взяв отношение E_s к E_c равным 15 и пренебрегая растяжением в бетоне, показать, что максимальное напряжение $42,2 \text{ кг/см}^2$ в бетоне будет вызываться положительным изгибающим моментом примерно в 13000 кгм .



ГЛАВА VI

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕФОРМАЦИЯМИ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

Уравнения, определяющие прогиб прямой балки

179. В предыдущей главе было доказано, что уравнения

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{B}{R} \\ u \left(= \frac{1}{2} \frac{M}{R} \right) &= \frac{1}{2} \frac{M^2}{B} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с достаточной для практических целей точностью могут применяться во всех задачах, связанных с изгибом первоначально прямых балок. В этих уравнениях M представляет собой изгибающий момент, $B (=EI)$ — жесткость при изгибе $\frac{1}{R}$ — кривизну линии центров тяжести поперечных сечений, называемой осью балки, u — упругую энергию изгиба на единицу длины балки.

Во II главе мы предполагали, что вторая из формул (1) сохраняется для первоначально изогнутых балок так же, как и для прямых, и использовали первую теорему Кастилиано при решении некоторых задач, связанных с прогибами балок. Сейчас мы будем рассматривать прямые (или почти прямые) балки и изложим различные методы их расчета, основанные на первом из уравнений (1).

180. Деформации, допускаемые в практике, в высшей степени малы, поэтому изогнутая ось балки располагается очень близко от прямой линии, проходящей через концы балки. Один из концов балки возьмем за начало координат. Прямую линию, проходящую через оба конца, — за ось x . Изогнутую ось балки можно определить ее расстоянием y от оси x . Из сказанного выше следует, что производная $\frac{dy}{dx}$,

измеряющая угол наклона оси балки, практически будет очень мала ¹⁾. Поэтому точное выражение для кривизны, а именно:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

можно для практических целей заменить следующим:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2)$$

Выбор знака в формулах зависит от принятого нами правила знаков для M и y .

Обычно считают положительным изгибающий момент, вращающий левую часть балки по часовой стрелке, и ось направляют вниз. Приняв это

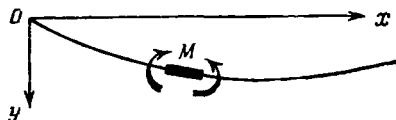


Рис. 55.

правило, мы из рис. 55 видим, что кривизна, вызванная положительным M , такова, что $\frac{dy}{dx}$ убывает (алгебраически) с возрастанием x , т. е., подставляя значение кривизны (2) в формулу (1), мы должны взять отрицательный знак. Таким образом, в качестве приближенного уравнения, из которого при известных M и B можно получить y , мы имеем:

$$-B \frac{d^2y}{dx^2} = M. \quad (3)$$

*181. Изгибающий момент M связан с интенсивностью w распределенной поперечной нагрузки. Через F обозначим пере-

¹⁾ Прогибы очень малы, и на первый взгляд может показаться, что они не имеют практического значения и что их хотят определить только из академического интереса. В технике при проектировании интересуются, главным образом, напряжениями и, следовательно, изгибающими моментами, но последние не всегда можно определить из чисто статических соображений, ибо они зависят от упругих свойств балки (ср. § 70). Таким образом, вычисление прогибов является важной подготовительной частью расчетов на прочность.

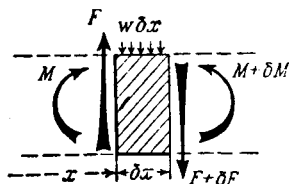
резывающую силу в поперечном сечении ¹⁾. Из статических соображений, рассматривая равновесие заштрихованного элемента на рис. 56, мы получим:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} w\delta x + \delta F &= 0 \\ F\delta x &= \delta M, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

откуда

$$w = -\frac{dF}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}. \quad (5)$$

Исключив M из формул (3) и (5), мы получим:



$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2y}{dx^2} \right) = w, \quad (6)$$

откуда можно определить y , если известны B и w .

Общая задача этой главы заключается в интегрировании уравнения (3) или (6). При интегрировании (3) появятся две произвольные постоянные, а при интегрировании (6) — четыре. Эти постоянные в случае уравнения (3) определяются из того условия, что прогиб y на концах имеет заданные значения. В случае уравнения (6) из того условия, что или M и y или M и F имеют заданные значения, а согласно (3) и второму из (4),

$$F = \frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(B \frac{d^2y}{dx^2} \right). \quad (7)$$

Если ненагруженная балка *немного* искривлена, то ее первоначальную форму можно определить с помощью y_0 — величины, характеризующей отклонение оси балки от прямой, проходящей через ее концы. Очевидно, в таких случаях в формулах (3), (6) и (7) y нужно заменить через $(y - y_0)$.

¹⁾ Касательные напряжения, вызываемые F , рассматриваются в гл. VII.

Графические методы решения

***182.** Предыдущие уравнения (согласно приближенной теории) имеют место независимо от того, будет ли жесткость при изгибе заданной функцией x или постоянной величиной. В общем случае чисто аналитическими методами они не интегрируются, и приходится прибегать к различным приближенным способам. Например «методы релаксации» дают один очень удобный прием (Rel. М. гл. X). Изложим графическое построение ¹⁾, которое можно использовать тогда, когда (как это часто случается) B и M аналитически не заданы.

Записав уравнение (3) в виде

$$\frac{M}{B} = - \frac{d^2y}{dx^2} \quad (8)$$

и сравнив (8) с (5), мы заметим, что зависимость между M и w та же, что и зависимость между y и величиной $\frac{M}{B}$. Для построения эпюры изгибающего момента, соответствующей некоторому заданному распределению w — интенсивности поперечной нагрузки, можно воспользоваться знакомым геометрическим построением — «веревочным многоугольником». Для построения кривой прогиба y , если считать y «фиктивным изгибающим моментом», связанным с «фиктивной нагрузкой» интенсивности $\frac{M}{B}$ на единицу длины, можно использовать то же самое построение.

183. Следует изучить только вопрос о *масштабе*, в котором на окончательной диаграмме изображаются прогибы. Удобнее всего рассмотреть его в связи с масштабом для эпюры изгибающего момента, полученной для w .

При построении эпюры изгибающих моментов с помощью «веревочного» многоугольника мы фактически изображаем (в уменьшенном масштабе) некоторую конструкцию, находящуюся в равновесии под действием заданных сил. Эта конструкция состоит или (как на рис. 57, а) из нити, на кото-

¹⁾ Впервые предложено О. Мором. Ср. Ля в, цитир. соч., § 250 и подстрочное примечание 99 во Введении.

рой подвешены заданные грузы, или (как на рис. 57, *b*) из стержней, образующих ломаную и связанных идеальными шарнирами, к которым приложены заданные силы. В первом случае для равновесия нужно, чтобы горизонтальная составляющая натяжения нити имела бы одно и то же значение

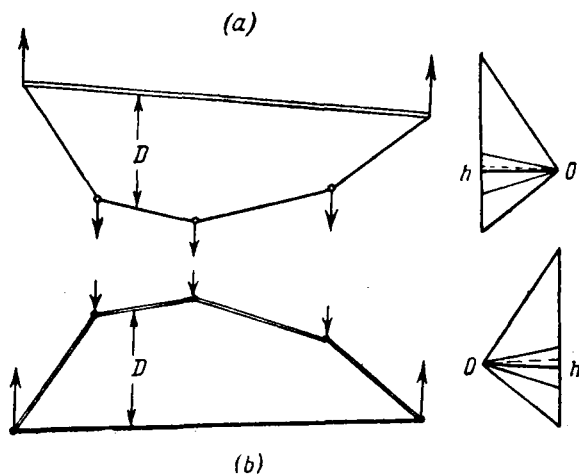


Рис. 57.

в каждой точке. Прямой замыкающий стержень не дает сближаться концами нити друг с другом. Сила сжатия в стержне (который не подвержен действию изгибающих усилий, так как присоединяется с помощью шарниров) имеет горизонтальную составляющую, по величине равную горизонтальной составляющей силы растяжения в нити. Во втором случае для равновесия нужно, чтобы на все стержни действовала одинаковая горизонтальная сила сжатия. Соединяющая шарниры на концах замыкающая нить не дает стержням расходиться. Сила растяжения в нити имеет горизонтальную составляющую, равную по величине горизонтальной составляющей силы сжатия в стержнях.

В обеих конструкциях изгибающий момент (M) в вертикальном сечении определяется поперечной нагрузкой и ре-

акциями от нее в опорах. Он будет уравниваться противодействующим моментом со стороны конструкции, а этот момент измеряется произведением H (постоянной) горизонтальной составляющей силы растяжения в нитях или силы сжатия в стержнях на расстояние D до замыкающей в рассматриваемом сечении, т. е. мы имеем:

$$M = HD, \quad (1)$$

$M \propto D$, так как H постоянно.

Изгибающий момент пропорционален ординате веревочного многоугольника.

При обычном построении на чертежной доске для горизонтальных расстояний используют уменьшенный масштаб, (скажем, $1/N$). Очевидно, что вертикальные размеры чертежа уменьшаются в том же отношении, так что отрезок D будет представлен отрезком d на диаграмме и

$$D = Nd. \quad (II)$$

Комбинируя (I) и (II), мы видим, что масштаб построенной на чертежной доске эпюры изгибающего момента будет тем же, что и масштаб отрезка d , представляющего изгибающий момент

$$M = HNd, \quad (9)$$

т. е. 1 см будет представлять изгибающий момент NH кгсм, если H будет горизонтальной силой сжатия в кг. Фактически задают NH , когда улаиваются о масштабе, который хотя и использовать для эпюры изгибающего момента.

N можно выбрать так, чтобы эпюра имела удобные размеры. Этим мы зафиксируем H . Теперь мы будем знать горизонтальную силу сжатия (или растяжения), изображаемую полярным расстоянием Oh многоугольника сил (см. рис. 57). Мы можем приступить к построению, если заменим поперечную нагрузку конечным числом сосредоточенных сил, каждая из которых представляет (по величине и линии действия) результирующую сил, действующих на элемент длины пролета. Масштаб диаграммы сил произволен: его обычно выбирают так, чтобы получить удобный по размерам силовой многоугольник.

184. Обратимся теперь к уравнению (8), в котором фигурирует «фиктивная» нагрузка $\frac{M}{B}$. Она аналогичным образом заменяется конечным числом фиктивных сосредоточенных «сил», каждая из которых представляет (как по величине, так и по направлению) результирующую «нагрузки» на элементе длины. Рассматриваемые как «силы» величины в действительности не имеют размерности (т. е. они отвлеченные числа), так как и числитель и знаменатель дроби

$$\frac{M \times \text{длина пролета}}{B} \quad (\text{III})$$

имеют одинаковую размерность, а именно:

$$(\text{сила}) \times (\text{длина})^2.$$

Поэтому H' — фиктивная горизонтальная сила сжатия или растяжения будет также отвлеченным числом и, очевидно, y (фиктивный изгибающий момент) будет иметь размерность длины. В соответствии с уравнением (9) мы имеем соотношение

$$y = H' N d'. \quad (10)$$

d' отрезок на нашей новой эпюре, представляющий прогиб y . $1 : N$, как и раньше, отношение, в котором уменьшаются на чертежной доске горизонтальные длины. Таким образом, имеем масштаб: *1 сантиметр соответствует прогибу в NH' сантиметров.*

В большинстве задач действительные прогибы будут малы, и при наших построениях их нужно будет увеличивать. Это означает, что NH' нужно давать дробное значение так, что H' в общем будет представлять собой довольно малое число. Например, если $N = 10$ (так что горизонтальный масштаб чертежа равен 1 см к 1 дм) и если прогибы желательно увеличить в десять раз, то

$$y = H' \times 10 \times (10y),$$

и мы имеем

$$H' = \frac{1}{100}.$$

Вследствие больших значений B будут также малы вертикальные «силы» типа (III).

Многоугольник фиктивных «сил» будет иметь произвольные размеры. Его масштаб, как и масштаб многоугольника настоящих сил (§ 183), зависит от нашего выбора.

Использование «веревочной аналогии»*)

185. Полное представление о графическом методе можно получить только тогда, когда собственными руками сделаешь построение на чертежной доске. Веревочную аналогию, т. е. соответствие по форме между уравнениями (5) и (8), можно использовать при решении некоторых типов задач, не проводя графических построений.

Для примера возьмем балку постоянного поперечного сечения, нагруженную в центре сосредоточенной силой W (рис. 58). Эюра изгибающего момента

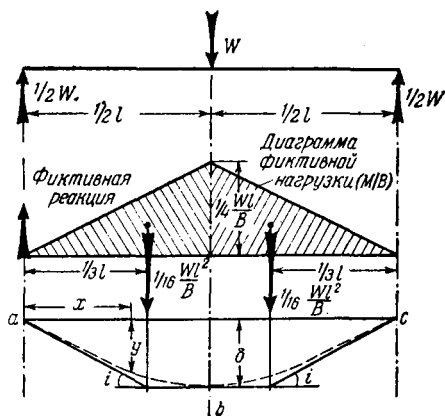


Рис. 58.

имеет вид треугольника, с максимальным значением $\frac{1}{4} Wl$. B постоянна. Полная «фиктивная сила» на каждой половине участка равна

$$\frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{Wl}{4B} = \frac{1}{16} \frac{Wl^2}{B}.$$

Линия действия ее результирующей, как показано на рисунке, находится на расстоянии $\frac{1}{3} l$ от ближайшей опоры. Следо-

*) В русской литературе принято называть этот способ решения графо-аналитическим методом. (Прим. перев.)

вательно, тангенс угла наклона касательной на концах *к кривой прогиба в натуральную величину* ($N=1$, $H'=1$) будет даваться формулой:

$$i = \frac{Wl^2}{16BH} = \frac{Wl^2}{16B}.$$

Максимальный прогиб (в середине пролета) будет

$$\delta = i \times \frac{1}{3} l = \frac{Wl^3}{48B}.$$

Эти результаты были уже получены другим методом в главе II (пример 4).

Настоящий вывод требует, чтобы направления касательных к веревочной кривой в точках *a*, *b* и *c* (рис. 58) были известны. Эти точки соответствуют концам элементов длины, на которые разбита эпюра фиктивной нагрузки. Из статических соображений мы знаем, что эти направления должны пересекаться на линиях действия результирующих тех нагрузок, которые распределены на этих элементах длины. *Метод можно применять в любом из тех случаев, когда эпюру изгибающего момента можно разделить на участки, центры тяжести которых известны.*

Используя тот же рис. 58, мы можем вычислить прогиб *y* на каком-нибудь расстоянии *x* ($< \frac{1}{2} l$) от левой опоры, если только мы заметим, что фиктивные реакции на этом конце равны фиктивной нагрузке на половине пролета, т. е. равны $\frac{1}{16} \frac{Wl^2}{B}$. Вся сила от фиктивной нагрузки между *a* и *x* равна $\frac{1}{4} \frac{Wx^2}{B}$. Ее результирующая проходит через точку $\frac{2}{3} x$. Фиктивный изгибающий момент (т. е. прогиб) на расстоянии *x* от левой опоры будет:

$$y = \left(\frac{1}{16} \frac{Wl^2}{B} \right) x - \left(\frac{1}{4} \frac{Wx^2}{B} \right) \frac{x}{3} = \frac{Wx}{4B} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right).$$

Примеры

1. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Балка постоянного поперечного сечения и длины *l* опирается в точках, удаленных от каждого из концов на расстояние $\frac{1}{4} l$. Балка подвержена действию равномерно рас-

пределенной нагрузки wl . Используя веревочную аналогию, показать, что концы балки наклоняются вниз под углом $\frac{wl^3}{192B}$.

[Эпюры M/B для равномерной нагрузки и для реакций в опорах изображены на чертеже отдельно (чертеж относится к половине балки). Каждая из реакций равна $\frac{1}{2} wl$ и дает треугольную эпюру с высотой в среднем сечении $\frac{1}{8} \frac{wl^2}{B}$ и полной площадью $\frac{1}{64} \frac{wl^3}{B}$. Поперечная нагрузка дает параболическую эпюру, имеющую в среднем сечении ту же высоту и полную площадь $\frac{1}{48} \frac{wl^3}{B}$. Центр тяжести этой эпюры находится на расстоянии $\frac{1}{8} l$ от среднего сечения.

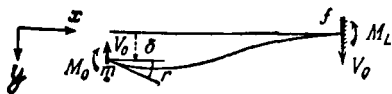
Рассматривая результирующую каждой эпюры как отдельную силу и вспоминая, что кривая прогиба должна иметь нулевой угол наклона в среднем сечении, мы получим веревочную кривую $cabd$. Известно, что кривая прогиба должна касаться ее в точках c и d . На диаграмме в натуральную величину ($N=1$; $H'=1$) угол наклона участка ab равен $\frac{1}{64} \frac{wl^3}{B}$, а изменение угла наклона в точке b равно $\frac{1}{48} \frac{wl^3}{B}$, т. е. угол наклона, измеряемый вниз в точке d , будет

$$\frac{wl^3}{B} \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) = \frac{wl^3}{192B} .]$$

2. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Горизонтальная консоль имеет постоянную жесткость при изгибе. Один конец консоли заделан, а на другом приложена сосредоточенная сила. Используя веревочную аналогию, показать, что угол наклона i и прогиб d на нагруженном конце связаны уравнением

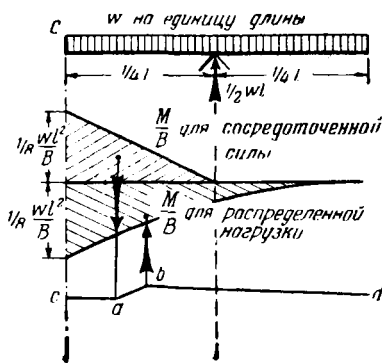
$$d = \frac{2}{3} l \operatorname{tg} i .$$

* 2а. Используя веревочный многоугольник, получить следующие соотношения [необходимые для применения «метода релаксации» к неразрезным балкам (Rel. M., § 24)]:



$$V_0 = -6 \frac{B}{L^3} (2\delta + Lr),$$

$$M_0 = 2 \frac{B}{L^2} (3\delta + 2Lr).$$



V_0 , M_0 (см. рис.) являются перерезывающей силой и изгибающим моментом, необходимыми для того, чтобы вызвать прогиб δ и поворот γ на конце t первоначально прямой балки tf (имеющей постоянную жесткость при изгибе B), когда другой конец балки f защемлен.

Неразрезные балки

*186. Если балка, подверженная действию поперечной нагрузки, лежит более чем на двух опорах, то статических соображений недостаточно для того, чтобы определить реакции в опорах. Реакции до некоторой степени будут зависеть от относительных жесткостей, различных пролетов. «Теорема трех моментов» Клапейрона (гл. II, § 70) дает соотношение между изгибающими моментами в каких-нибудь трех последовательных опорах. В это соотношение входят поперечная нагрузка, жесткость при изгибе (B) и прогиб опор ниже некоторого данного уровня. Если эти величины заданы, то соотношение имеет вид

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = d,$$

где a , b , c , d известны. Для балки, опирающейся в N точках, мы сможем составить $(N-2)$ соотношений такого рода. Их будет достаточно для определения всех моментов, если нам будет известно значение каких-нибудь двух изгибающих моментов (например, изгибающих моментов на концевых опорах). Зная эти моменты, мы можем определить реакции и с помощью аналитических или графических методов, описанных в предыдущих параграфах, построить кривую прогиба.

Такой путь решения неудобен, так как он требует длинных вычислений и результат трудно проверить. Желательно изменить метод так, чтобы не нужно было обращаться к теореме трех моментов. В первом издании этой книги в §§ 187—191 описывался прямо решающий задачу графический метод, предложенный, повидимому, О. Мором¹⁾. Однако теперь более удобно решать задачи с помощью «метода распределения момента» (§ 109) или с помощью методов релаксации (§§ 106—108), которые по отношению к этой частной задаче эквивалентны. Полное изложение метода дается в главе II

¹⁾ См. подстрочное примечание к § 182.

книги «Relaxation Methods», в которой читатель сможет найти все нужные ему сведения, а здесь мы не будем излагать графический метод со всеми подробностями.

* Использование «безразмерных» уравнений

187. Вместо графического опишем в этих параграфах метод, часто употребляемый в связи с методами релаксации. С помощью этого метода решение какой-нибудь частной задачи о прогибе можно обобщить так, что оно станет применимым ко всем задачам, касающимся подобных и подобно нагруженных балок.

Пусть L — расстояние между опорами рассматриваемой балки (или в случае неразрезной балки длина одного из пролетов), w_0 , B_0 — те значения, которые принимают w и B в каком-нибудь заданном сечении (например, в среднем сечении или на одном из концов).

Введем обозначения:

$$\left. \begin{array}{lll} z & \text{для отношения } x/L, \\ W(z) & \gg & w/w_0, \\ \beta(z) & \gg & B/B_0, \\ Y(z) & \gg & y/y_0, \\ \mu(z) & \gg & M/M_0, \end{array} \right\} \quad (I)$$

y_0 и M_0 (еще неопределенные) прогиб и изгибающий момент. После подстановки x , w , M из (I) в уравнение (5) § 181 мы получим

$$w_0 W(z) = - \frac{M_0}{L^2} \frac{d^2 \mu(z)}{dz^2}. \quad (II)$$

Если M_0 мы определим соотношением

$$M_0 = w_0 L^2, \quad (III)$$

то уравнение (II) упростится и примет вид

$$W(z) = - \frac{d^2 \mu(z)}{dz^2} = - \mu''(z). \quad (5)_A$$

Форма этого уравнения совпадает с формой первоначального уравнения (5), только теперь в это уравнение вместо размерных величин x , w , M , из-за которых при решении уравнения (5) был поднят вопрос о масштабе (§ 183), входят безразмерные величины z , W , μ .

Аналогично из (3) с помощью (I) мы получим:

$$-\frac{B_0 Y_0}{L^2} \beta(z) \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} = M_0 \mu(z). \quad (IV)$$

Если мы определим y_0 соотношением

$$y_0 = \frac{M_0 L^3}{B_0} = \frac{w_0 L^4}{B_0}, \quad \text{согласно (III),} \quad (V)$$

то (IV) упростится и приведет к виду:

$$\mu(z) = -\beta(z) \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} = -\beta(z) Y''(z). \quad (3)_A$$

Уравнение (3)_A по форме подобно (3), но, как и в (5)_A, в него входят только безразмерные величины и, следовательно, при его интегрировании не возникает вопрос о масштабе.

Исключим $\mu(z)$ из (3)_A и (5)_A и получим

$$\frac{d^2}{dz^2} \left\{ \beta(z) \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} \right\} = -\mu''(z) = W(z). \quad (6)_A$$

Уравнение (6)_A по форме подобно (6), но оно опять содержит только безразмерные величины.

*188. Нам не придется больше думать о масштабном коэффициенте, когда мы будем использовать веревочный многоугольник (рис. 57) для интегрирования (5)_A. На самом деле пролет на чертеже (т. е. горизонтальное расстояние между концами стержня) теперь должен представляться единицей, а, следовательно, равная ему длина, отложенная вертикально, также должна представляться единицей. «Нагрузка» $W(z)$ тоже отвлеченное число, так что сосредоточенные силы на рисунке 57, являющиеся результирующими (ср. § 183) нагрузками на различных участках пролета, измеряются теперь произведениями безразмерных

величин, и сами поэтому являются безразмерными величинами. Таким образом, H — отвлеченное число. На «силовом многоугольнике» оно должно быть представлено в том же масштабе, что и сосредоточенные вертикальные «силы».

При нашей интерпретации веревочный многоугольник изображается как бы в натуральную величину (т. е. $N=1$) и мы подобно (9) имеем безразмерное соотношение:

$$\mu = H \cdot d. \quad (9)_A$$

H и d теперь отвлеченные числа. Аналогично во второй веревочной кривой § 184 каждая фиктивная «сосредоточенная сила» будет представлять собой произведение двух безразмерных величин, а именно: «фиктивной нагрузки», выражаемой величиной μ/β (соответствующей M/B в § 184), и некоторой правильной дроби (длина участка пролета).

Следовательно, H' — безразмерное число и мы в соответствии с (10) имеем (так как опять $N=1$):

$$Y = H' \cdot d'; \quad (10)_A$$

H' и d' имеют безразмерные числовые значения.

*189. Устранение затруднений с масштабом не является единственным преимуществом излагаемого нами «безразмерного» решения. Если $\mu(z)$ определено интегрированием (5)_A и $Y(z)$ интегрированием (3)_A, то, согласно (I) и (III) § 187,

$$\left. \begin{aligned} M &= \omega_0 L^2 \mu(z), \\ Y &= \frac{\omega_0 L^4}{B_0} Y(z); \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

а, согласно (I) и (V), мы имеем:

в этих выражениях все величины справа известны. Функции $\mu(z)$ и $Y(z)$ сохраняются только для тех балок, для которых $\beta(z)$ в (3)_A и $W(z)$ в (5)_A имеют специальный вид, но на L , ω_0 , B_0 не накладывается никаких ограничений. Таким образом, формулы (VI) могут быть применены ко всему семейству подобных и подобно нагруженных балок. Влияние на изгибающий момент и прогиб абсолютных значений длины, интенсивности нагрузки и жесткости сразу видно из формул.

Функции $W(z)$ и $\beta(z)$ и полученные при нашем решении функции $\mu(z)$ и $Y(z)$, определяемые выражениями (I), называются функциями распределения нагрузки, жесткости при изгибе, изгибающего момента и прогиба.

***Точность графического метода. Соответствующий числовой метод**

190. До сих пор мы не проводили оценки той точности, которая получается при построении веревочного многоугольника. Рассмотрим этот вопрос, основываясь на «безразмерном» решении §§ 187—188. Мы увидим, что для

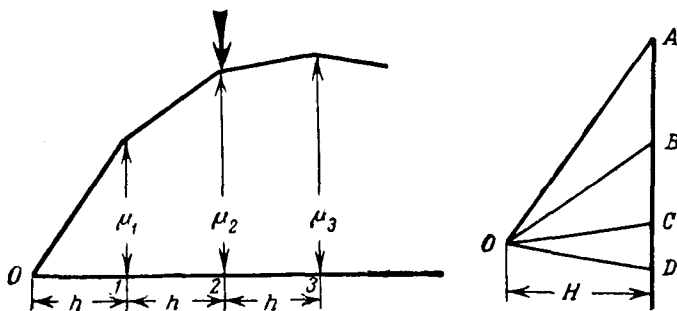


Рис. 59.

выполнения той же операции (приближенного двойного интегрирования) можно указать простой числовой процесс. В теории оба метода (будучи полностью эквивалентными) дают одну и ту же ошибку, но в практике графическое построение имеет недостаток. Так, когда линии пересекаются под очень тупым углом — как должно быть в веревочном многоугольнике, если пролет (ради точности) разделен на много частей, — трудно точно установить их точку пересечения, так как линия, проведенная карандашом, имеет конечную (хотя и малую) толщину. В числовом процессе такой ошибки нет.

Предположим, что в «безразмерном» решении мы разделим пролет (представленный единицей) на равные части, каждая из которых представляет числовую величину h .

Из соображений, аналогичных соображениям предыдущих параграфов, легко видеть (ошибками при вычерчивании пренебрегаем), что при построении веревочного многоугольника мы должны получить ломаную с высотами $0, \mu_1, \mu_2, \dots$ в сечениях под номерами $0, 1, 2 \dots$. Смотри рис. 59, где $\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = h \cdot (\text{tg угла наклона хорды } 2-3 - \text{tg угла наклона хорды } 1-2) = -h \cdot \frac{(\text{сосредоточенная сила в сечении } 2)}{H}$ (I)

последнее равенство имеет место в силу построения, так как в силовом многоугольнике OBC является треугольником сил для равновесия сосредоточенной силы, действующей в сечении 2. Но эта сила, если h мал, будет очень хорошо представляться произведением $h W_2$, где W_2 обозначает интенсивность нагрузки $W(z)$, соответствующую сечению 2. Таким образом (I) эквивалентно

$$\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = -\frac{h^2 W_2}{H} = -h^2 W_2, \quad (II)$$

здесь H взято равным единице, поэтому $\mu(z)$ не содержит множителя.

Сравнив (II) с (5)_A § 187 (т. е. с уравнением, для интегрирования которого производится это построение), мы увидим, что неточность нашего метода в том, что мы μ_2'' заменяем через $(\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3)/h^2$ и аналогично поступаем с μ_1'', μ_3'', \dots . Если через точки веревочного многоугольника провести непрерывную кривую, то можно принять, что соотношение, аналогичное (II), будет иметь место в каждой точке. При таком предположении кривая дает искомую функцию $\mu(z)$ с ошибкой, вызванной заменой выражения

$$\left. \begin{aligned} & h^2 \mu''(z) \\ & \text{на } \mu(z-h) - 2\mu(z) + \mu(z+h). \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Вторую из величин (III) можно разложить в ряд Тейлора, и мы получим:

$$2 \left[\frac{h^2}{2!} \mu''(z) + \frac{h^4}{4!} \mu^{IV}(z) + \frac{h^6}{6!} \mu^{VI}(z) + \dots \right]. \quad (IV)$$

Следовательно, при построении, заменяющем ее через $h^2 \mu''(z)$, пренебрегают членами четвертого порядка по h и выше и

удерживают члены порядка h^3 . Это и есть ошибка, при-
сущая методу веревочного многоугольника; ошибки при
вычерчивании не учитываются.

* «Начальная модификация» заданной нагрузки

191. Другими словами, удовлетворяя уравнениям типа

$$\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = -h^3 W_2, \quad (I)$$

как мы и делаем (отвлекаясь от ошибок вычерчивания) при
построении веревочного многоугольника в его применении
к «нагрузке» $W(z)$, мы в действительности удовлетворяем
уравнению

$$\begin{aligned} -W(z) &= \frac{2}{h^3} \left[\frac{h^3}{2!} \mu''(z) + \frac{h^4}{4!} \mu^{IV}(z) + \frac{h^5}{6!} \mu^{VI}(z) + \dots \right] = \\ &= \mu''(z) + \frac{2h^3}{4!} \mu^{IV}(z) + \frac{2h^4}{6!} \mu^{VI}(z) + \dots \end{aligned} \quad (II)$$

Это уравнение несовместно с

$$-\mu''(z) = W. \quad (5)_A \text{ bis}$$

С другой стороны, $\mu(z)$ в (II) будет иметь правильную в
соответствии с (5)_A форму, если $W(z)$ заменить подхо-
дящим образом выбранной функцией $W(z)$. При этом полу-
чается довольно удивительный результат: *при предваритель-*
ном подходящем изменении данной «нагрузки» построение
веревочного многоугольника может быть проведено так, что
оно даст (теоретически) правильные результаты. Модифи-
цированная нагрузка $W(z)$, согласно (II) и (5)_A,
равна

$$\begin{aligned} W(z) &= W(z) + \frac{2h^3}{4!} W''(z) + \frac{2h^4}{6!} W^{IV}(z) + \dots = \\ &= W(z) + \frac{1}{1200} W''(z) + \frac{1}{3600000} W^{IV}(z) + \dots \end{aligned} \quad (III)$$

(Например, при $h = 1/10$.)

Обычно все, кроме одного или двух дифференциалов $W(z)$,
обращаются в нуль. Если этого нет, то во всяком случае
(когда $W(z)$ достаточно «гладкая» функция) поправки
получаются очень малыми в силу малости коэффициентов.

Аналитические методы решения

192. Рассмотрим задачи, в которых основные уравнения можно решить аналитически. К этому классу принадлежат некоторые из тех задач, в которых B является заданной функцией x . Обратившись к уравнению (8), мы видим, что у можно определить аналитически, когда отношение M/B , являющееся функцией x , можно проинтегрировать дважды, но при переменной жесткости при изгибе и в этом случае удобнее пользоваться графическими методами, поэтому в дальнейшем мы примем, что B имеет постоянное значение. Тогда формулы (5) — (7) могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} By^{IV} &= -M'' = w \text{ — поперечная нагрузка,} \\ -By''' &= M' = P \text{ — полная перерезывающая сила,} \\ &\text{а (3) в форме} \\ -By'' &= M \text{ — изгибающий момент, вращающий} \\ &\text{левую часть балки по часовой стрелке.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Через y'' , y''' , y^{IV} (для краткости) обозначены вторая, третья и четвертая производные y по x .

Если M известен (он определяется из статических соображений, когда балка свободно покоится только на двух опорах), то мы можем определить y из последнего уравнения (11). Проинтегрировав его дважды, мы получим:

$$-By = \iint M \, dx \, dx + Ax + C. \quad (12)$$

A и C — произвольные постоянные. Их можно найти из условия, что y принимает заданные значения на двух опорах. Очевидно, что член Ax представляет поворот, а член C — поперечное перемещение балки, как целого.

Для балки, опертой на концах и подверженной действию равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности w , мы можем написать

$$-By'' = M = \frac{1}{2} w (lx - x^2),$$

а, следовательно,

$$-By = \frac{1}{2} w \left(\frac{1}{6} lx^3 - \frac{1}{12} x^4 \right) + Ax + C.$$

y обращается в нуль при $x=0$ и, следовательно, $C=0$. Кроме того, y обращается в нуль при $x=l$ и, следовательно,

$$A = -\frac{1}{24} \omega l^3.$$

Кривая прогиба дается выражением:

$$By = \frac{1}{24} \omega (l^3 x - 2lx^3 + x^4) = \frac{1}{24} \omega x (l-x)(l^2 + lx - x^2).$$

(Этот пример помещен под № 4 в таблице стандартных случаев прогибов балок, см. стр. 249).

193. Изгибающий момент для консоли, заделанной на одном из концов (ср. гл. II, § 49), определяется аналогичным образом, и, следовательно, прогиб можно получить таким же путем. Если реакции статически неопределимы, как напри-

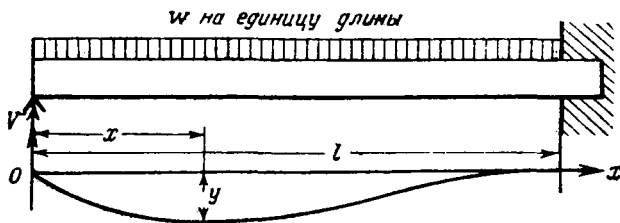


Рис. 60.

мер, в задаче с балкой, заделанной на одном конце и просто опертой на другом (см. рис. 60), то M *a priori* неизвестен и должен быть найден из решения задачи. На рис. 60 изображена балка, на которую действует распределенная поперечная нагрузка. Изгибающий момент в заделанном конце сначала неизвестен, но он может быть выражен как функция (неизвестный) реакции (V) на другом конце.

Поместим начало координат в опертом конце.

Имеем:

$$-By'' = M = Vx = \frac{1}{2} \omega x^2. \quad (I)$$

V — неизвестная реакция. Интегрируя один раз, получим:

$$-By' = \frac{1}{2} Vx^2 - \frac{1}{6} \omega x^3 + A. \quad (II)$$

A можно найти из условия равенства нулю y' при $x=l$.

После чего мы получим:

$$By' = \frac{1}{2} V (l^2 - x^2) - \frac{1}{6} w (l^3 - x^3).$$

Второе интегрирование даст:

$$By = \frac{1}{2} V (l^2 x - \frac{1}{3} x^3) - \frac{1}{6} w (l^3 x - \frac{1}{4} x^4). \quad (III)$$

Постоянной интегрирования нет, так как y обращается в нуль при $x=0$. Кроме того, y должен обращаться в нуль при $x=l$, и мы имеем:

$$0 = \frac{1}{2} V \frac{2}{3} l^3 - \frac{1}{6} w \frac{3}{4} l^4,$$

откуда

$$V = \frac{3}{8} wl. \quad (IV)$$

Это значение для V можно подставить в (I) и определить M .

Мы заметим, что опора на заделанном конце несет пять восьмых всей поперечной нагрузки. По существу мы решили задачу для половины симметрической системы, рассмотренной в § 53 главы II. Наш результат подтверждает полученный там вывод.

Примеры

3. Горизонтальная балка прямоугольного поперечного сечения лежит на опорах и слегка изогнута поперечной (вертикальной) сосредоточенной или распределенной нагрузкой. Два из ее поперечных сечений пересекают ось балки соответственно в точках A и B (горизонтальную) верхнюю поверхность балки по линиям CD и EF , а нижнюю поверхность балки по линиям GH и KL .

Показать (при предположениях, сделанных в приближенной теории изгиба), что если касательные к оси балки в точках A и B параллельны, то полные удлинения верхней поверхности между CD и EF и нижней поверхности между GH и KL , измеренные в каждом случае вдоль поверхностей, равны нулю.

Ось балки, так как она пересекает каждое сечение в точках нейтральной оси, нигде не подвергается удлинению, т. е. длина AB не изменяется. Длина между CD и EF на верхней поверхности превосходит длину AB на величину:

$$\int_A^B e ds = h \int_A^B \frac{1}{R} ds,$$

где e — продольное удлинение на верхней поверхности, h — (постоянное) расстояние верхней поверхности от оси балки, а ds —

элемент длины деформированной оси. $\frac{1}{R} = \frac{d\psi}{ds}$, где ψ — наклон сечения к вертикали. Поперечные сечения, содержащие A и B , параллельны и поэтому

$$\int_A^B \frac{1}{R} ds = \int_A^B d\psi = 0,$$

откуда для верхней поверхности следует искомым результат. Для нижней поверхности исследование аналогично.

[Результат используется в теории точных измерений (ср. пример 6)].

4. (Camb. M. S. T. 1932.) Балка постоянного поперечного сечения, первоначально прямая, подвержена изгибу в главной плоскости. Ox и Oy — прямоугольные оси в плоскости изгиба, угол наклона балки к Ox всюду мал. Касательные к оси балки в двух точках A и B пересекают Oy в точках P и Q .

Показать, что момент относительно Oy площади эпюры изгибающего момента, заключенной между ординатами, проходящими через A и B , равен длине PQ , умноженной на (постоянную) жесткость при изгибе.

5. Проверить выражения для y , данные под номерами 1, 2 и 6 в таблице стандартных случаев прогибов балок на стр. 249.

Метод Маколея *)

194. В задаче, изображенной на рис. 61, поперечная нагрузка w равномерно распределена только на части пролета. Реакции в опорах определяются из условий равновесия и можно вычислить изгибающий момент M в любом сечении. Но аналитическое выражение M будет различным при x , меньшем или большем a .

Момент равен:

$$\left. \begin{aligned} M &= R_A x, && \text{при } x < a, \\ M &= R_A x - \frac{1}{2} w (x - a)^2, && \text{при } a < x < b. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Подобные задачи могут, конечно, решаться графически, аналогично тому, как было описано, однако их можно решать

*) Этот метод предложен в первой половине XIX в. Клебшем. Обычно называется приемом Клебша. (Прим. перев.)

и простыми аналитическими методами, используя способ, предложенный Маколеем¹⁾. Два выражения (I) объединим в одно:

$$M = R_A x - \frac{1}{2} w \{x - a\}^2, \quad (II)$$

при следующих условиях: (1) величину, заключенную в фигурные скобки, нужно опускать, когда ее значение отрицательно и (2) следует интегрировать по $\{x - a\}$ вместо x .

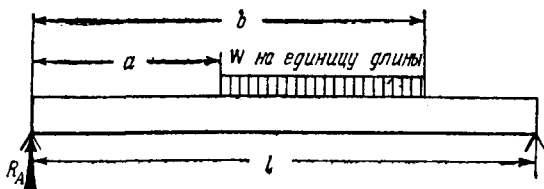


Рис. 61.

195. Таким образом, приравняв M в формуле (II) — Bu'' мы получим:

$$-Bu'' = R_A x - \frac{1}{2} w \{x - a\}^2. \quad (III)$$

Интегрируя при данном выше условии, имеем:

$$-Bu' = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} w \{x - a\}^3 + A, \quad (IV)$$

где A — произвольная постоянная. Идея условия состоит в том, что A теперь принимает одно и то же значение и для x меньших и для x больших a , так как остальные члены (полученные при соблюдении условия) дают для u' выражение, которое в сечении $x = a$ не меняется скачком. Если, с другой стороны, мы раскроем $\{x - a\}^3$ и проинтегрируем как функцию x , то не получим последнего (постоянного) члена в разложении $\{x - a\}^3$. Поэтому постоянная интегрированная A должна будет иметь различные значения для $x < a$ и $x > a$.

¹⁾ «Note on the Deflection of Beams», *Messenger of Mathematics*, 48 (1919), стр. 129. Метод был использован Сен-Венаном и описан Фёпплем, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd 3, *Festigkeitslehre* (Leipzig, 1900).

Интегрирование таким же образом выражения (IV) даст:

$$-By = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} w \{x - a\}^4 + Ax + C. \quad (V)$$

A и C в этом выражении имеют одни и те же значения и для $x < a$ и для $x > a$. Если поперечная нагрузка распределена на участке от $x = a$ до правой опоры, то остается только подобрать значения A и C так, чтобы y обращался в нуль на обоих концах.

Фактически же, как показано на рисунке, нагрузка кончается в сечении $x = b$, где $b < l$. Чтобы учесть это обстоятельство, мы можем рассмотреть направленную вниз поперечную нагрузку, распределенную на участке от $x = a$ до $x = l$, и нагрузку той же интенсивности, но направленную *вверх* и распределенную на участке от $x = b$ до $x = l$. Тогда уравнение (III), очевидно, заменится:

$$-By'' = R_A x - \frac{1}{2} w \{x - a\}^2 + \frac{1}{2} w \{x - b\}^2. \quad (VI)$$

При преобразованиях выражения (VI) мы должны соблюдать прежние условия.

Проинтегрировав дважды, получим:

$$-By = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} w \{x - a\}^4 + \frac{1}{24} w \{x - b\}^4 + Ax + C. \quad (VII)$$

Выражение (VII) заменяет (V) и сохраняется во всех частях пролета.

Постоянную C можно опустить, так как y обращается в нуль при $x = 0$. Из условия равенства нулю y при $x = l$ мы получаем:

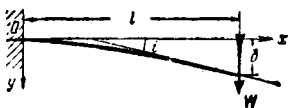
$$0 = \frac{1}{6} R_A l^3 - \frac{1}{24} w [(l - a)^4 - (l - b)^4] + Al, \quad (VIII)$$

откуда можно вычислить A (так как R_A известно¹⁾). Подставив A в (VII), мы получим выражение для всей кривой прогиба.

¹⁾ Из рис. 61 ясно, что $R_A l = w(b - a) \times \frac{1}{2}(2l - a - b)$.

ТАБЛИЦА СТАНДАРТНЫХ СЛУЧАЕВ ПРОГИБОВ БАЛОК

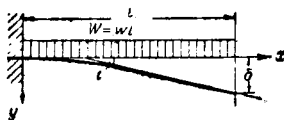
1



$$\delta = \frac{1}{3} \frac{Wl^3}{B}; \quad i = \frac{1}{2} \frac{Wl^2}{B};$$

$$y = \frac{1}{6} \frac{W}{B} x^2 (3l - x).$$

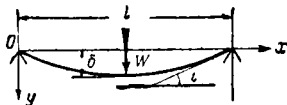
2



$$\delta = \frac{1}{8} \frac{Wl^3}{B}; \quad i = \frac{1}{6} \frac{Wl^2}{B};$$

$$y = \frac{1}{24} \frac{w}{B} x^3 (6l^2 - 4lx + x^2).$$

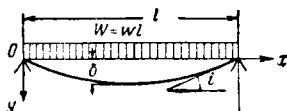
3



$$\delta = \frac{1}{48} \frac{Wl^3}{B}; \quad i = \frac{1}{16} \frac{Wl^2}{B}$$

$$y = \frac{1}{48} \frac{W}{B} x (3l^2 - 4x^2) \left(0 < x < \frac{1}{2} l \right).$$

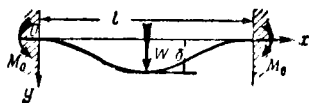
4



$$\delta = \frac{5}{384} \frac{Wl^3}{B}; \quad i = \frac{1}{24} \frac{Wl^2}{B};$$

$$y = \frac{1}{24} \frac{w}{B} x (l^3 - 2lx^2 + x^3).$$

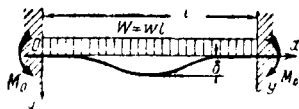
5



$$\delta = \frac{1}{192} \frac{Wl^3}{B}; \quad M_0 = \frac{1}{8} Wl;$$

$$y = \frac{1}{48} \frac{W}{B} x^2 (3l - 4x) \left(0 < x < \frac{1}{2} l \right).$$

6



$$\delta = \frac{1}{384} \frac{Wl^3}{B}; \quad M_0 = \frac{1}{12} Wl;$$

$$y = \frac{1}{24} \frac{w}{B} x^2 (l - x)^2.$$

Н. В. Во всех схемах W обозначает полную поперечную нагрузку, а w — интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

Учет сосредоточенных изгибающих моментов

196. При проектировании зданий со стальными рамами нам приходится рассматривать влияние сосредоточенных изгибающих моментов, приложенных к балке посредством других балок, идущих под прямыми углами к основной. Мы, например, можем столкнуться с задачей, показанной на рис. 62, где M_1 — заданный момент с направлением вращения

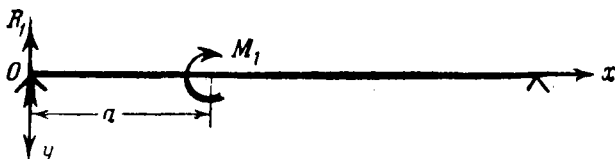


Рис. 62.

по часовой стрелке (поперечная нагрузка, конечно, может действовать вместе с M_1 , но нам не нужно рассматривать ее здесь).

Если R_1 представляет собой реакцию на левой опоре, то изгибающий момент в сечении с координатой x , очевидно, будет

$$\begin{aligned} M &= R_1 x, & \text{при } x < a, \\ M &= R_1 x + M_1, & \text{при } x > a. \end{aligned}$$

Обе формулы можно соединить вместе, воспользовавшись правилом Маколея. Так, мы имеем¹⁾:

$$-By'' = M = R_1 x + M_1 \{x - a\}^0, \quad (1)$$

Как и раньше предполагаем, что член, заключенный в фигурные скобки, должен быть опущен, когда величина, содер-

¹⁾ Это обобщение метода Маколея предложил Н. А. Webb, Ср. Case, Strength of Materials (Arnold & Co., 1925), § 169.

жащаяся в них, отрицательна. Второй член правой части (I) должен рассматриваться при $x > a$ и его значение равно:

$$M_1 \{x - a\}^0 = M_1.$$

Интегрирование (I) даст:

$$-By' = \frac{1}{2} R_1 x^2 + M_1 \{x - a\} + A,$$

$$-By = \frac{1}{6} R_1 x^3 + \frac{1}{2} M_1 \{x - a\}^2 + Ax + C,$$

и решение, как и раньше, можно довести до конца.

Примеры

6. Стержень постоянного прямоугольного сечения используется как эталон длины. На верхней поверхности стержня, близко к его концам, под прямыми углами к его длинной стороне начерчены параллельные линии. Нужно разместить две опоры, на которых лежит стержень, так, чтобы прогибы, вследствие силы тяжести, не влияли на расстояния между начерченными линиями.

Показать, что опоры нужно разместить (симметрично относительно стержня) на расстоянии $\frac{l}{\sqrt{3}}$ друг от друга, (l длина стержня)¹⁾.

[В соответствии с примером 3 касательные к оси стержня на концах должны быть горизонтальны.]

7. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Стержень постоянного поперечного сечения и длины $4l$ свободно опирается на концах и несет равные грузы W на расстояния l , $2l$, $3l$ от одного из концов. Показать, что прогиб в середине равен $\frac{19}{6} \frac{Wl^3}{EI}$.

8. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Концы стальной балки постоянного поперечного сечения и длины l лежат на жестком фундаменте. Кроме того, балка опирается в точках пролета, расположенных на расстоянии $\frac{1}{3} l$ от концов, на полые стальные колонны. Последние

¹⁾ Это частный случай результата, данного G. V. Airy (*Met. Astron. Soc.*, 15), который гласит, что если используется n (находящихся на одинаковом уровне) опор, то они должны быть расположены друг от друга на одинаковых расстояниях, равных $l/\sqrt{(n^2 - 1)}$. Ср. F. H. Rolt, *Gauges and Fine Measurements* (London, 1929), т. I, стр. 16.

имеют постоянное поперечное сечение, высоту h и стоят на жестком основании. Когда балка не нагружена, четыре поддерживающие точки находятся на одном уровне.

Показать, что для того, чтобы все четыре опоры воспринимали равные части равномерно распределенной нагрузки, каждая колонна должна иметь площадь поперечного сечения, равную $486hI/7I^3$, где I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения балки.

9. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Балка ABC постоянного поперечного сечения и длины $2l$ опирается на концах A и C и в середине B на упругие опоры. Сила k вызывает единичные перемещения опор. Жесткость при изгибе стержня EI . Балка несет равномерно распределенную нагрузку. Полная величина этой нагрузки равна W . Доказать, что реакция центральной опоры B равна

$$\frac{5kl^3 + 24EI}{8kl^3 + 72EI} W.$$

10. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Балка постоянного поперечного сечения несет равномерно распределенную интенсивности на единицу длины w нагрузку и опирается в трех точках (в середине и на обоих концах). Высоту средней опоры можно менять.

Показать, что для того, чтобы максимальный изгибающий момент имел наименьшее из возможных значение, отношение общей нагрузки к нагрузке, несомой средней опорой, должно быть $2 - \sqrt{2}$ и средняя опора должна располагаться ниже уровня внешних опор на величину

$\frac{8\sqrt{2} - 11}{384} \frac{wl^4}{EI}$, где l — расстояние между внешними опорами.

11. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Тяжелая балка постоянного поперечного сечения покоится на двух опорах, расположенных на одном уровне и равно удаленных от ее середины. Показать, что наибольший направленный вниз прогиб, измеренный от уровня опор, имеет наименьшее возможное значение тогда, когда расстояние между опорами равно примерно 0,55 длины балки.

12. (Camb. M. S. T. 1933.) Горизонтальная балка ABC постоянного поперечного сечения жестко заделана на одном конце A и в ненагруженном состоянии находится как раз в соприкосновении с жесткой опорой в B , где $AB = BC = l$.

Сосредоточенная сила W приложена в средней точке участка AB . Показать, что перемещение точки C вверх равно $Wl^3/32EI$.

13. (Camb. M. S. T. 1934.) Горизонтальная балка AB постоянного поперечного сечения заделана на концах. Свободная длина балки равна l . Найти выражение, характеризующее изменение изгибающего момента в точке A , при движении по пролету балки нагрузки W .

Пусть W действует в сечении, расположенном на расстояниях a и b соответственно от концов A и B (a больше b).

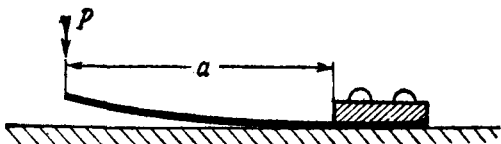
Показать, что для этого положения силы наибольший прогиб возникнет в сечении, находящемся на расстоянии $\frac{2al}{2a+l}$ от A , и что величина его будет равна:

$$\frac{2a^3b^3W}{3(2a+l)^3EI}.$$

14. С помощью метода Маколея для стержня постоянной жесткости при изгибе получить уравнение (45) главы II (теорема трех моментов Клапейрона).

Пример 15 относится к стержню с малой начальной кривизной. Начальная кривизна учитывается так, как описано в § 181. В примерах 15 и 16 можно считать, что изгибающий момент изменяется *непрерывно*, так как, в противоположность рассмотренному в § 196 передача сосредоточенных моментов конструктивно не обеспечивается.

15. (Camb. M. S. T. 1933.) Плоская пружина постоянного сечения плотно привинчена одним концом к жесткой плоскости



(см. рис.). Пружина первоначально изогнута так, что на горизонтальном расстоянии x от заделки ордината оси пружины (y_0), измеряемая от плоскости, равна Kx^3 . Длина пружины a находится в таком отношении к Ka^3 , что проекцию длины пружины на плоскость можно принять равной a . К свободному концу, как показано на рисунке, приложена сила P . Доказать, что после приложения силы часть пружины, имеющая длину $\frac{Pa}{(P+6EIK)}$ от заделанного конца, будет соприкасаться с плоскостью, и что свободный конец будет находиться от плоскости на расстоянии

$$\frac{36E^2I^2K^3a^3}{(P+6EIK)^3}.$$

E — модуль Юнга, а I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения пружины.

[Выпрямляя пружину (доводя y_0 до нуля) мы приложим изгибающий момент величины $EI \frac{d^2 y_0}{dx^2} = 6EIKx$, вращающий левую часть пружины против часовой стрелки.

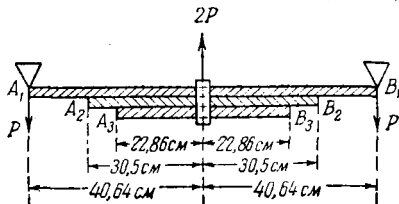
Если пружина находится в соприкосновении с плоскостью по длине x , то это выражение должно равняться приложенному моменту в точке x , т. е. $P(a-x)$. Этот момент не вызывает давления между пружиной и плоскостью ни в одной точке, кроме x . В точке x имеется сосредоточенная сила $(P+6EIK)$. Заделка вызывает направленную вниз силу $6EIK$].

16. (Самб. М. С. Т. 1934.) Прямоугольный параллелепипед, имеющий вес W , поднимается вертикальной цепью. Цепь прикреплена к первоначально прямому стержню постоянного поперечного сечения. Стержень проходит через два кольца, симметрично расположенных на параллелепипеде (см. рисунок. Вертикальный масштаб на рисунке сильно увеличен).

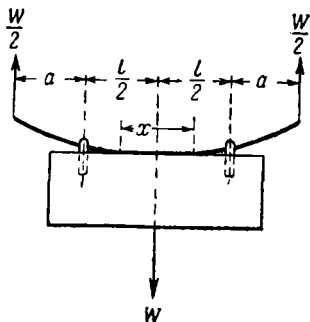
Стержень свободно проходит сквозь кольца. Когда он был прямым, то в обоих кольцах его расстояние до верхней грани параллелепипеда равнялось δ . Если параллелепипед поднимать, то стержень своей средней частью плотно приляжет к параллелепипеду. Показать, пренебрегая деформациями параллелепипеда и колец, что длина упомянутой части стержня будет равна x , где x (если это выражение положительно) равен:

$$l = 4 \sqrt{\frac{3EI\delta}{Wa}}$$

17. (Самб. М. С. Т. 1934.) Пружина состоит из трех прямоугольных стальных пластин A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 . Все три пластины имеют одинаковые ширину и толщину. Длины пластин соответственно равны 81,28 см, 61,0 см и 45,72 см (см. рисунок). Первоначально пластины соединены между собой с помощью скобы, помещенной посередине. Верхняя пластина свободно опирается на своих концах. Далее в середине пружины начинает действовать нагрузка $2P$.



Показать, что соприкосновение между прилегающими пластинками может произойти только на концах и в центре самой корот-



кой из пластин. Пусть R_{12} , R_{22} — реакции в точках A_2 и A_3 . Показать, что $R_{12} = 0,98P$ и $R_{22} = 0,74P$.

[Предположить, что соприкосновение происходит так, как сказано выше, и показать, что при этом предположении изогнутые пластины отделяются друг от друга.]

Устойчивость сжатых стержней (стоек)

197. Рассмотрим различные задачи, в которых нагрузки и соответствующие прогибы, хотя и вычисляются согласно теории, основанной на законе Гука, не удовлетворяют линейному соотношению.

Возьмем длинный вертикальный стержень постоянного поперечного сечения, заделанный на одном конце и нагруженный на другом сосредоточенной силой P . Начало координат поместим в нагруженном конце, ось Ox направим по линии действия силы P ; через y обозначим прогиб, измеряемый по горизонтали от Ox . В сечении с координатой x действует изгибающий момент Pu . Последнее из уравнений (11) имеет вид:

$$-By'' = M = Pu,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0, \quad (13)$$

где

$$\alpha^2 = P/B. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (13):

$$y = A \sin \alpha x + C \cos \alpha x, \quad (15)$$

A и C — постоянные интегрирования. C равно нулю, так как y должен исчезать вместе с x , так что

$$y = A \sin \alpha x, \quad (16)$$

где A — произвольная величина, но y' должен обращаться в нуль при $x = l$, и мы имеем:

$$A\alpha \cos \alpha l = 0. \quad (17)$$

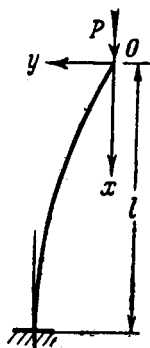


Рис. 63.

198. Ясно, что если A или α равны нулю, то согласно (16), u — тождественный нуль. Конечно, это возможное решение нашей задачи, но сейчас оно нас не интересует. С другой стороны, мы удовлетворим всем условиям нашей задачи, если выберем αl так, чтобы $\cos \alpha l$ обращался в нуль. Это будет при

$$\alpha l = \frac{1}{2} \pi \times (1, 3, 5, \dots). \quad (18)$$

Постоянная A все же будет не определена.

Используя (14), мы можем написать условие (18) в виде

$$\frac{Pl^2}{B} = \frac{\pi^2}{4} \times (1, 3^2, 5^2, \dots), \quad (19)$$

откуда ясно, что решение типа (16) будет существовать тогда, и только тогда, когда сила сжатия P имеет одно из критических значений. Каждому критическому значению соответствует специальное выражение u , определяющее специальную форму продольного изгиба, сохраняющуюся при действии одной только силы сжатия. Прямолинейная форма все же является возможной конфигурацией равновесия, но она не будет больше единственной возможной конфигурацией равновесия. Мы скажем, что это предельная конфигурация устойчивости.

Эти результаты, очевидно, отличаются по форме от тех, которые мы получали до сих пор. Перемещением, которое «соответствует» P (в смысле главы I, § 7), является опускание точки O на рис. 63. Не задерживаясь на его вычислении, как функции u , мы из (16) можем видеть, что так как A не определена, оно не обязательно пропорционально P , а может иметь любое значение. Таким образом, задача выходит из области применения общих теорем, изложенных в I и III главах, хотя она решалась согласно теории, предполагающей, что закон Гука является основным соотношением между напряжением и деформацией. Мы вернемся к этому в гл. XIII (§ 476).

Другие типы условий на концах

199. Теперь исследуем решение:

$$y = A \sin \alpha x, \quad (16) \text{ bis}$$

которое, как мы видели, возможно при определенных условиях. Найдем другие условия, при которых можно получить это же решение.

Стержень должен находиться под действием силы сжатия P , которая связана с α формулой (14). Сила сжатия P должна действовать вдоль прямой $y=0$. Подчинив стержень этому условию, мы можем принять, что ось сжатого стержня

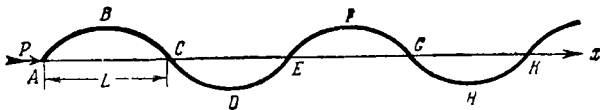


Рис. 64.

(или «стойки») представляет собой некоторую часть бесконечной синусоиды (рис. 64), на концах которой приложены нужные усилия.

Если L — длина полуволны синусоиды, то: $\alpha L = \pi$, так что

$$P = \pi^2 B / L^2. \quad (20)$$

Из (20), выражая L через полную длину l нашего сжатого стержня, мы можем получить критические силы для большого числа условий нагружения.

Так, §§ 197 — 198 относятся к стойкам длины $l = \frac{1}{2}L$,

один конец которых заделан, а другой находится на линии действия силы сжатия [см. случай (C) рис. 65]. Обращаясь к рис. 64, мы видим, что наши условия удовлетворяются тогда, когда какая-нибудь одна из частей синусоиды AB , $ABCD$, $ABDF$,

$ABDFH$ и так далее рассматривается как ось стойки, т. е. когда $l = \frac{1}{2}L$ или $\frac{1}{2}L \times 3, 5, 7, \dots$. Подставляя эти соотношения в (20), мы получим прежний результат:

$$\frac{Pl^3}{B} = \frac{\pi^4}{4} \times (1, 3^4, 5^4, \dots). \quad (19) \text{ bis}$$

Теперь ясно видно, что характер «формы продольного изгиба» (§ 198) связан с соответствующей «критической силой».

200. Если мы имеем стержень, *оба* конца которого «просто оперты» (т. е. концы его должны оставаться на линии действия силы сжатия, а угол наклона к вертикали ничем не стеснен), то рис. 64 все еще применим. Только теперь для того, чтобы представить ось стержня, нужно брать следующие части синусоиды: $ABC, ABCDE, ABCDEFG, \dots$

Таким образом l можно приравнять произведению любого целого числа на L , и уравнение (20) для такого типа нагрузки дает следующий ряд критических сил:

$$Pl^3/B = \pi^4 \times (1, 2^4, 3^4, 4^4, \dots) \quad (21)$$

[(A) рис. 65].

Если оба конца стержня заделаны и находятся на одной и той же прямой, то часть синусоиды $BCDEF$ является возможной формой оси стержня $l = 2L$. Можно найти другие возможные формы, для которых $l = L \times (4, 6, 8, \dots)$. Критические силы для этого типа нагрузки [(B) рис. 65] даются соотношением

$$Pl^3/B = 4\pi^4 \times (1, 2^4, 3^4, \dots). \quad (22)$$

201. Наименьшие критические силы для этих трех типов нагрузки и формы продольного изгиба для каждого случая изображены на схемах (A), (B) и (C) рис. 65. Правая схема (D) относится к стержню, оба конца которого вынуждены оставаться на фиксированной прямой. Один из концов «просто оперт», а другой «заделан» (так что не допускаются прогибы на обоих концах, а изменение угла наклона только на одном из

них). Этот случай не охватывается данным выше решением, так как надо добавлять боковую силу (силу реакции) на опертм конце, потому что в заделке вводится реактивный момент. На схеме боковая сила обозначена через V .

В этом случае изгибающий момент в сечении x равен:

$$M = Py - Vx. \quad (I)$$

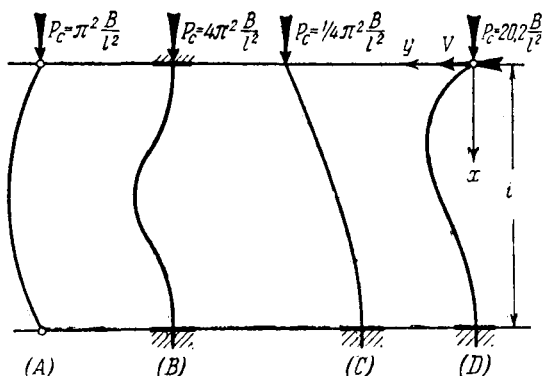


Рис. 65.

Уравнение (13) заменяется следующим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{Vx}{B}, \quad (II)$$

α^2 , как и раньше, связано с P формулой (14).

Общее решение (II) будет:

$$y = A \sin \alpha x + C \cos \alpha x + Vx/P, \quad (III)$$

A и C произвольны. Как и раньше, $C = 0$, так как y обращается в нуль вместе с x , но теперь

$$y' = \alpha A \cos \alpha x + V/P. \quad (IV)$$

Прогиб и угол наклона должны обращаться в нуль при $x=l$, и мы получаем два условия:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \sin \alpha l + \frac{Vl}{P}, \\ 0 &= \alpha A \cos \alpha l + \frac{V}{P}. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Исключив из них A , мы в качестве уравнения, аналогичного (17), имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l. \quad (VI)$$

Его можно решить приближенно пробными подстановками. Первый корень (отличный от $\alpha l=0$, обращающего y в тождественный нуль) равен:

$$\left. \begin{aligned} \alpha l &= 4,49 \text{ (радиан)}. \\ \text{Из (14) мы получаем:} \\ P_1 l^3 / B &= 20,2 \text{ (приближенно)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Рассмотренный в этом параграфе случай фактически не является исключением из утверждения, сделанного в § 199, где говорилось, что *уравнение (16) определяет прогибы, измеренные от линии действия силы сжатия*. В нашем примере, благодаря асимметрии, введена поперечная сила V , а поэтому результирующая сила сжатия действует вдоль линии $y = Vx/P$. Если мы возьмем эту линию действия силы за ось ($y=0$), то член Vx/P в решении (II) пропадет.

202. Для формы прогиба, когда начало взято в «просто опертом конце» и когда оси Ox , Oy направлены по линии действия силы сжатия и перпендикулярно ей, мы получим выражение:

$$y = A \sin \alpha x + Vx/P, \quad (I)$$

постоянная C в соотношении (III) последнего параграфа равна нулю, потому что y должен исчезать вместе с x .

Если y обращается в нуль при $x=l$ (т. е. вторая опора помещена в точку приложения силы сжатия), то мы имеем:

$$A \sin \alpha l + Vl/P = 0, \quad (II)$$

и (I) можно записать в форме:

$$y = A \left(\sin \alpha x - \frac{x}{l} \sin \alpha l \right). \quad (\text{III})$$

Для угла наклона, при $x=l$, получим:

$$\left. \begin{aligned} -i_l &= \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{A}{l} (\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l), \\ \text{для изгибающего момента на этом конце} \\ M_l &= -B \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=l} = B \alpha^2 A \sin \alpha l, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

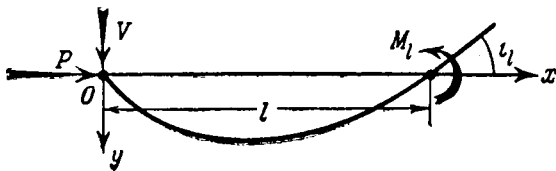


Рис. 66.

i_l и M_l имеют направления, указанные на рис. 66.

Если A не равно нулю (т. е. если ось стержня не является прямой), то мы имеем:

$$\frac{M_l}{i_l} = \frac{B}{l} \left(\frac{\alpha l \sin \alpha l}{\sin \alpha l - \cos \alpha l} \right), \quad (\text{24})$$

а это показывает, что изгибающий момент пропорционален углу наклона. Работа, совершаемая изгибающим моментом на конце $x=l$ при изменении угла наклона (вследствие прогиба) от нуля до его окончательного значения i_l , изменится величиной

$$\frac{1}{2} M_l i_l = \frac{1}{2} \frac{B}{l} i_l^2 \left(\frac{\alpha l \sin \alpha l}{\sin \alpha l - \cos \alpha l} \right). \quad (\text{V})$$

Отношение M_l/i_l [см. (24)] измеряет жесткость стойки по отношению к деформации под действием изгибающего момента на конце.

Интересно исследовать изменение величины, стоящей в скобках, при возрастании силы сжатия P (а отсюда и αl) от нулевого значения. Если $\alpha l < \pi$, то исследуемая величина положительна. Отсюда следует, что согласно (V) изгибающий момент должен совершать положительную работу для того, чтобы вызвать наклон на конце.

При $\alpha l = \pi$ (т. е. P равно первому критическому значению) отношение M_1/l_1 равно нулю. На конце нет изгибающего момента. Условия, в которых находится стержень, совпадают с условиями для «простого опертого стержня», рассмотренного в § 200. При αl , немного большем π , отношение отрицательно. M_1 направлен так, что *противодействует* возрастанию l_1 . Эти условия сохраняются до тех пор, пока αl не станет удовлетворять уравнению (VI) предыдущего параграфа. Тогда знаменатель величины, стоящей в скобках, обращается в нуль, а отношение M_1/l_1 изменяется от бесконечного отрицательного до бесконечного положительного значения. Бесконечное значение этой величины означает, конечно, что прогиб стержня (а отсюда и момент в опоре M_1) может возрастать без изменения угла наклона на конце l_1 (это условия случая, рассмотренного в § 201).

Если αl возрастает дальше, то величина M_1/l_1 (положительная) уменьшается до тех пор, пока αl не примет значения 2π , при котором M_1/l_1 опять обратится в нуль. В рассмотренном интервале кривая прогиба имеет точку перегиба. При $\alpha l = 2\pi$ мы имеем случай просто опертого стержня, ось которого деформирована в кривую с двумя полуволнами; соответствующее значение P второй критической силы дается формулой (21). Если P возрастает еще дальше, то мы получаем аналогичный ряд явлений, в котором, при определенных значениях αl , могут возникнуть кривые с тремя, четырьмя и т. д. полуволнами.

Примеры

18. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Стойка AC постоянного поперечного сечения «просто оперта» в трех лежащих на одной прямой точках A , B , C , причем $AB = l$ и $BC = 2l$. Стойка по всей длине подвержена действию силы сжатия P . Показать, что

в этом примере «критическая сила Эйлера» дается выражением $P = EI\alpha^2$, где EI — жесткость при изгибе, а α удовлетворяет уравнению

$$\sin \alpha l \{2\alpha l (1 + 2 \cos 2\alpha l) - 3 \sin 2\alpha l\} = 0.$$

Если начало координат взять в A , ось Ox направить по ABC , то, как и выше в (IV), мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} &= \frac{A}{l} (\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l), \\ -\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l} &= \alpha^2 A \sin \alpha l, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где A — произвольная постоянная. Аналогично, поместив начало координат в C и направив ось Ox' по CBA , мы для пролета BC найдем, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx'}\right)_{x=2l} &= \frac{A'}{2l} (2\alpha l \cos 2\alpha l - \sin 2\alpha l), \\ -\left(\frac{d^2y}{dx'^2}\right)_{x=2l} &= \alpha^2 A' \sin 2\alpha l; \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

A' — вторая произвольная постоянная.

Сами величины A и A' не определены, но их отношение должно удовлетворять определенному соотношению. На самом деле к промежуточной опоре B применимы и (I) и (II) и в ней должны быть непрерывны как угол наклона касательной к оси стойки, так и кривизна, т. е. мы можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} &= -\left(\frac{dy}{dx'}\right)_{x=2l} \\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l} &= +\left(\frac{d^2y}{dx'^2}\right)_{x=2l} \end{aligned} \right\}$$

(При этом учтено, что оси Ox и Ox' имеют противоположные направления). Так, что

$$-\frac{2\alpha l \cos 2\alpha l - \sin 2\alpha l}{2(\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l)} = \frac{A}{A'} = \frac{\sin 2\alpha l}{\sin \alpha l}.$$

Отсюда перекрестным умножением мы получим требуемый результат [N. В. Мы определяем критические силы, и поэтому решение $\alpha l = 0$ не представляет для нас интереса].

19. (Самб. М. S. T. 1932.) Имеем стойку длины l . Концы ее заделаны в упругий материал. Реакция упругого материала характеризуется моментом λ на один радиан угла поворота. Показать,

что вызывающая потерю устойчивости (т. е. первая критическая) сила P дается уравнением

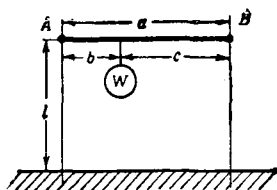
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = -\frac{P}{\alpha \lambda},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}.$$

Если длина стойки равна 305 см, то теоретическая критическая сила в случае незаделанных концов равна 1016 кг. Показать, что теоретическая критическая сила увеличится приблизительно в два раза, если концы стойки будут находиться под действием возникшего в опоре момента величины 1860 кгсм на 1 градус поворота.

20. Для примера 19 показать (рассмотрев частный случай, при $\lambda = 0$), что из данного в нем уравнения получается только часть ряда критических нагрузок и доказать, что другая часть этого ряда может быть получена из решений уравнения:



$$\frac{2}{\alpha l} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha l}{2} = -\frac{P}{\alpha \lambda}.$$

21. (Camb. M. S. T. 1932.) Две одинаковые вертикальные стойки заделаны в нижних концах, их верхние концы удерживают горизонтальный стержень AB . AB несет груз, приложенный так, как показано на рисунке. Стержень можно считать абсолютно жестким, а соединения в A и B шарнирными.

Показать, что прогибы рамы в вертикальной плоскости сильно возрастут, если W превзойдет величину, определяемую решением уравнения

$$p l a = c \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} p l \sqrt{\frac{b}{a}} + b \sqrt{\frac{a}{c}} \operatorname{tg} p l \sqrt{\frac{c}{a}},$$

где $p^2 = \frac{W}{EI}$, I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения обеих стоек.

22. При условиях примера 21 показать (рассмотрев частный случай $b = c$), что данное уравнение не включает в себя все возможные типы деформации.

Доказать, что другие типы деформации будут иметь место тогда, когда выполняются два следующих соотношения:

$$p l \sqrt{\frac{b}{a}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \text{и} \quad p l \sqrt{\frac{c}{a}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

(m и n целые положительные числа),

23. Показать, что данное уравнение не дает критерия в частном случае $c=0$. Исследовать этот случай и показать, что критические силы можно получить из уравнения

$$1 - \frac{1}{3} p^2 l^2 - \frac{\operatorname{tg} pl}{pl} = 0.$$

Стойки переменного поперечного сечения

203. Точное определение критической силы (аналитическими методами) может стать непрактичным, когда жесткость при изгибе изменяется по длине стойки. В этом случае α^2 в основном уравнении (13) не является постоянной величиной. Тогда мы можем воспользоваться графическими методами, основанными (как и методы §§ 182—184) на веревочной аналогии. Ниже¹⁾ мы будем рассматривать стержни, оба конца которых «просто оперты». Стержни с другими условиями в опорах мы сможем рассматривать после незначительного изменения излагаемого метода.

Основное уравнение, написанное в форме

$$-B \frac{d^2 y}{dx^2} = Py,$$

показывает, что: (a) возрастание P увеличивает кривизну по отношению к прогибу и заставляет поэтому деформированную ось стержня, если начать с определенного угла наклона в точке опоры, изгибаться так, что она вновь пересекает линию действия силы сжатия, но уже при *меньшем* значении x ; (b) величина начального угла наклона не имеет значения, так как основное уравнение определяет не величину прогиба y , а только его распределение; (c) изменение угла наклона между сечениями $x - \frac{1}{2} \delta x$ и $x + \frac{1}{2} \delta x$ (δx мало), равное $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \delta x$ с точностью до первой степени δx (по формуле Тейлора), в силу основного уравнения, при той же степени точности, равно $-\frac{Py \delta x}{B}$.

¹⁾ Излагается с некоторыми изменениями содержание § 24. статьи «The Strength of Struts etc.», опубликованной в *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 918, (1925). Практические детали метода читатель может почерпнуть из этой статьи.

Построим многоугольник фиктивных сил (для каждого участка длины) так, чтобы полярное расстояние представляло «силу» B , а вертикальный отрезок длины изображал (в том же масштабе) «силу» $P \delta x$, являющуюся результирующей силой на соответствующем элементе длины δx . Тогда соответствующий веревочный многоугольник будет довольно близким к кривой прогиба, наблюдаемой при принятой величине P . Условию ($y=0$) шарнирного закрепления на конце (с него мы начинали) мы можем удовлетворить.

Если окажется, что y обращается в нуль точно при $x=l$, но не раньше, то нами построена первая «форма продольного прогиба» (§ 198), а принятая величина P является первой «критической силой». При первой попытке этот результат может получиться только случайно, однако, согласно (а) (см. выше), увеличивая или уменьшая силу P , мы можем заставить кривую прогиба пересечь линию действия силы сжатия ближе или дальше полученной точки. Таким образом мы будем знать, как следует изменить наше предположение для второй попытки. Поступая так и изображая на графике при каждой попытке значение y на конце, соответствующее принятому P , мы можем построить «кривую ошибок». С помощью этой кривой легко получить то значение P , которое обращает y в нуль на другом конце стержня.

***204.** Нами изложены основные принципы метода. Остается описать практическое применение. Во-первых, мы сведем основное уравнение к «безразмерной» форме, как и в § 187. Для этого заменим независимую величину x на $\frac{x}{l}$ ($=z$), l обозначает длину стержня. Мы имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2}{dz^2}.$$

Во-вторых, если B задано по всей длине стержня, то мы можем выразить ее в форме

$$B = B_0 F\left(\frac{x}{l}\right) = B_0 F(z),$$

где B_0 — значение B в некотором частном (например,

среднем) сечении, а F — некоторая заданная функция от z . В-третьих, мы положим:

$$P = \frac{\lambda B_0}{l^2},$$

т. е. сведем нашу задачу к определению постоянной λ . Итак, имеем уравнение:

$$-\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\lambda y}{F(z)}.$$

Уравнение имеет прежнюю форму, но теперь оно применимо ко всему семейству стоек, так как не зависит от B_0 и l .

Покажем, как может быть получено пробное решение. Разделим весь интервал (т. е. интервал от 0 до 1) на некоторое число равных частей δz , и в качестве поперечной нагрузки на какой-нибудь из его частей возьмем величину $\lambda y \delta z$. В этой величине δz известно, а λ полагается равным выбранному значению. Соответствующее полярное расстояние должно представлять собой «силу» величины $F(z)$, известную в каждом сечении. Поступая, как было указано выше, мы можем заставить веревочную кривую пересечь ось раньше или позже, в зависимости от того, увеличим мы или уменьшим принятое значение λ . Для того чтобы зафиксировать λ при помощи известного значения y на конце, мы можем вычертить «кривую ошибок». Ясно, что будет сэкономлено много труда, если при первом пробном решении будет взято достаточно правильное значение λ . Например, можно вычислить среднее значение B (при этом следует обратить внимание на то, что наибольший прогиб произойдет там, где $\frac{y}{B}$ велико), далее определить критическую силу для стойки постоянного поперечного сечения с жесткостью при изгибе, равной среднему вычисленному значению B . Значение этой критической силы будет $\frac{\pi^2 B}{l^2}$. Как первое приближение λ можно взять значение, определяемое уравнением:

$$\frac{\pi^2 B}{l^2} = P = \frac{\lambda B_0}{l^2},$$

$$\text{т. е. } \lambda = \frac{\pi^2 B}{B_0} \approx 10 \frac{B}{B_0}.$$

Более точные методы, касающиеся стержней с переменным сечением, описаны в книге «Relaxation Methods», гл. XI.

Прямые стержни, подверженные действию силы осевого сжатия совместно с действием поперечной нагрузки¹⁾

205. Если поперечная нагрузка действует совместно с осевой силой сжатия на концах, то вопрос об устойчивости (§ 198) не возникает, так как стержень под действием приложенного изгибающего момента будет прогибаться при всех значениях силы сжатия. Выше мы исследовали *концевые* силы и моменты. Теперь исследуем влияние распределенной нагрузки и сосредоточенных в некоторых точках длины стержня сил. *Будем рассматривать просто опертые стержни постоянной жесткости при изгибе.*

Через u , как и раньше, будем обозначать прогиб от линии действия силы сжатия. Ясно, что сила сжатия P будет вызывать изгибающий момент Pu , который добавляется к изгибающему моменту (скажем, M_t), вызванному поперечной нагрузкой. Поэтому из последнего уравнения (11) мы имеем

$$-By'' = M = Pu + M_t, \quad (I)$$

или

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \alpha^2 y = -\frac{M_t}{B},$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P}{B}. \quad (14) \text{ bis}$$

Общее решение однородного уравнения, как и раньше, дается формулой (13). Для получения общего решения неоднородного уравнения мы должны добавить к нему частное решение неоднородного уравнения, а именно:

$$y_1 = -\left[\frac{1}{\alpha^2 + D^2}\right]\left(\frac{M_t}{B}\right) = -\frac{1}{P}\left[1 + \frac{D^2}{\alpha^2}\right]^{-1} M_t, \quad (II)$$

где D заменяет оператор $\frac{d}{dx}$.

206. Из первого уравнения (11) мы имеем:

$$-D^2 M_t = w, \quad (III)$$

¹⁾ Ср. глава XIII, §§ 467, 479.

w —заданная интенсивность поперечной нагрузки. Если w — линейная функция x , для которой

$$D^3 w = 0, \quad (IV)$$

то из (II) мы получаем выражение

$$y_1 = -\frac{1}{P} \left[1 - \frac{D^2}{\alpha^2} + \frac{D^4}{\alpha^4} - \dots \right] M_t = -\frac{1}{P} \left(M_t + \frac{w}{\alpha^2} \right). \quad (V)$$

И общее решение для прогиба будет:

$$y = A \sin \alpha x + C \cos \alpha x - \frac{1}{P} \left(M_t + \frac{w}{\alpha^2} \right), \quad (VI)$$

где A и C постоянные интегрирования.

Ниже мы принимаем, что условие (IV) выполнено, т. е. во всех рассматриваемых случаях (VI) справедливо. Следует, однако, заметить, что можно дать более общее решение, охватывающее все те случаи, в которых w может быть представлено в виде ряда по целым положительным степеням x .

В соответствии с выражением (VI) мы для полного изгибающего момента (включая влияние силы растяжения) имеем выражение

$$M = -By'' = P(A \sin \alpha x + C \cos \alpha x) - \frac{w}{\alpha^2}. \quad (VII)$$

Для полной перерезывающей силы, согласно второму из соотношений (11), имеем:

$$F = \frac{dM}{dx} = \alpha P(A \cos \alpha x - C \sin \alpha x) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{dw}{dx}. \quad (VIII)$$

Предыдущие результаты удобно записать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} y + \frac{1}{P} \left(M_t + \frac{w}{\alpha^2} \right) &= H \cos(\alpha x - \epsilon), \\ M + \frac{w}{\alpha^2} &= PH \cos(\alpha x - \epsilon), \\ F + \frac{1}{\alpha^2} \frac{dw}{dx} &= -\alpha PH \sin(\alpha x - \epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где α определяется равенством (14), а H и ϵ — новые постоянные интегрирования вместо прежних A и C . Если u измеряется от линии действия результирующей силы сжатия (§ 205), то существует более общее, соответствующее (IV) выражение. Если измерять u от некоторой другой линии (например, линии соединяющей две неподвижные опоры), то, вообще говоря, дополнительно к тому, что дается приложенными поперечными силами, мы будем иметь момент M_0 и перерезывающую силу V , вызванные действием силы сжатия P .

В этом случае нужно добавить $\frac{1}{P}(M_0 + Vx)$ в выражение (25) для u ; M_0 в выражение для M и V в выражение для F^1 .

Круговая диаграмма Говарда *)

207. Г. Б. Говард ²⁾ предложил очень удобный метод для решения задач о продольном изгибе поперечно нагруженных стержней и для изображения соотношений (25).

$$r = C \cos(\theta - \epsilon)$$

является уравнением в полярных координатах (r, θ) окружности, расположенной так, как указано на рис. 67а. Таким образом, если мы отождествим αx с θ , а C с PH , то радиус-вектор OQ в соответствии со вторым из уравнений (25) будет давать величину $\left(M + \frac{\omega}{\alpha^2}\right)$.

Теперь предположим, что нам нужно найти кривую прогиба для стержня, находящегося в условиях, показанных на рис. 67б. Стержень подвержен действию осевой нагрузки P , на концах он изгибается моментами M_1, M_2 вместе с соответствующими перерезывающими силами $\pm V$. $\omega = 0$ в этой

¹⁾ Ср. замечания, сделанные мелким шрифтом в конце § 201.

²⁾ Еще раньше (в 1919 г.) этот метод предложил сотрудник ЦАГИ Н. Г. Ченцов («круги Ченцова»). (Прим. перев.)

²⁾ *Aeronautical Research Committee, R. and M., 1233*. Полное изложение метода Говарда содержится в IV главе его книги «The Stresses in Aeroplane Structures», London, 1933; приводимое здесь изложение несколько отличается от имеющегося там.

задаче и тогда из второго уравнения (25)¹⁾ мы имеем, что отрезок OA ($\alpha x = \theta = 0$) на рис. 67а должен представлять собой M_1 и что, если θ ($= \angle QOA$) $= \alpha l$, то радиус-вектор OQ должен представлять собой M_2 . Значение αl известно из (14).

Таким образом нам известны три точки (A, O, Q), принадлежащие окружности, и мы можем ее построить. С ее помощью можно получить величину M , соответствующую любому требуемому значению x ($= \frac{\theta}{\alpha}$). После этого с помощью (25) можно найти y и F . На рис. 68а моменты на

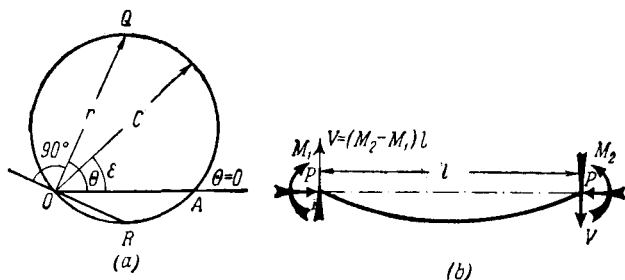


Рис. 67.

концах не действуют, а действует равномерно распределенная нагрузка w . Поэтому, согласно второму из уравнений (25), радиус-вектор окружности, при $\theta = 0$ и $\theta = \alpha l$, должен представлять собой $\frac{w}{\alpha^2}$. Величину M для любого другого значения θ ($= \alpha x$) можно найти, вычтя из величины, представленной соответствующим радиусом-вектором, $\frac{w}{\alpha^2}$. Круговая диаграмма (рис. 68b) понятна без пояснений²⁾.

208. На рис. 69а изображен стержень, подверженный действию сосредоточенной силы W . Концы стержня оперты. Реакции опор не зависят от P . Таким образом M_0 и V (§ 206) равны нулю. M_l , а следовательно, и M в сечении

¹⁾ у нуля (так что $M = M_l$) на обоих концах стержня.

²⁾ Читатель может заметить большое сходство с золотниковой диаграммой Цейнера.

$x = a$ имеет разрыв в угле наклона, поэтому для изображения M на двух пролетах нужны две различные окружности, пересекающиеся по линии ($\theta = \alpha a$). Зная M_{x-a} , мы можем построить диаграмму (рис. 69b). w равно нулю, и моментов на концах нет, следовательно, радиус-вектор должен равняться нулю при $\theta = 0$ и при $\theta = \alpha l$. Итак, нам известны три точки (две совпадающие), принадлежащие каждой из

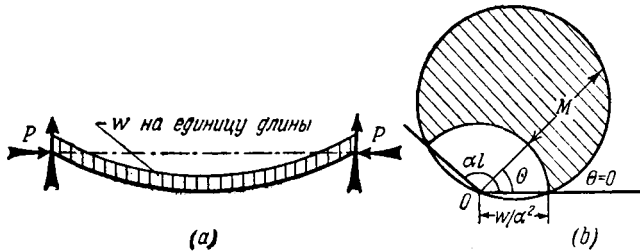


Рис. 68.

окружностей. Полученная область — общая внутренность двух окружностей отмечена штриховкой на рис. 69b.

Надо изучить вопрос о масштабе диаграммы, т. е. длины радиуса-вектора OQ . Из третьего уравнения (25) видно, что $-\alpha \cdot OR$ на рис. 67a представляет собой величину $F + \frac{1}{\alpha^2} \frac{dw}{dx}$, т. е. длина радиуса-вектора, проведенного под углом $(90^\circ + \theta)$ к начальной прямой (именно, $-OR$), на круговой диаграмме даст величину $\frac{1}{\alpha} \left(F + \frac{1}{\alpha^2} \frac{dw}{dx} \right)$. В рассматриваемой задаче поперечная нагрузка w отсутствует. Известно, что F при переходе слева направо через сечение ($x = a$) изменяется скачком на величину $-W$. Таким образом, AB на рис. 69b должно представлять собой известную величину $\frac{W}{\alpha}$.

¹⁾ Читателю, может быть, будет трудно проследить знаки. Заметим, что должно быть удовлетворено условие:

$$OB - (-OA) = -\frac{W}{\alpha}.$$

Пусть C_a, C_b — центры окружностей, соответствующих двум разным пролетам. Через E и F обозначим точки пересечения соответствующих окружностей с направлениями OC_a и OC_b . Очевидно, $EA = FB = QO$ так, что точки Q, E, F лежат на прямой линии, перпендикулярной OQ и $EF = AB$.

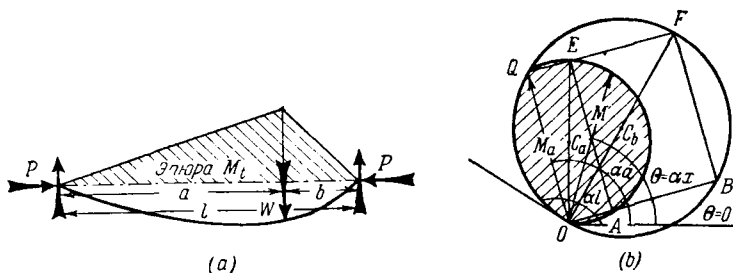


Рис. 69.

Итак, направление отрезка EF и величина $\left(\frac{W}{a}\right)$, дающая его длину, известны как только известны направления OE, OF (последние перпендикулярны линиям $\theta = 0, \theta = \alpha l$). Выбрав масштаб круговой диаграммы, мы можем фиксировать положение точек E и F , а следовательно точек C_a и C_b .

Более подробно с изложенным методом читатель может ознакомиться в книге Говарда, которая указана в подстрочном примечании к § 207.

Заметим, что диаграмма будет состоять из *одной* окружности (рис. 70), если она построена для стержня, который *не* подвергается действию поперечных сил или моментов на концах. Радиус-вектор исчезает на этой диаграмме при $\theta = 0$ и при $\theta = \alpha l$. αl должно быть кратным π , однако диаметр окружности произволен. Таким образом мы пришли к результатам, полученным ранее (§ 200) другими методами.

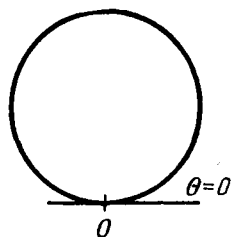
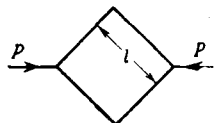


Рис. 70.

Примеры

24. (Самб. М. С. Т. 1932.) Длина стороны квадратной рамы равна l . Углы рамы жесткие. Рама подвергается действию сил P (см. рисунок). Учитывая влияние на изгибающий момент силы, сжимающей стержни, показать, что изменение в длинах диагоналей равно

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \left(2 \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \alpha l \right), \quad \text{где } \alpha^2 = \frac{P}{2\sqrt{2}EI},$$



I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения стержня. При этом предположить, что симметрия не нарушается, и пренебречь изменениями в длинах стержней и прогибом, являющимся следствием перерезывающей силы.

25. Пользуясь круговой диаграммой Говарда решить следующую задачу¹⁾:

Лонжерон самолета сделан из ели ($E = 1,13 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$). Длина лонжерона равна 153 см. Момент инерции поперечного сечения $I = 113 \text{ см}^4$. На лонжерон вместе с равномерно распределенной нагрузкой $w = 0,447 \text{ кг/см}$ действует на концах осевая сила сжатия $P = 2,4 \text{ кг}$. Моменты на концах равны:

$$M_1 = -3460 \text{ кгсм} \text{ и } M_2 = 577 \text{ кгсм}.$$

Показать, что при действии осевой силы сжатия изгибающий момент обращается в нуль, в сечении, расположенном примерно на расстоянии 19,1 см от середины лонжерона.

26. (Самб. М. С. Т. 1930.) Стержень постоянного поперечного сечения свободно опирается на концах. Стержень подвержен действию силы осевого сжатия P и в сечении, находящемся на расстояниях a и b от концов, несет груз W . Показать, что прогиб под грузом равен:

$$\frac{W}{P} \left[\frac{\sin \alpha a \sin \alpha b}{\alpha \sin \alpha (a+b)} - \frac{ab}{a+b} \right],$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}.$$

(Этот результат очень просто следует из геометрических соображений, см. рисунок 69b.)

Критические скорости вращающихся валов

*209. Аналогичная задача возникает при рассмотрении вращающегося вала. Прямолинейная форма вращающегося вала является (при надлежащих условиях) возможной кон-

¹⁾ Говард, указан. соч., стр. 81—83.

фигурацией равновесия, но вал может устойчиво вращаться также и в изогнутом состоянии. Ось вала будет лежать в плоскости, содержащей прямую, соединяющую оба концевых подшипника, и будет вращаться около этой прямой.

В таких случаях говорят, что вал бьет. Через m обозначим массу единицы длины вала. Элемент длины вала δx (рис. 71) будет вращаться по окружности радиуса y ; y (как и раньше) определяет кривую прогиба. Масса выделенного

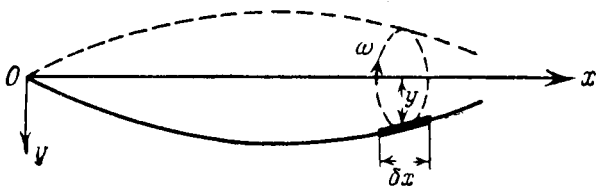


Рис. 71.

элемента $m\delta x$, центростремительное ускорение равно $\omega^2 y$, ω — (данная) угловая скорость. Прогиб сохранится лишь тогда, когда будет действовать центростремительная сила $m\omega^2 y \delta x$. Другими словами, эффект вращения эквивалентен приложению *направленной от оси* поперечной нагрузки интенсивности.

$$\omega = m\omega^2 y. \quad (26)$$

Приложив эту нагрузку, мы сможем решать задачу так, как будто она принадлежит к случаю *статического* равновесия¹⁾. Подставляя ω в первое из уравнений (11), мы получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2}(By'') = \omega = m\omega^2 y, \quad (27)$$

или, при постоянных B и m ,

$$[D^4 - \alpha^4] y = 0,$$

D заменяет оператор $\frac{d}{dx}$, а

$$\alpha^4 \text{ обозначает } \frac{m\omega^2}{B}. \quad (28)$$

¹⁾ Это приложение принципа Даламбера о «силах инерции» (Лэмб, Динамика, § 53).

Поперечные колебания стержней или валов

210. Прежде чем решать наше уравнение, рассмотрим несколько другую задачу. Обратимся к рис. 71 и предположим, что вал не вращается, но равновесие нарушено тем, что к валу внезапно прикладываются и сейчас же удаляются поперечно действующие силы. Вал начинает колебаться. Через y обозначим прогиб в сечении x в момент t ; тогда $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ¹⁾ будет измерять в момент t направленное от оси Ox ускорение элемента вала, расположенного на расстоянии x от начала координат (m будет иметь прежнее значение). Для того чтобы рассматриваемому элементу длины сообщить это ускорение, требуется направленная от оси Ox сила величины $m \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Так же, как и раньше, мы можем сказать, что эффект ускорения эквивалентен приложению *направленной к оси Ox распределенной нагрузки интенсивности $m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$* , т. е. поперечной нагрузки в *направлении* оси y , интенсивности

$$w = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

***211.** Подставляя w в уравнение (6), мы имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = w = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (29)$$

Это основное уравнение рассматриваемой задачи.

Пусть:

$$y = Y \sin p(t - t_0), \quad (30)$$

где Y — функция только x , а p и t_0 имеют постоянные значения. Подстановка выражения (30) в уравнение (29) дает:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (BY'') &= mp^2 Y, \\ \text{или, если } B \text{ и } m \text{ постоянны:} & \\ [D^4 - \alpha^4] Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

¹⁾ Мы употребляем знак частной производной, потому что y зависит от x и от t .

D попережнему заменяет оператор $\frac{d}{dx}$ [см. уравнение (27)]

и

$$\alpha^4 = \frac{mp^2}{B}. \quad (32)$$

Сравнивая уравнения (31) и (27), мы видим, что задачи определения u и Y , т. е. задача о критической скорости вращающегося вала и задача определения боковых колебаний (когда последняя упрощена только что сделанными предположениями), математически тождественны. Величина ω в одной задаче заменяется величиной p в другой¹⁾.

Собственные частоты и формы нормальных колебаний

212. Записывая для u соотношение (30), мы допускаем, что каждое сечение вала колеблется с одной и той же *частотой*, которая зависит от p , и *фазой*, которая зависит от t_0 . С другой стороны, *амплитуда* в разных сечениях различна (Y является функцией x). Принимая это предположение, мы ограничиваемся свободными колебаниями некоторого специального типа, называемыми *нормальными колебаниями*. Мы далее увидим, что условия на концах определяют ряд частных значений p , называемых *собственными частотами системы*. Соответствующая каждой собственной частоте специальная форма прогиба известна под названием *формы нормального колебания*.

Каждому решению, полученному для (31) указанным методом, будет соответствовать решение уравнения (27), т. е. решение задачи о «критической скорости». Вид колебаний даст форму той кривой, которую примет ось вращаю-

¹⁾ Иногда предполагают, что поперечные колебания вала, вращающегося со скоростью, меньшей первой «критической скорости», могут быть исследованы на основании уравнений (27) и (31). Это предположение не совсем правильно, ибо в этом случае (как можно видеть из условий сохранения кинетического момента) ось не будет все время лежать в одной плоскости. Ср. D. Robertson, *The Whirling of Shafts, The Engineer*, 158 (1934), 215—217, 228—231, также примечание на стр. 659.

щегося стержня. Собственная частота p , как можно установить, сравнивая (28) с (32), даст критическую скорость ω . Таким образом, решения, полученные в задаче о колебаниях, равным образом могут быть применены к задаче, изложенной в § 209.

