Н. Н. Круликовский

Математические задачи для абитуриентов

Томск — 1973

ТОМСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1973

Сборник математических задач имеет целью помочь будущим абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам.

Сборник составлен по материалам вступительных экзаменов по математике в Томском государственном университете, но может быть использован при подготовке к экзаменам абитуриентами различных высших учебных заведений.

Сборник может служить пособием для учащихся средних школ и учителей математики.

Редактор — доц. Е. Н. Аравийская

От составителя

Настоящий сборник содержит задачи, которые предлагались на письменных и устных вступительных экзаменах по математике в течение ряда лет в Томском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. В. В. Куйбышева.

Сборник имеет целью познакомить будущих абитуриентов с требованиями, предъявляемыми к поступающим на вступительных экзаменах по математике, и помочь им при подготовке к экзаменам.

В качестве введения к сборнику дано решение нескольких вариантов письменных экзаменационных работ из предлагавшихся поступающим на различные факультеты и указаны некоторые основные недостатки в знаниях абитуриентов по математике, обнаруживающиеся в ходе вступительных экзаменов.

Включенные в сборник некоторые задачи нестандартного типа адресованы будущим абитуриентам, проявляющим особую склонность к математике. Самостоятельное решение подобных задач может помочь развитию их математических способностей и позволит успешно сдать вступительные экзамены.

При подборе задач для экзаменов использовались различные сборники задач и научно-методические журналы.

Настоящий сборник, соблюдая преемственность со «Сборником задач по математике для подготовки к приемным экзаменам», выходившим в издательстве Томского университета, учитывает особенности измененной программы вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения СССР, принятой в 1972 году, и содержит материалы экзаменов последующих лет.

Пользуюсь случаем выразить благодарность сотрудникам механико-математического факультета Томского государственного университета, принявшим участие в редактировании сборника и проверке решений, а также всем лицам, сообщившим мне свои замечания и пожелания относительно сборника.

Я весьма признателен редактору сборника кандидату физико-математических наук, доценту Томского государственного университета Е. Н. Аравийской за ее внимание к настоящему изданию.

24 сентября 1972 г.

Н. Н. Круликовский.

ВВЕДЕНИЕ

Вступительные экзамены по математике в Томском государственном университете, как и в других высших учебных заведениях, проводятся согласно правилам приема и программам вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР, утвержденным Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

В 1972 году абитуриенты математических, физических, химического, геолого-географического, экономического и биологического факультетов сдавали письменный экзамен по математике, а абитуриенты математических, физических факультетов и поступающие на специальность «метеорология» геолого-географического факультета сдавали также и устный экзамен по математике.

Программа вступительных экзаменов по математике, по которой в 1972 году проводились экзамены во всех высших учебных заведениях СССР, приводится в этой книге (см. Приложение).

О содержании письменного экзамена дают представление приведенные далее решения нескольких вариантов письменных работ, предлагавшихся абитуриентам различных факультетов, и тексты ряда вариантов, помещенные в § 11 настоящего сборника.

На устном экзамене предлагаются вопросы по программе и задачи. Значительное число задач настоящего сборника предлагалось на устных экзаменах. Если абитуриент сдает два экзамена по математике, то задачи на устном экзамене обычно предлагаются в соответствии с качеством выполнения письменной работы.

Как уже отмечено, билеты для устных экзаменов составляются в полном соответствии с программой вступительных экзаменов по математике. Ответы на вопросы экзаменационного билета должны быть полными с необходимыми доказательствами, выводом формул, определениями и соответствующими примерами.

Отметим некоторые ошибки, которые часто допускаются абитуриентами на письменном и устном экзаменах по математике, и недостатки в подготовке, обнаруживающиеся на приемных экзаменах. Математические знания значительной части абитуриентов ограничены формальным знанием вопросов программы вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения в пределах учебников. Навыки решения задач, вычислений и преобразований прежде всего необходимы для дальнейшего успешного изучения и применения математики при обучении в высшем учебном заведении. Между тем многие абитуриенты оказываются слабо подготовленными в этом отношении. Из отдельных недостатков подготовки абитуриентов по математике можно указать следующие.

1. Нет четкости в определениях, формулировках теорем и т. д. Например, определяют параллелограмм как четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны. Требование равенства противоположных сторон здесь излишне.

2. Слабое представление о развитии понятия числа и различных видах чисел (натуральные, целые, рациональные, иррациональные, комплексные).

3. Слабо развито геометрическое представление фигур и тел (комбинации геометрических фигур и тел, расположение различных углов и т. п.).

4. Допускаются грубейшие ошибки в алгебраических и тригонометрических преобразованиях (неправильное сокращение, отбрасывание общего знаменателя, неправильное освобождение от иррациональности в знаменателе, ошибки при действиях с радикалами и рациональными показателями).