Собственные колебания стержня постоянного поперечного сечения

213. Очевидно, что основное уравнение (31) будет удовлетворяться любым решением одного из следующих двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - \alpha^2] Y &= 0, \\ [D^2 + \alpha^2] Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Первое из них удовлетворяется функциями $e^{\pm \alpha x}$ или $\text{sh } \alpha x$ и $\text{ch } \alpha x$; второе $e^{\pm i \alpha x}$ или $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$. Следовательно, полное решение уравнения (31) можно записать в следующей форме:

$$Y = A \sin \alpha x + C \cos \alpha x + F \text{sh } \alpha x + G \text{ch } \alpha x, \quad (34)$$

A, C, F, G — произвольные постоянные. В соответствии с выражением (34), мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{dY}{dx} &= A \cos \alpha x - C \sin \alpha x + F \text{ch } \alpha x + G \text{sh } \alpha x, \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 Y}{dx^2} &= -A \sin \alpha x - C \cos \alpha x + F \text{sh } \alpha x + G \text{ch } \alpha x, \\ \frac{1}{\alpha^3} \frac{d^3 Y}{dx^3} &= -A \cos \alpha x + C \sin \alpha x + F \text{ch } \alpha x + G \text{sh } \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Из только что записанных соотношений (35) с помощью граничных условий могут быть определены A, C, F, G . Начало координат удобно помещать в среднем сечении вала.

Оба конца оперты.

214. В этом случае прогибы и изгибающие моменты на концах обращаются в нуль, т. е. при $x = \pm \frac{1}{2} l$ мы имеем:

$$Y = \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0,$$

или, воспользовавшись (34) и (35),

$$A \sin \lambda = C \cos \lambda = F \operatorname{sh} \lambda = G \operatorname{ch} \lambda = 0, \quad (36)$$

при

$$\lambda = \frac{1}{2} \alpha l.$$

Решение $\lambda = 0$, обращающее Y тождественно в нуль, мы исключаем, и из (36) получаем две возможности, или

$$C = 0, \quad A \sin \lambda = 0,$$

или

$$A = 0, \quad C \cos \lambda = 0.$$

Отсюда следует, что ненулевое решение для Y существует тогда, когда:

$$\alpha l = 2\lambda = \pi \times (1, 2, 3, \dots).$$

Воспользовавшись значением α^4 из (32), имеем:

$$\frac{m\rho^2 l^4}{B} = \alpha^4 l^4 = \pi^4 \times (1, 2^4, 3^4, \dots). \quad (37)$$

Оба конца «заделаны».

215. На обоих концах должны обратиться в нуль Y и $\frac{dY}{dx}$, т. е. из (34) и (35) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A \sin \lambda + F \operatorname{sh} \lambda &= 0, \\ A \cos \lambda + F \operatorname{ch} \lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} C \cos \lambda + G \operatorname{ch} \lambda &= 0, \\ C \sin \lambda - G \operatorname{sh} \lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Из первой пары уравнений, если A и F не равны тождественно нулю, мы имеем:

$$\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda = 0; \quad (I)$$

из второй пары (если C и G не равны тождественно нулю), мы имеем:

$$\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda = 0. \quad (II)$$

Итак, если не все произвольные постоянные A, C, F, G равны нулю (в противоположном случае Y — тождественный нуль), то должны выполняться соотношения (I) и (II). Откуда следует, что Y или нечетная функция x ($C = G = 0$), или четная

функция x ($A = F = 0$). Все критические значения λ принадлежат ряду корней уравнения:

$$\sin^2 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda - \cos^2 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda = 0. \quad (\text{III})$$

Уравнение (III) удовлетворяется корнями уравнений (I) или (II). Уравнение (III) эквивалентно следующему:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos 2\lambda)(\operatorname{ch} 2\lambda + 1) - (1 + \cos 2\lambda)(\operatorname{ch} 2\lambda - 1) &= 0, \\ \text{или} \quad \cos 2\lambda \operatorname{ch} 2\lambda &= 1. \end{aligned} \right\} (39)$$

Оба конца свободны.

216. В совершенно свободном сечении должны исчезать изгибающий момент и перерезывающая сила, т. е. из уравнений (7) и (8), рассматривая B , как постоянную, мы получаем условия:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0. \quad (\text{IV})$$

Написав эти условия для обоих концов ($ax = \pm \lambda$), мы из (35) получим:

$$\left. \begin{aligned} A \sin \lambda - F \operatorname{sh} \lambda &= 0, \\ A \cos \lambda - F \operatorname{ch} \lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} C \cos \lambda - G \operatorname{ch} \lambda &= 0, \\ C \sin \lambda + G \operatorname{sh} \lambda &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (38), разница только в том, что F и G имеют теперь другие знаки. Выводы аналогичны выводам § 215. Мы получим то же уравнение, что и раньше, а именно:

$$\cos 2\lambda \operatorname{ch} 2\lambda = 1. \quad (39) \text{ bis}$$

Этого результата и следовало ожидать, ибо, если сделать замену $Y_2 = \frac{d^2 Y}{dx^2}$, то Y_2 будет удовлетворять основному уравнению (31), а граничные условия (IV) запишутся в форме:

$$Y_2 = \frac{dY_2}{dx} = 0,$$

т. е. граничные условия стали теми же, что и в случае заделанного конца.

Один конец зашкремлел, другой свободен.

217. В этом случае мы должны удовлетворить следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} Y = \frac{dY}{dx} = 0, \quad \text{при } \alpha x = \lambda \\ \text{и } \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0, \quad \text{при } \alpha x = -\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Из (34) и (35) имеем, что

$$\left. \begin{aligned} A \sin \lambda + C \cos \lambda + F \operatorname{sh} \lambda + G \operatorname{ch} \lambda = 0, \\ A \cos \lambda - C \sin \lambda + F \operatorname{ch} \lambda + G \operatorname{sh} \lambda = 0, \\ A \sin \lambda - C \cos \lambda - F \operatorname{sh} \lambda + G \operatorname{ch} \lambda = 0, \\ A \cos \lambda + C \sin \lambda - F \operatorname{ch} \lambda + G \operatorname{sh} \lambda = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

или

$$\left. \begin{aligned} A \cos \lambda + G \operatorname{sh} \lambda = 0, \\ A \sin \lambda + G \operatorname{ch} \lambda = 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} C \sin \lambda - F \operatorname{ch} \lambda = 0, \\ C \cos \lambda + F \operatorname{sh} \lambda = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Отсюда (если A и G не равны тождественно нулю), мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda = 0, \\ \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

и (если C и F не равны тождественно нулю)

Следовательно, все критические значения λ являются корнями уравнения:

$$\cos^2 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda - \sin^2 \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda = 0. \quad (\text{V})$$

Уравнение (V) эквивалентно уравнению

$$(1 + \cos 2\lambda)(\operatorname{ch} 2\lambda + 1) - (1 - \cos 2\lambda)(\operatorname{ch} 2\lambda - 1) = 0,$$

или

$$1 + \cos 2\lambda \operatorname{ch} 2\lambda = 0. \quad (40)$$

218. С помощью (36) и (32) мы можем получить, что

$$4\lambda^2 = \alpha^2 l^2 = \pm l^2 p \sqrt{m/B}, \quad (\text{I})$$

откуда следует, что λ^2 , как и p , должно быть действительным.

Уравнение (I) относительно λ может иметь или действительные противоположные по знаку корни $\pm \lambda$, или чисто мнимые $\pm i\lambda$. Если 2λ положительно, то уравнения (39) и (40) можно решить путем пробных подстановок. Наименьший отличный от нуля корень уравнения (39) приблизительно равен 4,73, т. е. он очень близок к $\frac{3\pi}{2}$ ($= 4,715$). При больших значениях корней (для которых $\operatorname{ch} 2\lambda$ велик) $\cos 2\lambda$ имеет очень малую положительную величину, так что приблизительно

$$2\lambda = \frac{1}{2} \pi \times (3, 5, 7, \dots).$$

Рэлей¹⁾ получил следующие значения:

$$2\lambda = 4,73; 7,85; 11,00; 14,14; 17,28. \quad (41)$$

Если с помощью пробных подстановок найти наименьший корень уравнения (40), то окажется, что он приблизительно равен 1,875. В этом случае при больших значениях корней $\cos 2\lambda$ имеет очень малую и отрицательную величину.

Значения Рэрея суть

$$2\lambda = 1,875; 4,69; 7,85; 11,00; 14,14; 17,28, \quad (42)$$

так что (как и предполагалось согласно предыдущему доказательству) большие значения корней уравнений (39) и (40) практически тождественны.

Дальнейшие вычисления проводить не будем. В главе XIV будут рассмотрены более общие методы, в которых мы не будем ограничиваться только стержнями постоянного поперечного сечения. С помощью излагаемых там методов со значительно меньшим трудом можно получить достаточно точные результаты²⁾.

Примеры

27. (Самб. М. S. T. 1932.) Сплошной вал AC длины $(a + b)$ с постоянным круглым поперечным сечением диаметра d вращается в находящихся на одинаковом уровне подшипниках, помещенных

¹⁾ Теория звука, I, § 174.

²⁾ Ср. также Relaxation Methods, гл. XI.

в точках A, B и C . Ни один из подшипников не противодействует изменению направления вращения

$$AB = a, \quad BC = b.$$

Показать, что критические скорости вала представляют собой корни уравнения:

$$\operatorname{ctg} \alpha a + \operatorname{ctg} \alpha b = \operatorname{cth} \alpha a + \operatorname{cth} \alpha b,$$

где

$$\alpha^4 = \frac{16\rho\omega^2}{Ed^4} \text{ и } \rho \text{ — плотность металла.}$$

[Можно использовать метод решения примера 18 (§ 202).]

28. (Camb. M. S. T. 1933.) Имеется вал постоянного поперечного сечения, масса единицы длины вала равна m . Один конец вала вращается в длинном горизонтальном подшипнике (зазор пренебрежимо мал). Консольная часть вала (вне подшипника) имеет длину l и на свободном конце несет малую, но тяжелую массу M . Центр тяжести этой массы находится на оси вала. Показать, что критические скорости вала определяются соотношением:

$$\frac{Mx}{m} = \frac{1 + \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l}{\sin \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \cos \alpha l \operatorname{sh} \alpha l},$$

где $\alpha^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, ω — угловая скорость вала, I — момент инерции площади поперечного сечения относительно его диаметра.

29. (Camb. M. S. T. 1931.) Вал имеет постоянное поперечное сечение и длину $2(l+c)$. Масса единицы длины равна m . Вал вращается с угловой скоростью ω в подшипниках, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга. Подшипники не влияют на изменение направления оси вала. Вал положен симметрично, так что с каждой стороны от подшипника образуются консоли длины c .

Доказать, что скорости, при которых могут произойти колебания вала, представляют собой корни уравнения:

$$\operatorname{tg} \alpha l + \operatorname{th} \alpha l = \frac{2(1 + \cos \alpha c \operatorname{ch} \alpha c)}{\sin \alpha c \operatorname{ch} \alpha c - \cos \alpha c \operatorname{sh} \alpha c},$$

где

$$\alpha^4 = \frac{m\omega^2}{EI}.$$

Предполагается, что в средней точке угла наклона вала остается равным нулю.

30. (Camb. M. S. T. 1930.) Вал постоянного поперечного сечения имеет длину $2l$, масса единицы длины вала равна m . Вал вращается с угловой скоростью ω . Концы вала лежат в «не абсолютно жестких» подшипниках. Подшипники таковы, что при их повороте на угол θ , на концах вала вызываются изгибающие моменты $\mu\theta$. Показать, что если ошибка при центровке на обоих концах

равна e , то для случая, в котором прогиб в обе стороны от середины вала симметричен, уравнение изогнутой оси вала будет:

$$y = e \frac{(EI\alpha + \mu \operatorname{tg} \alpha l) \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l} + (EI\alpha + \mu \operatorname{th} \alpha l) \frac{\cos \alpha x}{\cos \alpha l}}{2EI\alpha + \mu (\operatorname{tg} \alpha l + \operatorname{th} \alpha l)},$$

где $\alpha^2 = \omega \sqrt{\frac{m}{EI}}$, x измеряется от середины вала.

Балка на упругом основании

* 219. До некоторой степени аналогичную задачу представляет собой балка на упругом основании. Балка лежит на упругом основании, т. е. подвергается действию равномерно распределенной и направленной вверх нагрузки, пропорциональной прогибу. В подобных условиях находятся, например, железнодорожные шпалы. Только в действительности основание не является идеально упругим, значительную роль играет трение. Как пример можно упомянуть мосты, поддерживаемые понтонами.

Через w , как и раньше, обозначим линейную интенсивность направленной вниз нагрузки. Эта нагрузка предполагается известной. Полная, направленная вниз, нагрузка равна:

$$w - \eta y \quad (\eta \text{ — положительная постоянная}).$$

Из первого уравнения (11), считая B постоянным, мы получаем уравнение:

$$[D^4 + 4\beta^4] y = \frac{w}{B}. \quad (43)$$

Через D обозначен оператор $\frac{d}{dx}$, а

$$\beta^4 = \frac{\eta}{4B}. \quad (44)$$

Характерной чертой задачи является то, что упругая сила (ηy) действует только тогда, когда y положителен. Можно предположить, что часть стержня поднимается над упругим основанием даже тогда, когда все приложенные силы действуют вниз. Очевидно, что прогиб этой части будет определяться уравнением (43), когда член $\beta^4 y$ опущен.

¹⁾ С а с е (цитир. книга, § 201) полагает, что это наблюдение сделал А. Saldanha,

Длинный стержень, подверженный действию сосредоточенной силы, приложенной посредине

220. Для того чтобы пояснить содержание предыдущего параграфа, рассмотрим балку на упругом основании, подверженную действию только одной сосредоточенной силы, приложенной посредине балки. Весом балки пренебрегаем. Основное уравнение этой задачи (вне точки приложения силы):

$$[D^4 + 4\beta^4] y = 0. \quad (45)$$

Это уравнение удовлетворяется решением каждого из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - 2i\beta^2] Y = 0, \\ [D^2 + 2i\beta^2] Y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

т. е. частные решения пропорциональны:

$$e^{(1+i)\beta x}, e^{(1-i)\beta x}, e^{-(1+i)\beta x}, e^{-(1-i)\beta x}.$$

Общее решение уравнения (45)

$$y = \operatorname{ch} \beta x (A \cos \beta x + C \sin \beta x) + \operatorname{sh} \beta x (F \cos \beta x + G \sin \beta x).$$

Найдем выражения для производных у:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{dy}{dx} &= (C+F) \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x + (-A+G) \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \\ &+ (A+G) \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x + (C-F) \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x, \\ \frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2y}{dx^2} &= G \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x - F \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \\ &+ C \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x - A \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x, \\ \frac{1}{2\beta^3} \frac{d^3y}{dx^3} &= (C-F) \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x - (A+G) \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x - \\ &- (A-G) \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x - (C+F) \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где A, C, F, G — постоянные интегрирования.

На конце балки, если она в нем соприкасается с основанием, или в другом сечении, в котором балка впервые соприкасается с основанием, перерезывающая сила и изгибающий момент должны исчезать, и мы, согласно (7) и (8), имеем:

$$y'' = y''' = 0. \quad (1)$$

Начало координат поместим в указанном сечении. Ось Ox направим к середине балки. Пусть среднее сечение находится в точке $x = a$. Условия (I) удовлетворяются теперь при $x = 0$, и из (47) мы имеем, что

$$G = 0, C = F. \quad (II)$$

Выражение для y принимает более простую форму

$$y = A \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x + C (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x). \quad (48)$$

Угол наклона исчезает в среднем сечении ($x = a$), и мы имеем:

$$2C \operatorname{ch} \beta a \cos \beta a + A (\operatorname{sh} \beta a \cos \beta a - \operatorname{ch} \beta a \sin \beta a) = 0. \quad (49)$$

Перерезывающая сила в этом сечении дается выражением:

$$-B \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=a} = 2B\beta^3 [A (\operatorname{ch} \beta a \sin \beta a + \operatorname{sh} \beta a \cos \beta a) + \\ + 2C \operatorname{sh} \beta a \sin \beta a]. \quad (50)$$

221. Рассмотрим два случая, показанные на рис. 72 (а) и (б):

(а) Если концы балки отделяются от основания, то $y = 0$ при $x = 0$, и мы видим, что в формуле (48) A должно быть нулем ($A = 0$).

А тогда из (49):

$$\operatorname{ch} \beta a \cos \beta a = 0. \quad (51)$$

Это может иметь место, например, при $\beta a = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, мы видим, что концы стержня будут отделяться от основания только при

$$\beta l > \pi, \quad (52)$$

l — длина балки.

(б) Конец балки остается в соприкосновении с основанием. Тогда, согласно условию § 220, этому концу соответствует равная нулю абсцисса ($x = 0$), но y не обязательно равен нулю. Формулы (49) и (50) применимы к среднему сечению, а можно теперь приравнять $l/2$.

Положив $2\lambda = \beta l$ и приравняв перерезывающую силу в среднем (нагруженном) сечении $\frac{1}{2} W$, где W — приложенная сила, мы из выражения (49) получим:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A(\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda - \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda) + 2C \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda, \\ \text{а из (50):} \\ \frac{W}{4B\beta^3} &= A(\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda) + 2C \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

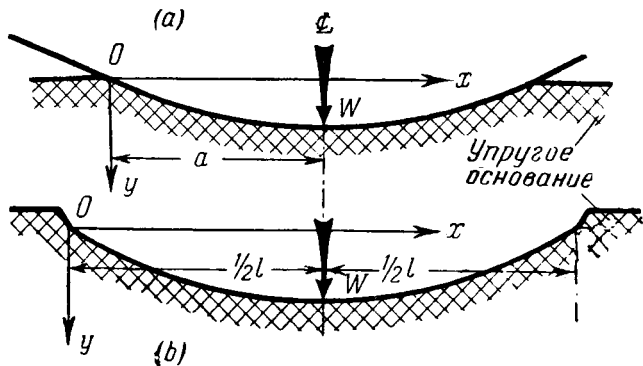


Рис. 72.

Отсюда мы можем сделать следующие заключения:

(а) Если $\beta l > \pi$, то на длине a , по обе стороны от среднего сечения, балка соприкасается с упругим основанием. Значение a определяется условием:

$$2\beta a = \pi. \quad (54)$$

Прогиб определяется формулой (48) с опущенным членом, содержащим A в виде множителя:

$$y = C(\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x) \quad (0 < x < a), \quad (I)$$

($x = a$ является средним нагруженным сечением).

Из (50) мы также имеем:

$$\frac{W}{4B\beta^3} = -\frac{1}{2\beta^3} \left[\frac{d^3 y}{dx^3} \right]_{x=a} = 2C \operatorname{sh} \beta a \sin \beta a, \quad (II)$$

что, согласно (54), равно $2C \operatorname{sh} \frac{1}{2} \pi$.

Перенеся начало координат в среднее сечение и используя (II), мы можем написать (I) в форме

$$y = \frac{W}{8B\beta^3} \frac{1}{\text{sh} \frac{1}{2} \pi} \left[\text{ch} \frac{1}{2} \pi (\text{ch} \beta x \cos \beta x - \text{sh} \beta x \sin \beta x) + \right. \\ \left. + \text{sh} \frac{1}{2} \pi (\text{sh} \beta x \cos \beta x - \text{ch} \beta x \sin \beta x) \right], \quad (55)$$

$\frac{dy}{dx}$, вычисленное из этого выражения, равняется нулю в начале координат, т. е. в среднем сечении балки.

Величина прогиба при $x=0$ равна:

$$\delta_c = \frac{W}{8B\beta^3} \text{cth} \frac{1}{2} \pi = \frac{\beta W}{2\eta} \text{cth} \frac{1}{2} \pi, \text{ согласно (44)}. \quad (56)$$

(b) Если $\beta l \leq \pi$, то вся балка соприкасается с основанием. Выражение (48) для среднего прогиба (при $\beta x = \frac{1}{2} \beta l = \lambda$) дает значение:

$$\left. \begin{aligned} \delta_c &= A \text{ch} \lambda \cos \lambda + C (\text{ch} \lambda \sin \lambda + \text{sh} \lambda \cos \lambda), \\ \text{а для прогиба на концах (при } x=0) \\ \delta_t &= A, \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

где, согласно (53),

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{2B\beta^3} \text{ch} \lambda \cos \lambda &= A (\text{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda), \\ - \frac{W}{4B\beta^3} (\text{sh} \lambda \cos \lambda - \text{ch} \lambda \sin \lambda) &= C (\text{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Отсюда, как и раньше, положив $\frac{\beta}{\eta}$ равным $\frac{1}{4B\beta^3}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_c (\text{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda) &= \frac{\beta W}{\eta} (\text{ch}^2 \lambda + \cos^2 \lambda), \\ \delta_t (\text{sh} 2\lambda + \sin 2\lambda) &= \frac{2\beta W}{\eta} \text{ch} \lambda \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

При $2\lambda = \pi$, δ_t обращается в нуль, а δ_c принимает значение (56).

Примеры

31. (Самб. М. S. Т. 1934.) Балка постоянного поперечного сечения лежит на горизонтальной поверхности. Поверхность можно считать упругой. Концы балки закреплены так, что они вынуждены оставаться все время на одной и той же высоте и не могут поворачиваться. В ненагруженном состоянии балка соприкасается с поверхностью по всей своей свободной длине $2l$.

Показать, что прогиб в среднем сечении, вызванный приложением в этом же сечении сосредоточенной силы W , равен

$$\frac{W\alpha}{p} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha l - \sin^2 \alpha l}{\operatorname{sh} 2\alpha l + \sin 2\alpha l},$$

где p — давление, оказываемое поверхностью на единицу длины балки в сечении с прогибом y , и $\alpha^4 = \frac{p}{4EI}$; I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения балки.

32. (Самб. М. S. Т. 1930.) Для железнодорожной шпалы и балласта, на котором она покоится, $\frac{1}{\beta} = 76,2$ см. Длина шпалы 274,5 см. Шпала подвергается действию сил в W тонн, направленных вниз и приложенных в точках, расположенных на расстояниях 61 см от обоих ее концов. Выбрав за ось y вертикаль, проходящую через середину шпалы, записать общее выражение для ее прогиба, обращая в нуль $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$ в среднем сечении. Вывести отсюда, что в середине шпала подвергается действию изгибающего момента величины $69,1W$ кгм, вращающего ее левую часть против часовой стрелки.

Для вычислений понадобятся следующие данные:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sh} 1,8 = 2,94217 & \operatorname{sh} 0,8 = 0,88811 \\ \operatorname{ch} 1,8 = 3,10747 & \operatorname{ch} 0,8 = 1,33743 \\ \sin 1,8 = 0,97384 & \sin 0,8 = 0,71732 \\ \cos 1,8 = -0,22722 & \cos 0,8 = 0,69675 \end{array}$$

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ТЕОРИЙ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Общая (приближенная) теория изгиба

222. В главе V (§§ 164—169) было получено решение частной задачи о чистом изгибе. Там же мы заметили, что оно может рассматриваться как стандартное решение в том смысле, что к нему, согласно принципу минимума упругой энергии, должно приближаться точное решение. Следовательно, решение, полученное в V главе, с достаточной степенью точности, может быть принято за общее решение большинства технических задач.

В § 168 было показано, что изгибающий момент M , плоскость которого содержит одну из главных осей инерции поперечного сечения, вызывает в балке простое продольное напряжение интенсивности

$$p = \frac{My}{I}, \quad (1)$$

I — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси (Ox), проходящей через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярной плоскости изгиба. Других напряжений нет, и поэтому для продольного удлинения получается формула

$$e = \frac{p}{E} = \frac{My}{EI}. \quad (2)$$

Кривизна оси балки выражается следующим образом:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad (3)$$

и из формул (1) и (2) мы имеем:

$$p = E \frac{y}{R}, \quad e = \frac{y}{R}. \quad (4)$$

Напряжения при изгибе балки, вызванные перерезывающей силой

223. Изменение изгибающего момента по длине балки вызывает перерезывающую силу (F). Наше решение не учитывает перерезывающей силы. Но это обстоятельство должно быть принято во внимание, когда мы попытаемся применить наше решение к задаче с переменным изгибающим моментом.

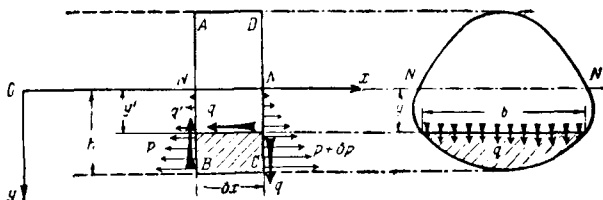


Рис. 73.

Рис. 74.

том. Как обычно, будем считать изгибающий момент положительным тогда, когда он стремится вращать левую часть балки по часовой стрелке. Перерезывающую силу считаем положительной тогда, когда левая часть балки по отношению к правой ее части стремится двигаться вверх. При этом условии, как было показано в § 181 гл. VI, из статических соображений вытекает, что F связано с M следующим уравнением:

$$F = \frac{dM}{dx}. \quad (5)$$

Пусть $ABCD$ (рис. 73) представляет собой элемент балки, заключенный между сечениями x и $x + \delta x$. Через M и $M + \delta M$ обозначим изгибающие моменты в этих сечениях. *Растягивающее* напряжение на левой стороне элемента на расстоянии $y > 0$ (y направлено вниз) от нейтральной оси NN^1) дается выражением (1) при том же правиле знаков для M . Для правой стороны элемента (где изгибающий момент

¹⁾ Следует заметить, что y не является более, как то было в главе VI, прогибом балки.

$M + \delta M$) растягивающее напряжение дается аналогичной формулой:

$$p + \delta p = (M + \delta M) \frac{y}{I}. \quad (I)$$

Отсюда видно, что имеются продольные напряжения, результирующее усилие которых стремится передвинуть нижнюю часть элемента $ABCD$ ($y > 0$) слева направо, а верхнюю часть ($y < 0$) — справа налево. Это результирующее усилие, действуя на заштрихованную часть элемента (рис. 73) и вызывает силу величины

$$\int_{y'}^h \delta p b dy = \frac{\delta M}{I} \int_{y'}^h y b dy, \text{ согласно (I) и (I),}$$

где h наибольшая в выбранном сечении ордината, измеренная вниз от нейтральной линии; b — ширина выбранного сечения (в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа) на расстоянии y от нейтральной плоскости.

На плоскости, отделяющей заштрихованную часть элемента от незаштрихованной, должно появиться перерезывающее усилие, уравнивающее только что рассмотренную силу.

Площадь этой плоскости $b' \delta x$, где b' — ширина сечения, соответствующая ординате y' . Таким образом, если \bar{q}' — средняя интенсивность горизонтального касательного напряжения на упомянутой плоскости, то равновесие требует, чтобы

$$\bar{q}' b' \delta x = \frac{\delta M}{I} \int_{y'}^h y b dy.$$

Из этого уравнения, неограниченно уменьшая δx , мы получим:

$$\begin{aligned} \bar{q}' b' &= \frac{1}{I} \frac{dM}{dx} \int_{y'}^h y b dy = \\ &= \frac{F}{I} \int_{y'}^h y b dy, \text{ а согласно (5), это равно} \end{aligned}$$

$\frac{F}{I} \times$ (статический момент относительно нейтральной оси той части поперечного сечения, которая лежит ниже рассматриваемой плоскости).

Через \bar{q}' обозначена средняя интенсивность горизонтального компонента касательного напряжения на плоскости ($y = y'$) при ширине сечения, равной b' .

224. Согласно теореме главы IV, § 128, касательное напряжение на горизонтальной плоскости должно сопровождаться касательным напряжением равной интенсивности на *вертикальной* плоскости. Выше мы имели горизонтальную плоскость, следовательно, на перпендикулярной ей вертикальной плоскости появится касательное напряжение (см. рис. 73). А \bar{q}' будет представлять собой также среднюю интенсивность вертикального компонента касательного напряжения в поперечном сечении на ординате y' .

Опуская штрихи, мы можем сказать, что по ширине b поперечного сечения, расположенной на расстоянии y ниже нейтральной оси, вертикальный компонент q касательного напряжения имеет среднюю интенсивность \bar{q} , определяемую соотношением:

$$\bar{q}b = \frac{F}{I} \times [\text{статический момент площади относительно нейтральной оси } NN \text{ той части поперечного сечения, которая лежит ниже прямой, параллельной } NN \text{ и находящейся от нее на расстоянии } y]. \quad (6)$$

Обозначения этого уравнения разъяснены на рис. 74, где рассматриваемая площадь заштрихована.

225. Через L обозначим статический момент, стоящий в правой части (6), тогда

$$\bar{q}b = \frac{F}{I} L.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по y по всей высоте поперечного сечения, получим

$$\begin{aligned} \int \bar{q}b \, dy &= \frac{F}{I} \int L \, dy = \\ &= \frac{F}{I} \left\{ [yL] - \int y \frac{dL}{dy} \, dy \right\}. \quad (II) \end{aligned}$$

Последнее равенство получилось в силу интегрирования по частям.

Нейтральная ось проходит через центры тяжести поперечных сечений, и, следовательно, статический момент площади *всего* поперечного сечения относительно этой оси равен нулю. Таким образом L обращается в нуль при подстановке пределов интегрирования. Из определения L следует, что

$$\frac{dL}{dy} = -by.$$

И уравнение (II) можно записать так:

$$\int \bar{q}b dy = \frac{F}{I} \int by^3 dy = F.$$

А это показывает, что среднее касательное напряжение, интенсивность которого определяется соотношением (6), вызывает, как и должно, результирующее перерезывающее усилие величины F .

Касательное напряжение в балке узкого прямоугольного сечения

226. Следует подчеркнуть, что соотношение (6) дает только среднее значение вертикального компонента касательного напряжения и ничего не говорит о действительном распределении касательного напряжения по поперечному сечению. Определение распределения касательного напряжения представляет собой «задачу изгиба» Сен-Венана.

Эту достаточно трудную задачу мы рассмотрим позже¹⁾. Она становится простой в одном частном случае. Если ширина сечения b всюду мала, то изменение q по ней должно быть также малым. Если стороны сечения вертикальны, т. е. b постоянно, то касательное напряжение должно быть всюду почти вертикальным, ибо «касательное напряжение не может пересекать свободную от нагрузки поверхность тела»²⁾. В этом случае \bar{q} можно рассматривать как *действительное* касательное напряжение. Статический момент, стоящий

¹⁾ Глава XI, §§ 348—352.

²⁾ Ср. глава IV, § 129.

в правой части соотношения (6), определяется в этом случае формулой:

$$L = b(h - y) \times \frac{1}{2}(h + y).$$

Из соотношения (6) мы получаем, что действительное касательное напряжение

$$q = \frac{1}{2} \frac{F}{I} (h^2 - y^2) = \frac{1}{8} \frac{F}{I} (d^2 - 4y^2). \quad (7)$$

Через d обозначена высота (прямоугольного) сечения. В этом случае

$$I = \frac{1}{12} bd^3. \quad (8)$$

Таким образом мы видим, что для балки с узким прямоугольным поперечным сечением касательное напряжение имеет параболическое распределение.

Касательное напряжение имеет максимальную интенсивность на нейтральной оси (где $y = 0$). Величина максимальной интенсивности касательного напряжения

$$\begin{aligned} q_{max} &= \frac{1}{8} \frac{F}{I} d^2 = \frac{3}{2} \frac{F}{bd} = \\ &= \frac{3}{2} \times (\text{средняя интенсивность касательного напряжения}). \end{aligned} \quad (9)$$

Касательное напряжение в стенке балки двутаврового сечения

227. Без труда можно исследовать случай балки двутаврового сечения. Опять можно считать, что соотношение (6) дает действительное касательное напряжение в средней части стенки, где q достигает максимальной интенсивности. Следует ожидать, что касательное напряжение в полках будет почти горизонтально, и поэтому соотношение (6) не дает нужных сведений.

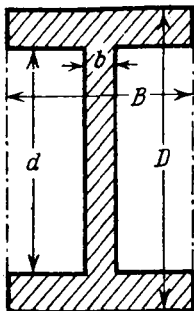
Определяя размеры поперечного сечения с помощью букв B, b, D, d , значения которых объяснены на рис. 75, мы заметим, что статический момент L , стоящий в правой части соотношения (6), имеет значение

$$\frac{1}{8} B (D^2 - 4y^2) \text{ при } D > 2y > d,$$

и значение

$$\frac{1}{8} \{B(D^2 - d^2) + b(d^2 - 4y^2)\} \text{ при } 2y < d.$$

Следовательно, из соотношения (6) для *среднего вертикального компонента* касательного напряжения на ординате y в полках мы получаем:



$$\bar{q} = \frac{1}{8} \frac{F}{I} (D^2 - 4y^2),$$

и (приближенно) для *действительного* касательного напряжения на ординате y в средней части стенки

$$q = \frac{1}{8} \frac{F}{I} \left\{ \frac{B}{b} (D^2 - d^2) + (d^2 - 4y^2) \right\}. \quad (10)$$

В обоих этих выражениях

$$I = \frac{1}{12} \{BD^3 - (B - b)d^3\}. \quad (11)$$

Рис. 75.

Обычно при практическом проектировании максимальное касательное напряжение в двутавровом сечении балки оценивают при следующих предположениях: (а) вся перерезывающая сила воспринимается стенкой и (б) касательное напряжение в стенке постоянно. Тогда для оценки касательного напряжения (используя обозначения рис. 75) получают формулу

$$q_E = \frac{F}{bd}. \quad (1)$$

Теперь в соответствии с (10) и (11) максимальное касательное напряжение (на нейтральной оси, где $y = 0$) равно

$$q_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{b} \cdot \frac{B(D^2 - d^2) + bd^2}{BD^3 - (B - b)d^3}.$$

Откуда мы имеем

$$\frac{q_{max}}{q_E} = \frac{3}{2} d \frac{B(D^2 - d^2) + bd^2}{BD^3 - (B - b)d^3},$$

или, если мы положим

$$D = d(1 + \delta),$$

то получим

$$\frac{q_{max}}{q_E} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(1 + \delta)^2 - 1 + \frac{b}{B}}{(1 + \delta)^3 - 1 + \frac{b}{B}} = \frac{\delta + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{2} \frac{b}{B}}{\delta + \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^3 + \frac{1}{3} \frac{b}{B}} \quad (II)$$

Таким образом, мы видим, что, если

$$\delta^2 + \frac{1}{3} \delta^3 + \frac{1}{3} \frac{b}{B} < \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \frac{b}{B} \right),$$

т. е.

$$3\delta^2 + 2\delta^3 < \frac{b}{B}, \text{ то } q_E < q_{max}.$$

Оценка касательного напряжения отклоняется от его истинного значения не в сторону запаса.

Другими словами, обычное правило гарантирует безопасность только тогда, когда стенка настолько тонка, что

$$\frac{b}{B} \gg 3\delta^2 + 2\delta^3 = 12 \frac{t^2}{d^2} + 16 \frac{t^3}{d^3},$$

где t — толщина полок, так что $2t = D - d$.

С другой стороны (так как δ положительно) первое выражение (II) показывает, что $\frac{q_{max}}{q_E}$ всегда меньше, чем $\frac{3}{2}$. И, следовательно, всегда надлежит оценивать q_{max} по формуле

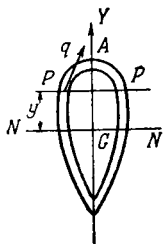
$$q_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bd}, \quad (III)$$

а не по формуле (I).

Пример

1. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Лонжерон имеет полное симметричное относительно оси GY поперечное сечение (см. рисунок). Сделан лонжерон из тонкого листового материала постоянной толщины. Показать, что действительное касательное напряжение q в точке P приближенно выражается формулой

$$q = \frac{F}{I} \int_0^s y ds,$$



где y — расстояние от нейтральной оси, I имеет свое обычное значение, s — расстояние точки P от A , измеренное вдоль средней линии изогнутой стенки лонжерона, A — точка пересечения

средней линии с

осью GY ,

Упругая энергия сдвига

228. В § 226 мы уже указали, что наше исследование касательного напряжения в изогнутой балке неполно. Там мы рассматривали (за исключением одного частного случая) только вертикальный компонент напряжения. С практической точки зрения мы менее заинтересованы в определении F (результатирующей перерезывающей силы), чем в определении сопровождающей ее деформации. Эта деформация является «прогибом вследствие перерезывающей силы», который, очевидно, добавляется к прогибу от действия момента, рассмотренному в главе VI. Мы не сможем вычислить величину этого прогиба, если не будем знать действительного значения касательного напряжения в каждой точке поперечного сечения. Справедливость последнего утверждения можно установить, проведя вычисления для того случая, в котором нам точно известно касательное напряжение.

Пусть $\gamma \delta x$ является относительным перемещением противоположных сторон элемента, изображенного на рис. 73 (это перемещение получается от перерезывающей силы F и имеет направление «соответствующее» F в смысле главы I, § 28). Тогда работа, совершенная F , измеряется величиной $\frac{1}{2} F \gamma \delta x$. Это выражение можно приравнять полной упругой энергии, запасенной элементом. Таким образом, из (15) главы IV мы получаем:

$$\frac{1}{2} F \gamma \delta x = \int \int \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} dA \delta x,$$

или

$$F \gamma = \frac{1}{C} \int \int q^2 dA, \quad (I)$$

где q — результирующее касательное напряжение на элементе dA поперечного сечения, вызванное действием F . Для дальнейших преобразований мы должны выразить q как функцию точки поперечного сечения. Используя предыдущие исследования, мы можем это сделать только в случае прямоугольного поперечного сечения. Обозначив ширину попе-

речного сечения через b , а его высоту через d , мы из (7) и (8) получим:

$$q = \frac{3}{2} \frac{F}{bd} \left(1 - 4 \frac{y^2}{d^2} \right). \quad (\text{II})$$

Выражение (I) приобретает вид:

$$F\gamma = \frac{1}{C} \int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} q^2 b \, dy.$$

И мы найдем, что

$$\gamma = \frac{9}{4} \frac{F}{Cbd^2} \int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} \left(1 - 8 \frac{y^2}{d^2} + 16 \frac{y^4}{d^4} \right) dy = \frac{6}{5} \frac{F}{Cbd}. \quad (\text{12})$$

Полная упругая энергия, запасенная касательным напряжением на единицу длины балки, будет:

$$u = \frac{1}{2} F\gamma = \frac{3}{5} \frac{F^2}{Cbd}. \quad (\text{13})$$

229. К счастью, в большинстве задач, имеющих практическое значение, упругая энергия сдвига мала по сравнению с упругой энергией изгиба, а для последней мы имеем весьма удобное выражение, применимое к поперечным сечениям любой формы. В технике при расчетах обычно пренебрегают «прогибом вследствие перерезывающей силы», а касательное напряжение в тех случаях, когда его вообще следует рассматривать, *оценивают* по формуле (6). Оценка, конечно, грубая, но отклонение от действительного значения напряжения можно перекрыть коэффициентом безопасности (§ 149).

Пример

2. (Самб. М. С. Т. 1931.) Двутавровое сечение балки имеет следующие размеры:

стенка: высота d , площадь поперечного сечения A_w ; каждая полка: ширина b , площадь поперечного сечения A_F .

Балка лежит горизонтально и так, что стенка ее вертикальна. На балку действуют вертикальные силы. В сечении, свободном от

нагрузки, результирующая касательных напряжений по площади поперечного сечения является вертикальной силой S . Предполагая, что в поперечном сечении касательное напряжение в полке горизонтально, показать, что упругая энергия вследствие перерезывающей силы в полках элемента длины балки δx приблизительно равна

$$\frac{1}{2} \frac{S^2}{CI^2} \frac{d^2 b^2}{24} A_F \delta x,$$

и что энергия сдвига, запасенная в стенке, будет

$$\frac{1}{2} \frac{S^2}{CI^2} d^4 \left[\frac{1}{12} A_F + \frac{1}{120} A_W + \frac{A_F^2}{4A_W} \right] \delta x,$$

где I — соответствующий момент инерции площади поперечного сечения и C — модуль сдвига.

[Взять высоту стенки d как полную высоту двутаврового сечения и считать, что каждая полка составлена из двух частей (ширины $\frac{1}{2} b$), прикрепленных к стенке. Получить данные выражения, приняв толщины стенок и полок малыми по сравнению с b и d .]

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

230. При прочих равных условиях, значение перерезывающей силы уменьшается с уменьшением высоты балки по отношению к длине. Если рассматривать длинные и тонкие балки, то можно останавливать свое внимание только на напряжениях и прогибах, являющихся следствием действия изгибающего момента. Аналогичное упрощение допустимо для пластинок, толщина которых мала по сравнению с их поверхностными размерами. Можно построить приближенную теорию, основываясь на результатах главы V. Как видно из уравнения (15) той же главы, действие изгибающего момента M на балку с жесткостью при изгибе EI вызывает кривизну $\frac{1}{R}$ оси балки, так, что

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}. \quad (3) \text{ bis}$$

В соответствии с § 170 той же главы, изгибающий момент вызывает также кривизну $\frac{\sigma}{R}$ той прямой в пло-

скости поперечного сечения, которая проходит через центр тяжести и перпендикулярна плоскости изгиба. Применим эти результаты к элементу пластинки, который будем рассматривать как короткую балку (рис. 76) с длиной и шириной, равными единице, и высотой, равной $2h$. Балка изогнута изгибающими моментами M_1 , действующими на одной из пар про-

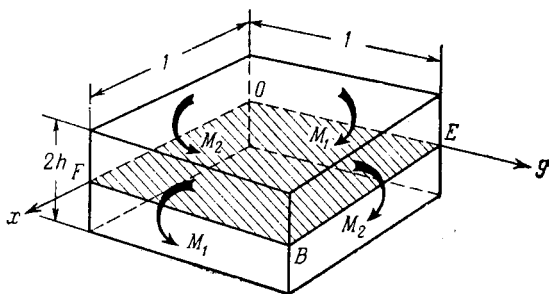


Рис. 76.

тивоположных сторон, и изгибающими моментами M_2 , действующими на другой паре противоположных сторон. Рассмотрим прогиб срединной поверхности, отмеченной на рисунке штриховкой.

231. Если действуют только моменты M_1 , приложенные в виде нормальных напряжений, распределенных надлежащим образом по поверхности граней, то мы будем иметь обычный случай чистого изгиба. Кривизны срединной поверхности будут $\frac{M_1}{EI}$ в плоскости моментов M_1 и $-\frac{\sigma M_1}{EI}$ в перпендикулярной плоскости (т. е. в плоскости моментов M_2), где (так как площадь поперечного сечения равна $2h$)

$$I = 2h \times \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3} h^3. \quad (I)$$

Если действуют только моменты M_2 , приложенные в виде нормальных напряжений, распределенных надлежащим образом по поверхности граней, то кривизны будут $\frac{M_2}{EI}$ в пло-

скости моментов M_2 и $-\frac{\sigma M_2}{EI}$ в перпендикулярной плоскости (т. е. в плоскости моментов M_1).

Воспользовавшись принципом суперпозиции, можно найти эффект совместного действия M_1 и M_2 . Окончательные кривизны срединной поверхности будут: χ_1 в плоскости M_1 и χ_2 в плоскости M_2 , где

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{EI} (M_1 - \sigma M_2), \\ \chi_2 &= \frac{1}{EI} (M_2 - \sigma M_1). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из этих соотношений мы можем вывести, что

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D (\chi_1 + \sigma \chi_2), \\ M_2 &= D (\chi_2 + \sigma \chi_1), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$D = \frac{EI}{1 - \sigma^2} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \sigma^2} \quad [\text{согласно (1)}]. \quad (16)$$

Величина, обозначенная через D , называется жесткостью при изгибе пластинки. Сравнивая (16) с выражением (EI) для жесткости при изгибе балки, мы видим, что вместо E теперь стоит измененная упругая постоянная $\frac{E}{1 - \sigma^2}$, которая уже рассматривалась в §125 IV главы ¹⁾.

Упругая энергия изгиба пластинок

232. Перемещение, соответствующее M_1 (в смысле главы 1, §§ 7 и 30), является относительным поворотом тех двух

¹⁾ Там было показано, что если боковое сжатие не допускается в *одном* каком-нибудь направлении, то $\frac{E}{1 - \sigma^2}$ является эффективным модулем упругости. Это имеет место в том случае, когда балка изгибается, а «антикластическая» кривизна не может возникнуть, т. е. когда в равенствах (15) χ_2 равна нулю. Тогда M_1 будет равняться величине $D\chi_1$, а не величине $EI\chi_1$. M_1 равняется $EI\chi_1$, когда M_2 равен нулю и антикластическая кривизна может возникать свободно.

граней, к которым приложены моменты M_1 . Таким образом, это соответствующее перемещение измеряется величиной x_1 . Подобным же образом x_2 измеряет перемещение, соответствующее M_2 .

Из (11) главы I мы получим, что полная упругая энергия, запасенная в пластинке, равняется:

$$\left. \begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} (M_1 x_1 + M_2 x_2). \\
 \text{Если мы подставим } x_1, x_2 \text{ из равенств (14), то} \\
 U &= \frac{1}{2EI} (M_1^2 - 2\sigma M_1 M_2 + M_2^2). \\
 \text{Если мы подставим } M_1, M_2 \text{ из равенств (15), то} \\
 U &= \frac{1}{2} D (x_1^2 + 2\sigma x_1 x_2 + x_2^2).
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Срединная поверхность — квадратная, сторона ее равна единице. Следовательно, эти выражения дают упругую энергию единицы площади срединной поверхности. В этих выражениях M_1, M_2 являются приложенными *изгибающими моментами, приходящимися на единицу длины контура*, а x_1, x_2 «главными кривизнами» деформированной срединной поверхности. Выражения будут точными, если изгибающие моменты приложены в виде напряжений, распределенных так, как требует точное решение задачи изгиба. Доказательство, аналогичное доказательствам §§ 92—95 главы III, позволяет нам считать их достаточно точными для большинства технических задач, когда M_1 и M_2 приложены другим способом. Таким образом, из нашей общей (приближенной) теории изгиба балок мы получили общую (приближенную) теорию изгиба пластинок.

Общий случай изогнутой пластинки. Компоненты упругого момента

233. Термин «главные кривизны», использованный в предыдущем параграфе, требует некоторых объяснений. Рассматривая квадратную пластинку, стороны которой подвержены действию только изгибающих моментов, мы имеем дело с част-

ным случаем общей задачи. Подобно тому, как в главе IV, § 114, мы имели дело с частным видом напряженного состояния, когда рассматривали кубик, вырезанный из тела и подверженный действию чисто нормальных напряжений. В общей задаче мы должны предполагать, что на краях пластинки вместе с изгибающими моментами M_1 , M_2 действуют моменты, стремящиеся ее закрутить. На самом деле: рассмотрим равно-

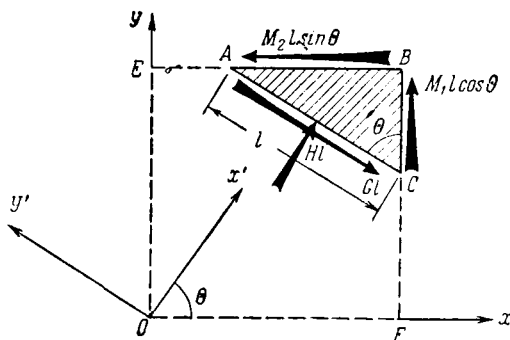


Рис. 77.

весие треугольного элемента ABC , отмеченного на рис. 77 штриховкой.

Пусть этот треугольник представляет собой угол, вырезанный из квадратной пластинки, изученной в предшествующих параграфах. На рис. 77 эта пластинка показана пунктирными линиями. Через l обозначим длину AC , через θ угол между AC и BC (BC — сторона, на которой действует M_1). Очевидно, $BC = l \cos \theta$. Полный момент, приложенный к стороне BC , равен $M_1 l \cos \theta$. Знак этого полного момента соответствует правой по отношению к стрелке, проведенной на рис. 75 параллельно BC , системе осей координат. Длина AB равна $l \sin \theta$. Полный момент, приложенный на стороне AB , равен $M_2 l \sin \theta$, его знак соответствует правой по отношению к стрелке, проведенной параллельно AB , системе координат.

Пусть линейная интенсивность результирующего момента на стороне AC имеет составляющие G и H . Тогда компоненты результирующего момента на этой стороне равны Gl и Hl ,

знаки их соответствуют правым по отношению к стрелкам, проведенным параллельно и перпендикулярно прямой AC , системам осей координат. Условия равновесия для треугольника ABC требуют, чтобы

$$\begin{aligned} Gl &= M_2 l \sin^2 \theta + M_1 l \cos^2 \theta, \\ Hl &= (M_2 - M_1) l \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

откуда мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2} (M_1 + M_2) + \frac{1}{2} (M_1 - M_2) \cos 2\theta, \\ H &= -\frac{1}{2} (M_1 - M_2) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Очевидно, что компонент G стремится изогнуть, а компонент H — закрутить пластинку.

234. Возьмем оси Ox и Oy так, как показано на рис. 77, т. е. Ox по направлению AB , а Oy по направлению CB . Прогиб срединной поверхности, перпендикулярный плоскости чертежа и направленный вверх, обозначим w . Направление w совпадает с направлением z , если оси Ox , Oy , Oz образуют правую систему осей координат. Кривизны κ_1 , κ_2 (§ 231) выражаются формулами:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (I)$$

Из симметрии системы напряжений, приложенной к прямоугольной пластинке $OFBE$, следует, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (II)$$

Пусть оси Ox' и Oy' наклонены под углом θ соответственно к осям Ox и Oy , т. е. ось Ox' перпендикулярна, а ось Oy' параллельна AC . Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &\equiv \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &\equiv -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Воспользовавшись (I) и (II), получим

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \cos 2\theta, \\ x'_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \cos 2\theta, \\ \tau' &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= x'_1 + x'_2, \\ (x_1 - x_2) \cos 2\theta &= x'_1 - x'_2, \\ (x_1 - x_2) \sin 2\theta &= -2\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

Последнее выражение (17) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} D (x_1^2 + 2\sigma x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= \frac{1}{4} D \left\{ (1 + \sigma) (x_1 + x_2)^2 + (1 - \sigma) (x_1 - x_2)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} D \left\{ (x'_1 + x'_2)^2 - 2(1 - \sigma) (x'_1 x'_2 - \tau'^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

Из (15) получим:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= D(1 + \sigma)(x_1 + x_2), \\ M_1 - M_2 &= D(1 - \sigma)(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

А теперь (18) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{1}{2} D \left[(1 + \sigma) (x'_1 + x'_2) + (1 - \sigma) (x'_1 - x'_2) \right] = \\ &= D (x'_1 + \sigma x'_2), \\ H &= -\frac{1}{2} D (1 - \sigma) (x_1 - x_2) \sin 2\theta = D(1 - \sigma) \tau'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII})$$

Несколько изменим обозначения: опустим штрихи у x' и y' , написав x , y вместо x' , y' , а вместо $-x'_1$, $-x'_2$, $-\tau'$ будем писать x_x , x_y , τ_{xy} . Теперь, в общем случае, для упругой энергии изгиба на единицу площади срединной поверхности получим следующее выражение:

$$U = \frac{1}{2} D \left\{ (x_x + x_y)^2 - 2(1 - \sigma) (x_x x_y - \tau_{xy}^2) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (20)$$

На стороне пластинки, перпендикулярной Ox (рис. 78), действует погонный изгибающий момент G_x и погонный крутящий момент H_{xy} , а на стороне пластинки, перпендикулярной Oy , погонный изгибающий момент G_y и погонный крутящий момент H_{xy} . Знаки моментов соответствуют правым по отношению к стрелкам на рис. 78 системам осей координат. G_x, G_y, H_{xy} связаны с $\chi_x, \chi_y, \tau_{xy}$ уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} G_x &= -D(\chi_x + \sigma\chi_y), \\ G_y &= -D(\chi_y + \sigma\chi_x), \\ H_{xy} &= -(1 - \sigma)D\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Эти уравнения можно получить или из (VIII) или с помощью теоремы, взаимной с первой теоремой Кастилиано (§ 18), из выражения (19). На самом деле, на рис. 78 можно видеть, что $-G_x, -G_y, -2H_{xy}$ ¹⁾ являются «силами», соответствующими «перемещениям»

$\chi_x, \chi_y, \tau_{xy}$, и поэтому

$$\begin{aligned} -G_x &= \frac{\partial U}{\partial \chi_x}, \\ -G_y &= \frac{\partial U}{\partial \chi_y}, \\ -2H_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial \tau_{xy}}. \end{aligned}$$

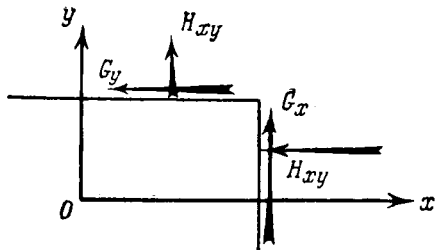


Рис. 78.

Только что введенные погонные изгибающие и крутящие мо-

менты известны как компоненты упругого момента. Величины χ_x, χ_y , измеряющие кривизну, и величина τ_{xy} , измеряющая степень кручения срединной поверхности пластинки, связаны с прогибом срединной поверхности,

¹⁾ Два момента H_{xy} совершают работу на перемещении τ_{xy} .

направленным вверх относительно плоскости чертежа выражения (20)¹⁾.

235. Прогиб w , с направлением которого совпадает положительное направление оси z , часто является следствием действия силы тяжести и поэтому естественно считать его направленным *вниз*.

В дальнейшем мы будем ось z проводить вертикально вниз, а оси Ox , Oy брать в горизонтальной плоскости так, чтобы система $Oxyz$ была правой.

Условия равновесия под действием поперечной нагрузки

236. Пластика подвержена действию поперечной нагрузки. Пусть интенсивность этой нагрузки в точке с координатами

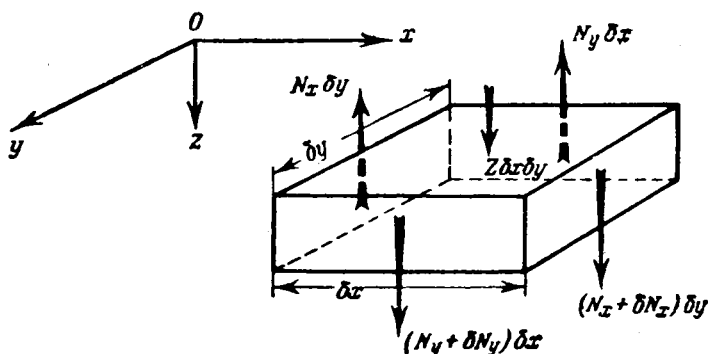


Рис. 79.

x и y (по отношению к осям Ox , Oy , лежащим в плоскости недеформированной срединной поверхности) равна Z .

Нагрузка может быть распределена произвольно, но при составлении условий равновесия мы будем считать Z постоянной на малом элементе пластинки. Так же поступают при исследовании балок, изогнутых поперечной нагрузкой,

¹⁾ Ляв (цит. соч., гл. XXII) для компонентов упругого момента, обозначенных здесь G_x , G_y , H_{xy} , использует обозначения G_1 , G_2 , H_3 ($= -H_1$), а κ_x , κ_y , τ_{xy} обозначает через κ_1 , κ_2 , τ .

считая интенсивность w непрерывно распределенной поперечной нагрузки постоянной на элементе длины. Обозначим длины сторон элемента пластинки через δx и δy (рис. 79), тогда поперечная нагрузка в направлении Oz дает силу величины $Z\delta x\delta y$.

Для того чтобы уравновесить эту силу, следует ввести перерезывающие усилия по боковым граням элемента. Через N_x мы обозначим погонное усилие (усилие на единицу длины) на тех гранях, которые перпендикулярны Ox , а через N_y погонное усилие на тех гранях, которые перпендикулярны Oy . Вообще N_x имеет различные значения на двух противоположных гранях. Из рис. 79 видно, что разность значений N_x на противоположных гранях является силой, действующей в направлении Oz и имеющей величину

$$\delta N_x \delta y = \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta x + \dots \right) \delta y \text{ (по формуле Тейлора).}$$

Разность значений N_y на противоположных гранях является силой, действующей в том же направлении и имеющей величину:

$$\delta N_y \delta x = \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} \delta y + \dots \right) \delta x.$$

Масса элемента, если через $2h$ обозначить его толщину (ср. § 230), а через ρ его плотность, равняется $2\rho h\delta x\delta y$. Обозначая через f_z ускорение в направлении Oz , получим уравнение:

$$\left(Z + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta x \delta y = 2\rho h \delta x \delta y f_z.$$

f_z равняется $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, и мы имеем уравнение движения в проекции на ось Oz :

$$Z + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (22)$$

В случае равновесия оно сводится к

$$Z + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (23)$$

237. Вернувшись к рис. 79, мы заметим, что перерезывающая сила N_x вызывает вращающий момент величины $N_x \delta x \delta y$.

Знак его соответствует левой по отношению к оси Oy системе осей. Он должен уравниваться компонентами упругого момента, которые были рассмотрены в § 234. На рис. 80 показан вид элемента сверху. Из этого рисунка ясно, что соответствующие компоненты момента суть G_x на гранях, перпендикулярных Ox , и H_{xy} на гранях, перпендикулярных Oy ; они таковы, что знаки их соответствуют правым, по отношению к стрелкам на рисунке ¹⁾, системам осей. Результирующий момент, вектор которого параллелен Oy , равен:

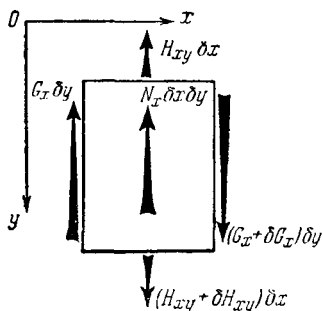


Рис. 80.

$$\delta G_x \delta y + \delta H_{xy} \delta x - N_x \delta x \delta y$$

или, если δx , δy бесконечно малы,

$$\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - N_x \right) \delta x \delta y.$$

Силами инерции при вращении элемента вокруг оси, проходящей через центр тяжести и параллельной Oy , можно пренебречь

по сравнению с рассмотренными до сих пор величинами. Итак, независимо от того, имеем ли мы случай равновесия или случай ускоренного движения, мы можем написать

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - N_x = 0. \quad (24)$$

Рассмотрев точно так же результирующий момент, вектор которого направлен параллельно Ox , мы получим аналогичное соотношение

$$\frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} - N_y = 0. \quad (25)$$

238. Подставив сюда компоненты упругого момента из соотношений (21), мы получим следующие формулы:

¹⁾ При сравнении рис. 80 с рис. 78 нужно учитывать изменение направления Oz (§ 235).

$$\begin{aligned}
 N_x &= -D \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_x + \sigma \alpha_y) + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \right] = \\
 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\
 \text{и} \quad N_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Через ∇^2 обозначен оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. (27)

Подставив эти выражения вместо N_x и N_y в (22) и (23), мы сможем написать уравнение движения в форме

$$\begin{aligned}
 Z - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \nabla^2 w = \\
 &= D \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] w = D \nabla^4 w,
 \end{aligned} \tag{28}$$

а условие равновесия в форме $Z = D \nabla^4 w$,

где, как и раньше,

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \sigma^2}. \tag{16} \text{ bis}$$

Изгиб круглых пластинок

239. Зная Z как функцию координат x и y , мы из уравнения (28) при определенных граничных условиях, заданных на контуре срединной поверхности пластинки, можем определить w . В общем случае задача очень трудная. Затруднения возникают при формулировании граничных условий в случае заданных на контуре напряжений (но не прогибов)¹⁾. Здесь мы рассмотрим наиболее простой случай — круглую пластинку, нагруженную симметрично.

240. Вместо декартовых координат x и y введем полярные r и θ . В тождествах (III) § 234 мы можем x' приравнять r . Тогда направление y' перпендикулярно радиусу-вектору,

¹⁾ Выводы Пуассона, касающиеся этого вопроса, оспаривались Кирхгофом. Кирхгоф показал, что условия Пуассона излишни и в общем случае не могут быть удовлетворены (ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 41 и глава XXII, § 297). Дополнение к этой главе содержит некоторые объяснения по поводу граничных условий.

и мы можем заменить $\delta y'$ через $r\delta\theta$. Тождества запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &\equiv \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &\equiv -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Откуда мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\equiv \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\equiv \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Из этих тождеств легко вывести, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\equiv \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &\equiv \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \\ &\quad - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + \\ &\quad + \frac{\cos 2\theta}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Из первого и второго тождеств (III) мы имеем:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (29)$$

Выражения компонентов упругого момента, действующих на гранях, перпендикулярных направлениям r и θ , теперь можно записать в полярных координатах. Отождествив направления x и r , а также направления y и θ , мы из (20)

и (21), с помощью тождеств (III), положив в них θ равным нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} -G_r &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ -G_\theta &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \\ -H_{r\theta} &= (1 - \sigma) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (1 - \sigma) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = \\ &= (1 - \sigma) D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Круглая пластинка под действием равномерной поперечной нагрузки

241. Пусть поперечная нагрузка Z равномерна и условия на границе пластинки, являющейся окружностью, не зависят от θ . Можно принять, что w также не зависит от координаты θ . Уравнение (28), если мы подставим ∇^2 из (29), примет вид

$$\frac{Z}{D} = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right]^2 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right\} \right]. \quad (31)$$

Проинтегрировав, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right\} &= \frac{Z}{D} \left(\frac{1}{2} r + \frac{A}{r} \right), \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{Z}{D} \left(\frac{1}{4} r^3 + Ar \ln r + Br \right), \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{Z}{D} \left\{ \frac{1}{16} r^3 + \frac{1}{4} Ar (2 \ln r - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} Br + \frac{C}{r} \right\}, \\ w &= \frac{Z}{D} \left[\frac{1}{64} r^4 + \frac{1}{4} Ar^2 (\ln r - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Br^2 + C \ln r + F \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

A, B, C, F — постоянные интегрирования. Для определения постоянных интегрирования имеем два условия на границе и два условия в центре. Очевидно, что в центре прогиб w и кривизна $\frac{d^2w}{dr^2}$ должны иметь конечные значения.

Из третьего уравнения (32) мы имеем:

$$\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{Z}{D} \left[\frac{3}{16} r^2 + \frac{1}{4} A (2 \ln r + 1) + \frac{1}{2} B - \frac{C}{r^2} \right]. \quad (33)$$

Это уравнение и последнее уравнение (32) показывают, что условия в центре требуют, чтобы A и C обращались в нуль, т. е. в случае сплошной пластинки получим:

$$w = \frac{Z}{D} \left[\frac{1}{64} r^4 + \frac{1}{4} B r^2 + F \right]. \quad (34)$$

Заделанный край.

Если край пластинки заделан, то граничные условия следующие:

w и $\frac{dw}{dr}$ равны нулю, при $r = a$ мы имеем

$$0 = \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = \frac{Z}{D} \left[\frac{1}{16} a^3 + \frac{1}{2} B a \right],$$

откуда $B = -\frac{1}{8} a^2$, а из (34)

$$F = -\frac{1}{4} B a^2 - \frac{1}{64} a^4 = \frac{1}{64} a^4. \quad (35)$$

И, наконец,

$$w = \frac{Z}{64D} (a^2 - r^2)^2.$$

Шарнирно опертый край.

В этом случае прогиб w при $r = a$, как и раньше, должен обращаться в нуль, но второе условие изменится и будет заключаться в том, что компоненты упругого момента G_r и $H_{r\theta}$ (§ 240) по отдельности обращаются в нуль на контуре. Крутящий момент H_{xy} равен нулю в силу предположения

о независимости w от θ . Выражение изгибающего момента сводится к

$$G_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Отсюда второе граничное условие нашей задачи имеет вид:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \text{ при } r = a. \quad (36)$$

Воспользуемся (33) и третьим (32), опустив в них члены с A и C , и получим:

$$\frac{3}{16} a^2 + \frac{1}{2} B + \sigma \left(\frac{1}{16} a^2 + \frac{1}{2} B \right) = 0.$$

Отсюда $B = -\frac{1}{8} \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} a^2$. С помощью (34) найдем, что:

$$F = -\frac{1}{4} B a^2 - \frac{1}{64} a^4 = \frac{a^4}{64} \frac{5 + \sigma}{1 + \sigma}.$$

Подставив B и F в (34), мы, наконец, получим решение, соответствующее просто опертому краю:

$$w = \frac{Z}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} a^2 - r^2 \right). \quad (37)$$

Положив в (35) и (37) $r = 0$, мы заметим, что прогиб в центре равен $\frac{Z a^4}{64D}$ в случае заделанного края, и равен $\frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{Z a^4}{64D}$ в случае просто опертого края.

Примеры

3. (Самб. М.С.Т. 1930 ¹⁾.) Края горизонтального диска малой толщины $2h$ и радиуса a свободно покоятся. Диск несет равномерно распределенную нагрузку. Интенсивность нагрузки на единицу его площади равна Z . Доказать, что угол наклона касательной к деформированной средней поверхности диска в направлении нормали к ее границе равен

$$\frac{3}{16} (1 - \sigma) \frac{Z a^3}{E h^3}.$$

¹⁾ Обозначения в примере (Самб. М.С.Т. 1930) изменены так, чтобы они совпадали с обозначениями, принятыми в этой книге.

Показать, что угол обратится в нуль тогда, когда к нагруженному краю будут приложены моменты величины $\frac{1}{8} Za^3$.

Теперь пусть температура нижней поверхности диска равна θ_1 , а верхней θ_2 . Показать, что края диска останутся в горизонтальном положении, если момент, приложенный на контуре, увеличить на

$$\frac{1}{3(1-\sigma)} (\theta_1 - \theta_2) kEh^3,$$

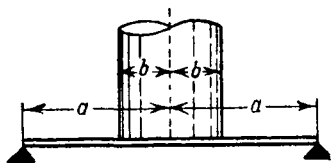
k — коэффициент линейного расширения материала. Предположить, что радиальное расширение диска не допускается.

(Температурные напряжения, если моменты на краю не препятствуют им, изогнут пластинку в сферическую поверхность радиуса

$$R = \frac{2h}{k(\theta_1 - \theta_2)}.$$

4. (Camb. M. S. T. 1934. ¹⁾)

Стальная круглая диафрагма малой толщины и радиуса a свободно опирается по внешнему ободу. Диафрагма несет цилиндр веса W и радиуса b . Цилиндр, как показано на рисунке, расположен в ее центре.



Давление между цилиндром и диафрагмой равномерно распределено по окружности соприкосновения радиуса b .

Пусть G_r и G_θ — изгибающие моменты на единицу длины сечения, являющиеся следствием действия соответственно радиальных и тангенциальных напряжений. Показать, что на центральной части площади диафрагмы, ограниченной окружностью $r = b$, G_r и G_θ , имеют равные и постоянные значения, а на кольцевой части площади между окружностями радиусов b и a

$$G_r = \frac{W}{8\pi} \left[(1 + \sigma) \ln \frac{a^2}{r^2} + (1 - \sigma) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) b^2 \right],$$

$$G_\theta = \frac{W}{8\pi} \left[(1 + \sigma) \ln \frac{a^2}{r^2} + (1 - \sigma) \left(2 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{b^2}{a^2} \right) \right],$$

где σ — коэффициент Пуассона для стали.

[Равномерное распределение давления по окружности радиуса b может рассматриваться как равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $\frac{W}{2\pi b \Delta b}$. В пределе, при $\Delta b \rightarrow 0$ эта нагрузка вызывает возрастание $r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right\}$ скачком на величину, равную $\frac{W}{2\pi D}$ на радиусе $r = b$.]

¹⁾ Обозначения примера изменены так, чтобы они совпадали с обозначениями, принятыми в этой книге.

Свободные поперечные колебания однородной круглой пластинки

242. Из уравнений (22) и (23) видно, что поперечное ускорение можно считать эквивалентным поперечной нагрузке интенсивности

$$Z_f = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (38)$$

Если принять, что w может быть выражено в форме

$$w = W \sin(pt - \epsilon), \quad (39)$$

то

$$Z_f = 2\rho h p^2 w. \quad (38')$$

W в выражении (39) является функцией только x и y , а p и ϵ постоянными величинами. Мы останавливаемся на колебаниях «нормальной» формы (ср. § 212 главы VI), так как представляем w в форме (39).

Подставив вместо Z во второе уравнение (28) Z_f , выраженное величиной (38'), мы получим уравнение колебаний:

$$D\nabla^4 W = 2\rho h p^2 W. \quad (40)$$

Если пластинка круглая, то удобно ввести полярные координаты. Оператор ∇^2 преобразуется к полярным координатам с помощью тождества (29).

Круглая пластинка с заделанным краем

243. Уравнение (40) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} &[\nabla^4 - k^4] W = 0, \\ &k^4 = 2\rho h p^2 / D. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} &\text{Уравнение (41) удовлетворяется решением каждого из} \\ &\text{уравнений} \\ &[\nabla^2 + k^2] W = 0 \\ &\text{и} \\ &[\nabla^2 - k^2] W = 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Если мы будем рассматривать только те колебания, в которых W не зависит от θ , то первое из уравнений (42) можно записать в форме

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right] W = 0. \quad (43)$$

Решение этого уравнения:

$$W = AJ_0(kr) + BY_0(kr), \quad (I)$$

где A и B — произвольные постоянные, а $J_0(x)$, $Y_0(x)$ функции Бесселя нулевого порядка ¹⁾.

Таким же образом для второго уравнения (42) мы получим решение:

$$\begin{aligned} W &= CJ_0(ikr) + FY_0(ikr) = \\ &= CI_0(kr) + FK_0(kr). \end{aligned} \quad (II)$$

Причем здесь использованы обозначения функций Бесселя ²⁾, а через C и F обозначены произвольные постоянные.

Вторые члены в первом и втором решениях, т. е. $Y_0(kr)$ и $K_0(kr)$ принимают бесконечные значения при $r=0$. Следовательно, они должны отсутствовать и мы имеем в случае сплошной круглой пластинки следующее общее решение уравнения (41)

$$W = AJ_0(kr) + CI_0(kr). \quad (44)$$

244. Если

$$\frac{d}{dx} \{ J_0(x) \} \text{ и } \frac{d}{dx} \{ I_0(x) \}$$

обозначить через $J_0'(x)$ и $I_0'(x)$, то, продифференцировав (44), мы получим:

$$\frac{dW}{dr} = k [AJ_0'(kr) + CI_0'(kr)]. \quad (45)$$

Если край пластинки заделан, то мы имеем два следующих граничных условия:

$$W = \frac{dW}{dr} = 0, \text{ при } r = a. \quad (46)$$

Воспользовавшись граничными условиями, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{J_0(ka)}{I_0(ka)} &= -\frac{C}{A} = \frac{J_0'(ka)}{I_0'(ka)}, \\ \frac{J_0(ka)}{I_0(ka)} &= -\frac{J_1(ka)}{I_1(ka)} \end{aligned} \quad (47)$$

¹⁾ См. (например) N. W. M c L a s c h l a n, Bessel Functions, глава I, уравнение (31).

²⁾ Там же, глава VII, уравнение (9).

Последнее равенство имеет место в силу того, что функции Бесселя удовлетворяют соотношениям ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} J_n'(z) &= \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z), \\ I_n'(z) &= \frac{n}{z} I_n(z) + I_{n+1}(z). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Уравнение (47) нашей задачи является уравнением частот. Значение ka , удовлетворяющее этому уравнению, можно найти графически, вычертив с помощью таблиц функций Бесселя как функции переменного ka выражения, стоящие в левой и правой его частях.

Рэлей ²⁾ для наименьшего корня уравнения (47) нашел следующее значение

$$ka = 3,20. \quad (49)$$

Вспомнив выражение для k , получим, что

$$p_1^3 = (3,20)^4 \frac{D}{2\rho ha^4},$$

или, если подставить D из (16),

$$p_1 = \frac{(3,2)^2}{a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{3\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (50)$$

Из приведенного примера видно, что проанализировать колебания пластинки в общем случае весьма трудно. Пока мы не будем далее разбирать этого вопроса.

В главе XIV будут изложены другие методы, с помощью которых с меньшим трудом можно получить достаточно точные результаты.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРУЖИНЫ

245. Спиральные пружины (типа часовых) рассматривались в §§ 67—68 главы II. Пластинчатые (или «листовые») пружины, очевидно, могут быть изучены с помощью нашей

¹⁾ См. McLachlan, цитир. соч. глава II, уравнение (19) и стр. 163, уравнение (88).

²⁾ Теория звука, том I, § 221a.

теории изгиба прямых и слегка искривленных балок ¹⁾. Рассмотрим цилиндрические пружины. Если мы придадим проволоке форму правильной винтовой линии, то и получим такой тип пружин. Пружины подобного типа обычно используют в клапанах двигателей внутреннего сгорания.

Нам нужно знать, как цилиндрическая пружина реагирует на ту или иную приложенную к ней силу, поэтому следует провести расчет таких пружин. Это сделать нетрудно, так как предыдущие главы содержат выражения упругой энергии при изгибе и при кручении. Возникающие перемещения можно вычислить с помощью первой теоремы Кастилиано.

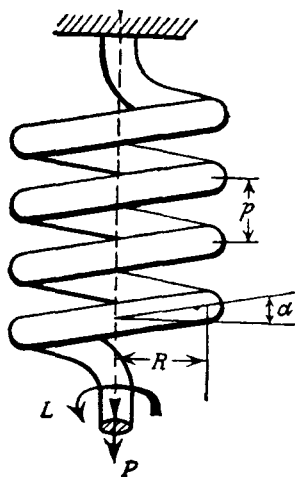


Рис. 81.

На рис. 81 изображена пружина, подверженная действию растягивающей ее силы P . Сила приложена вдоль оси винтовой линии. Усилие в каком-нибудь нормальном сечении пружины (т. е. в сечении, перпендикулярном средней линии завитой проволоки) будет состоять из перерезывающей силы $P \cos \alpha$, растягивающей силы $P \sin \alpha$ и момента с составляющими $PR \cos \alpha$ и $PR \sin \alpha$, из которых первая стремится закрутить

проволоку, а вторая изогнуть ее. Через α здесь обозначен угол винтовой линии, связанный с шагом p винтовой линии уравнением

$$p = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha. \quad (51)$$

Пружины малого шага под действием осевой нагрузки

246. Если угол α мал, то по сравнению с перерезывающей силой и крутящим моментом можно пренебречь растягиваю-

¹⁾ См. пример 17 главы VI.

щей силой и изгибающим моментом. Если, а так обычно бывает, радиус R винтовой линии велик по сравнению с радиусом a самой проволоки, то, по сравнению с напряжениями от крутящего момента, можно пренебречь напряжениями, вызванными перерезывающей силой. Таким образом, с достаточной для практических целей точностью, мы можем ограничиться только крутящим усилием. Угол α мал и $\cos \alpha$ можно считать равным единице, но дальше будет удобнее вести расчет, если мы оставим $\cos \alpha$.

Крутящий момент в каком-нибудь сечении проволоки, вызванный силой P , равен

$$T = PR \cos \alpha. \quad (I)$$

Согласно (10) главы V, упругая энергия кручения на единицу длины проволоки равна

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{CJ}, \quad (II)$$

C — модуль сдвига, а J — полярный момент инерции площади поперечного сечения проволоки. Пусть l — развернутая длина пружины. Полная упругая энергия, запасенная в пружине, дается формулой:

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2 l}{CJ} = \frac{1}{2} \frac{PR^2 \cos^2 \alpha}{CJ} P^2. \quad (52)$$

Мы легко найдем полное удлинение пружины ϵ , происшедшее от действия силы P , если вспомним, что ϵ является перемещением, «соответствующим» в смысле главы I, §§ 28—30, силе P . Применяя первую теорему Кастилиано, имеем:

$$\epsilon = \frac{\partial U}{\partial P} = P l R^2 \cos^2 \alpha / CJ, \quad (53)$$

Пружины большого шага под действием осевой нагрузки

247. Если угол α не мал, то обе составляющие действующего момента могут оказать заметное влияние на результирующее удлинение. Влиянием сил $P \cos \alpha$ и $P \sin \alpha$, по сравнению с влиянием моментов, как и раньше, можно

пренебречь. Упругая энергия изгиба на единицу длины проволоки равна:

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI}, \quad (III)$$

где M изгибающий момент, равный

$$M = PR \sin \alpha. \quad (IV)$$

Полная упругая энергия, запасенная пружиной¹⁾ запишется так:

$$U = \frac{1}{2} l \left[\frac{T^2}{CJ} + \frac{M^2}{EI} \right] = \frac{1}{2} l P^2 R^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{CJ} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right]. \quad (54)$$

Теперь это выражение заменяет (52) § 246. Возьмем от него производную, и вместо (53) получим:

$$\epsilon = \frac{\partial U}{\partial P} = P l R^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha}{CJ} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right]. \quad (55)$$

Выражение для упругой энергии кручения, входящее в равенство (54), годится только для круглых сечений (сплошных или полых). Для них

$$J = 2I,$$

и так как, согласно (14) главы IV,

$$2C = \frac{E}{1 + \sigma},$$

то, подставив это в (55), мы имеем

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{P l R^2}{EI} \left[(1 + \sigma) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right] = \\ &= \frac{P l R^2}{EI} (1 + \sigma \cos^2 \alpha). \end{aligned} \quad (56)$$

Действие осевого момента

248. Если α не мало, то осевая сила вместе с удлинением пружины вызовет поворот свободного конца пружины. Вычислим его, а для этого представим себе, что вместе с P действует момент L , вектор которого параллелен оси пружины.

¹⁾ Упругие энергии изгиба и кручения можно складывать. См. § 33 главы I.

Так же, как в § 245, разложим момент L на составляющие $L \sin \alpha$ и $L \cos \alpha$, из которых первая стремится закрутить проволоку, а вторая изогнуть ее. Возьмем для пружины правую винтовую линию, а для L на свободном конце, если вектор этого момента направлен по P , направление против часовой стрелки. Мы видим, что результирующий изгибающий момент в любом сечении пружины *стремится уменьшить радиус витка*; величина этого момента:

$$- PR \sin \alpha + L \cos \alpha. \quad (V)$$

Результирующий крутящий момент *такого знака, что вызывает удлинение пружины*; величина крутящего момента:

$$PR \cos \alpha + L \sin \alpha. \quad (VI)$$

Полная упругая энергия равняется:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} l \left[(PR \cos \alpha + L \sin \alpha)^2 / CJ + (PR \sin \alpha - L \cos \alpha)^2 / EI \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{l}{EI} \left[(1 + \sigma)(PR \cos \alpha + L \sin \alpha)^2 + (PR \sin \alpha - L \cos \alpha)^2 \right] \end{aligned}$$

или если, как раньше, мы подставим значения C и J ,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{l}{EI} \left[P^2 R^2 (1 + \sigma \cos^2 \alpha) + PRL \sigma \sin 2\alpha + \right. \\ &\quad \left. + L^2 (1 + \sigma \sin^2 \alpha) \right]. \quad (57) \end{aligned}$$

Отсюда, как обычно, можно получить, что

$$\epsilon = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2} \frac{lR}{EI} \left[2PR(1 + \sigma \cos^2 \alpha) + L \sigma \sin 2\alpha \right]. \quad (58)$$

Если через θ обозначить угол поворота свободного конца в направлении, соответствующем L , то мы получим:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial L} = \frac{1}{2} \frac{l}{EI} \left[PR \sigma \sin 2\alpha + 2L(1 + \sigma \sin^2 \alpha) \right]. \quad (59)$$

Если пружина имеет n витков, то ее развернутая длина равна:

$$l = 2\pi n R \sec \alpha. \quad (60)$$

Если L приравнять нулю, то мы из (58) и (59) получим удлинение и поворот в случае действия только одной силы P . Поворот будет пропорционален σ и $\sin 2\alpha$. Отсюда следует, что поворот достигает наибольшего значения при $\alpha = 45^\circ$. Если θ приравнять нулю, то из (59) можно получить величину того момента, который, действуя на пружину, не будет вызывать поворота. Удлинение, вызываемое в этом случае¹⁾ силой P , можно получить из формулы (58).

Примеры

5. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Имеем цилиндрическую, плотно намотанную, сделанную из стальной проволоки диаметра 0,635 см, пружину. Пружина имеет 20 витков, средний диаметр витков 5,08 см. Какую величину должна иметь нагрузка для того, чтобы растянуть пружину на 2,54 см? Найти максимальное допустимое удлинение, при том условии, что касательное напряжение не должно превосходить 2812 кг/см^2 (взять C равным $0,812 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$).

[16,05 кг, 8,88 см.]

6. (Camb. M. S. T. 1930.) Средний диаметр витков цилиндрической буферной пружины равен 20,32 см. Пружина должна быть спроектирована так, чтобы при сжатии ее на 5,08 см она поглощала бы энергию в 10 340 кгсм. Касательное напряжение должно быть не больше 1575 кг/см^2 . Предполагая, что круглый стержень, из которого сделана пружина, подвергается чистому кручению, показать, что его диаметр должен быть чуть больше 5,08 см. Пусть C для материала, из которого сделана пружина, равен $0,882 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$. Показать, что число витков пружины должно равняться примерно 11.

7. (Oxford F. E. E. S. 1931.) Плотная навитая цилиндрическая пружина проектируется так, чтобы она оказывала силу в 7,15 кг на 1 см укорочения и могла бы сократиться на 3,81 см, когда витки приведены в соприкосновение друг с другом. Максимальное касательное напряжение, которое возникнет при этом, должно быть не больше чем 1406 кг/см^2 . Средний диаметр витка 5,08 см. Найти необходимые диаметр проволоки, число витков, шаг витков и свободную длину пружины ($C = 0,815 \times 10^8 \text{ кг/см}^2$).

[0,635 см; 17,3; 0,863 см; 14,75 см.]

8. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Цилиндрическая пружина работает на сжатие, ее длина в свободном состоянии равна L , а диаметр витка D . Пружина сделана из стальной проволоки диаметра d ; шаг витков мал. Показать, что диаметр d должен быть не меньше величины, определяемой из соотношения

$$\frac{q^2 d^2}{Cd^2 + \pi q D^2} = \frac{16W}{\pi^2 LD},$$

¹⁾ Примечание на стр. 659.

где C — модуль сдвига для стали для того, чтобы пружина могла бы запасти количество энергии, равное W , в том случае, когда она сжата почти до соприкосновения витков, а напряжение в стали не превосходит величины q .

9. (Самб. М. С. Т. 1932). Пружина (см. рисунок) из тонкой проволоки диаметра d навита в форме двойного кругового конуса. Число витков равно $2N$. Витки одинаково удалены друг от друга по образующим обоих конусов. Расстояние витков от оси пружины равно r_2 в середине и r_1 на концах, длина пружины по оси $2l$. Длины $(r_2 - r_1)/N$ и l/N малы по сравнению с r_1 .

Составив выражение упругой энергии, показать, что удлинение, вызванное действием малой осевой силы, во втором приближении равно:

$$\frac{32FN(r_1 + r_2)}{d^4} \left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{C} + \frac{(r_2 - r_1)^2 + l^2}{\pi^2 N^2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{4C} \right) \right],$$

E и C соответственно модуль Юнга и модуль сдвига.

Удлинениями от непосредственного действия силы растяжения и от перерезывающей силы можно пренебречь.

[Пусть в каждой из половин пружины x обозначает расстояние от вершины конуса, измеряемое по образующей конуса-пружины, тогда

$$r = x \sin \alpha, \quad (1)$$

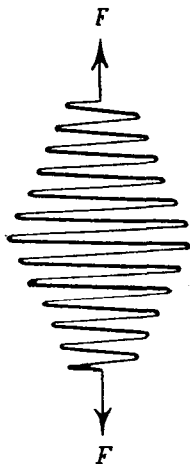
где α — половина угла раствора конуса. Через δL обозначим элемент длины витка проволоки. Через δx обозначим перемещение одного конца элемента по отношению к другому его концу (δx измеряется по образующей). Таким образом, крутящий и изгибающий моменты, приходящиеся на элемент пружины, вследствие действия силы F будут:

$$\left. \begin{aligned} T &= Fr \cos \beta, & M &= Fr \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\text{где} \quad \left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{dx}{dL} = \operatorname{cosec} \alpha \frac{dr}{dL} \end{aligned} \right\} \text{ [согласно (1)].}$$

Упругая энергия каждой половины пружины равна:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{T^2}{CJ} + \frac{M^2}{EI} \right) dL = \\ &= \frac{F^2}{2l} \int \left(\frac{r^2 \cos^2 \beta}{2C} + \frac{r^2 \sin^2 \beta}{E} \right) dL. \quad (\text{так как } J = 2I). \end{aligned}$$



Отсюда можно найти полное удлинение *всей* пружины, оно равно:

$$\varepsilon = 2 \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2F}{l} \int \left(\frac{r^2 \cos^2 \beta}{2C} + \frac{r^2 \sin^2 \beta}{E} \right) dL. \quad (III)$$

Все интегралы распространены на длину половины пружины. Рассмотрим пружину в плане.

Через θ обозначим азимут некоторого сечения.

Очевидно, мы имеем:

$$\cos \beta = r \frac{d\theta}{dL}, \quad (IV)$$

где β — угол, определяемый формулой (II). Если форма пружины такова, что некоторому увеличению r соответствует равное увеличение θ , то из (II) и (IV) мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dr} &= \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\operatorname{cosec} \alpha dr}{r \frac{d\theta}{d\theta}} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{r} \frac{r_2 - r_1}{2\pi N} \\ \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha &= \frac{r_2 - r_1}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Используя эти равенства, формулу (III) можно записать так:

$$\varepsilon = \frac{4\pi FN}{l(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{r^2}{2C} + \frac{r \operatorname{cosec}^2 \alpha}{E} \left(\frac{r_2 - r_1}{2\pi N} \right)^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha}{r^2} \left(\frac{r_2 - r_1}{2\pi N} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (VI)$$

Второй сомножитель, стоящий под интегралом, можно разложить в ряд по формуле бинома. Мы получим второе приближение, если пренебрежем членами четвертой степени относительно $(r_2 - r_1)/2\pi N$ (малыми по условию задачи).

Итак мы имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx \frac{4\pi FN}{l(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{r^2}{2C} + r \operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{r_2 - r_1}{2\pi N} \right)^2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{4C} \right) \right] dr = \\ &= \frac{\pi FN}{2l} (r_1 + r_2) \left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{C} + \operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{r_2 - r_1}{\pi N} \right)^2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{4C} \right) \right], \end{aligned}$$

так как $l = \pi d^4/64$, а

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{(r_2 - r_1)^2 + l^2}{(r_2 - r_1)^2} \quad [\text{согласно (V)}].$$

А это есть приведенный выше ответ.]

НАПРЯЖЕНИЯ И ПРОГИБЫ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

249. Рассматривая цилиндрические пружины, мы предполагали, что упругие энергии изгибающего и крутящего усилий складываются. На основе этого предположения, объясненного в § 33, гл. I, было написано уравнение (54). В задаче определения жесткости коленчатого вала, вычисления можно упростить с помощью того же предположения.

Жесткость при кручении одного колена коленчатого вала

250. Рассмотрим одно колено коленчатого вала (см. рис. 82). Допустим, что нам нужно знать относительный поворот двух его концов, когда к ним приложен крутящий момент T^1 .

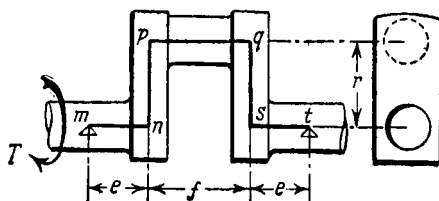


Рис. 82.

За эти «концы» возьмем поперечные сечения в серединах двух цапф. Предположим, что подшипники настолько коротки, что на обоих концах не препятствуют изменению *направления* вала. Если же подшипники достаточно длинные, и в опорах можно предполагать «заделку», то вместе с поперечными силами, необходимыми для сохранения равновесия, нужно вводить изгибающие моменты. Вводимые изгибающие моменты должны действовать как в плоскости, содержащей колено, так и в плоскости, перпендикулярной последней. От этого принцип расчета не меняется, но вычисления становятся намного длиннее.

¹⁾ Эта же задача несколько иначе рассматривается в книге Тимошенко и Лессельса Прикладная теория упругости, часть I, § 51; там получен эквивалентный результат. Ср. также *Aeronautical Research Committee, R. and M., 1211 (1927), «The Effective Torsional Rigidity of a Crank»*,

Точное решение мы не сможем провести. Если же мы, заменив действительный вал эквивалентным ему искривленным стержнем ($mnpqst$ на рис. 82), применим приближенные теории изгиба и кручения, то мы получим приближенное решение задачи. Приложенные моменты T являются крутящими усилиями для шейки вала pq и частей вала mn и st . На «щеки» np и qs действуют изгибающие моменты, лежащие в плоскостях, перпендикулярных плоскости колена.

Пусть B_w — жесткость щек при изгибе в этих плоскостях,
 $(CJ)_s$ — жесткость при кручении вала, а
 $(CJ)_p$ — жесткость при кручении шейки.

Пусть, как указано на рис. 82,

e обозначает длину каждой из частей mn и st вала.
 f — длину «шейки» pq ,
 r — «плеча» (np или qs).

Усилие всюду имеет величину T , а поэтому полная упругая энергия равна:

$$U = \frac{1}{2} T^2 \left[\frac{2e}{(CJ)_s} + \frac{f}{(CJ)_p} + \frac{2r}{B_w} \right].$$

Относительный угол поворота обоих концов может быть теперь определен. Он равен:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial T} = T \left[\frac{2e}{(CJ)_s} + \frac{f}{(CJ)_p} + \frac{2r}{B_w} \right]. \quad (61)$$

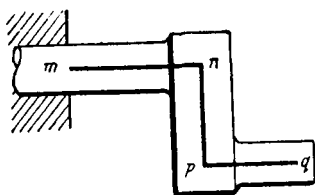


Рис. 83.

Прогиб консольного коленчатого вала

251. Аналогичное исследование можно провести для консольного коленчатого вала (рис. 83). Рассмотрим силу P , приложенную на конце (q) шейки вала.

Действительный вал заменим изогнутым стержнем $mnpq$ и предположим, что в точке m стержень заделан с помощью *длинного* подшипника,

Если мы пренебрежем действием перерезывающей силы, то в различных частях стержня получим следующие усилия: в pq изгибающее усилие, которое линейно изменяется от 0 до Pb ;

в np крутящее усилие постоянной величины Pb и изгибающее усилие, которое линейно изменяется от 0 до Pr ;

в mn крутящее усилие постоянной величины Pr и изгибающее усилие, изменяющееся линейно от Pb до $P(a+b)$.

Через a, r, b обозначены соответственно длины mn, np, pq .

Пусть $B_s (= E_s I_s)$ является жесткостью при изгибе вала mn , $\left. \begin{array}{l} B_w \\ B_p \\ (CJ)_s \\ (CJ)_w \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{щеки } np, \\ \text{шейки } pq, \\ \text{при кручении вала,} \\ \text{щеки.} \end{array} \quad (62)$

Воспользовавшись прежними методами, мы для полной упругой энергии получим:

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{B_p} \int_0^b (Px)^2 dx + \frac{r}{(CJ)_w} P^2 b^2 + \frac{1}{B_w} \int_0^r (Py)^2 dy + \right. \\ \left. + \frac{a}{(CJ)_s} P^2 r^2 + \frac{1}{B_s} \int_b^{a+b} (Px)^2 dx \right] = \frac{1}{2} P^2 \left[\frac{1}{3} \frac{b^3}{B_p} + \frac{b^2 r}{(CJ)_w} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{r^3}{B_w} + \frac{r^2 a}{(CJ)_s} + \frac{1}{3} \frac{a(a^2 + 3ab + 3b^2)}{B_s} \right]. \quad (63)$$

Отсюда по теореме Кастилиано можно получить величину прогиба δ нагруженного сечения:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (64)$$

Напряжения в коленчатых валах

252. Заметим, что заделанное сечение (m на рис. 83) подвергается действию наибольшего изгибающего момента

$$\left. \begin{array}{l} M = P(a+b) \\ \text{и наибольшего крутящего момента} \\ T = Pr \end{array} \right\} \quad (I)$$

Через R обозначим радиус коленчатого вала в этом сечении. Согласно приближенной теории изгиба, M вызывает нормальное напряжение, которое, если поперечное сечение сплошное, изменяется в пределах:

$$\pm \frac{MR}{I_s} = \pm \frac{4M}{\pi R^3}. \quad (II)$$

Согласно нашей приближенной теории кручения T вызывает касательные напряжения, максимальная величина которых при том же предположении равна:

$$\frac{TR}{J_s} = \frac{2T}{\pi R^3}. \quad (III)$$

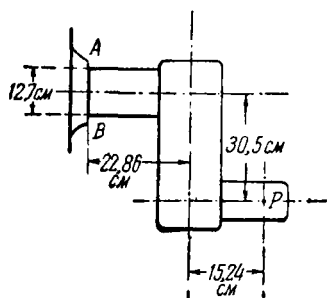
Таким образом в некоторой точке контура заделанного сечения мы имеем растягивающее напряжение величины:

$$p = \frac{4M}{\pi R^3} = \frac{4P(a+b)}{\pi R^3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{[согласно (I)]} \\ \text{и касательное напряжение величины:} \end{array} \right\} \quad (65)$$

$$q = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{2Pr}{\pi R^3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{[согласно (I)].} \end{array} \right\}$$

В другой точке (диаметрально противоположной) мы имеем сжимающее напряжение той же величины (p) и то же касательное напряжение.

Главные напряжения и максимальное касательное напряжение можно вычислить по формулам главы IV, §§ 136—138.



Примеры

10. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Сплошной вал с диаметром в 12,7 см, имеющий консольное колесо с плечом в 30,5 см, выходит в сечении AB из длинного подшипника (см. рисунок).

В точке P в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, приложена сила 1820 кг. Пренебрегая непосредственным влиянием перерезывающей силы, вызванной этой нагрузкой, вычислить

максимальные главные напряжения (растягивающие и сжимающие), которые возникают в сечении AB .

$$[393 \text{ кг/см}^2, -48,4 \text{ кг/см}^2.]$$

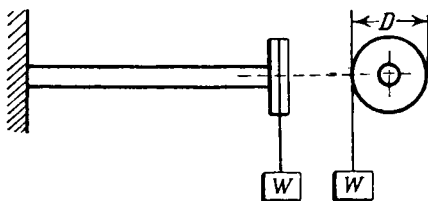
11. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Тонкостенная труба со средним диаметром в 5,08 см и толщиной 0,159 см подвержена действию крутящего момента в 69,3 кгсм и силе осевого растяжения в 45,4 кг. Кроме того, на нее действует внутреннее давление, вызывающее кольцевые напряжения в 14,1 кг/см². Радиальными напряжениями можно пренебречь.

Найти величину и направление главных напряжений в трубе на среднем радиусе. Изобразить на рисунке расположение этих напряжений в плоскостях их действия. (Формулы для кручения и внутреннего давления могут быть приняты без доказательства.)

$$[- 28,7 \text{ кг/см}^2, 24,9 \text{ кг/см}^2.]$$

Следующие примеры, касающиеся изгиба и кручения, можно решить с помощью аналогичных методов.

12. (Camb. M. S. T. 1931.) Труба круглого поперечного сечения, толщина которого мала по сравнению с диаметром, одним из своих концов заделана. Ось трубы расположена горизонтально. Труба нагружена так, как показано на рисунке. Найти выражение для касательного напряжения в какой-нибудь точке поперечного сечения. Показать, что касательное напряжение на одном конце горизонтального диаметра будет равно нулю, если D будет равняться удвоенному диаметру трубы.



(Использовать формулу из примера I, § 227.)

13. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Концы трех стальных стержней круглого сплошного поперечного сечения входят в отверстия, имеющиеся в двух жестких перекладинах A и B . Стержни жестко закреплены в этих отверстиях так, что их оси a, b, c параллельны между собой и расположены в одной плоскости. Расстояние между a и b 7,62 см и равно расстоянию между b и c . Свободная длина стержней между перекладинами 45,7 см, диаметр каждого стержня 2,54 см.

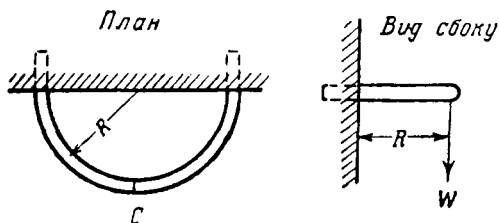
Чему равен момент, который нужно приложить для того, чтобы повернуть перекладины A и B одну относительно другой на угол равный $\frac{1}{10}$ градуса около оси b ? [$E = 2,1 \times 10^6$ кг/см², $C = 0,8 \times 10^6$ кг/см²]

$$[488 \text{ кг см.}]$$

14. (Camb. M. S. T. 1930.) Ось тонкостенной трубы круглого поперечного сечения образует три стороны прямоугольника, размеры которого $AB = \frac{1}{2} BC = CD = a$. Труба расположена в горизонтальной плоскости. Ее концы A и D заделаны в вертикальную стену. В сере-

дине BC помещен груз W . Пусть для материала, из которого сделана труба, модуль сдвига равен двум пятым модуля упругости. Показать, что крутящие моменты, вызываемые в частях AB и DC , равны $\frac{1}{9} Wa$, а прогиб их, вызванный грузом, равен $\frac{5 Wa^3}{18 EI}$, где I — момент инерции площади поперечного сечения трубы относительно диаметра.