5. Часто допускаются ошибки в применении понятия размерности величин. Например, при решении задачи 1 из варианта II минуты не переводились в часы или наоборот. При записи общего решения тригонометрических уравнений часто пользуются одновременно градусной и радианной мерой углов.

6. Слабое знание графиков функций, изучаемых в

школе, и неумение применять графики для формулировки свойств функций и для решения уравнений и неравенств.

7. Часто допускаются ошибки в записи общего решения тригонометрических уравнений.

8. Неумение анализировать условия задачи и находить конкретный путь решения данной задачи.

9. При решении систем уравнений применяется почти всегда только метод подстановки. Специальных приемов для решения систем уравнений частного вида не знают.

10. Неумение наиболее рациональным способом выбрать основное неизвестное при решении задач на составление уравнения.

11. Небрежное написание букв латинского и греческого алфавитов в математических обозначениях. Например, употребление буквы g вместо q, обозначение тригонометрических функций с большой буквы, нерациональные обозначения отрезков, углов, функций и т. д.

12. Неумение анализировать полученный результат (например, два решения в задачах на составление уравнений, получение геометрической прогрессии со знаменателем 1, мнимые корни при решении неравенств, случаи потери корней и приобретения посторонних значений неизвестных при решении уравнений).

13. Слабое знание свойств тригонометрических функций.

14. Слабая математическая культура речи.

При подготовке к вступительным экзаменам по математике в высшие учебные заведения можно рекомендовать, кроме школьных учебников и задачников, следующие пособия.

1. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд. 3-е. М., «Наука», 1972.

2. Э. З. Шувалова, Б. Г. Агафонов, Г. И. Богатырев. Повторим математику. М., «Высшая школа», 1968.

3. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1971.

4. В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. Задачи по элементарной

математике. М., Физматгиз, 1960 (и последующие издания).

5. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы. Под общей редакцией М. И. Сканави. М., 1972.

6. Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. Сборник задач по элементарной математике. М., Физматгиз, 1961 (и последующие издания).

7. Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. Задачи по элементарной математике повышенной трудности. М., «Наука», 1969.

8. К. У. Шахно. Сборник задач по математике повышенной трудности. Минск, «Высшая школа», 1964.

9. В. Н. Матвеев и Н. М. Матвеев. Сборник задач по математике. (В помощь поступающим в вузы). Издательство Казанского университета, 1965.

10. И. О. Давыденко, О. А. Стуканова. Методические рекомендации по математике. (В помощь учителю и учащимся старших классов). Томск, 1971.

Все эти сборники задач содержат большое число задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в различных высших учебных заведениях. Для большинства задач даны подробные указания и решения. В этих пособиях приводится анализ недочетов и ошибок, часто допускаемых абитуриентами на вступительных экзаменах. Задачи для абитуриентов и материалы о вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения постоянно публикуются в научно-популярных журналах «Квант», «Наука и жизнь», в научно-методическом журнале «Математика в школе». Для особо интересующихся математикой можно рекомендовать различные сборники задач математических олимпиад и научно-популярную литературу по математике.

Рассмотрим решение задач нескольких вариантов письменных работ.

Вариант I

1. Катер вышел из А одновременно с плотом, плывшим по течению реки, и прошел по течению реки $13^1/_3$ *км*, а затем, не останавливаясь, $9^1/_3$ *км* в обратном

направлении, где и встретился с плотом. Скорость течения реки 4 *км/час*. Найти собственную скорость катера.

Решение. Для составления уравнения заметим, что катер и плот находились в пути до встречи одинаковое время. Если через x обозначим собственную скорость катера, то по течению катер шел $\frac{13\frac{1}{3}}{x+4}$ часов, а против течения $\frac{9\frac{1}{3}}{x-4}$ часов. Плот до встречи с катером проплыл $13\frac{1}{3}-9\frac{1}{3}=4$ (*км*) со скоростью 4 *км/час*, т. е. затратил времени 1 час.

Составляем уравнение

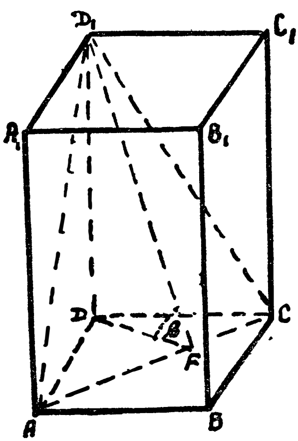

Рис. 1

$$\frac{13\frac{1}{3}}{x+4}+\frac{9\frac{1}{3}}{x-4}=1.$$

После преобразования получим

$$x^2-22\frac{2}{3}x=0.$$

Положительный корень этого уравнения $x=22\frac{2}{3}$ будет решением задачи. Собственная скорость катера $22\frac{2}{3}$ *км/час*.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, C, D_1 проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти объем параллелепипеда, если стороны основания его равны a и b.

Решение. Сделаем построение (см. рис. 1). Плоскость DD_1F перпендикулярна диагонали AC основания параллелепипеда. В прямоугольном треугольнике DFD_1 угол DFD_1 равен β. Отрезок DF как высота прямоугольного треугольника ACD с катетами a и b равен

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Из треугольника DFD_1 вычисляем боковое ребро DD_1 параллелепипеда, равное высоте параллелепипеда: $DD_1 = \frac{ab \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Так как объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его трех измерений, то

$$V = \frac{a^2b^2 \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243.$$

Решение. Так как $243 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-}$, то имеем неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}.$$

Показательная функция есть убывающая функция, если ее основание меньше единицы. Поэтому получаем, что

$$\frac{1+x}{1-x} < -5$$

Для решения этого неравенства переносим все его члены влево и приводим к общему знаменателю. После преобразований получим

$$\frac{6-4x}{1-x} < 0$$

или, разделив обе части неравенства на положительное число 2,

$$\frac{3-2x}{1-x} < 0.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. $3-2x > 0$, $1-x < 0$. Решая каждое неравенство, полу-

чим $x<\frac{3}{2}$ и $x>1$. Окончательно имеем

$$1<x<\frac{3}{2}.$$

$$2.\ 3-2x<0,\ 1-x>0.$$

При решении каждого неравенства получим $x>\frac{3}{2}$ и $x<1$, но это одновременно невозможно.

Итак, неравенство выполняется при $1<x<\frac{3}{2}$.

4. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Значения x, при которых $\sin x=0$, не могут быть корнями данного уравнения, так как при таких значениях x правая часть уравнения не имеет смысла. Поэтому в уравнении можно освободиться от знаменателя, умножив обе части уравнения на $\sin x$. Итак,

$$\sin^2 x+\sin x\cos x=1.$$

или, заменяя $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ и вынося $\cos x$ за скобки, получим

$$\cos x\,(\sin x-\cos x)=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения $\cos x=0$ и однородное уравнение $\sin x-\cos x=0$.

Решая уравнение $\cos x=0$, имеем $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Второе уравнение $\sin x-\cos x=0$ преобразуется в $\operatorname{tg} x=1$, решая которое, имеем $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$.

Итак, окончательно имеем $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ и $x=\frac{\pi}{4}(4n+1)$.

Вариант II

1. Поезд был задержан на станции на t минут. Чтобы наверстать потерянное время, он увеличил свою

скорость на a *км* в час и на следующем перегоне в b *км* опоздание ликвидировал. Какова была скорость поезда до его задержки на станции?

Решение. Обозначим через x первоначальную скорость поезда. Перегон в b *км* поезд с увеличенной скоростью $x+a$ *км* в час прошел за $\frac{b}{x+a}$ часов, вместо $\frac{b}{x}$ часов, выиграв при этом t минут или $\frac{t}{60}$ часов. Составляем уравнение

$$\frac{b}{x+a}+\frac{t}{60}=\frac{b}{x}.$$

После преобразования получим

$$tx^2+atx-60\ ab=0.$$

Решением задачи будет положительный корень уравнения, т. е.

$$x=\frac{-at+\sqrt{a^2t^2+240abt}}{2t}.$$

2. Ромб, у которого меньшая диагональ равна его стороне a, вращается около прямой, проходящей через конец большей диагонали перпендикулярно к последней. Вычислить поверхность и объем полученного тела вращения.

Решение. Сделаем построение (рис. 2).

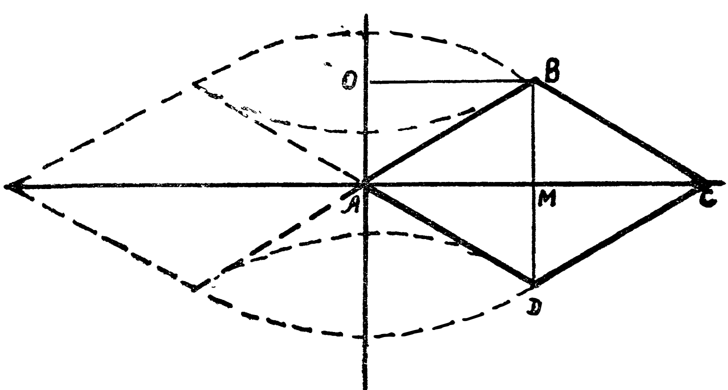

Рис. 2

Поверхность полученного тела вращения может быть получена как удвоенная сумма боковых поверхностей усеченного конуса с образующей BC и конуса с образующей AB. Объем же полученного тела вращения равен удвоенной разности объемов тех же конусов. $AM = OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ как высота равностороннего треугольника ABD.