15. (Oxford. F. E. E. S. 1934.) Две балки AC и BCD , имеющие жесткость при изгибе EI и жесткость при кручении CJ , жестко связаны в точке C так, что образуют букву T . Стороны «буквы T » CB , CA ,



CD имеют равные длины l . Концы B , A , D заделаны так, что T лежит в горизонтальной плоскости. В точке C приложен вертикальный груз W .

Показать, что BC и CD (кроме того что изгибаются) подвергаются действию крутящего момента величины T , определяемой соотношением:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{EI}{2CJ} \right) T = \frac{1}{36} Wl.$$

16. (Camb. M. S. T. 1934.) Стержень круглого поперечного сечения радиуса r выступает из вертикальной стены в форме горизонтального полукольца радиуса R . На рисунке изображен вид сбоку и в плане. Стержень в сечении C , наиболее удаленном от стены, подвержен действию вертикальной силы. Показать, что в точке C положительный изгибающий момент в стержне равен $\frac{WR}{\pi}$. Найти выражение для прогиба в этом сечении. Деформациями в стержне вследствие перерезывающей силы можно пренебречь.

$$\left[\frac{WR^3}{2\pi^2 r^4} \left(\frac{\pi^2 - 4}{E} + \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{2C} \right) \right]$$

Тонкостенные сосуды под действием внутреннего давления

253. В заключение этой главы рассмотрим пример, принадлежащий к другому классу задач, решение которых можно получить также приближенными методами. Будем рассматри-

вать сосуды (например котлы), подверженные действию внутреннего давления. Стенки сосудов имеют малую по отношению к радиусу кривизны толщину. Две из этого рода задач (круглая труба и сферическая оболочка) уже были изучены в §§ 152—154 главы V.

Деформация, вследствие действия давления, выражается в растяжении и изгибе стенок. Сопротивление деформации изгиба определяется жесткостью при изгибе D (§ 231). Жесткость при изгибе зависит от третьей степени толщины. Сопротивление растяжению, очевидно, пропорционально толщине. Следовательно, если стенки тонкие, то доминировать будут растягивающие напряжения. Мы можем получить достаточно точные сведения о распределении напряжений, если совершенно пренебрежем эффектом изгиба и будем рассматривать (по сути дела) стенки как *гибкие мембраны*.

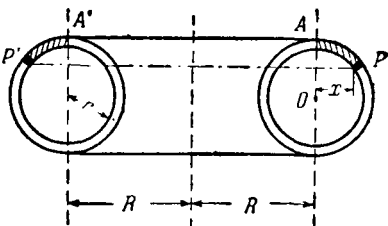


Рис. 84.

Задача в общем случае трудна даже при таком упрощающем предположении. Легко получить некоторые результаты из соображений симметрии, когда сосуд (как, например, в приведенных ниже задачах) имеет форму тела вращения.

Примеры

17. (Самб. М. S. Т. 1931.) Полый тор имеет радиус средней линии R , радиус окружности, получающейся в сечении тора, r и толщину стенки t . Сечение тора показано на рис. 84. Тор подвергается действию внутреннего давления величины p .

Показать, что в точке P сечения, указанного на рисунке кольцевые растягивающие напряжения в торе выражаются формулой:

$$T = \frac{pr(2R + x)}{2t(R + x)} .$$

Найти выражения для нормального напряжения в той же точке P поперечного сечения.

[Если мы допустим, что эффектом изгиба можно пренебречь, то силы, вызванные в A и A' напряжениями в стенках трубы, должны действовать по линии AA' . Тогда, рассматривая равновесие в направлении перпендикулярном AA' той части кольца (указанной штри-

ховкой), которая находится между сечениями, проведенными через AA' и PP' , получаем силу, которая вызывается внутренним давлением. Она равна:

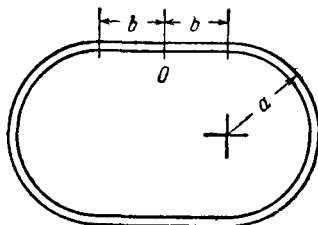
$$p \times \pi \{(R+x)^2 - R^2\} = \pi p x (2R+x). \quad (I)$$

Касательная в точке P наклонена под углом θ к рассматриваемому направлению ($\sin \theta = \frac{x}{r}$) и мы имеем:

$$2\pi (R+x) T \frac{x}{r} = \pi p x (2R+x), \quad (II)$$

где T — результирующая сила растяжения, отнесенная к единице длины, вызываемая кольцевыми растягивающими напряжениями. Следовательно, это напряжение равно:

$$\frac{T}{t} = \frac{pr(2R+x)}{2t(R+x)}.$$



Для того чтобы найти нормальное напряжение в поперечном сечении в точке P мы, как и раньше, обозначим через θ угол AOP и рассмотрим равновесие *половины* кольца (показанного черным). Это кольцо образовано вращением элементарной дуги ($r\delta\theta$) вокруг оси тора. Внутреннее давление (действующее по OP) вызывает результирующую силу, действующую на половину кольца в плоскости PP' . Ее величина равна:

$$2(R+x) pr\delta\theta \sin \theta. \quad (III)$$

Сила растяжения T вызывает результирующую силу, лежащую в той же плоскости величины

$$2(R+x) T \cos \theta = pr \cos \theta (2R+r \sin \theta).$$

Разность сил растяжения, действующих по двум торцевым сечениям полукольца, равна

$$\delta\theta \frac{\partial}{\partial \theta} [pr \cos \theta (2R+r \sin \theta)] = pr (-2R \sin \theta + r \cos 2\theta) \delta\theta. \quad (IV)$$

Пусть n будет искомое нормальное напряжение. Тогда, так как две силы (III) и (IV) уравниваются напряжением n , действующим по двум концевым сечениям полукольца (площадь каждого $r\delta\theta$), то мы найдем, что

$$n = \frac{pr}{2t}.$$

18. (Самб. М. S. Т. 1932.) Прямая труба, поперечное сечение которой показано на рисунке (см. стр. 334), подвержена действию внутреннего давления величины p . Толщина трубы постоянна и мала по сравнению с размерами a и b . Влиянием концевых связей и искривлением поперечного сечения можно пренебречь.

Показать, что изгибающий момент в точке O , отнесенный к единице длины трубы, выражается формулой

$$pb \frac{12a^3 + 3\pi ab + 2b^3}{6\pi a + 12b}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ VII

Граничные условия в теории пластинок

254. Кажется (это и было предположено Пуассоном¹⁾), что в любой точке границы срединной поверхности можно задать три величины, т. е. приложенные к краю пластинки перерезывающую силу, изгибающий момент и крутящий момент, приходящиеся на единицу длины контура пластинки. Покажем, однако, что если упругая энергия изгиба дается формулой (19) § 234, то фактически в любой точке контура могут быть заданы только две величины.

255. Формулу (19) для упругой энергии на единицу площади с помощью равенств (21) можно написать так:

$$U = -\frac{1}{2} (\kappa_x G_x + \kappa_y G_y + 2\tau_{xy} H_{xy}). \quad (66)$$

Это частный случай общей формулы (11) главы I, § 10, потому что, как мы видели²⁾, $-\kappa_x$, $-\kappa_y$, $-\tau_{xy}$ являются перемещениями, соответствующими G_x , G_y , H_{xy} .

Полную упругую энергию изгиба (скажем U_f) мы найдем, если проинтегрируем U по всей площади срединной поверхности.

¹⁾ Ср. подстрочное примечание к § 239.

²⁾ § 234.

Подставив x_x, x_y, τ_{xy} из равенств (20) в (66) и проинтегрировав указанным образом, мы получим:

$$\begin{aligned}
 U_f &= -\frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} G_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} G_y + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} H_{xy} \right) dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} N_x + \frac{\partial w}{\partial y} N_y - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} G_x + \frac{\partial w}{\partial y} H_{xy} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} H_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} G_y \right) \right\} dx dy = \\
 & [N_x, N_y \text{ удовлетворяют уравнениям (24) и (25)}] \\
 &= \frac{1}{2} \iint \left\{ -w \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(w N_x - \frac{\partial w}{\partial x} G_x - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial y} H_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w N_y - \frac{\partial w}{\partial x} H_{xy} - \frac{\partial w}{\partial y} G_y \right) \right\} dx dy. \quad (67)
 \end{aligned}$$

256. Ко второму и третьему членам этого выражения применим формулу Грина, а именно преобразование, выражаемое равенством:

$$\begin{aligned}
 \iint \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy &= \\
 &= \int (l \xi + m \eta) ds \quad (68)
 \end{aligned}$$

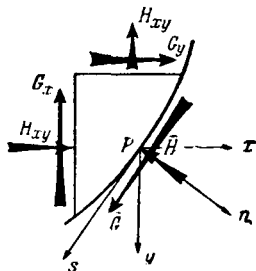


Рис. 85.

В этом равенстве ξ и η суть любые непрерывные функции x и y , l и m — косинусы углов внешней нормали (Pn на рис. 85) с осями Ox, Oy , ds — элемент дуги контура. Если подставить (23) в первые члены (68) и воспользоваться формулой Грина, то

$$\begin{aligned}
 U_f &= \frac{1}{2} \iint w Z dx dy + \frac{1}{2} \int \left\{ l \left(w N_x - \frac{\partial w}{\partial x} G_x - \frac{\partial w}{\partial y} H_{xy} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + m \left(w N_y - \frac{\partial w}{\partial x} H_{xy} - \frac{\partial w}{\partial y} G_y \right) \right\} ds. \quad (I)
 \end{aligned}$$

Криволинейный интеграл берется по всей границе срединной поверхности.

Будем отсчитывать s так, чтобы Pn, Ps, Pz (рис. 85) образовали правую систему ортогональных осей.

Вообще мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\equiv l \frac{\partial}{\partial n} - m \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &\equiv l \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Выражение (I) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \iint \omega Z dx dy + \frac{1}{2} \int \left[\omega (lN_x + mN_y) - \right. \\ &- \frac{\partial \omega}{\partial n} (l^2 G_x + m^2 G_y + 2lmH_{xy}) - \frac{\partial \omega}{\partial s} \{ (l^2 - m^2) H_{xy} + \\ &\quad \left. + lm(G_y - G_x) \} \right] ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint \omega Z dx dy + \frac{1}{2} \int \left(\omega \bar{N} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \bar{G} - \frac{\partial \omega}{\partial s} \bar{H} \right) ds, \quad (III) \end{aligned}$$

где \bar{N} , \bar{G} , \bar{H} , как показано на рис. 85, суть приложенные к краю пластинки перерезывающая сила, изгибающий момент и крутящий момент, приходящиеся на единицу длины контура¹⁾.

Наконец, так как

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} \bar{H} = -\omega \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} (\omega \bar{H}) \quad (IV)$$

и так как последний член выражения (IV) после интегрирования по замкнутому контуру даст нуль, то мы можем заменить выражение (III) следующим:

$$U_f = \frac{1}{2} \iint \omega Z dx dy + \frac{1}{2} \int \left\{ \omega \left(\bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial n} \bar{G} \right\} ds. \quad (69)$$

Поверхностный интеграл, очевидно, выражает энергию, запасаемую пластинкой при действии распределенной нагрузки Z . Криволинейный интеграл выражает работу, совершаемую силами, приложенными на краю.

257. — $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ является перемещением, соответствующим \bar{G} (см. рис. 85), следовательно, последний член в криволиней-

¹⁾ Составляя условия равновесия для треугольного элемента, показанного на рис. 85, легко доказать справедливость подстановок, сделанных в (III).

ном интеграле выражает работу, совершаемую изгибающими моментами, приложенными к краю. Первый член показывает, что сила, соответствующая w , равна $\bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}$, а не просто \bar{N} , как можно было ожидать.

Кельвин и Тэт объяснили это следующим образом¹⁾. Приближенная теория не может учесть различие в способе приложения заданных компонентов упругого момента, поэтому ее формулы могут применяться (при той точности, которую она дает вообще) тогда, когда крутящий момент \bar{H} приложен в виде сил, направленных перпендикулярно срединной поверхности. Если это так, то \bar{H} эквивалентно некоторому распределению перерезывающих сил типа \bar{N} . Действительно, предположим, что момент $\bar{H}\delta s$ на элементе длины δs приложен в виде двух поперечных сил $\pm \bar{H}$, действующих в двух точках, расположенных друг от друга на расстоянии δs . Пусть погонный момент на соседнем элементе δs имеет величину $\bar{H} + \delta \bar{H}$ и приложен аналогичным образом. Тогда в общей точке двух элементов длины разность сил (в направлении Oz) равна величине $\delta \bar{H}$, т. е. $\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \delta s$. Будем неограниченно уменьшать δs , получим распределенную перерезывающую силу типа \bar{N} , имеющую на единице длины контура интенсивность $\frac{\partial \bar{H}}{\partial s}$.

¹⁾ Natural Philosophy, первое издание (1867).

ГЛАВА VIII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

258. Для первого знакомства с предметом оказались достаточными те представления о напряжениях и деформациях, которые мы дали в главе IV. С их помощью мы смогли достаточно точно решить ряд простейших задач, стоящих перед инженером-строителем. Более сложные задачи (и особенно задачи, связанные с пространственными напряженными и деформированными состояниями) требуют более точных общих представлений, в частности, о характере деформации. Поэтому мы теперь постараемся точно сформулировать те понятия о напряжении и деформации, которые до сих пор основывались главным образом на интуиции. Попытаемся развить методы, которые можно будет применять не только в специальных и простых, но и в общих случаях. Настоящая глава посвящена теории *напряжений*.

Предположение о непрерывности

259. Так же, как и в других отраслях математической физики, в теории упругости мы с самого начала сталкиваемся с двумя противоречащими друг другу стремлениями. С одной стороны, мы хотим, чтобы с помощью теории можно было наиболее точно представить себе поведение действительных материалов под действием приложенных сил. С другой, нам хотелось бы, чтобы теория при применении ее к широкому классу задач была математически как можно проще. Нужно найти некоторое компромиссное решение, выбор которого в значительной степени зависит от нас. На самом деле теория имеет дело с идеальными материалами, т. е. с материалами, которым мы сами приписываем свойства. Если эти свойства

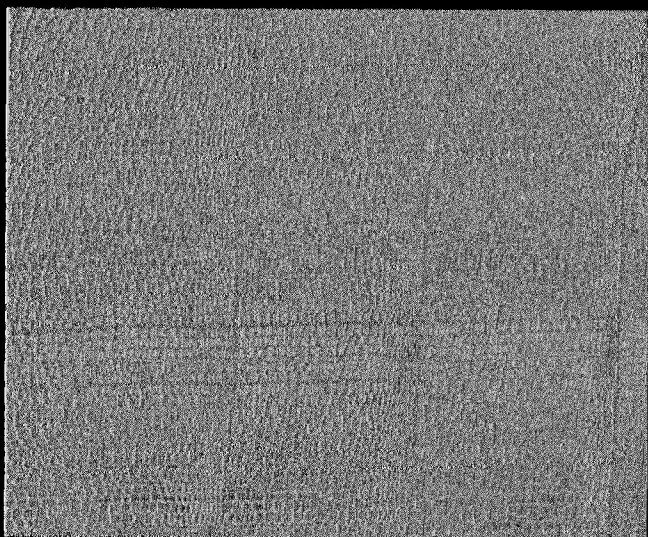


Рис. 36. Поперечный разрез дерева (ль) ($\times 70$).

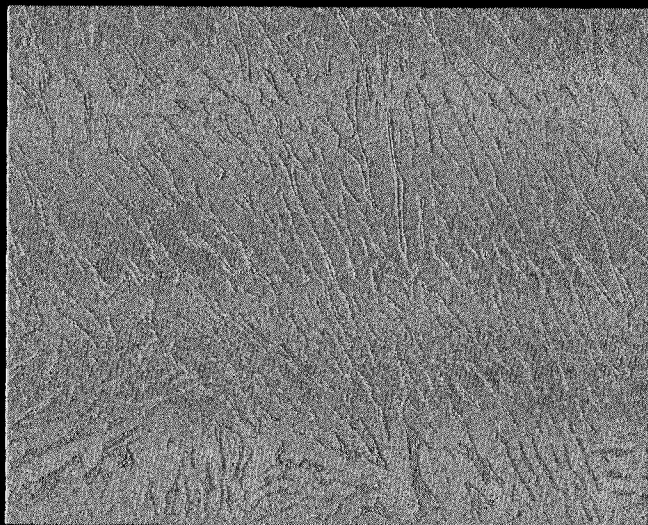


Рис. 37. Микроструктура $\alpha \rightarrow \beta$ латуни ($\times 150$).

выбрать так, чтобы идеальный материал хорошо представлял материалы, употребляемые в технике, то область применения теории будет широкой. Однако математические трудности будут столь значительны, что не дадут, вероятно, возможности исследовать ни одной, даже самой простой задачи. Если свойства материала будут слишком упрощены, то можно будет решить более широкий класс задач, но следует ожидать, что полученные решения не всегда будут совпадать с экспериментом¹⁾.

Прежде всего необходимо постулировать свойство непрерывности. Мы предполагаем, что материал имеет природу аморфного желе, т. е. при изучении строения материала с помощью микроскопа любого мыслимого увеличения мы не заметим в нем никакой зернистости.

Наше первое предположение о непрерывном строении материала противоречит действительности. Мы знаем, что реальные материалы всегда обладают характерной структурой, которую можно обнаружить с помощью весьма малого увеличения. Дерево, например, представляет собой совокупность трубчатых волокон (рис. 86), бронза — конгломерат мелких кристаллов двух различных типов (рис. 87). Если предположить, что в нашем распоряжении имеется как угодно сильно увеличивающий микроскоп, то можно думать, что видимая непрерывность их структуры исчезнет. Ясно, что всякая попытка как-то математически интерпретировать структуру материала в теории даст результат, слишком сложный для обычного употребления. Итак, мы вынуждены постулировать непрерывность. В последующем мы должны будем исследовать вопрос о том, насколько допустимо применять результаты, полученные на основании этого предположения, к реальным материалам.

¹⁾ Эти замечания удобно проиллюстрировать на примере теоретической гидродинамики. Если мы предполагаем, что жидкость несжимаема и идеальна, т. е. лишена вязкости, то мы в состоянии решить много задач, так как в нашем распоряжении оказываются очень эффективные математические методы решения, в то время как уравнения движения сжимаемой и вязкой жидкости решены для очень малого числа самых простых случаев.

Напряжения в непрерывных материалах

260. Наше предположение о непрерывности материала затрудняет точное формулирование понятий, связанных с тем, что мы называем напряженным состоянием. Рассмотрим стержень, подверженный действию постоянной силы растяжения. Если мы представим себе, что материал имеет молекулярную структуру, то легко понять, что его сопротивление растяжению является суммой сил, вызванных действием каждой отдельной молекулы на окружающие ее молекулы. На любой поверхности, которая, как можно себе представить, разделяет стержень на две части, эти силы в сумме вызывают такое действие одной (любой) части на другую, которое нужно для того, чтобы уравновесить внешние силы.

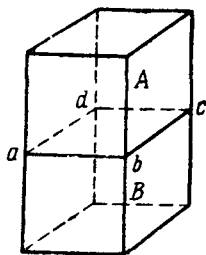


Рис. 88.

Мы же допускаем, что наш «теоретический» материал — аморфный. В нем нет ничего похожего на отдельную молекулу. Следовательно, нам нужно сформулировать понятие о напряжении так, чтобы его можно было применить к любой сколь угодно малой частице материала.

261. Сначала представим себе, что тяжелый куб *A* аморфного материала лежит на таком же кубе *B*; соприкасающиеся грани кубов расположены горизонтально (рис. 88).

Взаимодействие кубов должно сказываться на поверхности соприкосновения. Очевидно, что *B* давит на *A* по направлению вверх с силой, равной весу *A*, а *A* давит на *B* по направлению вниз с равной силой. Представим себе, что каждая элементарная площадка поверхности соприкосновения *abcd* имеет свою собственную индивидуальную долю в этом взаимодействии. Обозначим какую-нибудь элементарную площадку поверхности соприкосновения через δS , а приходящуюся на нее часть силы — через δP , и скажем, что величина

$$p = \frac{\delta P}{\delta S} \quad (1)$$

представляет собой интенсивность напряжения на рассматриваемой элементарной площадке¹⁾.

Как и в предыдущих главах, мы будем обычно использовать термин на пря ж е н и е (в ограниченном техническом смысле) вместо термина «интенсивность напряжения», определенного здесь. Заметим, что p имеет следующую размерность:

$$\frac{\text{сила}}{\text{площадь}} \quad \text{или} \quad \frac{\text{масса}}{\text{длина} \times \text{время}^2} \quad (2)$$

Площадь — скалярная величина; следовательно, напряжение, как и сила, является направленной величиной. Следует подчеркнуть, что p представляет собой местную интенсивность взаимодействия, так как δP в выражении (1) является как действием (по элементарной площадке δS) A на B , так и B на A . Поэтому мы не обязательно должны представлять себе напряжение как векторную величину.

В только что упомянутом случае результирующее взаимодействие кубов A и B направлено перпендикулярно их поверхности соприкосновения. Если δP — сила на элементарной площадке поверхности соприкосновения — перпендикулярна (а это не всегда бывает так) самой элементарной площадке $abcd$, то p тоже перпендикулярно последней. В этом случае мы назовем усилие на элементарной площадке δS нормальным напряжением интенсивности p .

262. Мы рассматривали взаимодействие двух отдельных тел на их поверхности соприкосновения. Действие такого же рода, но имеющее другую величину, очевидно, имеет место на любой другой горизонтальной поверхности, которая разделяет, как можно себе легко представить, куб A или куб B на какие-нибудь две части. Таким образом, наше представление о взаимодействии двух отдельных тел можно распространить на взаимодействие между различными частями одного и того же тела. При этом природа (действительной или

¹⁾ Попутно заметим, что для материалов, имеющих молекулярную структуру, совсем нелегко, а может быть, и вовсе невозможно было бы объединить элемент площадки поверхности соприкосновения с силой (долей общей силы взаимодействия), действующей на этом элементе.

воображаемой) поверхности «раздела», по которой передается напряжение, совершенно безразлична.

Мы можем получить нормальные напряжения, противоположные по знаку только что рассмотренным. Так, например, можно себе представить, что A и B (рис. 88) являются частями некоторого удерживаемого сверху тяжелого стержня. Мы назовем нормальное напряжение растягивающим напряжением, если оно (как в только что приведенном примере) вызвано тем, что нужно сохранить равновесие между двумя стремящимися *отделиться* друг от друга частями одного и того же тела.

Нормальное напряжение, рассмотренное в § 261, назовем сжимающим напряжением.

263. Напряжение на поверхности соприкосновения или в некотором сечении может лежать в их плоскости. Предположим, что на куб A (рис. 88) действует горизонтальная сила F , стремящаяся сдвинуть его относительно куба B . Пусть этому движению на поверхности соприкосновения препятствует сила трения. Очевидно, что между кубами A и B на поверхности соприкосновения существует взаимодействие описанного нами типа, т. е. такое, которое мы назвали напряжением. Точно так же, как и раньше, мы видим, что одно и то же результирующее действие будет наблюдаться на любой воображаемой горизонтальной поверхности, лежащей ниже точки приложения F и рассекающей куб A или куб B на две части. Обозначим составляющую этого усилия, приходящуюся на элементарную площадку δS , через δQ . Заметим, что δQ является горизонтальной силой. Мы скажем, что

$$q = \frac{\delta Q}{\delta S} \quad (3)$$

представляет собой интенсивность касательного или срезающего напряжения, возникающего на рассматриваемой элементарной площадке. Очевидно, размерность q совпадает с размерностью p и поэтому дается соотношениями (2).

264. В общем случае усилие на данной поверхности будет наклонено под некоторым углом к рассматриваемой

поверхности. Часть этого усилия, приходящуюся на какую-нибудь элементарную площадку δS , с помощью методов статики всегда можно разложить на нормальную составляющую δP и касательную составляющую δQ . Тогда напряжение, действующее на этой элементарной площадке, также будет разложено на нормальный компонент P , для которого мы имеем формулу (1), и касательный компонент q , для которого мы имеем формулу (3). Затем касательный компонент q можно разложить по двум любым параллельным рассматриваемой поверхности направлениям. Таким образом, мы видим, что напряжение, действующее на данной поверхности, будет вполне определено, если мы зададим три величины, а именно его компоненты по трем различным направлениям. Эти три направления могут не быть взаимно перпендикулярными. Зная три компонента напряжения, действующего на рассматриваемой элементарной площадке, мы всегда с помощью параллелограмма сил сможем найти результирующее напряжение, действующее на той же элементарной площадке.

265. Выше мы нигде не предполагали, что напряжения, действующие на различных частях данной поверхности, имеют одно и то же направление или одну и ту же величину. Теперь, на основании нашего определения напряжения равенством (1) или равенством (3), мы предположим, что каждое из отношений $\frac{\delta P}{\delta S}$ и $\frac{\delta Q}{\delta S}$ стремится к определенному пределу при стремлении к нулю площади элементарной площадки δS . Отсюда следует, что *мы не допускаем, что напряжение на данной поверхности может изменяться скачком.* Это предположение совместно с аналогичными предположениями теории деформаций (см. гл. IX). Фактически из нашего предположения следует, что *на любой достаточно малой поверхности мы можем считать напряжение постоянным.* (Это допускалось в главе IV §§ 127 — 132.)

Обозначения

266. Постараемся обобщить результат § 130 главы IV. В § 130 были выведены формулы преобразования компонентов

напряжений. Обозначения, которыми мы пользовались до сих пор, недостаточно гибки для того, чтобы их можно было использовать в общем случае. И мы для начала постараемся выработать более удобную схему. Напряженное состояние в какой-нибудь точке тела будет вполне определено, если мы как по направлению, так и по величине зададим напряжения, действующие на всех шести гранях бесконечно малого кубика, вырезанного из тела вблизи этой точки.

Будет крайне удобно, если мы в наших обозначениях как-то выделим различные грани этого кубика. Кроме того, для каждой из граней следует отдельно отметить:

- (1) направление самой грани и
- (2) направление действующего по ней напряжения.

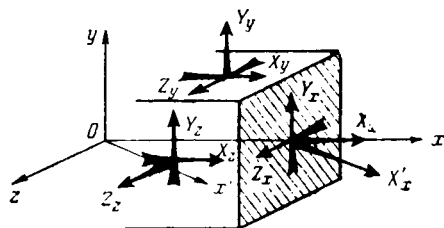


Рис. 89.

267. Пусть ось Ox (рис. 89) проведена так, что, выходя из начала координат, она пересекает рассматриваемую грань (на рис. заштрихована) под прямым углом. Пусть ось Ox' параллельна действующему на этой грани напряжению. Будем употреблять, как обозначение напряжения, символ X'_x . Это удобно, так как X' будет представлять собой напряжение, направление которого параллельно Ox' , а значок внизу у X' будет определять направление той поверхности, по которой действует рассматриваемое напряжение. Напряжение на заштрихованной грани будет вполне определено, если мы дадим X'_x некоторое определенное значение. Несколько иначе, вместо того, чтобы задавать результирующее напряжение, мы можем задать значение его компонентов по трем направлениям x, y, z . В соответствии с принятым выше правилом мы должны обозначить эти компоненты через X_x, Y_x, Z_x (рис. 89) — индекс у всех трех один и тот же, так как они действуют по одной и той же рассмотренной еще раньше поверхности (заштрихована).

На рис. 89 Oy направлено вертикально вверх. Следовательно, через X_y, Y_y, Z_y мы вправе обозначить три компонента того напряжения, которое действует на верхней и нижней гранях, а через X_z, Y_z, Z_z — компоненты напряжения, действующего на паре оставшихся граней. Итак, для того, чтобы задать напряженное состояние в некоторой точке, мы должны задать девять компонентов напряжения. Величины девяти компонентов напряжения в принятой системе обозначения суть:

$$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z. \quad (4)$$

268. Следует еще установить определенное правило *знаков*. Так, мы можем растягивающие напряжения считать положительными, а сжимающие напряжения — отрицательными. Это значит, что X_x будет положительным тогда, когда сила в направлении оси Ox действует на заштрихованной поверхности рисунка 89 со стороны той части тела, которая находится справа от заштрихованной поверхности (не изображена на рис. 89), на часть тела, находящуюся слева от этой поверхности. Последовательность требует, чтобы мы считали Y_x и Z_x положительными напряжениями тогда, когда эти напряжения действуют по направлениям осей Oy и Oz на часть тела, находящуюся слева от поверхности, т. е. так, как показано на рисунке.

Таким образом, стрелки на рисунке по направлениям Ox, Oy, Oz показывают направления сил, действующих в случае положительных X_x, Y_x, Z_x на поверхности, перпендикулярной оси Ox , со стороны части тела, расположенной по направлению возрастающих x . Напряжение — действие взаимное; следовательно, *силы, вызываемые частью тела, расположенной на стороне убывающих x , будут иметь противоположные знаки*. На заштрихованной поверхности рисунка 89 положительные напряжения X_x, Y_x, Z_x вызывают силы, действующие на кубик по направлениям осей Ox, Oy, Oz . Что касается противоположной грани кубика, то там они будут вызывать силы, действующие на кубик в противоположных направлениях.

Таким же образом положительные X_y, Y_y, Z_y вызывают, если рассматривать верхнюю грань кубика, силы, действу-

ющие на него по направлениям осей Ox , Oy , Oz , так как эти силы являются силами, вызванными действием части тела, расположенной на стороне возрастающих y , на рассматриваемый кубик. Положительные X_z , Y_z , Z_z вызывают силы, действующие в тех же направлениях на передней грани кубика, потому что эти силы вызываются действием на кубик той части тела, которая расположена на стороне возрастающих z . Вся схема ясно показана на рис. 89.

269. Иногда бывает удобно (в частности в тех задачах, которые нужно рассматривать в криволинейных координатах) пользоваться обозначениями К. Пирсона¹⁾.

Его обозначения записываются так: $x\hat{x}$, $y\hat{x}$, $z\hat{x}$ (например) означают компоненты напряжения, ранее обозначенные через X_x , Y_x , Z_x . В § 270 будут выведены соотношения (5), заключающиеся в том, что $y\hat{x} = zy$, $z\hat{x} = xz$, $x\hat{y} = yx$, так что порядок букв в этих обозначениях не играет роли.

В литературе, касающейся этого предмета, имеется досадное разнообразие обозначений и названий²⁾. На континенте и в Америке обычно используют символы σ_x , σ_y , σ_z для нормальных компонентов напряжения, которые здесь обозначены через X_x , Y_y , Z_z , а символы τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{xy} для срезающих или касательных компонентов напряжения, которые здесь обозначены через Y_z , Z_x , X_y . Такие обозначения неудобны потому, что неизвестно, как следует обозначать напряжения, направления которых являются ни нормальными, ни касательными по отношению к той поверхности, на которой они действуют. Например, нет обозначений для напряжений X_x' , Y_x' , Z_x' , а они встречаются в теории преобразования компонентов напряжений (§ 272). Наши обозначения в этом отношении³⁾ весьма удобны. Они были введены Кирхгофом⁴⁾ и Лявом⁵⁾.

Шесть независимых компонентов напряжения

270. Компоненты напряжения, обозначенные нами Y_x и X_y , как видно из рис. 89, совершенно различны. Но *по величине эти два компонента всегда одинаковы*. Настоящая весьма важная теорема была уже доказана в § 128 главы IV.

¹⁾ Todhunter and Pearson, History of the Theory of Elasticity (том I, примечание B).

²⁾ См. Ляв, цит. соч., Примечание А.

³⁾ См. (например) симметричную форму уравнений (16), (17) и (18) этой главы.

⁴⁾ Vorlesungen über math. Physik: Mechanik.

⁵⁾ Цит. соч.

Там мы получили, что $(q_1 = q_2)$, а в обозначениях, принятых теперь, можем написать:

$$\text{аналогично, имеем: } \left. \begin{aligned} Y_x &= X_y, \\ Z_y &= Y_z, \\ X_z &= Z_x. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Следовательно, как и в главе IV, § 129 «касательное напряжение не может пересекать свободную от нагрузки поверхность тела».

Итак, из девяти компонентов напряжения (4) независимы только шесть, а именно, три нормальные компонента X_x, Y_y, Z_z и три касательные Y_z, Z_x, X_y . Наиболее общее напряженное состояние характеризуется шестью величинами.

271. Равенства (5) являются частными примерами общего соотношения, которое в наших обозначениях может быть записано следующим образом:

$$X_x = X'_x \quad (6)$$

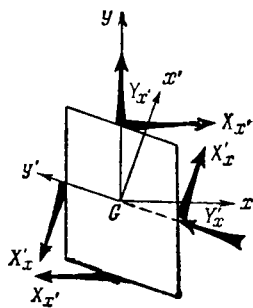


Рис. 90.

Здесь x и x' обозначают какие-нибудь два направления. Установим справедливость этого соотношения. Рассмотрим вырезанную из тела маленькую призму (см. рис. 90). Одна пара его граней перпендикулярна Ox , а другая Ox' . Две остальные грани предполагаются параллельными плоскости чертежа и удаленными друг от друга на расстояние s . Возьмем моменты относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через G — центр тяжести призмы.

Компонент напряжения X'_x действует на гранях перпендикулярных Ox . В общем случае, как показано на рисунке, он связан с компонентом Y'_x , действующим в перпендикулярном Ox' направлении Oy' . Компонент напряжения X_x будет аналогично связан с перпендикулярным ему компонен-

том $Y_{x'}$. Из рисунка можно видеть, что $Y_{x'}$ и Y_x не дают вращающего момента относительно G . Очевидно, что это справедливо также (а) для *всех* компонентов напряжения, действующих по направлению оси, проходящей через G и перпендикулярной плоскости чертежа, (б) для касательных компонентов напряжения, действующих на тех гранях, которые перпендикулярны этой оси. Таким образом, вращающее действие оказывают только $X_{x'}$ и X_x . Следовательно, точно так же, как и в § 128 главы IV, можно показать, что если равенство (6) не соблюдается, то угловое ускорение неограниченно возрастает при неограниченном уменьшении размеров призмы.

Преобразование компонентов напряжения

272. Обобщим теперь выводы §§ 130—132 и § 136 главы IV. Вначале выведем общие формулы преобразования компонентов напряжения.

Рассмотрим равновесие вырезанного из тела тетраэдра, грани которого перпендикулярны Ox , Oy , Oz и Ox' (рис. 91). Направление Ox' произвольно. Оно характеризуется направляющими косинусами l , m , n . Через A обозначим площадь наклонной грани тетраэдра (перпендикулярной Ox'). Грани,

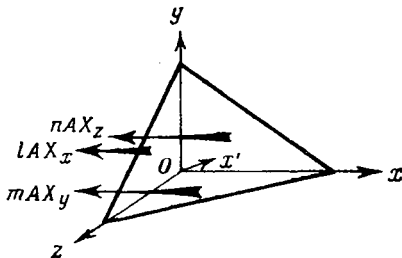


Рис. 91.

перпендикулярные Ox , Oy , Oz , будут иметь соответственно площади lA , mA , nA . Силы, действующие на этих гранях в направлениях компонентов напряжения X_x , X_y , X_z , соответственно равны:

$$lAX_x, mA_{xy}, nAX_z.$$

Что и показано на рисунке. Заметим, что направление стрелок согласно с условием § 268.

Объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}pA$. Через p мы обозначили длину перпендикуляра, опущенного на наклонную грань из

начала O . Пусть размеры тетраэдра достаточно малы так, что его плотность ρ можно считать постоянной. Компонент напряжения $X_{x'}$ на наклонной грани, вызывает в направлении Ox результирующую силу $AX_{x'}$. Следовательно, уравнение движения тетраэдра в проекции на Ox запишется:

$$A(X_{x'} - lX_x - mX_y - nX_z) = \frac{1}{3} \rho p A f_x.$$

Через f_x обозначена проекция ускорения на ось Ox . Уравнение можно сократить на общий множитель A . Далее, для того чтобы найти напряжение на наклонной грани, проходящей через точку O , будем неограниченно уменьшать ρ . Получим соотношение:

$$\left. \begin{aligned} X_{x'} &= lX_x + mX_y + nX_z, \\ Y_{x'} &= lY_x + mY_y + nY_z, \\ Z_{x'} &= lZ_x + mZ_y + nZ_z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

аналогичные соображения покажут, что

273. Напряжение на наклонной грани определяется с помощью компонентов по направлениям Ox , Oy , Oz .

Согласно § 264, используя методы статики, мы каждое напряжение можем разложить на какие-нибудь три направления. Таким образом, если l' , m' , n' будут направляющими косинусами другого направления Oy' , то с помощью (5), (6) и (7) мы можем получить, что

$$X'_{y'} = Y'_{x'} = l'X_{x'} + m'Y_{x'} + n'Z_{x'} = ll'X_x + mm'Y_y + nn'Z_z + (mn' + m'n)Y_z + (nl' + n'l)Z_x + (lm' + l'm)X_y. \quad (8)$$

Если направления Ox' и Oy' перпендикулярны, то компонент напряжения, определяемый равенством (8), представляет собой касательное напряжение. Если оба направления тождественны, т. е.

$$l', m', n' = l, m, n,$$

то из равенства (8) мы для нормального напряжения на плоскости, перпендикулярной Ox' , получим следующее выражение:

$$X'_{x'} = l^2 X_x + m^2 Y_y + n^2 Z_z + 2(mnY_z + nlZ_x + lmX_y). \quad (9)$$

Итак, равенства (8) и (9) являются искомыми формулами преобразования напряжений. Эти формулы тождественны с (21) главы IV, когда

$$l = \cos \theta, \quad m = \sin \theta, \quad n = 0, \\ l' = -\sin \theta, \quad m' = \cos \theta, \quad n' = 0.$$

274. С помощью равенств (8) и (9) можно преобразовать напряжения от одной тройки перпендикулярных осей к другой. Пусть x, y, z старые, а x', y', z' новые координаты. Мы имеем следующую схему направляющих косинусов осей:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

$X'_{x'}$ и $X'_{y'}$ определяются соответственно равенствами (9) и (8) после подстановки в них l_1, m_1, n_1 вместо l, m, n и l_2, m_2, n_2 вместо l', m', n' . Другие компоненты напряжения, отнесенные к x', y', z' , можно выразить аналогичным образом.

Итак, если мы знаем девять компонентов напряжения (4), из которых, согласно равенствам (5), независимы только шесть, мы можем вычислить компоненты напряжения на любой плоскости, проходящей через рассматриваемую точку. Эти шесть компонентов полностью характеризуют напряженное состояние.

275. Схема преобразования § 274 ортогональна, следовательно, направляющие косинусы связаны следующими соотношениями:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \\ l_2^2 + l_3^2 + l_3^2 = 1, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0.$$

Используя эти соотношения, легко показать, что

$$X'_x + Y'_y + Z'_z = X_x + Y_y + Z_z.$$

Другими словами, величина $(X_x + Y_y + Z_z)$ инвариантна по отношению к ортогональному преобразованию координат¹⁾.

Примеры

1. Показать, что

$$\begin{aligned} & Y_y Z_z + Z_z X_x + X_x Y_y - Y_z^2 - Z_x^2 - X_y^2, \\ & X_x Y_y Z_z + 2Y_z Z_x X_y - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2 \end{aligned}$$

также являются инвариантами²⁾.

2. Пусть u, v, w являются компонентами некоторого вектора, а X_x, \dots — компонентами некоторого напряжения. Показать, что преобразование, переводящее u, v, w в u', v', w' (компоненты вектора относительно новых ортогональных осей Ox', Oy', Oz'), будет также переводить три величины

$$X_x u + X_y v + X_z w, \quad Y_x u + Y_y v + Y_z w, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & Z_x u + Z_y v + Z_z w, \\ \text{в} \quad & (X'_x u' + X'_y v' + X'_z w') \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Это показывает, что величины (1) являются компонентами вектора³⁾.

Главные напряжения и главные плоскости напряжений

276. Теперь мы постараемся обобщить выводы § 136 главы IV. Установим следующую теорему:

Каково бы ни было напряженное состояние, всегда существуют три взаимно перпендикулярные плоскости, на которых касательные компоненты напряжения равны нулю, а нормальные компоненты имеют стационарные значения (максимум, минимум или минимакс). Плоскости, о которых идет речь, называются главными плоскостями

¹⁾ Этот результат и результаты примера 1 принадлежат Коши. См. Ляв, цит. соч., § 53.

²⁾ См. примечание на стр. 659.

³⁾ Ляв, цит. соч.

напряжений, а нормальные напряжения на них называются главными напряжениями.

Это основная теорема теории напряжений. Из нее следует, что, когда направление главных плоскостей безразлично (а это случается часто), любое общее напряженное состояние будет известно, если задать значения трех главных напряжений. Для того чтобы в общем случае полностью характеризовать напряженное состояние, мы должны, конечно, определить направления главных плоскостей. Для этого мы должны фиксировать еще три величины, а именно, два независимых направляющих косинуса, определяющих первую плоскость, и один, определяющий вторую плоскость.

В § 267 мы «задавали» напряженное состояние девятью компонентами (4), потом число их с помощью соотношений (5) уменьшилось до шести. Итак, мы видим, что согласно обоим способам мы будем знать напряженное состояние, если зададим *шесть* величин.

277. Выражение для нормального напряжения на плоскости, перпендикулярной Ox' , а именно

$$X'_{x'} = l^2 X_x + m^2 Y_y + n^2 Z_z + 2(mnY_z + nlZ_x + lmX_y) \quad (9) \text{ bis}$$

показывает, что $X'_{x'}$ является функцией l, m, n , в которую входят заданные (и, следовательно, независимые) величины X_x, Y_y, \dots . Направляющие косинусы l, m, n не независимы, так как они удовлетворяют соотношению

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (I)$$

Таким образом, мы можем рассматривать в соотношении (9) l, m как независимые переменные, которым можно давать произвольные значения. n и $X'_{x'}$ будут функциями l, m .

Продифференцируем (I) по l и m , считая n функций от l и m .

$$\left. \begin{aligned} l + n \frac{\partial n}{\partial l} &= 0, \\ m + n \frac{\partial n}{\partial m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Далее, когда $X'_{x'}$ принимает стационарное значение, мы должны иметь

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X'_{x'}}{\partial l} = 2 \left\{ lX_x + n \frac{\partial n}{\partial l} Z_z + (mY_z + \right. \\ &\quad \left. + lZ_x) \frac{\partial n}{\partial l} + nZ_x + mX_y \right\}, \\ 0 &= \frac{\partial X'_{x'}}{\partial m} = 2 \left\{ mY_y + n \frac{\partial n}{\partial m} Z_z + (mY_z + \right. \\ &\quad \left. + lZ_x) \frac{\partial n}{\partial m} + nY_z + lX_y \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Воспользовавшись равенствами (5), мы можем условия (III) написать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} lX_x + mX_y + nX_z + \frac{\partial n}{\partial l} (lZ_x + mZ_y + nZ_z) &= 0 \\ lY_x + mY_y + nY_z + \frac{\partial n}{\partial m} (lZ_x + mZ_y + nZ_z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

и

Исключив из них с помощью (II) производные, мы как эквивалентные условия получим уравнения:

$$\frac{lX_x + mX_y + nX_z}{l} = \frac{lY_x + mY_y + nY_z}{m} = \frac{lZ_x + mZ_y + nZ_z}{n} = p \quad (\text{например}), \quad (V)$$

а они, согласно (7), эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{X_{x'}}{l} = \frac{Y_{x'}}{m} = \frac{Z_{x'}}{n} = p. \quad (10)$$

Уравнения (10) весьма легко интерпретировать. Они показывают, что на той плоскости, где $X'_{x'}$ имеет стационарное значение, компоненты результирующего напряжения по направлениям Ox , Oy , Oz пропорциональны l , m , n , т. е. направляющим косинусам плоскости. Отсюда следует, что результирующее напряжение на такой плоскости является чисто нормальным. Мы видим, что это чисто нормальное напряжение и является тем главным напряжением, которое определялось в § 276. Интенсивность его равна:

$$lX_{x'} + mY_{x'} + nZ_{x'} = (l^2 + m^2 + n^2)p = p \quad [\text{согласно (10)}]$$

278. Покажем, что главные плоскости действительно существуют. Для этого запишем (V) в форме

$$\left. \begin{aligned} l(X_x - p) + mX_y + nX_z &= 0, \\ lY_x + m(Y_y - p) + nY_z &= 0, \\ lZ_x + mZ_y + n(Z_z - p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

l, m, n не могут обращаться в нуль одновременно, и мы должны иметь

$$\begin{vmatrix} X_x - p, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - p, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - p \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Это кубическое относительно p уравнение. Все коэффициенты его действительны. Следовательно, оно имеет, по крайней мере, один действительный корень, откуда вытекает, что всякое возможное напряженное состояние имеет, по крайней мере, одно главное напряжение (скажем, p_1). Подставив p_1 вместо p в (VI), мы определим направление, соответствующее одной главной плоскости.

Возьмем новые оси координат. Направим новую ось Ox по направлению главного напряжения (p_1), которое, как мы только что показали, существует. Значения компонентов напряжения изменятся так, как изменились оси. Согласно нашему выбору оси Ox , мы будем иметь:

$$X_x = p, Y_x = Z_x = 0. \quad (VII)$$

Y_y, Y_z, Z_z будут тоже иметь новые значения, и уравнения (VI) в новых осях запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} l(p_1 - p) &= 0, \\ m(Y_y - p) + nY_z &= 0, \\ mZ_y + n(Z_z - p) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда мы имеем или уже найденное решение:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1, m_1 = n_1 = 0, l_1 = 1 \\ \text{или} \quad l &= 0, m^2 + n^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (VIII)$$

вместе с

$$\left. \begin{aligned} m(Y_y - p) + nY_z &= 0, \\ mZ_y + n(Z_z - p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

Исключив m, n из уравнений (IX), мы найдем, что p в оставшихся решениях должно удовлетворять уравнению

$$p^3 - (Y_y + Z_z)p + Y_y Z_z - Y_x^2 = 0.$$

Корни этого уравнения суть:

$$p_2, p_3 = \frac{1}{2}(Y_y + Z_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Y_y - Z_z)^2 + 4Y_x^2}, \quad (\text{X})$$

т. е. оба действительны¹⁾. Таким образом мы всегда можем найти еще две главные плоскости, которые согласно (VIII) будут перпендикулярны первой.

Выберем ось Oy так, чтобы она была перпендикулярна плоскости главного напряжения p_2 . Тогда, согласно этому предположению, в добавление к (VII), мы будем иметь:

$$Y_y = p_2, \quad Y_z = 0.$$

Уравнения (IX) примут форму:

$$\left. \begin{aligned} m(p_2 - p) &= 0, \\ n(Z_z - p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI})$$

откуда мы получим или решение, найденное раньше:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} p &= p_2, \quad n_2 = l_2 = 0, \quad m_2 = 1, \\ m_3 &= 0, \quad n_3 = 1, \quad l_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII})$$

вместе с

$$Z_z = p_3.$$

Из (XII) мы видим (так как $l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0$), что плоскости p_2 и p_3 перпендикулярны между собой и перпендикулярны плоскости p_1 . Таким образом, теорема § 276 доказана.

¹⁾ Выражения (X) можно сравнить с выражениями (29) главы IV.

Поверхность напряжений

279. Напряженное состояние можно описать с помощью некоторой поверхности называемой поверхностью напряжений¹⁾. Уравнение этой поверхности следующее:

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2(Y_z yz + Z_x zx + X_y xy) = \text{const} = k \quad (\text{например}). \quad (12)$$

Если через r обозначить длину радиуса-вектора, проведенного из центра по направлению, определяемому направляющими косинусами

$$l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \quad n = \frac{z}{r},$$

то

$$\frac{k}{r^2} = X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2(Y_z mn + Z_x nl + X_y lm). \quad (1)$$

Сравнивая это уравнение с (9) § 273, мы видим, что квадрат радиуса-вектора r обратно пропорционален нормальному напряжению (X'_x) на плоскости, проходящей через центр поверхности второго порядка и перпендикулярной радиусу-вектору. Поэтому главные плоскости напряжения перпендикулярны тем радиусам, которые имеют стационарные значения, т. е. главным осям поверхности второго порядка.

Круговая диаграмма Мора

280. В практике очень ценен метод изображения напряженного состояния, предложенный Мором²⁾. Объясним этот метод на примере напряженного состояния, в котором главные напряжения направлены по осям x , y и z , так что

$$X_x = p_1, \quad Y_y = p_2, \quad Z_z = p_3, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

¹⁾ Ляв, цит. соч., § 50. Теорема § 276 может быть доказана с помощью известных положений теории поверхностей второго порядка.

²⁾ *Zivilingenieur*, 1882, стр. 113 или *Technische Mechanik* (второе издание, 1914).

Формулы (9) и (8) для преобразования компонентов напряжения в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} X'_{x'} &= l^2 p_1 + m^2 p_2 + n^2 p_3 \\ X'_{y'} &= ll' p_1 + mm' p_2 + nn' p_3 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

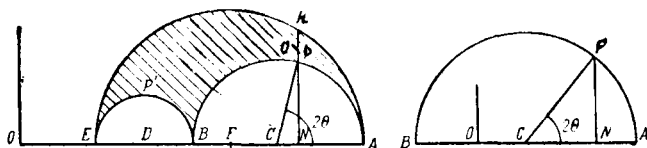


Рис. 92.

Рассмотрим сначала плоское напряженное состояние, т. е. в равенствах (13) положим $p_3 = 0$. Тогда, так как

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \theta, & m &= \sin \theta, & n &= 0, \\ l' &= -\sin \theta, & m' &= \cos \theta, & n' &= 0, \end{aligned} \right\}$$

мы для напряжения на плоскости, наклоненной к Ox и Oy , но параллельной Oz , имеем:

$$\left. \begin{aligned} X'_{x'} &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) + \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \cos 2\theta, \\ X'_{y'} &= -\frac{1}{2} (p_1 - p_2) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти формулы в частном случае, при $q (\equiv X_y)$ равном нулю, совпадают с формулами (21) § 130 главы IV.

Из начала O (рис. 92) проведем горизонтально OA , представляющее p_1 . A откладываем *направо от O , когда p_1 положительно*. Пусть OB при соблюдении того же условия, представляет p_2 . На AB как на диаметре построим полуокружность APB . Пусть C будет центром полуокружности; проведем радиус CP , составляющий угол 2θ с OCA .

Тогда, очевидно, что

$$OC = \frac{1}{2} (p_1 + p_2). \quad (I)$$

C лежит направо от O , когда величина, стоящая в правой части (I), положительна.

Также

$$CP = CA = \frac{1}{2} (p_1 - p_2). \quad (II)$$

Отсюда, если через PN обозначить перпендикуляр, опущенный из точки P на OCA , мы получим:

$$\begin{aligned} ON &= OC + CP \cos 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2) + \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \cos 2\theta = [\text{согласно (I) и (II)}] \\ &= X'_x, \quad [\text{согласно (14)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } PN &= CP \sin 2\theta = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \sin 2\theta = [\text{согласно (I) и (II)}] \\ &= -X'_y, \quad [\text{согласно (14)}]. \end{aligned}$$

Предыдущее построение известно под названием *к р у г о в о й д и а г р а м м ы М о р а*. Диаграмма сразу показывает, какое касательное напряжение связано с данным нормальным напряжением, и *наоборот* (с этой точки зрения знак касательного напряжения не имеет значения). На рис. 92 слева полуокружность APB проведена в случае двух положительных главных напряжений. Мы видим, что в этих случаях нормальные составляющие напряжения положительны на всех плоскостях. На рис. 92 справа полуокружность проведена для частного случая, в котором p_1 положительно, а p_2 отрицательно и, кроме того, $p_1 + p_2 = 0$ (ср. гл. IV § 119). Центр полуокружности, очевидно, совпадает с точкой O .

281. Третье главное напряжение p_3 не влияет на напряжения на плоскостях, параллельных Oz , потому что для них n в равенствах (13) равно нулю. Отсюда следует, что полуокружность BPA соответствует нормальным и касательным напряжениям на плоскостях, параллельных направлению p_3 .

Аналогично, если OE (рис. 92) представляет собой p_3 , то точки на полуокружности, имеющей EB в качестве диаметра, будут соответствовать нормальному и касательному компонентам напряжения на всех плоскостях, параллельных направлению p_1 . Точки на полуокружности, имеющей EA в качестве диаметра, соответствуют нормальным и касательным компонентам напряжения на всех плоскостях, параллельных направлению p_2 .

На плоскостях, наклоненных ко всем трем главным плоскостям, напряжения, в общем случае, будут зависеть от всех трех величин p_1, p_2, p_3 . Но если ON, NQ на рис. 92 изображают нормальное и касательное напряжение на какой-нибудь плоскости, то мы можем доказать, что Q будет всегда лежать в заштрихованной области. Таким образом, прямо из диаграммы можно получить ответы на вопросы, возникающие в теории прочности материалов¹⁾.

282. Доказательство можно провести следующим образом: пусть через $R_{x'}$ обозначено результирующее напряжение на плоскости, перпендикулярной какому-нибудь заданному направлению Ox' . Мы имеем

$$R_{x'}^2 = X_{x'}^2 + Y_{x'}^2 + Z_{x'}^2.$$

Если Ox, Oy, Oz имеют направления главных напряжений, т. е.

$$X_x = p_1, Y_y = p_2, Z_z = p_3, Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

то из (7) мы получим, что

$$R_{x'}^2 = l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2, \quad (15)$$

где l, m, n являются направляющими косинусами упомянутой плоскости. Если через $T_{x'}$ обозначить результирующее касательное напряжение на этой плоскости (нормальное напряжение на ней $X'_{x'}$), то мы имеем:

$$R_{x'}^2 = X'_{x'}^2 + T_{x'}^2.$$

¹⁾ Такое применение диаграммы кратко изложено в Дополнении к настоящей главе.

Следовательно, если $X'_{x'}$ задано, то $T_{x'}$ можно вычислить из выражения

$$T_{x'}^2 + X_{x'}'^2 = l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2. \quad (I)$$

Пусть ON , QN на рис. 92 изображают $X'_{x'}$ и $T_{x'}$ и пусть величины главных напряжений подчинены следующим неравенствам $p_1 > p_2 > p_3$. Из диаграммы мы имеем:

$$\begin{aligned} CQ^2 &= CN^2 + QN^2 = \\ &= \left\{ X'_{x'} - \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \right\}^2 + T_{x'}^2 = \\ &= l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2 - \\ &\quad - (p_1 + p_2) X'_{x'} + \frac{1}{4}(p_1 + p_2)^2 \text{ [согласно (I)].} \end{aligned}$$

Подставив $X'_{x'}$ из (13) и используя соотношение

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} CQ^2 &= \frac{1}{4}(p_1 - p_2)^2 + n^2(p_1 - p_2)(p_2 - p_3) = \\ &= CP^2 + n^2(p_1 - p_3)(p_2 - p_3). \end{aligned} \quad (II)$$

Отсюда следует, что $CQ \not\leq CP$, т. е. Q лежит на или вне полуокружности BPA .

Точно таким путем, если D — центр полуокружности $EP'B$ (см. рис. 92), то мы найдем, что

$$\begin{aligned} DQ^2 &= \frac{1}{4}(p_2 - p_3)^2 + l^2(p_1 - p_3)(p_1 - p_2) = \\ &= DP'^2 + l^2(p_1 - p_3)(p_1 - p_2), \end{aligned}$$

откуда следует, что Q лежит на или вне полуокружности $EP'B$. Если F — центр полуокружности ERA , то мы имеем:

$$\begin{aligned} FQ^2 &= \frac{1}{4}(p_1 - p_3)^2 - m^2(p_1 - p_2)(p_2 - p_3) = \\ &= FR^2 - m^2(p_1 - p_2)(p_2 - p_3). \end{aligned}$$

А это показывает, что Q лежит на или *внутри* полуокружности ERA . Собрав все вместе, мы видим, что Q должно лежать внутри заштрихованной области рисунка 92.

Стационарные значения касательного напряжения

283. Рис. 92 дает повод предполагать, что стационарные значения касательного напряжения равны:

$$\frac{1}{2}(p_1 - p_2), \frac{1}{2}(p_2 - p_3), \frac{1}{2}(p_1 - p_3).$$

С помощью (13) и (15) мы можем подтвердить это положение и определить плоскости, на которых достигаются стационарные значения.

Если $T_{x'}$ является результирующим касательным напряжением, то, как и раньше, мы имеем:

$$\begin{aligned} T_{x'}^2 &= R_{x'}^2 - X_{x'}'^2 = l^2 p_1^2 + m^2 p_2^2 + n^2 p_3^2 - \\ &- (l^2 p_1 + m^2 p_2 + n^2 p_3)^2 = \text{[согласно (13) и (15)]} \\ &= l^2(p_1^2 - p_3^2) + m^2(p_2^2 - p_3^2) + p_3^2 - \\ &- \{l^2(p_1 - p_3) + m^2(p_2 - p_3) + p_3\}^2, \end{aligned} \quad (I)$$

так как

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Если $n \neq 0$, то l и m в этом выражении могут изменяться независимо. Если $T_{x'}$ имеет стационарное значение, то мы имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= 2T_{x'} \frac{\partial T_{x'}}{\partial l} = \\ &= 2l(p_1 - p_3)[p_1 + p_3 - 2\{l^2(p_1 - p_3) + m^2(p_2 - p_3) + p_3\}] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &= 2T_{x'} \frac{\partial T_{x'}}{\partial m} = \\ &= 2m(p_2 - p_3)[p_2 + p_3 - 2\{l^2(p_1 - p_3) + m^2(p_2 - p_3) + p_3\}]. \end{aligned}$$

Отсюда, допустив, что p_1, p_2, p_3 не равны между собой, мы получим:

$$\text{или} \left. \begin{aligned} l &= 0, \quad m^2 = n^2 = \frac{1}{2} \\ m &= 0, \quad n^2 = l^2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

При $n = 0$ выражение (I) примет вид:

$$\begin{aligned} T_{x'}^2 &= l^2(p_1^2 - p_2^2) + p_2^2 - \{l^2(p_1 - p_2) + p_2\}^2 = \\ &= l^2(1 - l^2)(p_1 - p_2)^2. \end{aligned}$$

T_x' будет иметь стационарное значение при

$$l^2 = m^2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{III})$$

Из (II) и (III) видно, что каждая из плоскостей, на которых касательное напряжение принимает стационарные значения, перпендикулярна одной из главных плоскостей (§ 276) и делит пополам угол, образованный двумя другими. Этот результат совпадает с тем, что для частного напряженного состояния было установлено в § 138 главы IV.

Если величины главных напряжений подчинены неравенствам $p_1 > p_2 > p_3$, то максимальная интенсивность касательного напряжения равна $\frac{1}{2}(p_1 - p_3)$.

Разложение любого напряженного состояния на равномерное растягивающее и касательные напряжения

284. Мы показали, что если подходящим образом изменить оси, то любое напряженное состояние можно характеризовать тремя главными напряжениями p_1, p_2, p_3 .

Очевидны следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) + \frac{1}{3}(p_1 - p_2) + \frac{1}{3}(p_1 - p_3), \\ p_2 &= \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) + \frac{1}{3}(p_2 - p_3) + \frac{1}{3}(p_2 - p_1), \\ p_3 &= \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) + \frac{1}{3}(p_3 - p_1) + \frac{1}{3}(p_3 - p_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Из них видно, что любое напряженное состояние может рассматриваться как наложение четырех различных напряженных состояний. В первом из этих напряженных состояний значения всех трех главных напряжений *одинаковы* и равны величине:

$$\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = p \text{ (например)}, \quad (\text{II})$$

где p является средним нормальным напряжением в рассматриваемой точке. В § 275 мы показали, что величина

$(X_x + Y_y + Z_z)$ инвариантна по отношению к ортогональному преобразованию координат. В нашем случае эта величина равна $3p$.

Компоненты напряжения в других составляющих напряженных состояниях имеют похожий друг на друга вид. Например, в первом из них главные напряжения будут:

$$\pm \frac{1}{3}(p_1 - p_2), 0, \quad (\text{III})$$

так что среднее нормальное напряжение равно нулю. Из вывода § 283 следует, что максимальная интенсивность касательного напряжения равна $\frac{1}{3}(p_1 - p_2)$. Далее, из упомянутого параграфа следует, что касательное напряжение достигает своего максимального значения на плоскостях, которые делят пополам угол, образованный главными плоскостями ненулевых главных напряжений. Легко показать, что нормальный компонент напряжения на таких плоскостях равен нулю. Следовательно, напряженное состояние (III) можно считать касательным напряжением интенсивности $\frac{1}{3}(p_1 - p_2)$. Аналогично два другие составляющие напряженные состояния являются касательными напряжениями интенсивности $\frac{1}{3}(p_2 - p_3)$ и $\frac{1}{3}(p_3 - p_1)$.

Упругие энергии напряженных состояний последнего типа складывать *нельзя* (§ 33) по той причине, что два из них совершают работу на деформациях, вызванных каким-нибудь одним. Удельная упругая энергия деформации (§ 116) сложного напряженного состояния выражается равенством (17) главы IV.

Пример

3. (Самб. М. S. Т. 1931.) Изотропный, однородный материал, подчиняющийся закону Гука, нагружен так, что главные напряжения равны $(p + f_1)$, $(p + f_2)$ и $(p + f_3)$; $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

Доказать, что удельная упругая энергия деформации материала равна

$$\frac{p^2}{2K} - \frac{f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1}{2C},$$

где K — объемный модуль сжатия, а C — модуль сдвига.

Уравнение движения в напряжениях

285. До сих пор мы занимались изучением вопроса о том, как можно задать данное напряженное состояние. Мы установили, что напряженное состояние в *данной точке* будет определено, если задать три компонента напряжения на каждой из трех взаимно перпендикулярных плоскостях. В самом деле, тогда компоненты напряжения на любой другой плоскости, проходящей через рассматриваемую точку, можно вычислить как функции девяти заданных компонентов

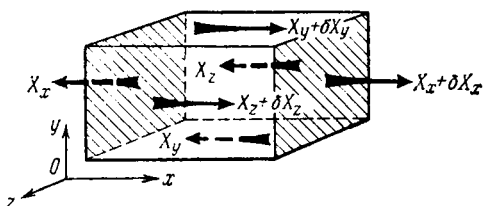


Рис. 93.

напряжения, из которых, как мы видели, только шесть могут быть заданы произвольно. Шесть независимых компонентов напряжения следующие:

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x.$$

В общем случае напряженного состояния каждый из этих шести компонентов напряжения меняется от точки к точке напряженного тела. До сих пор мы еще не пытались исследовать характер этого изменения и определяющие его условия.

Ясно, что некоторые условия должны быть наложены в силу динамических соображений. Это потому, что движение каждого элементарного кубика, вырезанного из тела, будет зависеть, согласно обычным законам динамики, от сил, действующих на него в результате напряжений, передающихся по его граням. Рассмотрим, например, проекцию ускорения на ось Ox параллелепипеда с размерами a, b, c в направлениях Ox, Oy, Oz . Это ускорение, в общем случае, является (1) следствием действия массовых сил (таких как, например,

сила тяжести), которые действуют на каждый элемент объема параллелепипеда, и (2) следствием напряжений, действующих на его гранях. Из девяти компонентов напряжения только три, а именно X_x , X_y и X_z могут сообщать параллелепипеду ускорение в направлении Ox . Сначала рассмотрим действие X_x .

Грани параллелепипеда, на которых действует этот компонент напряжения отмечены на рисунке штриховкой. Площади обеих граней одинаковы и равны (bc) .

Напряжения, действующие на этих гранях, очевидно, вызывают противоположно направленные силы. Неуравновешенная сила в проекции на ось Ox возникнет вследствие приращения величины напряжения на правой грани параллелепипеда по сравнению с его величиной на левой грани. Если интенсивность рассматриваемого напряжения на левой грани обозначить через X_x , а интенсивность на правой грани через $(X_x + \delta X_x)$ (см. рисунок), то величина неуравновешенной силы будет:

$$\delta X_x \times bc. \quad (I)$$

Если a можно считать малой величиной, то по формуле Тейлора напишем:

$$\delta X_x = a \frac{\partial X_x}{\partial x} + (\text{члены со второй и высшими степенями } a). \quad (II)$$

Мы употребляем знак частной производной, потому что в общем случае X_x является функцией всех трех координат x , y и z , а изменение происходит только в направлении Ox (см. рис. 93).

Если размеры параллелепипеда a , b и c достаточно малы, то мы, как и в предыдущих параграфах, можем считать, что его плотность постоянна и равна ρ . Таким образом масса параллелепипеда будет равна ρabc . Ускорение, вызванное неуравновешенной силой (I), равно:

$$\frac{\delta X_x \times bc}{\rho abc} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + (\text{члены с первой и высшими степенями } a) \right].$$

Последнее выражение получено после подстановки (II).

Если неограниченно уменьшать размеры параллелепипеда, то в пределе для ускорения вследствие действия компонента напряжения X_x получится выражение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial X_x}{\partial x}.$$

Аналогичное исследование показывает, что напряжения X_y и X_z вызывают соответственно ускорения $\frac{1}{\rho} \frac{\partial X_y}{\partial y}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial X_z}{\partial z}$. Пусть величина массовой силы будет такова, что, действуя изолированно, она сообщит параллелепипеду ускорение, проекция которого на ось Ox равна X . Суммарное действие массовой силы и компонентов напряжения X_x , X_y , X_z должно сообщить параллелепипеду ускорение, проекция которого на ось Ox обозначена через f_x и по величине равна

$$f_x = X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right). \quad (III)$$

Подобным образом можно вычислить и другие проекции ускорения, т. е. f_y — проекцию ускорения на ось Oy и f_z — проекцию ускорения на ось Oz .

Таким образом мы получаем три уравнения движения в напряжениях. Одно из них уравнение (III), а два других по своей форме ему подобны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= \rho f_x \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= \rho f_y, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho f_z. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Если тело покоится, т. е. f_x , f_y , f_z в уравнениях (16) равны нулю, то мы имеем три уравнения равновесия в напряжениях. Далее мы часто будем сталкиваться с такими

случаями, в которых массовые силы не действуют, тогда уравнения равновесия в напряжениях принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заметим, что уравнения (17) удовлетворяются любым равномерно напряженным состоянием, т. е. состоянием, в котором X_x, \dots не зависят от x, y, z . И еще заметим, что, если уравнения (16) удовлетворяются при f_x, f_y, f_z равных нулю, то массовые силы X, Y, Z уравниваются поверхностными силами, приложенными к границе тела.

Граничные условия

286. Поставим общую задачу. Для тела любой заданной формы следует определить напряженное состояние, вызванное действием данных внешних сил или заданием определенных смещений на поверхности тела. Для решения этой задачи нужно найти значения всех шести независимых компонентов напряжения $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ в каждой точке тела. Компоненты напряжения в каждой точке тела удовлетворяют уравнениям (16) или (17). В каждой точке границы тела, если заданы поверхностные напряжения, компоненты напряжения должны быть такими, чтобы X_v, Y_v, Z_v имели заданные значения. Для X_v, Y_v, Z_v , согласно (7), обозначив через l, m, n направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела, получим выражения

$$\left. \begin{aligned} X_v &= lX_x + mX_y + nX_z, \\ Y_v &= lY_x + mY_y + nY_z, \\ Z_v &= lZ_x + mZ_y + nZ_z. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Направляющие косинусы l, m, n мы знаем и, таким образом, имеем три соотношения, которым должны удовлетворять компоненты напряжения в каждой точке границы тела.

Эти соотношения при заданных X_v , Y_v , Z_v являются граничными условиями нашей задачи. В задачах, связанных с равновесием тела и в случае отсутствия массовых сил, шесть независимых компонентов напряжения в каждой внутренней точке тела связаны тремя уравнениями в напряжениях (17), а в каждой точке поверхности тела связаны тремя граничными условиями (18).

Эти условия только достаточны для определения трех независимых величин. Поэтому задача о напряженном состоянии неразрешима без привлечения других соотношений. Нужные нам добавочные соотношения, точно так же, как в простейших примерах главы I, § 2, мы должны искать в теории деформаций.

Функции напряжений

287. Если в каждой точке тела шесть независимых величин связаны тремя уравнениями равновесия (17), то, по видимому, их можно выразить как функции трех независимых функций координат точки. Такие функции называются функциями напряжения. Были предложены две системы таких функций. Система Максвелла¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2}, & Y_y &= \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x^2}, & Z_z &= \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2}, \\ Y_z &= -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial z}, & Z_x &= -\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \partial x}, & X_y &= -\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Система Морера²⁾:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}, & Y_y &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}, & Z_z &= \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y}, \\ Y_z &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right), \\ Z_x &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right), \\ X_y &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

¹⁾ J. C. Maxwell, *Edin. R. S. Trans.*, 26 (1870) или *Scientific Papers*, 2, 162.

²⁾ G. Morera, *Acad. Lincei Rend.* (Ser. 5), 1 (1892).

Легко проверить, что обе системы удовлетворяют уравнениям (17).

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ VIII

Применение круговой диаграммы Мора к вопросу о прочности материала

288. Теории, предложенные различными авторами, для выяснения условий, определяющих переход материалов за предел пропорциональности кратко изложены в дополнении к главе IV. Там было показано, что вычисленный для данного материала, подверженного данному сложному напряженному состоянию, коэффициент безопасности будет различным в зависимости от того, какая из теорий прочности принята. В дополнении к главе IV мы упомянули о следующих принадлежащих различным авторам теориях прочности: теории максимального напряжения, максимальной деформации, максимального касательного напряжения или максимальной разности напряжений и максимальной упругой энергии деформации.

Общей чертой всех этих теорий является то, что критерий прочности сохраняется, если изменить знак напряжения. Таким образом, если мы возьмем простейший пример, то из них будет следовать, что предельное напряжение имеет одну и ту же величину при растяжении и при сжатии. Этот вывод в общем случае противоречит эксперименту, и следовательно, теории нуждаются в пересмотре и усовершенствовании. Теория Мора¹⁾ представляет собой попытку обобщения теории максимальной разности напряжений с тем, чтобы устранить это противоречие.

Теория прочности Мора

289. В основе теории максимальной разности напряжений лежит предположение о том, что как только на какой-нибудь плоскости касательное напряжение достигает некоторой предельной величины, так начинает замечаться отклонение от

¹⁾ O. Mohr, «Die Elastizitätsgrenze und der Bruch eines Materials». *Zeitsch. d. Ver. Deutsch Ing.* (1900), стр. 1530.

закона Гука. В теории Мора это предположение видоизменяется и принимается, что предельное касательное напряжение может быть меньше или больше в зависимости от величины нормального напряжения, действующего вместе с ним. Характер этой зависимости должен определяться экспериментально. Однако постулируется, что *из всех плоскостей, на которых напряжение имеет один и тот же нормальный компонент, переход за предел пропорциональности начнется с той, которая подвергается действию наибольшего касательного напряжения.*

Таким образом, мы имеем дело с величиной, *но не направлением* наибольшего касательного напряжения, связанного с данным нормальным напряжением. Обратимся к рис. 92 и увидим, что круговая диаграмма Мора дает как раз те сведения, которые нам нужны. Мы доказали (§ 282), что нормальное напряжение, представляемое на этом рисунке отрезком ON , на различных плоскостях будет связано с касательными напряжениями, имеющими все значения, заключенные между величинами, представляемыми отрезками PN и RN . Таким образом RN даст искомое максимальное значение касательного напряжения. И если мы имеем дело с таким напряженным состоянием, в котором $p_1 > p_2 > p_3$, то нам нужно только построить полуокружность ERA , т. е. мы можем пренебречь промежуточным напряжением p_2 .

Приложение к экспериментальным результатам

290. Если мы проводим опыт на простое растяжение, то p_2 и p_3 равны нулю.

Круговая диаграмма, построенная для того, чтобы представлять условия перехода за предел пропорциональности, представляет собой круг A на рис. 94, где OK изображает предельные растягивающие напряжения f_T . Если мы проводим опыт на простое сжатие, то p_1 отрицательно, и круговая диаграмма представляет собой круг B . Если мы проводим опыт на кручение (простой сдвиг, т. е. два главных напряжения равны по величине и противоположны по знаку), то круговая диаграмма представляет собой круг C . Согласно теории максимальной разности напряжений в ее первоначальной форме, отклонение от

закона Гука произойдет тогда, когда максимальное касательное напряжение достигнет определенной величины, при этом все три круга имеют один и тот же радиус. Предложенная Мором обобщенная теория не исключает больше возможности того, что круги могут иметь различные радиусы. Это получается в силу предположения о том, что нормальный компонент напряжения имеет некоторое определяющее влияние.

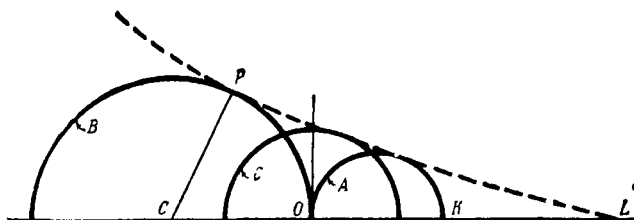


Рис. 94.

С помощью теории Мора мы можем пойти несколько дальше. Ясно, что круги, построенные для того, чтобы представлять другие предельные положения допускаемых напряжений, как и следует ожидать, будут касаться одной и той же огибающей кривой. Эту огибающую можно достаточно точно построить, если известны круги *A*, *B* и *C*. Точка касания некоторого круга с этой огибающей, очевидно, определяет плоскость, на которой произойдет переход за предел пропорциональности в напряженном состоянии, представленном этим кругом. Так, на рис. 94 через *P* обозначена точка касания огибающей кривой, показанной пунктирной линией, с кругом *B*. Переход за предел пропорциональности при простом сжатии прежде всего произойдет на плоскостях, нормали к которым составляют угол $\frac{1}{2} PCO$ с линией действия силы.

291. Очевидно, что для установления теории Мора для какого-нибудь одного определенного материала нужно очень большое число экспериментальных работ. Теория является логическим развитием правдоподобных предположений, устраняющих трудности, упомянутые в § 288. Нельзя ничего возразить против замечания о том, что огибающая кривая на

рис. 94 пересекает горизонтальную ось в точке L и тем самым указывает конечный предел упругости для «гидростатического растяжения», но налево огибающая поднимается сколь угодно высоко и таким образом не указывает предела упругости в случае действия гидростатического давления.

* Другие приложения круговой диаграммы Мора

291А. Вернемся к § 280, где мы уже показали, что длины ON , PN на рис. 92 связаны с p_1 (представленным отрезком OA) и p_2 (представленным отрезком OB) уравнениями:

$$ON = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \cos 2\theta,$$

$$PN = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \sin 2\theta,$$

и поэтому представляют собой X'_x , $-X'_y$, данные уравнениями (14). Обратно, если нам заданы значения компонентов напряжения X'_x , X'_y , для двух направлений в плоскости (x, y), наклоненных друг к другу под известным углом, то мы можем использовать круговую диаграмму для того, чтобы найти значения главных напряжений. Таким образом, в § 136 гл. IV нам заданы значения p_1 , q и $p_2, -q$ для двух направлений, образующих между собой угол в 90° (p_1, p_2 в обозначениях главы IV означают нормальные компоненты напряжения, с которыми связаны касательные напряжения $q, -q$). Как пример рассмотрим этот случай.

Нам пока неизвестны углы θ_1, θ_2 , которые наши направления составляют с главными напряжениями, но мы знаем, что $2(\theta_1 - \theta_2) = 180^\circ$. Следовательно, p_1, p_2 на круговой диаграмме лежат на двух противоположных концах диаметра. Положение S нам известно, и можно провести все построение круговой диаграммы. Очевидно, что

$$OC = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad CN_1 = CN_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \quad P_1N_1 = P_2N_2 = q,$$

следовательно,

$$CP_1^2 = CP_2^2 = \frac{1}{2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4q^2},$$

и OA, OB представляют собой \bar{p}_1, \bar{p}_2 , данные формулами (29) главы IV, а CP_1, CP_2 представляют собой \bar{q}_1, \bar{q}_2 , данные формулами (35) той же главы.

Общий случай напряженного состояния немного сложнее, читатель может сам разобрать его. Предложим читателю исследовать также случай косоугольного изгиба (§ 172)¹⁾.

¹⁾ Cp. H. W. Swift, *The Engineer*, 144 (1927), 227, 349.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Деформации, выраженные как функции смещений

292. Мы предположили, что материал непрерывен. Это предположение, как было замечено в § 260 предшествующей главы, затрудняет формулирование точных понятий о *напряжениях*, и в то же самое время оно вносит упрощения в теорию *деформаций*. Идеальный материал подобен аморфному желе и можно считать, что он занимает весь объем, лежащий внутри некоторой непрерывной поверхности¹⁾, являющейся границей рассматриваемого тела. Итак, в любой точке недеформированного тела, определяемой координатами x, y, z , помещается некоторая частица материала. Если тело под действием приложенных сил деформируется, то эта частица претерпевает смещения u, v, w в направлении x, y и z . Можно сказать, что точке в деформированной конфигурации соответствует некоторая точка в недеформированной конфигурации в том смысле, что в обоих случаях они относятся к одной и той же частице. Таким же образом можно сказать, что линии в обоих случаях соответствуют друг другу, если они состоят из ряда соответствующих точек. Предположение о непрерывности позволяет нам считать u, v и w непрерывными функциями x, y, z , производные которых, как мы сейчас покажем, определяют деформацию. В реальных материалах, имеющих молекулярную структуру, предположение такого рода было бы незаконно.

293. В настоящей главе мы будем предполагать, что *смещения u, v, w всюду настолько малы, что квадратами и произведениями их производных можно пренебречь по сравнению с величинами самих производных.*

¹⁾ Или поверхностей.

Приняв это допущение, мы сначала найдем выражение для относительного удлинения, возникшего вследствие деформации отрезка PQ , который соединяет две частицы P и Q тела.

Координаты точек, в которых находятся частицы P и Q в недеформированном теле обозначим через

$$x_P, y_P, z_P \text{ и } x_Q, y_Q, z_Q.$$

Смещения u, v, w частиц P и Q обозначим соответственно через

$$u_P, v_P, w_P \text{ и } u_Q, v_Q, w_Q.$$

Координаты частиц P и Q после деформации будут

$$x_P + u_P, y_P + v_P, z_P + w_P \text{ и } x_Q + u_Q, y_Q + v_Q, z_Q + w_Q.$$

Формула (13) главы II § 43 показывает, что относительное удлинение PQ вследствие деформации дается следующим выражением

$$e_{PQ} = \frac{L' - L}{L} = \frac{1}{L^2} [(x_Q - x_P)(u_Q - u_P) + (y_Q - y_P)(v_Q - v_P) + (z_Q - z_P)(w_Q - w_P)], \quad (I)$$

где через L обозначена недеформированная длина PQ , т. е.

$$L^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2. \quad (II)$$

Через l, m, n обозначим направляющие косинусы PQ в недеформированной конфигурации, т. е.

$$l = \frac{x_Q - x_P}{L}, m = \frac{y_Q - y_P}{L}, n = \frac{z_Q - z_P}{L}. \quad (III)$$

Равенство (I) теперь можно записать в форме

$$e_{PQ} = \frac{1}{L} [l(u_Q - u_P) + m(v_Q - v_P) + n(w_Q - w_P)]. \quad (IV)$$

По формуле Тейлора с точностью до первых степеней величин $(x_Q - x_P), \dots$ мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_Q - u_P &= (x_Q - x_P) \frac{\partial u}{\partial x} + (y_Q - y_P) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ &+ (z_Q - z_P) \frac{\partial u}{\partial z} = L \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \text{[последнее равенство имеет место в силу подста-} \\ \text{новки разностей } (x_Q - x_P), \dots \text{ из (III).]} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

аналогично:

$$v_Q - v_P = L \left(l \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

и

$$w_Q - w_P = L \left(l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Подставив выражения (V) в (IV), мы получим:

$$e_{PQ} = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \\ + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + nl \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Это и есть искомое выражение относительного удлинения PQ . Формула (1) становится точной, если L бесконечно мало, так как тогда выражения (V), в которых мы пренебрегали членами порядка L^2, L^3, \dots являются точными выражениями для $(u_Q - u_P), \dots$

294. Рассмотрим специальный случай. Пусть PQ направлено параллельно Ox . Тогда $y_Q = y_P$ и $z_Q = z_P$. В равенствах (III):

$$l = 1, \quad m = n = 0.$$

Подставив эти значения в формулу (1), мы получим:

$$e_{PQ} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так выражается относительное удлинение отрезка, параллельного Ox . Обозначив это удлинение через e_{xx} , мы можем написать:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

Двойной индекс указывает на то, что в деформации, характеризуемой e_{xx} , плоскости, перпендикулярные оси x , смещаются одна относительно другой в направлении Ox . Этот тип деформации описан в главе (IV) § 115 и назван «растяжением» или удлинением в направлении Ox .

Таким же путем можно получить аналогичные по форме выражения:

$$\left. \begin{aligned} e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

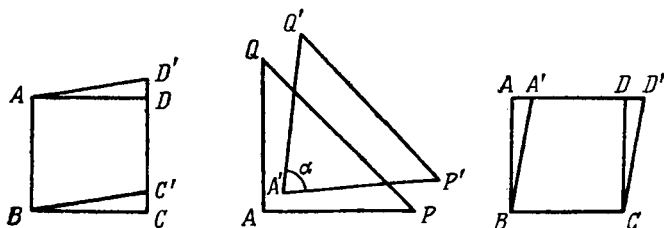


Рис. 95.

Это вызванные деформацией относительные удлинения прямых, первоначально параллельных соответственно направлениям Oy , Oz .

295. Таким образом, мы определили физический смысл величин $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$, которые являются коэффициентами при l^2 , m^2 , n^2 в формуле (1). Выясним, что представляют собой $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, ... Рассмотрим деформацию, являющуюся следствием искажения первоначально прямоугольного треугольника QAP (рис. 95). Стороны AP , AQ треугольника первоначально имеют одинаковые длины, равные L . Очевидно, что $QP = L\sqrt{2}$.

Длина QP после деформации определится с помощью формулы (1):

$$\begin{aligned} Q'P' &= L\sqrt{2}(1 + e_{PQ}) = \\ &= L\sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (VI)$$

так как в этом случае мы имеем:

$$l = \frac{x_Q - x_P}{QP} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{y_Q - y_P}{QP} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = 0.$$

Длины AP и AQ после деформации соответственно равны:

$$A'P' = L \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{и} \quad A'Q' = L \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \quad (\text{VII})$$

Если через α обозначить угол QAP после деформации, то мы получим очевидное соотношение:

$$Q'P'^2 = A'Q'^2 + A'P'^2 - 2 A'Q' \cdot A'P' \cos \alpha. \quad (\text{VIII})$$

Подставим (VI) и (VII) в соотношение (VIII) и пренебрежем, согласно допущению в § 293, квадратами и произведениями производных u , v и w . После этого при принятой степени точности получим:

$$\cos \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{IX})$$

Согласно допущению § 293, u , v малы, т. е. $\cos \alpha$ тоже мал и поэтому α близко к $\frac{1}{2}\pi$. Обозначим через γ *уменьшение* первоначально прямого угла QAP (рис. 95) после деформации. Так как γ (*измеренное здесь в радианах*) достаточно мало, то мы с хорошим приближением можем принять, что:

$$\cos \alpha = \sin \gamma = \gamma.$$

Итак, если мы рассмотрим:

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4)$$

то можем сказать, что величина e_{xy} выражает (в радианах) уменьшение, вследствие деформации, первоначально прямого угла между двумя прямыми, проходящими через рассматриваемую точку и до деформации параллельными направлениям Ox и Oy . Другими словами, величина e_{xy} характеризует

угловую деформацию или «сдвиг». Аналогичную интерпретацию можно дать:

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обозначения

296. Заметим, что обозначения (e_{xy}, \dots) , использованные здесь для того, чтобы характеризовать изменение углов между определенными отрезками, соответствуют обозначениям, использованным в формулах (2) и (3) для того, чтобы характеризовать удлинения (e_{xx}, \dots) .

В § 294 мы установили, что e_{xx} представляет собой деформацию, в которой плоскости, первоначально перпендикулярные оси x , смещаются одна относительно другой по направлению Ox . Система обозначений будет последовательной, если e_{xy} будут характеризовать деформацию, в которой плоскости, первоначально перпендикулярные оси x , смещаются одна относительно другой в направлении Oy . Смещение такого рода вызывает изменение угла, обозначенное нами как раз через $e_{xy} (= \gamma)$. Это схематично иллюстрируется на рис. 95 слева. На этой схеме CD является следом плоскости, первоначально перпендикулярной Ox и перемещающейся в направлении Oy относительно другой плоскости, след которой BA . Через $C'BC$ обозначен угол, получившийся в результате изменения первоначально прямого угла ABC .

Очевидно, что символ e_{yx} может быть использован для того, чтобы обозначить перемещение, характер которого иллюстрируется на рис. 95 справа. На этой новой схеме AD представляет собой след плоскости, первоначально перпендикулярной оси y и перемещающейся относительно BC в направлении Ox . Оба рода перемещений тождественны по отношению к своему влиянию на угол ABC , так как схемы справа и слева на рис. 95 показывают, что от одного случая можно перейти к другому с помощью поворота тела, как абсолютно твердого. Итак, если X_y и Y_x , как было показано

в VIII главе, представляют собой различные компоненты, напряжения, равные только по величине (§ 270), то в теории деформации совсем безразлично, какой из символов e_{xy} или e_{yx} использовать для того, чтобы характеризовать величину *одной и той же* деформации (деформации «сдвига»).

297. Осталось установить правило *знаков*. Так как мы произвольно считали, что растягивающее напряжение является положительным нормальным напряжением, то мы для того, чтобы быть последовательными, должны считать удлинение характеризуемое величиной e_{xx} положительным видом деформации. Это значит, что e_{xx} будет характеризовать положительную деформацию тогда, когда плоскость, расположенная на стороне больших x движется в направлении Ox относительно плоскости, расположенной на стороне меньших x . Также ради последовательности мы должны считать, что e_{xy} характеризует положительную деформацию тогда, когда плоскость, расположенная на стороне больших x , движется в направлении Oy относительно плоскости, расположенной на стороне меньших x . Таким образом e_{xy} характеризует положительную деформацию тогда, когда e_{xx} выражает *уменьшение* угла между отрезками, первоначально направленными по Ox и Oy . Все введенные нами обозначения теории деформации не противоречат сами себе и находятся в согласии с содержанием предшествующих глав.

В § 269 мы отметили, что существует большое разнообразие в обозначениях компонентов напряжения. То же наблюдается и в отношении символов, обозначающих компоненты деформации. Однако последнее имеет меньшее значение, так как задачи теории упругости обычно решаются с помощью функций напряжений (§ 287) или (что более распространено) в компонентах смещения. Пирсон пользовался символами $s_x, \dots, \sigma_{yz}, \dots$ для величин, которые мы обозначили здесь также, как в «Математической теории упругости» Лява, через $e_{xx}, \dots, e_{yz}, \dots$. На континенте и в Америке обычно обозначают их через $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ ¹⁾

Преобразование компонентов деформации

298. Мы нашли физическое истолкование шести величин

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} \quad (6)$$

которые известны как компоненты деформации.

¹⁾ Для сравнения см. § 269.

Три из них, а именно

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}$$

представляют собой удлинения или растяжения; остальные три, а именно

$$e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$$

сдвиги или угловые деформации. Если (2), (3), (4) и (5) подставить в формулу (1), то мы получим общее выражение для удлинения какого-нибудь отрезка PQ в следующем виде:

$$e_{PQ} = l^2 e_{xx} + m^2 e_{yy} + n^2 e_{zz} + 2mne_{yz} + 2nle_{zx} + 2lme_{xy}. \quad (7)$$

Таким образом, удлинение какого-нибудь отрезка, проходящего через данную точку, может быть выражено как функция шести компонентов деформации в этой точке.

299. Исследуем изменение вследствие деформации угла между двумя отрезками, заданными в начальной (недеформированной) конфигурации. Если мы вернемся к § 293, то сможем заметить, что направляющие косинусы отрезка PQ , которые в недеформированной конфигурации были

$$l_1 = \frac{x_Q - x_P}{L_1}, \quad m_1 = \frac{y_Q - y_P}{L_1}, \quad n_1 = \frac{z_Q - z_P}{L_1}, \quad (I)$$

после деформации принимают значения:

$$l'_1 = \frac{x_Q - x_P + u_Q - u_P}{L'_1}, \quad m'_1 = \frac{y_Q - y_P + v_Q - v_P}{L'_1}, \quad (II)$$

$$n'_1 = \frac{z_Q - z_P + w_Q - w_P}{L'_1}.$$

В этих формулах через L_1 и L'_1 обозначена длина PQ соответственно до и после деформации.

Разлагая $(u_Q - u_P), \dots$, как и в § 293, в ряд Тейлора, мы из (II) получим:

$$L'_1 l'_1 = L_1 \left\{ l_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial u}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (1 + e_1)l'_1 &= l_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial u}{\partial y} + n_1 \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \text{аналогично} \\ (1 + e_1)m'_1 &= l_1 \frac{\partial v}{\partial x} + m_1 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_1 \frac{\partial v}{\partial z}, \\ (1 + e_1)n'_1 &= l_1 \frac{\partial w}{\partial x} + m_1 \frac{\partial w}{\partial y} + n_1 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

В этом параграфе мы вводим индекс 1, потому что вместе с отрезком PQ мы должны рассматривать другой отрезок, проходящий через точку P (скажем, PR). Величины l'_1 , m'_1 , n'_1 в равенствах (III) представляют собой направляющие косинусы отрезка PQ после деформации. До деформации его направляющие косинусы были l_1 , m_1 , n_1 . Через e_1 здесь обозначено «удлинение» в направлении самого отрезка PQ . Аналогично для отрезка (PR) мы получим:

$$\left. \begin{aligned} (1 + e_2)l'_2 &= l_2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_2 \frac{\partial u}{\partial z}, \\ (1 + e_2)m'_2 &= l_2 \frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_2 \frac{\partial v}{\partial z}, \\ (1 + e_2)n'_2 &= l_2 \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial w}{\partial y} + n_2 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

где через l'_2 , m'_2 , n'_2 обозначены направляющие косинусы отрезка PR после деформации, через l_2 , m_2 , n_2 — его направляющие косинусы до деформации, а через e_2 — удлинение в направлении отрезка PR .

300. Угол между PQ и PR известен до и после деформации, и пусть равен соответственно χ и χ' , где

$$\left. \begin{aligned} \cos \chi &= l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, \\ \cos \chi' &= l'_1 l'_2 + m'_1 m'_2 + n'_1 n'_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставив сюда (III) и (IV), мы найдем, что

$$\begin{aligned} (1 + e_1)(1 + e_2) \cos \chi' &= \left\{ l_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ &+ n_1 \frac{\partial u}{\partial z} \left. \right\} \left\{ l_2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \text{два аналогичных} \\ &\text{члена} = \left\{ l_1 l_2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ &\left. + (l_1 n_2 + l_2 n_1) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \text{два аналогичных члена.} \end{aligned}$$

Если мы пренебрежем членами второго порядка малости, то получим:

$$\begin{aligned} \cos \chi' &= \cos \chi + 2 \left(l_1 l_2 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_1 n_2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ &+ (m_1 n_2 + m_2 n_1) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + (n_1 l_2 + n_2 l_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ &+ (l_1 m_2 + l_2 m_1) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (V)$$

Если мы теперь предположим, что PQ и PR первоначально перпендикулярны друг другу, то $\cos \chi'$ будет выражать угловую деформацию или «сдвиг», который можно обозначить через $e_{x_1 x_2}$. В этом случае $\cos \chi = 0$ и из (V) следует, что $\cos \chi'$ мал. С точностью до величин первого порядка малости мы имеем:

$$\begin{aligned} e_{x_1 x_2} &= \cos \chi' = 2l_1 l_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \\ &= 2(l_1 l_2 e_{xx} + m_1 m_2 e_{yy} + n_1 n_2 e_{zz}) + \\ &+ (m_1 n_2 + m_2 n_1) e_{yz} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) e_{zx} + \\ &+ (l_1 m_2 + l_2 m_1) e_{xy}. \end{aligned} \quad (9)$$

301. С помощью соотношений (7) и (9) компоненты деформации можно преобразовать от одной системы прямоугольных осей координат к другой. Если x, y, z — старые, а x', y', z' — новые координаты, то мы можем написать

следующую таблицу направляющих косинусов координатных осей:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Для $e_{x'x'}$ мы можем получить выражение из соотношения (7), если подставим в него l_1, m_1, n_1 вместо l, m, n . Из соотношения (9) получим выражение для $e_{x'y'}$. Другие компоненты деформации, отнесенные к x', y', z' , можно выразить подобным же образом.

Пример

1. Показать, что написанные ниже величины являются инвариантами (ср. § 275) по отношению к любому ортогональному преобразованию прямоугольных осей координат ¹⁾:

$$(I) e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \text{ («объемное расширение», ср. § 117);}$$

$$(II) e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy} - \frac{1}{4}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2);$$

$$(III) e_{xx}e_{yy}e_{zz} + \frac{1}{4}(e_{yz}e_{zx}e_{xy} - e_{xx}e_{yz}^2 - e_{yy}e_{zx}^2 - e_{zz}e_{xy}^2).$$

Главные удлинения

302. Сформулируем и докажем теорему, аналогичную теореме о главных напряжениях, рассмотренной в § 276 гл. VIII. Итак, докажем, что *каково бы ни было в некоторой точке деформированное состояние, всегда можно найти три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через эту точку, которые были взаимно перпендикулярными также и до деформации* ²⁾. Эти прямые являются направлениями, для которых удлинения имеют стационарные значения (*максимум, минимум или минимакс*). Стационарные

¹⁾ Ляв, цит. соч. § 13 (с). Смотри примечание на стр. 659.

²⁾ Предполагается, что прямые определяются частицами, через которые они проходят. Ср. § 292.

значения удлинений называются главными удлинениями в рассматриваемой точке.

Это основная теорема теории деформаций. Из нее следует, что в том случае, когда направление главных удлинений безразлично, наиболее общее деформированное состояние можно определить, задав значения трех главных удлинений. Для того чтобы задать полностью деформированное состояние, мы должны так же, как при определении напряженного состояния, задать шесть величин.

303. Доказательство нашей теоремы в общих чертах аналогично доказательству соответствующей теоремы из теории напряжений (гл. VIII, §§ 277—278).

Мы получили выражение:

$$e_{PQ} = l^2 e_{xx} + m^2 e_{yy} + n^2 e_{zz} + mne_{yz} + nle_{zx} + lme_{xy}, \quad (7) \text{ bis}$$

которое выражает удлинение как функцию направляющих косинусов l , m , n . Коэффициенты при косинусах e_{xx} , e_{yy} , ... заданы, и следовательно, постоянны. Вспомним, что l , m , n не независимы, так как они удовлетворяют уравнению:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (I)$$

Отсюда, как в главе VIII, § 277, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} l + n \frac{\partial n}{\partial l} &= 0, \\ m + n \frac{\partial n}{\partial m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Если e_{PQ} принимает стационарное значение, то из (7) мы имеем¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial e_{PQ}}{\partial l} = 2le_{xx} + me_{xy} + ne_{xz} + \frac{\partial n}{\partial l} (le_{zx} + \\ &\quad + me_{zy} + 2ne_{zz}), \\ 0 &= \frac{\partial e_{PQ}}{\partial m} = le_{yx} + 2me_{yy} + ne_{yz} + \frac{\partial n}{\partial m} (le_{zx} + \\ &\quad + me_{zy} + 2ne_{zz}). \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

¹⁾ Мы отождествляем e_{xy} с e_{yx} и т. п., согласно § 296.

Исключив из этих условий производные с помощью соотношений (II), мы получим условия достижения стационарного значения для величины e_{PQ} в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{2le_{xx} + me_{xy} + ne_{xz}}{l} &= \frac{le_{yx} + 2me_{yy} + ne_{yz}}{m} = \\ &= \frac{le_{zx} + me_{zy} + 2ne_{zz}}{n} = 2e \text{ (например)}. \end{aligned} \quad (IV)$$

Из условий (IV) мы имеем:

$$\begin{aligned} 2e &= 2e(l^2 + m^2 + n^2) = l(2le_{xx} + me_{xy} + ne_{xz}) + \text{два ана-} \\ &\quad \text{логичных члена} = \\ &= 2\{l^3e_{xx} + m^3e_{yy} + n^3e_{zz} + mne_{yz} + nle_{zx} + lme_{xy}\} = \\ &= 2e_{PQ} \quad [\text{согласно (7)}]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что e в условиях (IV) представляет собой удлинение e_{PQ} , т. е. удлинение в направлении, определяемом направляющими косинусами l, m, n . Нам нужно показать, что решения (IV) существуют.