$$AC = 2AM = a\sqrt{3},$$

$$S = 2\left[\pi\left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{\pi a\sqrt{3}}{2}a\right],$$

$$S = 4\pi\sqrt{3}a^2.$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3}\pi\frac{a}{2}\left(3a^2 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{3a^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi\frac{a}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\right].$$

$$V = \frac{3}{2}\pi a^3.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 4.$$

При решении задачи следует исключить из рассмотрения те значения x, при которых $\sin x$ или $\cos x$ обращаются в нуль, так как при таких значениях x левая часть уравнения не определена. Поэтому в уравнении можно освободиться от знаменателей. Получим

$$\sin^2 3x\,\cos^2 x - \sin^2 x\,\cos^2 3x = 4\sin^2 x\cos^2 x.$$

Преобразуем левую часть уравнения, разложив ее на множители, как разность квадратов

$$(\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x)\,(\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x) = \sin 4x\sin 2x = 2\sin^2 2x\cos 2x.$$

Правая часть преобразуется в $\sin^2 2x$.
Таким образом, получим

$$2\sin^2 2x\cos 2x = \sin^2 2x,$$

здесь можно сократить на $\sin^2 2x$, так как $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ в нуль не обращается в силу сделанного выше замечания. После сокращения имеем

$$2\cos 2x = 1$$

или

$$\cos 2x = \frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение, получим $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ или

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{x-3}$$

Решение. Переносим все члены неравенства влево и приводим к общему знаменателю

$$\frac{-x-5}{(x+1)(x-3)} < 0$$

или, умножив на -1,

$$\frac{x+5}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1 случай. $x+5>0$, $(x+1)\ (x-3)>0$.

Решая каждое неравенство, получим $x>-5$ и $x<-1$ или $x>3$. Окончательно получим

$$-5<x<-1 \text{ или } x>3.$$

2 случай. $x+5<0$, $(x+1)(x-3)<0$.

Решая эти неравенства, получим

$$x<-5 \text{ и } -1<x<3,$$

но это невозможно.

Итак, неравенство выполняется при $-5<x<-1$ или $x>3$.

Вариант III

1. Для поднятия на лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 *м*) при двух шестисекунд-

ных остановках для выпуска пассажиров нужно столько же времени, сколько потребуется, чтобы подняться на лифте московского высотного здания (Смоленская площадь) при одной семисекундной остановке на 20-й этаж (высота 81 *м*). Узнать подъемную скорость лифта в *м/сек* в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 *м/сек*.

Решение. Для составления уравнения можно воспользоваться равенством времени подъема на различных лифтах, о которых говорится в условии задачи. Обозначим подъемную скорость лифта в высотном здании через x. Тогда скорость подъема обычного лифта $x-1{,}5$. Составляем уравнение

$$\frac{81}{x}+7=\frac{33}{x-1{,}5}+2\cdot 6,$$

или после преобразований

$$x^2-11{,}1x+24{,}3=0.$$

Это уравнение имеет два положительных корня $x_1=3$ и $x_2=8{,}1$. Оба эти значения удовлетворяют условиям задачи. Таким образом, по условиям задачи скорость лифта в высотном здании может быть 3 *м/сек* или 8,1 *м/сек*. Физическая неопределенность задачи может быть устранена, если принять во внимание практические сведения о скоростях лифтов. Тогда получаем единственное решение 3 *м/сек*.

2. Основанием призмы служит правильный треугольник, описанный около окружности радиуса r. Одна из вершин призмы проектируется в центр основания. Боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол α. Найти объем призмы.

Решение. Сделаем построение (рис. 3).

Сторона a правильного треугольника, описанного около окружности радиуса r, вычисляется по формуле

$$a=2r\sqrt{3}.$$

Площадь основания призмы можно вычислить по формуле

$$S=pr,$$

где p — полупериметр, для рассматриваемого треугольника получим

$$S=3r^2\sqrt{3}$$

Высоту призмы найдем из треугольника AA_1O, в котором сторона AO равна 2r, так как медиана AM точкой O делится в отношении 2:1, а $OM=r$. Итак, $h=A_1O=$ $=2r\operatorname{tg}\alpha$, а объем призмы равен

$$v=6r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

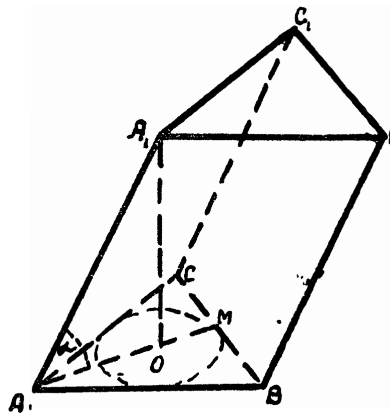

Рис. 3

3. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha+$ $+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+$ $+\operatorname{ctg}\alpha=m$.

Решение. Возводя данное равенство в квадрат и, принимая во внимание, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=$ $=1$, легко получим $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=m^2-2$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Решение. Возведем обе части второго уравнения в квадрат

$$x+y+2\sqrt{xy}=xy,$$

принимая во внимание первое уравнение и заменяя $\sqrt{xy}=z$, получим

$$z^2-2z-8=0.$$

Если рассматривать только арифметические значения квадратных корней, то отрицательный корень этого уравнения приведет к посторонним значениям неизвестных для исходной системы уравнений.

Поэтому $\sqrt{xy}=4$ и $xy=16$.

Для нахождения x и y имеем теперь систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=16. \end{cases}$$

Для нахождения двух чисел по их сумме и произведению составляем вспомогательное уравнение

$$t^2-8t+16=0,$$

корни которого $t_{1,2}=4$.

Итак, исходная система имеет единственное решение

$$x=4,\ y=4.$$

Если для квадратных корней допускать также отрицательные значения, т. е. рассматривать алгебраические значения корней, то получаются еще два решения системы

$$x_{2,3}=4\pm2\sqrt{3},\ y_{2,3}=4\mp2\sqrt{3},$$

соответствующие отрицательному значению $z_2=-2$.

Вариант IV

1. Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух мест, расстояние между которыми равно 20 *м*. Одно из них, находящееся позади, движется равноускоренно и проходит в первую секунду 25 *м*, а в следующую на $^1/_3$ *м* больше; другое тело, двигаясь равнозамедленно, проходит в первую секунду 30 *м*, а в следующую на $^1/_2$ *м* меньше. Через сколько секунд первое тело нагонит второе?

Решение. Для определения пути, пройденного каждым телом за t *сек*, по известной формуле

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

нужно знать начальную скорость и ускорение каждого тела, для определения которых получаем уравнения:

$$25=v_1+\frac{a_1}{2}$$

$$50\frac{1}{3}=2v_1+2a_1$$

для первого тела и

$$30=v_2+\frac{a_2}{2},$$

$$59\frac{1}{2}=2v_2+2a_2$$

для второго. Решая эти системы уравнений, находим

$$a_1=\frac{1}{3}, v_1=24\frac{5}{6}, a_2=-\frac{1}{2}, v_2=30\frac{1}{4}.$$

Приравнивая пути, пройденные каждым телом до того момента, когда первое тело нагонит второе, получим уравнение для определения t:

$$24\frac{5}{6}t+\frac{t^2}{6}=30\frac{1}{4}t-\frac{t^2}{4}+20,$$

или после преобразования

$$t^2-13t-48=0.$$

Положительный корень этого уравнения $t=16$ является решением задачи. Ответ на вопрос задачи: $t=16$ *сек.*

В некоторых задачниках встречается следующий способ решения этой задачи.

Пути, проходимые каждым телом последовательно в одну секунду, образуют арифметические прогрессии. Вычисляем эти пути по формуле суммы арифметической прогрессии и составляем уравнение:

$$\frac{25+25+\frac{1}{3}(t-1)}{2}t=\frac{30+30-\frac{1}{2}(t-1)}{2}t+20,$$

или после упрощения

$$t^2-13t-48=0$$

Положительный корень $t=16$ *сек* дает решение задачи. Но этот способ можно считать оправданным только в тех случаях, когда ответ выражается целым числом секунд.

2. Один из плоских углов трехгранного угла равен α; двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны соответственно β и γ. Найти два других плоских угла.

Р е ш е н и е. Сделаем построение (рис. 4). Из произвольной точки D ребра, не являющегося стороной данного плоского угла, проведем перпендикуляры DB и DC к сторонам данного плоского угла и перпендикуляр DE к плоскости этого же плоского угла. Указанное построение предполагает, что углы $EBD=\beta$ и $ECD=\gamma$ острые, а следовательно, искомые плоские углы $DAB=x$ и $DAC=y$ также острые. Примем отрезок $AE=1$.

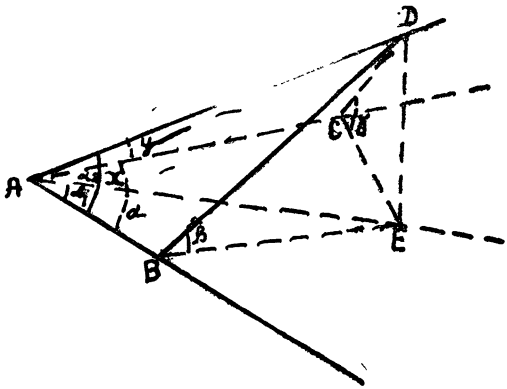

Рис. 4

Тогда $AB=\cos\alpha_1$, $BE=\sin\alpha_1$, $BD=\dfrac{\sin\alpha_1}{\cos\beta}$,

$$\operatorname{tg} x=\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1\cos\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\cos\beta}.$$