Напишем (IV) так:

$$\left. \begin{aligned} 2l(e_{xx} - e) + me_{xy} + ne_{xz} &= 0, \\ le_{yx} + 2m(e_{yy} - e) + ne_{yz} &= 0, \\ le_{zx} + me_{zy} + 2n(e_{zz} - e) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Вспомним, что l, m, n , согласно (I), не могут одновременно обращаться в нуль. Отсюда следует, что решение существует тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} 2(e_{xx} - e), & e_{xy}, & e_{xz} \\ e_{yx}, & 2(e_{yy} - e), & e_{yz} \\ e_{xz}, & e_{zy}, & 2(e_{zz} - e) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Это кубическое относительно e уравнение с действительными коэффициентами. Оно имеет, по крайней мере, один действительный корень, например e_1 . Итак, в случае любого из возможных деформированных состояний существует, по крайней мере, одно направление стационарного удлинения. Его можно найти из условий (IV), если заменить в них e на e_1 .

304. Через l_1, m_1, n_1 обозначим направляющие косинусы определенного таким образом направления.

Величины e_1, l_1, m_1, n_1 удовлетворяют соотношениям (V), и мы имеем

$$\left. \begin{aligned} 2l_1(e_{xx} - e_1) + m_1e_{xy} + n_1e_{xz} &= 0, \\ l_1e_{yx} + 2m_1(e_{yy} - e_1) + n_1e_{yz} &= 0, \\ l_1e_{zx} + m_1e_{zy} + 2n_1(e_{zz} - e_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI})$$

Умножим эти уравнения соответственно на l_2, m_2, n_2 и сложим. Через l_2, m_2, n_2 мы обозначаем направляющие косинусы *любого* направления, перпендикулярного e_1 .

Величины l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 удовлетворяют условию ортогональности:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \quad (\text{VII})$$

В силу этого условия мы имеем:

$$\begin{aligned} 2(l_1l_2e_{xx} + m_1m_2e_{yy} + n_1n_2e_{zz}) + (m_1n_2 + m_2n_1)e_{yz} + \\ + (n_1l_2 + n_2l_1)e_{zx} + (l_1m_2 + l_2m_1)e_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, согласно (9), показывает, что

$$e_{x_1x_2} = 0.$$

Здесь Ox_1, Ox_2 — направления, определяемые соответственно направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 .

Ox_2 может иметь *любое* направление, перпендикулярное Ox_1 , и мы получаем, что *все* направления, первоначально перпендикулярные Ox_1 , остаются перпендикулярными Ox_1 и после деформации.

305. Отсюда следует, что если мы изменим оси координат и направим Ox по направлению главного удлинения e_1 , то компоненты деформации e_{xy}, e_{xz} в новой системе координат будут равны нулю. Уравнения (V) в новой системе координат запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} l(e_1 - e) &= 0, \\ 2m(e_{yy} - e) + ne_{yz} &= 0, \\ me_{zy} + 2n(e_{zz} - e) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII})$$

Отсюда мы получаем *или* уже найденное решение:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} e = e_1, \quad m = n = 0, \quad l = 1 \\ l = 0, \quad m^2 + n^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

Этими значениями удовлетворяется первое из уравнений (VIII). Второе и третье дают:

$$\begin{vmatrix} 2(e_{yy} - e), & e_{zy} \\ e_{zy}, & 2(e_{zz} - e) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$e^2 - (e_{yy} + e_{zz})e + e_{yy}e_{zz} - \frac{1}{4}e_{yz}^2 = 0. \quad (\text{X})$$

Это уравнение имеет следующие корни:

$$e_2, e_3 = \frac{1}{2}(e_{yy} + e_{zz}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(e_{yy} - e_{zz})^2 - e_{yz}^2}. \quad (\text{XI})$$

Оба корня действительны.

Итак, во всех случаях мы можем найти еще два направления главных удлинений. Так же, как в § 304, мы можем показать, что они перпендикулярны друг другу как до, так и после деформации. Таким образом, теорема, сформулированная в § 302, доказана.

Компоненты деформации, выраженные как функции главных удлинений

306. Если оси Ox , Oy , Oz взять так, чтобы они совпадали с направлениями главных удлинений e_1 , e_2 , e_3 , то формулы (7) и (9) примут более простой вид:

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= l^2 e_1 + m^2 e_2 + n^2 e_3, \\ e_{x'y'} &= 2(l'l' + mm'e_2 + nn'e_3). \end{aligned}$$

Через l , m , n и l' , m' , n' обозначены направляющие косинусы каких-нибудь двух перпендикулярных направлений x' и y' .

Деформированное состояние так же, как и напряженное состояние, можно описать с помощью некоторой поверхности, называемой поверхностью деформации¹⁾.

¹⁾ Ляв, цит. соч., § 11. Теорему § 302 можно обосновать, пользуясь известными результатами теории поверхностей второго порядка.

К компонентам деформации можно применять также круговую диаграмму Мора, рассмотренную в главе VIII, §§ 280, 291А. Здесь мы этим не будем заниматься, а перейдем к выводу дифференциальных соотношений, которые должны существовать между шестью компонентами деформаций.

Компоненты вращения

307. Прежде всего нам нужно ввести три новые величины ω_x , ω_y , ω_z , которые определяются выражениями:

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (11)$$

Смысл этих величин будет ясен, если мы рассмотрим рисунок 95 § 295.

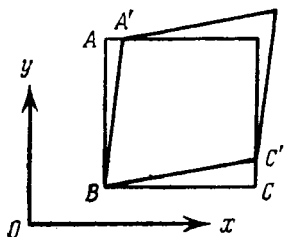


Рис. 96.

В том параграфе мы показали, что два различных типа деформаций, а именно, показанные на левой и на правой сторонах рис. 95, имеют одно и то же значение сдвига. Оба деформированных состояния станут деформированными состояниями вполне тождественными, если мы произведем поворот тела, как абсолютно твердого.

На рис. 96 изображена деформация, имеющая промежуточный тип между деформациями, показанными на рисунке 95.

Изучая этот тип деформации более внимательно, мы видим, что угол сдвига (γ) состоит из двух приращений углов, а именно:

$$\begin{aligned} & \angle ABA', \text{ который, очевидно, выражается через } \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \text{и} & \angle CBC', \text{ который, очевидно, выражается через } \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\gamma = \angle ABA' + \angle CBC' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy} \text{ [согласно (4)].}$$

Теперь рассмотрим поворот элементарной частицы около оси z , изображенной на рисунке 96. Согласно рис. 96, мы должны совершить поворот против часовой стрелки. Сто- рона BC , рассматриваемой нами частицы, поворачивается против часовой стрелки на угол CBC' , а другая ее сторона BA на угол ABA' (т. е. по часовой стрелке). Средний угол поворота около Oz равен:

$$\frac{1}{2} (\angle CBC' - \angle ABA') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) = \omega_z$$

[согласно определению (11)].

Таким образом, из (11) мы видим, что ω_x , ω_y , ω_z пред- ставляют собой компоненты вращения элементарной частицы около осей, соответственно параллельных осям Ox , Oy , Oz . Когда смещения, или деформации, таковы, что $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, то они называются безвихревыми.

Пример

2. Показать, что ниже написанные величины являются инвари- антами (§ 275) по отношению к любому преобразованию от одной системы прямоугольных осей координат к другой¹⁾:

$$(I) \quad \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2;$$

$$(II) \quad e_{xx}\omega_x^2 + e_{yy}\omega_y^2 + e_{zz}\omega_z^2 + e_{yz}\omega_y\omega_z + e_{zx}\omega_z\omega_x + e_{xy}\omega_x\omega_y;$$

$$(III) \quad e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + 2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).$$

Тождественные соотношения между компонентами деформации

308. Из выражений (2), (3), (4) и (5) мы видим, что шесть компонентов деформации можно выразить как функ- ции трех компонентов смещения. Отсюда следует, что они не могут быть совершенно независимы друг от друга. Вы- ведем соотношения, которым они должны удовлетворять.

Из выражения

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \quad (4) \text{ bis}$$

¹⁾ Ляв, цит. соч., § 13 (d) и (e). Сматри примечание на стр. 660.

и третьего из (11) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial u}{\partial y} &= e_{xy} - 2\omega_z, \\ 2 \frac{\partial v}{\partial x} &= e_{xy} + 2\omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Отсюда, так как, согласно (2) и (3),

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e_{xy} - 2\omega_z) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y} e_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} (e_{xy} + 2\omega_z) &= 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial x} e_{yy}. \end{aligned} \right\}$$

И мы имеем выражения

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} e_{xy} - 2 \frac{\partial}{\partial y} e_{xx}, \\ 2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} e_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x} e_{yy}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Далее с помощью (11) получим:

$$2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

(так как второй и третий члены в этом выражении уничтожаются),

$$= \frac{\partial}{\partial x} e_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} e_{zx} \quad [\text{согласно (5)}]. \quad (III)$$

Выражения (II) и (III) представляют собой три уравнения, из которых ω_z можно исключить дифференцированием. Например, из (II) мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} e_{xy} - 2 \frac{\partial}{\partial y} e_{xx} \right) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \omega_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial}{\partial y} e_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x} e_{yy} \right) \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} e_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e_{xy}, \quad (IV)$$

а из (III) и второго (II) получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial}{\partial y} e_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x} e_{yz} \right) = 2 \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} e_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} e_{zx} \right)$$

или

$$2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} e_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} e_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} e_{xy} \right). \quad (V)$$

Из (III) и первого равенства (II) можно получить другое соотношение типа (V).

Дальнейшие соотношения можно получить, исключая ω_x и ω_y из уравнений, аналогичных (II) и (III). Эти соотношения можно написать сразу с помощью «циклической перестановки». Собирая результаты, мы найдем все шесть соотношений, которым должны удовлетворять компоненты деформации:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, & 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти соотношения известны как условия совместности деформаций.

309. Иногда с помощью простых соображений, например, из соображений симметрии, удается получить выражения для компонентов напряжения, которые, как можно показать, удовлетворяют условиям равновесия и граничным условиям задачи. Выполнение этих условий, как мы заметили в § 286 главы VIII, необходимо, но недостаточно, потому что фактически три условия налагаются на шесть независимых компонентов напряжения. Прежде чем принять некоторое решение в качестве точного решения задачи, мы должны убедиться в возможности существования в материале без начальных напряжений деформаций, вызванных найденными нами напряжениями. Мы должны установить, *совместны ли найденные деформации с существованием в материале однозначных смещений u , v , w* . Уравнения (12) дают возможность провести эту окончательную проверку. Если они удовлетво-

ряются, то мы можем принять наше решение, не вычисляя действительных значений смещений.

В главе V (§§ 155—159) мы получили решение задачи о кручении. Решение удовлетворяло граничным условиям для *круглого* вала. Мы установили, что напряжение в поперечном сечении является чисто касательным, имеет интенсивность:

$$q = C\tau r \quad (I)$$

и направление, перпендикулярное радиусу.

Выберем три взаимно перпендикулярные оси координат Ox , Oy , Oz . Oz направим по оси вала, а Ox и Oy по каким-нибудь двум направлениям, лежащим в плоскости поперечного сечения. Касательное напряжение q можно разложить на два компонента X_z , Y_z , соответственно по направлениям x и y .

Если через θ обозначить угол между осью Ox и радиусом, проведенным в рассматриваемую точку, то из (I) мы получим:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= -q \sin \theta = -C\tau r \sin \theta = -C\tau y, \\ Y_z &= q \cos \theta = C\tau r \cos \theta = C\tau x. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Соответствующие деформации равны.

$$\left. \begin{aligned} e_{xz} &= \frac{X_z}{C} = -\tau y, \\ e_{yz} &= \frac{Y_z}{C} = \tau x, \\ e_{zx} &= e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Эти выражения (величина τ в них постоянна) удовлетворяют условиям совместности. Кроме того, напряженное состояние удовлетворяет условиям равновесия и (для круглого вала) граничным условиям на заданной поверхности. Итак, мы можем сказать, что решение главы V правильно.

Пример

3. (Oxford F. E. E. S. 1932.) Вследствие деформации точка (x, y, z) , принадлежащая непрерывному материалу, получила малые смещения u и v соответственно в направлениях x и y . Компонент смещения в направлении z равен нулю. Компоненты u и v зависят от x и y , но не зависят от z .

Написать (без доказательства) выражения для компонентов деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} . Вывести соотношения, которым эти величины должны удовлетворять. Полученные результаты использовать

для того, чтобы найти условия, при которых возможна следующая система деформаций:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a + b(x^2 + y^2) + x^4 + y^4, & e_{zx} &= 0, \\ e_{yy} &= a + \beta(x^2 + y^2) + x^4 + y^4, & e_{zy} &= 0, \\ e_{xy} &= A + Bxy(x^2 + y^2 - c^2), & e_{zz} &= 0. \end{aligned}$$

$$[B = 4; b + \beta + 2c^2 = 0].$$

***310.** В предыдущем параграфе мы заметили, что уравнения (12) являются условиями возможности существования деформации, вызванной данным напряженным состоянием, в теле без начальных напряжений. С точки зрения, принятой в §§ 88—92, уравнениям (12) можно дать другое истолкование. Напряженное состояние, удовлетворяющее условиям равновесия и возникающее в теле без начальных напряжений, вызывает меньшую упругую энергию, чем какое-либо другое напряженное состояние, удовлетворяющее условиям равновесия. Следовательно, уравнения (1) являются условиями минимума упругой энергии деформации, выраженной, как функция компонентов деформации.

В подтверждение этого соображения заметим, что уравнения (12) можно вывести с помощью методов вариационного исчисления. Их можно получить как условия того, что δU — вариация полной упругой энергии деформации, U — должна обращаться в нуль для всех варьированных компонентов напряжения, удовлетворяющих уравнениям равновесия в напряжениях¹⁾.

Смещения, соответствующие заданной деформации

311. Мы имеем тождества (12) и нам, следовательно, в каждом случае не нужно вычислять компоненты смещения, соответствующие найденной системе компонентов деформации, т. е. вычислять u , v , w из выражений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}, \dots, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = e_{xy}, \dots, \quad (13)$$

* 1) См. статью «Castigliano's Principle of Minimum Strain-Energy and the Conditions for Strain» в *Phil. Mag.* (сер. 7), 30 (1940), 252—258. Соотношения (12) получил впервые Сен-Венан. Впоследствии доказательство Сен-Венана было развито Кирхгофом. Вывод, приведенный в § 308, принадлежит Бельтрами. (Ср. Ляв, цит. соч. § 17.)

Однако иногда встречаются случаи, в которых нам нужно знать u , v , w . Тогда, интегрируя, например, первое из равенств (13), для u получим выражение следующего вида: (а) частное решение первого уравнения (13) плюс (б) дополнительное решение, являющееся произвольной функцией u и z . Вторая группа условий (13) будет служить для определения вида функций, входящих в дополнительное решение (б). Легко видеть, что u , v , w , дающие дополнительные решения (б), должны удовлетворять таким условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Если мы продифференцируем левые части этих шести уравнений по x , y и z , то мы получим восемнадцать однородных линейных уравнений между восемнадцатью вторыми производными u , v , w . Откуда следует, что все вторые производные по отдельности должны обращаться в нуль. Таким образом, дополнительные решения являются линейными функциями y , z , т. е.

$$u = a + bx + cy + dz, \dots \quad (15)$$

Дальнейшие условия для определения дополнительных решений типа (б) мы получим, если подставим (15) в (14). Из них видно, что дополнительные решения должны иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - ry + qz, \\ v &= v_0 - pz + rx, \\ w &= w_0 - qx + py. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Очевидно, что эти формулы дают малое поступательное смещение u_0 , v_0 , w_0 вместе с малым вращением, компоненты которого, согласно (11), суть ω_x , ω_y , ω_z , но

$$\omega_x = p, \quad \omega_y = q, \quad \omega_z = r,$$

откуда следует, что компоненты вращения постоянны. Итак, дополнительные решения представляют собой смещения, которые могут произойти в абсолютно твердом теле, а поэтому они несущественны при вычислении напряжений.

ГЛАВА X

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

312. В главе VIII (§ 285) мы с помощью теорем динамики вывели три уравнения, связывающие компоненты напряжения (X_x, \dots). С помощью этих уравнений можно определить напряженное состояние. Мы заметили, что для полного определения напряженного состояния одних этих уравнений недостаточно, потому что число независимых компонентов напряжения равно шести. Решение будет возможно, если мы, подобно тому как в главе IV, сможем выразить компоненты напряжения как функции шести компонентов деформации. На самом деле, в главе IX (§§ 294—295) мы видели, что все компоненты деформации можно выразить как функции трех независимых величин смещений u, v, w . Если мы проведем все эти подстановки в наших динамических уравнениях, то в конце концов мы получим три уравнения с тремя неизвестными.

Обобщенный закон Гука

313. В главе I мы высказали закон Гука. Закон основан на эксперименте и устанавливает соотношение между силами, приложенными к поверхности тела, и перемещениями, которые они производят. В главе IV (§§ 113—114) мы обобщили закон дальше, чем гарантируется простым экспериментом. Мы постулировали некоторое определенное свойство нашего идеального материала. Это свойство заключается в том, что напряжение любого рода, действующее на какой-либо малый элемент тела, будет вызывать пропорциональные действующим напряжениям деформации. Объединяя этот постулат с принципом суперпозиции, который, как мы видели в главе I, является логическим следствием закона Гука, и учитывая

результаты главы VIII и IX, мы можем точно сформулировать второе¹⁾ из наших основных предположений, т. е. обобщенный закон Гука: *Каждый из шести независимых компонентов напряжения можно выразить как линейную функцию шести компонентов деформации и обратно.*

Математическое выражение этого утверждения дает шесть соотношений для компонентов напряжения, как функций компонентов деформации следующего типа:

$$X_x = a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{zx} + a_{16}e_{xy}, \quad (1)$$

или, наоборот, шесть соотношений, дающих компоненты деформации как функции компонентов напряжения такого типа:

$$e_{xx} = b_{11}X_x + b_{12}Y_y + b_{13}Z_z + b_{14}Y_z + b_{15}Z_x + b_{16}X_y. \quad (2)$$

Коэффициенты $a_{11}, \dots, b_{11}, \dots$ в этих соотношениях являются постоянными величинами, значения которых зависят от свойств материала. Зная шесть соотношений типа (1), мы можем получить шесть соотношений типа (2) и *наоборот*. Очевидно, что, принимая обобщенный закон Гука [независимо от того, принимаем ли мы его в форме (1) или в форме (2)], мы вводим тридцать шесть постоянных — по шесть в каждом из шести уравнений. Ниже мы покажем, что тридцать шесть постоянных не являются независимыми, а должны удовлетворять соотношениям, число которых во всяком случае не меньше пятнадцати. Следовательно, число независимых постоянных никогда не бывает больше двадцати одного. При некоторых предположениях, которые мы неявно сделали в главе IV, оно сводится к *двум*.

Соотношения между напряжениями и деформациями в изотропных телах

314. Теперь, мы предположим, что *свойства нашего идеального материала, когда дело касается соотношений между напряжениями и деформациями, одни и те же по всем направлениям.* Эту гипотезу высказывают кратко, говоря, что

¹⁾ Первое — это предположение о *непрерывности*. Ср. гл. VIII, § 259.

рассматриваемый материал изотропен. Это означает, что свойства материала не связаны с направлением. Противоположное наблюдается в том случае, когда строение материала «волоконисто» (например, дерево).

Не следует забывать разницы между предположениями об изотропности и однородности материала. Первое является специальным утверждением о свойствах зависимости между напряжением и деформацией *в данной точке*. Второе — утверждением о том, что свойства напряжения и деформации, каковы бы они вообще ни были, — *одни и те же во всех точках*. Мы можем представить себе материалы, которые однородны, но не изотропны, например, дерево с правильными волокнами. Равным образом мы можем представить себе материал, который является совокупностью различных изотропных материалов и, следовательно, сам является изотропным, но он, очевидно, не будет однородным.

315. В случае изотропного материала мы сразу же можем показать, что только две независимые постоянные входят в обобщенный закон Гука. Для этого мы должны использовать результаты предыдущих глав. Так, в теории напряжений (гл. VIII, § 276) мы доказали, что в любой точке тела имеется элементарный параллелепипед, грани которого подвержены чисто нормальным напряжениям. Кроме того, в теории деформаций (гл. IX, § 302) мы доказали, что в каждой точке тела можно найти параллелепипед, грани которого остаются также прямоугольными и после деформации. В первом случае напряжения на таких гранях назывались «главными напряжениями». Удлинения ребер параллелепипеда во втором случае назывались «главными удлинениями». Очевидно, что в материале, свойства которого не связаны с направлением, направления главных напряжений и главных деформаций должны совпадать. На самом деле ведь нет никаких причин для того, чтобы симметричная система чисто нормальных напряжений вызывала несимметричную деформацию, а деформация была бы несимметричной, если параллелепипед не оставался бы прямоугольным¹⁾. Следовательно, наиболее общая форма

¹⁾ Это доказательство использовал Коши (ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 22).

закона Гука в случае изотропного материала должна связывать три главных напряжения p_1, p_2, p_3 с тремя главными деформациями e_1, e_2, e_3 . Таким образом, мы будем иметь три формулы следующего типа:

$$p_1 = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

где a, b и c — упругие постоянные.

Соображения симметрии вместе со свойством изотропности требуют, чтобы упругие постоянные b и c были равны. Это, очевидно, потому что e_2 и e_3 , направления которых перпендикулярны p_1 , можно поменять между собой, не меняя величины p_1 . Теперь формула для p_1 имеет вид:

$$p_1 = ae_1 + b(e_2 + e_3)$$

или эквивалентный ей вид:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \lambda\Delta + 2\mu e_1, \\ p_2 &= \lambda\Delta + 2\mu e_2, \\ p_3 &= \lambda\Delta + 2\mu e_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

аналогично мы можем написать

Через Δ , как и в § 117, обозначено объемное расширение, т. е. величина $(e_1 + e_2 + e_3)$. Итак, в изотропных материалах свойства напряжения и деформации определяются двумя упругими постоянными (λ и μ).

Эти две упругие постоянные независимы, если нет никакой дополнительной гипотезы, которая бы их связывала.

Модуль сдвига

316. В главе VIII (§ 280) мы вывели выражения:

$$\left. \begin{aligned} X'_{x'} &= l^2 p_1 + m^2 p_2 + n^2 p_3, \\ X'_{y'} &= ll' p_1 + mm' p_2 + nn' p_3, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

а в главе IX (§ 306)

$$\left. \begin{aligned} e_{x'x'} &= l^2 e_1 + m^2 e_2 + n^2 e_3, \\ e_{x'y'} &= 2(ll'e_1 + mm'e_2 + nn'e_3). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

l , m , n и l' , m' , n' в обоих случаях являются направляющими косинусами двух любых перпендикулярных направлений x' и y' .

Написанные выражения справедливы тогда, когда оси координат Ox , Oy , Oz параллельны направлениям p_1 , p_2 , p_3 или, что одно и то же, направлениям e_1 , e_2 , e_3 . Подставив (3) во второе выражение (1), мы найдем, что

$$X'_{y'} = \lambda \Delta (ll' + mm' + nn') + 2\mu (ll'e_1 + mm'e_2 + nn'e_3) = \\ = \mu e_{x'y'}. \quad (4)$$

Последнее равенство имеет место в силу (II) и того, что:

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Уравнение (4) в самом общем случае связывает касательное напряжение $X'_{y'}$ с соответствующим ему сдвигом. Сравнивая (4) с формулой (3) главы IV, § 121, мы видим, что μ в наших уравнениях (3) представляет собой величину, которая там обозначалась через C и называлась модулем сдвига.

Модуль объемного сжатия

317. Если мы подставим (3) в первое из выражений (I), то получим:

$$X'_{x'} = \lambda \Delta (l^2 + m^2 + n^2) + 2\mu (l^2e_1 + m^2e_2 + n^2e_3) = \\ = \lambda \Delta + 2\mu e_{x'x'}. \quad (5)$$

Последнее равенство имеет место согласно выражениям (II). Если оси Oy' , Oz' перпендикулярны Ox' , то мы подобным же образом можем получить:

$$Y'_{y'} = \lambda \Delta + 2\mu e_{y'y'}, \\ Z'_{z'} = \lambda \Delta + 2\mu e_{z'z'}.$$

Отсюда следует, что

$$X'_{x'} + Y'_{y'} + Z'_{z'} = (3\lambda + 2\mu) \Delta = p_1 + p_2 + p_3. \quad (6)$$

Последнее равенство имеет место согласно (3). Уравнение (6) обобщает результат, полученный в § 136 главы IV¹⁾.

Из (5) и (6) мы видим, что во всех случаях, нормальные компоненты напряжения связаны с соответствующими удлинениями формулами типа (3). Согласно принципу суперпозиции этого и следовало ожидать, так как касательные компоненты напряжения не влияют на удлинения.

Сделаем из равенства (6) другой вывод. Сравнивая это равенство с (6) главы IV, § 117, мы видим, что:

$$(3\lambda + 2\mu) = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{\Delta} = \frac{E}{1 - 2\sigma} = 3K, \quad (7)$$

K является модулем объемного сжатия. Итак, упругие постоянные λ и μ в формулах (3) связаны с упругими постоянными, которыми мы пользовались раньше.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона

318. В § 313 мы заметили, что соотношения типа (2) между напряжениями и деформациями можно вывести из соотношений типа (1) и *наоборот*. Мы видим, что для изотропных материалов (1) можно заменить соотношениями (3). Остается вывести уравнения, заменяющие (2).

Подставляя в первое из соотношений (3) вместо Δ его выражение из формулы (6), мы получим:

$$p_1 = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (p_1 + p_2 + p_3) + 2\mu e_1.$$

Отсюда:

$$e_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left[p_1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (p_2 + p_3) \right].$$

Существуют еще два аналогичных выражения для e_2 и e_3 .

Сравнивая эти выражения с формулами (3) главы IV, § 114, мы видим, что

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (8)$$

Полученные результаты, очевидно, не противоречат формуле (7) предыдущего параграфа.

¹⁾ Ср. уравнение (30) этого параграфа, а также § 275.

**Соотношения между упругими постоянными.
Обозначения**

319. Сейчас мы имеем три различные системы упругих постоянных, а именно:

(а) λ и μ . Эта система наиболее удобна, когда мы выражаем компоненты напряжения как функции компонентов деформации. Например, при преобразовании уравнений движения в напряжениях к уравнениям в компонентах деформации (§ 312).

(б) E и σ . Эта система удобна в том случае, когда нам необходимо сделать обратное преобразование, т. е. выразить компоненты деформации, как функции компонентов напряжения.

(в) K и μ . Как установлено в главе IV (§ 124), их можно считать основными упругими постоянными с физической точки зрения. Модуль объемного сжатия K выражает сопротивление материала изменению объема, не сопровождаемому изменением формы. Модуль сдвига μ выражает сопротивление изменению формы, не сопровождаемому изменением объема¹⁾.

Как бы мы ни записывали соотношения между компонентами напряжения и деформации, число независимых постоянных будет всегда одним и тем же; оно всегда равно двум. Следовательно, любые три из шести предыдущих величин можно связать между собой. Примерами таких зависимостей являются формулы (7) и (8), а также можно легко вывести и новые, а именно:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{2}{3} \frac{1 + \sigma}{1 - 2\sigma} \mu = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \\ E &= 2(1 + \sigma) \mu = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \\ \sigma &= \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В §§ 269 и 297 мы обратили внимание на разнообразие обозначений для компонентов напряжения и деформации. Такое же разно-

¹⁾ Это было установлено Стоксом (1845). Ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 26.

образе наблюдается и в обозначениях упругих постоянных¹⁾. Обозначения λ и μ , употребляемые в этой главе, были введены Ламе. E и σ — Кельвином и Тэтом. Обозначением E для модуля Юнга пользуются очень широко, но Рэлей, например, применял для него букву q . Почему-то не было найдено согласованности в обозначении модуля сдвига (в нашей книге он обозначается через μ и C) и коэффициента Пуассона (σ в нашей книге). Как обозначение модуля сдвига на континенте и в Америке, следуя Сен-Венану, обычно употребляют букву G ; Кельвин, Тэт и Рэлей использовали n ; Кирхгоф пользовался буквой K . Как обозначение коэффициента Пуассона Клебш и Рэлей брали букву ν , Сен-Венан и Пирсон — букву η , на континенте и в Америке обычно пишут ν или $\frac{1}{m}$. Однако заметим, что введение вместо коэффициента Пуассона обратной ему величины обычно увеличивает сложность формул, и, повидимому, никакой выгоды взамен не дает.

Теперь, когда написано так много работ, международное соглашение относительно обозначений кажется невероятным. Следовательно, читателю нужно рекомендовать самому ознакомиться со всеми наиболее широко употребляемыми обозначениями. После этого читатель уже не будет испытывать затруднений от такого рода разнообразия.

Общие уравнения для изотропных тел

320. Вернемся к уравнениям (4) и (5) §§ 316—317. Там мы показали, что если Ox , Oy , Oz — ортогональные координатные оси произвольного направления, то компоненты напряжения и деформации в изотропных телах связаны соотношениями вида

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2\mu e_{xx} \\ X_y &= \mu e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Имея эти соотношения, мы в состоянии преобразовать уравнения движения или равновесия в напряжениях (§ 285 главы VII) к уравнениям, связывающим компоненты деформации, и, следовательно, далее, к уравнениям относительно компонентов смещения u , v , w .

Выпишем члены с напряжениями, стоящие в первом из уравнений (16) или (17) главы VIII:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

¹⁾ Ср. Ляв, цит. соч., Примечание А.

Подставив (10), мы установим, что они эквивалентны

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial z} \right). \quad (11)$$

Если мы подставим вместо компонентов деформации выражения, установленные для них в §§ 294 — 295 главы IX, а именно:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right\} (12)$$

то мы найдем, что выражение (11) можно записать в такой форме:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Таким образом мы получим следующие уравнения равновесия в смещениях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

Δ и ∇^2 в этих уравнениях имеют значения, даваемые равенствами (13).

321. В § 285 главы VIII мы показали, что общие уравнения движения в отличие от только что рассмотренных уравнений равновесия, содержащих только члены с напряжениями, содержат компоненты массовой силы ρX , ρY , ρZ в

левых частях и проекции ускорения $\rho f_x, \rho f_y, \rho f_z$ в правых частях. Очевидно, что

$$f_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad f_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Таким образом мы имеем следующие общие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

322. Иногда члены, соответствующие компонентам напряжения, удобнее брать в другой форме. В § 307 главы IX мы ввели три компонента «вращения». Согласно определению:

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (17)$$

Вводя эти величины, мы имеем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u - \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= -2 \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + 2 \frac{\partial \omega_y}{\partial z}. \end{aligned}$$

Поэтому (16) может быть написано так:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + 2\mu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + 2\mu \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Уравнениям равновесия (14) можно придать аналогичный вид.

Термоупругие уравнения

323. При выводе общих уравнений мы предполагали, что деформированное состояние является следствием только приложенных сил. Таким образом мы исключили тела с «начальным напряжением», которые изучались в главе III. В § 78

главы III мы рассмотрели простой пример «температурных напряжений», т. е. случай возникновения начальных напряжений вследствие неравномерного нагрева различных частей составного тела. Теперь мы рассмотрим общий случай, в котором температура в каждой точке упругого тела задана. Основная задача заключается в том, что надо определить возникшее напряженное состояние. Мы выведем необходимые для нашей цели уравнения, которые назовем *термоупругими уравнениями*.

324. Пусть сначала имеем упругое тело, все части которого свободны от напряжений и имеют одну и ту же температуру θ_0 . Координаты какой-нибудь частицы тела в этой данной конфигурации обозначим через x, y, z .

Теперь представим себе, что тело нагрели и одновременно вызвали в нем напряжения. Частица, которая вначале находилась в точке (x, y, z) , сместится на расстояние u, v, w .

Температура этой частицы изменится и станет $\theta_0 + \theta$. Удлинения в этой конфигурации мы будем определять, относив получившиеся в ней длины к длинам первой конфигурации, как данным. Эти удлинения выражаются обычным образом через $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$. Некоторая доля каждого из полученных удлинений является следствием повышения температуры и *не вызывает напряжений в материале*. Через k , как в гл. III, обозначим температурный коэффициент линейного расширения. Удлинение в каждом направлении, являющееся следствием только одного изменения температуры, равно $k\theta$. Удлинения, являющиеся следствием напряжения, теперь будут:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - k\theta, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - k\theta, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} - k\theta. \quad (I)$$

Эти измененные выражения для удлинений нужно подставить вместо e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} в соотношения между компонентами напряжения и деформации.

С другой стороны, выражения для величин сдвига e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} , так как деформация, вызванная изменением температуры, является только чистым расширением, не изменятся,

Таким образом для компонентов напряжения имеем:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \theta, \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \beta \theta, \\ Z_z &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \beta \theta, \\ Y_z &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{и т. д.,} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

где Δ , как и раньше, представляет собой $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$,

$$\beta = (3\lambda + 2\mu) k. \quad (\text{III})$$

325. Коэффициент β в выражениях (II) имеет простой физический смысл. Мы знаем, что:

$$3\lambda + 2\mu = 3K. \quad (7)$$

Через K обозначаем «модуль объемного сжатия», а через $3k=c$ температурный коэффициент объемного расширения, т. е. c является величиной объемного расширения, вызванного увеличением температуры на один градус в случае свободного расширения; $\beta (=Kc)$ представляет собой давление, необходимое для того, чтобы свести к нулю это расширение. Мы можем определить β как давление, возникающее в том случае, когда температура тела поднимается на один градус, а *расширение абсолютно не допускается*.

326. Обратившись к первому уравнению движения в напряжениях, а именно

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = \rho f_x,$$

мы видим, что член, зависящий от температуры, в выражении (II) для X_x введет в левую часть соответствующего уравнения для u, v, w дополнительный член $-\beta \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Других изменений не будет. Выписанный добавочный член и аналогичные ему члены в двух других уравнениях в напря-

жениях, а именно $-\beta \frac{\partial \theta}{\partial y}$, $-\beta \frac{\partial \theta}{\partial z}$, очевидно, эквивалентны компонентам объемной силы (силы на единицу объема, но не на единицу массы), потенциал которой равен $\beta\theta$.

Члены, зависящие от температуры в выражениях (II) влияют и на граничные условия, если последние выражены как функции u , v , w .

Направление x отождествим с направлением нормали к границе, через X_x обозначим значение нормального давления, действующего в рассматриваемой точке. Теперь мы видим, что граничные условия могут быть записаны в виде соотношения:

$$\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial a}{\partial x} = X_x + \beta\theta,$$

и двух других соотношений для касательных напряжений, форма которых не изменяется.

Собирая наши выводы, мы можем сказать, что влияние на смещения неравномерного нагрева можно найти из уравнений обычного типа, установленных в §§ 320—322, при следующих условиях: (а) в добавление к массовым силам и поверхностным напряжениям, которые приложены к телу в действительности, мы должны ввести фиктивные объемные силы, являющиеся градиентом фиктивного потенциала $\beta\theta$;

(б) мы должны ввести фиктивное напряжение $\beta\theta$ на границе тела;

(в) вычисляя компоненты напряжения по компонентам смещения, определенным из полученных нами уравнений, мы должны пользоваться исправленными выражениями типа (II).

Для того чтобы провести наше решение, мы должны знать θ , как функцию координат. Определение функции $\theta(x, y, z)$ по данным граничным условиям является задачей теории теплопроводности.

Различные методы решения

327. Общая задача теории упругости заключается в том, что нужно найти решение общих уравнений при данных граничных условиях, которые задаются либо в виде

напряжений, либо в виде смещений. Как правило, решения, интересующие инженера, принадлежат к некоторым специальным частным случаям, например, плоским или обладающим некоторого рода симметрией.

Решение можно получить, идя различными путями. Во-первых, мы можем взять общие уравнения (14) или (16) и решать их с тем, чтобы прямо найти u , v , w . Во-вторых, мы можем комбинировать уравнения равновесия в напряжениях, данные в § 285 главы VIII, с «уравнениями совместности для деформаций», данными в § 308 главы IX. А затем использовать получившиеся уравнения для того, чтобы вывести выражения для компонентов напряжения, *не вводя явно компоненты смещения*. Каждый из методов имеет свою область применения.

Или еще иначе: мы можем взять u , v , w , в некоторой форме удовлетворяющей уравнениям (14) или (16), и затем получить граничные условия, к которым они приводят. Таким образом, мы придем к косвенному методу решения, который часто оказывается полезным. Мы также можем использовать некоторые элементарные соображения, как, например, в главе V, и получить приближенные решения. Полученные таким путем приближенные решения нужно потом подставить в общие уравнения для того, чтобы проверить, будут ли в действительности иметь место найденные напряжения. Так, например, было сделано для кручения в § 309 главы IX.

Наконец отметим «полуобратный» метод Сен-Венана, о котором речь впереди. В этом методе делаются упрощенные предположения о распределении напряжений. Это ограничивает общность получаемого решения, но, как можно видеть согласно общему принципу Сен-Венана (глава III), не исключает решения искомого вида. Этот метод один из самых полезных для инженера.

Так, пробуя удовлетворить условиям задачи о чистом изгибе цилиндрической балки (§ 164), мы можем предположить, что все деформации и напряжения не зависят от координаты z , если Oz направлена по оси балки. Однако это предположение совершенно недопустимо, когда изгибающий момент изменяется по оси Oz . Так как только один компонент напряжения Z_z может дать изгибающий момент, то мы попробуем удовлетворить условиям задачи, предполагая, что другие компоненты напряжений всюду равны

нулю. Граничные условия при этом предположении, очевидно, удовлетворяются. Мы видим, что полуобратный метод в этом случае уменьшает сложность общих уравнений, так как мы имеем частные предположения:

$$X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \quad (I)$$

Выразим эти предположения через компоненты деформации:

$$e_{xx} = e_{yy} = -\sigma \frac{Z_z}{E}, \quad e_{zz} = \frac{Z_z}{E}, \quad e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \quad (II)$$

После того как мы сделали предположения (I), мы видим, что уравнения равновесия в напряжениях (глава VIII, § 285) удовлетворяются тождественно. Два из уравнений совместности (глава IX, § 308) после подстановки в них (II) удовлетворяются тождественно, другие сильно упрощаются и приобретают вид

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (III)$$

Отсюда и из (I) и (II) мы видим, что Z_z должно иметь такой вид:

$$Z_z = p_1 = A + Bx + Cy, \quad (IV)$$

где A , B и C — постоянные. Решение можно завершить обычным путем.

Упругая энергия деформации, запасенная изотропным телом

328. Чтобы закончить рассмотрение изотропных тел, мы выведем общее выражение для «удельной упругой энергии деформации» или упругой энергии деформации, запасенной единицей объема изотропного материала ¹⁾.

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, длины сторон которого равны a , b и c и направлены соответственно по Ox , Oy , Oz (см. рис. 37 § 115 главы IV). В общем случае мы имеем силу растяжения величины $X_x bc$, являющуюся следствием напряжения X_x . Перемещение, «соответствующее» этой силе (гл. I, § 29), равно полному удлинению $e_{xx} \times a$.

¹⁾ Ср. гл. IV, § 116.

Применяя формулу (11) главы I для работы, запасенной X_x , получим выражение:

$$\frac{1}{2} X_x b c e_{xx} a = \frac{1}{2} e_{xx} (\lambda \Delta + 2\mu e_{xx}) abc \text{ [согласно (10)].}$$

Аналогично для работы, запасенной Y_z , получим выражение:

$$\frac{1}{2} Y_z c a e_{yz} b = \frac{1}{2} \mu e_{yz}^2 abc \text{ [согласно (10)].}$$

Следовательно, в общем напряженном состоянии, когда все шесть компонентов напряжения имеют некоторые определенные значения, полная упругая энергия на единицу объема, запасенная в параллелепипеде, равна:

$$u = \frac{1}{2} [X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + Y_z e_{yz} + Z_x e_{zx} + X_y e_{xy}] \quad (19)$$

$$u = \frac{1}{2} [\lambda \Delta^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2)]. \quad (20)$$

Первое выражение (19) верно как для изотропных, так и для не изотропных тел. Второе (20) относится только к изотропным телам и дает удельную энергию деформации как функцию шести компонентов деформации. Уравнения (10) представляют собой соотношения между компонентами напряжения и деформации в общем случае напряженного состояния изотропного тела. Из них:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \{X_x - \sigma (Y_y + Z_z)\}, \dots, \\ e_{yz} &= \frac{1}{\mu} Y_z = \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z \text{ [согласно (9)], } \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Мы можем подставить эти выражения для компонентов деформации в равенство (19) и получим:

$$u = \frac{1+\sigma}{2E} \left[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + \right. \\ \left. + 2(Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2) - \frac{\sigma}{1+\sigma} (X_x + Y_y + Z_z)^2 \right] \quad (22)$$

Удельная упругая энергия деформации выражена как функция шести компонентов напряжения. Этому равенству можно придать несколько иной вид:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} (X_x + Y_y + Z_z)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{C} (Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2 - Y_y Z_z - Z_z X_x - X_x Y_y) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9K} (X_x + Y_y + Z_z)^2 + \frac{1}{6C} \{ (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (X_x - Y_y)^2 \} + \frac{1}{C} (Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2) \right], \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $C (= \mu)$ — модуль сдвига.

Если $Y_z = Z_x = X_y = 0$, т. е. X_x, Y_y, Z_z — главные напряжения, то равенства (22) и (23) становятся тождественными с равенствами (5) и (17) главы IV.

Упругая энергия, запасенная анизотропными телами

329. Если упругие свойства материала изменяются с направлением, то материал называется анизотропным. Для таких материалов выражение (19) сохраняется, но выражения (22) и (23) заменяются более сложными выражениями. Это получается потому, что простые соотношения между деформациями и напряжениями (10), в которые входят только две упругие постоянные, — заменяются шестью соотношениями типа (1) или (2), а в них входят тридцать шесть постоянных. Подобно тому как в последнем параграфе, рассмотрим прямоугольный параллелепипед, находящийся в некотором данном напряженном состоянии. Рассматривая, как и раньше, величины

$$X_x bc, \quad e_{xx} a$$

$$Y_z ca, \quad e_{yz} b,$$

как силы и соответствующие им в смысле главы I, § 29 перемещения, мы можем применить теорему взаимности, доказанную в § 12 главы I. С помощью этой теоремы мы покажем, что не все тридцать шесть постоянных являются независимыми.

Запишем соотношения (2) полностью:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= b_{11}X_x + b_{12}Y_y + b_{13}Z_z + b_{14}Y_z + b_{15}Z_x + b_{16}X_y, \\ e_{yy} &= b_{21}X_x + b_{22}Y_y + b_{23}Z_z + b_{24}Y_z + b_{25}Z_x + b_{26}X_y, \\ e_{zz} &= b_{31}X_x + b_{32}Y_y + b_{33}Z_z + b_{34}Y_z + b_{35}Z_x + b_{36}X_y, \\ e_{yz} &= b_{41}X_x + b_{42}Y_y + b_{43}Z_z + b_{44}Y_z + b_{45}Z_x + b_{46}X_y, \\ e_{zx} &= b_{51}X_x + b_{52}Y_y + b_{53}Z_z + b_{54}Y_z + b_{55}Z_x + b_{56}X_y, \\ e_{xy} &= b_{61}X_x + b_{62}Y_y + b_{63}Z_z + b_{64}Y_z + b_{65}Z_x + b_{66}X_y. \end{aligned} \right\} (24)$$

Заметим, что часть e_{xx} , вызванная действием Y_z , равна $b_{14}Y_z$, а часть e_{yz} , вызванная действием X_x , равна $b_{41}X_x$. Таким образом, согласно теореме взаимности, мы можем утверждать, что «сила» $X_x b_{14} Y_z$, действуя на «перемещении» $(b_{14} Y_z) a$, будет совершать ту же работу, что и «сила» $Y_z c a$, действуя на «перемещении» $(b_{41} X_x) b$. Выражая этот результат в математических символах, мы получим:

$$(X_x b_{14} Y_z) abc = (Y_z b_{41} X_x) abc.$$

Это соотношение должно иметь место в любом случае, и мы видим:

$$b_{14} = b_{41}.$$

Рассмотрев таким же образом и другие пары напряжений, мы получим, что

$$b_{rs} = b_{sr}, \quad (25)$$

где r и s — любые целые числа от 1 до 6.

330. Итак, мы вывели 15 соотношений между коэффициентами равенств (24). Раз так, то число *независимых* упругих постоянных в случае анизотропного материала не может превосходить 21. Те же 15 соотношений должны иметь место между 36 упругими постоянными, входящими в шесть равенств типа (1). Можно показать, что эти соотношения, как и следовало ожидать, имеют вид

$$a_{rs} = a_{sr}. \quad (26)$$

Если в структуре материала наблюдается некоторая симметрия, то число упругих постоянных может быть меньше 21. Существуют, например, такие классы кристаллов, упругие свойства которых можно выразить с помощью 13, 9, 7, 6, 5 и, наконец, 3 упругих постоянных. Читатель может ознакомиться с этим в главе VI «Математической теории упругости» Лява. В нашей книге мы больше не будем касаться анизотропных материалов.

ГЛАВА XI

РЕШЕНИЯ ОБЩИХ УРАВНЕНИИ

331. В этой главе мы на частных примерах проиллюстрируем те методы решения общих уравнений теории упругости, которые были кратко перечислены в § 327 главы X.

Сначала напомним замечания, сделанные в § 309 главы IX относительно «уравнений совместности для деформаций». Иногда случается так, что соображения общего характера, например, соображения симметрии, дают возможность для компонентов напряжения получить выражения, удовлетворяющие условиям равновесия и граничным условиям задачи. Выполнение этих условий необходимо, но не достаточно, потому что в действительности они налагают только три условия на шесть независимых компонентов напряжения. Прежде чем принять некоторое напряженное состояние, как правильное решение нашей задачи, мы должны удостовериться в том, что соответствующие ему деформации могут произойти в теле без начальных напряжений. Это значит, что мы должны убедиться в совместности полученного напряженного состояния с однозначными значениями компонентов смещения u , v , w . Такую проверку проводят с помощью уравнений совместности. Если они удовлетворяются *так же, как* уравнения равновесия и граничные условия, то мы можем, не вычисляя действительных значений компонентов смещения, принять полученное нами напряженное состояние, как решение поставленной задачи.

«ПОЛУОБРАТНЫЙ» МЕТОД СЕН-ВЕНАНА

332. Только что сделанные замечания можно иллюстрировать на примере, который вместе с тем будет служить объяснением «полуобратного» метода Сен-Венана (см. главу X, § 327).

Мы воспроизведем в основных чертах знаменитое исследование Сен-Венана задач о чистом изгибе, кручении и изгибе поперечной силой изотропных цилиндров заданного поперечного сечения.

В главе I мы, как первую задачу, теоретически рассмотренную в сопротивлении материалов, отметили задачу о балке, один конец которой заделан, а другой нагружен силой. Это была задача о балке, подверженной действию постоянной перерезывающей силы. До Сен-Венана упомянутая задача привлекала внимание многих математиков. В частности, ею занимались Кулон и Коши. В то же время были предложены также решения задачи кручения, но все они были получены с помощью методов, основанных на сомнительных предположениях. Полученные решения, в свете современных знаний справедливы при некоторых ограничениях, но последние тогда не были ясно сформулированы¹⁾. Сен-Венан²⁾ первым ввел задачи об изгибе и кручении в область общей теории (которая приобрела свой законченный вид после того, как Навье вывел общие уравнения теории упругости³⁾).

Сен-Венан заметил, что практически известно результирующее усилие, действующее на тело, а не точный способ его распределения. Поняв это, он стал различать первичные

¹⁾ Ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 17, 24 и 35.

²⁾ Имя Барре де Сен-Венана (1797—1886) является в истории нашей науки одним из самых выдающихся имен. Он был инженером французской *École des ponts et chaussées*. Первые опубликованные работы Сен-Венана, касающиеся этого предмета, можно найти в лекциях по прикладной механике, прочитанных студентам. Сен-Венан соединял в себе большие математические способности с практическим взглядом на вещи. Это определило направление всей его научной деятельности. Наиболее знаменитые из его мемуаров посвящены кручению (1855) и изгибу (1856). В них впервые были учтены касательные напряжения в поперечных сечениях. Также знамениты его мемуары об ударе (ср. § 385) и колебаниях. Сен-Венана интересовали и общие вопросы, как, например, природа молекулярного действия, теория прочности (ср. § 146) и основания теории пластичности. Главы IX (том 1) и X (том 2) «History...» Todhunter and Pearson полностью посвящены его работам. Сен-Венан не только сам сделал большой вклад в теорию упругости, но и создал свою школу. Среди его учеников мы встречаем имена Буссинеска, Леви, Матье, Резаля.

³⁾ Ср. § 3 и подстрочное примечание.

эффекты, а именно те, которые зависят от результирующей нагрузки, от вторичных эффектов, зависящих от способов ее распределения.

Введение этого различия ясно сформулировано в его принципе «упругой равнозначности статически эквивалентных систем нагрузок» (гл. III, §§ 92—94). Оно дает возможность упростить точные уравнения Навье с помощью некоторых предположений, которые с математической точки зрения ограничивают область справедливости получившегося решения, но не уменьшают его практической ценности. Наиболее важное из этих предположений заключается в том, что распределение напряжений по поперечному сечению цилиндрического тела, как, например, балки постоянного поперечного сечения, не зависит от расстояния по оси. Мы видели (§ 95), что решение, обладающее этим свойством, соответствует минимальному значению упругой энергии, запасенной под действием данного результирующего усилия.

Задача Сен-Венана

333. Сначала рассмотрим напряжения, вызванные в цилиндрическом теле перерезывающим и крутящим усилиями, являющимися следствиями сосредоточенной поперечной силы, приложенной на одном из его концов. В основном мы будем следовать рассуждениям Сен-Венана. Однако мы используем условия совместности деформаций и *a priori* приведем оправдание наших предположений, воспользовавшись принципом, установленным в § 92 гл. III. Последний заключается в том, что тела, подчиняющиеся закону Гука, всегда стремятся принять в условиях рассматриваемой задачи конфигурацию, соответствующую минимальной упругой энергии.

Для удобства выпишем здесь уравнения равновесия ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Уравнения (17) главы VIII.

и уравнения совместности деформации ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \text{(II)} \quad & \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \text{(III)} \quad & \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \text{(IV)} \quad & 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \\ \text{(V)} \quad & 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), \\ \text{(VI)} \quad & 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

334. Ось направим по прямой, параллельной образующим цилиндра. Заметим, что компонентами напряжения, которые могут давать изгибающий или крутящий моменты или перерезывающую силу, являются X_z , Y_z и Z_z . Компоненты X_x , Y_y , X_y не оказывают влияния на эти усилия и приводят к увеличению упругой энергии. Отсюда, согласно принципу минимума упругой энергии, мы можем заключить, что эти компоненты напряжения равны нулю, если только они не необходимы для удовлетворения уравнений равновесия в напряжениях или граничных условий ²⁾.

Предположение о том, что в *каждой* точке:

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \quad (3)$$

требует, чтобы цилиндрическая поверхность была свободна от напряжений. Если мы подставим (3) в уравнения равновесия в напряжениях (1), то увидим, что они сводятся к

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Уравнения (12) главы IX.

²⁾ Ср. часть II статьи, упомянутой в подстрочном примечании к § 310.

Уравнения (4) требуют, чтобы результирующая перерезывающая сила не зависела от координаты z . Воспользовавшись этим, мы из (5) получим:

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Осталось исследовать, можно ли из решений уравнений (4) — (6) получить практически полезный результат, т. е. проверить, удовлетворятся ли уравнения совместности деформации.

335. Очевидно, что уравнение (6) требует, чтобы перерезывающая сила была постоянной, так как только такая сила сопровождается линейным распределением изгибающего момента, являющегося следствием Z_z . Обратимся к условиям, налагаемым уравнениями совместности (2).

С помощью (3) мы получим, что:

$$e_{xx} = e_{yy} = -\sigma e_{zz}, \quad (I)$$

$$e_{xy} = 0, \quad (II)$$

Из (I) и (6) следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}) = 0. \quad (III)$$

Из (4) мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial z} (e_{yz}, e_{zx}) = 0, \quad (IV)$$

а из (5)

$$\frac{\partial}{\partial x} e_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} e_{yz} + 2(1 + \sigma) \frac{\partial}{\partial z} e_{zz} = 0. \quad (V)$$

Используем (II), (III) и (IV) для того, чтобы упростить первые три уравнения (2). Мы получим:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] e_{zz} = 0. \quad (VI)$$

А это вместе с третьим из условий (III) показывает, что наиболее общая форма e_{zz} будет:

$$e_{zz} = (Ax + By + C)z + (A'x + B'y + C'). \quad (8)$$

Наконец, подставив (8) и (I) в последние три уравнения (2), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2\sigma \frac{\partial^3 e_{zz}}{\partial y \partial z} = 2\sigma B, \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2\sigma \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z \partial x} = 2\sigma A. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Все решения, совместные с нашими начальными предположениями (§ 334), определяются формулами (8) и (9).

Кручение цилиндрического тела

336. Каждому члену формулы (8) соответствует в поперечном сечении некоторое результирующее усилие. Согласно принципу суперпозиции, всякому отдельному усилию соответствуют одни и те же компоненты напряжения и деформации независимо от того, существует ли оно отдельно или в комбинации с любым другим.

Будем считать, что e_{zz} равняется по очереди каждому из членов формулы (8), и постараемся получить вытекающие отсюда следствия.

Сначала заметим, что когда e_{zz} равно нулю, уравнения (9), в которых тогда A и B будут также равны нулю, все же допускают существование компонентов напряжения Z_x и Z_y , отличных от нуля. Уравнения (9) вместе с (IV) накладывают условие

$$\frac{\partial}{\partial x} e_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} e_{zx} = \text{const},$$

которое удовлетворится, если мы примем:

$$\left. \begin{aligned} e_{zx} &= \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ e_{yz} &= \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где τ — произвольная постоянная.

Вследствие (IV) введенная функция φ не должна зависеть от z , а как функция x и y она пока не определена,

337. Положив e_{zz} всюду равным нулю, мы из (I) и (II) получим:

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) для компонентов деформации удовлетворяют всем уравнениям совместности. Функция φ не зависит от z , и, следовательно, выражения (10) удовлетворяют упрощенным уравнениям равновесия (4). Остается удовлетворить уравнению (5), выраженному в форме (7). Оно требует, чтобы

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (12)$$

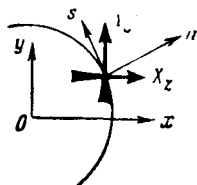


Рис. 97.

т. е. функция φ в выражениях (10) должна быть гармонической функцией двух переменных. Итак, мы удовлетворили условиям равновесия нашей задачи, но еще не удовлетворили граничным условиям, наложенным на Z_x и Z_y .

338. В § 129 главы IV мы показали, что касательное напряжение в любом сечении, перпендикулярном свободной от нагрузки поверхности тела, не может иметь компонента в направлении нормали к поверхности тела. Обозначив через n направление внешней нормали к контуру поперечного сечения, мы из рис. 97 видим, что в настоящей задаче это условие записывается так:

$$X_z \cos(x, n) + Y_z \cos(y, n) = 0, \quad (13)$$

где (x, n) представляет собой угол между направлениями x и n .

Если условие (13) удовлетворено вместе с равенствами (3), то боковая поверхность тела полностью свободна от напряжений. Мы знаем, что

$$X_z = \mu e_{zx}, \quad Y_z = \mu e_{yz}. \quad (VI)$$

Подставив в (13) (VI), а потом (10), мы увидим, что условие (13) будет удовлетворяться во всех точках границы, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, n) = \\ &= y \cos(x, n) - x \cos(y, n). \end{aligned} \quad (14)$$

Равенство (14) следует принять как граничное условие для функции φ . Оно не противоречит уравнению (12), так как требует, чтобы

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds &= \int \{y \cos(x, n) - x \cos(y, n)\} ds = \\ &= \int y dy + \int x dx = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

[все интегралы берутся по контуру поперечного сечения]. С другой стороны, согласно преобразованию Грина¹⁾, мы имеем:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

[двойной интеграл берется по всей площади поперечного сечения]. Отсюда видно, что левая часть (15) действительно обращается в нуль в силу уравнения (12), если только φ не имеет особенностей внутри площади поперечного сечения.

339. Теперь исследуем характер результирующей силы, возникающей в поперечном сечении. Напряжение является чисто касательным, и мы имеем:

$$\begin{aligned} \iint X_z dx dy &= \mu \tau \iint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) dx dy = \\ &\quad \text{[согласно (VI) и (10)]} \\ &= \mu \tau \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right\} \right] dx dy = \\ &\quad \text{[как легко проверить, в силу (12)]} \\ &= \mu \tau \int x \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - y \cos(x, n) + x \cos(y, n) \right\} ds = \end{aligned}$$

[согласно преобразованию Грина, если интеграл берется по контуру поперечного сечения]

$$= 0 \quad \text{[в силу граничного условия (14)].}$$

Отсюда следует, что напряжение в поперечном сечении не имеет результирующей поперечной силы в направлении Ox . Аналогичное доказательство показывает, что оно не имеет

¹⁾ Это преобразование выражено формулой (68) § 256.

результатирующей поперечной силы в направлении Oy . Взяв любую точку в плоскости поперечного сечения за начало координат, мы получим:

$$\begin{aligned} T &= \iint (xY_z - yX_z) dx dy = \\ &= \mu\tau \iint \left[\left(x \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) - y \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

или

$$T = C\tau = \mu\tau H, \quad (16)$$

где T представляет собой результирующий крутящий момент в любом поперечном сечении, а

$$H = \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx dy. \quad (17)$$

Таким образом решение, соответствующее нулевому значению e_{zz} , является простым кручением. Величина H называется модулем кручения поперечного сечения. Ее размерность [длина]⁴. C , т. е. произведение H на модуль сдвига μ , обычно называют жесткостью при кручении цилиндрического тела ¹⁾.

340. Характер возникшей деформации можно определить из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= e_{zx} = \tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right), \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= e_{zy} = \tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

Согласно (11), $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$ и мы, продифференцировав (VII) по x и y , получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

¹⁾ Во избежание путаницы заметим, что, во-первых, в нашем первом исследовании задачи кручения цилиндра *круглого* поперечного сечения (гл. V, §§ 155—159) мы через C обозначали модуль сдвига. Во-вторых, этой же буквой была обозначена одна из постоянных соотношения (8). И, наконец, в-третьих, здесь, как это обычно делают, через C обозначена жесткость при кручении,

Отсюда, так как, согласно (11), $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, мы имеем:

$$w = \tau (\varphi + \alpha + \beta x + \gamma y), \quad (\text{VIII})$$

где α , β , γ — постоянные интегрирования. Из (VII) и (VIII) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\tau(y + \beta), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau(x - \gamma). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, так как, согласно (11):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{IX})$$

мы получим, что

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau(yz + \delta + \varepsilon y + \beta z), \\ v &= \tau(zx + \zeta + \varepsilon x - \gamma z), \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

где δ , ε и ζ — постоянные интегрирования.

Весьма легко показать, что члены с α , β , ..., ζ представляют собой перемещение тела, как абсолютно твердого, а им можно пренебречь. Этого и следовало ожидать, так как α , β , ..., ζ не влияют на компоненты напряжения. Итак, мы можем считать, что смещения в нашем решении даются следующими формулами:

$$u = -\tau yz, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau \varphi. \quad (\text{18})$$

Выражения для u и v представляют собой поворот поперечного сечения на положительный угол τz около оси параллельной Oz . Таким образом, мы видим, что еще не определенная нами постоянная τ так же, как и в §§ 157—159 главы V, выражает угол поворота на единицу длины.

Форма поперечного сечения в его собственной плоскости, согласно соотношениям (11), не изменяется. Однако неравное нулю выражение для w показывает, что плоскости всех поперечных сечений «искажаются» одинаковым образом. Характер этого искажения определяется функцией φ , а его величина постоянной τ . Искажения не будет только тогда, когда φ будет

иметь постоянное значение. В этом случае из (14) вытекает, что во всех точках контура поперечного сечения $\operatorname{tg}(x, n) = \frac{y}{x}$, т. е. каждая нормаль к контуру поперечного сечения должна проходить через начало. Это значит, что контур должен быть окружностью.

341. Суммируя результаты §§ 336—340, мы получаем решение задачи о действии крутящего момента на цилиндр. Компоненты деформации и напряжения в нашем решении не изменяются с изменением координаты z . Для смещений имеем выражения (18), в которых τ является поворотом сечений, расположенных на расстоянии единицы длины друг от друга. Компоненты деформации определяются формулами (10) и (11). Жесткость при кручении цилиндра дается формулами (16) и (17). Решение будет точным, когда крутящее усилие приложено в виде касательных напряжений на концевых сечениях и распределено в соответствии с (10). В других случаях наше решение непригодно в окрестности тех областей, в которых приложены силы, но «принцип Сен-Венана» показывает, что его с большой точностью можно применять к тем частям цилиндра, которые не подвергаются действию внешней нагрузки.

В наше решение входит гармоническая функция двух переменных φ . Функция φ определяется с помощью граничного условия (14), и поэтому имеет различный вид для различных форм поперечного сечения цилиндра. Обычно она называется функцией кручения для данного контура. Задача определения φ называется задачей кручения для этого контура.

Здесь мы не будем больше заниматься изложением задачи кручения¹⁾. Заметим только, что любую гармоническую функцию двух переменных можно считать функцией кручения для контура некоторой формы, и что этот контур можно найти, подставив функцию φ в условие (14).

¹⁾ Для некоторых форм поперечных сечений задача рассматривается у Лява (цит. соч., глава XIV) и у С. П. Тимошенко («Теория упругости», глава IX). Некоторые сведения о приближенных методах решения можно почерпнуть из Дополнения к этой главе.

Функция

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy$$

— гармоническая функция двух переменных. Ее нормальная производная:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \{y \cos(x, n) + x \cos(y, n)\}.$$

Условие (14) удовлетворяется, если во всех точках контура:

$$a^2 y \cos(x, n) - b^2 x \cos(y, n) = 0, \quad (I)$$

т. е. если

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}(x, n) = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получаем:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = \text{const}, \quad (II)$$

т. е. уравнение эллипса. Таким образом написанная формула дает функцию кручения для сплошного эллиптического вала, или для полого вала, поперечное сечение которого ограничено двумя конфокальными эллипсами. Из (10) и (VI) § 339 мы для компонентов напряжения получаем:

$$X_z = -\frac{2\mu\tau a^2 y}{(a^2 + b^2)},$$

$$Y_z = \frac{2\mu\tau b^2 x}{(a^2 + b^2)}.$$

Жесткость при кручении можно вычислить из формулы (17). Мы найдем, что

$$H = \frac{2}{a^2 + b^2} \iint (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy = \frac{\pi a^2 b^4}{a^2 + b^2}$$

в случае *сплошного* эллиптического сечения.

Пример

1. Проверить, что функция

$$\varphi = -\frac{1}{6a} (y^3 - 3x^2 y)$$

является функцией кручения для контура, имеющего форму равно-стороннего треугольника, стороны которого даются уравнением:

$$(x - a)(x - y\sqrt{3} + 2a)(x + y\sqrt{3} + 2a) = 0.$$

Простое растяжение

342. Обратимся теперь к тем решениям, в которых e_{zz} имеет не равное нулю значение. Сначала рассмотрим решение, которое получится, если взять

$$e_{zz} = C', \quad (\text{XI})$$

т. е. если постоянные A, B, C, A', B' в формулах (8) и (9) приравнять нулю.

Уравнения (9) опять сводятся к форме, в которой их решения соответствуют кручению, только что рассмотренному в предыдущих параграфах. Предположим теперь, что всюду:

$$e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Отсюда, с помощью (I) и (II) § 335, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} X_x = X_y = X_z = Y_y = Y_z = 0, \\ Z_z = EC' = p. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII})$$

Очевидно, что это решение соответствует случаю постоянного растяжения. Смещения будут:

$$u = -\frac{\sigma}{E} px, \quad v = -\frac{\sigma}{E} py, \quad w = \frac{p}{E} z. \quad (\text{19})$$

(Члены, характеризующие перемещение тела как абсолютно твердого, не написаны).

Чистый изгиб

343. Пусть

$$e_{zz} = B'y, \quad (\text{XIII})$$

тогда условиям (9) можно удовлетворить, предположив, что:

$$e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Комбинируя эти выражения с выражениями (I) и (II) § 335, мы опять получим решение, в котором все компоненты напряжения кроме Z_z всюду равны нулю. Но теперь зависимость Z_z от y будет линейной, ибо мы имеем:

$$Z_z = Ee_{zz} = EB'y. \quad (\text{XIV})$$

Начало координат возьмем в центре тяжести поперечного сечения, оси Ox , Oy направим по главным осям поперечного сечения. Полная сила продольного растяжения будет

$$\iint Z_z dx dy = EB' \iint y dx dy = 0.$$

Момент относительно оси y равен:

$$-\iint Z_z x dx dy = -EB' \iint xy dx dy = 0.$$

Наше решение соответствует случаю изгиба моментом, вектор которого параллелен Ox . Величина изгибающего момента:

$$M_x = \iint Z_z y dx dy = EB' \iint y^2 dx dy = EB'I_x,$$

т. е. она не зависит от z . Такое решение было изучено в главе V, §§ 164—169, где вместо B' стояло $\frac{1}{R}$. Через R мы там обозначали радиус кривизны оси цилиндра после деформации. Теперь решение главы V подтверждается точным исследованием. Очевидно, что точно так же можно рассмотреть член $A'x$, стоящий в формуле (8).

344. Для определения смещений мы имеем уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx} = -\sigma B' y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy} = -\sigma B' y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_{zz} = B' y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = e_{yz} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = e_{zx} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy} = 0.$$

Легко проверить, что все эти уравнения удовлетворяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} u &= -\sigma B' xy, \\ v &= \frac{1}{2} B' \{ \sigma (x^2 - y^2) - z^2 \}, \\ w &= B' yz. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Начало координат помещено в центре тяжести поперечного сечения цилиндра. Смещение точек оси цилиндра мы получим из

этих формул, если положим: $x = y = 0$, тогда $u = w = 0$, $v = -\frac{1}{2} B' z^2$. Отсюда видно, что после деформации ось цилиндра превращается в *параболу*, лежащую в плоскости изгиба, т. е. в плоскости, содержащей Oy и Oz . В действительности, как мы видели в главе V, она приобретает форму *окружности*. Причина получившегося расхождения заключается в том, что выражения для компонентов деформации через компоненты смещения точны только тогда, когда смещения малы ¹⁾. Если мы ограничимся малыми значениями z , а следовательно малыми значениями v , то парабола превратится в круг радиуса $\frac{1}{B'}$. Центр этого круга будет лежать по ту сторону от G , где u отрицателен. Следовательно, в формулах (20) мы можем заменить B' на $\frac{1}{R}$.

345. Выполнив эту подстановку, мы для смещений точек поперечного сечения ($z = 0$) получим:

$$u = -\sigma \frac{xy}{R}, \quad v = \frac{\sigma}{2R} (x^2 - y^2), \quad w = 0,$$

а для смещений точек, лежащих на оси x ($y = 0$):

$$u = w = 0, \quad v = \frac{\sigma x^2}{2R}. \quad (21)$$

Мы видим, что ось, проходящая через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярная плоскости изгиба, в результате деформации превращается в круг радиуса $\frac{R}{\sigma}$. Центр этого круга лежит по ту сторону оси, где u положителен. Этот результат устанавливает факт существования «антикластической кривизны», описанной в § 170 главы V.

Однородный цилиндр под действием собственного веса

346. Займемся теми членами выражения (8), в которые входит z . Рассмотрим решение

$$e_{zz} = Cz. \quad (XV)$$

¹⁾ Ср. § 293 главы IX.

Уравнение (7) принимает форму:

$$\frac{\partial}{\partial x} e_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} e_{yz} + 2(1 + \sigma)C = 0. \quad (22)$$

Проинтегрировав его по всей площади поперечного сечения, получим:

$$\begin{aligned} -2(1 + \sigma)C \iint dx dy &= \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} e_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} e_{yz} \right\} dx dy = \\ &= \int \{ e_{zx} \cos(x, n) + e_{yz} \cos(y, n) \} ds. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место согласно преобразованию Грина ¹⁾ (криволинейный интеграл берется по контуру поперечного сечения). Подынтегральная функция в правой части, согласно условию (13), равна нулю на контуре поперечного сечения, так как боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки. Из полученного соотношения мы видим, что C должно обращаться в нуль.

347. Однако решению (XV) можно дать физическое толкование, если в третье из уравнений (1), а следовательно, и в (5) включить член, соответствующий массовой силе ρZ . В результате этого в левых частях (7) и (22) появится добавочный член $\frac{\rho Z}{\mu}$. Постоянная C больше не будет обращаться в нуль; для нее мы получим выражение:

$$2(1 + \sigma)C + \frac{\rho Z}{\mu} = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{\rho Z}{E}.$$

Согласно главе VIII, § 285, буквы X , Y , Z употребляются для обозначения компонентов массовых сил, которые определяют проекции ускорения, испытываемого телом при действии на него одних этих сил. Поэтому, если компонент массовой силы Z обязан своим происхождением силе тяжести и если

¹⁾ Ср. подстрочное примечание § 338.

ось Oz направлена вверх, то мы можем заменить Z через $-g$. Тогда мы получим решение, в котором

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} &= 0, \\ e_{xx} = e_{yy} &= -\sigma e_{zz}, \\ e_{zz} &= \frac{g\rho z}{E}, \\ Z_z &= g\rho z. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

так что

Очевидно, что полученное решение соответствует случаю цилиндра, подвешенного вертикально и подверженного действию собственного веса. Легко проверить, что смещения будут:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\sigma g\rho}{E} zx, & v &= -\frac{\sigma g\rho}{E} zy, \\ w &= \frac{1}{2} \frac{g\rho}{E} \{z^2 + \sigma(x^2 + y^2)\}. \end{aligned} \quad (24)$$

(Члены, характеризующие перемещение тела как абсолютно твердого, не написаны.)

Постоянная перерезывающая сила

348. Остается рассмотреть те члены соотношений (8) и (9), в которых присутствуют постоянные A и B . Очевидно, что выражение

$$e_{zz} = Azx \quad (XVI)$$

типично для обоих решений. Следовательно, в уравнениях (9) мы можем приравнять B нулю. Тогда уравнения (9) вместе с (IV) § 335 дадут:

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} = -2\sigma Ay + 2\tau. \quad (25)$$

Через τ обозначена постоянная интегрирования. Из уравнения (7) мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} e_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} e_{yz} + 2(1 + \sigma) Ax = 0. \quad (26)$$

349. В силу (3) продольное напряжение, соответствующее удлинению (XVI), дается формулой

$$Z_z = EAz\chi. \quad (\text{XVII})$$

Если оси Ox , Oy являются главными осями поперечного сечения, то, как и раньше, мы можем показать, что результирующее усилие, соответствующее Z_z , представляет собой момент относительно оси Oy . Величина этого момента:

$$-EAzI_y = M_y. \quad (\text{XVIII})$$

Через I_y обозначен геометрический момент инерции площади поперечного сечения относительно оси Oy .

Из законов статики следует, что этот изгибающий момент M_y должен сопровождаться постоянной перерезывающей силой в направлении Ox . Ее величина:

$$W = -\frac{\partial}{\partial z} M_y = EAI_y \quad [\text{согласно (XVIII)}].$$

Перерезывающую силу можно считать следствием действия поперечной силы W , приложенной на торце ($z=0$)¹⁾ в направлении xO . Распределение поперечной силы по торцу нужно определить. Найдем A из (XVIII) и, опустив индекс y у момента инерции I_y , подставим его в выражения (XVI) и (XVII), тогда получим:

$$e_{zz} = \frac{W}{EI} z\chi, \quad Z_z = \frac{W}{I} z\chi. \quad (27)$$

Уравнения (25) и (26) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= 2\sigma \frac{W}{EI} y - 2\tau, \\ \frac{\partial e_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} + 2(1 + \sigma) \frac{W}{EI} x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

350. При W , равном нулю, уравнения (27) и (28) тождественны с теми, которые фигурировали в «задаче кручения» (§ 336). Очевидно, что граничное условие, которому должны удовлетворять Z_x , Z_y , то же, что и раньше, т. е. (13). Следовательно,

¹⁾ Раньше начало координат не было определено.

решение и в этом случае будет иметь форму (10). Член с W в правой части первого уравнения (28) можно учесть, прибавив его к e_{zx} . Таким образом мы можем написать, что

$$\left. \begin{aligned} e_{zx} &= -\tau y + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \sigma \frac{W}{EI} y^2, \\ e_{yz} &= \tau x + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

После подстановки этих выражений во второе уравнение (28) мы получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{2(1+\sigma)W}{EI} x = 0. \quad (30)$$

Граничное условие (13) дает равенство:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = \tau \{y \cos(x, n) - x \cos(y, n)\} - \frac{\sigma W}{EI} y^2 \cos(x, n). \quad (31)$$

Уравнение (30) показывает, что φ_0 не является гармонической функцией двух переменных, как то было для «функции кручения» (§ 337). Но если мы положим, что

$$\varphi_0 = \tau \varphi - \frac{W}{EI} \left\{ \chi + \frac{1}{6} \sigma x^3 + \left(1 + \frac{1}{2} \sigma\right) xy^2 \right\}, \quad (32)$$

то найдем, что χ во всех точках поперечного сечения должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \quad (33)$$

а в каждой точке контура поперечного сечения — условию

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial n} &= - \left\{ \frac{1}{2} \sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \sigma\right) y^2 \right\} \cos(x, n) - \\ &\quad - (2 + \sigma) xy \cos(y, n). \end{aligned} \quad (34)$$

Задача определения гармонической функции двух переменных для любого данного контура поперечного сечения при граничном условии (34) называется задачей изгиба для этого контура.

351. Если функция χ найдена, то решение все еще содержит неопределенную постоянную τ . Это дает нам возможность выбрать линию действия результирующей перерезывающей силы так, чтобы она совпала с какой-нибудь заданной прямой, параллельной Ox . Действительно, напряжения X_z и Y_z даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma \right) y^2 \right\}, \\ Y_z &= \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ \frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Если данная линия действия перерезывающей силы проходит, например, через центр тяжести поперечного сечения, то величину τ можно подобрать так, чтобы полный крутящий момент обратился в нуль. Из (35) мы имеем:

$$\begin{aligned} T &= \iint (xY_z - yX_z) dx dy = \\ &= \mu\tau \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx dy + \\ &+ \frac{W}{2(1+\sigma)I} \iint \left\{ y \frac{\partial\chi}{\partial x} - x \frac{\partial\chi}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma \right) y^3 - \right. \\ &\quad \left. - \left(2 + \frac{1}{2}\sigma \right) x^2 y \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда и определится τ .

Легко проверить, что найденное решение удовлетворяет требованиям задачи относительно действующей результирующей силы.

Согласно второму из уравнений (28) мы имеем:

$$\begin{aligned} \iint Z_x dx dy &= \iint \left\{ Z_x + x \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Wx}{I} \right) \right\} dx dy = \\ &= W + \int x \left\{ X_z \cos(x, n) + Y_z \cos(y, n) \right\} ds = W. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу граничного условия (13). Аналогичным способом мы можем показать, что другие составляющие усилия обращаются в нуль.

352. «Задача изгиба» (§ 350) является трудной задачей. В граничное условие (34) входят очень сложные выражения, и поэтому мало вероятно, чтобы метод решения, аналогичный решению «задачи кручения» в § 341, привел к полезным результатам. Мы говорим сейчас о методе, в котором заранее задается гармоническая функция двух переменных. На этом мы закончим пока общее изложение задачи.

Рассмотрим еще только задачу для частного вида контура поперечного сечения¹⁾. Согласно одному из условий нашей задачи, компонент напряжения Y_z , действующий по всей площади поперечного сечения, не должен давать результирующей. Поэтому естественно исследовать вопрос о том, можно ли получить решение в предположении, что во всех точках поперечного сечения

$$Y_z = 0. \quad (\text{XIX})$$

Приняв это предположение, мы, согласно второму из равенства (29), получаем:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \tau x = 0,$$

откуда $\varphi_0 = -\tau xy + F(x)$. Теперь из (30) мы имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x) + \frac{2(1+\sigma)W}{EI} x = 0.$$

И окончательно:

$$\varphi_0 = \alpha + \beta x - \frac{1+\sigma}{3} \frac{W}{EI} x^3 - \tau xy$$

и из первого равенства (29)

$$X_z = \mu e_{zx} = \mu \left[\beta - \frac{W}{EI} \left\{ (1+\sigma) x^2 - \sigma y^2 \right\} - 2\tau y \right], \quad (\text{XX})$$

α и β в этих формулах являются постоянными интегрирования.

¹⁾ Различные формы поперечных сечений рассмотрены Лябом (цит. соч., глава XV) и Тимошенко (цит. соч., глава X). Ср. также §§ 335—339.

Граничное условие (13) в силу (XIX) имеет вид:

$$X_z \cos(x, n) = 0.$$

Оно удовлетворяется или при $\cos(x, n) = 0$ или при $X_z = 0$.

В первом случае в качестве возможного контура мы получаем прямые, параллельные оси x , а во втором, согласно формуле (XX), кривую, уравнение которой:

$$(1 + \sigma) x^2 - \sigma y^2 = \frac{EI}{W} (\beta - 2\tau y). \quad (\text{XXI})$$

Таким образом наше предположение (XIX) справедливо для поперечного сечения, имеющего прямолинейные стороны (см. рис. 98).

Выбрав подходящим образом начало координат, мы можем записать уравнение (XXI) в такой форме:

$$\begin{aligned} (1 + \sigma) x^2 - \sigma y^2 &= \\ &= \text{const} = a^2. \end{aligned} \quad (37)$$

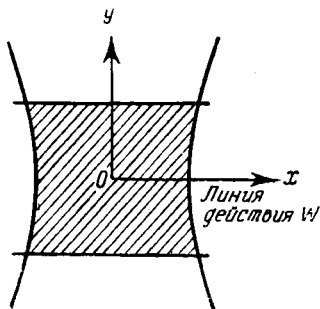


Рис. 98.

Отсюда видно, что криволинейные части контура являются двумя ветвями гиперболы, эксцентриситет которой зависит от σ . Для касательного напряжения имеем выражения:

$$\begin{aligned} Y_z &= 0, \\ X_z &= -\frac{W}{2I} \left[x^2 - \frac{1}{1 + \sigma} (\sigma y^2 + a^2) \right] = \frac{W}{2I} (b^2 - x^2). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место согласно (37), если $\pm b$ являются значениями x на криволинейной части контура. Если прямолинейные стороны контура расположены симметрично относительно оси x , то результирующее усилие будет проходить через линию центров тяжести поперечных сечений, т. е. τ будет обращаться в нуль. Для компонента напряжения Z_z , как и раньше, имеем выражение $\frac{Wxz}{I}$.

Если прямолинейные стороны контура поперечного сечения расположены симметрично относительно оси Ox и если расстояние между ними мало, то искривление верхней и нижней частей контура будет неощутимо. Таким образом наше частное решение подтверждает результаты, полученные в главе VII, § 226 для высокого и узкого прямоугольного сечения.

Примеры

2. Проверить, что функции

$$\varphi = 0, \quad \chi = \frac{1}{4} x \{x^2 - 3y^2 - (3 + 2\sigma) a^2\}$$

являются решением задачи изгиба для цилиндра круглого поперечного сечения $r = a$.

3. Проверить, что функции

$$\varphi = 0, \quad \chi = \frac{1}{4} x \left\{ x^2 - 3y^2 - (3 + 2\sigma) \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2 + y^2} \right) \right\}$$

решают задачу изгиба для полого цилиндра, поперечное сечение которого ограничено концентрическими окружностями радиусов a и b .

РЕЗЮМЕ

353. В § 334 мы пробовали решить задачу, предположив, что в каждой точке изотропного цилиндра:

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \quad (3)$$

Далее мы исследовали, какие напряженные состояния обладают этими свойствами и не вызывают напряжений на цилиндрической поверхности тела.

Мы получили точные решения, которые в каждом отдельном случае требуют, чтобы нагрузка на торцах была распределена определенным образом. Так мы получили точные решения для постоянного растяжения, чистого изгиба, кручения и для изгиба постоянной перерезывающей силой, действующей вместе (это необходимо для равновесия) с изгибающим моментом, являющимся линейной функцией расстояния от нагруженного конца. Таким образом, с помощью «полуобратного» метода Сен-Венана мы получили решения для всех тех усилий, которые более всего интересуют инженера.

Точное решение в случае растяжения и чистого изгиба подтверждает результаты, найденные нами в предыдущих главах менее строгими методами. Методы решений задач о кручении цилиндров некруглого поперечного сечения и задач, учитывающих перерезывающую силу в случае сечений, отличных от узкого прямоугольного сечения, являются новыми. Из наших решений можно получить один из наиболее важных, с практической точки зрения, выводов. Он заключается в том, что соотношение между изгибающим моментом и кривизной оси цилиндра, а именно $M = \frac{EI}{R}$, справедливое при постоянном изгибающем моменте, остается верным в случае переменного изгибающего момента, получающегося при действии постоянной перерезывающей силы. Легко проверить, что смещения, соответствующие нашим выражениям для компонентов деформации при изгибе, будут:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau yz - \frac{W}{EI} \left[\frac{1}{2} \alpha z (x^2 - y^2) + \frac{1}{6} z^3 \right], \\ v &= \tau zx - \frac{W}{EI} \alpha x y z, \\ w &= \tau \varphi - \frac{W}{EI} \left[\chi + x \left(y^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

На оси цилиндра при $x = y = 0$ мы имеем:

$$u = -\frac{1}{6} z^3 \frac{W}{EI}; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{Wz}{EI} = \frac{M}{EI}. \quad (39)$$

ЗАДАЧИ С ЧИСТО РАДИАЛЬНЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ

354. Для того чтобы иллюстрировать прямые методы решения общих уравнений, мы исследуем те типы деформации, которые в каждой точке состоят из чисто радиальных смещений. При этом очевидно, что концентрические до деформации сферы остаются концентрическими сферами и после деформации. Ясно, что деформация такого рода будет происходить в сферической оболочке, подверженной внутреннему давлению. Мы увидим, что наша теория включает в себя некоторые из форм «нормальных колебаний» (§ 212) изотропного упругого шара,

Вывод основного уравнения

355. Начнем с того, что выведем общие уравнения движения. Будем предполагать, что массовые силы, если они вообще действуют, являются чисто радиальными и изменяются только в зависимости от расстояния до центра симметрии. Начало координат возьмем в этом центре и обозначим через r радиальное расстояние. Пусть на расстоянии r от начала массовые силы имеют интенсивность R . Тогда, компоненты массовой силы по направлениям Ox , Oy , Oz будут:

$$X = \frac{x}{r} R, \quad Y = \frac{y}{r} R, \quad Z = \frac{z}{r} R. \quad (I)$$

Через U обозначим результирующее (радиальное) смещение на расстоянии r от центра.

Составляющие смещения будут:

$$u = \frac{x}{r} U, \quad v = \frac{y}{r} U, \quad w = \frac{z}{r} U, \quad (II)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (III)$$

Ясно, что объемное расширение Δ будет функцией только расстояния r , и мы можем написать:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r}. \quad (IV)$$

Очевидно, что смещения рассматриваемого типа не включают вращения¹⁾, поэтому мы можем взять уравнения движения в форме (18) главы X, опустив члены с ω_x , ω_y , ω_z .

После этого упрощения первое из уравнений движения (18) главы X, а именно

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

примет вид:

$$\frac{x}{r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \rho \left(R - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \right] = 0. \quad (V)$$

¹⁾ Это можно доказать, дифференцируя выражения (II), т. е. выражения для компонентов смещения u , v , w .

Второе и третье из тех же уравнений приведутся к виду, который отличается от (V) только заменой x соответственно на u и на z . Таким образом все три уравнения сведутся к одному:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \rho R = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (40)$$

Для того чтобы выразить Δ как функцию U , мы заметим, что радиальные и тангенциальные направления благодаря симметрии являются главными направлениями деформации. Радиальное удлинение e_r , как обычно, равно $\frac{\partial U}{\partial r}$ и сопровождается двумя равными тангенциальными или кольцевыми удлинениями e_t . Сферическая поверхность радиуса r до деформации становится после деформации сферической поверхностью радиуса $r + U$. Следовательно, каждое кольцевое удлинение равняется $\frac{U}{r}$.

Для величины объемного расширения Δ имеем формулу:

$$\Delta = e_r + 2e_t = \frac{\partial U}{\partial r} + 2\frac{U}{r}. \quad (VI)$$

Подставив это выражение в (40), получим уравнение:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + 2\frac{U}{r} \right) + \rho R = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (41)$$

Это уравнение определяет смещение при деформации любой системы, обладающей центральной симметрией.

356. С другой стороны, мы можем вывести уравнение (41) из уравнений движения в компонентах напряжения. Для этого в последние нужно подставить компоненты напряжений, как функции радиального смещения. Соображения симметрии показывают, что касательные напряжения не могут действовать на плоскостях, проходящих через начало O и на сферических поверхностях, имеющих центр в точке O . Таким образом, главными напряжениями являются радиальное напряжение p_r и тангенциальное напряжение p_t , интенсивность которого одна и та же во всех направлениях,

Рассмотрим движение в радиальном направлении некоторого элементарного объема, ограниченного двумя парами радиальных плоскостей и двумя сферическими поверхностями радиусов r и $r + \delta r$ (см. рис. 99). Уравнение движения этого элемента в радиальном направлении будет:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 p_r) - \frac{2}{r} p_t + \rho R = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (\text{VII})$$

Оно принимает вид уравнений (40) и (41) после подстановки в него ниже написанных выражений для p_r и p_t :

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \lambda \Delta + 2\mu e_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda \frac{U}{r}, \\ p_t &= \lambda \Delta + 2\mu e_t = \lambda \frac{\partial U}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Сферическая оболочка под действием давления

357. В случае *равновесия* член с ускорением в правой части уравнения (41) исчезает. Интеграл однородного уравнения будет иметь вид:

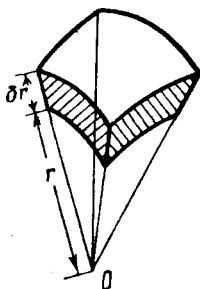


Рис. 99.

$$U = Ar + \frac{B}{r^2}, \quad (43)$$

где A и B — произвольные постоянные. Если интенсивность массовых сил R равна нулю, то (43) представляет собой полное выражение для величины радиального смещения.

358. Если мы имеем сплошной шар, то U должно обращаться в нуль вместе с r , т. е. постоянная B должна равняться нулю. На поверхности шара p_r имеет заданное значение, и это позволяет нам определить постоянную A .

Мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U}{r} = A, \quad \Delta = 3A.$$

Из (42) мы теперь получим:

$$p_r = p_t = (3\lambda + 2\mu) A = -p.$$

Через p обозначено действующее давление. Как и следовало ожидать, напряженное состояние оказалось гидростатическим.

359. Если член с B не пропадает, то, продифференцировав (43), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= A - \frac{2B}{r^3}, \quad \frac{U}{r} = A + \frac{B}{r^3}, \quad \Delta = 3A \text{ (как и раньше).} \\ \text{Из (42) теперь имеем: } p_r &= P - \frac{2Q}{r^3}, \quad p_t = P + \frac{Q}{r^3}, \\ \text{где } P &= (3\lambda + 2\mu) A = 3KA \text{ и } Q = 2\mu B. \end{aligned} \right\} \text{(VIII)}$$

Постоянные P и Q можно определить из следующих условий:

$$[p_r]_{r=a} = -p_a, \quad [p_r]_{r=b} = -p_b.$$

Это граничные условия нашей задачи, так как мы допускаем, что сферы ($r=a$) и ($r=b$) являются внутренней и внешней поверхностями, а величины p_a и p_b заданными значениями давления, действующего на них.

Воспользовавшись этими условиями, мы найдем, что

$$(b^3 - a^3)P = a^3 p_a - b^3 p_b, \quad (b^3 - a^3)Q = \frac{1}{2} a^3 b^3 (p_a - p_b).$$

Зная P и Q , мы с помощью (VIII) определим A и B , после этого будем иметь полные выражения для радиального смещения и для напряжений, вызванных давлениями p_a и p_b .

Пример

4. (Самб. М. S. Т. 1910.) Вычислить толщину оболочки калориметрической бомбы, имеющей сферическую форму с внутренним диаметром 10,16 см, когда допускаемое эксплуатационное напряжение равно 630 кг/см², а внутреннее давление 315 кг/см². [1,32 см.]

Напряжения от сил притяжения

360. Если массовые силы действуют, то к общему интегралу (43) однородного уравнения нужно добавить частное решение неоднородного уравнения. В этом случае мы так же,

как и раньше, будем иметь, вообще говоря, две произвольные постоянные A и B . (Постоянная будет одна в случае сплошного шара.) Значения этих постоянных определяются из поставленных граничных условий. Рассмотрим частный случай общей задачи, а именно тот, в котором давления по поверхностям не действуют. Решение общей задачи можно будет составить из решения нашего частного случая и решения предыдущего параграфа, учитывающего давления на поверхностях.

Радиальная массовая сила R может быть любой заданной функцией от r . Из теории притяжения известно, что для сплошного шара, деформирующегося вследствие взаимного тяготения частиц (гравитирующего шара) мы имеем:

$$R = -g \frac{r}{a},$$

где a — радиус сферы, а g — ускорение силы тяжести на поверхности $r = a$. Подставив это выражение в уравнение (41) и опустив в нем, как и раньше, член с ускорением, мы увидим, что оно имеет следующее частное решение:

$$U = \frac{1}{10} \frac{gpr^3}{(\lambda + 2\mu)a}. \quad (\text{IX})$$

Если мы решаем задачу для сплошного шара, то (IX) нужно добавить к интегралу (43), который состоит сейчас из одного члена A_r .

Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dr} = A + \frac{3}{10} \frac{gpr^2}{(\lambda + 2\mu)a}, \quad \frac{U}{r} = A + \frac{1}{10} \frac{gpr^2}{(\lambda + 2\mu)a}, \\ \Delta = 3A + \frac{1}{2} \frac{gpr^2}{(\lambda + 2\mu)a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

отсюда

Подставив эти выражения в (42), мы получим

$$p_r = (3\lambda + 2\mu)A + (5\lambda + 6\mu) \frac{gpr^2}{10(\lambda + 2\mu)a}. \quad (\text{XI})$$

Теперь A нужно выбрать так, чтобы p_r обращалось в нуль на поверхности $r = a$. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= -\frac{1}{10} \frac{5\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} (a^2 - r^2) \frac{gp}{a}, \\ p_t &= -\frac{1}{10} \frac{(5\lambda + 6\mu)a^2 - (5\lambda + 2\mu)r^2}{\lambda + 2\mu} \frac{gp}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

361. Отсюда видно, что оба напряжения в каждой точке шара являются *сжимающими*. Как и следовало ожидать, в центре ($r = 0$) напряжения равны между собой и вызывают давление интенсивности

$$\frac{1}{10} \frac{5\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} gpa = \frac{1}{10} \frac{3 - \sigma}{1 - \sigma} gpa. \quad (45)$$

Если значения g внутри шара совпадают со значениями g на его поверхности, то величина gpa равна весу столбика материала высоты, равной радиусу шара. Коэффициент $\frac{3 - \sigma}{10(1 - \sigma)}$ для стали близок к $\frac{3}{8}$.

Заметим далее, что если мы определим A из упомянутого граничного условия, то для радиальной деформации получим следующее выражение:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{10} \frac{gp}{(\lambda + 2\mu)a} \left\{ 3r^2 - \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} a^2 \right\}$$

Отсюда видно, что радиальная деформация равна нулю при

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{(5\lambda + 6\mu)}{3(3\lambda + 2\mu)} = \frac{3 - \sigma}{3(1 + \sigma)}.$$

(XII)

Следовательно, если σ положительно, а это имеет место для всех известных материалов, то существует определенная поверхность, на которой радиальная деформация отсутствует и вне которой она становится *удлинением*. Этот результат является, конечно, следствием «эффекта Пуассона» при больших «кольцевых» сжимающих напряжениях.

Задача о полой гравитирующей оболочке имеет меньший практический интерес. Читатель может решить ее в качестве упражнения.

Напряжения, являющиеся следствием неравномерного нагрева

362. Задача, аналогичная предыдущей, возникает тогда, когда температура тела является заданной функцией r ; только теперь при решении задачи нужно будет учитывать условия на двух поверхностях. В §§ 324—326 главы X было показано, что смещения по отношению к некоторой «данной конфигурации» с постоянной температурой можно найти из обычных уравнений теории упругости, если мы введем «фиктивные» объемные силы и поверхностные давления, которые можно вычислить, когда известно превышение температуры θ над данной.

Рассмотрим случай сферической оболочки, внутренний радиус которой равен a , а внешний b . Пусть напряжения в оболочке возникают *только* вследствие не меняющейся со временем разницы температур между внутренней и внешней поверхностями оболочки. Влияние поверхностных давлений, если они действуют, можно будет найти из формул § 359 и добавить к тому решению, которое мы сейчас получим. Повышение температуры всего тела на некоторую постоянную величину не влияет на напряжения, поэтому можно считать температуру на внешней поверхности ($r=b$) равной некоторой определенной величине, например, нулю. Тогда θ будет равна нулю при $r=b$ и заданной величине θ_a при $r=a$.

363. Распределение θ по радиусу оболочки определим из законов теплопроводности. Полный поток тепла через любую сферическую поверхность не зависит от ее радиуса, и мы при предположении о постоянной теплопроводности имеем:

$$r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} = \text{const.}$$

Отсюда находим зависимость θ от расстояния r :

$$\theta = f - \frac{g}{r}, \quad (1)$$

где f и g — произвольные постоянные. Из граничных условий, установленных в § 362, мы получим, что

$$f = \frac{a\theta_a}{(a-b)}, \quad g = \frac{ab\theta_a}{(a-b)}. \quad (\text{II})$$

Распределение θ по радиусу оболочки теперь найдено.

Согласно §§ 325—326, для решения задачи мы должны ввести объемную силу R , являющуюся градиентом потенциала $\beta\theta$, где

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)k, \quad (\text{III})$$

k — температурный коэффициент линейного расширения.

Таким образом мы имеем:

$$\rho R = -\beta \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\beta \frac{g}{r^2}. \quad (\text{IV})$$

Уравнение (41), в котором нужно опустить член с ускорением, можно написать в форме:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} + 2 \frac{U}{r} \right) + \frac{ab}{b-a} \frac{\beta\theta_a}{(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r^2} = 0. \quad (\text{46})$$

364. Это уравнение имеет следующее частное решение:

$$U = \frac{1}{2} \frac{ab}{b-a} \frac{\beta\theta_a}{\lambda + 2\mu} \text{ [постоянная]}.$$

Полученную постоянную следует добавить к общему решению однородного уравнения, т. е. к интегралу (43). После этого мы получим:

$$\left. \begin{aligned} U &= Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{ab}{b-a} \frac{\beta\theta_a}{\lambda + 2\mu}, \\ \frac{dU}{dr} &= A - \frac{2B}{r^3}, \\ \frac{U}{r} &= A + \frac{B}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{ab}{b-a} \frac{\beta\theta_a}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r}, \\ \Delta &= 3A + \frac{ab}{b-a} \frac{\beta\theta_a}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

Как и раньше, A и B — произвольные постоянные.

На граничных поверхностях напряжения не действуют, и поэтому граничные условия, согласно § 326, имеют форму

$$\lambda \Delta + 2\mu \frac{dU}{dr} = \beta \theta. \quad \left. \vphantom{\lambda \Delta + 2\mu \frac{dU}{dr} = \beta \theta.} \right\} \quad (\text{VI})$$

Они должны выполняться при $r=a$ и при $r=b$.