Аналогично

$$AC=\cos\alpha_2,\ CE=\sin\alpha_2,\ CD=\frac{\sin\alpha_2}{\cos\gamma},$$

$$\operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\cos\gamma}.$$

Из треугольников BDE и CDE вычисляем отрезок DE:

$$DE=\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta=\sin\alpha_2\operatorname{tg}\gamma,$$

отсюда

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Принимая во внимание, что $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, получим

$$\sin\alpha_1=\sin(\alpha-\alpha_1)\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=(\sin\alpha\cos\alpha_1-\cos\alpha\sin\alpha_1)\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta + \cos\alpha \operatorname{tg}\gamma}$$

и, аналогично,

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma + \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Наконец,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\gamma}{\sin\beta + \cos\alpha \cos\beta \operatorname{tg}\gamma},$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\beta}{\sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma \operatorname{tg}\beta}.$$

Решение задачи при других предположениях относительно углов β и γ может быть получено аналогичным образом.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{(x+4)(x-3)} < 6 - x.$$

Решение. Так как левая часть неравенства неотрицательная, то $6-x>0$ или $x<6$. Подкоренное выражение в левой части неравенства должно быть неотрицательным

$$(x+4)(x-3) \geqslant 0,$$

что будет при $x \leqslant -4$ и $x \geqslant 3$.

Так как обе части неравенства при указанных значениях неотрицательны, то при возведении обеих частей неравенства в степень знак неравенства сохраняется. Освобождаемся от иррациональности, возведя обе части неравенства в квадрат

$$(x+4)(x-3) < 36 - 12x + x^2,$$

или после раскрытия скобок, перенесения всех членов неравенства в левую часть и приведения подобных

$$13x - 48 < 0.$$

Отсюда, $x < 3\frac{9}{13}$. Принимая во внимание полученные ранее границы для x, окончательно получаем

$$x \leqslant -4,\ 3 \leqslant x < 3\frac{9}{13}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 2x - 4\cos^4 x = \sin 4x.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^2 2x - 4\cos^4 x = \sin^2 2x - (2\cos^2 x)^2 =$$
$$= \sin^2 2x - (1+\cos 2x)^2 =$$
$$= -(\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1 - \sin^2 2x) =$$
$$= -2\cos 2x(\cos 2x + 1) = -4\cos 2x\cos^2 x.$$

Правую часть уравнения запишем в виде

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\cos x\cos 2x\sin x.$$

Возвращаемся к исходному уравнению

$$-4\cos 2x\cos^2 x = 4\cos x\cos 2x\sin x.$$

Переносим все члены уравнения в одну сторону и сокращаем на 4

$$\cos x\cos 2x\,(\cos x + \sin x) = 0.$$

Уравнение распадается на три уравнения:

$$\cos x = 0;\ \cos 2x = 0,\ \cos x + \sin x = 0.$$

Решая первые два из этих уравнений, получим

$$x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ x_2 = \frac{\pi}{4}(2n+1).$$

Решение третьего уравнения $x_3 = \frac{\pi}{4}(4n-1)$, как содержащееся во втором решении, следует отбросить.

§ 1. Задачи на составление уравнений

1. Из двух пунктов A и B выехали одновременно два связиста к месту C. Первый, двигаясь с постоянной скоростью, приехал в C через a минут, а второй, чтобы попасть в C одновременно с первым, должен проезжать каждый километр на c минут скорее первого, так как расстояние от B до C на b *км* больше расстояния от A до C. Определить расстояние от A до C.

2. При рытье колодца глубиной свыше 10 *м* за первый метр глубины платили 1 руб., а за каждый следующий на 0,5 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того, за весь колодец дополнительно было уплачено 10 руб. Средняя стоимость рытья 1 *м* глубины оказалась равной 6 руб. 25 коп. Определить глубину колодца.

3. Два поезда отправляются навстречу друг другу с постоянными скоростями, один из Москвы, другой из Ленинграда. Они могут встретиться на половине пути, если поезд из Москвы отправится на 1,5 часа раньше. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 6 часов расстояние между ними составляло бы десятую часть первоначального. Сколько часов каждый поезд употребляет на прохождение пути между Москвой и Ленинградом?

4. Из двух городов, расстояние между которыми равно a *км*, движутся равномерно навстречу друг другу два поезда. Первый поезд начал двигаться на c часов позже, чем второй, и они встретились на середине пути, кроме того, известно, что первый поезд проходит каждый час на b *км* больше, чем второй. Сколько километров проходит каждый поезд в час?

5. Два обыкновенных плуга и один тракторный обрабатывают участок земли в a дней. Четыре обыкновен-

ных плуга выполнили бы ту же работу на b дней позже, чем один тракторный плуг. Во сколько дней мог выполнить всю работу один тракторный плуг?

6. Двое рабочих, работая вместе, могут окончить некоторую работу в m часов. Во сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу, если известно, что для выполнения всей работы одному второму понадобится на n часов больше, чем для выполнения всей работы одному первому?

7. На беговой дорожке состязались два конькобежца на дистанции в s *км*. Когда победитель подошел к финишу, другому оставалось бежать еще целый круг. Определить длину беговой дорожки, если победитель, проходя каждый круг на a секунд быстрее побежденного, закончил дистанцию в t минут.

8. По шоссе ABC двое одновременно отправляются из A и B в направлении C. Выехавший из A проезжает B и через a час. после этого догоняет первого. Вместе до встречи они проехали d *км*. Если бы второй выехал из A, то до места встречи он проехал бы b часов. Найти расстояние между A и B.

9. Два грузовика одновременно выезжают с одного и того же склада в пункт, отстоящий от него на a *км*. Один идет со скоростью, большей на m *км* в час, чем другой, и приходит к месту назначения на n часов раньше. С какой скоростью идет каждый грузовик?

10. Кусок материи стоит a рублей. Если бы в куске было на b *м* больше, а весь кусок стоил бы a руб., то каждый метр стоил бы на c руб. меньше. Сколько метров материи было в куске?

11. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 *кг* нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

12. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A, направляясь в пункт B, расположенный в 56 *км* от A. Второй велосипедист отстает от первого каждый час на 2 *км* и прибывает в B на 30 минут позже, чем первый. С какой скоростью едет каждый велосипедист?

13. Два самолета вылетают одновременно с одного и того же аэродрома в пункт, отстоящий на 1600 *км* от

места вылета. Один самолет летит на 40 *км* в час быстрее другого и прибывает к месту назначения на 2 часа ранее, чем другой. С какой скоростью летит каждый самолет?

14. Три экскаватора производят работу. Если эту работу будет выполнять один первый, то кончит работу на a дней позже, чем все вместе. Если же эту работу будет выполнять второй, то он кончит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третий, то ему понадобится времени в c раз больше, чем при работе всех экскаваторов вместе. Во сколько дней выполняет работу каждый из них в отдельности?

15. A выполняет некоторую работу в срок на a дней больше, чем B, и на b дней больше, чем C. A и B, работая вместе, выполняют эту работу в срок, равный сроку C. Определить время, в которое каждый выполняет эту работу, работая один.

16. Два мотоциклиста выехали одновременно из A в B и из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p *км* от B, второй раз в q *км* от A через t часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклистов.

17. Два пешехода вышли одновременно навстречу один другому из пунктов A и B. Когда они встретились, то оказалось, что первый пешеход прошел на m *км* больше, чем второй. Затем каждый из них, сохраняя свою скорость, отправился дальше, после чего первый прибыл в пункт B через p часов после встречи, а второй прибыл в пункт A через q часов после встречи. Найти расстояние между пунктами A и B.

18. Из двух пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются через t часов. Какова скорость каждого, если первый проезжает m *км* на q часов быстрее второго и если расстояние AB равно s *км*?

19. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через a часов. Во сколько времени прошел расстояние между A и B каждый из них, если первый, вышедший из A, пришел в пункт B на b часов позже, чем второй пришел в пункт A?

20. Колхоз купил для заправки тракторов на a руб. лигроина и на такую же сумму керосина, всего n *кг*. Сколько куплено лигроина и сколько керосина, если 1 *кг* первого на b руб. дороже 1 *кг* второго?

21. Наняты двое рабочих по разным ставкам. Первый получил a руб., а второй, работавший меньше первого на n дней, получил c руб. Если бы первый работал столько дней, сколько работал второй, а второй столько, сколько первый, то они получили бы поровну. Сколько дней работал каждый?

22. Пешеход идет от A к B со скоростью $3^1/_2$ *км* в час и от B к C со скоростью 4 *км* в час. На обратном пути он рассчитал, что пройдет это же расстояние в то же время, если будет делать по $3^3/_4$ *км* в час. Но в C он задержался на 14 минут и потому расстояние BA должен был пройти, двигаясь по 4 *км* в час. Определить расстояния AB и BC.

23. Поезд, направляющийся на станцию A, был задержан на станции B сверх расписания на 1 час 42 минуты. При дальнейшем движении скорость поезда была увеличена на 20%, а на последнем перегоне, составляющем 0,1 расстояния AB, на 25%. В результате поезд прибыл на станцию A без опоздания. Определить, за какое время при нормальных условиях поезд проходил расстояние AB.

24. В кинозале имеется n стульев, расположенных рядами с одинаковым числом стульев. Если в каждом ряду добавить по p стульев, а число рядов уменьшить на m, то общее число мест в кинозале останется прежним. Сколько рядов стульев в кинозале и сколько стульев в каждом ряду?

25. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на n минут меньше рабочего B. Сколько деталей обработает каждый из них за t часов, если A обрабатывает за это время на m деталей больше, чем B?