С помощью (V) мы получим:

$$(3\lambda + 2\mu) A - \frac{4\mu B}{r^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{ab}{b-a} \frac{\beta \theta_a}{r} = 0, \quad \text{при } r=b, \quad \left. \vphantom{(3\lambda + 2\mu) A - \frac{4\mu B}{r^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{ab}{b-a} \frac{\beta \theta_a}{r} = 0,} \right\} \quad (\text{VII})$$

$$= \beta \theta_a, \quad \text{при } r=a,$$

откуда найдем, что:

$$A = -\frac{a}{b-a} \frac{\beta \theta_a}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left\{ \lambda + \frac{2\mu a^2}{a^2 + ab + b^2} \right\}, \quad \left. \vphantom{A = -\frac{a}{b-a} \frac{\beta \theta_a}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left\{ \lambda + \frac{2\mu a^2}{a^2 + ab + b^2} \right\},} \right\} \quad (\text{VIII})$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{a^3 b^2}{b^3 - a^3} \frac{\beta \theta_a}{\lambda + 2\mu}.$$

365. Уравнения (V) и (VIII) дают полное решение нашей задачи. Напряжения, согласно уравнениям (II), § 324, можно найти из формул:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{dU}{dr} - \beta \theta, \\ p_t &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{U}{r} - \beta \theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

Напряжение p_r обращается в нуль на обеих граничных поверхностях и не может быть большим, поэтому интересно определить только p_t . С помощью (I), (II), (V), (VIII) и (IX) мы получим:

$$p_t = \frac{a^3 \beta \theta_a}{b-a} \left[1 - \frac{b}{r} - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ \lambda - (\lambda + \mu) \frac{b}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} \left(2 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} \right]. \quad (47)$$

А это при $r=a$ даст:

$$\left. \begin{aligned} p_t &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{b(a+2b)}{a^2 + ab + b^2} \beta \theta_a \\ \text{и при } r=b \\ p_t &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{a(2a+b)}{a^2 + ab + b^2} \beta \theta_a. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

В этих формулах θ_a является постоянной разностью температур между внутренней и внешней поверхностями оболочки. Заметим, что внутренние слои испытывают «кольцевое сжатие», а внешние «кольцевое растяжение», если θ_a положительно, и наоборот, если θ_a отрицательно¹⁾.

Примеры

5. (Oxford F. E. E. S. 1932²⁾.) Температура в толстостенной сферической оболочке с внутренним радиусом a и внешним радиусом b изменяется по ее толщине. На радиусе r температура на θ градусов превосходит общую данную температуру. Температурный коэффициент линейного расширения (k) всюду один и тот же.

Получить уравнение:

$$\frac{dU}{dr} + 2 \frac{U}{r} - \frac{1+\sigma}{1-\sigma} k\theta = \text{const},$$

определяющее радиальное смещение (U) в точке, которая, когда вся оболочка имеет одну и ту же данную температуру, лежит на радиусе r .

[Соотношение между β и k получено в § 324. Соотношения между упругими постоянными можно найти в § 318.]

6. (Oxford F. E. E. S. 1933.) Имеем сплошной стальной шар с диаметром 15,25 см. Шар охлажден в жидком водороде до постоянной температуры и находится в ненапряженном состоянии. Затем он погружен в ванну с расплавленным оловом. Через некоторое время температуру шара можно принять равной -253°C на участке от центра до радиуса равного 2,54 см и 232°C на участке от этого радиуса до наружной поверхности. Допустим, что сталь не теряет упругих свойств. Показать, что в рассматриваемый момент холодная часть сферы подвержена «гидростатическому растягивающему напряжению» (т. е. растяжению, имеющему одинаковую интенсивность во всех направлениях), величина которого приблизительно равна $10\,395 \text{ кг/см}^2$.

[Для стали $E = 2,1 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\sigma = 0,3$; температурный коэффициент линейного расширения $= 11,1 \times 10^{-6}$ на 1°C .]

Радиальные колебания сплошного изотропного шара

366. Если член с массовой силой (R) в уравнении (41) отсутствует, то мы можем принять, что это уравнение имеет гармоническое по времени решение, т. е.

$$U \propto \sin(qt + \epsilon). \quad (49)$$

¹⁾ В § 362 было принято, что $a < b$.

²⁾ В примере изменены обозначения для того, чтобы они совпадали с обозначениями нашей книги.

В этом решении ϵ — произвольная «фазовая постоянная», а q — постоянная, которая определится позже из «уравнения частот»¹⁾.

Теперь мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + 2 \frac{U}{r} \right) + h^2 U = 0, \\ h^2 = \frac{\rho q^2}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где

367. Написав в уравнении (50) x вместо hr мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{U}{x} \right) + U = 0. \quad (I)$$

Если φ потенциал смещения, т. е.

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (II)$$

то уравнение (I) можно проинтегрировать, и мы получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \text{const.} \quad (III)$$

Постоянную в правой части (III), не нарушая общности выражения U , можно считать равной нулю. Если положить:

$$X = x\varphi, \quad (IV)$$

то (III) примет вид:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X = 0. \quad (V)$$

Отсюда найдем общее решение нашей задачи, совместное с предположением (49), а именно:

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{X}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{A \sin x + B \cos x}{x} \right\} \sin(qt + \epsilon). \quad (VI)$$

¹⁾ Беря такое решение, мы рассматриваем только свободные «нормальные» колебания. Ср. § 212 и примечание на стр. 660.

Здесь через A и B обозначены постоянные интегрирования, которые можно определить из граничных условий. Рассмотрим граничные условия.

368. Формула (VI) дает выражение для радиального смещения сферической оболочки или сплошного шара. В первом случае граничные условия заданы на двух поверхностях и из них можно определить A и B . Этот случай мы не будем здесь рассматривать. Во втором случае материал непрерывно заполняет весь объем шара. Радиальное смещение U должно быть нулем в центре (при r или x , равно нулю). Следовательно, член с B в формуле (VI) должен отсутствовать. Таким образом, опустив множитель, зависящий от времени, мы имеем:

$$U = A \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right). \quad (\text{VII})$$

Формула (VI) § 355 запишется так:

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{U}{x}. \quad (\text{VIII})$$

Формулам (42) можно придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_r}{h} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + 2\lambda \frac{U}{x}, \\ \frac{p_t}{h} &= \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

Подставив (VII) в первое из этих выражений, мы имеем:

$$p_r = Ah \left[2\lambda \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) - (\lambda + 2\mu) \left\{ 2 \frac{\cos x}{x^2} + \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) \right\} \right]. \quad (\text{X})$$

И теперь условие того, что поверхность $\left(\frac{x}{h} = r = a \right)$ свободна от напряжений, можно записать в форме

$$\frac{\text{tg } ha}{ha} = \frac{4\mu}{4\mu - (\lambda + 2\mu) h^2 a^2}. \quad (\text{51})$$

369. Это уравнение относительно ha представляет собой уравнение частот для нашей задачи. Его корни дают «собственные частоты» (§ 212) свободных колебаний, так как, согласно второму из соотношений (50):

$$q^2 a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} h^2 a^2. \quad (52)$$

Заметим, что на некотором участке частоты зависят от значений σ , т. е. от отношения $\frac{\lambda}{\mu}$. Если $\lambda = \mu$, т. е. $\sigma = \frac{1}{4}$ ¹⁾, то уравнение (51) принимает вид

$$\frac{\operatorname{tg} ha}{ha} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4} h^2 a^2}, \quad (XI)$$

и его шесть первых корней равны ²⁾

$$\frac{ha}{\pi} = 0,8160; 1,9285; 2,9359; 3,9658; 4,9728; 5,9774. \quad (XII)$$

Если ha велико, то мы приближенно можем написать:

$$\operatorname{tg} ha = -\frac{4}{3ha}, \quad (XIII)$$

а это показывает, что корни при больших значениях ha очень близки к значениям, кратным π , и меньше их. Значения этих больших корней практически не зависят от σ .

370. Числа (XII) имеют простой физический смысл. Из второго соотношения (50) мы имеем:

$$\frac{\pi}{ha} = \frac{2\pi}{q} : \left(2a \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \right) = \frac{T}{T_0}, \quad (XIV)$$

где T — период колебания, а T_0 — время, затрачиваемое волной расширения при соответствующей скорости $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ на прохождение расстояния, равного диаметру шара ³⁾.

¹⁾ Ср. § 318, уравнение (8). Значение $\left(\sigma = \frac{1}{4} \right)$ близко к значению σ для стекла (ср. гл. IV, § 123).

²⁾ Ляв, цит. соч., § 196.

³⁾ Ср. § 374.

Для стеклянного шара мы имеем (в единицах С. G. S.)

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu = 2,40 \times 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ \rho &= 2,942 \text{ г/см}^3,\end{aligned}$$

так что $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 495 \times 10^3 \text{ см/сек}$ (приближенно),

$$\frac{T_0}{a} = \frac{2}{495 \times 10^3} = 4,04 \times 10^{-6} \text{ (приближенно)}.$$

Для основной формы колебания из (XII) и формулы (XIV) получаем:

$$\frac{T}{a} = \frac{T_0}{0,8160} = 4,96 \times 10^{-6}. \quad (\text{XV})$$

Для шара размеров Земли, т. е. $a = 6,14 \times 10^8 \text{ см}$ (приближенно), формула (XV) для периода основной формы колебания дает следующее значение: $3,19 \times 10^3$ секунд (приближенно), т. е. около 53 минут.

Распространение радиальных колебаний в шаре или сферической оболочке

371. В предыдущих параграфах мы исследовали характер и частоты свободных колебаний простого гармонического типа по времени, происходящие в сплошном изотропном шаре. Теперь рассмотрим характер движения, получающегося тогда, когда в *некоторой* области внутри шара возникает произвольное возмущение, или когда какое-нибудь возмущение распространяется внутрь шара от его поверхности. Очевидно, что сначала некоторые части шара будут находиться в покое, а по истечении некоторого промежутка времени начнут двигаться.

372. Для того чтобы получить решение уравнения (41), соответствующее этим условиям, мы возьмем «потенциал смещения» (§ 367) в виде некоторой, пока неизвестной функции φ , зависящей от r и t . Запишем, что

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (\text{I})$$

и обозначим:

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (\text{II})$$

Опустив член с R , мы приведем уравнение (41) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi = 0. \quad (III)$$

Проинтегрировав, получим:

$$\left[c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi = 0. \quad (53)$$

(Вообще говоря, справа нужно поставить произвольную функцию от t , но, согласно (I), эта функция не будет влиять на значение U , следовательно, не нарушая общности, ее можно опустить).

Положим:

$$X = r\varphi. \quad (IV)$$

Уравнение (53) приведет к виду:

$$\left[c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] X = 0. \quad (V)$$

Легко проверить, что это уравнение имеет следующее «функциональное решение»:

$$X = F_1(r + ct) + F_2(r - ct), \quad (54)$$

в котором $F_1(x)$, $F_2(x)$ являются произвольными функциями от x .

Таким образом общее решение уравнения (41) при отсутствии массовых сил имеет вид:

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{X}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{F_1(r + ct) + F_2(r - ct)}{r} \right\}, \quad (55)$$

отсюда:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{F_1'(r + ct) - F_2'(r - ct)}{r} \right\}. \quad (56)$$

Вместо $\frac{d}{dx} F(x)$ мы написали $F'(x)$.

373. Функцию $F(r - ct)$ можно интерпретировать, как «волну», которая, не меняя своей формы, движется с постоянной скоростью c в направлении возрастающих r . На самом

деле вполне очевидно, что значение функции на расстоянии r в момент времени t равно ее значению на расстоянии $(r + ct')$ в момент времени $(t + t')$.

Аналогично функцию $F(r + ct)$ можно интерпретировать как волну, которая, не меняя своей формы, движется с постоянной скоростью c в направлении убывающих r . Согласно (IV) и (54), имеем:

$$r\varphi = F_1(r + ct) + F_2(r - ct). \quad (\text{VI})$$

(I) дает:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int U dr \\ \text{и, следовательно,} \\ \dot{\varphi} \left(= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \int \dot{U} dr. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

Для обозначения начальных значений величин (в момент времени $t = 0$) будем использовать индекс нуль.

Из (VI) имеем:

$$r\varphi_0 = F_1(r) + F_2(r) \quad (\text{VIII})$$

и

$$r\dot{\varphi}_0 = c \{F'_1(r) - F'_2(r)\},$$

откуда

$$\int r\dot{\varphi}_0 dr = c \{F_1(r) - F_2(r)\}. \quad (\text{IX})$$

С помощью (VII) можно вычислить φ_0 и $\dot{\varphi}_0$, если заданы U_0 и \dot{U}_0 .

Из (VIII) и (IX) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} 2F_1(r) &= r\varphi_0 + \frac{1}{c} \int r\dot{\varphi}_0 dr, \\ 2F_2(r) &= r\varphi_0 - \frac{1}{c} \int r\dot{\varphi}_0 dr. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

Таким образом, вид функций F_1 и F_2 можно определить, когда заданы U_0 и \dot{U}_0 . Следовательно, формулы (55) и (56) дают полное представление о тех явлениях, которые могут произойти внутри шара, когда заданы некоторые чисто радиальные начальные возмущения. Формулы (55) и (56)

описывают движение *до тех пор, пока возмущение не достигнет свободной, или какой-нибудь закрепленной поверхности, или центра*. После того как это произошло, нужно учитывать явление отражения.

Скорость распространения

374. Мы заметили, что фронт волны, т. е. поверхность раздела между возмущенной и невозмущенной областями, в нашем случае сферическая поверхность с центром в начале, движется нормально самой себе (т. е. по радиусу). Скорость этого движения равна:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (57)$$

Волны расширения, если нет вращения, всегда движутся с этой скоростью. Это общее заключение можно вывести из уравнений движения. Волны вращения, если нет расширения, как можно показать, движутся всегда со скоростью $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ¹⁾.

«Отражение» от закрепленной сферической поверхности

375. Если упругое тело имеет конечные размеры, то решение задачи все время внутри тела удовлетворяет уравнению (41), а на граничных поверхностях тела подчиняется некоторым наложенным на него условиям. В классе задач, который мы сейчас рассматриваем, эти границы являются концентрическими сферическими поверхностями. Заданные граничные условия должны быть совместными с предположением о том, что смещения являются чисто радиальными. Наиболее важные граничные условия следующие:

- (1) U в течение всего времени равно нулю на граничной поверхности тела («закрепленная» граница);
- (2) p_r в течение всего времени равно нулю («свободная» граница).

Для примера рассмотрим первое из этих условий.

¹⁾ Ср. Л я в, цит. соч., гл. XIII, §§ 204 — 207 и ниже §§ 377 — 379.

376. На рис. 100 сфера ($r = a$) является рассматриваемой граничной поверхностью. Предполагается, что тело занимает заштрихованную область ($r < a$), но наше исследование сохранится *mutatis mutandis**) и тогда, когда тело занимает область ($r > a$).

Мы имеем волну $F_2(r - ct)$ данной формы, которая движется со скоростью c в направлении возрастающих r , и волну $F_1(r + ct)$, которая движется со скоростью c в направлении убывающих r . Можно допустить, что последняя волна имеет произвольный вид в дополнительной области ($r > a$). Пусть U на сфере ($r = a$) должно обращаться в нуль, и мы, в силу (55), при всех значениях t имеем уравнение:

$$\frac{1}{r} \{F_1(r + ct) + F_2(r - ct)\} = F_1'(r + ct) + F_2'(r - ct) \quad (\text{XI})$$

при $r = a$.

Вид функции F_2 нам известен, а раз так, то отсюда, поскольку речь идет о влиянии данного отражения, мы можем определить вид функции F_1 .

Легко проверить, что уравнение (XI) удовлетворяется, если положить:

$$F_1(x) = F_2(2a - x) + \frac{2}{a} e^{\frac{x}{a}} \int e^{-\frac{x}{a}} F_2(2a - x) dx.$$

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КРУГЛЫХ ВАЛАХ И ТРУБАХ

377. Легче изучить распространение волн и явление отражения от неподвижной или свободной границы в том случае, когда передаваемое движение является кручением вала или трубы постоянного круглого поперечного сечения. Мы увидим, что скорость распространения волны в этом случае имеет второе из двух указанных в § 374 значений.

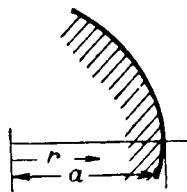


Рис. 100.

*) С соответствующими изменениями (лат.). (Прим. перев.)

Уравнения движения возьмем в виде (18) § 322 и опустим массовые силы X, Y, Z . Ось Oz направим по оси вала или трубы. Попробуем удовлетворить уравнениям движения, предполагая, что смещение всюду и все время лежит в плоскости поперечного сечения и направлено перпендикулярно радиусу-вектору r (рис. 101).

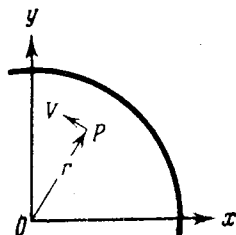


Рис. 101.

Очевидно, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} u &= -V \frac{y}{r}, \\ v &= V \frac{x}{r}, \quad w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Через V обозначено результирующее тангенциальное смещение, зависящее от r, z и t . Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{r} \right) = -\frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{r} \right) = \frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

и

$$\Delta = 0.$$

Из (17) § 322 мы имеем:

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= -\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{x}{r} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{r} \frac{\partial V}{\partial z}, \\ 2\omega_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV). \end{aligned} \quad (III)$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения, мы найдем, что третье из них удовлетворяется тождественно. Другие два совпадают и дают следующее уравнение:

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (58)$$

378. В случае *статического* кручения (гл. V, §§ 155 — 159) было найдено, что смещение V является линейной функцией от z и прямо пропорционально r . Если попробуем принять, что V пропорционально r и в нашем случае, то мы из (I) и (II) получим:

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0,$$

А это значит, что единственными компонентами напряжения, имеющими отличные от нуля значения, являются X_z и Y_z .

В силу наших предположений мы имеем:

$$X_z = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\mu \frac{y}{r} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad Y_z = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \mu \frac{x}{r} \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (59)$$

Отсюда видно, что результирующее касательное напряжение в поперечном сечении всюду направлено перпендикулярно радиусу-вектору. Таким образом граничные условия задачи удовлетворены, и наши предположения, как видно, оправдываются. Основное уравнение (58) сводится к

$$\left[c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] V = 0, \quad (60)$$

где

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

и мы так же, как для уравнения (54) § 372, имеем функциональное решение:

$$V = r \{ F_1(z + ct) + F_2(z - ct) \},$$

которое дает следующее выражение для компонента вращения ω_z :

$$\omega_z = \frac{V}{r} = F_1(z + ct) + F_2(z - ct).$$

Отсюда, согласно (59), мы получим, что

$$\left. \begin{aligned} X_z &= -\mu y \{ F_1'(z + ct) + F_2'(z - ct) \}, \\ Y_z &= \mu x \{ F_1'(z + ct) + F_2'(z - ct) \}. \end{aligned} \right\} (61)$$

Для крутящего момента имеем¹⁾

$$T = \iint (xY_z - yX_z) dx dy = \mu J \{ F_1'(z + ct) + F_2'(z - ct) \},$$

где J — полярный момент инерции площади поперечного сечения²⁾.

¹⁾ Ср. (16) § 339.

²⁾ Ср. §§ 153 — 159.

379. Функции $F_1(z + ct)$ и $F_2(z - ct)$ в равенствах (61) можно интерпретировать так же, как в § 373. Только теперь скорость распространения c будет иметь значение $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Этот результат соответствует замечанию, сделанному в § 374, потому что наше решение для смещения дает отличные от нуля компоненты вращения ω_x , ω_y , ω_z и равную нулю величину объемного расширения Δ .

Сначала допустим, что F_2 исчезает. В этом случае мы имеем волну вращения, определяемую выражением:

$$\omega_z = \frac{V}{r} = F_1(z + ct). \quad (I)$$

Эта волна движется в направлении zO . Возникшие при этом касательные напряжения равны:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= -\mu y F_1'(z + ct) = -\frac{\mu}{c} y \frac{\partial \omega_z}{\partial t}, \\ Y_z &= \mu x F_1'(z + ct) = \frac{\mu}{c} x \frac{\partial \omega_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Результирующее касательное напряжение на расстоянии r от центра имеет величину:

$$\left. \begin{aligned} q &= \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} = \frac{\mu}{c} r \frac{\partial \omega_z}{\partial t}, \\ \text{а крутящий момент имеет значение:} \\ T &= \frac{\mu}{c} J \frac{\partial \omega_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Таким образом напряжения и крутящий момент пропорциональны $\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$, которая является мгновенной угловой скоростью (ее можно обозначить, например, через ω) поперечного сечения вокруг оси Oz вала или трубы. Из (I) мы получим, что

$$\omega = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = c F_1'(z + ct). \quad (63)$$

А это показывает, что волны напряжений так же, как и волны смещений, движутся без изменения формы, с постоянной скоростью c .

Следует заметить, что здесь, как и в динамических задачах, рассмотренных ранее, употребляются системы единиц измерения, наиболее широко принятые в динамике. (Так, в § 370 мы выражали λ и μ в единицах С. Г. С., т. е. в динах на квадратный сантиметр.)

380. Наши результаты легко проследить на частном примере.

Пример

7. (Самб. М. S. T. 1931.) Сплошной стальной вал с диаметром 7,62 см вращался и делал 600 об/мин., когда один из его концов внезапно остановили.

Показать, что максимальное касательное напряжение, возникшее в валу, приблизительно равно 624 кг/см².

$$C (= \mu) = 0,84 \times 10^9 \text{ кг/см}^2 \text{ и } \rho g = 0,0078 \text{ кг/см}^3.$$

[Очевидно, задача не изменится, если мы пренебрежем постоянным вращением и примем, что одному из концов вала, первоначально находившемуся в покое, внезапно сообщена угловая скорость, равная

$$\frac{600 \times 2\pi}{60} = 20\pi \text{ радиан/сек.} \quad (\text{I})$$

Из формул (62) и (63) мы имеем:

$$\frac{q}{\mu} = \frac{r\omega}{c} = r\omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (\text{II})$$

Подставим сюда из условий задачи

$$\left. \begin{array}{l} r = 3,81 \text{ см, } \rho = 0,0078 \text{ кг/см}^3, \\ \mu = 0,84 \times 10^9 \text{ кг/см}^2, \end{array} \right\} \quad (\text{III})$$

тогда

$$\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \sqrt{\frac{0,0078}{981 \cdot 0,84 \cdot 10^9}} = \frac{0,00308}{10^4}.$$

Подставляя (I) и (III) в (II), мы получим в кг/см²

$$q = 0,34 \cdot 10^9 \cdot 3,81 \cdot 20\pi \frac{0,00308}{10^4} = 622 \text{ кг/см}^2 \text{ (приблизленно)}.$$

Отражение от закрепленного конца

381. Вернемся к § 379 и предположим, что волна вращения, заданная выражением

$$\omega_z = F_1(r + ct), \quad (1)$$

движется в направлении zO к *закрепленному* сечению ($z = 0$). Для того чтобы учесть это обстоятельство, мы должны для ω_z взять полное выражение, определяемое (61), и написать¹⁾:

$$\omega_z = F_1(z + ct) + f(ct - z). \quad (64)$$

При этом мы предполагаем, что функция f равна нулю во всех сечениях вала или трубы *вплоть до того момента, когда волна F_1 достигнет закрепленного конца*. Мы скажем, что $f(ct - z)$ порождается «отражением» и назовем ее отраженной волной.

В силу того, что ω_z должно исчезать при $z = 0$, мы из (64) в момент отражения и после него имеем выражение:

$$F_1(ct) + f(ct) = 0, \quad (65)$$

из которого определяется вид функции f .

Выражение (64) заменяется следующим:

$$\omega_z = F_1(ct + z) - F_1(ct - z), \quad (66)$$

а оно, очевидно, удовлетворяет условию закрепления сечения ($z = 0$) и является решением основного уравнения (60).

Отражение на свободном конце

382. Если сечение $z = 0$ является *свободным* концом вала или трубы, то *напряжения* в этом сечении в каждый момент времени должны равняться нулю. Пусть, как и раньше, компонент вращения ω_z дается выражением (64). Выражения (59) эквивалентны соотношениям:

$$X_z = -\mu y \frac{\partial \omega_z}{\partial z}, \quad Y_z = \mu x \frac{\partial \omega_z}{\partial z}. \quad (67)$$

¹⁾ Очевидно, что любую функцию F_2 от $(z - ct)$ можно заменить эквивалентной ей функцией f от $(ct - z)$.

Следовательно,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = F'_1(ct+z) - f'(ct-z)$$

должно обращаться в нуль при $z=0$. Так что условие (65) заменяется следующим:

$$F'_1(ct) - f'(ct) = 0. \quad (68)$$

Это условие удовлетворяется, если вид функции F_1 подобен виду функции f .

Следовательно, само выражение (64) может быть заменено теперь следующим:

$$-\omega_z = F_1(ct+z) + F_1(ct-z). \quad (69)$$

Графическое изображение явлений отражения

383. В сечении $z=0$, согласно формуле (69), мы имеем:

$$\omega_z = 2F_1(ct),$$

что в два раза больше той величины, которой равнялось бы ω_z в случае отсутствия отражения. Таким образом на свободном конце смещения в первоначальной и отраженной волнах складываются, а напряжения вычитаются. В случае закрепленного конца (§ 381) мы будем иметь противоположное. На самом деле вполне очевидно, что на закрепленном конце смещения в первоначальной и отраженной волнах вычитаются.

Кроме того, из формул (66) и (67) мы имеем:

$$\begin{aligned} X_z, Y_z &= \mu(-y, x) \{F'_1(ct+z) + F'_1(ct-z)\} = \\ &= 2\mu(-y, x) F'_1(ct) \quad [\text{при } z=0], \end{aligned}$$

что в два раза больше той величины, которой равнялись бы X_z, Y_z в случае отсутствия отражения. Другими словами, напряжения в первоначальной и отраженной волнах складываются.

Наши последние выводы можно пояснить на рисунке (рис. 102). На верхнем рисунке изображен стержень с закрепленным концом ($z=0$); волна A вращения ω_z движется в направлении zO , т. е. справа налево. Волна проходит сечение $z=0$ и перестает существовать в действительности, но мы можем себе представить, что она продвинулась в область

$z < 0$. Вместе с тем мы можем считать, что вторая волна вращения (имеющая пока произвольную форму) продвигается слева направо в воображаемой области $z < 0$. Эта последняя волна становится действительно существующей после того,

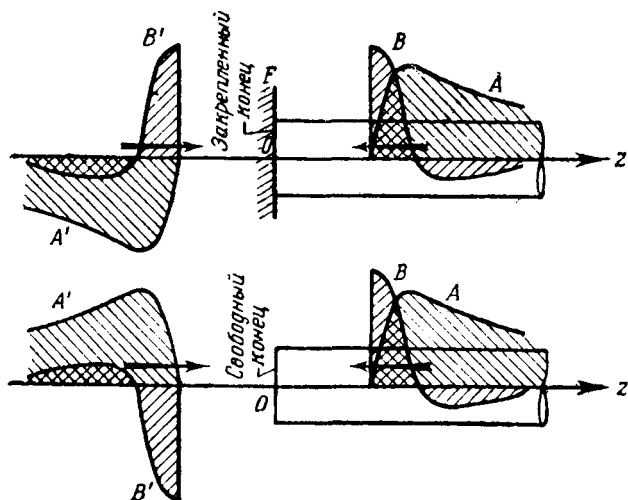


Рис. 102.

как она пройдет сечение $z=0$. Примем, что форма введенной нами волны A' получается из формы волны A последовательным отражением сначала относительно FO , потом Oz (см. рисунок). Так построенные волны A и A' продвигаются в противоположные стороны с одной и той же скоростью и, следовательно, в сечении $z=0$ будут всегда уничтожать одна другую, в других сечениях оказываемые ими эффекты вычитаются.

Напряжение в волне вращения, как показывают формулы (67), в каждом сечении пропорционально градиенту относительно z величины вращения ω_z . Из верхнего рисунка 102 видно, что в то время как A и A' имеют противоположные знаки, связанные с ними волны напряжений B и B' имеют одинаковые знаки. Таким образом, когда волны B и B'

встречаются, то оказываемые ими эффекты складываются. Нижний рисунок 102 соответствует валу, конец которого в сечении $z=0$ свободен. Волны напряжений B и B' должны вычитаться, следовательно, волны вращения A и A' должны иметь *одинаковые* знаки.

Графические исследования, аналогичные приведенному здесь, являются наиболее удобным способом решения задач о распространении волн.

Распространение продольных волн в цилиндрических стержнях

384. Предположим, что продольные напряжения, не сопровождаемые компонентами напряжения других видов, распространяются по цилиндрическому стержню подобно тому, как было рассмотрено выше. Легко вывести уравнение, описывающее это явление. На самом деле движение слоя материала, заключенного между двумя поперечными сечениями, удаленными друг от друга на расстояние δz , зависит от разности сил растяжений P и $(P + \delta P)$, действующих на этих плоскостях.

Основываясь на этом, мы имеем:

$$\rho A \delta z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta P = \frac{\partial P}{\partial z} \delta z,$$

где через A обозначена площадь поперечного сечения.

Если мы примем, что напряжение является чисто продольным, то:

$$P = AE \frac{\partial w}{\partial z},$$

так как $\frac{\partial w}{\partial z}$ является продольным удлинением.

Итак, имеем уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Его можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \left[c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w = 0, \\ & c^2 = \frac{E}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

в котором

385. Вид уравнения (70) подобен виду уравнения (60). Следовательно, оба уравнения имеют одинаковые функциональные решения, и методы §§ 379—383 можно применять при исследовании решения уравнения (70). Против приведенного вывода можно возражать. Например, смещение, рассматриваемое в § 384, сопровождается расширением. Общая теорема теории распространения волн¹⁾ устанавливает, что фронт волны такого рода возмущений двигается нормально самому себе со скоростью, величина которой определяется из (57). Отношение этой скорости к скорости $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (§ 384) равно:

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{E}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \sigma}{1 - \sigma - 2\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

Последнее равенство имеет место в силу формулы (8) § 318. Отсюда, видимо, следует, что некоторая часть продольного возмущения распространяется с большей, чем определяемая уравнением (70), скоростью. Таким образом волна продольного напряжения не может двигаться без изменения своей формы.

Настоящая точка зрения выдвигается с большой неуверенностью потому, что многие авторы за основу своих изысканий по распространению напряжений брали уравнение (70). Это были Сен-Венан, Буссинеск, Кельвин и Тэт, Рэлей, Д. Перри. Они использовали методы, принцип которых подобен методам §§ 379—383. Их исследования подробно описаны в сочинениях Лява²⁾ и Тимошенко³⁾. С помощью экспериментальных исследований Сирса и Уэгстеффа⁴⁾ спорный вопрос едва ли может быть решен, ввиду того, что скорости

$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ мало отличаются друг от друга.

¹⁾ Ляв, цит. соч., §§ 203—207.

²⁾ Цит. соч., глава XX.

³⁾ Теория упругости, глава XII.

⁴⁾ Ср. Ляв, цит. соч.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XI

*Приближенные решения задач кручения и изгиба***Мембранная аналогия Прандтля задачи кручения**

386. Функция кручения φ (§ 341) математически точно определена только для ограниченного числа контуров, и только некоторые из этих контуров интересны в технике. Приближенные результаты можно получить из эксперимента, если вместо φ гармонической функции двух переменных мы будем искать сопряженную ей функцию ψ . Функция ψ определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

отсюда следует, что

т. е. ψ тоже является гармонической функцией двух переменных.

С помощью (71) граничные условия (14) § 338 могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(x, n) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) - \cos(y, n) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) = \\ &= \left[\cos(x, n) \frac{\partial}{\partial y} - \cos(y, n) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} \end{aligned}$$

(см. рис. 97), отсюда следует, что во всех точках контура

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (72)$$

Введем новую функцию Ψ :

$$\Psi = \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Из уравнения (71) следует, что Ψ во всех точках поперечного сечения удовлетворяет уравнению:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi = -2, \quad (73)$$

а во всех точках контура [согласно (72)] условию

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0.$$

387. Уравнения, которым удовлетворяют ϕ и Ψ , встречаются во многих задачах математической физики. В частности, как впервые было замечено Л. Прандтлем¹⁾, можно считать, что функции ϕ и Ψ , входящие в наши уравнения, в любой точке внутри контура дают малый прогиб гибкой мембраны, растяжение которой постоянно во всех направлениях. Давления на противоположных поверхностях мембраны имеют одно и то же значение, когда мы имеем дело с уравнением (71), и отличаются на постоянную величину в случае уравнения (73). Мыльная пленка, благодаря наличию поверхностного натяжения, представляет собой мембрану с таким постоянным растяжением. Если мы приложим малое и постоянное давление к одной из ее поверхностей и не будем допускать смещения точек границы, то прогиб будет удовлетворять условию, наложенному на функцию Ψ . С другой стороны, если мы подчиним прогиб на границе условию (72) и на обе поверхности мембраны подействуем одним и тем же давлением, то прогиб будет удовлетворять условиям, наложенным на функцию ϕ . Какой бы из этих путей мы ни избрали, если мы из опыта определим прогибы мембраны внутри контура, то получим экспериментальное решение задачи кручения для контура любой нужной формы.

Практические приложения

388. Эти соображения были практически осуществлены А. А. Гриффисом и Д. И. Тейлором в 1917 г.²⁾ Эксперимент проводился следующим образом. Над отверстием нужной формы, сделанном в плоском металлическом листе, помещалась мыльная пленка. Она подвергалась действию струи воздуха так, чтобы ее прогиб удовлетворял уравнению относительно Ψ . Значения прогиба Ψ измерялись иглой, которая прикреплялась к микрометру и приводилась в соприкосновение с пленкой.

¹⁾ *Phys. Zeitschr.*, 4 (1903). Тимошенко (цит. соч. в § 76) ссылается на применение этой аналогии Антесом (Anthes), опубликованное в 1906 г., и там же в § 95 на предложение способа мыльной пленки (§ 388), сделанное Vening Meinesz в 1911 г.

²⁾ *Engineering*, 104 (1917), 652, 699; *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 333 (1917). Ср. подстрочное примечание к § 387.

Градиенты функции Ψ , дающие касательные напряжения, вызываемые при кручении¹⁾, определялись посредством измерения углов наклона пленки (на поверхность пленки направлялся луч света и измерялся угол отражения).

Необходимость измерять давление и величину поверхностного натяжения обошли следующим образом: одновременно приложили то же самое давление и к другой мыльной пленке, натянутой на круглое отверстие. Если степень кручения была одинакова, то сравнение углов наклона в двух пленках давало отношение соответствующих напряжений (§ 340).

Полное описание эксперимента содержится в «Теории упругости»²⁾ Тимошенко. Провести измерения с большой точностью крайне трудно, потому что мембранную аналогию (§ 387) можно применить только тогда, когда наклон поверхности мыльной пленки всюду мал. Кроме того, прогиб, вызванный весом пленки, обычно сравним с прогибом, вызванным приложенным давлением, если последнее достаточно мало.

Теоретические приложения

389. В главе VI (§ 185) для теоретического решения некоторых задач об определении прогиба в балках мы использовали «версочную» аналогию. Таким же образом, мембранную аналогию Прандтля можно положить в основу приближенного теоретического решения задач кручения.

В § 386 мы видели, что функцию Ψ можно интерпретировать как прогиб мембраны, нагруженной равномерным давлением, приложенным к одной из ее поверхностей. Эта функция во всех точках поперечного сечения удовлетворяет уравнению:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi = -2 \\ & \text{и во всех точках контура условию} \\ & \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (73) \text{ bis}$$

¹⁾ Ср. уравнение (74) § 389.

²⁾ Цит. соч.

Из формул (10) § 336 мы видим, что напряжения, соответствующие кручению, следующие:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu e_{xz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) = \\ &= \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) = \quad [\text{согласно (71)}] \\ &= \mu \tau \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} (74)$$

и $Y_z = \mu e_{yz} = -\mu \tau \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ [после аналогичных преобразований].

Постоянная τ (§ 340) является степенью кручения. Наконец, из формулы (17) § 339 и уравнения (71) мы имеем следующее выражение для «модуля кручения».

$$\begin{aligned} H &= \iint \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= - \iint \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy = \quad [\text{согласно (73)}] \\ &= \iint \left\{ 2\Psi - \frac{\partial}{\partial x} (x\Psi) - \frac{\partial}{\partial y} (y\Psi) \right\} dx dy. \quad (I) \end{aligned}$$

Воспользовавшись преобразованием Грина¹⁾, получим:

$$H = 2 \iint \Psi dx dy - \int \Psi \{ x \cos(x, n) + y \cos(y, n) \} ds. \quad (75)$$

Двойной интеграл распространен на всю площадь поперечного сечения, а криволинейный — на весь контур поперечного сечения.

Сплошные поперечные сечения

390. Функция Ψ , согласно условию (73), имеет постоянное значение вдоль любого замкнутого контура. Если вал сплошной, т. е. контур поперечного сечения состоит из одной замкнутой кривой, то, не нарушая общности, мы можем принять, подобно тому как это делалось в экспериментальном методе

¹⁾ Ср. подстрочное примечание § 338.

§ 387, что Ψ на контуре обращается в нуль. Это справедливо, потому что аддитивная постоянная в функции Ψ не влияет на напряжения, определяемые формулами (74), и не влияет на модуль кручения, определяемый формулой (75). Рассмотрим криволинейный интеграл, входящий в формулу (75). Функция Ψ имеет на контуре постоянное значение, скажем, Ψ_c , т. е. имеем:

$$\Psi_c \int \{ x \cos(x, n) + y \cos(y, n) \} ds.$$

Если вновь применить преобразование Грина, то этот интеграл будет равен $2\Psi_c \iint dx dy$. (76)

Таким образом, если сечение сплошное и мы предполагаем, что в каждой точке контура Ψ обращается в нуль, то вместо формулы (75) имеем

$$H = 2 \iint \Psi dx dy. \quad (77)$$

Полые поперечные сечения

391. Если поперечное сечение вала ограничено *двумя* замкнутыми кривыми, как, например, на рис. 103, то мы, не нарушая общности, можем принять, что Ψ исчезает в точках внешнего контура, но мы не имеем права считать, что Ψ равно нулю также и в точках внутреннего контура. Мы только знаем, что Ψ на внутреннем контуре имеет некоторое постоянное значение, скажем, Ψ_c . При выводе формулы (75) мы брали нормаль, внешнюю к контуру поперечного сечения; эта нормаль, будучи внешней для внешнего контура, будет *внутренней* для внутреннего. Учитывая это замечание (см. рис. 103), криволинейный интеграл по внутреннему контуру поперечного сечения, входящий в формулу (78), мы можем заменить выражением (76) с противоположным знаком, т. е. вместо формулы (75) будем иметь:

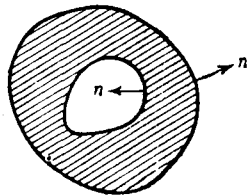


Рис. 103.

$$H = 2 \iint \Psi dx dy + 2\Psi_c A_c, \quad (78)$$

где через A_c обозначена площадь, ограниченная внутренним контуром. Итак, если мы примем, что во всех точках области, ограниченной внутренним контуром, Ψ имеет постоянное значение, то выражение (77) будет справедливо как для сплошных, так и для полых поперечных сечений.

392. При проведении мембранной аналогии мы истолковали функцию Ψ как прогиб мембраны, находящейся под действием постоянного натяжения T на единицу длины, когда к одной из ее поверхностей приложено постоянное давление интенсивности $2T$ на единицу площади. Применяв преобразование Грина к уравнению (73), мы получим формулу



$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = -2 \iint dx dy, \quad (79)$$

Рис. 104.

которую можно интерпретировать следующим образом: полная поперечная сила, вызванная натяжением за счет наклона мембраны на контуре, уравновешивает постоянное давление, действующее по всей площади, заключенной внутри контура мембраны. Этот результат дает нам возможность осуществить опыт с мыльной пленкой (§ 388) в случае полого поперечного сечения и вместе с тем дает условие, из которого определяется Ψ_c в формуле (78). Так, представим себе, что легкая жесткая пластинка C (см. рис. 104), имеющая форму внутреннего контура, может свободно передвигаться параллельно самой себе, т. е. так, что перемещение каждой ее точки одно и то же по направлению, но величина его ничем не ограничена. Между пластинкой и неподвижным внешним контуром натягивается мыльная пленка. К пленке и пластинке прикладывается равномерное давление. Система занимает положение равновесия.

Тонкостенные трубы

393. Применим наши результаты к *тонкостенным* трубам. В этом случае наклон поверхности мыльной пленки между внутренним и внешним контурами поперечного сечения практически постоянен. По направлению нормали к внутреннему и внешнему

контурам наклон приближенно выразится величиной $\frac{\Psi_c}{t}$, где t — толщина трубы в рассматриваемой точке. Согласно формуле (79), мы будем иметь¹⁾:

$$\Psi_c \int \frac{ds}{t} = 2A_c, \quad (I)$$

где A_c имеет то же значение, что и в § 391. Результирующее касательное напряжение, согласно формулам (74), будет направлено по касательной к контуру и его интенсивность равняется

$$q = \mu\tau \frac{\Psi_c}{t}. \quad (II)$$

Результирующий крутящий момент, согласно (16) и (77), определяется формулой:

$$T = \mu\tau H = 2 \mu\tau \Psi_c A_c. \quad (III)$$

Эта формула очень точна, так как мы пренебрегаем в H той частью (относительно малой), которую дает площадь между внутренним и внешним контурами. Из (II) и (III) мы получим, что

$$T = 2t A_c q. \quad (80)$$

Таким образом мы подтвердили соотношение, найденное нами из других соображений в § 161. Из формул (I) и (II) мы имеем:

$$q = 2 \mu\tau \frac{A_c}{t} \frac{1}{\int \frac{ds}{t}} = 2 \mu\tau \frac{A_c}{s}. \quad (81)$$

Последнее равенство имеет место при постоянном t ; через s обозначена длина внутреннего контура. Наконец, из формул (80) и (81), исключая q , мы получим:

$$T = 4 \mu\tau \frac{A_c^2}{s}. \quad (82)$$

¹⁾ При выводе формулы (79) мы брали внешнюю для внешнего контура нормаль и поэтому $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ равно $-\frac{\Psi_c}{t}$.

Формулы (81) и (82) подтверждают результаты, выраженные соответственно формулам (13) и (12) § 162.

Решение задачи кручения с помощью метода энергии

394. Вернемся к § 392 и заметим, что когда мембрана под действием давления находится в равновесии, то полная потенциальная энергия системы, согласно общей теореме механики, указанной в § 19, должна иметь минимальное значение. Потенциальная энергия растяжения равна (ср. § 494)

$$\frac{1}{2} T \iint \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

а потенциальная энергия давления ($2T$ — нагрузка на единицу площади):

$$- \iint 2T\Psi dx dy.$$

Отсюда мы видим, что истинным выражением для Ψ будет то, при котором

$$V = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - 4\Psi \right\} dx dy$$

имеет минимальное значение.

С помощью вариационных методов¹⁾ из этого условия можно получить основное уравнение (73), и оно же дает возможность определить Ψ приближенным методом. Выразим Ψ в виде ряда

$$\Psi = a_1 \chi_1 + a_2 \chi_2 + \dots$$

Ряд составлен так, что каждый его член удовлетворяет граничному условию и содержит неизвестный множитель a_i . Далее составим соответствующее выражение для V , и наконец, определим a_1, a_2, \dots из условия минимума потенциальной энергии V . Последовательность действий нашего метода близка к последовательности действий в процессе применения второй теореме Кастилиано к статически неопределимым фермам (гл. III).

¹⁾ Ср. гл. XIII, § 403 и последующие.

Примеры применения этого метода можно найти в «Теории упругости» Тимошенко¹⁾.

Мембранная аналогия Тимошенко задачи изгиба

395. Соображения, положенные в основу мембранной аналогии, были обобщены С. П. Тимошенко²⁾ и применены им к более трудной «задаче изгиба» (§ 350). Пусть ψ , как и в § 386, является гармонической функцией двух переменных, сопряженной с функцией φ . Через ζ обозначим функцию, сопряженную с χ , которая, как было показано в § 350, является гармонической функцией двух переменных.

Таким образом, по определению, мы имеем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (I)$$

откуда:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \zeta = 0. \quad (II)$$

Подставив эти соотношения в (35) и применив (71), мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{W}{I} \left\{ \frac{1}{2} x^2 - f(y) \right\}, \quad Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \text{где} \quad \Phi &= \mu\tau \left\{ \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\} - \\ &\quad - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \left\{ \zeta - \frac{2+\sigma}{2} x^2 y + F(y) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Функции $f(y)$, $F(y)$ зависят только от y и связаны уравнением

$$F'(y) = 2(1+\sigma)f(y) + \frac{1}{2}(2-\sigma)y^2. \quad (III)$$

Функции ψ и ζ — гармонические функции двух переменных, а поэтому, используя (III), мы найдем уравнение, определяющее Φ :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Phi = \frac{W}{I} \left\{ \frac{\sigma}{1+\sigma} y - f'(y) \right\} - 2\mu\tau. \quad (84)$$

¹⁾ § 80, см. примечание стр. 660.

²⁾ *Proc. London Math. Soc.*, (2), 20 (1922), 398. Ср. также *Сборник института инженеров путей сообщения* (С.-Петербург), 1913.

Подставив уравнение (83) в граничное условие (13), мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \cos(x, n) \frac{W}{I} \left\{ \frac{1}{2} x^2 - f(y) \right\}. \quad (85)$$

396. Функция $f(y)$ пока не определена. Обратившись к выражениям для смещений (38) § 353, мы сможем дать физическое толкование двум другим членам правой части уравнения (84).

Мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \left(\tau z - \frac{W}{EI} \sigma y z \right), \\ \text{откуда} \\ -2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= 2\mu \left(\frac{\sigma W}{EI} y - \tau \right) = \frac{W}{I} \frac{\sigma}{1+\sigma} y - 2\mu \tau. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Первый член в правой части (IV) соответствует степени изменения s с изменением z вращения, получающегося от антикластической кривизны (ср. §§ 170, 345 и 353). Второй соответствует углу поворота, вызванному крутящим моментом.

397. Если контур симметричен относительно оси y , то возможно выбрать $f(y)$ так, что правая часть условия (85) обратится в нуль; после этого будет определена вся правая часть уравнения (84) и функцию Φ можно будет интерпретировать как прогиб мембраны, которая помещена над отверстием в плоской пластинке, растянута действием постоянной силы и нагружена давлением, зависящим в каждой точке только от y и пропорциональным:

$$\frac{W}{I} \left\{ \frac{\sigma}{1+\sigma} y - f(y) \right\} - 2\mu \tau.$$

Это и есть мембранная аналогия Тимошенко. Определенную выше функцию Φ можно назвать функцией изгиба Тимошенко¹⁾. Если сечение симметрично относительно оси x и нагрузка W действует в плоскости zOx , то в силу соображений симметрии член с τ можно опустить.

¹⁾ Несколько приложений метода рассмотрены в главе X «Теория упругости» Тимошенко. Ср. также W. J. Dunsap, *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 1444 (1932).

Пример

8. С помощью мембранной аналогии Тимошенко решить задачу изгиба для сечения, ограниченного окружностью $r=a$ и нагруженного силой, проходящей через центр сечения так, что кручения не происходит.

[Правая часть уравнения (85) обратится в нуль, если мы возьмем $f(y) = \frac{1}{2}(a^2 - y^2)$, и тогда выражение справа в (84) сведется (τ равно нулю) к

$$\frac{W}{I} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} y.$$

Граничное условие ($\Phi=0$) будет удовлетворено, если взять

$$\Phi = \frac{W}{I} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} (a^2 - x^2 - y^2) \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — любая функция только одного y ; уравнение (84) будет удовлетворяться, если мы возьмем

$$\varphi(y) = -\frac{1}{8} y.$$

Таким образом, мы имеем

$$\Phi = -\frac{1}{8} \frac{W}{I} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} (a^2 - x^2 - y^2) y.$$

Отсюда, согласно формулам (33), мы найдем, что

$$X_z = \frac{1}{8} \frac{W}{I} \frac{3+2\sigma}{1+\sigma} \left(a^2 - x^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right),$$

$$Y_z = -\frac{1}{4} \frac{W}{I} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} xy.$$

Полученные результаты можно сравнить с результатами, найденными классическим методом (пример 2).]

398. С другой стороны, мы можем выбрать $f'(y)$ так, чтобы правая часть уравнения (84) обратилась в нуль, т. е. мы можем написать:

$$f(y) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{1+\sigma} y^2 - 2\mu\tau \frac{I}{W} y + \text{const.} \quad (I)$$

Тогда Φ будет гармонической функцией двух переменных, уже не обращающейся в нуль на контуре. Она будет одно-

значной на контуре, если ось y проходит через центр тяжести поперечного сечения, так как из условия (85) мы имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds &= \frac{W}{T} \int \left\{ \frac{1}{2} x^2 - f(y) \right\} \frac{dy}{\partial s} ds = \\ &= \frac{W}{T} \left[\frac{1}{2} \int x^2 dy - \int f(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

Член $\frac{1}{2} \int x^2 dy$ выражает статический момент площади поперечного сечения относительно оси y , а он в нашем случае равен нулю. Следовательно, Φ можно выразить как функцию только y .

Постоянный член в формуле (I) не существенен, а член с τ , представляющий крутящее усилие, можно опустить, если поперечное сечение симметрично. Таким образом в нашем случае из равенства (86) мы получим, что во всех точках контура

$$\Phi = -\frac{W}{T} \int f(y) dy = -\frac{1}{6} \frac{W}{T} \frac{\sigma}{1+\sigma} y^3 + \text{const.} \quad (87)$$

Решение задачи изгиба способом мыльной пленки

399. Воспользовавшись уравнением (87), мы можем применить способ мыльной пленки (§ 388) к задаче изгиба. Функция Φ является гармонической функцией двух переменных, следовательно, не нужно прикладывать давления к пленке, растянутой над отверстием нужной формы. Это отверстие вырезано в пластинке, изогнутой таким образом, что прогиб на контуре отверстия имеет удовлетворяющие граничным условиям значения. А. А. Гриффис и Д. И. Тейлор¹⁾ исследовали с помощью этого метода различные формы контуров. Их работы изложены в «Теории упругости» Тимошенко²⁾.

¹⁾ *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 399 (1917). Ср. подстрочное примечание к § 387.

²⁾ Гл. X.

Применение методов релаксации к задачам кручения и изгиба

399 А. Метод релаксации (§ 106) можно обобщить и применить к любой задаче, основное уравнение которой записывается в такой форме:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w = F(x, y). \quad (88)$$

Функция F в этом уравнении известна. Уравнение интегрируется при некоторых граничных условиях, т. е. при заданных на границе значениях w или $\frac{\partial w}{\partial n}$. Таким образом вместе с приближенным способом мыльной пленки (§ 388) мы имеем другой приближенный метод, который, повидимому, может дать большую точность. Более того, этот новый метод можно применять к напряженному состоянию за пределом пропорциональности, т. е. к более трудной задаче. Метод частично изложен в главе XII моей книги «Relaxation Methods»¹⁾.

¹⁾ Ср. также *Proc. R. S.*, 168 (1938), 317—350 и D. G. Christopher, *Am. Journ. Appl. Mech.*, 7 (1940), A1—4.

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.
ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ И ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВАЛЫ ¹⁾****Плоская деформация**

400. Решение общей задачи теории упругости, а именно, интегрирование уравнений движения или равновесия при определенных граничных условиях, т. е. при заданных на поверхности тела напряжениях или смещениях, получено только для тел очень простой формы (например, для шара и эллипсоида). Инженер имеет дело с телами сложной формы (как, например, коленчатые валы) и вынужден обычно пользоваться приближенными решениями, которые мы дали для балок и пластинок.

Вместе с тем существует важный класс задач, точные решения которых можно получить с помощью относительно простой теории. Рассмотрим очень длинный цилиндр из однородного и изотропного материала, поперечное сечение которого имеет какую-нибудь заданную форму. Пусть деформации в теле вызываются массовыми силами или напряжениями, приложенными к его боковой поверхности (поверхностными напряжениями). Допустим, что действующие силы или напряжения всюду направлены перпендикулярно оси цилиндра, и их величина не зависит от расстояния по оси, т. е. мы допускаем, что их величины и направления не меняются от сечения к сечению. В таком случае во всем цилиндре, за исключением, может быть, областей, лежащих непосредственно около его концов, деформации, согласно условию минимума упругой энергии (гл. III, § 92), также не будут зависеть от расстояния по оси. Тело после деформации останется цилиндрическим, а плоские поперечные сечения останутся плоскими. Деформация, обладающая такими свойствами, называется *плоской деформацией*.

¹⁾ См. примечание на стр. 660.

401. Выразим наши предположения и заключения математически. Ось Oz направим по оси цилиндра. Компоненты напряжения X_z и Y_z , благодаря симметрии, должны обращаться в нуль в среднем поперечном сечении цилиндра; мы потребуем, чтобы они равнялись нулю всюду. Если действуют массовые силы, то они должны зависеть только от x и y и, кроме того, не должны иметь компонента по оси z .

Примем также, что остальные компоненты напряжения не зависят от z . Таким образом величина продольного удлинения e_{zz} не будет зависеть от z . Уравнения движения в напряжениях, т. е. уравнения (16) главы VIII, сведутся к более простому виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= \rho f_x, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= \rho f_y, \\ 0 &= \rho f_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Третье из них показывает, что ускорения, подобно массовым силам, должны быть всюду направлены перпендикулярно Oz . Введя «силы инерции»¹⁾, мы можем заменить члены с ускорением эквивалентными массовыми силами. Итак, в качестве уравнений в напряжениях, соответствующих плоской деформации, мы возьмем следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В силу наших предположений, все шесть компонентов деформации не зависят от z , кроме того, e_{zz} не зависит также от x и y , а e_{yz} , e_{zx} равны нулю. Таким образом из условий совместности, т. е. уравнений (12) главы IX, пять удовлетворяются тождественно. Остается только одно из них, а

¹⁾ См. главу VI, § 209.

именно:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Наконец, в качестве соотношения между тремя нормальными компонентами напряжения мы имеем равенство

$$e_{zz} = \frac{1}{E} [Z_z - \sigma (X_x + Y_y)] = k \text{ (постоянная)}. \quad (4)$$

*402. В этой главе мы будем разбирать те случаи, в которых ρ постоянно, а массовые силы консервативны ¹⁾.

Для сил такого рода $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, и мы можем написать:

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}. \quad (5)$$

Обозначим через χ некоторую функцию от x и y и предположим, что

$$X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.$$

Уравнения (2) записываются в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(X_x - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \rho \Omega \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(Y_y - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho \Omega \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Следовательно, все напряжения можно выразить с помощью одной функции напряжений χ , которую обычно называют функцией напряжений Эри ²⁾. На самом деле мы удовлетворим обоим уравнениям в напряжениях, если положим ³⁾:

$$X_x = \rho \Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \rho \Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

¹⁾ Фиктивные массовые силы, с которыми мы встретились в теории температурных напряжений (гл. X, §§ 323—326), являются такого рода силами, потому что, как мы видели, они связаны с фиктивным потенциалом $\rho \Omega$.

²⁾ G. V. Airy, *Brit. Ass. Report*, 1862, ср. § 287.

³⁾ При решении уравнений (6) появляются произвольные функции от x и от y , но их можно включить в χ , при этом компоненты напряжения, выраженные формулами (7), не изменятся.

Еще необходимо удовлетворить условию (3), которое при подстановке в него функции напряжений приобретает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)] = 2(1 + \sigma) \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} \quad (I)$$

или, если мы воспользуемся равенством (4):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \{(1 - \sigma)X_x - \sigma Y_y\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{(1 - \sigma)Y_y - \sigma X_x\} = 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y}. \quad (II)$$

Подставив сюда (7), мы получим:

$$\nabla_1^4 \chi + \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \nabla_1^2 (\rho \Omega) = 0. \quad (8)$$

Этому уравнению, в случае плоской деформации, и должна удовлетворять функция напряжений χ .

Символ ∇_1^2 означает оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Плоское напряженное состояние

403. Теперь вместо очень длинного цилиндра § 400 рассмотрим очень короткий цилиндр, т. е. пластинку. Пусть ось Oz направлена перпендикулярно граничным плоскостям пластинки. Примем, как и раньше, что направления приложенных массовых сил и поверхностных напряжений перпендикулярны Oz . Вместе с тем мы предположим, что торцы цилиндра, т. е. плоскости пластинки, совершенно не напряжены. Согласно нашим предположениям, мы имеем задачу о пластинке, которая растягивается силами, лежащими в ее же собственной плоскости. Толщину пластинки обозначим $2h$; начало координат поместим в срединной поверхности и напишем следующие основные условия:

$$X_z = Y_z = Z_z = 0 \text{ при } z = \pm h. \quad (9)$$

Если пластинка тонкая, т. е. h мало, то, очевидно, что X_z, Y_z, Z_z будут всюду малы. Это соображение дает нам

возможность упростить общие уравнения. Воспользуемся «полуобратным» методом Сен-Венана (гл. XI, § 332) и предположим, что условия (9) имеют место во *всех* точках пластинки. В этом случае мы приходим к так называемому плоскому напряженному состоянию.

404. Мы сведем уравнения в напряжениях опять к форме (2), если мы точно так же, как и раньше, заменим члены с ускорением эквивалентными массовыми силами, направления которых перпендикулярны Oz . Если массовые силы имеют потенциал, то мы сможем удовлетворить уравнениям, положив:

$$X_x = \rho\Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \rho\Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (7) \text{ bis}$$

Деформации теперь подчинены новым условиям, и мы не можем предполагать, что функция χ удовлетворяет тому же уравнению (8).

Первое и второе из условий (9) требуют, чтобы e_{yz} , e_{zx} были нулями, а поэтому условия совместности, т. е. уравнения (12) главы IX сводятся к

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= 0, & \text{(IV)} \quad 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial z}, \\ \text{(II)} \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= 0, & \text{(V)} \quad 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial y \partial z}, \\ \text{(III)} \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, & \text{(VI)} \quad 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Согласно третьему из условий (9), компонент напряжения Z_z равен нулю, и мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y) = \frac{1}{E} \{ (1 + \sigma) X_x - \sigma \Theta \}, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x) = \frac{1}{E} \{ (1 + \sigma) Y_y - \sigma \Theta \}, \\ e_{zz} &= -\frac{\sigma}{E} \Theta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\Theta = X_x + Y_y = 2\rho\Omega + \nabla_1^2 \chi$ [согласно (7)]

и, как раньше, $\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Кроме того, $e_{xy} = \frac{1}{\mu} X_y = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y$.

Подставим эти выражения в условия совместности (10), и, используя соотношения (7), получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{из (III):} & \quad \nabla_1^2 [\Theta - (1 + \sigma)\rho\Omega] = 0, \\ \text{из (IV):} & \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [\Theta - (1 + \sigma)\rho\Omega] = 0 \\ \text{и из (V):} & \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [\Theta - (1 + \sigma)\rho\Omega] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{Из (I):} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ (1 + \sigma)(\Theta - X_x) - \sigma\Theta \} - \sigma \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(1 + \sigma) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sigma\Theta \right] = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\Theta - (1 + \sigma)\rho\Omega], \\ \text{из (II):} & \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(1 + \sigma) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sigma\Theta \right] = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\Theta - (1 + \sigma)\rho\Omega], \\ \text{из (VI):} & \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[(1 + \sigma) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sigma\Theta \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

405. В § 403 мы предположили, что массовые силы не имеют компонентов в направлении оси Oz , т. е. $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ должна обращаться в нуль, а тогда второе и третье условия (12) показывают, что $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ зависит только от z . Следовательно, согласно первому из условий (12), функция Θ может быть записана в такой форме:

$$\Theta = (1 + \sigma)\rho\Omega + \Theta_0 + F(z), \quad (14)$$

где функция Θ_0 является гармонической функцией двух переменных x и y , т. е. $\nabla_1^2 \Theta_0 = 0$, а $F(z)$ зависит только от z . Равенство (14) заменяет три равенства (12).

Сложив первое и второе из условий (13), мы получим:

$$(1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla_1^2 \chi + \sigma \nabla_1^2 \Theta = 2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}.$$

Подставив сюда значение $\nabla_1^2 \chi$ из формул (11), найдем:

$$(1 - \sigma) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \sigma \nabla_1^2 \Theta = \sigma (1 + \sigma) \nabla_1^2 (\rho\Omega).$$

Последнее равенство имеет место в силу формулы (14). Потенциал Ω не зависит от z ; производная $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ не зависит от x и y ; следовательно, обе части последнего уравнения не могут зависеть ни от x , ни от y , ни от z . Отсюда вытекает, что потенциальная функция Ω удовлетворяет уравнению:

$$\nabla_1^2(\rho\Omega) = 2A, \quad (15)$$

где $2A$ — постоянная.

И мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{2\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} A. \quad (16)$$

Функция Θ является четной¹⁾ функцией z , и поэтому произвольная функция $F(z)$ в выражении (14) имеет вид²⁾:

$$F(z) = \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} Az^2, \quad (17)$$

$F(z)$ равна нулю, если массовые силы отсутствуют.

406. Если для производной $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}$ взять выражение (16), то из условий (13) можно получить, что

$(1+\sigma)\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sigma\Theta = \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} A(x^2 + y^2) +$ (функция произвольная относительно z , но линейная относительно x и y).

Функция χ подобно Θ должна быть четной функцией z , а поэтому, основываясь на выражении (14), мы можем написать:

$$\chi = \chi_0 + \frac{1}{2} \sigma z^2 \left\{ \frac{A}{1-\sigma} (x^2 + y^2) - \rho\Omega - \frac{\Theta_0}{1+\sigma} \right\}, \quad (18)$$

где функция χ_0 не зависит от z (члены функции χ , зависящие только от z , а также члены, содержащие x и y в первой степени, опущены, так как они, согласно выражениям (7), не оказывают влияния на компоненты напряжения).

¹⁾ Функция Θ является нечетной функцией z при изгибе срединной поверхности пластинки, который в § 403 не рассматривается. Изгиб пластинок был изучен в VII главе.

²⁾ Полученный при интегрировании уравнения (16) постоянный член можно включить в функцию Θ_0 .

Наконец, подставив формулы (14), (15), (17) и (18) в соотношение (11) между Θ и $\nabla_1^2 \chi$, мы найдем, что

$$\nabla_1^2 \chi_0 + (1 - \sigma) \rho \Omega = \Theta_0, \quad (19)$$

где Θ_0 — гармоническая функция двух переменных, а поэтому отсюда следует, что χ_0 должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\nabla_1^4 \chi_0 = - (1 - \sigma) \nabla_1^2 (\rho \Omega) = - 2 (1 - \sigma) A. \quad (20)$$

Последнее равенство имеет место в силу (15).

Из соотношения (18) вытекает, что

$$\nabla_1^4 \chi = \nabla_1^4 \chi_0.$$

РЕЗЮМЕ

407. Если массовые силы не действуют¹⁾, то изложенная выше теория сильно упростится. При отсутствии массовых сил в случае плоской деформации мы для компонентов напряжения имеем следующие выражения:

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

и

$$Z_z = \text{const} - \sigma \nabla_1^2 \chi. \quad (22)$$

Функция χ в этих выражениях зависит только от x и y и удовлетворяет уравнению:

$$\nabla_1^4 \chi = 0. \quad (23)$$

В случае плоского напряженного состояния для компонентов напряжения X_x , Y_y , X_y имеем те же выражения (21),

¹⁾ В IX главе цит. соч. Ляв выводит основное уравнение (23) более простым способом, но он при этом не учитывает влияния массовых сил.

а компоненты X_z , Y_z и Z_z всюду равны нулю. Только теперь из формулы (18) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_0 - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{1 + \sigma} \Theta_0 z^2, \\ \nabla_1^2 \chi_0 &= \Theta_0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где, согласно (19),

и $\Theta_0 (= \nabla_1^2 \chi = X_x + Y_y)$ является гармонической функцией x и y , а потому χ опять удовлетворяет уравнению (23).

408. Если массовые силы не действуют, то в случае плоской деформации компоненты напряжения X_x , Y_y , X_y , являясь вторыми производными по x и y от функции χ , не зависят от z ; в случае плоского напряженного состояния в них войдут члены с z^2 . То же самое имеет место и тогда, когда массовые силы действуют. Это значит, что плоское напряженное состояние не может существовать, когда граничные напряжения (приложенные к краю пластинки) не зависят от z , так как этого требует наше решение.

Однако это замечание не обесценивает наши результаты. На самом деле мы можем привлечь принцип Сен-Венана и с его помощью показать, что напряженное состояние в удаленных от краев пластинки частях определяется результирующим усилием на каком-нибудь из элементов края, а не точным распределением усилий по малой толщине пластинки на краю. Различные распределения усилий по краям в их непосредственной близости вызывают различные напряжения, однако на некотором расстоянии от края (большем, чем двойная или тройная толщина пластинки) эта разница становится неощутимой. Более того, члены с z^2 в компонентах напряжения дадут члены с h^2 в результирующем усилии, и влияние последних будет крайне мало, если пластинка достаточно тонкая.

409. Таким образом можно сказать, что задачи, касающиеся плоской деформации и плоского напряженного состояния, математически тождественны в тех случаях, когда в задачах и того и другого рода массовые силы не действуют, а *на поверхности тела заданы напряжения*. В обоих случаях мы должны найти такое решение уравнения (23), производные

которого на границе тела удовлетворяют определенным заданным условиям [см. соотношения (21)]. Если массовые силы действуют, то соотношения (21) заменяются соотношениями (7), а уравнение (23) уравнением (8) или (20), в зависимости от того, имеем ли мы дело с плоской деформацией или с плоским напряженным состоянием. Заметим, что и теперь, если только потенциал массовых сил Ω удовлетворяет уравнению типа (15), уравнения (8) и (20) будут иметь одинаковую форму. Таким образом мы опять приходим к заключению, что упомянутые задачи математически эквивалентны, только в их уравнения будут входить разные постоянные¹⁾. Определенные с помощью полученной функции напряжений деформации, а следовательно, и смещения в обоих случаях будут, конечно, различными. Ведь компонент Z_z равен нулю в случае плоского напряженного состояния и имеет отличное от нуля значение в случае плоской деформации. Отсюда следует, что задачи будут в общем различны, если на поверхности тела будут заданы смещения, но деформации и смещения обычно имеют малое практическое значение.

Ниже мы рассмотрим только те задачи, в которых задаются граничные напряжения.

Обобщенное плоское напряженное состояние

410. Файлон²⁾ предложил несколько более широкое применение функции напряжений Эри. Если вместо истинных значений X_x , X_y , X_z рассматривать средние по толщине пластинки значения (а для практических целей это часто столь же полезно, как и знание их истинных значений), то мы сможем несколько изменить наши предположения относительно компонентов напряжения, сделанные в § 403. Там мы приняли, что компоненты X_z и Y_z всюду равны нулю, теперь мы можем потребовать, чтобы они обращались в нуль только на гранях пластинки, т. е. при $z = \pm h$. Компонент Z_z все еще должен обращаться в нуль всюду. В таком случае мы

¹⁾ Ср. §§ 439 — 440.

²⁾ L. N. G. Filon, *Phil. Trans. R. S. (A)*, 201 (1903), 63—155. Ср. Ляв, цит. соч., § 94 и Кокер и Файлон, Оптический метод исследования напряжений, § 2.23.

имеем так называемое обобщенное плоское напряженное состояние.

Рассмотрим тот случай, когда массовые силы не действуют. При наших предположениях относительно компонентов напряжения уравнения равновесия в напряжениях записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$X_z = Y_z = 0$ на граничных плоскостях пластинки, поэтому, если мы проинтегрируем по толщине пластинки первое и второе из наших уравнений, то получим:

$$\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{Y}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_y}{\partial y} = 0, \quad (II)$$

где \bar{X}_x , \bar{Y}_y , \bar{X}_y являются средними по толщине значениями X_x , Y_y , X_y . Уравнения (II) показывают, что их можно записать в форме (21), введя «среднюю функцию напряжения» \bar{X} .

Компонент Z_z всюду равен нулю и поэтому:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= X_x - \sigma Y_y, \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = Y_y - \sigma X_x, \\ E \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 2(1 + \sigma) X_y. \end{aligned}$$

Проведя интегрирование по толщине пластинки, получим:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{X}_x - \sigma \bar{Y}_y, \quad E \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \bar{Y}_y - \sigma \bar{X}_x, \\ E \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &= 2(1 + \sigma) \bar{X}_y, \end{aligned} \quad (III)$$

где через \bar{u} , \bar{v} обозначены средние по толщине u и v . Исключив \bar{u} и \bar{v} из равенства (III), мы установим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{Y}_y - \sigma \bar{X}_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{X}_x - \sigma \bar{Y}_y) = 2(1 + \sigma) \frac{\partial^2 \bar{X}_y}{\partial x \partial y}. \quad (IV)$$

Подставив сюда выражения для \bar{X}_x , \bar{Y}_y , \bar{X}_y через функцию $\bar{\chi}$, мы найдем, что

$$\nabla_1^4 \bar{\chi} = 0.$$

Осталось, конечно, исследовать вопрос о том, до какой степени мы расширили область применения нашей теории тем, что ослабили требование относительно X_z и Y_z и в то же время оставили требование относительно Z_z , которое имело место в обычной теории плоского напряженного состояния¹⁾.

Исследование напряжений оптическим методом

411. Прежде чем приступить к решению задачи § 409 аналитическим методом (т. е. к определению вида функции напряжения χ , удовлетворяющей основному уравнению и дающей заданные значения напряжений на цилиндрической границе), мы дадим краткое изложение экспериментального метода, применимого к задачам этого класса.

Брюстер²⁾ открыл, что, например, в стекле, а также и в других прозрачных изотропных материалах, подверженных напряжению и изучаемых в поляризованном свете, можно наблюдать явление двойного лучепреломления. Главные оптические оси в любой точке совпадают с направлениями главных осей напряжения, а компоненты по этим направлениям поляризованного света двигаются с разностью скоростей, пропорциональной разности главных напряжений или деформаций³⁾. Получающееся благодаря этому запаздывание

¹⁾ Некоторые сведения из этой области можно почерпнуть в статье «On the Notion of Generalized Plane Stress» в *Phil. Mag. (ser. 7)*, том 21 (1936), 201 — 215.

²⁾ D. Brewster, *Phil. Trans. R. S.*, 106 (1916), 156—178.

³⁾ В пределах справедливости закона Гука разность главных напряжений пропорциональна разности главных деформаций, следовательно, можно сказать, что запаздывание зависит или от одной или от другой из них. Еще не решен вопрос о том, определяется ли запаздывание за пределами справедливости закона Гука напряжением или, как с теоретической точки зрения кажется более вероятным, деформацией. Этот вопрос имеет большое практическое значение, потому что значение «оптического метода в теории упругости» крайне возросло бы, если с его помощью мы смогли бы определять напряжения в *пластической* области.

одного компонента относительно другого вызывает разложение луча на два вида лучей или колебаний. До прохождения через материал эти лучи имели одинаковые фазы, но по выходе из материала они приобретают разность фаз. Последняя для монохроматического света пропорциональна толщине пластинки и разности напряжений. Следовательно, если взять пластинки с постоянной толщиной, то, пропуская через них лучи и измеряя разности фаз этих лучей, мы можем определить разность напряжений в этих пластинках.

Такое измерение проводят, пропуская вышедшие из материала лучи через призму Николя («анализатор»). Через нее могут проходить только те компоненты, которые колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению входящего луча. Поэтому интенсивность света, прошедшего через анализатор, является, в конце концов, функцией разности фаз, которая обращается в нуль при разности фаз, кратной 2π . Таким образом будут полностью затемнены те места, где разность напряжений равна или нулю, или некоторому определенному (зависящему от толщины и оптических свойств пластинки) значению (например p_0), или, наконец, любой кратной p_0 величине. На фотографии прошедший через анализатор свет дает картину, подобную той, которая изображена на рис. 105. Там мы видим ряд черных линий, представляющих собой кривые постоянной разности главных напряжений¹⁾.

¹⁾ Излагается только один из нескольких возможных методов — метод монохроматической фотографии. Мы используем материал, изложенный С. Тимошенко (см. «Теория упругости», § 38) и E. E. Weibel (см. «Studies in Photoelastic Stress Determination», *Trans. Am. S. M. E.*, 56 (1934), 637—658) по работам Мичиганского университета, где этим методом широко пользовались. Впервые он, по-видимому, был предложен Z. Tuzi (см. *Proc. Internat. Cong. for App. Mech.*, Stockholm, 1934). Брюстер предлагал использовать белый поляризованный свет для того, чтобы с помощью *цветных полос*, получающихся в результате интерференции, найти величину разности напряжений в различных точках тела. Этим пользовались Carus Wilson, A. Mesnager и другие. Его также использовали E. G. Coker и L. N. G. Filop. Читатель, заинтересовавшийся этим вопросом, может обратиться к книге Кокера и Файлона, «Оптический метод исследования напряжений» (Москва — Ленинград, 1936),

Во многих случаях нужно знать концентрации напряжений в областях тела, расположенных около участков контура, имеющих малый радиус кривизны. Так, на рис. 105 изображен стержень в форме камертона, изгибаемый моментом M , приложенным к его «ножкам». Мы знаем приблизительно распределение напряжений в областях, удаленных от места концентрации напряжений, т. е. там легко интерпретировать темные полосы. На рис. 105 постоянное расстояние между полосами в прямой части стержня характеризует линейное распределение продольных напряжений, возникающих в результате действия изгибающего момента. При приближении к искривленной части стержня появляются новые полосы, характеризующие увеличение разности главных напряжений.

Применение Ден-Гартогом способа мыльной пленки

412. С помощью оптического метода можно получить только разность главных напряжений и их направление. Для полноты экспериментальных исследований напряжений в плоской задаче мы должны описать некоторый метод, с помощью которого, не прибегая к изложенной выше теории, мы могли бы найти *сумму* главных напряжений.

Поперечное сжатие листа материала (например c) зависит от суммы главных напряжений. Если c известно, то можно вычислить сумму главных напряжений, так как:

$$\frac{c}{t} = -\frac{\sigma}{E} (p_1 + p_2).$$

Для этой цели Кокером и другими¹⁾ были изобретены специальные экстензометры. Наиболее удобный метод предложил Ден-Гартог²⁾. В основе его метода лежит тот факт, что сумма главных напряжений представляет собой гармоническую функцию переменных x и y . Это можно установить из содержания § 275 главы VIII и уравнений (21) § 407. В § 275 было показано, что величина $(X_x + Y_y + Z_z)$ является инвариантом по отношению к ортогональному преобразованию координат.

¹⁾ Ср. Кокер и Файлон, цит. соч., § 2.47.

²⁾ *Zeitschr. f. angew. Math. and Mech.*, 11 (1931), 156.

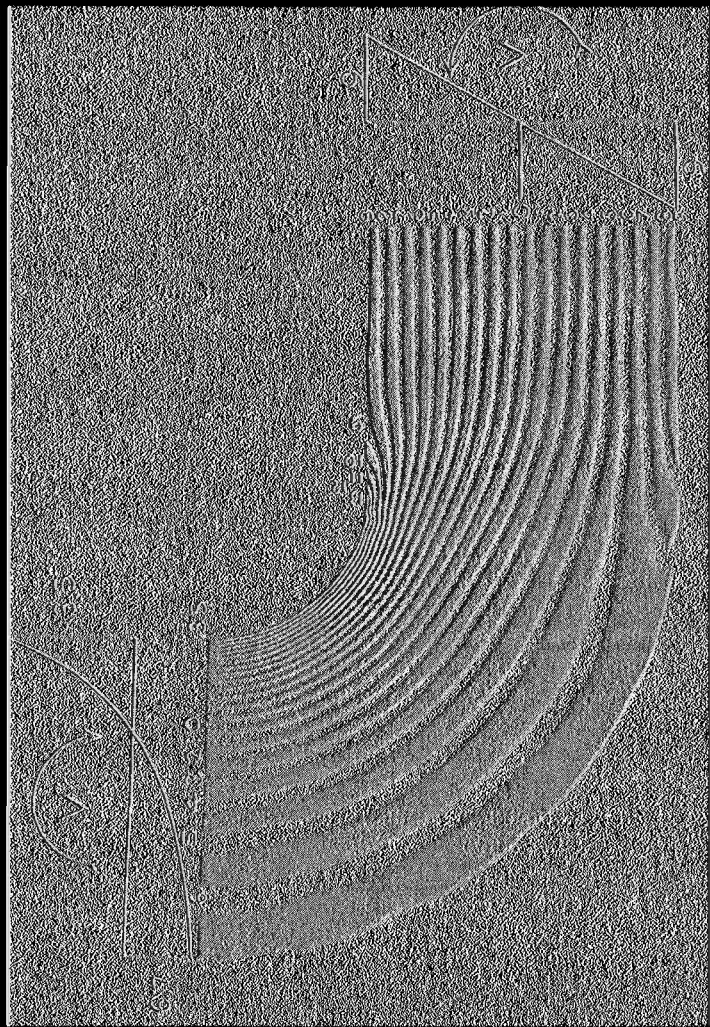


Рис. 108. Поперечное сечение стержня в форме буквы Г, изготовленного из
 сплава металлов алюминия и магния.

Отсюда и вытекает, что в любой задаче плоского напряженного состояния, т. е. когда компонент Z_z равен нулю, сумма главных напряжений равна:

$$X_x + Y_y = \nabla_1^2 \chi,$$

и является гармонической функцией двух переменных, так как χ удовлетворяет уравнению (23).

В главе XI (§§ 387 — 388) мы установили, что (малый) прогиб растянутой мембраны является гармонической функцией двух переменных. Там же мы показали, как этот факт может быть использован в опытах с мыльными пленками.

Таким образом, если мы знаем величину суммы напряжений в каждой точке граничного контура, то мы можем использовать опыт с пленкой для того, чтобы определить значение этой суммы в каждой внутренней точке. В большинстве задач (например в задаче, к которой относится рис. 105) мы знаем величину суммы напряжений в некоторых частях контура, а относительно других частей контура, *свободных от напряжений*, мы знаем, что одно из главных напряжений — нуль, т. е. для этих частей сумма напряжений и разность напряжений тождественны. Следовательно, в таких задачах, из оптических наблюдений, пополненных теоретическими соображениями, можно получить граничные значения для суммы напряжений. Как последний этап решения, мы должны провести опыт с мыльной пленкой.

Теперь мы решим несколько задач чисто аналитическим методом.

Консоль с узким прямоугольным поперечным сечением под действием равномерно распределенной нагрузки

413. В качестве первого примера мы попытаемся найти строгое решение задачи, помещенной под № 2 в таблице стандартных случаев прогибов балок (стр. 249). Для № 1 той же таблицы точное решение было получено в §§ 348 — 352 главы XI, когда мы излагали «полуобратный» метод Сен-Венана. Действие равномерно распределенной нагрузки мы пока изучали только приближенными методами.

Если поперечное сечение консоли представляет собой прямоугольник с малой, по отношению к высоте d , шириной $2h$, то консоль, нагруженная так, как показано на рис. 106, может рассматриваться как пример плоского напряженного состояния. Тем не менее мы на время, по причинам, которые обнаружатся позже, будем рассматривать ее как пример плоской деформации. Оси Ox , Oy возьмем в вертикальной плоскости симметрии так, как показано на рисунке. Нам нужно удовлетворить следующим краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} X_x = X_y = 0, & \quad \text{при } x = 0, \quad 0 < y < d, \\ X_y = Y_y = 0, & \quad \text{при } y = 0, \quad 0 < x < l, \\ X_y = 0, \quad Y_y = -\frac{w}{2h}, & \quad \text{при } y = d, \quad 0 < x < l. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

414. Из соображений статики вытекает, что результирующая перерезывающей силы в каком-нибудь поперечном сечении (силы, вызванной X_y) будет пропорциональна x расстоянию этого сечения от одного из концов. Поэтому мы попробуем удовлетворить нашим условиям, положив

$$-X_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 2Ax. \quad (I)$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = Ax^2 + B, \quad (II)$$

где A и B зависят только от y . Проинтегрировав еще раз, имеем:

$$\chi = x^3 \int A dy + \int B dy + C, \quad (III)$$

где C зависит только от x .

Следовательно, выражение

$$Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 2 \int A dy + \frac{d^2 C}{dx^2}, \quad (IV)$$

согласно (25), должен обращаться в нуль при $y=0$, т. е. производная $\frac{d^2 C}{dx^2}$, не зависящая от y , не может зависеть и от x .

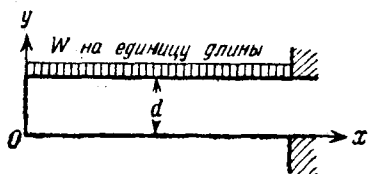


Рис. 106.

Таким образом, обозначив через H постоянную, имеем¹⁾:

$$C = Hx^2. \quad (V)$$

Из (III) вытекает, что:

$$\nabla_1^2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 2 \int A dy + x^2 \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy} + 2H.$$

Функция χ должна удовлетворять основному уравнению (23), следовательно, при всех значениях x и y должно выполняться уравнение

$$x^2 \frac{d^2 A}{dy^2} + 4 \frac{dA}{dy} + \frac{d^2 B}{dy^2} = 0,$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A}{dy^2} &= 0, \\ 4 \frac{dA}{dy} + \frac{d^2 B}{dy^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

415. Первое из уравнений (VI) показывает, что A должно зависеть от y в степени не выше второй. Воспользовавшись принятым соотношением (I), мы в силу того, что, согласно (25), X_y должен обращаться в нуль при $y=0$ и $y=d$, получим для A следующее выражение:

$$A = Ky(d - y), \quad (VII)$$

где через K обозначена постоянная интегрирования. Теперь из второго уравнения (VI) получим:

$$-\frac{dB}{dy} = \frac{2}{3} K(3dy^2 - 2y^3 + Lyd^2 + Md^3), \quad (VIII)$$

¹⁾ Члены функции χ вида F и Gx (F и G постоянные) не влияют на компоненты напряжения, и поэтому их можно не рассматривать.

где через L и M обозначены постоянные интегрирования. Из (II) вытекает, что:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = x^2 \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy} = \\ &= \frac{1}{3} K[3x^2(d-2y) - 6dy^2 + 4y^3 - 2Lyd^2 - 2Md^3], \\ \text{из (IV):} \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{3} K(3dy^2 - 2y^3) + 2H \\ \text{и из (I):} \\ -X_y &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = 2Kxy(d-y). \end{aligned} \right\} (26)$$

416. Итак, мы получили функцию напряжений (χ), удовлетворяющую основному уравнению (23) и дающую выражения (26) для компонентов напряжения, которые удовлетворяют некоторым, но не всем, граничным условиям (25). Из условий, наложенных на X_y , удовлетворены все. Условия, наложенные на Y_y , удовлетворятся, если мы положим:

$$H = 0, \quad K = -\frac{3\omega}{2hd^3}. \quad (\text{IX})$$

Оставшееся условие, наложенное на X_x в сечении $x=0$, требует, чтобы

$$3dy^2 - 2y^3 + Lyd^2 + Md^3 = 0 \quad (0 < y < d). \quad (\text{X})$$

Очевидно, что последнему условию нельзя удовлетворить. Если так, то наше исходное предположение (I) не является правильным. Компонентам напряжения (26) нельзя дать такие значения, при которых сечение $x=0$ было бы свободно от напряжений. Однако их можно подобрать так, что нормальные напряжения в этом сечении будут иметь равные нулю результирующие силу и момент. На самом деле нормальные напряжения не будут давать результирующей силы в сечении $x=0$, когда $\int_0^d X_x dy = 0$, и результирующего момента,

когда $\int_0^d yX_x dy = 0$. Первое условие будет удовлетворено, если

$$1 + L + 2M = 0,$$

а второе, если

$$21 + 20L + 30M = 0.$$

Следовательно, должно быть:

$$L = -\frac{6}{5}, \quad M = \frac{1}{10}.$$

Воспользовавшись (IX), мы из выражений (26), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{w}{2hd^3} \left[3x^2(2y-d) - 4y^3 + \right. \\ &\quad \left. + 6dy^2 - \frac{12}{5}d^2y + \frac{1}{5}d^3 \right], \\ Y_y &= \frac{w}{2hd^3} (2y^3 - 3dy^2), \\ X_y &= \frac{3w}{hd^3} xy(d-y). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Эти компоненты напряжений, согласно (21), соответствуют, что легко проверить, следующей функции напряжений:

$$\chi = \frac{w}{2hd^3} \left[x^2 \left(y^3 - \frac{3}{2}dy^2 \right) - \frac{1}{10}y^2(2y^3 - 5dy^2 + \right. \\ \left. + 4d^2y - d^3) \right]. \quad (28)$$

Мы заметим, что члены в X_x , содержащие x^2 и являющиеся следствием изгибающего момента, линейны относительно y . Это согласуется с нашей приближенной теорией изгиба (гл. VII, § 222). Вместе с тем члены, не зависящие от x , не удовлетворяют этому условию¹⁾. Распределение касательного напряжения X_y по поперечному сечению то же, что и найденное нами другими методами в § 226 главы VII.

Соотношения между функциями напряжений для плоской деформации и для плоского напряженного состояния

417. Мы решали задачу как пример плоской деформации и для того, чтобы закончить решение, нам надо определить отличный от нуля компонент напряжения Z_z . В действи-

¹⁾ Начертив график, можно увидеть, что это отклонение не имеет большого значения.

тельности, в силу того, что боковые стороны балки свободны от напряжений, мы должны рассматривать задачу как пример плоского напряженного состояния. Согласно результатам §§ 403—406, мы должны изменить решение (27) и добавить в него члены, зависящие от z^2 . Метод, которым мы ниже пользуемся, может быть применен к любой подобной задаче.

Пусть χ' представляет собой функцию напряжений, полученную из формул, соответствующих плоской деформации, а χ_0 связана с χ' с помощью соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= \chi' + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{1 + \sigma} h^2 \nabla_1^2 \chi'. \\ \nabla_1^2 \chi_0 &= \nabla_1^2 \chi'. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отсюда, согласно уравнению (23), имеем:

Подставив это выражение для χ_0 в (24), мы получим как функцию напряжений, соответствующую плоскому напряженному состоянию, следующее выражение:

$$\chi = \chi' + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{1 + \sigma} (h^2 - 3z^2) \nabla_1^2 \chi'. \quad (30)$$

Первый член (χ') даст те же, что и раньше, выражения для компонентов напряжения, а член, содержащий $\nabla_1^2 \chi'$, введет добавочные члены, которые не будут влиять на средние значения компонентов напряжения по толщине пластинки, потому что

$$\int_{-h}^{+h} (h^2 - 3z^2) dz = 0.$$

В рассматриваемой задаче χ' дается соотношением (28), откуда:

$$\nabla_1^2 \chi' = \frac{w}{2hd^3} \left[3x^2(2y - d) - 2y^3 + 3dy^2 - \frac{12}{5}d^2y + \frac{1}{5}d^3 \right].$$

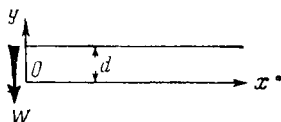
Следовательно, в формулы для компонентов напряжения X_x , Y_y , X_y нужно добавить соответственно такие члены:

$$\frac{w}{2hd^3} \frac{\sigma}{1 + \sigma} (h^2 - 3z^2) \times [d - 2y, 2y - d, -2x]. \quad (31)$$

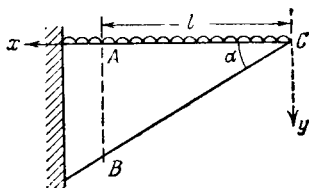
Примеры

1. Применить тот же метод к задаче о постоянной перерезывающей силе и показать, что написанная ниже функция напряжений удовлетворяет всем граничным условиям, которые можно выписать, воспользовавшись приложенным рисунком. Перерезывающая сила W распределена так, как того требует решение

$$\chi = -\frac{W}{2hd^3} xy^2 (3d - 2y).$$



2. (Camb. M. S. T. 1933.) Треугольная пластинка постоянной толщины заделана так, как показано на рисунке. На верхний горизонтальный край пластинки действует равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности w на единицу площади. Проверить, что написанное ниже выражение представляет собой функцию напряжений, удовлетворяющую граничным условиям на краях AC и BC пластинки:



$$\chi = \frac{w \operatorname{ctg} \alpha}{2(1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha)} \left[-x^2 \operatorname{tg} \alpha + xy + (x^2 + y^2) \left(\alpha - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) \right].$$

Для частного значения угла ($\alpha = 30^\circ$) найти распределение нормального напряжения по вертикальному поперечному сечению AB и выяснить, чем оно отличается от напряжения, определенного по формуле $p = \frac{My}{I}$.

Цилиндрические координаты ¹⁾

418. Уравнение для функции напряжений, а именно уравнение (23) в случае отсутствия массовых сил и уравнение (8) или (20) в случае массовых сил, имеющих потенциал, по форме похожи на уравнение для прогиба пластинки ²⁾. Следовательно, методы решения, изложенные в §§ 239 — 241 главы VII, могут быть также применены к задачам настоящей главы, несмотря на то, что граничные условия в общем не одина-

¹⁾ См. примечание на стр 660.

²⁾ Уравнение (28) главы VII.

ковы. Так, если мы вместо декартовых координат x, y, z введем цилиндрические координаты r, θ, z , то так же, как в уравнении (29) главы VII, для оператора ∇_1^2 получим:

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (32)$$

Ниже мы рассмотрим несколько задач, которые в силу самого существа задачи необходимо решать в цилиндрических координатах, поэтому сейчас мы постараемся найти типовые решения уравнения (23), выраженного в форме

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]^2 \chi = \nabla_1^4 \chi = 0. \quad (33)$$

Типовые решения для функции напряжений плоской деформации или плоского напряженного состояния

419. Все члены в левой части уравнения (33) имеют относительно r один и тот же порядок, поэтому вполне естественно попробовать удовлетворить уравнению, предположив, что функция χ имеет вид:

$$A r^p F(\theta), \quad (I)$$

в котором величины p и A постоянны, а функция F зависит только от θ . Приняв это предположение, получим:

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \chi &= A r^{p-2} [p^2 F + F''], \\ \nabla_1^4 \chi &= A r^{p-4} [p^2 (p-2)^2 F + 2(p^2 - 2p + 2) F'' + F^{IV}], \end{aligned}$$

(штрихи означают дифференцирование по θ). Оператор $\nabla_1^4 \chi$ обратится в нуль, и принятое нами выражение для функции χ будет являться типовым решением (33), если

$$F^{IV} + 2(p^2 - 2p + 2) F'' + p^2 (p-2)^2 F = 0$$

или если

$$[D^2 + p^2] [D^2 + (p-2)^2] F(\theta) = 0, \quad (II)$$

где через D обозначен оператор $\frac{d}{d\theta}$. Уравнение (II) имеет место, когда

$$\left. \begin{aligned} [D^2 + p^2] F(\theta) &= 0, \\ [D^2 + (p-2)^2] F(\theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Отсюда следует, что в качестве типового решения можно взять:

$$\chi_p = r^p [A_p \sin p\theta + B_p \cos p\theta + F_p \sin (p-2)\theta + G_p \cos (p-2)\theta], \quad (34)$$

где p, A_p, B_p, F_p, G_p — произвольные постоянные.

С другой стороны, если мы предположим, что $F(\theta)$ в принятой для χ форме (I) является $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$, то мы найдем, что $\nabla_1^4 \chi$ будет обращаться в нуль, когда

$$p^2(p-2)^2 - 2(p^2 - 2p + 2)n^2 + n^4 = 0$$

или когда

$$(p-n)(p+n)(p-2-n)(p-2+n) = 0.$$

Таким образом имеем другие формы типовых решений:

$$\chi_n = (\sin n\theta, \cos n\theta) \times [P_n r^n + Q_n r^{-n} + R_n r^{2+n} + S_n r^{2-n}], \quad (35)$$

где n, P_n, Q_n, R_n, S_n — произвольные постоянные.

420. Число постоянных в выражении (34) для типового решения уменьшается при $p=0$ или $p=2$. В этих обоих случаях уравнение (II) сводится к следующему:

$$D^2 [D^2 + 4] F(\theta) = 0.$$

Его линейно независимые решения: $1, \theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta$; следовательно, квадратная скобка выражения (34) примет вид:

$$A + B\theta + F\sin 2\theta + G\cos 2\theta, \quad (36)$$

сюда, как и раньше, входят четыре независимые постоянные. Подобным же образом в выражение (35) число независимых постоянных уменьшается при $n=0$. В этом случае функция χ не зависит от θ , основное уравнение (33) сводится к

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right]^2 \chi = 0.$$

Проинтегрировав, имеем¹⁾:

$$\chi_{n=0} = \frac{1}{4} P_0 r^2 (\ln r - 1) + \frac{1}{4} Q_0 r^2 + R_0 \ln r + S_0. \quad (37)$$

¹⁾ Ср. уравнение (32) главы VII.

Таким образом, в решение опять входят четыре произвольные постоянные. Для этого решения:

$$\nabla_1^2 \chi = P_0 \ln r + Q_0. \quad (38)$$

Мы еще должны специально исследовать выражение (35) в случае ($n = \pm 1$).

Основное уравнение (33) теперь сведется к виду:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] \chi = 0.$$

Проинтегрировав, получим следующее типовое решение

$$\chi_{n-1} = (\sin \theta, \cos \theta) \times \left[P_1 r + \frac{Q_1}{r} + R_1 r^3 + S_1 r \ln r \right]. \quad (39)$$

Оно, как и раньше, содержит четыре произвольные постоянные. Для него имеем:

$$\nabla_1^2 \chi = (\sin \theta, \cos \theta) \times \left[8R_1 r + 2 \frac{S_1}{r} \right].$$

Если вместо n действительного взять (im) чисто мнимое, то в выражении (35) множители $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ заменятся показательными функциями $e^{\pm m\theta}$, а члены вида r^n членами вида $e^{im \ln r}$.

Таким образом в качестве новой формы типового решения можно взять:

$$\chi_m = e^{\pm m\theta} \times \left[(P'_m + R'_m r^2) \sin(m \ln r) + (Q'_m + S'_m r^2) \cos(m \ln r) \right], \quad (40)$$

где m , P'_m , Q'_m , R'_m , S'_m — произвольные постоянные. Типовым решением в форме (40) мы не будем пользоваться в этой книге.

Компоненты напряжения

421. Компоненты напряжения в цилиндрических координатах относят к поверхностям, перпендикулярным направлениям r и θ . Воспользовавшись обозначениями главы VIII § 269, мы можем записать их так: \widehat{rr} , $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{r\theta}$. Рисунок 107 поясняет значение этих символов. Направления r и θ накло-

нены под углом θ соответственно к направлениям x и y , поэтому мы имеем [ср. формулы (21) и (22) главы IV]:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{1}{2} (X_x + Y_y) + \frac{1}{2} (X_x - Y_y) \cos 2\theta + X_y \sin 2\theta, \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{1}{2} (X_x + Y_y) - \frac{1}{2} (X_x - Y_y) \cos 2\theta - X_y \sin 2\theta, \\ \widehat{r\theta} &= -\frac{1}{2} (X_x - Y_y) \sin 2\theta + X_y \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Подставив вместо X_x , Y_y , X_y их выражения через функцию χ по формулам (21) и заметив, что так же, как и в § 240 главы VII

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &\equiv \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &\equiv -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

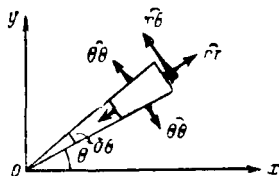


Рис. 107.

мы сможем написать выражение для

\widehat{rr} в такой форме:

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial \chi}{\partial y} - \sin \theta \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} \equiv \\ &\equiv \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial y} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial x} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial x} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (II)$$

Аналогично преобразовываются вторая и третья из формул (41).

Таким образом, мы получили нужные нам формулы:

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \widehat{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \quad (42)$$

422. Как примеры на использование цилиндрических координат рассмотрим три задачи, в которые входят типовые

решения вида:

- (I) (35) при $n=2$,
 (II) (35) при $n=1$, т. е. специальное решение (39)
 (III) (35) при $n=0$, т. е. специальное решение (37)

В случае первого типового решения (при $n=2$) мы из выражения (35), согласно формулам (42), получим:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= (\sin 2\theta, \cos 2\theta) \times \left[-2P_2 - 6 \frac{Q_2}{r^2} - 4 \frac{S_2}{r^2} \right], \\ \widehat{\theta\theta} &= (\sin 2\theta, \cos 2\theta) \times \left[2P_2 + 6 \frac{Q_2}{r^2} + 12R_2 r^2 \right], \\ \widehat{r\theta} &= (\cos 2\theta, -\sin 2\theta) \times \left[-2P_2 + 6 \frac{Q_2}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - 6R_2 r^2 + 2 \frac{S_2}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В случае второго типового решения (при $n=1$) мы из выражения (39), согласно формулам (42), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= (\sin \theta, \cos \theta) \times \left[-2 \frac{Q_1}{r^2} + 2R_1 r + \frac{S_1}{r} \right], \\ \widehat{\theta\theta} &= (\sin \theta, \cos \theta) \times \left[2 \frac{Q_1}{r^2} + 6R_1 r + \frac{S_1}{r} \right], \\ \widehat{r\theta} &= (\cos \theta, -\sin \theta) \times \left[2 \frac{Q_1}{r^2} - 2R_1 r - \frac{S_1}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

И в случае третьего типового решения (при $n=0$) мы из выражения (37), согласно формулам (42), получим:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{1}{4} P_0 (2 \ln r - 1) + \frac{1}{2} Q_0 + \frac{R_0}{r^2}, \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{1}{4} P_0 (2 \ln r + 1) + \frac{1}{2} Q_0 - \frac{R_0}{r^2}, \\ \widehat{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Влияние малого круглого отверстия на напряжения в пластинке, подверженной равномерному растяжению

423. Пусть мы имеем пластинку, подверженную действию равномерного растягивающего напряжения интенсивности T . В некоторой точке пластинки сделаем малое отверстие. Про-

изоидет перераспределение напряжений. В непосредственной близости от отверстия возникнут большие дополнительные напряжения. Перераспределение напряжений, конечно, будет зависеть от формы отверстия. Если мы предположим, что отверстие круглое, то получим простейший случай общей задачи о малых полостях в непрерывном материале. Возьмем ось x в направлении растяжения, а начало координат поместим в центре отверстия. Если отверстия нет, то функция напряжений имеет такой вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{2} T y^2. \quad (I)$$

На самом деле, согласно формулам (21), мы имеем:

$$X_x = T, \quad Y_y = X_y = 0.$$

Напишем выражение (I) в полярных координатах:

$$\chi_1 = \frac{1}{2} T r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\theta). \quad (II)$$

И тогда, согласно формулам (42), мы получим такие компоненты напряжения:

$$\begin{aligned} \widehat{r r} &= \frac{1}{2} T (1 + \cos 2\theta), \quad \widehat{\theta \theta} = \frac{1}{2} T (1 - 2 \cos 2\theta), \\ \widehat{r \theta} &= -\frac{1}{2} T \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (III)$$

Для учета влияния отверстия мы должны к функции χ_1 прибавить дополнительную функцию напряжений χ_2 такую, что (а) $\widehat{r r}$, $\widehat{r \theta}$ обратятся в нуль на контуре отверстия (например при $r = a$) и (б) напряжения на большом расстоянии от отверстия не изменятся. Воспользовавшись формулами (43), мы видим, что члены, входящие в выражения для компонентов напряжения (III) и содержащие θ , пропадут, и условие (б) удовлетворится¹⁾, если мы примем:

$$P_2 = R_2 = 0, \quad Q_2 = -\frac{1}{4} a^4 T, \quad S_2 = \frac{1}{2} a^2 T. \quad (IV)$$

¹⁾ Если P_2 и R_2 будут отличны от нуля, то условие (б) не удовлетворится.

Член $\frac{1}{2} T$ в формуле для \widehat{rr} пропадет, если в выражениях (45) принять:

$$P_0 = Q_0 = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{2} a^2 T, \quad (V)$$

следовательно, искомая функция напряжений χ_2 будет иметь вид:

$$\chi_2 = \frac{1}{2} a^2 T \left[-\ln r + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (VI)$$

Соответствующие ей *дополнительные* компоненты напряжения следующие:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{1}{2} T \frac{a^2}{r^2} \left[-1 + \cos 2\theta \left(-4 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \right], \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{1}{2} T \frac{a^2}{r^2} \left[1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right], \\ \widehat{r\theta} &= \frac{1}{2} T \frac{a^2}{r^2} \left[-2 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

424. Компоненты общего напряженного состояния, получающиеся в результате наложения χ_1 и χ_2 , определяются путем сложения формул для компонентов отдельных напряженных состояний (III) и (VII).

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right], \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{1}{2} T \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \widehat{r\theta} &= -\frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Выражения для \widehat{rr} и $\widehat{r\theta}$, как и требуется, на окружности ($r = a$) обращаются в нуль. Тангенциальный компонент напряжения на контуре отверстия равен

$$\widehat{\theta\theta} = T (1 - 2 \cos 2\theta). \quad (47)$$

Отсюда видно, что он возрастает от значений — T (сжимающих) в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ до положительных (растягивающих) значений $3T$ в точках $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$. *Отверстие вызывает трехкратное увеличение напряжения.*

На больших по сравнению с радиусом a расстояниях от центра отверстия члены $\frac{a^2}{r^2}$ и $\frac{a^4}{r^4}$ малы. Следовательно, компоненты напряжения (46) будут почти эквивалентны компонентам напряжения (III), соответствующим состоянию простого растяжения. Таким образом, далеко от отверстия перераспределение давления в случае *малого* отверстия не зависит от его радиуса. Если отверстие достаточно далеко от края пластинки, то оно не будет заметно влиять на распределение напряжений по краю.

425. Строго говоря, наша задача является одной из задач плоского напряженного состояния, в то время, как проведенное нами исследование относится к плоской деформации.

Решение задачи, выраженное в формулах (46), можно дополнить, прибавив, как и в § 417, члены с множителем $(h^2 - 3z^2)$, однако, эти дополнительные члены, как в задаче, рассмотренной в § 417, не имеют практического значения.

Напряжения в крюке узкого прямоугольного поперечного сечения

426. Было сделано много попыток для того, чтобы дать приближенную теорию напряжений, возникающих в крюках подъемных кранов, железнодорожных сцеплений и т. д.¹⁾ Большинство из этих попыток почти не связаны с точными уравнениями теории упругости и поэтому мы не будем останавливаться на них в этой книге. Рассмотрим только задачу, связанную с крюком узкого прямоугольного поперечного сечения, ввиду того, что ее можно рассматривать как пример плоского напряженного состояния. Подобно тому, как это было сделано в § 413, мы введем здесь в соответствии

¹⁾ Ср. Н. J. Gough, H. L. Cox and D. G. Sopwith, Design of Crane Hooks., *Proc. Inst. M. E.*, 128 (1934), 253—325.

с «полуобратным» методом Сен-Венана некоторые упрощающие предположения.

Рассматривается крюк, указанный пунктирными линиями на рис. 108. Вертикальная прямая, линия действия приложенной силы W , проходит через O , центр внутренней и внешней поверхностей крюка*. За полярную ось возьмем горизонтальную прямую, проходящую через O .

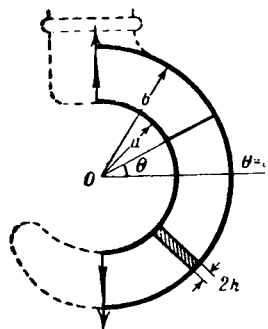


Рис. 108.

Ясно, что область наибольших напряжений соответствует малым θ . Предположим, что, по крайней мере, эта, интересующая нас, часть крюка будет частью кольца. Рассмотрим результирующее усилие в сечении с координатой θ .

Оно состоит из:

(a) силы, перпендикулярной плоскости сечения, величины $W \cos \theta$;

(b) силы, параллельной плоскости сечения (или перерезывающей силы), величины $W \sin \theta$;

(c) изгибающего момента величины, пропорциональной $W \cos \theta$.

Что касается компонентов напряжения, вызванных этими усилиями, то очевидно: компонент $\widehat{\theta\theta}$ является следствием (a) и (c), а компонент $\widehat{r\theta}$ следствием (b). Основываясь на этом, попробуем удовлетворить условиям задачи, приняв, что:

$$\widehat{\theta\theta} \propto \cos \theta, \quad \widehat{r\theta} \propto \sin \theta, \quad (1)$$

Теперь, на основании выражений для компонентов напряжения (44), мы видим, что типовое решение (39) при $n=1$ дает соответствующее напряженное состояние.

Осталось выяснить, можно ли только с помощью выражений (44) удовлетворить граничным условиям.

* Автор в качестве названий для этих поверхностей использует терминологию, принятую в теории арок и сводов, а именно, и н т р а д о с для внутренней кривой (радиуса a на рис. 108), и э к с т р а д о с для внешней кривой (радиуса b). (Прим. перев.)

427. Пусть a и b являются соответственно радиусами внутренней и внешней поверхностей крюка (рис. 108). На рис. 108 изображено также поперечное сечение крюка, имеющее вид высокого и узкого прямоугольника. Согласно (I) и (44) мы имеем следующую систему напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \cos \theta \left(-2 \frac{Q_1}{r^3} + 2 R_1 r + \frac{S_1}{r} \right), \\ \widehat{\theta\theta} &= \cos \theta \left(2 \frac{Q_1}{r^3} + 6 R_1 r + \frac{S_1}{r} \right), \\ \widehat{r\theta} &= \sin \theta \left(-2 \frac{Q_1}{r^3} + 2 R_1 r + \frac{S_1}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Система включает три произвольные постоянные. Нам нужно удовлетворить четырем граничным условиям, а именно:

$$\widehat{rr} = \widehat{r\theta} = 0, \text{ при } r = a \text{ и при } r = b. \quad (II)$$

Граничные условия такого рода можно вполне принять, так как вид формул (48) для \widehat{rr} и $\widehat{r\theta}$ показывает, что они могут вместе обратиться в нуль. Мы найдем, что

$$2Q_1 = \frac{a^2 b^2 S_1}{(a^2 + b^2)}, \quad 2R_1 = -\frac{S_1}{(a^2 + b^2)}. \quad (III)$$

Перерезывающая сила (b) § 426 возникает в результате действия $\widehat{r\theta}$. Мы имеем:

$$W \sin \theta = \int_a^b 2 h \widehat{r\theta} dr$$

или, согласно (48),

$$W \sin \theta = 2 h \sin \theta \int_a^b \left(-2 \frac{Q_1}{r^3} + 2 R_1 r + \frac{S_1}{r} \right) dr,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда: } \frac{W}{2h} &= \left[\frac{Q_1}{r^2} + R_1 r^2 + S_1 \ln r \right]_a^b = \\ &= -Q_1 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} + R_1 (b^2 - a^2) + S_1 \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \\ &= S_1 \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Последнее равенство будет иметь место после того, как мы воспользуемся (III). Из этого уравнения определяют S_1 , после чего становятся известными Q_1 и R_1 .

Таким образом компоненты напряжения (48) вычисляются.

428. Итак, мы нашли решение, удовлетворяющее всем условиям задачи, для тела, изображенного на рисунке 108 сплошными линиями, а именно, для полукольца, нагруженного перерезывающими усилиями на концевых сечениях¹⁾. Наше решение соответствует тому случаю, когда усилия на концевых сечениях распределены так, как требуют соотношения (48) после подстановки в них Q_1 и R_1 из формулы (III) последнего параграфа, т. е. решение будет точным тогда, когда приложенные касательные напряжения изменяются в зависимости от r по такому закону:

$$\widehat{r\theta} \propto \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2 + b^2} \left(1 + \frac{a^2 b^2}{r^4} \right) \right]. \quad (50)$$

Если усилия приложены как-нибудь иначе, то решение уже не является точным, но, воспользовавшись принципом Сен-Венана, мы можем утверждать, что оно будет практически точным в тех местах тела, которые расположены достаточно далеко от мест приложения нагрузки. Таким образом мы без всяких ограничений относительно способа приложения усилий по концевым сечениям полукольца можем принять наше решение в области малых θ , где напряжения максимальны. Рассуждая таким образом, мы установили, что наше решение дает достаточно точные сведения о напряженном состоянии как раз в той части *крюка* высокого прямоугольного поперечного сечения, в которой их более всего необходимо знать.

Задача рассматривалась как пример плоской деформации.

Чтобы получить решение задачи в случае плоского напряженного состояния, нужно дописать к найденным компонентам напряжения члены, которые, как и раньше, можно найти методами § 417. Эти члены не имеют практического значения.

¹⁾ Так как $\cos \theta = 0$ на концевых сечениях, то $\widehat{\theta\theta}$ обращается в нуль во всех точках этих сечений.

Чистый изгиб кругового бруса

429. В предыдущих параграфах мы, по сути дела, изучали напряжения в круговом бруске, подверженном действию изгибающего усилия вместе с перерезывающей силой. Напряженное состояние кругового бруса, подверженного действию постоянного изгибающего момента, можно определить аналогичным и даже более простым путем¹⁾.

Очевидно, в этом случае напряжения не будут зависеть от θ и мы должны использовать типовое решение (37). Компоненты напряжения определяются формулами (45). Касательное напряжение $r\hat{\theta}$ теперь всюду равно нулю и поэтому в качестве граничных условий на внутренней и внешней поверхности бруса ($r=a$ и $r=b$) мы требуем равенство нулю компонента $\hat{r}r$ при $r=a$ и $r=b$. С помощью первого соотношения (45) и граничных условий получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} R_0 &= \frac{1}{2} P_0 \ln \frac{b}{a}, \\ -(b^2 - a^2) Q_0 &= \frac{1}{2} P_0 [b^2 (2 \ln b - 1) - a^2 (2 \ln a - 1)]. \end{aligned} \right\} (51)$$

А теперь результирующая сила растяжения, соответствующая компоненту напряжения $\hat{\theta}\hat{\theta}$, в силу второго из соотношений (45) и значений (51) для Q_0 и R_0 , равна:

$$2h \int_a^b \hat{\theta}\hat{\theta} dr = 2h \left[\frac{1}{4} P_0 r (2 \ln r - 1) + \frac{1}{2} Q_0 r + \frac{R_0}{r} \right]_a^b = 0.$$

Результирующий изгибающий момент, стремящийся *увеличить* кривизну бруса, также в силу второго из соотношений (45) и значений (51) для Q_0 и R_0 , равен:

$$M = 2h \int_a^b \hat{\theta}\hat{\theta} r dr =$$

¹⁾ Тимошенко (цит. соч., §§ 23, 27) указывает, что решение этой и предыдущей задач принадлежит Х. С. Головину, *Известия С.-Петербургского технологического института*, 1881.

$$\begin{aligned}
 &= 2h \left[\frac{1}{4} P_0 r^2 \ln r + \frac{1}{4} Q_0 r^2 - R_0 \ln r \right]_a^b = \\
 &= \frac{1}{8} P_0 \left[b^2 - a^2 - \frac{4a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left\{ \ln \frac{b}{a} \right\}^2 \right]. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Из этого уравнения можно определить P_0 как функцию приложенного изгибающего момента, после чего Q_0 и R_0 будут известны благодаря равенствам (51). Полученное решение является точным, когда изгибающий момент приложен в виде чисто нормальных напряжений $\widehat{\theta\theta}$, действующих на концевых поперечных сечениях и распределенных так, как того требует выражение (45), т. е. тогда, когда нормальное напряжение $\widehat{\theta\theta}$ в зависимости от r изменяется по такому закону:

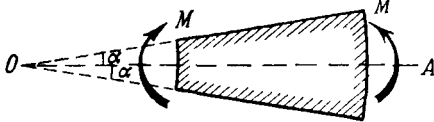
$$\widehat{\theta\theta} = \frac{1}{2} P_0 \left[1 + \ln r - \frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a} \right]. \quad (53)$$

[Значение P_0 в этой формуле определяется равенством (52).] Если изгибающий момент приложен другим способом, то необходимо ввести поправку для того, чтобы получить решение вблизи концов бруса.

Дополнительные члены, нужные для того, чтобы привести решение к случаю плоского напряженного состояния, можно найти методами § 417.

Пример

3. (Самб. М. S. Т. 1934.) Пластинка малой толщины t , ограниченная двумя дугами окружностей и двумя радиальными лучами $\theta = \alpha$ и $\theta = -\alpha$ (см. рисунок), изгибается двумя противоположными моментами, приложенными по искривленным краям. Показать, что распределение напряжений в пластинке может быть определено помощью следующей функции напряжений:



$$\chi = \frac{M (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha)}{2 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) t}.$$

(Полус помещен в точке O , а угол θ измеряется от средней линии OA .)

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

430. Если *замкнутое* круговое кольцо (или труба) деформируются под действием равномерного давления, приложенного к его цилиндрическим поверхностям, то очевидно, что возникающие при этом напряжения не будут зависеть от угла θ . И вновь можно использовать типовое решение (45). В качестве граничных условий мы теперь имеем заданные значения компонента напряжения \widehat{rr} на двух окружностях радиусов a и b . Компонент $\widehat{r\theta}$ равен нулю всюду, и поэтому имеется только два граничных условия. Отсюда следует, что мы, по-видимому, получим только два соотношения между тремя неизвестными постоянными P_0 , Q_0 , R_0 .

В связи с этим заметим, что типовое решение (45) включает в себя все те случаи, в которых напряжения не зависят от угла θ , а поэтому включает случай, когда рассматриваемое нами *замкнутое* кольцо (или труба) имеет начальные напряжения. Если мы имеем незамкнутое кольцо, то приложив к его концевым сечениям изгибающие моменты так, как это рассматривалось в § 429, мы можем привести их в соприкосновение и соединить вместе (см. гл. V, § 164). Удалив затем действующие внешние силы, мы получим замкнутое круговое кольцо с начальными напряжениями. Это напряженное состояние и является тем, которое было найдено в предшествующем параграфе.

Если мы хотим исследовать тела без начальных напряжений, то в выражениях (45) мы должны положить $P_0 = 0$. Это можно доказать с помощью «второй теоремы о минимуме упругой энергии» (гл. III, § 89) следующим образом: выберем сначала постоянные Q_0 и R_0 так, чтобы компонент \widehat{rr} удовлетворял граничным условиям. Далее потребуем, чтобы полная упругая энергия была минимальной. Из граничных условий для постоянных Q_0 и R_0 получим выражения, в которые наряду с известными членами войдут члены с P_0 , равенства нулю которого и требует условие минимума упругой энергии.

431. Решение задач можно получить проще, если мы будем исходить из основных зависимостей и начинать со смещений (смещения благодаря симметрии системы лежат в радиальных плоскостях). Будем рассматривать случай *плоской деформации*.

Решение, соответствующее случаю плоского напряженного состояния, можно будет потом легко получить, так как необходимые в каждом частном случае добавочные члены можно вычислить методами § 417. Итак, имеем упругое тело в виде кругового цилиндра (или трубы) и пусть деформация обладает следующими свойствами:

(a) плоские поперечные сечения недеформированного цилиндра или трубы остаются плоскими в деформированном состоянии;

(b) продольная деформация (т. е. удлинение в направлении оси) имеет одну и ту же величину в каждой точке тела;

(c) каждое поперечное сечение в своей плоскости подвергается одной и той же деформации;

(d) деформация по своему характеру является чисто радиальным смещением. Все те точки, которые первоначально принадлежали окружности радиуса r , после деформации располагаются на окружности постоянного радиуса $(r + u)$.

Деформации вследствие радиальных смещений в круговом цилиндре

432. Согласно (c) и (d), радиальное смещение u , лежащее в плоскости поперечного сечения, зависит только от r — расстояния рассматриваемой точки от оси цилиндра.

Заметим, что окружность радиуса r , принадлежащая плоскости поперечного сечения, после деформации переходит в окружность радиуса $(r + u)$. Величина относительного удлинения окружности будет:

$$e_t = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}. \quad (I)$$

Для того чтобы найти удлинение в радиальном направлении, мы должны в обычном выражении $\frac{\partial u}{\partial x}$ отождествить x с r . Следовательно, радиальное удлинение

$$e_r = \frac{du}{dr}. \quad (II)$$

Знака частной производной вводить не нужно, так как u зависит только от r .

Наконец, согласно (b) § 431, продольное удлинение

$$e_l = \text{const} = k. \quad (\text{III})$$

Выражения для радиального, тангенциального и продольного напряжений

433. Соображения симметрии показывают, что главными напряжениями будут: $\widehat{r}r$, $\widehat{\theta}\theta$. Это также подтверждается тем, что в соотношениях (45) $\widehat{r}\theta = 0$. Следовательно, в последующем мы можем обозначать радиальное, тангенциальное (или кольцевое) и продольное напряжения соответственно через p_r , p_t , p_l .

Напряжения связаны с удлинениями e_r , e_t , e_l уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} = e_r &= \frac{1}{E} [p_r - \sigma(p_t + p_l)], \\ \frac{u}{r} = e_t &= \frac{1}{E} [p_t - \sigma(p_l + p_r)], \\ k = e_l &= \frac{1}{E} [p_l - \sigma(p_r + p_t)]. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Компоненты напряжения p_r , p_t , p_l , как и смещение u , зависят только от r .

Уравнения равновесия

434. Выделим из нашего цилиндра или трубы малый элемент. Размеры и вид элемента показаны на рис. 109 (a). На каждой из его поверхностей действуют нормальные напряжения, из которых только p_r и p_t влияют на равновесие элемента в радиальном направлении. Силы, вызванные этими напряжениями, указаны на рис. 109 (b). Рассмотрим тот случай, когда массовые силы, в которые будем включать «силы инерции», возникающие вследствие ускорений, действуют. При этом допустим, что они направлены по радиусу и имеют интенсивность R , которая зависит только от r . За положительное направление радиуса возьмем направление от центра. Объем элемента, изображенного на рис. 109 (a), равен $r\delta\theta\delta r\delta l$. Элемент достаточно мал, и поэтому его плотность ρ можно считать постоянной вели-

чиной. Следовательно, масса элемента равна $\rho r \delta \theta \delta r \delta l$. Значение массовой силы: $\rho R r \delta \theta \delta r \delta l$. Считая δr , δl , $\delta \theta$ малыми и проецируя силы на направление внешней нормали, мы получим уравнение равновесия в радиальном направлении:

$$\frac{d}{dr} (r p_r) - p_t + \rho R r = 0. \quad (55)$$

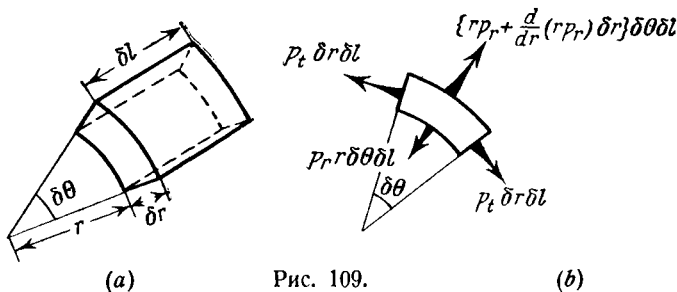


Рис. 109.

Равновесие в двух других направлениях уже обеспечено тем, что p_r , p_t , p_l являются главными напряжениями и вместе с ρ и R зависят только от r .

Решение уравнений

435. Уравнения (54) и (55) определяют искомое напряженное состояние. Из первого и второго уравнений (54), исключив u , найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [r \{ p_t - \sigma (p_t + p_r) \}] &= E \frac{du}{dr} = \\ &= p_r - \sigma (p_t + p_r) \end{aligned}$$

или

$$r \frac{d}{dr} \{ p_t - \sigma (p_t + p_r) \} + (1 + \sigma) (p_t - p_r) = 0. \quad (I)$$

Из третьего уравнения (54), так как k не зависит от r , мы имеем:

$$\frac{d}{dr} \{ p_t - \sigma (p_r + p_t) \} = 0. \quad (II)$$

Исключив p_t из (I) и (II), мы получим:

$$r \frac{d}{dr} \{ (1 - \sigma) p_t - \sigma p_r \} + p_t - p_r = 0, \quad (III)$$

а из (55):

$$r \frac{d}{dr} p_r + p_r - p_t + \rho R r = 0. \quad (IV)$$

Сложив, получим:

$$(1 - \sigma) r \frac{d}{dr} (p_t + p_r) + \rho R r = 0,$$

так что

$$p_r + p_t = - \frac{1}{1 - \sigma} \int \rho R dr. \quad (V)$$

Массовые силы, являясь чисто радиальными, имеют потенциал Ω . Согласно (5) § 402, мы можем написать, что:

$$R = - \frac{d\Omega}{dr}. \quad (56)$$

Равенства (IV) и (V) принимают вид (ρ — постоянно):

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d}{dr} p_r + p_r - p_t &= r \rho \frac{d\Omega}{dr}, \\ p_r + p_t &= \frac{1}{1 - \sigma} \rho \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Исключив p_t сложением и умножив получившееся уравнение на r , мы имеем:

$$\frac{d}{dr} [r^2 (p_r - \rho \Omega)] = - \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} r \rho \Omega,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} p_r - \rho \Omega &= - \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \frac{1}{r^2} \int r \rho \Omega dr, \\ p_t - \rho \Omega &= \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \left[\frac{1}{r^2} \int r \rho \Omega dr - \rho \Omega \right]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Эти выражения вполне согласуются с предыдущим результатом. Действительно, в цилиндрических координатах в случае действия массовых сил мы из (7) и (42), так как функция χ не зависит сейчас от θ , будем иметь:

$$p_r \equiv \widehat{rr} = \rho \Omega + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr}, \quad p_t \equiv \widehat{\theta\theta} = \rho \Omega + \frac{d^2 \chi}{dr^2}, \quad r\widehat{\theta} = 0,$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (58), мы видим, что они совпадают, если

$$\frac{dl}{dr} = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{r} \int r \rho \Omega dr.$$

Воспользовавшись тождеством (32), мы получим отсюда уравнение (8):

$$\nabla_1^2 l = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dl}{dr} \right) = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \rho \Omega.$$

Напряжение в длинном цилиндрическом вале (или трубе), вращающемся с постоянной угловой скоростью

436. В практике мы сталкиваемся с массовыми силами, обладающими симметрией относительно оси вала тогда, когда эти силы возникают в результате вращения вала¹⁾. Если вал (или труба) вращается с постоянной угловой скоростью ω , то ускорение точки на расстоянии r от оси будет иметь величину $\omega^2 r$ и будет направлено по радиусу к оси. Следовательно, сила инерции будет направлена *от* оси, и мы можем написать, что:

$$R = \omega^2 r.$$

Потенциал этих сил:

$$\Omega = -\int R dr = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \text{const.}$$

Подставив его в формулы (58) и обозначив через A и B постоянные интегрирования, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 r^2, \\ p_t &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 r^2. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Из третьей формулы (54) имеем:

$$\begin{aligned} p_l &= Ek + \sigma(p_r + p_t) = \\ &= Ek + 2\sigma A - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (60)$$

где через k обозначена постоянная продольная деформация.

¹⁾ В § 434 мы специально предполагали наличие сил инерции.

Заметим, что нельзя сделать так, чтобы p_t для каждого значения r обращалось в нуль. Вместе с тем, взяв подходящее значение k , мы можем добиться того, что результирующее продольное растяжение обратится в нуль. Следовательно, полученное нами решение не будет являться точным решением для вала (или трубы), концы которого свободны от напряжений, но, согласно принципу Сен-Венана, его можно применять в частях такого вала (или трубы), достаточно удаленных от концов. Ошибка, вызванная применением этого решения, будет всегда очень мала.

437. Значения постоянных A и B , входящих в предыдущие выражения для компонентов напряжения, определяются из граничных условий, т. е. условий, наложенных на p_r . Обычно p_r равно нулю на цилиндрических поверхностях. Следовательно, в случае трубы, мы имеем два выражения для определения двух неизвестных.

Пусть a и b — внешний и внутренний радиусы трубы. Легко показать, что:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 (a^2 + b^2), \quad B = -\frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 a^2 b^2 \\ \text{так, что на поверхности } (r=b): \\ p_t &= \frac{1}{4} \frac{\rho \omega^2}{1-\sigma} \left[(3-2\sigma) a^2 + (1-2\sigma) b^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Если вал сплошной, то мы, очевидно, будем иметь только одно условие, а определить требуется две постоянные A и B . Заметим, что B в этом случае должно равняться нулю. На самом деле вторая из формул (54) показывает, что u будет содержать член $-\frac{(1+\sigma)B}{Er}$, а вместе с тем u должно обращаться в нуль при $r=0$. Следовательно, в случае сплошного вала радиуса a мы из граничного условия и первой формулы (59) имеем:

$$A = \frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 a^2.$$

Для компонентов напряжения получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 (a^2 - r^2), \\ p_t &= \frac{1}{8} \frac{\rho \omega^2}{1-\sigma} \left[(3-2\sigma) a^2 - (1+2\sigma) r^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Влияние малого осевого отверстия

438. «Кольцевое напряжение» p_t имеет наибольшее значение на меньшем радиусе. Для сплошного вала радиуса a это значение можно найти, приравняв r нулю во второй из формул (62); оно равно

$$\frac{1}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 a^2.$$

Для полого вала оно определяется формулой (61).

Предположим теперь, что радиус b достаточно мал, и мы можем пренебречь b^2 в сравнении с a^2 . Тогда максимальное значение кольцевого напряжения в полом валу равно:

$$\frac{1}{4} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \rho \omega^2 a^2,$$

т. е. вдвое больше, чем в сплошном. Таким образом, если в валу сделать очень малое осевое отверстие, то максимальное значение кольцевого напряжения удвоится.

Пример

4. (Самб. М. С. Т. 1934.) Сплошной стальной вал винта вращается со скоростью 300 об/мин. Диаметр вала 61 см. Концы вала заделаны так, что в осевом направлении он не может ни растягиваться, ни сжиматься. Вычислить результирующую по поперечному сечению силу от продольных сжимающих напряжений, возникающих при вращении. Удельный вес стали взять равным 0,00785 кг/см³, а коэффициент Пуассона равным 0,3.

[—3155 кг (сила растяжения).]

**Соотношение между функциями напряжений для
плоской деформации и для плоского
напряжённого состояния**

439. *Плоское напряженное состояние*, соответствующее только что разобранным случаю плоской деформации, можно исследовать подобно тому, как это делалось в § 417. Сейчас задача заключается в том, чтобы связать функцию напряжений для плоской деформации с функцией напряжений для плоского напряженного состояния (например χ' и χ) при предположении, что обе вызваны действием одних только массовых сил, имеющих один и тот же потенциал (Ω). Приведенное ниже исследование применимо к любой из таких задач. Пусть χ' — функция напряжения, соответствующая плоской деформации, и мы, согласно (8), имеем:

$$\nabla_1^4 \chi' + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \nabla_1^2 (\rho\Omega) = 0, \quad (63)$$

где χ — функция напряжений, соответствующая плоскому напряженному состоянию, для нее существует выражение:

$$\chi = \chi_0 - \frac{1}{2} \sigma z^2 \left\{ \frac{\Theta_0}{1+\sigma} + \rho\Omega - \frac{1}{2(1-\sigma)} r^2 \nabla_1^2 (\rho\Omega) \right\}, \quad (64)$$

которое получается из (18) после подстановки в него A из (15). Последнее соотношение справедливо тогда, когда Ω подчиняется условию

$$\nabla_1^2 (\rho\Omega) = \text{const.} \quad (65)$$

Мы свяжем между собой χ и χ' только тогда, когда это условие выполняется.

В выражении (64):

$$\Theta_0 = (1-\sigma) \rho\Omega + \nabla_1^2 \chi_0 \quad (19) \text{ bis}$$

и должна быть гармонической функцией двух переменных. Следовательно, функция χ_0 должна удовлетворять уравнению:

$$\nabla_1^4 \chi_0 + (1-\sigma) \nabla_1^2 (\rho\Omega) = 0. \quad (20) \text{ bis}$$

Пусть χ_0 в выражении (64) равно:

$$\chi_0 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \chi' + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{1+\sigma} h^2 \left[\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi' + 2\rho\Omega - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \nabla_1^2 (\rho\Omega) \left\{ r^2 + \frac{1}{3} \sigma h^2 \right\} \right], \quad (I)$$

тогда, используя (65), мы из (19) получим:

$$\Theta_0 = (1-\sigma) (\rho\Omega + \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi') + \\ + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{1+\sigma} h^2 \nabla_1^2 \left[\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi' - \frac{4\sigma}{1-\sigma} \rho\Omega \right] = \\ = (1-\sigma) (\rho\Omega + \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi') - \frac{1}{6} \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} h^2 \nabla_1^2 (\rho\Omega), \quad (II)$$

[согласно (63)].

С помощью (63) и (65) мы можем видеть, что функция Θ_0 , определенная равенством (II), является гармонической функцией двух переменных. Из (II) имеем:

$$\frac{\Theta_0}{1+\sigma} + \rho\Omega - \frac{1}{2(1-\sigma)} r^2 \nabla_1^2 (\rho\Omega) = \\ = \frac{1}{1+\sigma} \left[\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi' + 2\rho\Omega - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \nabla_1^2 (\rho\Omega) \left\{ r^2 + \frac{1}{3} \sigma h^2 \right\} \right].$$

Левая часть этой формулы представляет собой величину, стоящую в фигурных скобках в правой части формулы (64). Следовательно, если мы определяем функцию напряжений χ с помощью формулы (64), то используя (I) в качестве выражения для χ_0 , мы получим

$$\chi = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \chi' + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{1+\sigma} (h^2 - 3z^2) \left[\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \nabla_1^2 \chi' + \right. \\ \left. + 2\rho\Omega - \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \nabla_1^2 (\rho\Omega) \left\{ r^2 + \frac{1}{3} \sigma h^2 \right\} \right]. \quad (66)$$

Члены с $(h^2 - 3z^2)$ не влияют на средние по толщине пластинки значения компонентов напряжения, так как

$$\int_{-h}^h (h^2 - 3z^2) dz = 0.$$

Если h мало, то ими можно пренебречь.

Мы уже показали, что функция Θ_0 , определенная формулой (19), является гармонической функцией двух переменных, следовательно, уравнение (20) удовлетворяется. Таким образом, полученная для χ формула (66) удовлетворяет всем тем требованиям, которым должна удовлетворять функция напряжений плоского напряженного состояния.

440. Заметим, что множителя $\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}$, стоящего перед функцией χ' в выражении (66), не было в аналогичных исследованиях § 417. Там мы говорили о функции напряжений, плоского напряженного состояния, возникшего в силу действия заданных поверхностных сил (массовые силы отсутствовали). Здесь мы приняли, что χ и χ' являются функциями напряжений для напряженных состояний, возникших в результате действия массовых сил. Граничные условия в нашей задаче, согласно (7), имеют вид:

$$\rho\Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0.$$

Компоненты напряжения в случае плоской деформации, согласно (7), имеют вид:

$$\bar{X}_x = \rho\Omega + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial y^2}, \dots \quad (I)$$

Мы обозначали их \bar{X}_x, \dots для того, чтобы отличить от компонентов напряжения, соответствующих плоскому напряженному состоянию. Последние выражаются так:

$$X_x = \rho\Omega + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \dots \quad (II)$$

Функция χ определяется по формуле (66). Пренебрегая в формуле (66) членами с множителем $(h^2 - 3z^2)$, мы получим:

$$\chi = \frac{(1-\sigma)^2}{(1-2\sigma)} \chi'.$$

Теперь, воспользовавшись (I) и (II), мы найдем следующие соотношения между компонентами напряжения, соответствующими плоскому напряженному состоянию и плоской деформации

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \rho\Omega + \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} (\bar{X}_x - \rho\Omega) = \\ &= \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \bar{X}_x - \frac{\sigma^2}{1-2\sigma} \rho\Omega, \\ Y_y &= \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} \bar{Y}_y - \frac{\sigma^2}{1-2\sigma} \rho\Omega, \\ X_y &= \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Очевидно, что если для задачи, в которой действуют массовые силы, мы найдем компоненты напряжения, соответствующие случаю плоской деформации, то умножением их на некоторый коэффициент мы не сможем получить компоненты напряжения, соответствующие случаю плоского напряженного состояния, так как компоненты напряжения, найденные таким путем, не будут, вообще говоря, удовлетворять граничным условиям.

Но мы можем использовать соотношения (67) для того, чтобы связать части компонентов напряжения, *зависящие* только от Ω , и провести далее решение задачи обычным путем.

Напряжения в тонком вращающемся диске

441. Теперь, воспользовавшись содержанием §§ 436—438, мы сможем найти напряжения, возникающие при вращении круглого диска малой постоянной толщины.

Потенциал массовых сил равен:

$$\Omega = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \text{const.} \quad (I)$$

В нашей задаче так же, как и в задаче § 436 компоненты напряжения, соответствующие случаю плоской деформации, даются равенствами (59). Не нарушая общности, мы можем опустить постоянный член в выражение (I) и тогда компо-

ненты напряжения, соответствующие случаю плоского напряженного состояния, согласно формулам (67), будут:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= A' + \frac{B'}{r^2} - \frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 r^2, \\ p_t &= A' - \frac{B'}{r^2} - \frac{1}{8} (1 + 3\sigma) \rho \omega^2 r^2, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где A' , B' — постоянные интегрирования, мы их не определяли для решения, соответствующего случаю плоской деформации. Компонент продольного напряжения, конечно, равен нулю. Напряжения p_r , p_t , как и раньше, являются главными.

Новое решение (68) может быть применено к такого же рода задачам, как и решение §§ 473—478. Так для диска с внешним радиусом a и внутренним b мы найдем, что

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 (a^2 + b^2), \quad B' = -\frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 a^2 b^2 \\ \text{так, что на поверхности } (r = b) \\ p_t &= \frac{1}{4} \rho \omega^2 [(3 + \sigma) a^2 + (1 - \sigma) b^2]. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Для сплошного диска радиуса a B' должно быть нулем, а

$$A' = \frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 a^2,$$

так что для компонентов напряжения имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 (a^2 - r^2), \\ p_t &= \frac{1}{8} \rho \omega^2 [(3 + \sigma) a^2 - (1 + 3\sigma) r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Максимальное значение «кольцевого» напряжения p_t в случае сплошного диска равно:

$$\frac{1}{8} (3 + \sigma) \rho \omega^2 a^2$$

и в случае диска с малым осевым отверстием:

$$\frac{1}{4} (3 + \sigma) \rho \omega^2 a^2.$$

Таким образом, вывод, сделанный в § 438, верен как для длинного вала, так и для тонкого диска.

Примеры

5. (Самб. М. С. Т. 1933¹⁾) Тонкий диск с внешним радиусом a и внутренним радиусом b посажен на несжимаемый вал радиуса b . Нормальное давление между валом и диском равно P кг/см². Показать, что угловая скорость ω , при которой давление между диском и валом обратится в нуль, будет:

$$\rho\omega^2 = \frac{48gP}{a^2 - b^2} \left[\frac{(1 + \sigma)a^2 + (1 - \sigma)b^2}{(3 + \sigma)a^2 + (1 - \sigma)b^2} \right],$$

(a и b измерены в см, а ρ — в кг/см³).

[Из принципа суперпозиции следует, что при этой скорости ω возникает растягивающее напряжение p_r величины P , уничтожающее радиальные смещения на внутренней поверхности диска.]

6. (Самб. М. С. Т. 1931.) Тонкий круглый диск постоянной толщины и радиуса r_0 составлен из двух концентрических частей. Радиус поверхности раздела равен r_1 . Найти, каким должно быть наименьшее значение радиального давления на поверхности раздела в покоящемся диске для того, чтобы давление между двумя его частями не обратилось бы в нуль, когда он будет вращаться с угловой скоростью ω .

$$\left[\frac{1}{8}(3 + \sigma)\rho\omega^2(r_0^2 - r_1^2) \right]$$

[Напряжения, вызываемые вращением, накладываются на напряжения, имеющиеся в покоящемся диске.]

Температурные напряжения в длинном цилиндре круглого поперечного сечения

442. Неравномерное распределение температуры θ по радиусу r приводит к тому, что в обычных уравнениях появляются члены, представляющие собой фиктивные объемные силы.

В главе X (§ 326) мы видели, что эти объемные силы являются градиентом фиктивного потенциала $\beta\theta$ и что к контуру поперечного сечения цилиндра должно быть приложено фиктивное растяжение $\beta\theta$. Затем, когда компоненты напряжения будут определены из полученных таким образом уравнений, из найденных X_x, Y_y, Z_z нужно будет вычесть величину $\beta\theta$, после чего мы получим значения истинных компонентов

¹⁾ Обозначения примера (Самб. М. С. Т.) изменены так, чтобы они совпадали с обозначениями нашей книги.

напряжения. Напомним, чему равна постоянная β :

$$\beta = 3Kk = \frac{Ek}{1 - 2\sigma}.$$

Здесь K — модуль объемного сжатия, а k — температурный коэффициент линейного расширения.

Определение θ как функции r для какого-нибудь частного примера является задачей теории теплопроводности. Мы примем, что θ как функция r нам известна. Предложенный здесь метод можно непосредственно применить к случаю плоской деформации, т. е. для длинной трубы или цилиндра, потому что теория (§§ 432—435) предполагает, что компонент продольного напряжения Z_z не равен нулю. Задача о температурных напряжениях в тонком круглом диске должна решаться с помощью основных соотношений. На самом деле предположение о том, что компонент Z_z должен быть всюду равен нулю, делает теорию плоского напряженного состояния неприменимой к этому случаю, так как здесь надо предполагать, что на боковых плоскостях диска действуют фиктивные нормальные напряжения $\beta\theta$.

Примеры

7. (Самб. М.С. Т. 1933¹⁾). Электрический ток нагревает проводник. Проводник имеет форму длинного цилиндра кругового поперечного сечения радиуса a . Количество теплоты, приобретаемое единицей объема проводника за единицу времени, постоянно. Можно показать, что возрастание температуры внутри проводника на каком-нибудь радиусе r дается формулой $\theta = \theta_0 + \lambda(a^2 - r^2)$, где θ_0 — температура на поверхности, а λ — постоянная.

Пусть k — коэффициент линейного расширения. Предположив, что напряжения не превосходят предела пропорциональности и что нет внешних сил, стесняющих продольное или радиальное расширение, доказать, что распределение температуры вызывает следующие напряжения:

$$\text{радиальное сжимающее напряжение: } \frac{Ek\lambda}{4(1-\sigma)}(a^2 - r^2),$$

$$\text{кольцевое растягивающее напряжение: } \frac{Ek\lambda}{4(1-\sigma)}(3r^2 - a^2),$$

$$\text{продольное растягивающее напряжение: } \frac{Ek\lambda}{2(1-\sigma)}(2r^2 - a^2).$$

¹⁾ Обозначения примера (Самб. М. С. Т.) изменены так, чтобы они совпадали с обозначениями нашей книги.

[Компоненты напряжения p_r и p_t (неисправленные) определяются по формуле (58) после того как в них вместо $p\Omega$ будет подставлено $\beta\theta$. Постоянным членом в θ можно пренебречь. Следовательно, мы имеем задачу § 436, в которой $-\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$ заменяется на $-\beta\lambda r^2$.

Таким образом из формул (59) и (60), в которых, как и раньше V должно равняться нулю, мы имеем:

$$p_r \text{ (неисправленное)} = -\beta\lambda a^2 + \frac{1}{4} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma} \beta\lambda (a^2 - r^2),$$

$$p_t \text{ (неисправленное)} = -\beta\lambda a^2 + \frac{1}{4} \frac{\beta\lambda}{1-\sigma} \left\{ (3-2\sigma) a^2 - (1+2\sigma) r^2 \right\},$$

$$p_e \text{ (неисправленное)} = \text{const} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \beta\lambda r^2.$$

Прибавив $\beta\lambda r^2$ к каждому из этих выражений, мы получим исправленные нужным образом компоненты напряжения. Если вместо β поставить $\frac{Ek}{1-2\sigma}$, а постоянную в третьем выражении выбрать так, чтобы продольное результирующее напряжение обращалось в нуль, то полученные для компонентов напряжения выражения вполне совпадут с данным выше ответом.]

8. (Camb. M.S. T. 1932¹⁾). Имеем тонкий диск постоянной толщины радиуса R . Его боковые плоскости нагреваются в центре. Тепло распространяется к периферии таким образом, что температура на радиусе r почти постоянна по толщине и определяется следующим соотношением:

$$\theta_1 - (\theta_1 - \theta_0) \frac{r^2}{R^2}.$$

Показать, что если края диска ничем не стеснены, то радиальные и кольцевые сжимающие напряжения на радиусе r определяются соответственно такими формулами:

$$\frac{1}{4} Ek (\theta_1 - \theta_0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ и } \frac{1}{4} Ek (\theta_1 - \theta_0) \left(1 - \frac{3r^2}{R^2} \right),$$

где k — температурный коэффициент линейного расширения.

Тот же диск вставлен в жесткое кольцо из того же материала. Когда температура диска постоянна, он свободно входит в кольцо. Тепло передается так же, как и раньше. Кольцо принимает постоянную температуру θ_0 , но не испытывает заметных деформаций вследствие возникающих напряжений.

¹⁾ Обозначения примера (Camb. M. S. T.) изменены так, чтобы они совпадали с обозначениями нашей книги.

Показать, что радиальное сжимающее напряжение в диске на радиусе r теперь будет:

$$\frac{1}{4} Ek (\theta_1 - \theta_0) \left(\frac{3 - \sigma}{1 - \sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где σ — коэффициент Пуассона.

[Используя основные соотношения, имеем:

$$E(e_r - k\theta) = p_r - \sigma p_t, \quad E(e_t - k\theta) = p_t - \sigma p_r$$

при

$$\frac{d}{dr}(rp_r) - p_t = 0.]$$

Случай отсутствия массовых сил.

Толстостенная труба под действием постоянного давления

443. Если массовые силы не действуют, т. е. $R = 0$, то доказательства, аналогичные доказательствам §§ 435—436, для компонентов напряжения дадут такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= A + \frac{B}{r^2}, \\ p_t &= A - \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где через A и B обозначены произвольные постоянные. Эти выражения ¹⁾ можно получить из формул (59), положив в них ω равным нулю.

Подставив (71) в третью из формул (54), мы имеем:

$$k = e_t = \frac{1}{E} [p_t - 2\sigma A], \quad (72)$$

отсюда видно, что в этом решении p_t так же, как k и A , не зависит от r .

Следовательно, продольное напряжение равномерно распределено по поперечному сечению, и, если полная сила продольного растяжения равна нулю, то p_t будет всюду нулем.

Постоянные A и B можно подобрать так, что напряжение p_r будет принимать заданные значения на двух граничных

¹⁾ Они по форме тождественны с типовым решением (45), когда в последнем P_0 опущено. Ср. § 430.

поверхностях. Так, если поверхность $r=a$ подвержена действию давления P_a , а поверхность $r=b$ свободна от напряжений, то мы должны иметь

$$\begin{aligned} -p_r &= P_a \text{ при } r=a, \\ -p_r &= 0 \text{ при } r=b. \end{aligned}$$

Выражения (71) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ p_t &= \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Заменив в этих выражениях a на b и b на a , мы получим решение, соответствующее действующему на поверхности $r=b$ давлению P_b и свободной от действия давления поверхности $r=a$. Используя принцип суперпозиции, мы можем получить решение в общем случае, т. е. тогда, когда на двух поверхностях действуют заданные постоянные давления.

Смещение, возникающее вследствие действия такой нагрузки, можно получить из второго соотношения (54). Оно дает:

$$u = \frac{r}{E} [p_t - \sigma(p_t + p_r)].$$

Подставив (71), получим:

$$u = \frac{1}{E} \left[(1 - \sigma) Ar - (1 + \sigma) \frac{B}{r} - \sigma r p_t \right].$$

Если p_r и p_t определяются формулами (73) и если p_t равно нулю, то мы имеем:

$$u = \frac{a^2 P_a}{(b^2 - a^2) E} \left\{ (1 - \sigma) r + (1 + \sigma) \frac{b^2}{r} \right\}. \quad (74)$$

Замкнутый цилиндрический сосуд

444. Если оба конца трубы закрыты и также подвержены действию давления интенсивности P_a , то полная осевая сила растяжения будет положительной или отрицательной в зависимости от того, означает ли a внутренний

или внешний радиусы. Если мы примем, что сила растяжения равномерно распределена по толщине трубы, то в обоих случаях продольное напряжение будет иметь величину:

$$\frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2}.$$

Следовательно, формула (74) для радиальных смещений заменится следующей:

$$u = \frac{a^2 P_a}{(b^2 - a^2) E} \left\{ (1 - 2\sigma) r + (1 + \sigma) \frac{b^2}{r} \right\}. \quad (I)$$

На свободной поверхности $r = b$ мы имеем:

$$u = (2 - \sigma) \frac{a^2 b}{b^2 - a^2} \frac{P_a}{E}.$$

Тангенциальная деформация определяется выражением:

$$e_t = \frac{u}{b} = \frac{2 - \sigma}{E} \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2}. \quad (II)$$

Постоянное продольное удлинение трубы, согласно третьей формуле (54), равно:

$$k = e_t = \frac{1 - 2\sigma}{E} \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2} = \frac{1}{3K} \frac{a^2 P_a}{b^2 - a^2}, \quad (75)$$

где K — модуль объемного сжатия (гл. IV, § 118).

Этим результатом воспользовался А. Мэллок¹⁾, чтобы непосредственно определить K .

Примеры

9. (Oxford F. E. E. S. 1931.) Длинная прямая труба, внутренний диаметр которой равен 5,08 см, противостоит внутреннему давлению в 315 кг/см². Внешним давлением можно пренебречь. Результирующей силы по поперечному сечению трубы не имеется.

Предел пропорциональности стали, из которой сделана труба, в простом опыте на растяжение равен 2830 кг/см², $\sigma = 0,3$.

Какой должна быть толщина стенок трубы, для того чтобы коэффициент безопасности равнялся 3?

¹⁾ Proc R. S., 74 (1904), 50—52.

При вычислениях принять поочередно следующие теории прочности: (1) максимального главного напряжения, (2) максимального сдвига, (3) максимальной упругой энергии деформации на единицу объема.

[(1) 1,05 см, (2) 1,86 см, (3) 0,585 см.]

10. (Oxford F. E. E. S. 1932¹⁾). Толстостенная труба сделана из материала, который при деформации за пределом пропорциональности течет при постоянном касательном напряжении S , которое равно максимальному касательному напряжению, соответствующему пределу текучести в опыте на простое растяжение.

Показать, что внутреннее гидростатическое давление, необходимое для того, чтобы вызвать переход материала за предел текучести по всей толщине трубы, равно $S \ln k^2$, где k — отношение внешнего и внутреннего диаметров поперечного сечения трубы.

Пусть при разгрузке материал, перешедший предел текучести, подчиняется линейному закону. Показать, что после того, как мы удалим приложенное гидростатическое давление, на внутренней поверхности трубы возникнет сжимающее напряжение величины:

$$\widehat{\theta\theta} = 2S \left(\frac{k^2}{k^2 - 1} \ln k^2 - 1 \right).$$

Горячая и прессовая посадки

445. На колеса паровозов, обычно, надевают специальные закаленные обода или «кольца». В случае износа их можно менять. Обод делают так, что его внутренний диаметр всегда несколько меньше внешнего диаметра колеса. Обод расширяют нагреванием и насаживают на колесо. Когда обод и колесо примут одинаковую температуру, между ними возникнет давление, которое не будет допускать относительного движения. Такой способ соединения называется горячей посадкой. Для различных целей, которые мы объясним в дополнении к этой главе, горячей посадкой иногда пользуются при изготовлении стволов артиллерийских орудий. В основном тот же способ используют при насаживании колес на оси. Только в этом случае посадочным поверхностям придают обычно форму конуса и соединяют их под аксиальным давлением. Это так называемая прессовая посадка.

При использовании и того и другого способа соединения нужно знать то давление, которое возникает при данной разности диаметров посадочных поверхностей.

¹⁾ См. примечание на стр. 660.

Рассмотрим общий случай (рис. 110). Две трубы насаживаются одна на другую. После сборки внутренняя труба имеет радиусы a и b , а внешняя — радиусы b и c . Очевидно, что при a , равном нулю, имеем случай насаживания трубы на сплошной вал.

446. Предположим, что с целью уменьшения до минимума продольного напряжения в трубах приняты такие меры, как, например, смазка посадочных поверхностей.

Для определения смещений имеем формулу (74), которая получена для трубы с радиусами a и b , подверженной действию давления P_a на поверхности $r = a$. На внутренней поверхности $r = a$ радиальное смещение, вызванное

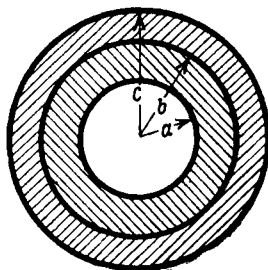


Рис. 110.

P_a , равно:

$$u_a = \frac{aP_a}{(b^2 - a^2)E} \left\{ (1 - \sigma) a^2 + (1 + \sigma) b^2 \right\}. \quad (I)$$

Допустим, что P_b является радиальным давлением, действующим между двумя трубами (см. рис. 110). Посмотрим, как изменится внешний радиус внутренней трубы, когда мы разъединим трубы. Давление P_b обратится при этом в нуль. Согласно принципу суперпозиции, мы можем получить интересующую нас величину, подвергнув поверхность с давлением P_b действию давления $-P_b$. Следовательно, мы можем получить величину, на которую увеличится наш радиус из формулы (I), поменяв в ней a и b местами и поставив $-P_b$ вместо P_a . Тогда:

$$(u)_I = \frac{bP_b}{(b^2 - a^2)E_I} \left\{ (1 - \sigma_I) b^2 + (1 + \sigma_I) a^2 \right\}. \quad (II)$$

Величины σ_I и E_I характеризуют материал внутренней трубы.

Внешняя труба после разъединения будет, очевидно, сжиматься. Обозначим через $(u)_0$ величину, на которую умень-

шится внутренний радиус внешней трубы. Очевидно, что $(u)_0$ можно найти из формулы (II), подставив в нее c вместо a .

$$(u)_0 = \frac{bP_b}{(b^2 - c^2)E_0} \left\{ (1 - \sigma_0) b^2 + (1 + \sigma_0) c^2 \right\}. \quad (III)$$

Величины σ_0 , E_0 характеризуют материал внешней трубы.

Итак, после разъединения внешний радиус внутренней трубы будет равен $b + (u)_1$, а внутренний радиус внешней трубы: $b + (u)_0$. Разность длин радиусов, соответствующая радиальному давлению P_b , возникающему после соединения, равна:

$$\delta = (u)_1 - (u)_0.$$

Если мы воспользуемся формулами (II) и (III) и допустим, что обе трубы сделаны из одного материала, модуль Юнга которого E , то получим:

$$\delta = \frac{2b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \frac{P_b}{E}. \quad (76)$$

Если труба насаживается на сплошной цилиндр [$a = 0$], то эта формула примет вид:

$$\delta = \frac{2bc^2}{c^2 - b^2} \frac{P_b}{E}. \quad (77)$$

Немного изменив предыдущие выкладки, мы сможем учесть любое продольное растяжение и равное ему сжатие, возникающее в трубах после их соединения.

Примеры

11. (Camb. M.S.T. 1934.) На трубу, внутренний и внешний диаметры которой равны соответственно 30,5 см и 45,75 см, нужно надеть другую трубу, толщина которой равна 7,62 см. Внутреннее отверстие этой внешней трубы обработано так, что оно на 0,127 см меньше, чем наружный диаметр трубы, на которую она затем насаживается. Трубы сделаны из стали, для которой значение E равно $2,1 \cdot 10^6$ кг/см². Написать формулы для радиального и кольцевого напряжений, развивающихся во внутренней трубе.

[Радиальное давление от посадки 958 кг/см².]

12. (Oxford F. E. E. S. 1932.) На трубу с внутренним диаметром 10,16 см и толщиной 2,54 см насажена втулка толщиной 2,45 см. Соединение таково, что когда внутри трубы находится жидкость под некоторым (неизвестным) давлением, то в трубе и втулке воз-

никает напряженное состояние с максимальным *касательным* напряжением в 1260 кг/см^2 . Вычислить давление жидкости. Определить давление между втулкой и трубой в том случае, когда давление жидкости равно нулю.

[Можно применить формулы $\widehat{rr} = a + \frac{b}{r^2}$, $\widehat{\theta\theta} = a - \frac{b}{r^2}$ для радиального и тангенциального главных напряжений в толстостенной трубе.]

[1250 кг/см^2 , 227 кг/см^2 .]

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XII

Задачи, относящиеся к конструированию стволов артиллерийских орудий

Формулы § 446 применяются при конструировании стволов артиллерийских орудий, которые обычно состоят из труб, насаженных друг на друга так, как рассматривалось в § 445. Здесь мы встречаемся, может быть, с самым важным примером тела с «начальными напряжениями» (глава III, §§ 74 — 80), ипользованного для практических целей¹⁾, и поэтому мы постараемся исследовать его с теоретической точки зрения.

Нарощенные стволы артиллерийских орудий

447. Из формул (73) можно видеть, что напряжения в толстостенной трубе, находящейся под действием внутреннего давления, распределены очень нерационально.

Общепринятым критерием прочности для сталей, из которых делают стволы артиллерийских орудий, является теория максимальной разности напряжений в материале, а эта разность, если специальные условия не делают p_t исключительно большим, будет:

$$(p_t - p_r) \propto \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, разность напряжений с увеличением r очень быстро убывает от своего максимального значения на внутренней поверхности, и материал на внешней поверхности

¹⁾ Ср. § 456.

используется очень неэкономно. Согласно (73) максимальная разность напряжений равна:

$$\frac{2b^2}{b^2 - a^2} P_a,$$

т. е. она при любой толщине трубы больше, чем $2P_a$. Следовательно, если через f обозначить максимальное напряжение, допускаемое в данном материале в опыте на простое растяжение, то ни одна труба, как бы она ни была толста, не может выдержать ¹⁾ давление, большее чем $\frac{1}{2}f$.

Две трубы

448. Можно достигнуть бóльшей эффективности в использовании материала, применив две трубы, насаженные одна на другую так, как рассматривалось в § 445.

Насаживание вызывает тангенциальное растяжение во внешней и тангенциальное сжатие во внутренней трубе. Таким образом оно выравнивает разность напряжений, возникающую от приложения давления.

Изучим эту задачу. Обозначим через P_b , как и в § 446, радиальное давление на поверхности $r = b$, возникшее в результате насаживания двух труб с радиусами a, b и b, c . Разность напряжений, вызванную во внутренней трубе, можно найти из формул (73), подставив P_b вместо P_a и поменяв местами a и b .

Таким образом, после соединения имеем во внутренней трубе:

$$p_t - p_r = -\frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2} \frac{P_b}{r^2} \quad (I)$$

и во внешней трубе (заменяем a через c в только что полученной формуле):

$$p_t - p_r = \frac{2b^2c^2}{c^2 - b^2} \frac{P_b}{r^2}. \quad (II)$$

¹⁾ Выдержать не переходя за предел пропорциональности. Пластичность (т. е. способность материала неупруго деформироваться при больших напряжениях в нем) позволяет до действительного разрушения практически выдерживать бóльшие давления.

Под «давлением взрыва» составная труба будет вести себя, как одна труба с радиусами a и c . Следовательно, *добавочную* разность напряжений можно найти из тех же формул (73), заменив в них b на c :

$$p_t - p_r = \frac{2a^2c^2}{c^2 - a^2} \frac{P_a}{r^2}. \quad (\text{III})$$

Полную разность напряжений при действии давления взрыва можно получить из формул (I) — (III), воспользовавшись принципом суперпозиции. Во внутренней трубе она имеет максимальное значение при ($r = a$).

Оно равно:

$$(p_t - p_r)_{r=a} = 2 \left\{ \frac{c^2}{c^2 - a^2} P_a - \frac{b^2}{b^2 - a^2} P_b \right\}. \quad (\text{IV})$$

Во внешней трубе полная разность напряжений достигает максимального значения при $r = b$, величина которого равна

$$(p_t - p_r)_{r=b} = 2c^2 \left\{ \frac{a^2}{b^2} \frac{P_a}{c^2 - a^2} + \frac{P_b}{c^2 - b^2} \right\}. \quad (\text{V})$$

Очевидно, что увеличивая «посадочное давление» P_b , мы будем уменьшать значение (IV) и увеличивать (V), и наоборот. Материал будет использован наиболее эффективно, если (IV) и (V) будут равны. Итак, мы вывели некоторое необходимое условие

$$P_b \left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{c^2 P_a}{c^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (\text{VI})$$

Если оно удовлетворено, то максимальное значение возникшей разности напряжений *в обеих трубах* будет:

$$[p_t - p_r]_{\max} = \frac{2b^2c^2P_a}{2b^2c^2 - (b^4 + c^2a^2)}. \quad (\text{VII})$$

449. Обозначив через f (как и в § 447) наибольшую разность напряжений которую материал может выдерживать в опыте на простое растяжение, мы из формулы (VII) видим, что можно получить составную трубу, которая будет выдерживать давление величины:

$$P_a = f \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) \right\}. \quad (\text{VIII})$$

В эту формулу вошла величина b , которую можно подобрать наиболее выгодным для нас образом. Очевидно, что P_a будет иметь наибольшее значение при

$$b^2 = ca. \quad (78)$$

В этом случае формула (VIII) принимает вид:

$$[P_a]_{\max} = \frac{c-a}{c} f. \quad (79)$$

Соответствующую формулу для одной трубы тех же размеров можно получить из (III). Мы имеем:

$$[P_a]_{\max} = \frac{c^2 - a^2}{2c^2} f. \quad (80)$$

Из двух предыдущих формул видно, что сконструированная нашим способом труба выдерживает давление в

$$\frac{2c}{c+a} \quad (81)$$

раз большее, чем обычная труба.

Мы получаем наибольшую выгоду, давая b оптимальное значение \sqrt{ca} [см. (78)]. При этом значении b условие (VI) принимает более простую форму, а именно:

$$P_b = \frac{1}{2} \frac{c-a}{c+a} P_a.$$

Давление P_a в этом выражении определяется формулой (79). Таким образом оптимальное значение P_b будет:

$$P_b = \frac{1}{2} \frac{(c-a)^2}{c(c+a)} f. \quad (82)$$

Необходимый «посадочный натяг» можно вычислить из формулы (76), § 446. Подставив в нее вместо b^2 его значение (78), мы получим:

$$\delta = 2b \frac{c+a}{c-a} \frac{P_b}{E}.$$

Воспользовавшись формулой (82), увидим, что относительный натяг на общем диаметре двух труб будет:

$$\frac{\delta}{b} = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \frac{f}{E}. \quad (83)$$

Пример

13. (Самб. М. С. Т. 1932.) Путем насаживания на трубу с внешним диаметром 20,3 см и внутренним диаметром 15,25 см другой трубы нужно получить составную стальную трубу, выдерживающую внутреннее давление 630 кг/см².

Пусть касательное напряжение нигде не превосходит 788 кг/см².

Вычислить наименьший допускаемый внешний диаметр наружной трубы. [25,4 см.]

Вычислить также необходимую начальную разность между наружным диаметром внутренней трубы и внутренним диаметром внешней трубы. Коэффициент Пуассона для стали равен 0,3.

$E = 2,1 \cdot 10^8$ кг/см². [0,00549 см.]

Общая теория проектирования составных труб

450. Задача заключается в следующем: мы должны спроектировать трубу данного внутреннего радиуса a , выдерживающую известное давление взрыва P_a , причем максимальная разность напряжений в материале трубы не должна превосходить некоторой заданной величины f . Если c — наружный радиус, то, очевидно, что вес затрачиваемого материала пропорционален $c^2 - a^2$.

Если мы используем одну трубу, то, согласно формуле (80),

$$c^2 - a^2 = 2a^2 \frac{P_a}{f - 2P_a}. \quad (84)$$

Если мы используем две трубы, соединенные при определенном «посадочном натяге», то, согласно формуле (79),

$$c^2 - a^2 = a^2 \frac{P_a(2f - P_a)}{(f - P_a)^2}. \quad (85)$$

Таким образом, использование «двухтрубной конструкции» дает возможность уменьшить вес затрачиваемого материала в отношении

$$\frac{(f - 2P_a)(2f - P_a)}{2(f - P_a)^2}.$$

Экономия в материале становится максимальной, когда отношение $\frac{P_a}{f}$ близко к $\frac{1}{2}$.

Если мы используем три и большее число труб, соединенных аналогичным образом, то сможем получить еще большую экономию материала. Однако может наступить такой момент, когда возрастающая стоимость производства превысит выгоду от экономии материала, и поэтому при проектировании нам нужно держаться некоторой середины.

Как практическое правило экономии материала, мы можем принять следующее требование: отношение толщины каждой использованной в конструкции трубы к внутреннему ее диаметру должно равняться определенному (одному и тому же для всех труб) числу.

Теоретические исследования должны ответить на вопрос: сколько труб понадобится в том или другом частном случае.

Рассмотрим поставленную выше задачу. Очевидно, что материал будет использован наиболее эффективно, если при действии давления взрыва разность напряжений будет достигать предельной величины f на внутренней поверхности каждой из труб¹⁾.

451. Пусть на рис. 110 (§ 445) изображена первая пара труб. Рассмотрим полные напряжения, вызванные в наименьшей из них, при действии давления взрыва P_a на поверхности $r = a$ и радиального давления величины P_b , вызванного внешними трубами на поверхности $r = b$. Следует заметить, что тогда как в § 448 P_b было начальным давлением, возникшим только вследствие «насаживания», то теперь P_b представляет собой начальное давление, измененное давлением взрыва P_a .

Разность напряжений, соответствующую P_a , можно получить из формул (73). Аналогично выразится разность напряжений, соответствующая P_b . Более того, эффект двух давлений, действующих совместно, можно найти по принципу суперпозиции. Полная разность напряжений во внутренней трубе определится выражением

$$P_t - P_r = \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{P_a - P_b}{r^2}. \quad (I)$$

¹⁾ Ср. § 447.

Ее максимальное значение (при $r = a$) будет равняться f , если P_b определить из уравнения

$$f = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} (P_a - P_b). \quad (\text{II})$$

Рассуждая аналогично относительно второй трубы, мы получим уравнение для P_c , а именно:

$$f = \frac{2c^2}{c^2 - b^2} (P_b - P_c).$$

Поступая точно так же далее, найдем уравнения для радиальных давлений P_b, P_c, \dots , возникающих между соединенными трубами при действии давления взрыва P_a . Эти уравнения следующие:

$$\left. \begin{aligned} P_b &= P_a - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) f, \\ P_c &= P_b - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) f, \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Отсюда видно, что рассматриваемые нами радиальные давления уменьшаются по мере того, как мы переходим от внутренней трубы к наружной. Постепенно мы можем дойти до такой трубы, в которой радиальное давление обратится в нуль или станет отрицательным, эта труба и будет последней.

452. Как установлено в § 450, мы должны требовать, чтобы

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots \quad (\text{IV})$$

Удобно ввести такое обозначение:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) = \dots \quad (\text{V})$$

Теперь соотношения (III) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} P_b &= P_a - \rho f, \\ P_c &= P_a - 2\rho f \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI})$$

Мы определим отсюда число необходимых труб (n), если дадим ρ некоторое удовлетворяющее условиям значение, при котором $\frac{P_a}{f}$ будет кратно ρ , т. е. будет выполняться равенство (n целое):

$$0 = P_a - n\rho f. \quad (\text{VII})$$

Таким образом, если $P_a = 8$, $f = 10$ и ρ должно быть не больше $\frac{1}{4}$, то значением n будет 4.

Подставив эти значения в равенство (VII), мы получим:

$$8 = 40\rho \text{ или } \rho = \frac{1}{5},$$

откуда, согласно (V),

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 - 2\rho = \frac{3}{5}$$

и $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \dots = 1,29$ (приближенно).

453. Установив число и размеры труб, рассмотрим давления, действующие между ними при *отсутствии давления взрыва* P_a , и потом отсюда определим необходимые «посадочные натяги». Для примера рассмотрим ствол орудия, составленный из четырех труб с радиусами a, b, c, d, e . Примем, что P_a, P_b, P_c, P_d определяются из уравнений (III). Некоторое время мы не будем полагать, что частные соотношения (IV) удовлетворены.

Величины, определяемые равенствами (III), являются *результующими давлениями* от насаживания и давления взрыва P_a . Часть давления, возникающую вследствие действия P_a , можно вычислить, полагая, что ствол представляет собой сплошную трубу радиусов a и e , т. е. мы можем использовать уравнения (73). Заменяя в них b на e , мы для радиального растягивающего напряжения p_r , возникающего вследствие действия P_a , получим:

$$p_r = \frac{a^2 P_a}{e^2 - a^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{r^2} \right\},$$

так, что давления на радиусах b, c и d , возникающие вследствие действия P_a , будут:

$$\left. \begin{aligned} P'_b &= \left(\frac{e^2}{b^2} - 1 \right) \frac{a^2 P_a}{e^2 - a^2}, \\ P'_c &= \left(\frac{e^2}{c^2} - 1 \right) \frac{a^2 P_a}{e^2 - a^2}, \\ P'_d &= \left(\frac{e^2}{d^2} - 1 \right) \frac{a^2 P_a}{e^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII})$$

Если давление взрыва перестанет действовать, то давления между трубами на поверхностях $r=b, r=c, r=d$ будут:

$$P_b - P'_b, P_c - P'_c, P_d - P'_d, \quad (\text{IX})$$

где P_b, P_c, P_d определяются по формулам (III) или (VI), а P'_b, P'_c, P'_d по формулам (VIII).

454. Посадочный натяг для внешней (или четвертой) трубы можно теперь вычислить, воспользовавшись рассуждениями § 446. При насаживании этой трубы, внутренние трубы будут вести себя, как сплошная труба с радиусами a и d ; за давление на поверхности $r=d$ мы должны принять величину $(P_d - P'_d)$.

Таким образом, в формуле (76)

P_b нужно заменить на $(P_d - P'_d)$,

b " " " d и

c " " " e (внешний радиус наружной трубы).

Необходимый радиальный натяг будет равен:

$$\left. \begin{aligned} \delta_a &= \frac{2d^3 (e^2 - a^2) P_d''}{(d^2 - a^2) (e^2 - d^2) E}, \\ P_d'' &= P_d - P_d'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

где

455. Те же соображения применяются и к третьей трубе с радиусами c и d . Только теперь нужно помнить, что $(P_c - P'_c)$, т. е. давление, определяемое формулами (IX), является давлением, возникающим на поверхности $r=c$, при действии давления $(P_d - P'_d)$ на поверхности $r=d$, а тогда, когда

третья труба насаживается, ее внешняя поверхность ($r = d$) свободна от напряжений. Следовательно, прежде чем вычислять «посадочный натяг», мы должны из $(P_c - P'_c)$ вычесть давление, вызываемое в трубе с радиусами a и d на радиусе c давлением $(P_d - P'_d)$, действующим на поверхности $r = d$.

Это давление можно найти из первой формулы (73), заменив в ней:

$$\begin{array}{ll} a \text{ на} & d, \\ b \text{ на} & a, \\ P_a \text{ на} & P''_d, \\ r \text{ на} & c. \end{array}$$

Оно будет:

$$-p_r = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \frac{d^2 P''_d}{d^2 - a^2}. \quad (\text{XI})$$

Таким образом, давление, при котором третья труба должна насаживаться на две внутренние трубы, равно

$$(P_c - P'_c) - \frac{d^2}{c^2} \frac{c^2 - a^2}{d^2 - a^2} P''_d = P'_c'. \quad (\text{XII})$$

Давление $(P_c - P'_c)$ в этой формуле определяется (III) и (VIII). Аналогичные соображения показывают, что вторая труба должна насаживаться на первую при давлении

$$(P_b - P'_b) - \frac{c^2}{b^2} \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} P''_c = P''_b. \quad (\text{XIII})$$

Давление $(P_b - P'_b)$ в этой формуле определяется (III) и (VIII), а P''_c формулой (XII).

Сделав нужные подстановки в формуле (76), мы для «посадочных натягов» на радиусах c и b получим следующие значения:

$$\delta_c = \frac{2c^3 (d^2 - a^2) P'_c''}{(c^2 - a^2) (d^2 - c^2) E} \quad \text{и} \quad \delta_b = \frac{2b^3 (c^2 - a^2) P''_b'}{(b^2 - a^2) (c^2 - b^2) E},$$

где давление P'_c'' определяется формулой (XII), а P''_b' формулой (XIII).

Задача решена. Осталось только выяснить, какие напряжения вызываются на каждой стадии процесса насаживания в различных трубах, и удостовериться в том, что максимальная разность напряжений ни разу не превысит допустимой величины f . Значение этого замечания выяснится в дальнейшем.

Теоретические пределы прочности

456. С теоретической точки зрения, составная труба, полученная соединением с натягом двух или большего числа труб, может рассматриваться как пример тела с «начальными напряжениями» (см. гл. III). Начальные напряжения в этом случае полезны, потому что они увеличивают прочность трубы. В § 435, исключив i из первого и второго соотношений (54), связывающих напряжения и деформации в телах без начальных напряжений, мы получим уравнение (I). Очевидно, что напряжения, возникающие вследствие давления взрыва в составной трубе, не подчиняются ему.

Внутри каждой составляющей трубы возникающие напряжения могут иметь любое распределение, удовлетворяющее условию радиального равновесия.

Интересно знать, какого предела прочности мы можем достигнуть, не налагая на толщину составных труб ограничения (IV) § 452. Условие равновесия выражено уравнением (55) § 434; если мы опустим член с R , то получим:

$$p_t - p_r = r \frac{d}{dr} p_r. \quad (86)$$

Если через a и c , как и в § 450, обозначить внутренний и внешний радиусы составной трубы и если наружная поверхность ($r=c$) будет свободна от напряжений, то давление взрыва равняется:

$$P_a = \int_a^c \frac{dp_r}{dr} dr = \int_a^c \frac{1}{r} (p_t - p_r) dr. \quad (87)$$

Максимальная прочность при наиболее эффективном использовании материала

457. Предположим, что переход за предел пропорциональности определяется максимальной разностью напряжений в материале (ср. § 447). Формула (87) показывает, что P_a возрастает, когда в любой части трубы возрастает разность напряжений

$(p_t - p_r)$. Если разность напряжений $(p_t - p_r)$ меньше или равна f , то наибольшее значение P_a для данных значений a и c будет:

$$P_a = f \int_a^c \frac{dr}{r} = f \ln \frac{c}{a}, \quad (88)$$

и мы получаем формулу

$$c^2 - a^2 = a^2 \left(e^{2 \frac{P_a}{f}} - 1 \right), \quad (89)$$

которую можно сравнить с (84) и (85) § 450.

Формулы (88) и (89) получены для трубы, составленной так, что материал все время используется с максимальной эффективностью, т. е. разность напряжений на всех радиусах *в течение всего времени действия давления* P_a равна f .

Формулы (73) определяют часть давления, которая является следствием действия только P_a . Заменяя b на c , получим:

$$p_t - p_r = \frac{2a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{P_a}{r^2}.$$

Следовательно, *если* P_a *не действует*, то разность напряжений равна:

$$p_t - p_r = f - \frac{2a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{P_a}{r^2}. \quad (90)$$

Для разности напряжений на поверхности $r = a$, воспользовавшись формулой (88), получим:

$$p_t - p_r = f \left\{ 1 - \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \ln \frac{c}{a} \right\}. \quad (90')$$

Очевидно, что если второй член в фигурных скобках (90') больше чем 2, то материал *до* приложения P_a будет подвержен разности напряжений, *величина* которой больше f . Следовательно, мы можем гарантировать прочность конструкции только при

$$\frac{c^2}{c^2 - a^2} \ln \frac{c}{a} \nlessdot 1$$

или

$$\lambda \nlessdot 1 - e^{-2\lambda}, \quad (91)$$

где через λ обозначено отношение $\frac{P_a}{f}$.

Если материал используется с полной эффективностью, то это условие требует, чтобы $\frac{P_a}{f}$ было близко к 0,8.

Подставив это значение в (88), мы получим размеры *самой толстой трубы, в которой материал используется с полной эффективностью*

$$\frac{c}{a} = e^{0,8} = 2,2 \text{ (приближенно)}. \quad (92)$$

Бесконечно толстая труба как труба с максимальной прочностью

458. Теперь из чисто теоретического интереса посмотрим, можно ли получить для $\frac{P_a}{f}$ бóльшее значение, отказавшись от требования максимальной эффективности использования материала. Мы найдем, что тогда для $\frac{P_a}{f}$ можно получить значение, близкое к предельной величине 1, но при этом толщина трубы должна возрастать неограниченно.

Обозначим через q разность напряжений в материале *во время действия давления* P_a , тогда формула (87) примет такой вид:

$$P_a = \int_a^c \frac{q}{r} dr. \quad (I)$$

Разность напряжений в материале, *до того как подействует давление взрыва* P_a , в этом случае будет:

$$p_t - p_r = q - \frac{2a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{P_a}{r^2}. \quad (II)$$

Это соотношение заменяет (90).

Если максимальная разность напряжений, как и раньше, *все время меньше* f , то мы имеем условия:

$$q \gg f \quad (III)$$

и

$$\frac{2a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{P_a}{r^2} - q \gg f. \quad (IV)$$

Складывая эти неравенства, мы на внутренней поверхности ($r=a$) получим условие:

$$\frac{c^2}{c^2 - a^2} P_a \gg f. \quad (V)$$

Отсюда видно, что для отношения $\frac{P_a}{f}$ мы получим предельное значение 1 при c , стремящемся к бесконечности.

Нужно только показать, что при бесконечно большом c существует распределение разности напряжений q , удовлетворяющее условиям (III) и (IV) и дающее значение f для давления P_a , вычисляемого из формулы (I).

При $P_a = f$ и бесконечно большом c условия (III) и (IV) требуют, чтобы

$$f \ll q \ll f \left(\frac{2a^2}{r^2} - 1 \right). \quad (VI)$$

Если $r = a$, то коэффициент при f в оценке, стоящей справа, равен единице. Таким образом, из неравенства (VI) видно, что q должно равняться f при $r = a$.

Фактически допустим ряд интересующих нас решений. Для наших целей достаточно рассмотреть одно решение:

$$q = f \frac{a}{r}. \quad (VII)$$

Оно удовлетворяет условию (VI) во всех точках трубы¹⁾ и согласно (I) дает для P_a величину, стремящуюся к f при $c \rightarrow \infty$. Действительно:

$$P_a = f \int_a^c \frac{a}{r^2} dr = f \left(1 - \frac{a}{c} \right) \rightarrow f \quad \text{при } c \rightarrow \infty.$$

Проволочный бандаж

459. Условия производства не позволяют конструировать трубы, состоящие из большого числа тонких труб, но мы получим трубу с теми же свойствами, что и составная, если намотаем с подходящим начальным натяжением большое число витков проволоки на одну трубу. Этим способом обычно пользуются при конструировании стволов артиллерийских орудий. Преимущество этого способа перед прежним заключается еще и в том, что намного легче контролировать натяжение проволоки, чем малые «посадочные натяги» в диаметрах длинных труб.

¹⁾ Так как $f \left(\frac{a}{r} - 2 \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) = f \left(1 + 2 \frac{a}{r} \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \ll 0$.

Намотка не вызывает продольного напряжения, и поэтому теория, изложенная в предыдущих параграфах, пригодна для решения и этой задачи. Изменения напряжений в поперечном сечении отдельной проволоки будем пренебрегать.

В бандаже можно вызвать любое нужное распределение напряжений, оно должно удовлетворять только условию равновесия:

$$p_t - p_r = r \frac{d}{dr} p_r. \quad (86) \text{ bis}$$

Из выводов §§ 456—458 следует, что теоретический предел $P_a = f$ достигим только при бесконечной толщине бандаж, а при использовании материала с полной эффективностью (за исключением внутренней трубы, которая может быть взята очень тонкой) этот предел приближенно равен $P_a = 0,8 f$.

Постоянная разность напряжений в бандаже

460. На рис. 111 схематично изображен поперечный разрез составного ствола орудия. Он состоит из внутренней трубы с радиусами a и b (толщина определяется условиями производства, но желательно взять ее как можно меньше), слоя бандаж, заключенного между радиусами b и c , и тонкой внешней трубы или кожу-ха, который заметно не влияет на прочность, а употребляется только как защита от проникновения в бандаж влаги. Из формулы (87) § 456 следует, что материал будет использован с максимальной эффективностью, если разность напряжений во время действия давления взрыва P_a на поверхности $r = a$ на каждом из радиусов будет иметь наибольшее из возможных значений, т. е. она должна равняться f на внутренней поверхности ($r = a$) внутренней трубы

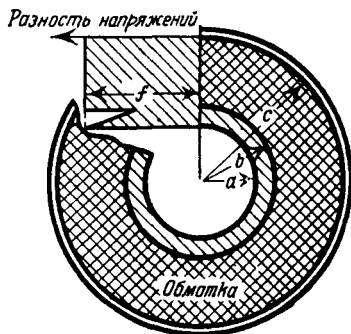


Рис. 111.

и на всех радиусах бандажа ($b < r < c$), что и показано в верхней части рисунка 111.

Радиальное давление, возникающее на поверхности $r = b$, т. е. между внутренней трубой и бандажом, можно найти из первого уравнения (III) § 451.

Оно равно:

$$P_b = P_a - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) f. \quad (I)$$

Теперь в бандаже $p_t - p_r = f$ и условие (86) запишется так:

$$r \frac{d}{dr} p_r = f,$$

откуда

$$p_r = f \ln \frac{r}{c}. \quad (II)$$

Мы видим, что p_r обращается в нуль на внешней поверхности ($r = c$).

Напряжение, соответствующее «кольцевому напряжению», во время взрыва можно найти опять с помощью (86):

$$p_t = \frac{d}{dr} (r p_r) = f \left(\ln \frac{r}{c} + 1 \right). \quad (III)$$

Определим необходимую толщину бандажа. Из формул (I) и (II) в силу того, что p_r равняется $-P_b$ на поверхности $r = b$, мы имеем:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) f - P_a = f \ln \frac{b}{c},$$

или

$$\ln \frac{c}{b} = \frac{P_a}{f} - \frac{b^2 - a^2}{2b^2}. \quad (93)$$

Отсюда видно, что c растет вместе с b .

Если c определить из этого соотношения, то по формулам (II) и (III) найдутся значения напряжений в бандаже во время действия давления взрыва P_a .

461. Теперь определим то натяжение, с которым нужно наматывать проволоку. Сначала определим напряжения, возникающие после того, как *действие давления взрыва P_a прекратилось*.

При действии давления P_a ствол ведет себя, как одна сплошная труба с радиусами a и c , и напряжения, вызванные P_a , можно найти из формул (73), заменив в них b на c .

Они равны:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right), \\ p_t &= \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Таким образом начальные напряжения, вызванные намоткой, должны быть такими:

$$p_r = f \ln \frac{r}{c} - \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right), \quad (94)$$

$$p_t = f \left(\ln \frac{r}{c} + 1 \right) - \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right). \quad (95)$$

462. Мы найдем натяжение, с которым должна наматываться проволока на какой-нибудь радиус r , если из только что написанного выражения для p_t вычтем ту часть напряжения, которая возникает в результате давления слоев, расположенных за радиусом r . Таким образом мы должны изучить эффект прекращения действия напряжения p_r , определяемого формулой (94), на внешней поверхности трубы с радиусами a и r . Удаление напряжения p_r эквивалентно наложению *давления*, равного p_r .

Воспользуемся второй из формул (73). Она дает «кольцевое напряжение» в трубе с радиусами a и b , когда поверхность $r = a$ подвергается давлению P_a . Заменив в ней

$$\begin{aligned} a &\text{ на } r, \\ P_a &\text{ на } p_r, \\ b &\text{ на } a, \end{aligned}$$

мы найдем, что давление p_r , действуя на радиусе r , вызывает на этом радиусе «кольцевое напряжение»:

$$p_t = \frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2} p_r. \quad (V)$$

Комбинируя (V) с (95) и давая p_r значение (94), мы найдем, что натяжение в проволоке в *тот момент, когда она наматывается* на радиус r , определяется формулой:

$$T = f \left\{ 1 + \ln \frac{r}{c} \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} \right) \right\} - \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \left\{ 1 + \frac{c^2}{r^2} - \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2} \right\} = f \left(1 + \frac{2a^2}{r^2 - a^2} \ln \frac{c}{r} \right) - \frac{2a^2 P_a}{r^2 - a^2}. \quad (96)$$

Значение c в этой формуле определяется соотношением (93).

Заданные натяжения банджа

463. С помощью аналогичных методов можно определить, каким должно быть натяжение проволоки для того, чтобы в бандже возникло любое данное напряжение. Осталось только рассмотреть обратную задачу, а именно: проволока наматывается с заданным натяжением, требуется определить, какое начальное распределение напряжений возникнет в этом случае. Добавочные напряжения, обусловленные действием давления взрыва P_a , как и раньше, определяются формулами (IV) § 461.

Через T обозначим заданное натяжение проволоки, с которым она наматывается на радиус r , т. е. величину p_t в момент намотки. Следовательно, сначала на этом радиусе:

$$p_r = 0, \quad p_t = T. \quad (VI)$$

Эти напряжения потом изменяются от давления витков, наложенных в последующем. Через T' обозначим то натяжение проволоки, с которым она наматывается на радиус r' . Слой банджа толщины $\delta r'$ между r' и $r' + \delta r'$ вызовет радиальное давление на радиусе r' величины:

$$P_{r'} = \frac{T' \delta r'}{r}. \quad (VII)$$

Эффект этого давления может быть учтен с помощью формулы (73), когда в нее подставлено:

r' вместо a (радиус поверхности, подверженной действию давления),

P_r вместо P_a [P_r определяется формулой (VII)],
 a вместо b (радиус поверхности, свободной от действия
давления).

Напряжения, возникшие на радиусе r от рассматриваемого
слоя бандажа, будут:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{r' T' \delta r'}{a^2 - r'^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \\ p_t &= \frac{r' T' \delta r'}{a^2 - r'^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII)}$$

Если мы проинтегрируем эти выражения в пределах от r
до c (внешний радиус бандажа), то получим напряжения на
радиусе r , возникшие от действия всех витков, расположен-
ных за радиусом r . Вычитая полученные напряжения из напря-
жений (VI), вызванных непосредственно во время намотки, мы
получим следующие значения начальных напряжений в бан-
даже на радиусе r :

$$\left. \begin{aligned} p_r &= - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \int_r^c \frac{T' r'}{r'^2 - a^2} dr', \\ p_t &= T - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \int_r^c \frac{T' r'}{r'^2 - a^2} dr'. \end{aligned} \right\} \quad \text{(97)}$$

Эти выражения будут годны для любого радиуса r , за-
ключенного между $r = a$ и $r = c$ (т. е. по ним можно будет
искать напряжения как во внутренней трубе, так и в бандаже),
если мы условимся считать T нулем для r , заключенных
между $r = a$ и $r = b$. Как и требуется, p_r обращается в нуль
[см. (97)] при $r = a$ и $r = c$. Условие равновесия удовле-
творяется, так как

$$\frac{d}{dr} (r p_r) = - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \int_r^c \frac{T' r'}{r'^2 - a^2} dr' + T = p_t.$$

Итак, напряжения в бандаже можно найти, если натяжение T
будет известной функцией r' ,

Постоянное натяжение в бандаже

464. Допустим для примера, что T' постоянно и равно T . Возьмем интеграл:

$$\int_r^c \frac{T' r'}{r'^2 - a^2} dr' = \frac{1}{2} T \ln \frac{c^2 - a^2}{r^2 - a^2}.$$

Из формул (97) найдем начальные напряжения в витках:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= -\frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \ln \frac{c^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \\ p_t &= T \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \ln \frac{c^2 - a^2}{r^2 - a^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

На внешней поверхности ($r = b$) внутренней трубы радиальное давление будет

$$P_b = (-p_r)_b = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2}.$$

Зная P_b , мы, из соответственным образом измененных формул (73), сможем найти начальные напряжения и во внутренней трубе.

465. Первую из формул (97) можно использовать для решения прямой задачи §§ 460—462 (по заданным напряжениям в бандаже найти натяжение проволоки).

Продифференцируем, предварительно преобразовав, первую из формул (97):

$$\frac{Tr}{r^2 - a^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{r^2 - a^2} p_r \right). \quad (IX)$$

Отсюда, при известном p_r , можно найти T .

Если разность напряжений должна быть постоянной и равной f , то p_r определяется формулой (94), и мы из (IX) найдем:

$$\frac{Tr}{r^2 - a^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{r^2 - a^2} f \ln \frac{r}{c} - \frac{a^2 P_a}{c^2 - a^2} \frac{r^2 - c^2}{r^2 - a^2} \right],$$

или

$$T = f \left(\frac{2a^2}{r^2 - a^2} \ln \frac{c}{r} + 1 \right) - \frac{2a^2 P_a}{r^2 - a^2}, \quad (96) \text{ bis}$$

что и было получено в § 462.

Примеры

14. (Camb. M. S. T. 1930.) Стальная труба с внешним радиусом b и внутренним радиусом a должна выдерживать большое внутреннее давление P , для этого она усилена проволочным бандажом. Во время действия давления максимальное растягивающее напряжение в трубе не должно превосходить T , а растягивающее напряжение в каждом слое проволоки должно равняться T .

Показать, что проволока должна быть навита до радиуса r_0 , равного

$$\frac{(P + T)(a^2 + b^2)}{2Tb},$$

и что натяжение в проволоке во время намотки на радиус r должно быть:

$$t_r = \frac{P + T}{r^2 - a^2} \left[\frac{a^2 + b^2}{2br} (r^2 + a^2) - 2a^2 \right].$$

15. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Труба с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1 обмотана тонкой проволокой. Натяжение в проволоке во время намотки было постоянным и равнялось T . Толщина бандажа d .

Показать, что в трубе, обмотанной таким образом, кольцевые напряжения на внутренней поверхности ($r = r_0$) будут:

$$p_t = -T \cdot \pi \left(1 + \frac{d^2 + 2dr_1}{r_1^2 - r_0^2} \right).$$

ГЛАВА XIII

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ (СТОЕК)¹⁾

Критические силы и формы продольного изгиба для стержней с постоянной жесткостью при изгибе

466. В главе VI, §§ 197—201, мы рассмотрели формы продольного изгиба для первоначально прямого стержня с постоянной жесткостью при изгибе, возникающие в результате действия на него осевой сжимающей силы P .

Как было показано, уравнение, определяющее форму изогнутой оси стержня, записывается так:

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0, \quad (1)$$

где через $B = EI$ обозначена жесткость при изгибе. Если l — длина стержня, а n — любое целое число, то выражение

$$y = A_n \sin n \frac{\pi}{l} x, \quad (2)$$

в котором величины A_n не определены, является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям шарнирного закрепления на концах ($x = 0$ и $x = l$) при силе осевого сжатия величины

$$P_n = n^2 \pi^2 \frac{B}{l^2}. \quad (3)$$

Таким образом для каждого стержня с постоянным поперечным сечением существует ряд «критических» значений P :

$$P_1, P_2, P_3, \dots = \pi^2 \frac{B}{l^2} \times (1, 4, 9, \dots) \quad (4)$$

таких, что, если сила сжатия принимает одно из значений этого ряда, то стержень может сохранять равновесие в некоторой конфигурации, для которой прогиб определен по

¹⁾ См. примечание на стр. 660.

форме, но не определен по величине. Если же сила сжатия имеет значение, не принадлежащее этому ряду, то единственной возможной конфигурацией равновесия является прямолинейная форма ($y=0$). P_n называется n -й критической силой для стержня, а уравнение (2) при $P=P_n$ определяет так называемую n -ю форму продольного изгиба. Ряд (4), определяющий значения критических сил, совпадает с (21) § 200.

В этой главе мы распространим аналитические методы¹⁾ решения задачи на стержни с переменной жесткостью при изгибе (B), а также рассмотрим новые методы оценки критических сил. Начнем с того, что покажем практическое значение уже полученных результатов.

Влияние эксцентриситета точки приложения силы и начальной кривизны

467. В действительности ось стержня никогда не является строго прямой, а линия действия результирующей силы сжатия никогда не проходит через центры тяжести торцевых сечений. В силу этого стержень подвергается изгибающим усилиям, и сразу же при первом приложении нагрузки происходят боковые прогибы. Пусть y , как и раньше, обозначает прогиб оси стержня от линии действия сжимающей силы в сечении с координатой x . Допустим, что форма оси до приложения нагрузки определяется начальным прогибом y_0 (ср. § 181). Изменение кривизны вследствие изгиба равно

$$\frac{d^2}{dx^2}(y - y_0),$$

а изгибающий момент, как и раньше, равен Py . Уравнение (1) заменяется другим:

$$B \frac{d^2}{dx^2}(y - y_0) + Py = 0. \quad (5)$$

Если B не зависит от x , то уравнение (5) принимает вид:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2 \right] y = \frac{d^2 y_0}{dx^2}, \quad (6)$$

¹⁾ Графический метод был описан в главе VI, §§ 203–204.

где $\alpha^2 = \frac{P}{B}$. Пусть оба конца стержня шарнирно закреплены, тогда имеем следующие условия на концах:

$$y = y_0, \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Сравнивая уравнение (6) с аналогичным по виду уравнением, вытекающим из уравнения (1) § 205, мы видим, что влияние начального прогиба y_0 на окончательное смещение эквивалентно поперечной нагрузке, вызывающей дополнительный изгибающий момент M_t , величины

$$M_t = -B \frac{d^2 y_0}{dx^2}.$$

Другими словами, y_0 будет давать одно и то же окончательное смещение независимо от того, вызван ли он начальными погрешностями или действием поперечной нагрузки¹⁾. Следовательно, при постоянной B влияние известных начальных прогибов можно исследовать методами §§ 205—208.

Общее решение уравнения (6) можно получить методом «варьирования произвольных постоянных», оно будет:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\alpha} \left[\sin \alpha x \int_{x_1} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cos \alpha x dx - \cos \alpha x \int_{x_2} \frac{d^2 y_0}{dx^2} \sin \alpha x dx \right] = \\ &= y_0 + \alpha \left[\cos \alpha x \int_{x_1} y_0 \sin \alpha x dx - \sin \alpha x \int_{x_2} y_0 \cos \alpha x dx \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где через x_1, x_2 обозначены произвольные нижние пределы интегрирования²⁾. В рассматриваемой сейчас задаче $y = y_0$ на каждом из концов стержня. Это требует, чтобы x_1 равнялось нулю, а x_2 удовлетворяло бы соотношению:

$$\cos \alpha l \int_0^l y_0 \sin \alpha x dx = \sin \alpha l \int_{x_2}^l y_0 \cos \alpha x dx. \quad (8)$$

¹⁾ Ср. H. R. Fisher, An Extension of Southwell's Method... etc, Proc. R. S. (A), 144 (1934), 609-630. Относительно влияния на напряжения ср. § 479.

²⁾ Это сразу же можно проверить, продифференцировав (7) дважды.

Выбирая x_1 , x_2 иначе, можно удовлетворить другим условиям закрепления на концах.

Пример

1. Изучить случай, в котором ¹⁾

$$y_0 = \text{const} = \delta_0.$$

Показать, что решение уравнения (5) в этом случае будет:

$$y = \delta_0 \sec \frac{1}{2} \alpha l \cos \alpha \left(x - \frac{1}{2} l \right) \left(\alpha^2 = \frac{P}{B} \right),$$

а максимальный прогиб (в среднем сечении) имеет величину:

$$\delta = \delta_0 \sec \frac{1}{2} \alpha l.$$

468. Если y_0 известен, то интегралы, входящие в выражение (7), могут быть легко вычислены, но, обычно, y_0 неизвестен, и поэтому наиболее интересно получить решение уравнения (5) для y_0 и y в форме рядов Фурье. Умножим (5) на $\sin \frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем «по частям» в пределах от 0 до l , помня, что $y = y_0$ при $x = 0$ и $x = l$.

Таким путем получим:

$$P \int_0^l y \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} B \int_0^l (y - y_0) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

или, если воспользуемся равенством (3):

$$\int_0^l \{P_n y_0 - (P_n - P)y\} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad (9)$$

Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \omega_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \bar{\omega}_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \bar{\omega}_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots, \\ y &= \omega_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \omega_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + \omega_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ Этот случай (эксцентрическое приложение нагрузки к первоначально прямому стержню) положен в основу формулы практического конструирования Британского министерства авиации. Ср. пример 4 (§ 478).

Подставив в (9), получим:

$$\frac{\bar{w}_n}{w_n} = 1 - \frac{P}{P_n}, \quad (11)$$

потому что ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0, \text{ при } m \neq n, \\ &= \frac{1}{2} l, \text{ при } m = n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

По природе задачи y и y_0 являются непрерывными функциями x ; следовательно, их можно представить рядами типа (10). Далее из (9) мы найдем условия, связывающие коэффициенты рядов для y и y_0 , и таким образом получим для y общее решение, зависящее от y_0 , P и B .

469. Сосредоточим внимание на среднем сечении стержня, где $x = \frac{1}{2}l$. Пусть δ_0 обозначает начальный, а δ окончательный прогибы в этом сечении.

Из (10) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \bar{w}_1 - \bar{w}_3 + \bar{w}_5 - \dots, \\ \delta &= w_1 - w_3 + w_5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Члены с четными индексами не войдут ни в ряд для δ_0 , ни в ряд для δ .

Если y_0 вызван погрешностями производства, то мы можем считать, что \bar{w}_3 , \bar{w}_5 , ... имеют тот же порядок, что и \bar{w}_1 .

Согласно (11),

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{\bar{w}_1}{\left(1 - \frac{P}{P_1}\right)}, \\ w_3 &= \frac{\bar{w}_3}{\left(1 - \frac{P}{P_3}\right)}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Ср. § 482.

Отсюда мы видим, что при стремлении P к P_1 отношение $\frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}$ становится очень большим, а отношения $\frac{\bar{\omega}_3}{\omega_3}, \frac{\bar{\omega}_5}{\omega_5}, \dots$, так как $\frac{P_1}{P_3}, \frac{P_1}{P_5}, \dots$ малы, почти равны единице. Следовательно, каков бы ни был вид функции y_0 , прогиб в *середине* (δ) под силой P , близкой к P_1 , с большой точностью определяется соотношением:

$$\delta \cong \bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{1 - \frac{P}{P_1}}, \quad (15)$$

а это — уравнение равнобочной гиперболы.

Положив

$$\Delta = \delta - \delta_0, \quad (16)$$

мы из (13) и (14) имеем:

$$\Delta = \frac{\bar{\omega}_1}{\frac{P_1}{P} - 1} - \frac{\bar{\omega}_3}{\frac{P_3}{P} - 1} + \dots$$

В этом выражении мы можем пренебречь членами, начиная с $\bar{\omega}_3$.

Тогда получим:

$$(P_1 - P) \Delta = \bar{\omega}_1 P. \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что кривая P как функция Δ является равнобочной гиперболой с асимптотами:

$$\left. \begin{aligned} P - P_1 = 0 \quad (\Delta \rightarrow \infty), \\ \Delta + \bar{\omega}_1 = 0 \quad (P \rightarrow -\infty). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Экспериментальные наблюдения

470. Величина, обозначенная через Δ , характеризует прогиб в середине. Ее, т. е. разность значений δ и δ_0 , можно экспериментально измерить. Величину P , конечно, тоже можно измерить. Согласно уравнению (17), измеренные значения P и Δ , если их нанести на график, при P не слишком малом

лягут на равнобочную гиперболу. Проведя асимптоты этой гиперболы, найдем критическую силу P_1 . При этом нам, очевидно, *не нужно будет в опыте давать силе P значение P_1* .

Разделив обе части (17) на P , мы имеем:

$$P_1 v - \Delta = \bar{w}_1, \quad (19)$$

где через v обозначено отношение $\frac{\Delta}{P}$. Получили линейное соотношение между v и Δ . Это значит, что измеренные величины Δ и P , если их нанести на график, выражающий зависимость v (т. е. $\frac{\Delta}{P}$) от Δ , лягут при P не слишком малом на прямую линию. Тангенс угла наклона этой прямой, а именно $\frac{dv}{d\Delta}$, равен $\frac{1}{P_1}$. Прямая пересекает ось ($v=0$) в точке, соответствующей $\Delta = -\bar{w}_1$. Итак, проведя прямую линию по экспериментальным точкам, мы сразу получим оценку как для P_1 — первой критической силы (§ 466), так и для \bar{w}_1 до сих пор неизвестной амплитуды первой гармоники ряда Фурье для начального прогиба y_0 ¹⁾.

Примеры

2. Следующие цифры взяты из эксперимента²⁾ на сжатие стержня из дюралюмина (углового разнобокого профиля):

P	0	62	64	66	68	70	72	74	76	78
Δ	0	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6
P	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98
Δ	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,5	1,8	2,5	6,5

Показать, что критическая сила приблизительно равна 104.

¹⁾ Доказательства §§ 468—470 взяты из статьи «On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability» в *Proc. Roy. Soc. (A)*, 135 (1932), 601—616.

Ср. также H. R. Fisher, цит. соч. (§ 467).

²⁾ F. J. Bridget, C. C. Jerome и A. B. Vosseller, Some New Experiments on Buckling of Thin-Wall Construction, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 56 (1934), 569—578. Данные, помещенные здесь, относятся к «образцу № 12» и взяты из таблицы 3 этой статьи.

3. (Oxford F. E. E. S. 1935.) Следующие цифры взяты из эксперимента над шарнирно опертой стальной трубой.

Длина трубы 176 см.

Нагрузка в кг	22,7	227	454	681	908	1000	1092	1175	1180	1220	1248	1265
Прогиб в середине (от начального положения)	—	0,635	7,0	12,2	17,15	20,80	26,2	35,6	37,5	57,2	97,8	190,5

Вычислить критическую силу для трубы и найти жесткость при изгибе (EI).

[1,285 кг, $0,967 \cdot 10^6$ кг/см².]

Почему не обязательно указывать систему единиц, в которой измерены прогибы?

Точность приближенного исследования.

Теория «эластики»

471. Подводя итог нашим выводам, мы можем сказать, что практически, в силу неизбежных погрешностей производства, стержень начинает прогибаться сразу после того, как на него подействовала какая-нибудь сила. Представив начальный прогиб (y_0) в виде ряда Фурье, мы для отношений, характеризующих изменение различных гармоник ряда в зависимости от изменения силы сжатия, получили равенства (14). Первое выражение (14) стремится к бесконечно большой величине, когда сила сжатия стремится к первой критической силе P_1 . Поэтому мы вправе предположить, что первая гармоника является доминирующей в наблюдаемом прогибе. Экспериментально это подтверждается, но опыты не подтверждают другого вывода, подсказываемого § 469, о том, что при $P \rightarrow P_1$ прогиб в среднем сечении может быть сколь угодно большим. На рисунке 112 схематически показана последовательность деформаций для первоначально искривленного в форме одной полуволны синусоиды стержня, подвергающегося действию постоянно возрастающей осевой силы сжатия. Мы видим, что прогиб в середине достигает максимального значения тогда, когда концы стержня удалены друг от друга на некоторое малое расстояние. Если опыт продолжать также после того, как концы стержня пройдут

один мимо другого, то с ростом нагрузки прогибы начнут уменьшаться, асимптотически приближаясь к нулю (предполагается, что материал не переходит за предел пропорциональности).

472. Причина противоречий между теоретическим выводом и экспериментом, как можно ожидать, заключается в том, что в теории для прогибов любой величины используется

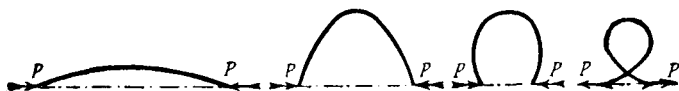


Рис. 112.

верное только для малых y выражение кривизны оси стержня, а именно $\frac{d^2y}{dx^2}$. Вернемся к § 466, в котором рассматривались только первоначально прямые стержни, и заметим, что когда прогиб y велик, как, например, на рис. 113, то уравнение (1) нужно заменить следующим:

$$B \frac{d\theta}{ds} + Py = 0, \quad (I)$$

где через s обозначено расстояние рассматриваемого сечения от некоторого фиксированного сечения, измеренное по оси стержня, а через θ — угол наклона оси стержня к линии действия силы.

Таким образом:

$$\sin \theta = \frac{dy}{ds}. \quad (II)$$

Продифференцировав уравнение (I) по s и воспользовавшись (II), мы получим уравнение, определяющее деформированную ось стержня (эластику)

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0. \quad (20)$$

473. Уравнение (20) по форме совпадает с уравнением свободных колебаний математического маятника¹⁾.

Умножим его на $2 \frac{d\theta}{ds}$, проинтегрируем и получим:

$$B \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - 2P \cos \theta = \text{const} = -2P \cos \alpha,$$

где через α (см. рис. 113) обозначен угол, под которым ось стержня пересекает линию действия силы. Из последнего

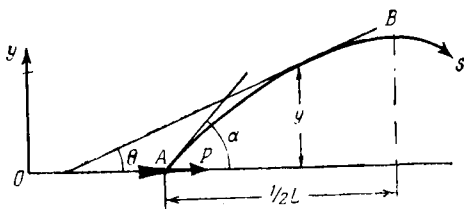


Рис. 113.

равенства можно видеть, что так же, как в уравнении (I) $\frac{d\theta}{ds}$ обращается в нуль при $y = 0$.

Разделив на B , имеем:

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{2P}{B} (\cos \theta - \cos \alpha) = \frac{4P}{B} \left(\sin^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right). \quad (21)$$

¹⁾ На самом деле, приравняв $s \sqrt{\frac{P}{B}} = t \sqrt{\frac{g}{l}}$, мы из (20) получим $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0$ — уравнение колебаний маятника. Таким образом изменение значений θ в зависимости от расстояния s по оси стержня аналогично изменению θ в зависимости от времени в течение одного колебания маятника. Половина периода колебания, умноженная на $\sqrt{\frac{g}{l}}$, соответствует длине стержня, умноженной на $\sqrt{\frac{P}{B}}$. Обе величины равны π , когда θ все время (или всюду) мало.

Это соответствие представляет собой пример «кинетической аналогии Кирхгофа» (см. Ля в, цит. соч., §§ 260 и 262). Преобразование, приводящее к уравнению (24), можно сравнить с исследованием математического маятника. (См., например, Лэмб, Динамика, § 37.)

Положим:

$$\left. \begin{aligned} s &= u \sqrt{\frac{B}{P}}, & k &= \sin \frac{1}{2} \alpha, & k \sin \varphi &= \sin \frac{1}{2} \theta, \\ \text{так что} & & k \cos \varphi &= \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \theta \frac{d\theta}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Из (21) получим:

$$\pm \frac{d\theta}{du} = 2k \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = 2k \cos \varphi,$$

или, умножив обе части этого уравнения на $\frac{d\varphi}{d\theta}$:

$$\pm \frac{d\varphi}{du} = \cos \frac{1}{2} \theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (23)$$

В точке A (рис. 113) $y=0$, $\theta=\alpha$, а поэтому $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; в точке B прогиб достигает максимального значения и, следовательно, $\theta=\varphi=0$. Отсюда, если s измеряется от точки A в направлении, для которого $\sin \theta = +\frac{dy}{ds}$, то $\frac{d\theta}{du}$ и $\frac{d\varphi}{du}$ отрицательны для малых значений u .

Таким образом в равенстве (23) нужно взять минус.

Мы имеем:

$$s \sqrt{\frac{P}{B}} = u = - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Мы получим длину оси стержня от точки A до точки B (половину длины всего стержня), если верхний предел интеграла возьмем равным нулю. Обозначая длину стержня через l , имеем:

$$\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{P}{B}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K(k), \quad (24)$$

где $K(k)$ является «полным эллиптическим интегралом первого рода». Вычитая (I) из (24), получаем:

$$\left(\frac{1}{2} l - s\right) \sqrt{\frac{P}{B}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = K(k, \varphi), \quad (25)$$

где $K(k, \varphi)$ является «эллиптическим интегралом первого рода» с «модулем» k и «амплитудой» φ .

$$474. \quad \text{Так как} \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{P}{B}} \frac{dy}{du},$$

то, согласно (22) и (23), имеем:

$$y \sqrt{\frac{P}{B}} = \int 2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta du = -2k \int \sin \varphi d\varphi,$$

(из двух возможных знаков, как и раньше, берется минус).

Нижний предел интегрирования нужно взять равным $\frac{1}{2}\pi$, т. е. значению φ в сечениях (например A на рис. 113), для которых y равен нулю.

Итак,

$$y \sqrt{\frac{P}{B}} = 2k \cos \varphi. \quad (26)$$

Прогиб в середине, при $\varphi = 0$, будет

$$\delta = 2k \sqrt{\frac{B}{P}}. \quad (27)$$

Наконец, расстояние между сечениями A и B на рис. 113, измеренное по линии действия силы, будет:

$$\frac{1}{2} L = \int_0^{\frac{1}{2}l} \cos \theta ds.$$

Следовательно, расстояние L между двумя последовательными точками перегиба оси стержня можно определить из такого соотношения:

$$L \sqrt{\frac{P}{B}} = 2 \int \cos \theta du = -2 \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \frac{\cos \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta} d\varphi.$$

Последнее равенство имеет место согласно (23), где, как и раньше, из двух возможных знаков берется минус.

Подставив θ как функцию φ , мы получим:

$$\begin{aligned}
 L \sqrt{\frac{P}{B}} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ 2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right\} d\varphi = \\
 &= 4E(k) - 2K(k).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Значение K объяснено выше, а

$$E(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$E(k)$ называется «полным эллиптическим интегралом второго рода».

475. Теперь можно вычертить истинную зависимость прогиба в среднем сечении (δ) от осевой силы сжатия (P) для стержня, изогнутого так, как показано на рисунке 112. Из (24) мы имеем:

$$\frac{Pl^2}{B} = 4 \{K(k)\}^2,$$

а из (24) вместе с (27):

$$\frac{\delta}{l} = \frac{k}{K(k)}.$$

Опираясь на эти соотношения и используя таблицы эллиптического интеграла $K(k)$, легко проследить, как $\frac{Pl^2}{B}$ зависит от $\frac{\delta}{l}$. Таблица составлена следующим образом. Первый столбец дает угол наклона оси стержня на концах к линии действия силы; второй—зависимость k от α [см. (22)]; третий—

значения $K(k)$, взятые из справочника Dale, Mathematical Tables ¹⁾, а четвертый и пятый столбцы непосредственно вычислены.

ТАБЛИЦА 1

α в град.	$k = \sin \frac{1}{2} \alpha$	$K(k)$	$\delta/l = k/K(k)$	$\frac{Pl^2/B}{= 4 \{K(k)\}^2}$
0	0	1,571 ($= \frac{1}{2} \pi$)	0	9,87 ($= \pi^2$)
20	0,174	1,583	0,101	10,02
40	0,342	1,620	0,212	10,49
60	0,5	1,686	0,297	11,36
80	0,643	1,787	0,360	12,76
100	0,766	1,936	0,396	15,00
120	0,866	2,156 _s	0,402	18,56
140	0,940	2,504 _s	0,375	25,12
160	0,985	3,153	0,312 _b	39,76
180	1	∞	0	∞

На рис. 114 для сравнения с приближенным исследованием § 446 вычерчена кривая зависимости Pl^2/B от δ/l . Согласно приближенному исследованию, δ могло иметь любую величину при $P = P_1$ (A_n в решении (2) не было определено). Согласно точному исследованию, δ при изменении P от P_1 до бесконечности сначала возрастает, а затем убывает ²⁾.

Устойчивость эластики

476. Большой практический интерес имеет вопрос о том, как связана осевая сила P с соответствующим ей перемещением, т. е. с относительным сближением концов стержня.

Если пренебречь изменением длины стержня вследствие непосредственного действия осевой силы сжатия, то концы сближаются на $(l - L)$. Из (24) и (28) имеем:

$$\frac{L}{l} = 2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1,$$

¹⁾ В упомянутых таблицах эллиптический интеграл $K(k)$ обозначен через $F(k)$.

²⁾ См. § 471. Укорочением стержня вследствие непосредственного действия осевой силы сжатия пренебрегают.

а отсюда

$$\frac{l-L}{l} = 2 \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right].$$

С помощью таблиц эллиптических интегралов $E(k)$ и $K(k)$ легко построить таблицу 2, в которой первые два столбца и последний взяты из таблицы 1.

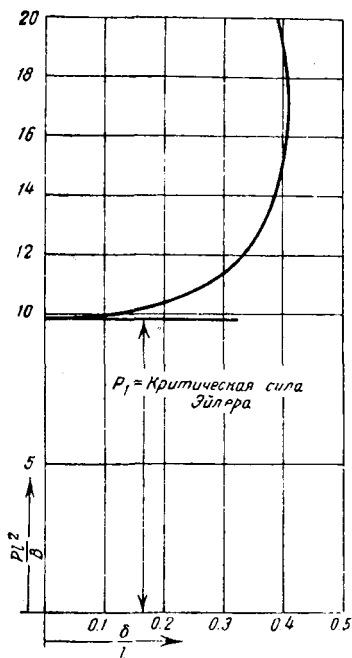


Рис. 114.

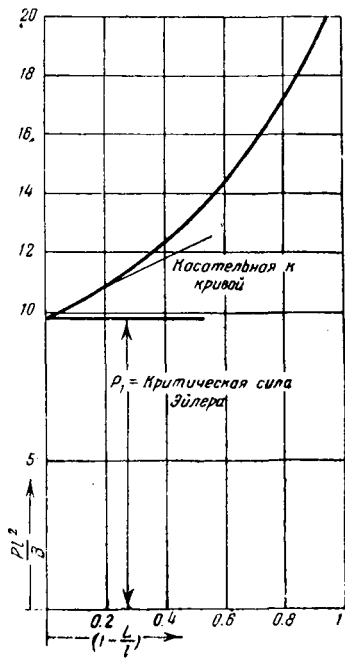


Рис. 115.

На рис. 115 по данным двух последних столбцов таблицы 2 вычерчена кривая зависимости осевой силы (на рисунке откладывается безразмерная величина $\frac{Pl^2}{B}$) от соответствующего ей перемещения. Кривая начинается из точки, соответствующей первой критической силе (§ 466), и, как

ТАБЛИЦА 2

α в град.	$K(k)$	$E(k)$	$\frac{E(k)}{K(k)}$	$\frac{l-L}{l} =$ $= 2 \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right]$	$\frac{Pl^3}{B} =$ $= 4[K(k)]^2$
0	1,571 $\left(= \frac{1}{2} \pi \right)$	1,571 $\left(= \frac{1}{2} \pi \right)$	1	0	9,87 $(= \pi^2)$
20	1,583	1,559	0,984	0,032	10,02
40	1,620	1,524	0,934	0,132	10,49
60	1,686	1,467 ₆	0,870	0,260	11,36
80	1,787	1,393	0,780	0,440	12,76
100	1,936	1,305 ₃	0,675	0,650	15,00
120	2,156 ₃	1,211	0,562	0,876	18,56
140	2,504 ₆	1,118	0,446 ₆	1,107	25,12
160	3,153	1,140	0,362	1,276	39,76
180	∞	1	0	2	∞

видно из рисунка 115, постепенно поднимается¹⁾. Если мы хотим учесть изменение длины стержня вследствие непосредственного действия осевой силы сжатия (в предшествующих вычислениях мы им пренебрегали), то мы должны увеличить перемещение на величину, которая (для малых значений смещения) пропорциональна силе. Наше заключение относительно того, что возрастание перемещения всюду сопровождается возрастанием нагрузки, останется в силе. Таким образом *стержень и нагрузка на его концах составляют механически устойчивую систему*.

С точки зрения общей теории наиболее поразительной чертой задачи о стержне является то, что зависимость между

¹⁾ Кривая стремится к бесконечному значению ординаты $\frac{Pl^3}{B}$, когда абсцисса $\frac{(l-L)}{l}$ стремится к значению 2. Это соответствует предельной конфигурации, исследованной в § 471.

Рассматривая приближенные значения интегралов $K(k)$ и $E(k)$ при малом k^2 , легко показать, что тангенс угла наклона кривой в точке пересечения с вертикальной осью имеет величину $\frac{1}{2} \pi^2$. Касательная к кривой в этой точке показана на рис. 115.

силой и соответствующим перемещением нелинейна. Это уже отмечалось¹⁾, как отличительная черта задач «устойчивости упругих систем». На рис. 115 впервые изображен действительный характер этой зависимости для частного случая. На первый взгляд может показаться парадоксальным, что нелинейная зависимость вытекает из теории, основанной на законе Гука, однако простой пример главы I, § 21, вероятно, поможет понять это. Там мы показали, что если мы соединим вместе и нагрузим специальным образом две нити, каждая из которых в отдельности подчиняется закону Гука по отношению к своей реакции на приложенную силу растяжения, то мы получим систему, которая уже не будет подчиняться закону Гука. Очевидно, что причины этого кроются скорее в кинематике деформации, чем в каком-либо физическом свойстве материала. Вообще заметим, что нелинейных зависимостей между силой и соответствующим перемещением можно ожидать в тех случаях, когда нагружаемое тело *тонкое* (например, тонкий стержень или пластинка). В этих случаях большие перемещения могут возникнуть при малых деформациях вследствие накопления последних²⁾.

Значение приближенного исследования

477. Во многих учебниках высказывается та точка зрения, что приближенная теория, данная в главе VI (и известная как теория Эйлера³⁾), достаточно хорошо объясняет явление продольного изгиба прямых стержней под действием

¹⁾ Гл. VI, § 198.

²⁾ G. H. Bryan [*Camb. Phil. Soc. Proc.*, 6 (1889), 199] изучал условия, при которых теорема Кирхгофа о единственности (гл. I, §§ 14—15) становится неверной, и получил, что большие перемещения должны являться следствием малых деформаций. Он показал, что это может произойти в тонких стержнях, или пластинках, или в тех случаях, когда допускаются смещения, очень мало отличающиеся от перемещения тела, как абсолютно твердого, а также при сжатии упругой сферы кольцом несколько меньшего диаметра.

³⁾ L. Euler, 1744. Эта теория является добавлением к его знаменитой работе по вариационному исчислению. Ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 17 и Todhunter and Pearson, цит. соч., ч. I, § 53—64.

осевой силы сжатия. Эту точку зрения подтверждает совпадение (для тонких стержней) значения «первой критической силы» Эйлера со значением нагрузки, при которой, как теперь было показано, начинается продольный изгиб. Проведенное выше исследование показывает, что упругий стержень будет устойчивым для всех значений нагрузки. Это наводит на мысль, что указанное совпадение может быть случайным и что, во всяком случае, необходимо дальнейшее исследование вопроса.

В практике мы конечно имеем дело с материалами, подчиняющимися закону Гука только до некоторого определенного конечного значения нагрузки. Следовательно, наша теория не может применяться к слишком большим нагрузкам, но с ее помощью мы можем объяснить тот факт, что продольный изгиб начинается при нагрузке, величина которой очень близка к критическому значению.

В § 467 мы заметили, что в действительности стержень никогда не бывает абсолютно прямым. В § 469 было показано, что, согласно приближенной теории, зависимость прогиба в середине от нагрузки может быть представлена равнобочной гиперболой. Ветвь гиперболы уходит в бесконечность, когда нагрузка приближается к первой критической силе. В § 471 мы подчеркнули, что этот вывод без оговорок не может быть принят. Там же мы построили кривую (рис. 114), заменяющую горизонтальную линию (асимптоту гиперболы), получающуюся по приближенной теории. Эта кривая начинается от ординаты асимптоты и вначале имеет пологую форму. Отсюда следует, что хотя приближенная теория в конце концов и дает выводы весьма далекие от истины, но ее можно принять как приближенное описание имеющихся в действительности явлений, когда прогиб в середине еще достаточно мал. На этом основании мы вправе ожидать, что кривая зависимости между прогибом и осевой силой сжатия для первоначально почти прямого стержня будет сначала близка к равнобочной гиперболе, а затем она будет вести себя как кривая рисунка 114 (см. кривую AB на рис. 116).

Теперь рассмотрим *напряжения*, возникающие в стержне. Каждое поперечное сечение стержня подвергается (приближенно) действию одного и того же усилия сжатия, которое

вызывает равномерное сжимающее напряжение, и, кроме того, имеется напряжение изгиба, изменяющееся от сжимающего до растягивающего напряжения. Интенсивность напряжений изгиба изменяется с изменением изгибающего момента

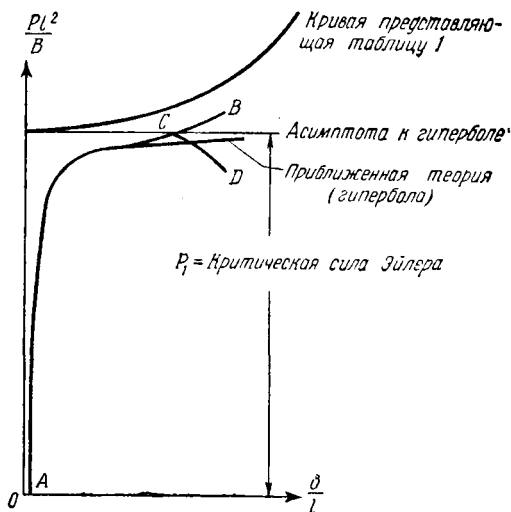


Рис. 116.

и является наибольшей в среднем сечении. В этом сечении изгибающий момент измеряется произведением $P\delta$. Следовательно, напряжение изгиба изменяется как $P\delta$, а составляющая напряжения, вызванная непосредственно силой сжатия, будет изменяться как P . Таким образом мы видим, что по мере того как мы при возрастающей нагрузке двигаемся по кривой AB , часть напряжения, вызванная изгибающим моментом, сильно увеличивается в сравнении с другой его частью.

Предположим, что стержень достаточно тонкий, так что значение первой критической силы таково, что часть вызванных ею напряжений, обусловленная непосредственно сжатием, не превосходит предела пропорциональности. Кривая AB (рис. 116) будет характеризовать происходящие при нагрузке такого стержня явления до тех пор, пока прогиб δ не станет

столь большим, что часть напряжений, обусловленная изгибающим моментом, перейдет за предел пропорциональности (точка C на рис. 116). Если стержень не слишком тонкий, то действующая в это время на конце стержня сила будет, очевидно, очень близка к критическому значению. За точкой C истинная кривая ACD начнет отходить от расчетной AB вниз, потому что материал будет выдерживать теперь меньшие, чем раньше, напряжения.

Равновесие перестает быть устойчивым в тот момент, когда касательная к кривой становится горизонтальной. Таким образом, мы видим, что «сила продольного изгиба» (сила, соответствующая наивысшей точке кривой ACD), видимо, почти совпадает с первой «критической» силой, полученной из приближенной теории, но это совсем не значит, что они тождественны.

В теории *упругости* мы имеем дело только с одной из них. Замеченное выше равенство двух сил легко установить при соблюдении двух условий, которые осуществляются в опытах с длинными нагруженными без эксцентриситета стержнями. Во-первых, прогиб должен иметь достаточно большую величину в тот самый момент, когда материал перестает подчиняться закону Гука. Во-вторых, для больших прогибов кривая AB должна лежать близко от линии, изображающей критическую силу.

478. Если через A обозначить площадь поперечного сечения стержня, то критическая сила определяется равенством

$$\pi^2 = \frac{P_1 l^3}{B} = \frac{P_1 l^2}{EI} = \frac{P_1}{EA} \left(\frac{l}{k} \right)^2.$$

Отсюда мы видим, что непосредственно сжимающее напряжение в стержне, в том случае, когда он остается прямым, вплоть до момента, при котором осевая сила сжатия становится равной критической, будет

$$\frac{P_1}{A} = \pi^2 E \left(\frac{k}{l} \right)^2. \quad (29)$$

Очевидно, что это напряжение может быть достаточно большим и даже может вызвать переход за предел пропорциональности, когда стержень короткий, т. е. l — мало. Наша теория для

стержней такого рода неприменима. Здесь мы встретились с вопросом, который выходит за пределы настоящей книги, так как в ней рассматриваются *упругие* деформации. Мы только заметим, что значение критической силы в случае коротких стержней можно вычислить ¹⁾, и оказывается, что оно много меньше критической силы Эйлера, т. е. силы P_1 , определенной формулой (29). Итак, согласно содержанию предыдущих параграфов, нет никаких оснований предполагать, что короткие стержни будут претерпевать продольный изгиб при тех значениях нагрузки, которые можно вычислить из формулы (29), несмотря на то, что погрешности, вызванные производством для таких стержней, относительно маловажны.

В заключение заметим, что методы теории упругости нужно применять к задачам *о продольном изгибе* стержня с некоторой осторожностью, потому что они дают хорошие результаты, если мы рассматриваем достаточно большие деформации только тогда, когда имеем дело с длинными и тонкими стержнями. Для стержней такого рода «первая критическая сила» имеет практическое значение, ибо ее величина близка к значению той нагрузки, при которой стержень переходит за предел пропорциональности. Мы рассмотрели задачу о стержне, которая является частным случаем ряда задач, связанных с устойчивостью упругих систем. Отличительной чертой этих задач является то, что, как показывает рис. 115, нагрузка и соответствующее ей перемещение *не* пропорциональны между собой.

Пример

4. Пусть мы имеем прямой эксцентрично нагруженный стержень (пример 1). Показать, что если сжимающее напряжение меньше P_u , то наибольшая допускаемая нагрузка на конце будет ²⁾

¹⁾ По теории, обычно называемой теорией Энгессера-Кармана. Она изложена в статье «The Strength of Struts», *Engineering*, 94 (1912), 249—250. Для полного ознакомления см. T. von Kármán, *Untersuchungen über Knickfestigkeit*, Berlin (1909).

²⁾ Это послужило основой формулы для практического конструирования Британского министерства авиации. См. H. B. Howard, *Stresses in Aeroplane Structures*, гл. III.

$$P = \frac{A p y}{1 + \frac{h \delta_0}{k^2} \sec \frac{\alpha l}{2}},$$

где через A обозначена площадь поперечного сечения, через k — соответствующий радиус инерции, через δ_0 — эксцентриситет приложения нагрузки, а через h — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной от нее точки контура поперечного сечения на сжатой стороне стержня.

Напряжения, вызванные совместным действием поперечной нагрузки и силы осевого сжатия

479. Предположим, что на стержень постоянного поперечного сечения, имеющий начальный прогиб y_0 , действует поперечная нагрузка w .

Легко показать, что прогиб будет определяться уравнением

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{d^2 y_0}{dx^2} - \frac{M_t}{B}, \quad (I)$$

где M_t — изгибающий момент, соответствующий w , так что

$$w + \frac{d^2 M_t}{dx^2} = 0, \quad (II)$$

и где, как и раньше, $\alpha^2 = \frac{P}{B}$. Мы умножим уравнение (I) на $\sin \frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем его подобно тому, как делали в § 468.

Таким образом найдем, что

$$(P_n - P) \bar{w}_n = P_n \bar{w}_n + \frac{2}{l} \int_0^l M_t \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (III)$$

где \bar{w}_n , w_n — коэффициенты при $\sin \frac{n\pi x}{l}$ в рядах Фурье (10) соответственно для функций y_0 и y .

Воспользовавшись тем, что M_l и $\sin \frac{n\pi x}{l}$ равны нулю на обоих концах, мы можем показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^l M_l \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= -\frac{l^3}{n^2\pi^2} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \frac{d^2 M_l}{dx^2} dx = \\ &= \frac{l^3}{n^2\pi^2} \int_0^l w \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad [\text{согласно (II)}]. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (III) можно написать в такой форме:

$$(P_n - P) w_n = P_n \bar{w}_n + \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l w \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (\text{IV})$$

При $w=0$ полученное соотношение принимает вид выражения (11) § 468, чем и подтверждает последнее. Кроме того, (IV) показывает, что *влияние* поперечной нагрузки w на прогиб y эквивалентно начальному прогибу y_0 , для которого коэффициенты ряда (10) равны:

$$\bar{w}_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 P_n} \int_0^l w \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (\text{V})$$

Возникающие благодаря силе сжатия напряжения изгиба будут пропорциональны изгибающему моменту

$$M = -B \frac{d^2}{dx^2} (y - y_0)$$

или когда мы подставим (10):

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi^2}{l^2} B [(w_1 - \bar{w}_1) \sin \frac{\pi x}{l} + \dots + \\ &\quad + n^2 (w_n - \bar{w}_n) \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots] = \\ &= \sum \left[P_n (w_n - \bar{w}_n) \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \quad [\text{согласно (3)}]. \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

Из (IV) мы имеем:

$$P_n(\overline{w}_n - \overline{w}_n) = P\overline{w}_n + \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l \mathbf{w} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (\text{VII})$$

Подставив (VII) в (VI), мы видим, что влияние \mathbf{w} на напряжение эквивалентно окончательному прогибу y , для которого коэффициенты ряда (10) равны

$$\overline{w}_n = \frac{2l}{n^2\pi^2 P} \int_0^l \mathbf{w} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (\text{VIII})$$

Как и в § 469, мы можем показать, что если отношение $\frac{P}{P_1}$ близко к единице, то первый член имеет преобладающее значение в рядах для y и *a fortiori* для M (за счет множителя n^{-2} , который встречается в общем члене). Следовательно, мы можем сказать, что влияние поперечной нагрузки \mathbf{w} на прогибы с большой степенью точности эквивалентно начальному прогибу

$$y_0 = \left(\frac{2l^3}{\pi^4 B} \int_0^l \mathbf{w} \sin \frac{\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (30)$$

а ее влияние на напряжения окончательному прогибу

$$y = \left(\frac{2l}{\pi^2 P} \int_0^l \mathbf{w} \sin \frac{\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (31)$$

Если \mathbf{w} не зависит от x (постоянная поперечная нагрузка), то выражение (30) сводится к следующему:

$$y_0 = \frac{4\mathbf{w}l^4}{\pi^5 B} \sin \frac{\pi x}{l},$$

а выражение (31) к

$$y = \frac{4\mathbf{w}l^3}{\pi^3 P} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Пример

5. (Самб. М. С. Т. 1933.) Двутавровая балка представляет собой сжатый элемент фермы. Длина балки 610 см. Размеры поперечного сечения следующие: высота 45,8 см, ширина полки 20,3 см, толщина полки 2,42 см, толщина стенки 1,27 см. Балка должна нести осевую силу сжатия в 101,6 т и поперечную равномерно распределенную нагрузку в плоскости наибольшего момента инерции в 5,08 т. Балку можно считать шарнирно опертой на концах и имеющей, когда она свободна от нагрузки, синусоидальный прогиб с амплитудой 1,53 см. Оценить коэффициент безопасности при предельном допуске напряжении сжатия в 2820 кг/см². Прогиб балки в плоскости, перпендикулярной поперечной нагрузке, не допускается.

Площадь поперечного сечения балки = 154 см².

Соответствующий момент инерции = 53,7 см⁴.

Модуль Юнга = 2,1 · 10⁶ кг/см².

[3,1]

Применение теоремы энергии к задаче о продольном изгибе стержня постоянного поперечного сечения

480. Интересно рассмотреть задачу иначе, а именно, с точки зрения *теоремы энергии*. Умножим левую часть уравнения (1) на $\frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}$ и затем проинтегрируем его по всей длине стержня.

Таким путем мы получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = -\frac{1}{2} P \int_0^l y \frac{d^2y}{dx^2} dx.$$

Проинтегрировав по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx &= -\frac{1}{2} P \left[y \frac{dy}{dx} \right]_0^l + \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \\ \frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx &= \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что или y или $\frac{dy}{dx}$ обращаются в нуль на концах стержня.

Вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2}$, в пределах точности уравнения (1), определяет кривизну деформированной оси стержня, следовательно, выражение в левой части (32) является мерой упругой энергии, запасенной в стержне вследствие возникшего прогиба¹⁾. Концы стержня при изгибе сближаются на величину:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} - 1 \right) dx &= \int_0^l \left[\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + (\text{члены четвертого и более высокого} \\ &\quad \text{порядка относительно } \frac{dy}{dx}). \end{aligned} \quad (I)$$

Теперь видно, что величина, стоящая в правой части (32) с точностью до членов второго порядка относительно y , равна *уменьшению*, вследствие изгиба, потенциальной энергии двух внешних сил P , вызывающих сжатие стержня. Таким образом, уравнение (32) устанавливает следующее равенство:

(Количество упругой энергии, запасенное при изгибе) =
= (потере потенциальной энергии приложенных сил).

Оно показывает, что *полная* потенциальная энергия системы при изгибе не изменяется. Этот результат представляет собой частный пример общей теоремы механики, указанной в § 19 главы I. Теорема гласит, что полная потенциальная энергия любой механической системы имеет стационарное значение, когда эта система находится в конфигурации равновесия.

481. В предыдущем параграфе мы предполагали, что осевая сила сжатия во все время деформации постоянна и что концы стержня могут свободно приближаться друг к другу. Допустим другое. Пусть во время нагружения боковой прогиб стержня происходить не может. Когда же сила сжатия достигает определенной величины P , мы удаляем боковые связи, но концы стержня оставляем неподвижными. Тогда

¹⁾ См. уравнение (21) главы V.

расстояние между концами стержня все время равняется l , а длина изогнутой оси стержня, если он после удаления боковых связей изогнется, с точностью уравнения (I) будет:

$$\int_0^l \frac{ds}{dx} dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \quad (\text{II})$$

Отсюда видно, что при изгибе произойдет удлинение оси стержня. Величина этого относительного удлинения:

$$\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Если через \bar{e} обозначить относительное сжатие стержня в то время, когда он был прямолинейным, то полное относительное сжатие будет равно:

$$e' = \bar{e} - \frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \quad (\text{III})$$

Действующая сила пропорциональна величине вызываемого ею относительного удлинения. Поэтому мы можем сказать, что сила сжатия, действующая на стержень после удаления боковых связей, уменьшается в отношении $\frac{e'}{\bar{e}}$. Отсюда следует, что упругая энергия сжатия, будучи пропорциональна произведению силы сжатия на удлинение ¹⁾, уменьшается от величины $\frac{1}{2} Pl\bar{e}$ до величины $\frac{1}{2} Pl\frac{e'^2}{\bar{e}}$. Разность этих значений, согласно формуле (III), при принятой нами степени точности равна:

$$\frac{1}{2} \frac{Pl}{\bar{e}} (\bar{e}^2 - e'^2) = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Равенство (32) теперь может быть истолковано так:

¹⁾ Ср. глава II, § 40.

(Количество упругой энергии, запасенное при изгибе) = (уменьшению количества упругой энергии, запасенной при сжатии).

Таким образом оно опять может служить частным примером общей теоремы механики.

Приближенное вычисление наименьшей критической силы методом Рэля

482. Согласно равенству (32), критическая сила определяется выражением

$$P = \frac{\int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx}, \quad (33)$$

где функция y является «формой продольного изгиба» (§ 466). Если она известна, то интегралы можно оценить и вычислить соответствующую критическую нагрузку. Так, подставив y в форме (2), мы сразу получим формулу (3).

Будем рассматривать выражение (33) в тех случаях, когда формы продольного изгиба точно *неизвестны*. Допустим, что вместо y в выражение (33) мы подставили некоторую функцию от x , удовлетворяющую условиям шарнирного закрепления на концах стержня ($x=0$ и $x=l$) и разлагающуюся в ряд Фурье по синусам вида:

$$\begin{aligned} y &= A \sin \frac{\pi}{l} x + A_2 \sin 2 \frac{\pi}{l} x + A_3 \sin 3 \frac{\pi}{l} x + \dots = \\ &= A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Предполагая, что дифференцирование рядов законно, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A_1 Y_1' + A_2 Y_2' + A_3 Y_3' + \dots \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= A_1 Y_1'' + A_2 Y_2'' + A_3 Y_3'' + \dots \end{aligned}$$

(Штрихами обозначено дифференцирование по x). Подставив в (33), получим:

$$P = \frac{\int_0^l B[A_1^2 Y_1''^2 + A_2^2 Y_2''^2 + \dots + 2(A_1 A_2 Y_1' Y_2'' + A_2 A_3 Y_2' Y_3'' + \dots)] dx}{\int_0^l [A_1^2 Y_1'^2 + A_2^2 Y_2'^2 + \dots + 2(A_1 A_2 Y_1' Y_2' + A_2 A_3 Y_2' Y_3' + \dots)] dx}. \quad (35)$$

Покажем, что члены типа $2A_m A_n Y_m' Y_n''$ из ряда, стоящего в знаменателе, выпадут. На самом деле, согласно равенству (34), мы имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^l Y_m' Y_n'' dx &= \int_0^l \left(m \cos m \frac{\pi}{l} x \right) \left(n \cos n \frac{\pi}{l} x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} mn \int_0^l \left\{ \cos(m+n) \frac{\pi}{l} x + \cos(m-n) \frac{\pi}{l} x \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} mn \frac{l}{\pi} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n) \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n) \frac{\pi}{l} x \right]_0^l, \end{aligned}$$

а эта величина равна нулю, потому что числа $(m+n)$ и $(m-n)$ целые и, кроме того, $m \neq n$. Аналогично можно показать, что

$$\int_0^l B Y_m'' Y_n'' dx = 0, \text{ при } m \neq n$$

и что

$$\int_0^l B Y_n''^2 dx = P_n \int_0^l Y_n'^2 dx = P_n I_n. \quad (36)$$

Упростив (35) с помощью этих соотношений, мы имеем:

$$P = \frac{P_1 A_1^2 I_1 + P_2 A_2^2 I_2 + P_3 A_3^2 I_3 + \dots}{A_1^2 I_1 + A_2^2 I_2 + A_3^2 I_3 + \dots}. \quad (37)$$

Это выражение определяет величину P , получающуюся после подстановки рядов Фурье (34) в выражение (33). Заметим, что, как и было установлено раньше, абсолютная величина прогиба не существенна.

483. Из (36) видно, что все I_n положительны. Поэтому мы можем сказать, что выражение (37) аналогично, например, формуле для средней плотности тела, образованного из тел с различными плотностями. Величины $A_1^2 I_1, A_2^2 I_2, \dots$ суть аналоги объемов его составных частей, а P_1, P_2, \dots являются аналогами плотностей различных частей тела. Числитель выражения (37) — аналог полной массы тела, а знаменатель — аналог всего объема. И очевидно, что так же как средняя плотность не может быть меньше плотности самой легкой из составляющих частей, так и величина P , определяемая выражением (37), не может быть меньше чем P_1 . Другими словами, так как I_n необходимо положительны, P_1 представляет собой наименьшее, отличное от нуля, значение, которому может равняться отношение, стоящее в правой части (33).

484. Если в рядах (34) коэффициенты A_2, A_3, \dots малы в сравнении с коэффициентом A_1 , то в числителе и знаменателе выражения (37) A_2^2, A_3^2, \dots будут величинами второго порядка малости по отношению к A_1^2 и значение P , определенное из (37), будет отличаться от P_1 , т. е. от значения (37) при $A_2 = A_3 = \dots = 0$, на величину второго порядка малости. Отсюда видно, что если форма, принятая для u , является хорошим приближением к первой форме продольного изгиба, то P , вычисленное из (33), будет очень хорошим приближением для P_1 «первой критической силы». Заметим, что эта величина будет обязательно больше истинной.

Для примера возьмем для u такое выражение: $x(l-x)$. Оно обращается в нуль на обоих концах стержня. Вычислим производные:

$$y' = l - 2x, \quad y'' = -2.$$

Рассматривая B как постоянную, мы из (33) получим

$$P = \frac{4lB}{\int_0^l (l^2 - 4xl + 4x^2) dx} = \frac{12B}{l^2}.$$

Проведенная оценка вместо коэффициента $\pi^2 = 0,987$ дала коэффициент 12.

Мы взяли для u неподходящую форму и поэтому получим большую ошибку (около 22%), но характер ошибки как раз тот, которого мы ожидали. Ниже в § 486 мы увидим, почему здесь нельзя ждать хорошего совпадения.

Стойки переменной жесткости при изгибе. Сопряженные соотношения

485. Если мы имеем стержни с постоянной жесткостью при изгибе, то метод Рэлея для вычисления критических сил применять не нужно, так как их значения могут быть найдены точно. Но когда жесткость при изгибе зависит от x , уравнение (1) часто не может быть точно проинтегрировано, и метод Рэлея становится крайне полезным, потому что с его помощью без большого труда можно оценить P_1 . Ошибка при этой оценке может быть сделана малой и полученное для P_1 значение всегда *превосходит* истинное. При выводе условия (32), мы не предполагали, что жесткость B постоянна, и поэтому физическая интерпретация этого условия не изменится, если мы примем, что жесткость меняется по длине стержня.

Уравнение (33) можно также обобщить. Предположив, что u можно разложить в ряды вида

$$u = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + \dots, \quad (34) \text{ bis}$$

где Y_1, Y_2, \dots неизвестные формы продольного изгиба, мы опять придем к выражению (35). Конечно, формы Y_1, Y_2, \dots переменной x больше не являются синусоидами. Функции Y_n представляют собой решение уравнения (1) при заданном распределении B и значении P , равном (неизвестной) критической величине P_n . Соотношения

$$\int_0^l Y'_m Y'_n dx = \int_0^l B Y''_m Y''_n dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (38)$$

сохраняются, ибо по определению мы имеем

$$\left. \begin{aligned} B Y''_m + P_m Y_m &= 0, \\ B Y''_n + P_n Y_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

а отсюда

$$-P_m \int_0^l Y_m Y_n'' dx = \int_0^l B Y_m'' Y_n'' dx = -P_n \int_0^l Y_n Y_m'' dx. \quad (II)$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} - \int_0^l Y_m Y_n'' dx &= - [Y_m Y_n']_0^l + \int_0^l Y_m' Y_n' dx = \\ &= [Y_n Y_m' - Y_m Y_n']_0^l - \int_0^l Y_n Y_m'' dx. \end{aligned}$$

Величина в квадратных скобках обращается в нуль как при верхнем, так и при нижнем пределах интегрирования. Равенство (II) принимает вид:

$$(P_n - P_m) \int_0^l Y_m Y_n'' dx = 0.$$

А отсюда, если $P_m \neq P_n$, мы имеем

$$\int_0^l Y_m' Y_n' dx = - \int_0^l Y_m Y_n'' dx = 0,$$

и, согласно (I),

$$\int_0^l B Y_m'' Y_n'' dx = -P_m \int_0^l Y_m Y_n'' dx = 0.$$

Соотношения (38) нами выведены.

Выражения типа (36), как можно показать, также сохраняются. Таким образом, мы опять приходим к выражению вида (37), из которого следуют выводы §§ 483—484. Итак, мы получили, что P_1 можно оценить с помощью выражения (33) на основании принятой формы для u независимо от того, будет ли B постоянной или какой-нибудь заданной функцией x . Полученное таким образом значение для P_1 будет или равно или больше истинного значения силы P_1 .

486. Соотношения, выраженные равенствами (38), известны как сопряженные соотношения*). Как мы видели, они существенно зависят от нашего предположения о том, что функции Y_1, Y_2, \dots , каждая по отдельности, обращаются в нуль на обоих концах стержня. Кроме того, в доказательстве § 482 мы предполагали, что отношение (35) эквивалентно отношению (33), т. е. мы допускали законность дифференцирования ряда (34).

Поэтому наша теория будет иметь место лишь тогда, когда принятая для y форма удовлетворяет обоим условиям шарнирного закрепления, а именно:

$$y = 0 \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Если хоть одно из условий не соблюдается, то мы не можем ожидать хорошей оценки.

Рассматривая задачу с физической точки зрения, мы видим, что для удержания в равновесии кривой прогиба, кривизна которой не равна нулю на концах стержня, к последним нужно приложить моменты. Тогда только часть упругой энергии изгиба будет являться следствием работы силы сжатия на концах. Другая ее часть будет являться следствием работы упомянутых моментов. Используя уравнение (32), мы молчаливо предполагали (см. § 480), что работа силы сжатия при сближении концов стержня учитывает всю упругую энергию изгиба. Таким образом мы пренебрегали той частью упругой энергии, которая обусловлена приложенными на концах стержня моментами. Если эти моменты действуют, то, пренебрегая их влиянием на упругую энергию, мы получим преувеличенную оценку искомой осевой силы сжатия.

В примере, помещенном в конце § 484, форма, принятая для y , удовлетворяет первому, но не удовлетворяет второму из условий на концах. Поэтому, как и следовало ожидать, мы получаем слишком завышенную оценку. Возьмем другую форму, а именно, положим, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x(l-x),$$

*) Саусвелл вслед за Рэлеем называет свойством сопряженности то, что теперь обычно называют свойством ортогональности. Мы сохраняем терминологию Рэля. (Прим. перев.)

отсюда

$$y = \frac{1}{12} (-l^3 x + 2lx^3 - x^4).$$

Оба условия на концах удовлетворяются. Продифференцировав, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{12} (-l^3 + 6lx^2 - 4x^3).$$

Выражение (33) дает следующую оценку:

$$P_1 = \frac{144 B \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx}{\int_0^l (l^6 + 36l^2 x^4 + 16x^6 - 12l^4 x^2 - 48lx^5 + 8l^3 x^3) dx} = \\ = \frac{168 B}{17 l^2} = 9,88 \frac{B}{l^2}.$$

Раньше в § 484 мы привели точный результат, а именно:

$$P_1 = 9,87 \frac{B}{l^2}.$$

Таким образом полученное для P_1 значение *превышает* истинное, только теперь величина ошибки будет немногим больше 0,1%.

Пример

6. Используя только что принятую форму для y , оценить P_1 для стержня, обладающего симметрией относительно его среднего сечения и имеющего переменную жесткость при изгибе. На половине длины стержня ($0 < x < \frac{1}{2}l$) жесткость при изгибе меняется по следующему закону:

$$B = B_0 e^{\frac{2x}{l}},$$

так что $B = B_0$ на каждом из концов и $B = B_0 e$ в среднем сечении стержня. [20 $\frac{B_0}{l^2}$ приближенно.]

[Функции y и B обладают симметрией относительно среднего сечения, следовательно, пределы интегрирования в выражении (33) можно взять равными 0 и $\frac{1}{2}l$.]

Применение метода Рэля к стойкам с переменным поперечным сечением

487. Наиболее простой формой для y , удовлетворяющей обоим условиям, установленным в § 486, является форма:

$$y = \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (39)$$

Подставив это выражение в (33), мы получим оценку для первой критической силы в такой форме:

$$P_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l B \left(1 - \cos 2 \frac{\pi}{l} x \right) dx. \quad (40)$$

Интеграл может быть вычислен с помощью графических или численных методов (например, по правилу Симпсона).

***488.** Мы применим эту формулу к стержню, рассмотренному В. Л. Каулеем и Г. Леви¹⁾. Жесткость при изгибе для этого стержня меняется с x по следующему закону:

$$B = B_0 \left\{ 1 - 4(1-r) \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\}^2, \quad (I)$$

где r — переменный параметр, который может быть как положительным, так и отрицательным. Начало отсчета по оси x бралось в среднем сечении так, что на концах $x = \pm \frac{1}{2} l$. Жесткость при изгибе имеет величину B_0 в среднем сечении ($x = 0$) и $r^2 B_0$ на концах.

Каулей и Леви получили для этого стержня точное решение уравнения (I), а поэтому первая критическая сила имеет следующее *точное* значение:

$$P_1 = 4 \frac{B_0}{l^2} (1-r) \left[1 + \frac{\pi^2}{\left\{ \ln \frac{1 + \sqrt{1-r}}{1 - \sqrt{1-r}} \right\}^2} \right]. \quad (II)$$

¹⁾ *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 484 (1918).

В частном случае, при $r^2 = 0,2$, величина P_1 равняется 1)

$$8,1527 \frac{B_0}{l^2}. \quad (\text{III})$$

Оценим значение первой критической силы в этом случае по нашей приближенной формуле (40).

Если $r^2 = 0,2$, то мы имеем

$$4(1-r) = 4(1-\sqrt{0,2}) = 4 \times 0,5528 = 2,211.$$

Так, что выражение (1) принимает вид:

$$B = B_0(1 - 2,21z^2)^2, \quad (\text{IV})$$

где вместо $\frac{x}{l}$ написано z . Начало координат возьмем в середине стержня. Заменяя в формуле (40) $\frac{x}{l}$ на $\left(z + \frac{1}{2}\right)$, получим

$$P_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} B(1 + \cos 2\pi z) dz = \lambda \frac{B_0}{l^2},$$

где

$$\lambda = \pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 + \cos 2\pi z)(1 - 2,21z^2)^2 dz. \quad (\text{V})$$

Замечая, что при этих пределах интегрирования

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi z dz = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^2 \cos 2\pi z dz = -\frac{1}{2\pi^2},$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^4 \cos 2\pi z dz = -\frac{1}{4\pi^2} + \frac{3}{2\pi^4},$$

1) Приведенный здесь коэффициент является исправленным Брэдфильдом (К. N. E. Bradfield) значением того коэффициента (8,09), который дали Каулей и Леви, см. Relaxation Methods, 229.

мы из (V) имеем:

$$\begin{aligned}\lambda &= \pi^2 \left\{ 1 - \frac{4,42}{12} + \frac{4,88}{80} + \frac{4,42}{2\pi^2} + 4,88 \left(\frac{3}{2\pi^4} - \frac{1}{4\pi^2} \right) \right\} = \\ &= \pi^2 \times 0,8676 \cong 8,55.\end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с точным решением (III), мы видим, что получается превышение над истинным значением P_1 , равным 8,1527 на 0,3973, т. е. приблизительно на 4,9%. Мы получим еще более близкую оценку, если при выборе подходящей формы для y будем считать B переменной величиной. Метод, с помощью которого можно провести такую оценку, дается в следующем параграфе.

489. Формула (40) основана на предположении, что кривая прогиба определяется формулой (39), которая не учитывает переменную жесткость при изгибе. Затратив несколько больше труда, можно получить более точное приближение.

Это делается следующим образом.

В формулу (33) подставим вместо y решение уравнения

$$-B \frac{d^2 y}{dx^2} = \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (41)$$

которое обращается в нуль на обоих концах стержня. Это уравнение легко решить приближенными (например, графическими) методами. Его решение таково, что выполняется равенство

$$\int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = - \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \sin \frac{\pi}{l} x dx = \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l y \sin \frac{\pi}{l} x dx.$$

Последнее равенство получается после интегрирования по частям при соблюдении условий на концах.

Таким же образом и согласно тех же условий выведем, что

$$\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = - \int_0^l y \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int_0^l \frac{y}{B} \sin \frac{\pi}{l} x dx.$$

Последнее равенство имеет место в силу уравнения (41). Таким образом, выражение (33) принимает вид:

$$P_1 \cong \frac{\frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l y \sin \frac{\pi}{l} x dx}{\int_0^l \frac{y}{B} \sin \frac{\pi}{l} x dx}. \quad (42)$$

Если решение уравнения (41) известно, то интегралы, входящие в (42), можно опять вычислить графическими или численными методами. Способ интегрирования уравнения (41) рассматривался в §§ 182—184 главы VI. Для частного примера, рассмотренного в § 488, указанный метод дает величину, которая превышает значение Кауля и Леви приблизительно на 1⁰/₀.

Условия на концах, отличающиеся от условий шарнирного закрепления

490. Обращаясь к лежащей в основе метода Рэлея теории (§ 485), мы заметим, что наше доказательство сопряженных соотношений (на которые опирается метод) требует, чтобы величина

$$[Y_n Y'_m - Y_m Y'_n]$$

обращалась в нуль на каждом из концов стержня в том случае, когда Y_m , Y_n являются двумя различными формами продольного изгиба. В ранее рассмотренном случае оба конца стержня были шарнирно закреплены, и эта величина на каждом из концов обращалась в нуль в силу того, что Y_m и Y_n должны были иметь нулевые значения на концах. Но равным образом квадратная скобка будет обращаться в нуль на концах и в том случае, когда концы «заделаны», потому что тогда на каждом из концов Y'_m , Y'_n равны нулю. Итак, мы видим, что сопряженные соотношения имеют место тогда, когда на обоих концах y или y' обращается в нуль. Если мы посмотрим на этот результат с точки зрения теоремы энергии, то сможем сказать, что *сопряженные соотноше-*

ния имеют место тогда, когда условия на концах таковы, что реакции связей не совершают работы.

Если это условие выполняется, то для величины P , определяемой равенством (33), всегда можно получить выражение вида (37). Функции Y_1, Y_2, \dots , стоящие под интегралами I_1, I_2, \dots , суть формы продольного изгиба, удовлетворяющие граничным условиям задачи. Как и в § 486, мы можем показать, что для того чтобы оценка, полученная из равенства (33), была достаточно хорошей, форма, принятая для y , должна удовлетворять на концах только что установленному и записанному курсивом условию. Кроме того, предполагаемую форму y мы должны выбирать «разумно», т. е. так, чтобы она имела достаточно простой вид, так как иначе мы затратим слишком много времени на интегрирование. Кроме того, вообще говоря, она должна давать некоторое представление о характере действительной формы Y_1 .

491. Используя графические или численные методы, легко произвести необходимые интегрирования. Метод, описанный в § 489, пригоден для стержней с шарнирно закрепленными концами. В основе его лежит предположение о том, что во всех случаях возможно выполнить следующее:

(а) заменить точное уравнение (I) уравнением

$$-B \frac{d^2 y}{dx^2} = Y, \quad (43)$$

где Y — некоторая специальным образом выбранная функция x , удовлетворяющая обоим поставленным граничным условиям.

(б) Найти решение этого уравнения (y), удовлетворяющее обоим граничным условиям с помощью методов §§ 182—184 главы VI, или каким-нибудь другим путем.

(с) Заменить формулу (33) следующей:

$$P_1 = \frac{\int_0^l \frac{Y^2}{B} dx}{\int_0^l \frac{yY}{B} dx}, \quad (44)$$

и провести необходимые интегрирования с тем, чтобы найти P_1 . Замена формулы (33) формулой (44) оправдывается следующими соотношениями:

$$\int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{Y^2}{B} \right) dx \quad [\text{согласно (43)}];$$

$$\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = - \int_0^l y \frac{d^2 y}{dx^2} dx \quad \left[\text{в силу того, что } \left(y \frac{dy}{dx} \right)_0^l = 0 \right];$$

$$\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{yY}{B} \right) dx \quad [\text{согласно (43)}].$$

Примеры

7. С помощью метода Рэлея получить оценку P_1 для стержня постоянного поперечного сечения, один конец которого заделан, а другой шарнирно закреплен (рис. 65 D главы VI). В качестве принятой формы y взять кривую прогиба оси стержня, подверженного действию равномерно распределенной нагрузки w . $\left[2l \frac{B}{l^2} \right]$

8. (Oxford F. E. E. S. 1934.) Мачту можно рассматривать как вертикальную консоль длины l . Вертикальный груз W приложен к ее вершине. Жесткость при изгибе мачты переменна и зависит от x следующим образом:

$$B = B_0 \left(1 - \frac{1}{5} \frac{x^2}{l^2} \right),$$

где B_0 — значение жесткости при изгибе в нижнем заделанном конце мачты; x измеряется вверх от этого конца.

Проверить, что потеря устойчивости может произойти тогда, когда груз W имеет следующее критическое значение:

$$W_1 = \frac{12B_0}{5l^2}.$$

Форма прогиба при этом будет

$$y = Y \left(6 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4} \right),$$

где Y произвольно, а y — горизонтальный прогиб в сечении x , измеряемый от вертикали, проходящей через основание мачты.

С помощью приближенного метода Рэлея получить оценку для W_1 в этой задаче, взяв в качестве принятой кривой прогиба

$$y = Y \frac{x^2}{l^2},$$

где Y , как и раньше, произвольно.

Можете ли вы предложить какое-нибудь объяснение характера ошибки, и почему не следует ожидать, что ваша оценка будет очень точной?

Вывод основного уравнения вариационным методом из энергетического соотношения

492. Прежде чем перейти к задачам устойчивости других упругих систем, сделаем еще одно замечание. В § 480 из нашего основного уравнения (I) мы получили уравнение энергии (32). Задача станет физически более ясной, если мы сделаем наоборот, т. е. выведем основное уравнение из уравнения энергии.

В §§ 480 — 481 мы видели, что уравнение (32), имеющее вид

$$\frac{1}{2} \int_0^l B y''^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l y'^2 dx = 0, \quad (45)$$

может быть истолковано как условие того, что полная потенциальная энергия системы (упругий стержень + нагрузка) при изгибе не изменяется. Мы имеем дело с частным случаем общей теоремы механики, указанной в § 19 главы I. Теорема гласит, что полная потенциальная энергия любой системы имеет стационарное значение, когда система находится в конфигурации равновесия. Если P меньше, чем наименьшее из чисел, удовлетворяющих равенству (33) и соответствующих граничным условиям, наложенным на y , то выражение, стоящее в левой части (45), будет положительным для всех форм y , удовлетворяющих этим условиям. Следовательно, только прямолинейная форма будет являться конфигурацией *минимальной* потенциальной энергии, т. е. только она будет конфигурацией *устойчивого* равновесия. С другой стороны, если выражение (45) будет отрицательным, что возможно,

когда P достаточно велико, то прямолинейная форма будет являться конфигурацией *неустойчивого* равновесия. Если u достаточно мал, то интегралы, входящие в (45), представляя собой две формы потенциальной энергии. В силу этого при всех наших выводах мы предполагаем, что u мал.

Теперь рассмотрим промежуточное состояние, для которого P равно наименьшему «критическому» значению P_1 . Тогда прямолинейная форма не будет ни конфигурацией устойчивого равновесия, ни конфигурацией неустойчивого равновесия. Она будет конфигурацией *безразличного* равновесия. Следовательно, для u можно найти такую форму («первую форму продольного изгиба»), что определяемая ею изогнутая конфигурация также будет конфигурацией равновесия. Общая теорема механики требует, чтобы полная потенциальная энергия, соответствующая этой конфигурации, имела стационарное значение. Следовательно, левая часть выражения (45) должна обращаться в нуль, когда u дано *любое* бесконечно малое приращение.

493. Таким образом, если u представляет собой форму продольного изгиба или конфигурацию безразличного равновесия, то должно удовлетворяться не только равенство (45), но и следующее:

$$\frac{1}{2} \int_0^l B (y'' + \eta'')^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l (y' + \eta')^2 dx = 0, \quad (46)$$

где η является *любой*, бесконечно малой по величине по сравнению с u функцией от x , удовлетворяющей граничным условиям. Вычитая (45) из (46) и пренебрегая членами второго порядка малости по отношению к η , мы будем иметь

$$\int_0^l B y'' \eta'' dx - P \int_0^l y' \eta' dx = 0. \quad (47)$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^l y' \eta' dx = [y \eta']_0^l - \int_0^l y \eta'' dx. \quad (1)$$

Величина в квадратных скобках после подстановки пределов обратится в нуль, так как при каждом из пределов либо y либо η' равны нулю. Условие (47) записывается в следующей форме:

$$\int_0^l \eta'' (By'' + Py) dx = 0. \quad (48)$$

Оно должно удовлетворяться при всех допустимых формах η .

Функция η'' совершенно произвольна и поэтому $(By'' + Py)$ в каждой точке интервала $0 < x < l$ должно равняться нулю. Мы вывели основное уравнение (I). Метод, которым мы пользовались при выводе основного уравнения, известен под названием вариационного метода.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ СИЛ, ЛЕЖАЩИХ В ЕЕ ПЛОСКОСТИ

Уравнение энергии

494. Интересно тем же методом получить условия, которым подчиняются прогибы пластинки в случае упругого равновесия последней под действием сил, лежащих в ее плоскости. Мы увидим, что в добавление к уравнению, которое должно выполняться внутри контура, мы получим условия, которые должны удовлетворяться на краю пластинки.

Как аналог (постоянной) осевой силы сжатия P в стержне, мы имеем, вообще говоря, две главные силы сжатия P_1, P_2 в плоскости пластинки. Как аналог выражения $\frac{1}{2} P \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, которое, как было показано в § 481, представляет собой уменьшение вследствие изгиба упругой энергии сжатия на единицу длины стержня, мы имеем выражение, состоящее из двух членов, а именно:

$$\frac{1}{2} P_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x'}\right)^2 + \frac{1}{2} P_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y'}\right)^2, \quad (I)$$

которое представляет собой уменьшение вследствие изгиба упругой энергии сжатия на единицу площади пластинки.

Здесь x' , y' — направления P_1 , P_2 , а через w обозначен прогиб срединной поверхности.

Вообще говоря, направления P_1 , P_2 и их величины будут изменяться от точки к точке пластинки. Если через θ обозначить угол, который составляют Ox' , Oy' с фиксированными направлениями Ox , Oy , то мы, как и в § 234 главы VII, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &\equiv \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &\equiv -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Поэтому выражение (I) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2} \left[(P_1 \cos^2 \theta + P_2 \sin^2 \theta) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (P_1 \sin^2 \theta + P_2 \cos^2 \theta) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + (P_1 - P_2) \sin 2\theta \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

или

$$\frac{1}{2} \left[P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + P_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2S \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad (49)$$

где P_x , P_y являются силами сжатия по направлениям Ox , Oy , а S — касательным усилием. Эти величины определяют главные силы сжатия P_1 , P_2 ¹⁾.

Проинтегрировав выражение (19) главы VII для величины U по всей площади срединной поверхности, мы получим упругую энергию изгиба. Упругая энергия системы при изгибе не изменяется, если выполняется условие:

$$\frac{1}{2} D \iint \{ (x_x + x_y)^2 - 2(1 - \sigma)(x_x x_y - \tau_{xy}) \} dx dy - \frac{1}{2} \iint \{ P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + P_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \} dx dy = 0, \quad (50)$$

где ²⁾

$$x_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (51)$$

¹⁾ Равенства $P_x = P_1 \cos^2 \theta + P_2 \sin^2 \theta$ и т. д. очень легко выводятся тем же способом, что и в § 130 гл. IV.

²⁾ См. (20) главы VII.

Применение вариационного метода

495. Приближенное решение задачи об устойчивости пластинки методом Рэлея можно провести на основании условия (50) подобно тому, как в случае стержней это делалось на основании условия (32).

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям § 492, мы можем показать, что если плоская форма является конфигурацией *безразличного* равновесия, то левая часть условия (50) должна обращаться в нуль, когда функции w дано *любое* бесконечно малое приращение w' . Таким образом, если w является формой продольного изгиба или конфигурацией безразличного равновесия, то вместе с условием (50) должно выполняться другое условие:

$$D \iint \{ (\kappa'_x + \kappa'_y) (\kappa_x + \kappa_y) - (1 - \sigma) (\kappa'_x \kappa_y + \kappa'_y \kappa_x - \tau'_{xy} \tau_{xy}) \} dx dy - \iint \{ P_x \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + P_y \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - S \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \} dx dy = 0, \quad (52)$$

где κ'_x , κ'_y , τ'_{xy} выражены через функцию w' соотношениями типа (51).

496. Первый поверхностный интеграл условия (52) можно преобразовать так, как указывалось в дополнении к главе VII. Его можно написать в форме

$$- \iint \left\{ \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} G_x + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} G_y + 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} H_{xy} \right\} dx dy,$$

где G_x , G_y , H_{xy} выражены через функцию w формулами (21) главы VII. Используя преобразование Грина¹⁾ и условия равновесия элемента пластинки вблизи контура, мы придем к выражению, подобному (69) той же главы, а именно:²⁾

$$D \iint w' \nabla^4 w dx dy + \int \left\{ w' \left(\bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \right) - \frac{\partial w'}{\partial n} \bar{G} \right\} ds, \quad (I)$$

¹⁾ Ср. § 255.

²⁾ Мы теперь не подставляем Z вместо $D \nabla^4 w$, как мы это делали в § 256.

где \bar{N} , \bar{G} , \bar{H} имеют значения, определенные в § 256 и показанные на рис. 85.

Второй из поверхностных интегралов в условии (52) эквивалентен

$$\iint \left[-\omega' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(P_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_y \frac{\partial \omega}{\partial y} - S \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \omega' \left(P_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \omega' \left(P_y \frac{\partial \omega}{\partial y} - S \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right\} \right] dx dy$$

или, если к членам второй строки применить преобразование Грина:

$$-\iint \omega' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(P_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_y \frac{\partial \omega}{\partial y} - S \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right\} dx dy + \\ + \int \omega' \left\{ l \left(P_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + m \left(P_y \frac{\partial \omega}{\partial y} - S \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right\} ds, \quad (II)$$

где l , m , s имеют те же значения, что и в § 256. Воспользовавшись формулами (II) того же параграфа, мы можем написать криволинейный интеграл в форме

$$\int \omega' \left[(l^2 P_x + m^2 P_y - 2lmS) \frac{\partial \omega}{\partial n} - \right. \\ \left. - \{ (l^2 - m^2) S + lm(P_x - P_y) \} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] ds,$$

а это эквивалентно

$$\int \omega' \left(\bar{P} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \bar{S} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) ds, \quad (III)$$

где \bar{P} и \bar{S} погонные интенсивности приложенных к элементу контура пластинки ds нормальной силы сжатия и касательной силы в направлении s .

Основное уравнение

497. Собирая результаты, заключающиеся в выражениях (I), (II) и (III), мы можем заменить условие (52) следующим:

$$\iint \omega' \left[D \nabla^4 \omega + \frac{\partial}{\partial x} \left(P_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_y \frac{\partial w}{\partial y} - S \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big] dx dy + \\
 & + \int \left\{ w' \left(\bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} - \bar{P} \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{S} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{\partial w'}{\partial n} \bar{G} \right\} ds = 0. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Согласно сказанному в § 495, это условие должно выполняться, когда w' является любой функцией, удовлетворяющей граничным условиям. Очевидно, что какова бы ни была форма этих условий, функцию w' всегда можно взять так, что она будет принимать любое значение в любой точке *внутри* контура. Поэтому поверхностный и криволинейный интегралы в условии (53) каждый по отдельности должны обращаться в нуль. Далее, поверхностный интеграл может обращаться в нуль при любой функции w' только тогда, когда величина в квадратных скобках равна нулю во *всех* точках внутри контура. Таким образом, получаем основное уравнение для прогиба w , а именно:

$$D\nabla^4 w - \frac{\partial}{\partial x} \left(P_x \frac{\partial w}{\partial x} - S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_y \frac{\partial w}{\partial y} - S \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \quad (54)$$

Если это уравнение имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям рассматриваемой задачи, то плоская форма пластинки будет представлять собой конфигурацию безразличного равновесия.

Граничные условия

498. Из условия (53) вытекает не только основное уравнение, но и определенный тип граничных условий, при котором плоская форма является конфигурацией безразличного равновесия. Мы видели, что если равновесие плоской формы безразлично, то криволинейный интеграл в условии (53) при любой функции w' , удовлетворяющей граничным условиям рассматриваемой задачи, должен обращаться в нуль. Отсюда легко видеть, что в *каждой* точке границы должно быть

$$w' \left(\bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} - \bar{P} \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{S} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0$$

и

$$\frac{\partial w'}{\partial n} \bar{G} = 0. \quad (55)$$

Условия на заделанном крае.

Если край заделан, то

$$\varpi = \frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0. \quad (56)$$

Поэтому ϖ' и $\frac{\partial \varpi'}{\partial n}$ также должны быть нулями, и условия (55) удовлетворяются.

Условия на свободно опертом крае.

В этом случае ϖ на краю равно нулю, т. е. ϖ' тоже нуль, но не наложено никаких ограничений на $\frac{\partial \varpi}{\partial n}$, следовательно, и на $\frac{\partial \varpi'}{\partial n}$. Таким образом, первое из условий (55) удовлетворяется в силу граничных условий задачи, а второе — требует, чтобы \bar{G} обращалось в нуль.

Как и в § 256 главы VII согласно (20) и (21) § 234 мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{G} &= l^2 G_x + m^2 G_y + 2lm H_{xy} = \\ &= -D \left[l^2 \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \right) + 2lm (1 - \sigma) \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Итак, граничные условия в этом случае будут

$$\varpi = 0, \quad \bar{G} = 0, \quad (58)$$

где \bar{G} выражено формулой (57). (l и m — направляющие косинусы внешней нормали к контуру пластинки.)

Условия на свободном крае.

В этом случае не наложено никаких ограничений ни на ϖ' , ни на $\frac{\partial \varpi'}{\partial n}$.

Условия (55) требуют, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} &= 0, \\ \bar{N} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} - \bar{P} \frac{\partial \varpi}{\partial n} + \bar{S} \frac{\partial \varpi}{\partial s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где \bar{P} и \bar{S} имеют значения, объясненные в § 496; \bar{G} выражено формулой (57), и (см. § 256) согласно (20) и (21) § 234, а также (26) § 238 для \bar{N} и \bar{H} имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= lN_x + mN_y = -D \left[l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} \right] \nabla^2 w. \\ \bar{H} &= (l^2 - m^2) H_{xy} + lm (G_y - G_x) = \\ &= -(1 - \sigma) D \left[(l^2 - m^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + lm \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (60)$$

Устойчивость прямоугольной пластинки, подверженной на сторонах действию сил сжатия

499. Задача устойчивости прямоугольной пластинки относительно проста. Рассмотрим ее. Во-первых, рассмотрим пластинку с закрепленными сторонами a и b (см. рис. 117). Пластинка подвержена действию силы сжатия P_1 в направлении Ox^1 .

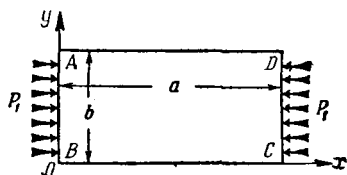


Рис. 117.

Все стороны свободно оперты.

Вдоль сторон AD и BC мы имеем $l=0$, $m=1$ и условия (58) сводятся к

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

или к

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y=0 \text{ и при } y=b. \quad (I)$$

Вдоль сторон AB и CD мы имеем $l=1$, $m=0$ и условия (58) сводятся таким же путем к

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x=0 \text{ и при } x=a. \quad (II)$$

¹⁾ Эту задачу решил С. Н. Вгуган, *Lond. Math. Soc. Proc.*, 22 (1891), 54.

В основном уравнении (54) мы имеем

$$P_x = \text{const} = P_1, \quad P_y = S = 0,$$

так что уравнение сводится к следующему:

$$D\nabla^4 w + P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (61)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условиям (I) и (II), будет выражение

$$w = A \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (62)$$

где A — произвольная постоянная, а m и n — целые числа, при которых

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - P_1 \pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0. \quad (63)$$

Любому сочетанию двух целых, отличных от нуля¹⁾, чисел m и n , согласно (63), соответствует частное критическое значение P_1 , такое, что при нем уравнение (61) удовлетворяется вместе с краевыми условиями (I) и (II).

Таким образом, мы получаем критическое значение силы сжатия, при котором плоская форма пластинки является конфигурацией безразличного равновесия. Очевидно, что P_1 возрастает вместе с n так, что ее наименьшие значения соответствуют $n = 1$, при котором из (63) имеем

$$P_1 = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2. \quad (64)$$

Отсюда видно, что P_1 имеет наименьшее значение при $mb = a$. Если $a = b$ (квадратная пластинка), то мы получаем, что потеря устойчивости происходит впервые, т. е. при наименьшей критической силе сжатия, по форме, определяемой (62) при m и n , равных 1. Если $a = 2b$, то это впервые происходит по форме, определяемой (62) при $n = 1$ и $m = 2$, и т. д. Если отношение $\frac{a}{b}$ велико, то формы, по

¹⁾ Нулевые значения m или n дают тождественно равное нулю решение (62) уравнения (61).

которым происходит потеря устойчивости, всегда таковы, что узловые линии (линии на которых $w=0$) располагаются параллельно оси y на расстояниях друг от друга по оси x , приблизительно равных b , а соответствующие значения P_1 будут теми же самыми, что для квадратной пластинки со стороной b , т. е.

$$(P_1)_{a=b} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{2h}{b}\right)^2. \quad (65)$$

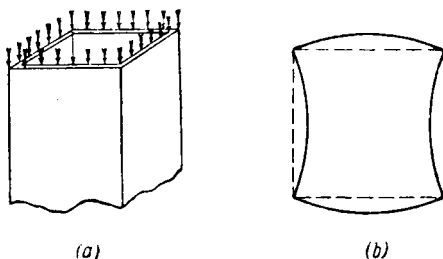


Рис. 118.

Последнее равенство, если через $2h$ обозначена толщина пластинки, имеет место согласно формуле (16) главы VII. Отсюда видно, что критические напряжения, а именно, $\frac{P_1}{2h}$ пропорциональны $\left(\frac{h}{b}\right)^2$. Откуда вытекает, что с точки зрения устойчивости надо отдать предпочтение легким сплавам, которые позволяют использовать более толстые пластинки при том же весе.

500. Случай, рассмотренный в § 499, имеет практическое значение, так как полученные формулы можно использовать при вычислении критической силы для тонкостенной квадратной трубы (рис. 118(a)). Очевидно, что при деформации поперечные сечения трубы приобретают вид, показанный на рис. 118(b) (криволинейный прямоугольник). Каждая из сторон трубы находится в условиях шарнирного закрепления и поэтому может быть использовано предыдущее решение.

Три стороны свободно оперты, четвертая свободна.

Если одна сторона, например, AD совершенно свободна, то будут иметь место условия (59). Для свободной стороны $\bar{P} = \bar{S} = 0$, $l = 0$, $m = 1$ и так как, согласно (II) § 256, $\frac{\partial}{\partial s} \equiv -\frac{\partial}{\partial x}$, мы из (57), (59) и (60) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{при } y = b. \quad (66)$$

Основное уравнение этой задачи, как и раньше, имеет форму (61).

Будем искать решение в виде

$$w = \sin m\pi \frac{x}{a} Y, \quad (67)$$

где Y — пока неизвестная функция одного y . Мы видим, что условия на свободно опертых сторонах AB, CD (рис. 117) удовлетворятся, если мы дадим m какое-нибудь целое значение. Условия на краю BC удовлетворятся, если

$$Y = Y'' = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (68)$$

и условия (66) на стороне AD удовлетворятся, если

$$Y'' = \sigma \frac{m^2 \pi^2 Y}{a^2}, \quad Y''' = (2 - \sigma) \frac{m^2 \pi^2 Y'}{a^2} \quad \text{при } y = b. \quad (69)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по y .

Уравнение (61) после подстановки (67) станет

$$D \left(Y^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y \right) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} P_1 Y = 0, \quad (70)$$

общее решение которого Y содержит четыре показательных функции. Оба крайних условия (68) удовлетворятся, если мы примем, что

$$y = A \operatorname{sh} \alpha_1 y + B \sin \alpha_2 y, \quad (71)$$

где, согласно уравнению (70),

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{P_1}{D}}, \\ \alpha_2^2 &= -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{P_1}{D}}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Условия (69) после подстановки (71) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_1^2 - \sigma \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) A \operatorname{sh} \alpha_1 b - \left(\alpha_2^2 + \sigma \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) B \sin \alpha_2 b &= 0, \\ \alpha_1 \left\{ \alpha_1^2 - (2 - \sigma) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right\} A \operatorname{ch} \alpha_1 b - \\ - \alpha_2 \left\{ \alpha_2^2 + (2 - \sigma) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right\} B \cos \alpha_2 b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Или, если мы воспользуемся соотношением (72)

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} + (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\} A \operatorname{sh} \alpha_1 b - \\ - \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} - (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\} B \sin \alpha_2 b &= 0, \\ \alpha_1 \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} - (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\} A \operatorname{ch} \alpha_1 b - \\ - \alpha_2 \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} + (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\} B \cos \alpha_2 b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Если $A = B = 0$, то w — тождественный нуль. Исключая из рассмотрения этот случай, мы из (II) получаем условие

$$\begin{aligned} \alpha_2 \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} + (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\}^2 \operatorname{th} \alpha_1 b &= \\ = \alpha_1 \left\{ \sqrt{\frac{P_1}{D}} - (1 - \sigma) \frac{m\pi}{a} \right\}^2 \operatorname{tg} \alpha_2 b, \end{aligned} \quad (73)$$

которое, будучи разрешено относительно P_1 , при использовании соотношений (72) даст значение критической силы сжатия на краях.

501. Эта задача при различных граничных условиях рассматривалась Тимошенко и другими авторами как точ-

ными, так и приближенными (метод Рэлея) методами. Вычисления в задачах с другими, чем рассмотренные, граничными условиями длинны, и мы не будем проводить их здесь. Ссылки на литературу и сами результаты можно найти во второй части «Сопrotivления материалов» Тимошенко¹⁾.

Примеры

9. Пусть в задаче, рассмотренной в § 499, вместе с P_1 на сторонах AB и DC действует сила сжатия P_2 по сторонам AD и BC . Показать, что равенство (63) заменится следующим:

$$D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = P_1 \frac{m^2}{a^2} + P_2 \frac{n^2}{b^2}.$$

Взяв P_1 и P_2 равными между собой, получить наименьшую критическую силу для квадратной пластинки со стороной a .

$$\left[P = \frac{2\pi^2 D}{a^2} \right]$$

10. (Самб. М. S. T. 1933.) Имеем длинную прямоугольную пластинку. По ее коротким сторонам действуют силы сжатия. Пластинка расположена между упругими прокладками, которые оказывают на нее боковую силу реакции с интенсивностью на единицу длины пластинки, равной λ -кратному боковому прогибу из ненагруженного положения. Короткие стороны пластинки не могут прогибаться, но угол наклона пластинки вдоль них может быть любым. Прокладки действуют так, что касательные силы на сторонах пластинки отсутствуют.

Когда пластинка свободна от нагрузки, ее малый прогиб определяется выражением

$$y = a \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где l — длина пластинки, x — расстояние от одной из сторон, а n — целое число.

Показать, что когда сила сжатия P , действующая в плоскости $y=0$, прикладывается к короткой стороне пластинки, то ее боковой прогиб дается формулой

$$y = \frac{n^2 P_e + \frac{\lambda l^2}{n^2 \pi^2}}{n^2 P_e + \frac{\lambda l^2}{n^2 \pi^2} - P} a \sin \frac{n\pi x}{l},$$

¹⁾ См. также Тимошенко и Лессельс, «Прикладная теория упругости», § 71; С. П. Тимошенко, «Устойчивость упругих систем», 1946; О. S. Неск и Н. Ебнер, *Luftfahrtforschung*, 6 февр. 1935.

где P_e — наименьшая критическая сила Эйлера для пластинки без боковых опор.

Вывести отсюда выражение для того значения P , которое будет стремиться вызвать большой прогиб, и показать, что это выражение будет иметь наименьшее значение при n , равном ближайшему к величине $\frac{l}{\pi} \left(\frac{\lambda}{EI} \right)^{1/4}$ целому числу.

***Применение методов релаксации к задачам устойчивости упругих систем**

501А. Методы релаксации (§ 106) можно обобщить так, что они будут применимы к тем задачам, которые помещены в этой и следующей главах.

Некоторые замечания такого рода даны ниже в § 542 А. Здесь же мы сошлемся на §§ 227—248 главы XI моей книги «Relaxation Methods».

ГЛАВА XIV

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

502. В § 209 главы VI мы вывели уравнение, определяющее «критические скорости» вала, а в § 211 той же главы мы показали, что уравнение такого же типа определяет прогиб оси вала в случае свободных поперечных колебаний «нормальной формы». Если вал вращается при критической скорости, то он подвергается действию поперечной силы инерции, интенсивность которой

$$\omega = m\omega^2 y.$$

Если вал вибрирует, то нагрузка, вызванная силами инерции, равна

$$\omega = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mp^2 y,$$

при $y = Y \sin(pt - \epsilon)$, где Y зависит только от x . Подставив ω в уравнение (6) главы VI, мы получим следующие основные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= m\omega^2 y \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= mp^2 y \end{aligned} \right\} (1)$$

для случая поперечных колебаний.

Здесь ω — угловая скорость вращения изогнутого вала вокруг оси Ox ,

$\frac{2\pi}{p}$ — период одного полного нормального колебания,

m — масса единицы длины вала и

$B (= EI)$ — жесткость при изгибе,

В §§ 213—218 той же главы мы получили решения уравнений (1) для валов постоянного поперечного сечения (m и B постоянные) при различных случаях закрепления в опорах. В каждом случае мы нашли ряд «критических скоростей» (ω) или «собственных частот» (p). Если ω или p принимают значения, принадлежащие этим рядам, то им соответствует некоторая частная (нормальная) форма колебаний. Например, если оба конца вала постоянного поперечного сечения шарнирно закреплены, то критическая скорость, или частота будет

$$p_n = \omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{B}{m}}, \quad (2)$$

а соответствующая форма нормального колебания

$$y = A_n \sin n\pi \frac{x}{l}, \quad (3)$$

где n — любое целое число, а A_n — произвольная постоянная. Если величины p или ω не принадлежат к ряду собственных частот или критических значений скорости, то уравнение (1) имеет единственное нулевое решение, и вал имеет прямолинейную форму ($y=0$). Если B и m зависят от x , то ряд критических скоростей и нормальных колебаний также существует, но их, вообще говоря, нельзя отыскать с помощью точного интегрирования уравнений (1). Однако достаточно точно и без большого труда можно оценить первые члены рядов p_1 или ω_1 с помощью метода Рэлея, что мы теперь и покажем.

Применение метода Рэлея к определению критических скоростей вращающихся валов

503. Умножив обе части уравнения (1) на $\frac{1}{2} y$ и проинтегрировав по длине вала, получим

$$\frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l y \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx,$$

С помощью интегрирования по частям имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m y^2 dx = \\ & = \frac{1}{2} \left[y \frac{d}{dx} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \frac{dy}{dx} B \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_0^l + \frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (I) \end{aligned}$$

Последний интеграл полученного выражения измеряет количество упругой энергии, запасенной при изгибе. Выражение, стоящее в квадратных скобках, согласно уравнениям (3) и (7) главы VI, можно записать так:

$$\left[M \frac{dy}{dx} - y \frac{dM}{dx} \right] = \left[M \frac{dy}{dx} - Fy \right], \quad (II)$$

где M — изгибающий момент, а $F \left(= \frac{dM}{dx} \right)$ — перерезывающая сила. Отсюда видно, что это выражение обращается в нуль, когда силы реакции в опорах не влияют на упругую энергию. Таким образом, если на концах вала

$$\left. \begin{aligned} & y = M = 0 \text{ (условие «шарнирного закрепления») } \\ \text{или} & \\ & y = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ (условие «заделки»),} \\ \text{или} & \\ & M = F = 0 \text{ (условие полной свободы),} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то мы из (I) имеем

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m y^2 dx}. \quad (5)$$

Если B постоянна, то это выражение после подстановки в него y по формуле (3) совпадает с (2).

Как и следовало ожидать, абсолютная величина ω не существенна.

Сопряженные соотношения

504. Согласно методу Рэля, мы получим оценку для ω^2_1 , подставив некоторую *принятую* форму для u в равенство (5). Представление о характере допускаемой ошибки и ее величине можно получить тем же методом, что и в предыдущей главе. Пусть, как и раньше, u можно представить в виде ряда

$$u = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots, \quad (\text{III})$$

где Y_1, Y_2, \dots являются неизвестными формами нормальных колебаний для рассматриваемого вала при заданных граничных условиях. Тогда, подобно соотношениям (36) главы XIII, получим

$$\int_0^l B Y_n''^2 dx = \omega_n^2 \int_0^l m Y_n^2 dx = \omega_n^2 I_n. \quad (6)$$

«Сопряженные соотношения» в нашем случае запишутся так:

$$\int_0^l B Y_m'' Y_n'' dx = \int_0^l m Y_m Y_n dx = 0 \quad (7)$$

при ($m \neq n$), т. е., когда Y_m, Y_n представляют собой формы нормальных колебаний, удовлетворяющие уравнению (1) при *разных* значениях ω^2 , а именно ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right) &= \omega_m^2 m Y_m, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right) &= \omega_n^2 m Y_n \end{aligned} \right\} (\omega_m \neq \omega_n) \quad (\text{IV})$$

Для того чтобы вывести соотношения (6) и (7) мы

¹⁾ Следует заметить, что буква m попрежнему обозначает массу единицы длины вала, когда она стоит *сомножителем*, как, например, в правой части соотношения (7).

заметим, что

$$\begin{aligned} \omega_m^2 \int_0^l m Y_m Y_n dx &= \int_0^l Y_n \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \right) dx = \\ &= \left[Y_n \frac{d}{dx} (B Y_m'') - Y_n' B Y_m'' \right]_0^l + \int_0^l B Y_m'' Y_n'' dx = \quad (V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[Y_n \frac{d}{dx} (B Y_m'') - Y_m' \frac{d}{dx} (B Y_n'') - \right. \\ &\left. - B (Y_n' Y_m'' - Y_m' Y_n'') \right]_0^l + \int_0^l Y_m \frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right) dx. \quad (VI) \end{aligned}$$

В выражениях (V) и (VI) обе величины, заключенные в квадратные скобки, обращаются в нуль, если концы вала закреплены так, что силы реакции в опорах не влияют на упругую энергию (ср. § 503). Из выражения (V), отождествив Y_m с Y_n , мы получим соотношение (6), а из выражения (VI), воспользовавшись вторым из уравнений (IV), имеем

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^l m Y_m Y_n dx = 0. \quad (VII)$$

Следовательно (ср. § 482 главы XIII), мы можем преобразовать равенство (5) так, чтобы оно имело следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 A_1^2 I_1 + \omega_2^2 A_2^2 I_2 + \omega_3^2 A_3^2 I_3 + \dots}{A_1^2 I_1 + A_2^2 I_2 + A_3^2 I_3 + \dots}. \quad (8)$$

А это показывает, что $\omega^2 \geq \omega_1^2$ и что относительная ошибка будет величиной второго порядка малости, если A_2, A_3, \dots будут величинами первого порядка малости по отношению к A_1 . Следовательно, выражение (8) можно использовать для оценки ω_1^2 , когда для u принята некоторая подходящим образом выбранная форма. Мы видим, что наше доказательство, так же, как и в § 486 главы XIII, пройдет только тогда, когда допускаемая для u форма удовлетворяет *всем* граничным условиям,

Приближенная формула, полученная методом Рэлея

505. Если оба конца вала шарнирно закреплены, то простейшей допускаемой для y формой будет:

$$y = A_1 \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (9)$$

Подставив ее в равенство (5), мы для оценки ω_1^2 получим формулу:

$$\omega_1^2 \cong \frac{\frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l B \left(1 - \cos 2 \frac{\pi}{l} x \right) dx}{\int_0^l m \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{l} x \right) dx} \quad (10)$$

(ср. уравнение (40) главы XIII).

К этой формуле удобно применять графические или численные методы интегрирования. Заметим, что она будет точной при B и m постоянных. Что касается других случаев, то мы не можем предполагать, что она даст достаточно хорошие результаты, потому что принятая форма для y не учитывает изменения B и m по длине вала. Рассмотрим способы, с помощью которых это можно учесть.

506. В правую часть уравнения (1) вместо $\omega^2 y$ можно подставить $A \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right)$, где A произвольно. Получим уравнение:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = Am \sin \pi \frac{x}{l}. \quad (11)$$

Его решение удовлетворяет соотношению

$$\int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^l Am y \sin \pi \frac{x}{l} dx,$$

так что выражение (5) можно записать в такой форме:

$$\omega_1^2 \cong \frac{\int_0^l A m y \sin \pi \frac{x}{l} dx}{\int_0^l m y^2 dx}, \quad (12)$$

где y является решением уравнения (11), удовлетворяющим граничным условиям задачи. Прогиб, согласно уравнению (11), пропорционален A , следовательно A никак не повлияет на оценку ω^2 и поэтому ее сразу же можно опустить в соотношениях (11) и (12).

507. Обычно получают хорошее приближение для ω_1^2 , когда берут для y ту форму прогиба, которую принимает ось *невращающегося вала под действием его собственного веса*.

Эта форма прогиба удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = mg, \quad (13)$$

отсюда, умножив обе части на y и проинтегрировав, получаем:

$$\begin{aligned} \left[y \frac{d}{dx} \left(B \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \frac{dy}{dx} B \frac{d^2 y}{dx^2} \right]_0^l + \int_0^l B \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx = \\ = g \int_0^l m y dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Если граничные условия такие же, как в § 503, то величина в квадратной скобке равна нулю. Воспользовавшись соотношением (14), мы из равенства (5) будем иметь:

$$\omega_1^2 \cong \frac{g \int_0^l m y dx}{\int_0^l m y^2 dx}, \quad (15)$$

где y удовлетворяет уравнению (13) и граничным условиям задачи.

Применив этот метод к шарнирно закрепленному валу с постоянными B и m , мы получим уравнение (13) в таком виде:

$$\begin{aligned} By'' &= \frac{1}{2} mg(x^2 - lx), \\ By &= \frac{1}{24} mg(x^4 - 2lx^3 + l^3x). \end{aligned} \quad (I)$$

Формула (15) сведется к

$$\omega_1^2 \cong \frac{g \int_0^l y \, dx}{\int_0^l y^2 \, dx}.$$

Подставив (1), имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &\cong \frac{24B}{m} \times \frac{l^5}{5} = \frac{24 \times 126}{31l^6} \frac{B}{ml^4} = 97,55 \frac{B}{ml^4}; \\ \omega_1 &\cong 9,8768 \sqrt{\frac{B}{ml^4}}. \end{aligned}$$

Точная формула (2) дает

$$\omega_1^2 = \pi^4 \frac{B}{ml^4}; \quad \omega_1 = 9,8696 \sqrt{\frac{B}{ml^4}}.$$

Таким образом мы видим, что наша оценка для ω_1 имеет коэффициент на 0,0072 превышающий точный коэффициент π^2 , т. е. мы имеем ошибку 0,073%.

Примеры

1. Проверить, что метод § 506 дает правильный результат при B и m постоянных.

2. Методом § 507 оценить наименьшую критическую скорость вала длины l , постоянного поперечного сечения (B и m постоянны), когда (а) оба конца вала заделаны, (б) один конец заделан, а другой свободен.

Сравнить результаты с результатами точных вычислений (гл. VI, §§ 215—218) и в каждом отдельном случае найти в процентах получающуюся при оценке ω_1 ошибку.

[+0,35% в случае (а), +0,37% в случае (б).]

3. Методом § 507 оценить наименьшую критическую угловую скорость вала, один конец которого ($x=0$) заделан, а второй ($x=l$) свободен. Масса и жесткость при изгибе вала изменяются соответственно по следующим законам

$$m = m_0 \left(\frac{l}{x} \right)^3, \quad B = B_0 \left(\frac{l}{x} \right)^6.$$

$$\left[\omega_1 \cong 48 \sqrt{\frac{B_0}{m_0 l^4}} \right]$$

4. Проверить формулу

$$\omega^2 \cong \frac{g (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \dots + M_n y_n)}{M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \dots + M_n y_n^2},$$

которую применяют для оценки наименьшей критической скорости вала, концы которого опираются любым образом и который несет сосредоточенные в n точках его длины массы M_1, M_2, \dots, M_n . В этой формуле y_1, y_2, \dots, y_n являются значениями статических прогибов в точках оси вала, нагруженных сосредоточенными массами под действием веса последних.

5. Массой и весом вала в сравнении с массами M_1, M_2, \dots, M_n в приведенной выше формуле пренебрегают. Как следует изменить формулу, чтобы учесть их?

Применение метода Рэлея к свободным колебаниям упругой системы

508. В § 502 мы видели, что поперечные прогибы данного вала определяются одним и тем же уравнением как в том случае, когда он вращается при «критической скорости», так и в том случае, когда он совершает свободные колебания нормальной формы. Следовательно, выводы §§ 503—507 без существенных изменений можно применить к задачам колебаний. При нормальных колебаниях (§ 212) каждая точка вала совершает простое гармоническое колебание с постоянными периодом и фазой, т. е.

$$y = Y_n \sin (p_n t - \epsilon_n), \quad (16)$$

где p_n и ϵ_n — постоянные, а Y_n зависит только от x . Y_n определяет n -ую «форму нормального колебания» и подчиняется тем же граничным условиям на концах, что и y . Y_n представляет собой действительный прогиб вала, когда

вал находится в одном из крайних положений колебания. Уравнение, соответствующее (5), а именно:

$$p^2 = \frac{\int_0^l B \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m Y^2 dx}, \quad (17)$$

показывает, что p^2 можно вычислить с помощью формы прогиба в крайнем положении.

Подставив в (17) Y_n вместо Y , мы получим соответствующие «собственные частоты» p_n . «Сопряженные соотношения» (7) имеют место для любых двух форм нормальных колебаний. Следовательно, как и раньше, можно показать, что из (17) можно получить оценку для p_1^2 (p_1 определяется как самая «низкая»¹⁾ или основная собственная частота), которая для каждого конкретного случая превышает истинное значение p_1^2 и будет достаточно близка к нему, когда некоторая форма u , подставляемая в (17), выбрана подходящим образом²⁾. Таким образом метод Рэлея можно применять для оценки основной частоты свободных колебаний. Задачи такого рода часто решаются этим методом³⁾.

Энергетические соображения

509. Уравнение (17) можно интерпретировать с точки зрения уравнения энергии. При любом свободном колебании должно осуществляться следующее энергетическое условие:

$$(\text{полная кинетическая энергия}) + (\text{полная потенциальная энергия}) = \text{const. (не зависит от } t). \quad (18)$$

¹⁾ Т. е. наименьшая. Термин взят из акустики.

²⁾ Ср. замечания в конце § 490.

³⁾ По существу содержание этой и предшествующей глав основано на фундаментальном труде Рэлея «Теория звука», впервые опубликованном в Лондоне в 1877—1878 гг. Второе издание (значительно расширенное) вышло в 1894—1896 гг. Ср. § 542 А, стр. 656.

В нашей задаче, когда u дается выражением (16), получаем (индекс n опущен), что:

$$\begin{aligned} \text{полная кинетическая энергия} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m \left\{ pY \cos (pt - \varepsilon) \right\}^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} p^2 \left\{ 1 - \sin^2 (pt - \varepsilon) \right\} \int_0^l m Y^2 dx, \end{aligned} \quad (I)$$

полная потенциальная энергия (энергия упругой деформации) =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^l B \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l B \left\{ \frac{d^2 Y}{dx^2} \sin (pt - \varepsilon) \right\}^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 (pt - \varepsilon) \int_0^l B \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (II)$$

Подставив полученные выражения в условие (18), мы увидим, что величина

$$\sin^2 (pt - \varepsilon) \left\{ \int_0^l B \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right) dx - p^2 \int_0^l m Y^2 dx \right\}$$

не должна зависеть от t . Откуда следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, должно обращаться в нуль, т. е. мы получаем уравнение (17)¹⁾.

510. Аналогичные соображения применимы к любой задаче, относящейся к свободным колебаниям упругой системы. Рассматривая колебания только «нормальной» формы, мы принимаем, что изменение прогиба со временем в каждой точке характеризуется формулой (16), т. е. фаза и частота колебаний не меняются от точки к точке. Тогда полную упругую энергию можно выразить в виде некоторого интеграла,

¹⁾ Доказательство остается тем же и в том случае, когда действует постоянное поле сил (например, поле силы тяжести). При этом изменится только *среднее* положение колеблющихся частиц.

умноженного на $\sin^2(p_n t - \epsilon_n)$, а полную кинетическую энергию в виде другого интеграла, умноженного на $p_n^2 \cos^2(p_n t - \epsilon_n)$. Уравнение энергии (18), как и выше, дает возможность выразить p_n^2 с помощью отношения этих двух интегралов. Это отношение дает точное значение p_n^2 , когда в него подставлена истинная форма нормального колебания. Согласно методу Рэля это отношение дает хорошее приближение к наименьшей частоте p_1^2 , после подстановки во входящие в него интегралы формы прогиба, наиболее близкой к истинной форме нормального колебания основного тона, т. е. форме первого нормального колебания.

Свободные поперечные колебания упругой нити, подверженной действию растягивающих сил

511. Для иллюстрации метода Рэля рассмотрим очень простую задачу, а именно, задачу о свободных колебаниях нормальной формы абсолютно гибкой нити. Восстанавливающие силы возникают только от *натяжения* нити. Мы обозначим натяжение через T , массу единицы длины через m , а через y (малый) прогиб.

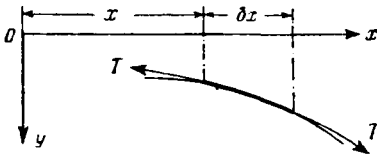


Рис. 119.

Из рис. 119 видно, что на элемент длины нити δx в сечении x в результате натяжения нити T действует поперечная сила величины $T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$ и направления yO . На другом конце элемента длины (т. е. в сечении $x + \delta x$) поперечная сила действует в противоположном направлении Oy . Разность этих сил действует по направлению Oy и с точностью до величины первого порядка малости относительно δx равна

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right).$$

Элемент получает в результате действия этой разности сил ускорение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

Масса элемента равна $m dx$. Таким образом, уравнение свободных колебаний записывается так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Если мы рассматриваем нормальные колебания, т. е.

$$y = Y_n \sin(p_n t - \varepsilon_n), \quad (16) \text{ bis}$$

то из уравнения (19) получим уравнение, определяющее Y_n , а именно:

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dY_n}{dx} \right) + m p_n^2 Y_n = 0. \quad (20)$$

512. Если T и m постоянны, то уравнение (20) можно записать следующим образом:

$$[D^2 + \alpha_n^2] Y_n = 0, \quad (21)$$

где

$$\alpha_n^2 = \frac{m p_n^2}{T}. \quad (22)$$

С уравнением такого типа мы уже встречались в главе VI, когда рассматривали стержни постоянной жесткости при изгибе. Решение уравнения (21), обращаемое в нуль, при $x = 0$ и $x = l$ имеет вид

$$Y_n = A_n \sin n\pi \frac{x}{l}. \quad (3) \text{ bis}$$

Для определения соответствующей частоты p_n из (22) имеем

$$\frac{m}{T} p_n^2 l^2 = \alpha_n^2 l^2 = n^2 \pi^2, \quad (23)$$

где n — целое число. Таким образом, собственные частоты колебаний нити будут

$$\nu = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{m}} \times (1, 2, 3, \dots). \quad (24)$$

513. Уравнение энергии (18) в этой задаче имеет место, и так же, как в § 509, полная кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} p_n^2 \left\{ 1 - \sin^2(p_n t - \epsilon_n) \right\} \int_0^l m Y_n^2 dx, \quad (I)$$

потому что для y мы имеем формулу (16).

Для того чтобы вычислить возрастание упругой энергии вследствие прогиба, мы можем поступить так же, как в § 481 главы XIII. Там мы рассматривали упругую энергию стержня, подверженного осевым сжимающим силам P , когда боковой прогиб не допускался, и показали, что количество запасенной при сжатии упругой энергии после того, как мы дадим оси стержня прогнуться, *уменьшится* на величину

$$\frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

В нашей задаче вместо сжимающей силы P действует сила растяжения T . Кроме того, мы можем допустить, что T меняется вдоль нити. Несмотря на это, доказательство, аналогичное доказательству § 481, покажет, что возникший прогиб вызовет *возрастание* упругой энергии растяжения на величину

$$\frac{1}{2} \int_0^l T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx,$$

которая, когда y определяется формулой (16), равна

$$\frac{1}{2} \sin^2(p_n t - \epsilon_n) \int_0^l T \left(\frac{dY_n}{dx} \right)^2 dx. \quad (II)$$

Подставив (I) и (II) в (18), мы, как и в § 509, получим

$$\int_0^l T \left(\frac{dY_n}{dx} \right)^2 dx - p_n^2 \int_0^l m Y_n^2 dx = 0.$$

Следовательно, частоты в нашей задаче определяются из следующего соотношения:

$$p_n^2 = \frac{\int_0^l T \left(\frac{dY_n}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l m Y_n^2 dx} . \quad (25)$$

Легко проверить, что при постоянных T и m соотношение (25) даст точный результат (23), если в него вместо Y_n подставить точное выражение (3).

Свободные поперечные колебания стержня, подверженного действию растягивающих сил¹⁾

514. Допустим, что стержень постоянного поперечного сечения, концы которого удерживаются некоторым специальным образом, подвергается действию растягивающих сил T . Как и раньше, в направлении Oy на стержень вследствие сил инерции будет действовать поперечная нагрузка интенсивности

$$\omega = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

только теперь она будет удерживаться частично жесткостью при изгибе, частично растяжением.

Из уравнений (1) и (19) легко видеть, что основное уравнение нашей задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \text{или} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = m p^2 y \end{aligned} \right\} \quad (27')$$

в случае нормальных колебаний, когда

$$y = Y \sin(pt - \epsilon). \quad (26)$$

¹⁾ Ср. Р э л е й, Теория звука, 1, §§ 188—190.

Из (27') мы получим уравнение для Y :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(B \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(T \frac{dY}{dx} \right) = m p^2 Y, \quad (27)$$

которое, при B , T и m постоянных (т. е. не зависящих от x), можно записать в следующей форме:

$$[D^4 - 2\alpha^2 D^2 - \beta^4] Y = 0, \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha^2 &= \frac{T}{B}, \\ \beta^4 &= \frac{m p^2}{B}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

515. Уравнение (28) удовлетворяется решением уравнения

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - 4\gamma^2] Y &= 0 \\ \text{или решением уравнения} \\ [D^2 + 4\delta^2] Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 4\gamma^2 &= \alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + \beta^4}, \\ -4\delta^2 &= \alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + \beta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Из (31) видно, что γ^2 и δ^2 действительны и положительны. Общее решение уравнения (28) имеет вид:

$$Y = A \operatorname{ch} 2\gamma x + C \operatorname{sh} 2\gamma x + F \cos 2\delta x + G \sin 2\delta x, \quad (32)$$

где A , C , F , G — произвольные постоянные.

Взяв начало координат в среднем сечении стержня, получим:

(a) если оба конца стержня неподвижны

$$(Y = 0 \text{ при } x = \pm \frac{1}{2} l)$$

$$A \operatorname{ch} \gamma l + F \cos \delta l = 0, \quad C \operatorname{sh} \gamma l + G \sin \delta l = 0; \quad (I)$$

(b) если оба конца сохраняют направление

$$\left(\frac{dY}{dx} = 0 \text{ при } x = \pm \frac{1}{2} l \right)$$

$$\gamma A \operatorname{sh} \gamma l - \delta F \sin \delta l = 0, \quad \gamma C \operatorname{ch} \gamma l + \delta G \cos \delta l = 0; \quad (II)$$

(с) если в обоих концах помещены шарниры

$$\left(\frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \text{ при } x = \pm \frac{1}{2} l \right)$$

$$\gamma^3 A \operatorname{ch} \gamma l - \delta^3 F \cos \delta l = 0, \quad \gamma^3 C \operatorname{sh} \gamma l - \delta^3 G \sin \delta l = 0. \quad (\text{III})$$

516. Заметив, что $(\gamma^3 + \delta^3)$ не может обратиться в нуль, мы из (I) и (III) для стержня с шарнирно закрепленными концами имеем

$$A \operatorname{ch} \gamma l = F \cos \delta l = C \operatorname{sh} \gamma l = G \sin \delta l.$$

Следовательно, A и C должны обращаться в нуль, и мы получаем или

$$\left. \begin{aligned} G = 0, \quad \cos \delta l = 0 \\ F = 0, \quad \sin \delta l = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

Оба решения удовлетворяют уравнению $\sin 2\delta l = 0$.

Следовательно, воспользовавшись (31), получим

$$l^2 [\sqrt{\alpha^4 + \beta^4} - \alpha^2] = 4\delta^2 l^2 = \pi^2 \times (1^2, 2^2, 3^2, \dots), \quad (33)$$

где α^2, β^2 имеют значения (29). В предельном случае $\alpha = 0$ (33) даст ранее полученный результат ¹⁾.

517. Для стержня, оба конца которого заделаны, мы из (I) и (II) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A \operatorname{ch} \gamma l + F \cos \delta l = 0, \\ \gamma A \operatorname{sh} \gamma l - \delta F \sin \delta l = 0, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} C \operatorname{sh} \gamma l + G \sin \delta l = 0, \\ \gamma C \operatorname{ch} \gamma l + \delta G \cos \delta l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

откуда, или

$$C = G = 0 \text{ вместе с } \gamma \operatorname{sh} \gamma l \cos \delta l + \delta \operatorname{ch} \gamma l \sin \delta l = 0, \quad (\text{VI})$$

$$\text{или } A = F = 0 \text{ вместе с } \delta \operatorname{sh} \gamma l \cos \delta l - \gamma \operatorname{ch} \gamma l \sin \delta l = 0. \quad (\text{VII})$$

Все возможные решения можно объединить в условии:

$$4(\gamma \operatorname{sh} \gamma l \cos \delta l + \delta \operatorname{ch} \gamma l \sin \delta l)(\gamma \operatorname{ch} \gamma l \sin \delta l - \delta \operatorname{sh} \gamma l \cos \delta l) = 0,$$

которое можно упростить и записать так:

$$(\gamma^2 - \delta^2) \operatorname{sh} 2\gamma l \sin 2\delta l + 2\gamma\delta(1 - \operatorname{ch} 2\gamma l \cos 2\delta l) = 0.$$

¹⁾ Ср. формулу (37) главы VI.

Или, если мы подставим (31)

$$\frac{\operatorname{sh} 2\gamma l \sin 2\delta l}{1 - \operatorname{ch} 2\gamma l \cos 2\delta l} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0. \quad (34)$$

Из (29) найдем, что

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 2p \sqrt{\frac{Bm}{T}}. \quad (35)$$

Если T отрицательно, т. е. мы имеем дело с силой сжатия, то α^2 отрицательно, но предыдущее исследование все же применимо.

Примеры

6. (Самб. М. С. Т. 1934.) Прямой стальной вал круглого поперечного сечения вращается с угловой скоростью ω . Концы вала помещены в подшипники, которые не оказывают сопротивления изменению направления вала. Длина вала l , масса единицы длины m , а момент инерции площади поперечного сечения около диаметра I . Пусть на вал действует осевая сила сжатия P , приложенная к его концам. Показать, что если вал слегка деформируется под совместным действием продольных и центробежных сил, то форма его изогнутой оси определяется уравнением:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} - m\omega^2 y = 0.$$

Показать, что вал будет вращаться с критической скоростью, когда

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{2EI} \left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4EI m \omega^2}{P^2} \right)} \right].$$

7. (Самб. М. С. Т. 1930.) На стержень постоянного поперечного сечения длины l действует осевая сила сжатия P . Масса единицы длины стержня m . Стержень начинает колебаться в направлении одной из главных осей своего поперечного сечения.

Для стержня с шарнирно закрепленными концами показать, что основная частота его колебаний $\left(n = \frac{p}{2\tau} \right)$ равна:

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{\pi^2}{l^2} EI - P \right)}.$$

Для стержня с жестко заделанными концами показать, что его основную частоту можно определить из уравнения

$$\alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 l + \alpha_2 \operatorname{th} \frac{1}{2} \alpha_2 l = 0,$$

где

$$\alpha_1^2 = \frac{\sqrt{P^2 + 16\pi^2 n^2 mEI} + P}{2EI},$$

а

$$\alpha_2^2 = \frac{\sqrt{P^2 + 16\pi^2 n^2 mEI} - P}{2EI}.$$

Обобщение метода Рэлея

518. Соотношение (33) для стержня с шарнирно закрепленными концами после подстановки в него mp^2 , B и T будет иметь простой вид. Однако соответствующее ему в случае заделанных концов соотношение (34) будет весьма сложным, несмотря на то, что оно также относится к наиболее простому случаю равномерно распределенной массы, постоянной силы растяжения и постоянной жесткости при изгибе. Очевидно, что нужна более простая теория. Она особенно необходима в тех задачах, где, как и в этом примере, восстанавливающие силы принадлежат двум различным группам.

К счастью, на такие задачи распространяется метод Рэлея. С помощью энергетических соображений (см. § 509) мы всегда можем составить для p^2 выражение типа (17). Числитель этого выражения будет представлять собой интеграл, выражающий потенциальную энергию деформации, а знаменатель — интеграл, выражающий кинетическую энергию. Таким образом, для только что рассмотренной задачи, независимо от того, постоянны или переменны B , T , m , мы, умножив уравнение (27) на Y и проинтегрировав, получим:

$$p^2 = \frac{\int_0^l B \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)^2 dx + \int_0^l T \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l m Y^2 dx}. \quad (36)$$

Доказательство, аналогичное прежним, показывает, что из этого выражения, подставив в него подходящим образом

выбранную форму колебаний, можно получить или точное значение основной частоты p_1^2 , или ее оценку, превышающую точное значение.

519. Кроме того, в задачах подобного рода можно пойти дальше и получить для величины p_1^2 как *верхний, так и нижний пределы*. Истинное распределение Y в общем случае определяется двумя факторами: влиянием жесткости при изгибе и растяжением. Если учесть только жесткость при изгибе и обозначить в этом случае форму Y через Y_B , то основная частота $(p_1)_B$ определится следующим соотношением:

$$(p_1)_B^2 = \frac{\int_0^l B Y_B''^2 dx}{\int_0^l m Y_B^2 dx}. \quad (37)$$

Если учесть только растяжение, то Y , вообще говоря, будет иметь другую форму Y_T , и основная частота $(p_1)_T$ определится соотношением

$$(p_1)_T^2 = \frac{\int_0^l T Y_T'^2 dx}{\int_0^l m Y_T^2 dx}. \quad (38)$$

По методу Рэля мы получим для $(p_1)_B^2$ оценку, превышающую истинную частоту, если в (37) подставим некоторую, отличающуюся от точной форму Y_B и для $(p_1)_T^2$, оценку, превышающую истинную частоту, если в (38) подставим некоторую отличающуюся от точной форму Y_T . Поэтому, если Y представляет собой *истинную форму* для того случая, в котором действуют оба типа восстанавливающих сил, то мы имеем два неравенства:

$$\frac{\int_0^l BY''^2 dx}{\int_0^l mY'^2 dx} \geq (p_1)_B^2, \quad \frac{\int_0^l TY''^2 dx}{\int_0^l mY'^2 dx} \geq (p_1)_T^2, \quad (39)$$

из которых на основании (36) имеем

$$p_1^2 \geq (p_1)_B^2 + (p_1)_T^2. \quad (40)$$

520. Аналогичное неравенство имеет место во всякой другой задаче подобного рода ¹⁾. Этот результат очень важен, потому что нам часто приходится иметь дело с основным уравнением, в котором мы пренебрегли той или другой из систем восстанавливающих сил. Так, выше мы видели, что уравнение (27), вообще говоря, дает очень сложные соотношения и вместе с тем оно просто интегрируется, когда или B или m равны нулю. Если мы сможем решить упрощенные уравнения, то мы сможем получить значения для обоих членов правой части неравенства (40), т. е. сможем определить нижний предел для величины p_1^2 . Ее верхний предел можно найти обычным путем (ср. § 518). Таким образом мы получаем все необходимые нам сведения.

Например, в главе VI мы рассмотрели поперечные колебания в стержне с постоянным поперечным сечением, оба конца которого заделаны, и получили равенства (39) и (41). Основная частота колебаний определялась из соотношения

$$2\lambda = 4,73,$$

в котором

$$(2\lambda)^4 = \alpha^4 l^4 = \frac{l^4 p^2 m}{B}.$$

Таким образом мы имеем

$$(p_1)_B^2 = (4,73)^4 \frac{B}{ml^4}. \quad (I)$$

¹⁾ Теорема § 519, повидимому, впервые опубликована в статье, написанной совместно с Г. Лэмбом, «On the Vibrations of a Spinning Disk», *Proc. R. S. (A)*, 99 (1921), 272—280.

В § 512 этой главы мы рассмотрели случай, в котором B было равно нулю, а T и m постоянны. Равенство (24) показывает, что

$$(p_1)_T^2 = \frac{\pi^2 T}{ml^2}. \quad (\text{II})$$

Теперь рассмотрим задачу о стержне постоянного поперечного сечения с двумя заделанными концами и подверженного действию силы растяжения T .

Согласно неравенству (40), в силу (I) и (II) имеем:

$$p_1^2 \geq (4,73)^4 \frac{B}{ml^4} + \frac{\pi^2 T}{ml^2}. \quad (41)$$

Кроме того, если мы примем, что

$$Y = x^4 - 2lx^3 + l^2x^2, \quad (\text{III})$$

и подставим эту форму в (36), то для частоты p_1^2 получим оценку, *превышающую* ее истинное значение.

Оценив интегралы, мы получим:

$$p_1^2 \leq 504 \frac{B}{ml^4} + 12 \frac{T}{ml^2}. \quad (42)$$

Подсчитаем числовые коэффициенты неравенства (41):

$$4,73^4 = 500,6; \quad \pi^2 = 9,870.$$

Итак, мы видим, что неравенства (41) и (42) дают для p_1 достаточно узкие, с практической точки зрения, пределы.

Пример

8. Тем же способом показать, что в задаче, помещенной в § 517, получено точное выражение ω_1^2 . Объяснить это.

Поперечные колебания тяжелой вращающейся нити или стержня (лопасть воздушного винта)

521. Проиллюстрируем метод, предложенный в § 520, на другом примере, взятом из практики: на задаче определения изгибных колебаний лопастей воздушных винтов. Предположим, что стержень постоянного поперечного сечения длины l вращается в некоторой плоскости с постоянной угло-

вой скоростью около одного из своих концов. Попробуем определить основную частоту свободных поперечных колебаний, происходящих в направлении, перпендикулярном плоскости вращения.

Силу растяжения T легко вычислить. На самом деле, если стержень вращается с угловой скоростью Ω , а m — масса единицы длины, не меняющаяся по длине стержня, то уравнение движения элемента длины стержня δx , расположенного на расстоянии x от центра вращения, будет:

$$-\delta x \frac{\partial T}{\partial x} = \Omega^2 x m \delta x.$$

Откуда, если на другом конце стержня T равняется нулю, имеем:

$$T = \frac{1}{2} m \Omega^2 (l^2 - x^2). \quad (43)$$

522. Подставив (43) в точное уравнение (20), мы для гибкой нити ¹⁾ получаем:

$$\frac{1}{2} \Omega^2 \frac{d}{dx} \left\{ (l^2 - x^2) \frac{dY_n}{dx} \right\} + p_n^2 Y_n = 0, \quad (44)$$

или

$$\frac{d}{dz} \left\{ (1 - z^2) \frac{dY_n}{dz} \right\} + k^2 Y_n = 0,$$

где через z обозначено $\frac{x}{l}$, а

$$k^2 = \frac{2p_n^2}{\Omega^2}. \quad (45)$$

Решения уравнения (44), т. е. значения Y_n , можно получить в виде рядов по возрастающим степеням z . Отрицательных степеней z в этих рядах быть не может, так как функции Y_n должны быть конечными при $z = 0$. Свободные члены этих рядов так же, как коэффициенты при z в первой степени, могут иметь любые значения.

¹⁾ Решение задачи этого параграфа взято из *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 486 (1918).

В нашей задаче функции Y_n должны обращаться в нуль, при $z=0$, поэтому интересующие нас решения уравнения (44) имеют вид

$$Y_n = A_n \left[z + \left(1 - \frac{k^2}{1 \cdot 2} \right) \frac{z^3}{3} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{k^2}{1 \cdot 2} \right) \left(1 - \frac{k^2}{3 \cdot 4} \right) \frac{z^5}{5} + \dots \right]. \quad (46)$$

Можно показать, что этот ряд, если он не обрывается на конечном числе членов, при $z \rightarrow 1$ (т. е. при $x \rightarrow l$) расходится. Следовательно, для того чтобы функции Y_n могли быть конечными во всех точках нити, мы должны иметь

$$k^2 = n(n+1), \quad (47)$$

где n целое ¹⁾.

Мы получим основную форму колебаний, если возьмем $n=1$, т. е. $k^2=2$ или

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= \Omega^2, \\ Y_1 &= A_1 z. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Отсюда видно, что форма основного колебания нити может рассматриваться как вращение прямой нити около того же начала, но в другой плоскости, наклоненной к первой. При этом нить не искривляется и поэтому оба соотношения (48) будут определять основное колебание при любом распределении масс, а следовательно, и силы растяжения, по длине нити.

523. Вернемся теперь к стержню постоянного поперечного сечения § 521 и предположим, что он заделан на конце так, что и прогиб и угол наклона при $r=0$ должны обращаться в нуль. В таком случае основная частота, если стержень не вращается, определяется точно равенствами (40) и (42) главы VI, т. е. выражениями

$$p_1^2 = (1,875)^4 \frac{B}{m l^4} = 12,36 \frac{B}{m l^4}. \quad (49)$$

¹⁾ Если k^2 определяется равенством (47), то уравнение (44) представляет собой уравнение Лежандра, определяющее полиномы Лежандра степени n . Нужно заметить, что для определения частот в нашей задаче мы используем несколько необычное условие.

Кроме того, как установлено в конце предыдущего параграфа, не учитывая жесткость при изгибе, мы получим, что p_1^2 равно Ω^2). Таким образом неравенство (40) § 519 для нашей задачи записывается так:

$$p_1^2 \geq 12,36 \frac{B}{ml^4} + \Omega^2 \quad (50)$$

и дает нижний предел для p_1^2 . Для того чтобы получить верхний предел, мы подставим в соотношение (36) § 518, в котором T определяется формулой (43), кривую статического прогиба для консоли, а именно:

$$Y = A(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2).$$

Получим следующее:

$$p_1^2 \leq \frac{162}{13} \frac{B}{ml^4} + \frac{61}{52} \Omega^2 = 12,46 \frac{B}{ml^4} + 1,173\Omega^2. \quad (51)$$

Взяв среднее между оценками ²⁾ (50) и (51), имеем

$$p_1^2 \cong 12,41 \frac{B}{ml^4} + 1,09\Omega^2. \quad (52)$$

Пределы возможной ошибки в оценке для p_1^2 будут равны примерно $0,4\%$ в члене, зависящем от жесткости при изгибе, и примерно 8% в члене, зависящем от вращения (который практически много меньше, чем первый). Точность этой оценки частоты достаточна для практических целей.

Дальнейшее обобщение метода Рэлея

524. В § 519 мы видели, что можно найти верхний и нижний пределы для основной частоты p_1^2 в том случае, когда *восстанавливающие силы* можно разбить на две системы сил

¹⁾ Заделка для *гибкой* нити не дает дополнительной связи.

²⁾ Этот метод был предложен в статье «On the Free Transverse Vibrations of Airscrew Blades», написанной в сотрудничестве с B. S. Gough и опубликованной в *Aeronautical Research Committee, R. and M.*, 766 (1921). В статье проведено сравнение с некоторыми точными вычислениями А. Вергу, Н. А. Вебб и Л. М. Свайн и было найдено, что ошибки для p_1 обычно не превышают 1% .

таким образом, что для каждой из этих систем, действующих по отдельности, основное уравнение разрешимо.

Теперь мы покажем, что верхний и нижний пределы для p_1^2 можно найти также тогда, когда подобное разделение возможно провести для масс.

Доказательство совершенно аналогично предыдущему. Для всех случаев уравнение частот имеет форму (17), т. е. выражение для p_1^2 имеет вид

$$p_1^2 = \frac{I_V}{I_M} \quad (53)$$

где I_V — интеграл, выражающий упругую энергию системы, а I_M — интеграл, зависящий от ее масс.

Это выражение дает точное значение для p_1^2 , когда в него подставлена точная форма прогиба.

Если массы можно разделить на две системы A и B , то мы можем написать, что

$$I_M = (I_M)_A + (I_M)_B,$$

и, согласно (53), мы получим

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{(I_M)_A}{I_V} + \frac{(I_M)_B}{I_V}. \quad (54)$$

Если через $(p_1)_A$ и $(p_1)_B$ обозначить основные частоты соответственно для системы A и для системы B , которые, по предположению, можно вычислить, то, согласно методу Рэлея, мы имеем

$$\frac{I_V}{(I_M)_A} \geq (p_1)_A^2, \quad \frac{I_V}{(I_M)_B} \geq (p_1)_B^2. \quad (55)$$

Поэтому равенство (54) можно написать в следующей форме:

$$\frac{1}{p_1^2} \leq \frac{1}{(p_1)_A^2} + \frac{1}{(p_1)_B^2}. \quad (56)$$

Это неравенство соответствует неравенству (40) § 519. Оно определяет верхний предел p_1^{-2} , т. е. нижний предел p_1^2 . Верхний предел p_1^2 , как и раньше, можно получить, под-

ставив в общее выражение (53) некоторую подходящим образом выбранную форму прогиба. Итак, опять могут быть найдены оба предела.

Стержень постоянного поперечного сечения, нагруженный посредине сосредоточенной массой

525. Как пример на второе обобщение метода Рэля рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, шарнирно закрепленный на концах и нагруженный сосредоточенной массой M посредине.

Условия задачи изображены на рис. 120, где масса M распределена по короткой, но конечной, а не бесконечно малой длине стержня. Если поперечный прогиб y как раньше определяется формулой (16), то равенство (17) для нашей задачи имеет вид:

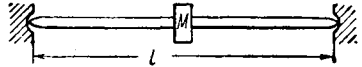


Рис. 120.

$$p^2 = \frac{\int_0^l BY'^2 dx}{\int_0^l mY^2 dx + MY_C^2}, \tag{57}$$

где через m обозначена масса единицы длины стержня, а через Y_C значение Y в среднем сечении, т. е. там, где приложена масса M . Массу стержня отнесем к системе A (см. § 524), а добавочную массу M — к системе B . После чего формула (2) § 502 даст

$$(p_1^2)_A = \frac{\pi^4 B}{l^4 m}. \tag{58A}$$

Совершенно ясно, что если мы пренебрежем массой стержня m , то кривая прогиба под действием массы M будет такой же, как кривая прогиба под действием сосредоточенной силы, т. е. она будет иметь форму, показанную под № 3

в таблице стандартных случаев прогибов балок на стр. 249. Таким образом мы сможем найти $(p_1^3)_B$ из равенства (57), если примем, что

$$Y = Ax(3l^2 - 4x^2) \text{ при } (0 < x < \frac{1}{2}l),$$

откуда

$$Y_C = Al^3,$$

$$Y'' = -24Ax.$$

Положив m равным нулю в формуле (57), получим

$$(p_1^3)_B = 48 \frac{B}{Ml^3}. \quad (58\text{в})$$

Воспользовавшись неравенством (56), имеем:

$$\frac{1}{p_1^3} \leq \frac{l^3}{B} \left(\frac{ml}{\pi^4} + \frac{M}{48} \right). \quad (59)$$

С другой стороны, мы получим завышенное значение для p_1^3 , если примем, что форма прогиба оси стержня при добавлении массы M вообще не меняется. Допустив это, подставим в равенство (57) следующую форму прогиба:

$$Y = A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Получим оценку

$$\frac{1}{p_1^3} \cong \frac{mA^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + MA^2}{\frac{\pi^4}{l^4} BA^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \frac{l^3}{B} \left(\frac{ml}{\pi^4} + \frac{2M}{\pi^4} \right),$$

$$\text{т. е.} \quad \frac{1}{p_1^3} \geq \frac{l^3}{B} \left(\frac{ml}{\pi^4} + \frac{M}{48,70} \right). \quad (60)$$

Сравнивая (59) с (60), мы видим, что p_1^3 заключено между двумя очень близкими пределами. Даже при m , равном нулю, т. е. при самых широких предположениях, используя

выражение (60), мы получим ошибку только в $1,5\%$ для p_1^2 , т. е. меньше, чем 1% для самой частоты.

Пример

9. Получить верхний и нижний пределы для p_1^2 в том случае, когда оба конца стержня (рис. 120) заделаны.

«Метод переменного параметра»¹⁾

526. В § 523 мы получили приближение (51), взяв для у форму кривой статического прогиба консоли постоянного поперечного сечения под равномерно распределенной нагрузкой. Мы также можем использовать кривую статического прогиба для сосредоточенной силы, приложенной на расстоянии a от заделанного конца. Тогда, так как любая полученная таким образом оценка будет обязательно превышать истинную величину, мы можем выбрать a так, чтобы получающееся при этом выражение для p_1^2 имело минимальное значение.

Такой способ можно назвать «методом переменного параметра». Этот метод имеет общее применение. Им, повидимому, начали пользоваться после того, как Рэлей применил его к той задаче, которую мы сейчас рассмотрим²⁾. Мы не будем ограничивать полностью принимаемую нами форму прогиба и включим в нее одну или большее число произвольных постоянных, которые затем подберем так, чтобы получившееся значение для p_1^2 было минимальным, т. е. чтобы оценка была как можно ближе к истинному значению.

527. Кривая прогиба консоли постоянного поперечного сечения длины a , заделанной на одном конце и нагруженной сосредоточенной силой на другом, определяется уравнением³⁾

$$Y = A(3ax^2 - x^3), \quad (61)$$

где A — постоянная. Угол наклона и прогиб в сечении ($x = a$) будут

$$i = 3a^2A, \quad \delta = 2a^3A. \quad (I)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 660.

²⁾ Теория звука, 1, § 182.

³⁾ См. № 1 Таблицы стандартных случаев прогибов балок, стр. 249.

Следовательно, кривая прогиба в интервале $0 < x < l$ для консоли длины l , нагруженной сосредоточенной силой в сечении ($x = a$), имеет вид

$$Y = A \{ 2a^3 + 3a^2(x - a) \} = Aa^3(3x - a), \quad (62)$$

где A — прежняя постоянная.

Вычислим интегралы, входящие в формулу (17), с помощью которой мы обычно получаем оценку для p_1^2 . В силу того, что Y'' обращается в нуль при $x > a$, мы имеем

$$\int_0^l B \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx = B \int_0^a 36A^2(a - x)^2 dx = 12A^2Ba^3, \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \text{и } \int_0^l mY^2 dx &= mA^2 \left[\int_0^a (9a^2x^4 - 6ax^5 + x^6) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^l a^4(9x^2 - 6ax + a^2) dx = \right. \\ &= mA^2 \left[\frac{33}{35}a^7 + a^4 \{ 3l^3 - 3al^2 + a^2l - a^3 \} \right]. \quad (III) \end{aligned}$$

Для оценки получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} p_1^2 &\cong \frac{12B}{ma} \frac{1}{3l^3 - 3al^2 + a^2l - \frac{2}{35}a^3} = \\ &= \frac{12B}{ml^4} \frac{1}{3\rho - 3\rho^2 + \rho^3 - \frac{2}{35}\rho^4}, \quad (63) \end{aligned}$$

где через ρ обозначено отношение $\frac{a}{l}$.

528. Нам нужно в интервале $0 < \rho < 1$ найти минимальное значение выражения (63), т. е. максимальное значение величины

$$Q = 3\rho - 3\rho^2 + \rho^3 - \frac{2}{35}\rho^4.$$

Примерные вычисления дают следующие приближенные значения:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \\ Q &= 0, \frac{9}{16}, \frac{7}{8}, \frac{31}{32}, \frac{33}{35}. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Отсюда мы получим, что максимальное значение Q соответствует значению ρ , приближенно равному 0,75, что дает

$$Q_{\max} = \frac{31}{32}.$$

Подставив это значение в знаменатель выражения (63), мы, наконец, получим оценку

$$p^2 \cong \frac{32}{31} \times 12 \frac{B}{ml^4} = 12,39 \frac{B}{ml^4}, \quad (64)$$

которая, по сравнению с точной формулой (49), дает ошибку приблизительно только в 0,25%.

Колебания круглой пластинки

529. Применим наш метод еще к одной задаче, а именно к задаче, рассмотренной в §§ 243—244 главы VII. Там мы определяли основные частоты свободных колебаний круглой пластинки, заделанной по краям, предполагая, что форма колебания имеет не зависящий от θ прогиб¹⁾.

Согласно обозначениям главы VII мы примем, что прогиб пластинки определяется формулой

$$w = W \sin(pt - \epsilon), \quad (65)$$

где W представляет собой функцию, зависящую только от r , ограниченную в центре пластинки ($r=0$) и удовлетворяющую граничному условию

$$W = \frac{dW}{dr} = 0, \quad \text{при } r = a. \quad (66)$$

¹⁾ *A priori* мы не можем исключить возможности того, что более низким частотам соответствуют такие формы колебаний, в которых прогиб является функцией как r , так и θ . Из исследований Кирхгофа (1850) видно, что самая низкая нормальная форма свободной круглой пластинки имеет два узловых диаметра и ни одной узловой окружности (Ср. Н. L a m b, Dynamical Theory of Sound, § 56).

Основным уравнением является уравнение (41) главы VII, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W &= k^4 W, \\ k^4 &= \frac{2\rho h p^2}{D} \\ \text{и} \\ \nabla^2 &\equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

потому что форма колебаний не зависит от θ . Умножим это уравнение на Wr и проинтегрируем по r от 0 до a^1 . В силу краевого условия (66) после интегрирования по частям получим

$$\int_0^a r (\nabla^2 W)^2 dr = k^4 \int_0^a r W^2 dr. \quad (68)$$

Согласно методу Рэлея, мы получим для k^2 или точное, или несколько завышенное значение, если подставим в (68) какую-нибудь форму прогиба W .

530. Прогиб круглой пластинки с заделанными краями под действием постоянной поперечной нагрузки был исследован в § 241 главы VII. Форму прогиба (35), полученную в этом параграфе, примем для нашей оценки, т. е. положим, что

$$\left. \begin{aligned} W &= A(a^2 - r^2)^2, \\ \text{где } A &\text{ — произвольная постоянная.} \\ \text{Отсюда} \quad \nabla^2 W &= -8A(a^2 - 2r^2). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Подставив в (68), получим

$$(ka)^4 = \frac{320}{3} = (3,214)^4, \quad (70)$$

что дает хорошее совпадение с точным результатом ($ka = 3,20$), полученным в § 244 главы VII.

¹⁾ Это эквивалентно умножению на W и интегрированию по площади ($\delta A = 2\pi r \delta r$).

Общие замечания о «методе Рэлея»¹⁾

531. На примерах, рассмотренных в этой и предшествующей главах, достаточно ярко показаны ширина и сила «метода Рэлея» при применении его как к задачам колебаний, так и к задачам устойчивости упругих систем. По существу оба класса задач не отличаются друг от друга. Так, например, в §§ 514—517 силе растяжения T можно дать отрицательное значение, и тогда мы будем иметь дело со случаем поперечных колебаний стержня, подверженного действию силы сжатия на концах. Из уравнения (36) видно (в нем теперь T отрицательно), что, при возрастании силы сжатия, p^2 может переменить знак. Следовательно, период колебания окажется сначала бесконечным, а потом мнимым.

Метод Рэлея можно применить к любой задаче устойчивости упругих систем или свободных колебаний. Прием один и тот же как для задач одного, так и другого класса. Сначала записывается (как в § 503 или в § 509) уравнение энергии, которое удовлетворяется неизвестной нормальной формой. Из него получают выражение для критической силы или собственной частоты в виде отношения двух интегралов или, в некоторых случаях, сумм. Далее в эти интегралы, или суммы, вместо истинной нормальной формы подставляют некоторую, подходящим образом выбранную, форму, удовлетворяющую граничным условиям задачи. Откуда и получают искомую оценку.

532. Метод теоретически обоснован в главе XIII §§ 480—486 для частного случая продольного изгиба стержня и в §§ 503—540 настоящей главы для определения «критических скоростей». Такие же доказательства можно провести в каждой задаче о свободных колебаниях или устойчивости упругих систем, т. е. во всех тех задачах, в которых решение основного уравнения удовлетворяет определенным граничным условиям, тогда, и только тогда, когда параметр системы совпадает с одним из «характеристических значений» (*Eigenwerte*) и, когда каждое характеристическое число может быть выражено как отношение двух интегральных выражений, в которые входит

¹⁾ Ср. § 542 А.

форма деформации. Изучая доказательства, приведенные в этой главе, мы заметим, что все они предполагают:

1) что существует «бесконечное число нормальных форм»;

2) что произвольное смещение (удовлетворяющее граничным условиям задачи и некоторым требованиям относительно непрерывности) можно разложить в бесконечный ряд по собственным функциям, являющимся нашими нормальными формами (обозначенными в приведенных доказательствах через Y_1, Y_2 и т. д.).

В последние годы теоретические основы этих предположений привлекали к себе особенное внимание математиков. Было опубликовано в связи с этим очень много работ. Они выходят за пределы настоящей книги и поэтому мы (следуя Рэлею¹⁾) будем оправдывать эти предположения следующими соображениями:

1) Система, обладающая конечным числом (N) степеней свободы, имеет N собственных частот, каждая из которых связана с частной «нормальной формой».

2) Любое смещение, которое может произойти в такой системе (т. е. удовлетворяющее граничным условиям или заданным связям), как можно показать, выражается в виде конечного ряда из N членов, в который входит N нормальных форм²⁾.

Инженер предполагает, что задача по существу не меняется, когда действительная система с бесконечным числом степеней свободы заменяется идеализированной системой с большим, но конечным числом степеней свободы. Вопросы, возникающие в связи с переходом к бесконечному числу степеней свободы, имеют значительный математический интерес, но мало интересны с чисто физической точки зрения.

¹⁾ „Мы... вовсе не намерены исключить из рассмотрения системы, обладающие бесконечным многообразием степеней свободы... Однако такие системы всего удобнее рассматривать как предельные случаи других, свобода которых более ограниченного характера“ («Теория звука», § 69).

²⁾ Ср. (например) Е. Т. У и т т е к е р, Аналитическая динамика, гл. VII,

**Выражение заданной функции в виде ряда
по собственным функциям**

533. Если заданную функцию *можно* разложить в ряд по собственным функциям, то коэффициенты этого ряда определяют, воспользовавшись сопряженными соотношениями (глава XIII, § 486; глава XIV, § 504). Покажем это. Пусть

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots, \quad (71)$$

где Y_1, Y_2, \dots удовлетворяют сопряженным соотношениям (7) § 504. Умножив (71) на mY_n и проинтегрировав от 0 до l , получим

$$\int_0^l mY_n y dx = \int_0^l mY_n [A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots] dx.$$

Отсюда, в силу сопряженных соотношений, имеем

$$\int_0^l mY_n y dx = A_n \int_0^l mY_n^2 dx. \quad (72)$$

Следовательно, коэффициенты A_n можно вычислить, когда функции Y_n известны.

В качестве примера рассмотрим свободные поперечные колебания стержня постоянного поперечного сечения, шарнирно закрепленного на обоих концах. Здесь формы нормальных колебаний, как было доказано в § 214 главы VI, определяются формулой

$$Y_n = \sin n\pi \frac{x}{l}. \quad (73)$$

Поэтому (m постоянно) формула (72) сводится к

$$\left(\frac{1}{2} l A_n =\right) A_n \int_0^l \sin^2 n\pi \frac{x}{l} dx = \int_0^l y \sin n\pi \frac{x}{l} dx, \quad (74)$$

которая является широко принятой формулой «гармонического анализа».

534. Мы можем пользоваться формулой (72) только тогда, когда функции Y_n известны. В общем случае эти функции можно определить с большим трудом и только приближенно. Тем не менее важно, чтобы читатель рассматривал разложение в ряд по тригонометрическим функциям как частный случай общего типа разложения в ряд по «собственным функциям». Тогда ему станет ясно, что исследование, проведенное для шарнирно закрепленных балок постоянного поперечного сечения, можно обобщить *mutatis mutandis*¹⁾ на балки переменной жесткости, закрепленные любым из тех способов, при которых энергия системы остается неизменной.

Вынужденные колебания балки постоянного поперечного сечения с шарнирно опертыми концами

535. В § 502 этой главы мы показали, что балка, испытывающая поперечные колебания, подвергается действию нагрузки от сил инерции интенсивности

$$-m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (I)$$

Следовательно, если помимо того приложена еще нагрузка интенсивности w , изменяющейся со временем, то прогиб будет определяться из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = w, \quad (75)$$

которое, при постоянных B и m , можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{B} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{w}{B}. \quad (76)$$

536. Предположим, что w имеет форму

$$W_n \sin n \frac{\pi x}{l} \sin pt, \quad (77)$$

¹⁾ С соответствующими изменениями (лат.). (Прим. перев.)

где W_n постоянно, и предположим, что уравнение (76) имеет решение вида

$$y = Y_n \sin n \frac{\pi x}{l} \sin pt, \quad (78)$$

где Y_n постоянная. Подставив (77) и (78) в (76), мы найдем, что наше предположение оправдывается тогда, когда

$$\left[\frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{mp^2}{B} \right] Y_n = \frac{W_n}{B}, \quad (I)$$

т. е., когда

$$Y_n = \frac{W_n l^4}{n^4 \pi^4 B - mp^2 l^4}. \quad (II)$$

Соотношение

$$y \propto \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (III)$$

показывает характер n -ой формы нормальных свободных поперечных колебаний нашей системы.

Собственная частота p_n , как показано в § 214 главы VI, определяется равенством

$$n^4 \pi^4 B = mp_n^2 l^4. \quad (IV)$$

Это можно также получить, решив уравнение (I) с опущенной правой частью. Таким образом, выражение (II) можно записать в следующем виде:

$$Y_n = \frac{W_n}{m(p_n^2 - p^2)}. \quad (V)$$

Это одно из частных решений уравнения (76).

Общее решение однородного уравнения имеет форму (78), в которой амплитуда и фаза произвольны, а частота p заменена на p_n . Выбирая произвольные постоянные так, чтобы у и $\frac{\partial y}{\partial t}$ обращались в нуль при $t=0$, мы, наконец, получим:

$$y = \frac{W_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)}{m(p_n^2 - p^2)} \left[\sin pt - \frac{p}{p_n} \sin p_n t \right]. \quad (79)$$

Такой прогиб будет вызван действием поперечной нагрузки типа (77), начинающей действовать в момент $t=0$.

537. При $p=p_n$ выражение (79) становится неопределенным. Положим:

$$p = p_n - p', \quad (VI)$$

где p' очень мало. Из (79) с точностью до членов первого порядка малости относительно p' получим

$$y = \frac{W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{mp'(2p_n - p')} \left[\sin p_n t - p' t \cos p_n t - \left(1 - \frac{p'}{p_n}\right) \sin p_n t \right].$$

Откуда при p' , стремящемся к нулю, в случае действия нагрузки специального вида (резонирующей с собственной частотой балки) имеем

$$y = \frac{W_n}{2mp_n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} [\sin p_n t - p_n t \cos p_n t]. \quad (80)$$

538. Какова бы ни была форма приложенной нагрузки w , зависящей от x и t , мы всегда можем выразить ее в виде ряда по тригонометрическим функциям.

Согласно принципу суперпозиции, каждый из членов этого ряда будет давать независимо от других членов ряда прогиб, определяемый формулой типа (79). Таким образом, полный прогиб теоретически может быть вычислен.

В знаменателе (79) стоит разность $p_n^2 - p^2$, а это показывает, что если частота приложенной нагрузки меньше, чем основная собственная частота балки, то прогиб, возникающий от члена

$$W_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin pt,$$

будет доминирующим в полном выражении для прогиба¹⁾. Итак, мы указали путь приближенного исследования, в котором и нагрузка и прогибы выражаются рядами по собственным функциям, а внимание сосредоточивается на собственной функции, соответствующей колебанию основного тона.

¹⁾ Ср. гл. XIII, § 469, где такое же замечание использовалось при изучении продольного изгиба стержня.

Влияние на балку постоянного поперечного сечения движущегося по ней груза постоянной величины

539. В виде примера рассмотрим задачу о сосредоточенном грузе постоянной величины W , движущемся по балке с постоянной скоростью v .

Груз во время t находится на расстоянии $a = vt$ от левой опоры балки. Нагрузка w равна нулю всюду, кроме сечения $x = a$.

Предположим, что ее можно представить в виде ряда

$$w = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (I)$$

Используя формулу (74), § 533, имеем

$$\frac{1}{2} l A_n = \int_0^l w \sin n\pi \frac{x}{l} dx = W \sin n\pi \frac{a}{l} = W \sin \frac{n\pi vt}{l}. \quad (II)$$

После чего ряд для w принимает вид:

$$w = \frac{2W}{l} \left\{ \sin \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right\}. \quad (81)$$

n -й член этого ряда вызывает прогиб, определяемый формулой (79), или в исключительном случае «резонанса» формулой (80), в которых W_n нужно заменить на $\frac{2W}{l}$, а p — на $\frac{n\pi v}{l}$. Как установлено в § 538, в выражении ряда для y будет преобладать первая гармоника. Полагая в (79) $n = 1$ и подставляя, как и выше, соответствующие значения для W_1 и p , приближенно имеем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2W \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right)}{ml \left(p_1^2 - \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \right)} \left[\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi v}{lp_1} \sin p_1 t \right] = \\ &= \frac{2W l^3 \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right)}{\pi^4 B \left(1 - \frac{v^2 l^2}{4l^2} \right)} \left[\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{vt_1}{2l} \sin 2\pi \frac{t}{t_1} \right], \quad (82) \end{aligned}$$

где $t_1 \left(= \frac{2\pi}{p_1} \right)$ представляет собой период собственного колебания основного тона. Это выражение имеет место при отсутствии явления резонанса. Если $p = p_1$, т. е. $vt_1 = 2l$, то мы должны иметь дело с формулой (80), а не с формулой (79). Тогда получим, что прогиб в случае явления резонанса приближенно определяется равенством

$$y = \frac{Wl^3}{\pi^4 B} \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \left[\sin 2\pi \frac{t}{t_1} - 2\pi \frac{t}{t_1} \cos 2\pi \frac{t}{t_1} \right]. \quad (83)$$

С помощью тех же методов легко показать, что

$$y = \frac{2Wl^3}{\pi^4 B} \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right)$$

является таким же приближением к кривой прогиба, вызываемой сосредоточенным грузом W , действующим посередине. Отсюда прогиб посередине равен

$$\delta = \frac{2Wl^3}{\pi^4 B} = \frac{Wl^3}{48,71B}. \quad (84)$$

В то время, как $\frac{Wl^3}{48B}$ является точным значением (см. № 3 таблицы стандартных случаев прогибов балок, стр. 249). Таким образом, наше пренебрежение высшими гармониками дает в этом случае ошибку, равную примерно $1,5\%$.

Влияние на балку постоянного поперечного сечения пульсирующей, движущейся нагрузки

540. Найдя прогиб балки в результате действия на нее движущегося сосредоточенного груза, мы можем интегрированием получить прогиб от действия на балку распределенного груза (например поезда), перемещающегося по ее пролету с постоянной скоростью. При этом нужно еще учесть действие паровоза.

Здесь мы сталкиваемся с тем случаем, когда на рельсы кроме постоянной нагрузки (вес паровоза) действует нагрузка, интенсивность которой меняется со временем [массы, совершающие возвратно-поступательное движение, вызывают

переменное давление (подобное удару молота) колес паровоза на рельсы].

Таким образом нам нужно изучить действие на балку нагрузки, которая не только движется с постоянной скоростью v по пролету, но также и изменяется со временем t . Пусть действие такой нагрузки можно представить как действие силы $W \sin \omega t$ (ω — угловая скорость колеса паровоза) на расстоянии $a = vt$ от левой опоры балки¹⁾. Предположив, как и раньше, что ее можно представить в виде ряда

$$w = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (I)$$

Из формулы (74) мы теперь получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l A_n &= \int_0^l w \sin n\pi \frac{x}{l} dx = W \sin \omega t \sin n\pi \frac{a}{l} = \\ &= W \sin \omega t \sin \frac{n\pi vt}{l}. \end{aligned} \quad (II)$$

Следовательно, n -й член ряда (I) равен

$$\begin{aligned} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} &= 2 \frac{W}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega t \sin \frac{n\pi vt}{l} = \\ &= \frac{W}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \cos \left(\omega - \frac{n\pi v}{l} \right) t - \cos \left(\omega + \frac{n\pi v}{l} \right) t \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

541. Каждый из двух членов этого выражения имеет вид выражения (77). Следовательно, прогиб от n -й гармоники w можно получить методами §§ 535—539 в виде выражения, составленного из двух членов типа (82) или, в случае явления резонанса, типа (83).

Легко показать, что выражение (85) дает n -й член ряда, представляющего нагрузку w , вызываемую двумя пульсирующими силами, расположенными посредине, и имеющими величины

$$\frac{1}{2} W \cos \left(\omega - \frac{n\pi v}{l} \right) t \text{ и } -\frac{1}{2} W \cos \left(\omega + \frac{n\pi v}{l} \right) t \quad (I)$$

¹⁾ Мы здесь для простоты приняли, что переменная сила имеет нулевое значение в тот момент, когда она вступает на пролет.

и направленными вниз или вверх в соответствии с тем, нечетно или четно n . Частота каждой из этих сил может резонировать с собственной частотой балки, в этом случае она будет иметь преобладающее значение. Очевидно (так как v пропорционально ω), что частота второй силы (I) будет резонировать при меньшей скорости движения, чем первая. Таким образом явление резонанса (влияющее на первую гармонику кривой прогиба) наступит тогда, когда скорость будет такова, что

$$\omega + \frac{\pi v}{l} = p_1 \text{ (основной собственной частоте балки).} \quad (86)$$

Тогда мы сможем считать, что в основном прогиб вызывается стационарной пульсирующей силой, действующей посередине и равной

$$-\frac{1}{2} W \cos p_1 t.$$

Решив эту задачу методами §§ 536—538, мы найдем, что прогиб приближенно определяется формулой¹⁾

$$y = -\frac{W}{l} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \frac{t \sin p_1 t}{2mp_1} = -\frac{Wl^3}{2\pi^4 B} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) p_1 t \sin p_1 t. \quad (87)$$

В этом случае время, затрачиваемое грузом на то, чтобы пройти балку, равно $\frac{l}{v}$. В тот момент, когдадвигающийся груз покидает пролет, мы из (86) имеем

$$p_1 t = \frac{\omega l}{v} + \pi.$$

Выражение (87) принимает вид:

$$y = \frac{Wl^3}{2\pi^4 B} \left(\pi + \frac{\omega l}{v}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin \frac{\omega l}{v}. \quad (88)$$

Примеры

10. (Самб. М. S. Т. 1933.) Балка однородного материала с постоянной площадью поперечного сечения и длиной пролета l

¹⁾ Как y , так и $\frac{\partial y}{\partial t}$ должны равняться нулю в момент ($t=0$), когда груз впервые начинает действовать на балку.

шарнирно опирается на концах. Она подвергается действию пульсирующей силы $P \sin 2\pi Nt$, двигающейся со скоростью v . Показать, что сила вызывает колебания, которые с некоторым приближением совпадают с колебаниями, вызываемыми действием в середине балки двух стационарных пульсирующих сил, имеющих величины

$$\frac{1}{2} P \cos 2\pi (N-n)t \text{ и } -\frac{1}{2} P \cos 2\pi (N+n)t,$$

где

$$n = \frac{v}{2l}.$$

Кроме того, показать, что если мы пренебрежем затуханием и предположим, что N равно собственной частоте основного колебания балки, то колебание, вызванное движением пульсирующей силы, приближенно дает прогиб

$$y = -\frac{DN}{2\pi} (1 - \cos 2\pi nt) \cos 2\pi Nt \sin \frac{\pi x}{l},$$

где D — стрела прогиба от постоянной действующей посредине силы P .

[$N \times$ (длину окружности колеса) $= v = 2ln$, и поэтому мы можем (во всех практических случаях) считать $\frac{n}{N}$ малым.]

542. Выше мы дали только краткий очерк важного раздела теории колебаний, а именно, раздела, относящегося к теории вынужденных колебаний и к использованию рядов по собственным функциям для изображения данной действующей силы. В основном в §§ 539—540 изложены результаты С. П. Тимошенко¹⁾.

Теория таких явлений была развита глубже К. Е. Инглисом²⁾, который указал, как в теории можно учесть ряд весьма важных факторов для инженера-транспортника, например таких, как влияние упругости и затухания в пружинах паровоза и поезда. Его книга «*A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*»³⁾ дает полное и систематическое изложение предмета и содержит много числовых примеров.

¹⁾ *Phil. Mag.*, 34 (1922), 1018.

²⁾ *Proc. Inst. C. E.*, 218 (1924), 225—272. Ср. также *Report of the Bridge Stress Committee* (H. M. Stationery Office, 1928) некоторые разделы теории Инглиса изложены у J. Case, цит. соч., глава XXIII.

³⁾ *Camb. Univ. Press* (1931).

Применение методов релаксации к задачам о колебаниях

542 А. Совсем недавно значительный прогресс в теории колебаний был достигнут на основе метода Рэлея введением понятий методов релаксации. Были получены способы, с помощью которых в соответствии с принятой формой прогиба можно определить как *верхний*, так и *нижний* пределы для значения искомой частоты. По мере продвижения вычислений эти пределы постепенно сближаются, в результате чего искомую частоту (в силу того, что она лежит между этими пределами) можно найти с той степенью точности, которая требуется. Преимущества нового метода заключаются еще и в том, что с его помощью удастся определить не только частоту, но и соответствующую форму колебания, которую обычным методом Рэлея определить нельзя.

Более того, мы можем не ограничиваться вычислениями только формы и частоты колебаний основного тона, а найти формы и частоты высшего порядка.

Кроме этого, в нашем распоряжении оказывается средство, с помощью которого мы можем провести исследование (если оно вообще нужно) влияния сил трения, встречающихся в практике. За недостатком места мы не приводим здесь подробного изложения новых методов, их можно найти в моей книге «Relaxation Methods in Engineering Science» (главы VII—IX и XI).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ПРИМЕЧАНИЯ

В этой книге, как было сказано в Предисловии, делается попытка изложить теорию упругости так, чтобы, с одной стороны, непосредственно удовлетворить требования студентов технических институтов и, с другой, дать запас знаний, который помог бы потом успешно изучить полные руководства Лява и Рэлея. Эти руководства цитируются *passim* *), но не предполагается, что изучающий при первом чтении книги будет обращаться к ним для консультации.

В подстрочных примечаниях даны ссылки на следующие книги:

- 1) А. Е. Ляв, *Математическая теория упругости*, ГТТИ, 1935.
- 2) Рэлея, *Теория звука*, ГИТТЛ, 1940, 1944,
а также на другие книги, к которым более подготовленный читатель может обратиться за разъяснениями.
- 3) Д. П. Ден-Гартог, *Теория колебаний*, Гостехиздат, 1942.
- 4) Н. В. Howard, *Stresses in Aeroplane Structures* (1933), Pitman & Sons.
- 5) Н. Lamb, *Dynamical Theory of Sound* (2 изд., 1925), Edward Arnold & Co.
- 6) А. J. S. Pippard, *Strain Energy Methods of Stress Analysis* (1928), Longmans Green & Co.
- 7) А. J. S. Pippard and J. L. Pritchard, *Aeroplane Structures* (2-е изд. 1935), Longmans Green & Co.
- 8) J. Prescott, *Applied Elasticity* (1924), Longmans Green & Co.
- 9) G. Temple and W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and its Applications*, Oxford Univ. Press.
- 10) С. П. Тимошенко, *Сопротивление материалов* (I и II части), ОГИЗ, Гостехиздат, 1945, 1946.
- 11) С. П. Тимошенко, *Теория упругости*, ОНТИ, 1937.
- 12) С. П. Тимошенко, *Теория устойчивости упругих систем*, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
- 13) С. П. Тимошенко, *Теория колебаний в инженерном деле*, ГТТИ, 1934.

Из очень обширной литературы, касающейся экспериментальных методов и результатов, можно упомянуть следующие книги:

*) Повсюду (лат). (Прим. перев.)

- 14) R. G. Batson and J. H. Hyde, *Mechanical Testing* (2-е изд., 1931), Chapman & Hall.
- 15) H. J. Gough, *Fatigue of Metals* (1924), Scott Greenwood & Son.
- 16) G. F. C. Searle, *Experimental Elasticity* (2-е изд., 1933), Camb. Univ. Press.
- Книг, предназначенных непосредственно для студентов, еще больше, но лаконичные ссылки на них мало полезны. Следующий список заслуживает внимания, так как в него входят те книги, в которых имеется большое число примеров, иллюстрирующих содержание настоящей книги:
- 17) J. Case, *Strength of Materials* (2-е изд., 1932), Edward Arnold & Co.
- 18) A. Morley, *Strength of Materials* (7 изд., 1928), Longmans Green & Co.
- 19) А. Морлей, *Статика сооружений*, ГТТИ, 1934.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕЧАНИЯ

В настоящих примечаниях иногда делаются ссылки на только что приведенный список книг. В этом случае последние обозначаются теми номерами, под которыми они помещены выше.

Стр. 10 (§ 3, подстрочное примечание). Robert Hooke. Читатель, заинтересовавшийся жизнью и работой Гука, может найти более подробные сведения в *Diary of Robert Hooke* (под редакцией H. W. Robinson and W. Adams), опубликованном *in extenso* Taylor and Francis (Лондон, 1935). Факсимиле трактата Гука *De potentia restitutiva* помещено на 231—356 страницах VIII тома Dr. Gunther, *Early Science in Oxford*.

Стр. 20 (§ 12). *Теорема взаимности*. Соотношение (14) между коэффициентами влияния обычно приписывают Максвеллу, а более общую теорему Бетти и Рэлею.

Стр. 90 (§ 67). *Спиральные пружины*. Нужно подчеркнуть, что исследование, приведенное в этом и следующем параграфах, основано на предположении о том, что рассматриваемые перемещения очень малы. Выводы должны применяться с осторожностью к часовым пружинам, так как в действительности валик делает много полных оборотов. См. об этом J. A. van den Broek, *Trans. Am. Soc. M. E.*, 53 (1931), 247—263.

Стр. 130 (§ 91, подстрочное примечание). *Теорема Кастулиано*. Доказательство развито глубже в статье, указанной в подстрочном примечании к § 310.

Стр. 135 (§ 95). *Решение Сен-Венана задачи изгиба и т. д.* См. только что упомянутую статью.

Стр. 143 (§ 102, подстрочное примечание). *Коэффициенты растяжения*. Недавно проф. А. Д. С. Пиппард обратил мое внимание на эквивалентное предложение, сделанное Г. Ф. Б. Мюллером-Бреслау в его *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre* (5 изд., Лейпциг, 1934), IV, § 25, стр. 280.

Стр. 151 (§ 110). *Метод распределения момента*. Приведем некоторые новые статьи, относящиеся к этому вопросу:

В. W. James, «*Principal Effects of Axial Load on Moment Distribution Analysis of Rigid Structures*» N. A. C. A. Tech. Notes № 534, G. E. Large and C. T. Morris, «*The Moment Distribution Method . . . extended to Lateral Loads etc.*», Ohio State Univ., Eng. Exp. Station, Bulletin № 66.

Стр. 185. (Дополнение к гл. IV). Сведения о практических подробностях испытаний читатель может найти в ссылках (14)—(16) стр. 658.

Стр. 206 (§ 162, подстрочное примечание). Тимошенко (с. 11 стр. 270) приписывает этот результат и результат предшествующего параграфа Р. Бреду (1896).

Стр. 214 (пр. 14). А. N. Black высказал соображение о том, что в данном ответе пренебрегают следствиями антикластической кривизны. Строго говоря, этот пример относится к теории пластинок.

Стр. 215 (§ 172). *Косой изгиб*. Важно вспомнить, что это исследование, строго говоря, связано с *бесконечно малой* кривизной, вызванной изгибающими моментами в первоначально прямой балке (Ср. §§ 28, 293).

Стр. 223 (§ 178). *Железобетон*. Об этом читатель может справиться в книге (Cross and Morgan), указанной в § 110, или O. Faber, *Reinforced Concrete Simply Explained* (Oxford Univ. Press., 1929).

Стр. 236 (§ 186). *Неразрезные балки*. Их очень удобно решать методом последовательных приближений, описанным в §§ 106—110.

Стр. 277 (§ 211, подстрочное примечание). Ср. также D. Robertson, «*Transient Whirling of a Rotor*», *Phil. Mag.* (сер. 7), 20, 1935, 793—825 (с библиографией).

Стр. 324 (§ 248). Вместо удлинения винтовой пружины со свободными витками для измерения величины нагрузки можно использовать угол поворота пружины, вызванный силой растяжения.

Как показывает наш результат, максимальная чувствительность соответствует α , равному 45° . Значительный поворот может произойти тогда, когда вместо круглой проволоки используется тонкая полоса прямоугольного поперечного сечения.

Это положено в основу конструкции «пружин Эйртона-Перри» (*Proc. R. S.* 36), 1884, 297—319.

Стр. 353 (§ 275). *Пример 1*. Эти величины вместе с $(X_x + Y_y + Z_z)$ являются коэффициентами преобразованного уравнения (11), § 278. Корни этого уравнения представляют собой значения главных напряжений, поэтому каждый из коэффициентов уравнения в отдельности не должен меняться при переходе от одной системы осей координат к другой.

Непосредственная проверка даст тот же результат, но потребует большого труда.

Стр. 385 (§ 301). *Пример 1*. Аналогичное доказательство можно применить и в этом случае, вспомнив, что корни уравнения (10) § 303 являются значениями главных удлинений.

Стр. 391 (§ 307). *Пример 2.* Величины ω_x , ω_y , ω_z представляют собой компоненты вращения, и мы можем написать, что

$$a_x' = l_1\omega_x + m_1\omega_y + n_1\omega_z, \dots$$

где x' , y' , z' связаны с x , y , z по схеме § 301.

Стр. 450 (§ 366). *Радиальные колебания сферы.* Эта задача была решена в 1829 г. Пуассоном (ср. Ляв, цит. соч., Введение, стр. 17).

Стр. 475 (§ 394). Метод, предложенный здесь для получения приближенного решения задач кручения, обычно приписывается В. Ритцу *Journ. reine angew. Math.*, 135 (1908) и *Ann. Physik.* (4), 28 (1909) 737. Повидимому, он является частным случаем «метода переменного параметра» (см. § 526) и как таковой принадлежит в действительности Рэлею.

Стр. 480 (гл. XII). Для решения плоской задачи, рассматриваемой в этой главе, предложены эффективные аналитические методы. Их можно найти в IX главе книги Лява (1) и во II, III и V главах книги Тимошенко (11), где рассмотрено большое число задач, имеющих практический и технический интерес.

Стр. 501 (§ 418). *Цилиндрические координаты.* В формулах главы VII, на которые сделаны здесь ссылки, r и θ названы полярными координатами. Термин «цилиндрические координаты» можно использовать потому, что при исследовании плоского напряженного состояния нужно вводить дополнительную координату z .

Стр. 534 (§ 444). Расчет примера 10 встречается при конструировании стволов артиллерийских орудий, где находит применение так называемый процесс *автофреттажа*, являющийся одним из способов рационального использования начальных напряжений.

Стр. 558 (гл. XIII). Эта и следующие главы в значительной степени основаны на работе Рэлея (2). Они должны служить введением к ней. Полезно также изучить книги Ден-Гартога (3), Лэмба (5), Temple and Bickley (9) и Тимошенко (11, 12 и 13). См. также А. Ф. Сопко, *Phil., Mag.*, 14 (1932), 881—896.

Стр. 641 (§ 526). *Метод переменного параметра.* См. выше примечание к стр. 475 (§ 394).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамс (Adams W.) 658
 Антес (Anthes) 468
- Бассо (Batho C.) 206
 Бергс (Beggs G. E.) 43
 Бельтрами (Beltrami E.) 188, 395
 Бельфильд (Belfield V.) 96
 Бернулли Даниил (Bernoulli Daniel) 63
 Бернулли Яков (Bernoulli James) 63
 Берри (Berry A.) 637
 Бетти (Betti E.) 21, 658
 Биклей (Bickley W. G.),
 см. Темпль и Биклей
 Боу (Bow R. H.) 139
 Брайан (Bryan G. H.) 574, 606
 Бредт (Bredt R.) 659
 Бриджет (Bridget F. J.) 564
 Брэдфильд (Bradfield K. N. E.) 593
 Брюстер (Brewster D.) 491
 Буссинеск (Boussinesq J.) 417, 466
 Бэкер (Baker J. F.) 151
- Бэтсон и Хайд (Batson R. G. and Hyde J. H.) 658
- Ван-ден-Брок (van den Broek J. A.) 658
 Вайбель (Weibel E. E.) 492
- Вильсон Карус (Wilson, Carus) 492
 Вильямс (Williams H. A.) 151
 Вольтерра (Volterra V.) 117
 Восселер (Vosseller A. B.) 564
- Галилей (Galileo) 9, 64
 Гаф Б. С. (Gough B. S.) 637
 Гаф Г. Д. (Gough H. J.) 185, 509, 658
 Гек (Heck O. S.) 611
 Генки (Hencky H.) 189
 Геннеберг (Henneberg L.) 141
 Гест (Guest J. J.) 188
 Говард (Howard H. B.) 270—274, 578, 657
 Головин Х. С. 513
 Грин (Green G.) 336
 Гриффис (Griffith A. A.) 468, 478
 Губер (Huber M. T.) 189
 Гук (Hooke R.) 10, 658
 Гюнтер (Gunther R. T.) 10, 658
- Дарвин (Darwin G. H.) 188
 Ден-Гартог (den Hartog J. P.) 493, 657, 660
 Дженкин (Jenkin F.) 139
 Джером (Jerome C. C.) 564
 Дункан (Duncan W. J.) 41, 476
- Инглис (Inglis C. E.) 655

- Карман (Kármán Th.) 578
 Кастилиано (Castigliano A.) 25, 123, 129
 Каулей (Cowley W. L.) 593, 595
 Кей и Лэби (Keye G. W. C. and Laby T. H.) 165, 185
 Кейз (Case J.) 250, 284, 655, 658
 Кельвин и Тэт (Kelvin and Tait P. G.) 338, 404, 466
 Кирхгоф (Kirchhoff G.) 23, 311, 348, 395, 404, 567, 574, 643
 Клайперон (Clapeyron B. P. E.) 96, 187
 Клебш (Clebsch A.) 404
 Кокер (Coker E. G.) 489, 492, 493
 Кокер и Файлон (Coker F. G. and Filon L. N. G.) 489, 492, 493
 Кокс Г. Л. (Cox, H. L.) 509
 Кокс Г. Р. (Cox H. R.) 138, 142
 Корнок (Cornock A. F.) 660
 Корню (Cornu M. A.) 213
 Коши (Cauchy A. L.) 353, 399, 417
 Кристоферсон (Christopherson D. G.) 479
 Кросс Г. (Cross H.) 151
 Кросс и Морган (Cross H. and Morgan N. D.) 151, 659
 Кулон (Coulomb C. A.) 188, 417
- Ламе (Lamé G.) 187, 404
 Лардж (Large G. E.) 659
 Леви (Levy H.) 592, 593
 Лессельс (Lessels), см. Тимошенко и Лессельс
 Лоббан (Lobban C. H.) 44
 Лэби (Laby T. H.), см. Кей и Лэби
- Лэмб (Lamb H.) 28, 139, 141, 153, 216, 275, 567, 633, 643, 657, 660
 Ляв (Love A. E. H.) 5, 9, 10, 21, 114, 117, 203, 308, 311, 348, 353, 358, 385, 389, 391, 395, 399, 403, 404, 415, 417, 426, 436, 452, 456, 466, 487, 489, 567, 574, 657, 660
- Мак-Лаклан (McLachlan N. W.) 318, 319
 Маколей (Macaulay W. H.) 246
 Максвелл (Maxwell J. C.) 21, 139, 370, 658
 Мариотт (Mariotte E.) 10
 Менаже (Mespager A.) 492
 Меркер (Mercer J.) 23
 Мизес (Mises R.) 189
 Мор (Mohr O.) 189, 229, 236, 358, 371
 Морган (Morgan N. D.), см. Кросс и Морган
 Морера (Morera G.) 370
 Морлей (Morley A.) 658
 Моррис Д. (Morris J.) 21
 Моррис К. Т. (Morris C. T.) 659
 Мэллок (Mallock H. R. A.) 195, 213, 533
 Мюллер-Бреслау (Müller-Breslau H. F. B.) 658
- Навье (Navier C.L.M.H.) 10, 417
 Надаи (Nadai A.) 189
- Пе́рри (Perry J.) 466, 659
 Пиппард (Pippard A. S.) 658
 Пиппард и Притчард (Pippard A. S. and Pritchard J. L.) 657

- Пирсон (Pearson K.) 348, 381, 404, см. также Тодхантер и Пирсон
Понселе (Poncelet J. V.) 188
Прандтль (Prandtl L.) 468
Прескотт (Prescott J.) 657
Притчард (Pritchard J. L.), см. Пиппард и Притчард
Пуассон (Poisson S. D.) 154, 311, 335, 445, 660
- Риттер (Ritter A.) 139
Ритц (Ritz W.) 660
Робертсон (Robertson D.) 277, 659
Робинсон (Robinson H. W.) 658
Рольт (Rolt F. H.) 251
Рэлей (Rayleigh) 5, 15, 19, 21, 282, 319, 404, 466, 614, 622, 627, 641, 645, 646, 657, 658, 660
Рэнкин (Rankine W. J. M.) 187
- Салдана (Sa'danha A.) 284
Свейн (Swain L. M.) 637
Свифт (Swift H. W.) 374
Сен-Венан (Saint-Venant B. de) 64, 130, 131, 133, 188, 247, 395, 404, 410, 416, 417, 418, 466, 484
Сирль (Searle G. F. C.) 658
Сирс (Sears J. E.) 466
Скрутон (Scruton C.) 41
Сопвис (Sorwith D. G.) 509
Стокс (Stokes G. G.) 166, 403
- Тейлор Д. И. (Taylor G. I.) 468, 478
Тейлор М. (Taylor M.) 139
Темпль и Биклей (Temple G. and Bickley W. G.) 23, 657, 660
- Тимошенко С. П. 426, 436, 466, 468, 469, 475, 476, 478, 492, 513, 611, 655, 657, 660
Тимошенко и Лессельс 185, 327, 611
Тодхантер и Пирсон (Todhunter I. and Pearson K.) 9, 129, 188, 348, 417, 574
Томсон (Thomson W.), см. Кельвин
Треска (Tresca H.) 188
Туци (Tuzi Z.) 492
Тэт (Tait P. G.), см. Кельвин и Тэт
- Уиттекер (Whittaker E. T.) 646
Уэбб (Webb H. A.) 250, 637
Уэгстефф (Wagstaff J. E. P.) 466
Уэллер (Waller R.) 10
- Фабер (Faber O.) 659
Файлон (Filon L. N. G.) 489, 492, 493, см. также Кокер и Файлон
Фепплъ (Föppl A.) 247
Фишер (Fisher H. R.) 560, 564
- Хайд (Hyde J. H.), см. Бэтсон и Хайд
Хей (Haigh B. P.) 188
- Эбнер (Ebner H.) 611
Эйлер (Euler L.) 63, 574
Эйртон (Ayrton W. E.) 659
Эллис (Ellis D. L.) 41
Эндрюс (Andrews E. S.) 129
Эри (Airy G. B.) 251, 482
- Юнг (Young T.) 48, 153

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Цифры относятся к страницам. Ссылки на подстрочные примечания отмечены индексом пп, номера страниц с определениями набраны жирным шрифтом.

- Автофреттаж 660
Акустика 622
Аналогия, см. веревочная аналогия, кинетическая аналогия, мембранная аналогия
Анизотропные материалы **413**, анизотропных материалов упругая энергия 413, — — упругие постоянные 413—415
Антикластическая кривизна **213**, 302_{пп}, 430, 659
Арки 22 (пр. 3), 73, — бесшарнирные 76, 79, — двухшарнирные 75, 78, 83, 89 (пр. 15), — пологие 77, 85, — трехшарнирные 73, арок вертикальных перемещений вычисление 86, — «раздача» опор 75, — распор в пятах 74, в арках учет силы сжатия 82
Балки на упругих опорах 251 (пр. 8), 252 (пр. 9), — на упругом основании 284—289, — немного искривленные 228, — неразрезные 96, 235, 252 (пр. 8—10), 659, — первоначально искривленные 64, 72, — прямые 60, 64, 208—225, 410, см. прогиб вследствие перерезывающей силы, — таврового сечения 295, — узкие прямоугольные 294, 438, 495—499, на балку влияние движущейся и пульсирующей нагрузки 651—655, балок кривизна 61
Беггса «деформометр» 43
Безопасности коэффициент **189**, 190, 299
«Безразмерные уравнения» 237, 266
Бернулли — Эйлера теория изгиба 63_{пп}
Бесселя уравнение 317
Бетон 223, 659
Боу обозначение 139
Бронза 341
Брус круговой 513
Буферная пружина 324 (пр. 6)
Валы, см. вращающийся вал, критические скорости валов, кручение валов, напряжений крутильных распространение, поперечные колебания стержней и валов
Вариационное исчисление 574_{пп}

- Вариационные методы 474, 598—600
Веревочная аналогия 229, 233, 265
Взаимности теорема 20, 658, — теоремы приложения 42, 44, 68 (пр. 3),
77 (пр. 12), 414
Виадук 44
Вибрации 5, 110
Винта вал 203, 522 (пр. 4)
Винта лопасть 634, 637^{пп}
Виренделя балка 151
Виртуальные перемещения 28^{пп}
Влияние изменения температуры 81, 105, 197 (пр. 6, 8), 315 (пр. 3),
406—409, 528—531
Влияния коэффициенты 11, 40, — линия 20^{пп}, между коэффициен-
тами влияния соотношения 17, 658
Внутренним давлением вызванные напряжения в сосудах 332,
— — — — в толстостенных трубах 531, — — — — в тонкостенных
трубах 192
Волна вращения 465, — отраженная 462, — расширения 456, см. также
распространение напряжений
Вращающийся вал или труба 520, — тонкий диск 526
Вращения компоненты, см. компоненты вращения
Временное сопротивление 186
Галилея задача 9^{пп}, 64^{пп}, 417
Гармонический анализ, см. первая гармоника, Фурье ряды
Геста закон 188
Гидростатическое давление 160, 193
Главные деформации 181, — напряжения 180, 353, 659, — удлин-
ния 385, 659
Главные оси инерции 211, 215
Главные плоскости деформации 181, — — напряжения 180, 353
Говарда круговая диаграмма, см. круговая диаграмма Говарда
«Горячая посадка» 534, 538, 544
Граничные условия 369, — — в теории пластинок 335—338, — — для
пластинок под действием сил сжатия 604—606
Графические методы в применении к начальным напряжениям 103,
— — определения критической силы для стойки 265, — — опре-
деления напряжений в фермах 139—141, — — решения задач,
связанных с изгибом балок 229—233, 242
Грина формула 336
Гаука закон 10, 11, 14, 29, 31, 131, 185, 255, 256, 574, — — обобщен-
ный 897
Даламбера принцип 275^{пп}
Движущаяся нагрузка 651—655
Двойное преломление, см. оптический метод в теории упругости
Дерево 311, 399
Деформации главные 181, — как функции смещений 375, — компо-
ненты 381, 389, — поверхность 389, — преобразования — 179,
381, — сдвига 161, см. также плоская деформация

Диск, см. круглый диск

Дислокация 117_{пп}

Единицы 41, 48_{пп}, см. характеристические значения

Железнодорожные мосты 665, — сцепления 509, — шпалы 284, 289 (пр. 32)

Железо сварочное 186

Железобетон 223, 659

Жесткость при изгибе 62, 222, 302, — — — коленчатых валов 327—329, — при кручении 207 (пр. 12), 424

Знаков правила 227

Изгиб косой 215—219, 659, — кругового бруса 513, — пластинки в форме части кольца 514 (пр. 3), — пластинок 167, 213, 300—319, 335—338, — прямых балок 60, 167, 208—225, изгиба задача 434, 475, 478, 479

Изгибающий момент, сосредоточенный 250, изгибающего момента эпюра 229

Изгибающее усилие 40, 60

Изотропные материалы 399; изотропных материалов удельная энергия деформации 411, — — упругие постоянные 159, 160, 164—168, 400—404, для изотропных материалов общие уравнения 404

Инварианты 353, 385 (пр. 1), 391 (пр. 2), 493, 659

Исчисление вариационное, см. вариационное исчисление

Камертон 493

Касательное напряжение 163, 344, — — в тавровых балках 295, — — не может пересекать свободную от нагрузки поверхность тела 171, 203, 349, — — в полых лонжеронах 297 (пр. 2), — — в узких прямоугольных балках 294, касательных напряжений равенство на взаимно перпендикулярных площадках 169, касательных напряжений стационарные значения 181, 363

Кастилиано первая теорема 25, 66, — первой теоремы приложения 57, 64, 72, 75, 94, 395_{пп}, — вторая теорема 123, 146, 395_{пп}, 658

Книжечная аналогия 567_{пп}

Кирхгофа теорема о единственности решения 23, 574

Клапейрона теорема трех моментов 96, 236, 253 (пр. 14)

Колебания балок постоянного поперечного сечения 648—655, — вынужденные железнодорожных мостов 655, — нормальные 277, 317, 450, 621, — радиальные шара 449, 660, см. также поперечные колебания

Коленчатых валов напряжения и погибы 327—330

Колеса 534, 653

Кольцевые удлинения 441

Компоненты вращения 390, 660, — напряжения 347, — смещения 375, — деформации 381, компонентов деформации преобразования 379, между компонентами деформации тождественные соотношения 391

- Консоль постоянного сечения 19, 21, 42, 64, 66, 68, 281, 495, 501 (пр. 1), 641, — треугольная 501 (пр. 2)
- Конструкция артиллерийских орудий 537—557, 660
- Концентрация напряжений вблизи малого отверстия 509
- Косвенный метод решения 410
- Косой изгиб, см. изгиб косой
- Коэффициент безопасности, см. безопасности коэффициент; — Пуассона, см. Пуассона коэффициент
- Кранов крюки 509
- Кривизна «антикластическая», см. антикластическая кривизна; — оси балки 226, см. балки, пластинка
- Кристаллы 415
- Критерий прочности 537, см. материалов поведение за пределом пропорциональности, теории прочности
- Критическая сила стойки 256, 558, 585, — — квадратной пластинки 611 (пр. 9), — — прямоугольной пластинки 606—612
- Критические скорости валов 274, 283
- Кросса «метод распределения момента» 151, 659
- Круглая труба, см. труба
- Круглое отверстие во вращающемся валу 522, — — во вращающемся диске 526, — — в пластинке при растяжении 506
- Круглый диск вращающийся 526, 527, 633_{пп}, круглого диска изгиб 311—319, — — поперечные колебания 317, 633_{пп}, 643
- Круглого вала задача изгиба 438 (пр. 2), 477 (пр. 8), — — радиальные смещения 516, — — температурные напряжения 528, см. вращающийся вал, критические скорости валов, кручение валов, напряжений крутильных распространение
- Круговая диаграмма Говарда 270—274, — — Мора 358, 371—374, 390
- Крутящее усилие, см. крутящий момент
- Крутящий момент 201, 424
- Кручение валов и труб произвольного сечения 204—209, 421—427, — круглых валов и труб 198—205, 394, — тонкостенных труб 198, 472
- Кручения задача 426, 467—474, — — для полых сечений 471, — — решаемая методом энергии 474, 660, — задачи мембранная аналогия 467
- Кручения модуль 424, 470, — функция 426
- Латунь 186
- Легкие сплавы 608
- Лежандра уравнение 636
- Лонжерон полый, см. касательное напряжение
- Маколея метод 246—251
- Максвелла соотношения взаимности 21, — функции напряжений 370
- Максимальная деформация, — разность напряжений, — упругая энергия, максимальное напряжение, см. теории прочности
- Массовые силы 366, — — фиктивные, имеющие потенциал 409, 482_{пп}

- Материалов поведение за пределом пропорциональности 185—191
Мачты устойчивости 597 (пр. 8)
Маятника уравнение 567 пп
Медь 186
Мембранная аналогия 467, 475, 493
«Метод замены» 141
«Метод распределения момента» 151, 152, 236, 659
«Метод сечений» 139
Методы последовательных приближений 148—151
Методы релаксации, см. методы последовательных приближений
Механически неустойчивые материалы 23, 165
Микроструктура 340
Минимума упругой энергии деформации первая теорема 113, — —
— — вторая теорема 123, 658
Модуль объемного сжатия (объемный модуль упругости) 160,
166, 195, 401, 533, — сдвига 164, 203, 400, — упругости, см. Юнга
модуль
Момент сопротивления 223 (пр. 18)
Момент распределения метод, см. «метод распределения момента»,
моментов трех теорема 96, 236, 253 (пр. 14)
Монохроматический свет, см. оптические методы в теории упру-
гости
Мора круговая диаграмма, см. круговая диаграмма Мора; — теория
прочности 189 пп, 371—374
Мыльная пленка, см. мембранная аналогия
Нагруженного стержня колебания 639
Нагрузка движущаяся 651, 652, — и пульсирующая 651, 652
Напряжение в непрерывных средах 342, — не является векторной
величиной 343, — нормальное 155, 343, — продольное 153, — растя-
гивающее 154, 344, — сжимающее 344, сложное 157, — срезы-
вающее или касательное 344; напряжений концентрация вблизи
малого отверстия 506, 522, 527, — крутильных распространение
457, — поверхность 358, — продольных распространение 465, —
радиальных — 453, — разность, см. теории прочности, оптический
метод в теории упругости, — функции 370, — функция Эри 482,
489, 500, 523; напряжения главные 180, 353, 659, — компоненты
347, — — в цилиндрических координатах 504, 517, между напря-
жениями и деформациями соотношения 169, 397, см. также
плоское напряженное состояние, плоское напряженное состоя-
ние обобщенное, преобразование компонентов напряжения, сло-
жение напряжений
Нейтральная ось 210, 215, 219
Непрерывность 341
Неразрезная балка 69, 236, 252 (пр. 8—10, 12), 659, см. моментов
трех теорему
Никель 186
Николя призма, см. оптический метод в теории упругости
Нормальное напряжение, см. напряжение нормальное

- Нормальные колебания, см. колебания нормальные
- Обод маховика 94 (пр. 19)
- Объемного сжатия модуль, см. модуль объемного сжатия
- Оптический метод в теории упругости 491
- Осевое отверстие 506, 522, 527
- Ось балки **63**, 226
- Отражения графическое изображение 463
- Первая гармоника в разложении кривой прогиба 563, 581, 650, 651
- Первая теорема Кастилиано, см. Кастилиано первая теорема; — о минимуме упругой энергии деформации, см. минимума упругой энергии деформации первая теорема
- Первичные напряжения **150**
- Первоначально искривленные балки, см. балки первоначально искривленные
- Перемещение «соответствующее» 15, 25, 60, 571, полное удлинение как функция перемещения 54
- Перерезывающая сила при изгибе балки 291—300, см. изгиба задач, прогиб вследствие перерезывающей силы
- Пластика в равновесии под действием сил, лежащих в ее плоскости, см. плоское напряженное состояние, плоское напряженное состояние обобщенное, — в форме части кольца 514 (пр. 3), — под действием поперечной нагрузки 308—316, — треугольная 501 — круглая, см. круглый диск; пластинок граничные условия 335—338, — поперечные колебания 317—319, 633, 643, — приближенная теория изгиба 300—319, — устойчивость 600—612
- Пластичность 7, 491_{пп}, 538_{пп}
- Плоская деформация **481**
- Плоские фермы **138**
- Плоское напряженное состояние **484**, — — — обобщенное **490**
- Плоскости главные деформации **181**, — — напряжений **180**, **353**
- Поверхности, см. деформации поверхность, напряжений поверхность
- Поверхностные напряжения **480**
- Полости малые 507, см. осевые отверстия
- «Полуобратный метод» Сен-Венана 134, 410, 484, 510
- Поляризованный свет, см. оптический метод в теории упругости
- Полярные координаты 311, 660
- Полярный момент инерции 201
- Поперечная нагрузка 227, — — стоек 579
- Поперечные колебания балки, нагруженной сосредоточенной силой посредине 639, — — вращающегося диска 633_{пп}, — — вращающегося стержня 634, — — круглой пластинки 317, 643, — — лопасти винта 634, 637_{пп}, — — сжатых стержней 630 (пр. 7), — — стержней и валов 276, **613**, 641, 648, — — стержня под действием растягивающих сил 627, — — тяжелой нити 624, 634
- Постоянные упругие 48, 159—166, 403, 413
- Потенциал смещения **450**, — имеющие фиктивные объемные силы 409

- Потенциальная энергия 7, 17, 27, 583, 622
Прандтля мембранная аналогия задачи кручения 467
Предел пропорциональности 185; предел текучести 186, — — характерных материалов 186
Преломление двойное, см. оптический метод в теории упругости
Преобразование компонентов деформации 179, — — напряжения 179, 350
Принцип Сен-Венана 131—134, принципа Сен-Венана приложения 153, 195, 203, 426, 488, 512, 521
Принцип суперпозиции 12, 213, — — в применении к телам с начальными напряжениями 104, принципа суперпозиции доказательство 11—15
Прогиб вследствие перерезывающей силы 298, — неразрезных балок 236, — первоначально искривленных балок 72, — прямых балок 64, 226, 246, 249, практическая важность прогиба 227_{пп}
Продольное напряжение 153
Продольный изгиб стоек 574—578
Продольных волн распространение 465
Прокладки упругие 7, 110, 612 (пр. 10)
Простая ферма, см. фермы
Просто опертый вал 278
Пространственная ферма 142
Прочности теории, см. теории прочности
Прочность 152, 189, 537
Пружины паровоза 655, — пластинчатые (листовые) 253 (пр. 15), 254 (пр. 17), 319, — спиральные 10_{пп}, 90—93, 658, — цилиндрические (винтовые) 319—326, 659
Прямоугольная пластинка под действием сжимающих сил на контуре 606
Псевдо-статически неопределимая ферма 139
Пуассона коэффициент 154, 402, — — для характерных материалов 186, для коэффициента Пуассона пределы 164
- Работа 16, 36, 42
Равновесия общие уравнения 368, — — — круглого цилиндра 517, — — — пластинки 311
Радиальные смещения 439, 516, — колебания 449, 660, радиальных колебаний распространение 453
Разложение напряженного состояния 182, 364
Размерные величины 238
Разрушающее напряжение, см. временное сопротивление
Разрушение 538_{пп}, см. теории прочности
Распор в пятах, см. арки
Распределенная нагрузка 36
Распространение колебаний 457
Расширение объемное 160, — — инвариант относительно ортогонального преобразования осей 385, расширению боковому сопротивление 167; расширения волны 456, — линейного температурный коэффициент 81, — объемного — — 408

- Реакции опор в методе Кастилиано 68
Резина 159
Резонанс 651, 654
Рельсы 653
Рэля метод 588, 611, 622, 632, 645, 656; — метода применение к пластинкам 602, — — — к поперечным колебаниям и критическим скоростям вращающихся валов 614—621, — — — к свободным колебаниям упругих систем 621, — — — к сжатым стержням (стойкам) 585—596, — — обобщение 631, 637
- Свет поляризованный, см. оптический метод в теории упругости
Свинец 165
Сдвиг 164, 380, 384, сдвига стационарные значения 181
Сен-Венана задача 418, 660, — принцип, см. принцип Сен-Венана
Сжатия модуль, см. модуль объемного сжатия
Сжатые стержни (стойки) 255, 274, — — переменного поперечного сечения 265, — — эксцентрично нагруженные 578 (пр. 4); для сжатых стержней теория Эйлера 574, — — — формула Британского министерства авиации 561_{пп}, 579_{пп}; к сжатым стержням применение метода Рэля, см. Рэля метода применение к сжатым стержням, — — — — теоремы энергии 582, над сжатыми стержнями экспериментальные наблюдения 578 (пр. 4); на сжатые стержни влияние погрешности производства 560, — — — действии поперечной нагрузки 268, 579, на сжатых стержней концах действие момента 261; сжатых стержней колебания 630 (пр. 7), — — — приближенного исследования значение 574
Сжимающее напряжение 344
Симметрия, с помощью соображений симметрии доказательства 79, 94, 96
Скорость распространения волн 456, 466
Сложение деформаций 177, — напряжений 172
Сложное напряжение 157
Смещение 375, — радиальное в круглых цилиндрах 516, — соответствующее заданной деформации 395, — чисто радиальное 439
Смещений потенциал, см. потенциал смещения
Собственные функции 646, 647
Совместности условия (уравнения) 393, 410, 416, 419, 484
Сопrotивление материалов 9, 657, 658
Сопряженные соотношения в методе Рэля, см. — — в теории колебаний 616, — — в теории продольного изгиба 588, 590
Сосредоточенный изгибающий момент, см. изгибающий момент сосредоточенный
Составные балки 222, — трубы 535, 537, 540—550
Сохранение энергии 10, 17, 29
Среднее нормальное напряжение 364
Срезающее напряжение 163, 344
Сталь 73, 154, 186, 445
Статическая эквивалентность, см. принцип Сен-Венана

- Стационарные значения сдвига 181, — — касательного напряжения 181, 363, — — напряжения 180
- Стекло 165, 452, 491
- Степень статической неопределенности 137
- Суперпозиция 11, 12, 213, суперпозиции принцип 11, 12, 213, суперпозиции принципа приложение к телам с начальными напряжениями 104, — — — к фермам 147
- Сферическая оболочка 196, 442, 446, 453
- Схема фермы 137
- Текучести предел 186
- Температурный коэффициент линейного расширения 81, — — объемного — 408
- Температурные напряжения, см. влияние изменения температуры
- Теорема трех моментов, см. моментов трех теорема; — наименьшей работы 124, 129 пп, см. также Кастилиано вторая теорема
- Теории прочности 187—191
- Теория максимального напряжения 187, — максимальной деформации 188, — — разности напряжений 188, — — упругой энергии деформации 188
- Термоупругие уравнения 407
- Тимошенко мембранная аналогия 475, 476, — функция изгиба 476
- Типовые решения 502
- Тонкие пластинки, см. пластинка
- Тонкостенные трубы, см. труба
- Треугольная пластинка 501 (пр. 2)
- Треугольник, поперечное сечение стержня в форме треугольника 427 (пр. 1)
- Труба вращающаяся круглая 521, — квадратная под действием силы сжатия 608, — некругового поперечного сечения 205, — под давлением 193, 515, 531, — под действием перерезывающей силы 438 (пр. 2), — при кручении 198, 205, 421
- Удлинение при пределе пропорциональности 186, — полное, выраженное через составляющие перемещения 54; удлинения как функции смещения 375, — главные 385, 659
- Узловые линии 607, 643 пп, — точки 137
- Упругая нить 624, — равнозначность 134, см. принцип Сен-Венана
- Упругая энергия деформации 17, 23, 43, 63, 117, 121, — — — аддитивна при некоторых условиях 43, — — — анизотропных материалов 413, — — — изгиба в балках 60, 63, 220, — — — изотропных материалов 411, — — — кручения 201, — — — пластинок 302, 335, — — — растяжения или сжатия 47, 82, 148, — — — сдвига 298, — — — сложного напряженного состояния 157, см. минимума упругой энергии деформации первая теорема, минимума упругой энергии деформации вторая теорема, теория максимальной упругой энергии деформации
- Упругие прокладки 7, 110, 611 (пр. 10)
- Упругое основание 284

- Упругость 7, 15, 29
Уравнения движения в компонентах напряжения 368, — равновесия
— — — 368
Усилие, см. изгибающее усилие, крутящее усилие
Условия закрепления тела 37
Устойчивость, квадратной трубы 608, — механических свойств 23,
165, — пластинки 600—612, — сжатых стержней (стоек) 558, — трубы,
находящейся под действием внешнего давления 199_{пп}, — упру-
гих систем 574, 577, 598, — эластики 571, устойчивости предель-
ная конфигурация 256, над устойчивостью экспериментальные
наблюдения 563
- Фермы 58—60, 116 (пр. 6), 119, 125, 127, 135 (пр. 12), 136—152
Флаттер крыла 41
Фронт волны 456
Функциональное решение 454
Фурье ряды 561, 585, 648, 650
- Характеристические значения 645
- Цейнера золотниковая диаграмма 271_{пп}
Центр изгиба 41, — кручения 41
Центральная симметрия 441
Цилиндрические координаты 311, 501, 516, 660, — оболочки, см.
труба, — стержни, см. круглого вала задача изгиба
- Частота низшая 622, — собственная 277, 613, частоты пределы 632, —
уравнение 452
- Шар, гравитирующий 444, — неравномерно нагретый 446, шара ра-
диальные колебания 449, 660, в шаре распространения радиаль-
ных колебаний 453
Шарнирные закрепления 615, 629
- Эйлера теория продольного изгиба стоек 574
Эйртона-Перри пружины 659
Эквивалентные системы нагрузок, см. принцип Сен-Венана
Экспериментальные методы и результаты 19, 30, 36, 44, 152, 185—
191, 195, 203, 213, 372, 468, 478, 491—495, 533, 563, 584, 657,
— наблюдения 563
Экстензометры 185, 493
Эластика 63_{пп}, 566
Эллипс инерции 216
Эллиптические интегралы 568, 570
Эллиптического вала кручение 427
Энгессера-Кармана теория продольного изгиба стоек 578_{пп}
Энергетических методов приложение к задачам устойчивости 582,
592, 598, 600—610, — — — к теории колебаний 614, 622—634

Энергия потенциальная, см. сохранение энергии, упругая энергия деформации

Эри функция напряжений, см. напряжений функция Эри

Эффективная жесткость при изгибе 222

Юнга модуль 48, 153, 402, — — для характерных материалов 186

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия автора к первому английскому изданию	5
Глава I. Закон Гука и следствия из него для упругих тел, находящихся в равновесии под действием приложенных к ним внешних сил	7
Глава II. Примеры простейших упругих систем, подчиняющихся закону Гука	47
Глава III. Тела с «начальными напряжениями». Вторая теорема Кастилиано и принцип Сен-Венана	101
Глава IV. Элементарные теории напряжений и деформаций	152
Глава V. Простые типы напряженных состояний: тонкостенные круглые трубы под действием внутреннего давления, кручение тонкостенных труб и круглых валов, чистый изгиб цилиндрических стержней	192
Глава VI. Задачи, связанные с деформациями балок при изгибе	226
Глава VII. Некоторые приложения приближенных теорий изгиба и кручения	290
Глава VIII. Общая теория напряжений	339
Глава IX. Общая теория деформаций	375
Глава X. Соотношения между напряжениями и деформациями и общие уравнения теории упругости	397
Глава XI. Решения общих уравнений	416
Глава XII. Плоская задача теории упругости. Толстостенные трубы и вращающиеся валы	480
Глава XIII. Устойчивость упругих систем. Продольный изгиб стержней (стойек)	558
Глава XIV. Устойчивость упругих систем (продолжение) и теория колебаний	613
Библиографические и дополнительные примечания	657
Именной указатель	661
Предметный указатель	664

Редактор *В. В. Розанцева*
Технические редакторы *Б. И. Корни-*
лов, А. Н. Никифорова
Корректор *М. М. Шулименко*

*

Подписано к печати 9/IV 1948 г.
А-08179. Печ. лист. 42¹/₄, уч.-изд. л. 38,8
Формат 82×108¹/₃₂. Изд. № 1/25.
Заказ № 1308. Цена 37 р. 70 к.

*

2-я типография „Печатный Двор“
им. А. М. Горького треста „Полиграф-
книга“ ОГИЗа при Совете Министров
СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.

О П Е Ч А Т К И

Стр.	Стро-ка	Напечатано	Следует читать
165	7 св.	$-1 < \sigma < \frac{1}{2}$	$-1 < \sigma < \frac{1}{2}$ (16)
166	2 св.	кг/см; (II) 42500 кг/см	кг. см; (II) 42500 кг. см.
198	10 св.	2,82	0,503
244	6 св.	(неизвестный)	(неизвестной)
262	10 св.	„простой	„просто
281	15 св.	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda$	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda$
349	15 св.	$X_x = X'_x$	$X_{x'} = X'_x$
381	20 св.	e_{xx}	e_{xv}
449	4 св.	$U \propto \sin(gt + \varepsilon)$	$U \propto \sin(gt + \varepsilon)$
649	10 св.	$y \propto \sin \frac{n \pi x}{l}$	$y \propto \sin \frac{n \pi x}{l}$
666	3—4 св.	Единицы 41,48 пп см. характеристические значения	Единицы 41,48 пп Eigenwerte см. характеристические значения