26. Турист рассчитывал пройти a *км* за определенное время; пройдя b *км*, он отдохнул 15 минут и, чтобы прийти вовремя, он увеличил скорость на c *км* в час. Определить первоначальную скорость движения туриста.

27. Два экскаватора, работая вместе, выполняют некоторую работу в m дней. Если каждый из них выпол-

нил бы эту работу один, то первый из них окончил бы всю работу на n дней позже второго. Определить, во сколько дней каждый из них может выполнить всю работу, работая один.

28. Два экскаватора, работая совместно, вырыли котлован за a часов. Если бы первый экскаватор вырыл первую половину котлована, а второй — оставшуюся часть, то они проработали бы b часов. За сколько времени первый экскаватор, работая отдельно, мог вырыть тот же котлован?

29. Два самолета вылетают одновременно из пункта A в пункт B, расстояние между которыми s *км*. Скорость первого самолета на m *км* в час меньше скорости второго, поэтому первый самолет прилетает в B на n часов позже второго. Найти скорость первого самолета и время, затрачиваемое на перелет из A в B.

30. Два куска латуни весят a *кг*. В первом куске чистой меди содержится $p\%$, во втором $q\%$, при этом в первом куске чистой меди на b *кг* больше, чем во втором. Сколько весит каждый кусок латуни?

31. Часы показывают в некоторый момент на m минут меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на n минут меньше, чем следует, но уходили бы вперед в сутки на t минут больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы?

32. По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный круг на t секунд быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами равно T. Определить скорости этих точек.

33. Моторная лодка, обладающая скоростью a *км* в час, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за m часов. Расстояние между пунктами равно s *км*. Найти скорость течения реки.

34. Сосуд емкостью в 8 *л* наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кис-

лорода 9%. Определить, по скольку литров выпускалось каждый раз из сосуда

35. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке.

§ 2. Алгебраические и тригонометрические преобразования

1. Доказать тождество

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0.$$

2. Преобразовать к простейшему виду выражение

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{1}{x^{1,5}-1}.$$

3. Доказать, что произведение четырех натуральных последовательных чисел в сумме с единицей дает полный квадрат.

4. Упростить

$$\left[\frac{a^2+ax}{2x}:(a^2-x^2)\right]\cdot\left[\frac{(a+x)^2}{4ax}-1\right].$$

5. Упростить выражение

$$\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}.$$

6. При каком значении k многочлен x^3+6x^2+kx+ $+12$ делится на $x+4$?

7. Делится ли многочлен $x^5-3x^4+4x^3-2x^2+5x-$ -5 без остатка на x^2-3x+2?

8. Вычислить

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}} \quad \text{при } x=\frac{2mn}{n^2+1} \quad (m>0,\ n>0).$$

9. Освободиться от иррациональности в знаменателе

$$\text{а) } \frac{1}{2-\sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{2}{1+2\sqrt[3]{2}}; \quad \text{в) } \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

10. Вычислить $a^4+b^4+c^4$, если $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$.

11. Разложить на множители

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c).$$

12. Разложить на линейные множители

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

13. Разложить на множители

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5.$$

14. Упростить выражение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\times$$

$$\times\left(x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}+2\right)\sqrt{0{,}002}.$$

15. Упростить выражение

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{6}}-\frac{5}{\sqrt[6]{c}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}-\frac{5\left(a^{-\frac{1}{6}}-c^{-\frac{1}{6}}\right)}{a^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{c^{-1}}}\right)^{-1}\times$$

$$\times\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}.$$

16. Произвести указанные действия

$$\left[\frac{2a-1}{a^2-4a+3}-\frac{(2a-5)\,(a-3)^{-1}}{a^2-5a+4}-\right.$$

$$\left.-(a^2-7a+12)^{-1}\right]:(10a-30)^{-1}$$

17. Определить x без помощи таблиц.

$$x=100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}.$$

18. Доказать, что если $\log_{12}27=a$, то

$$\log_6 16=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

19. Доказать, что отношение логарифмов двух чисел не зависит от основания, т. е.

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2}=\frac{\log_b N_1}{\log_b N_2}.$$

20. Доказать, что

$$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b.$$

21. Доказать, что

$$3\,\frac{a^x-a^{-x}}{2}+4\left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^3=\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{2}.$$

22. Определить значение тригонометрических функций аргумента α, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

23. При каких значениях α справедливо равенство

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha,$$

если в левой части брать арифметическое значение корня.

24. Доказать тождество

$$\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

25. Доказать тождество

$$2(\sin^6x+\cos^6x)-3(\sin^4x+\cos^4x)+1=0.$$

26. Доказать тождество

$$\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$$

27. Доказать тождество

$$\frac{1-2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi.$$

28. Упростить выражение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

29. Выразить через тригонометрическую функцию $\cos\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

30. Преобразовать в произведение

$$\cos\alpha+\sin2\alpha-\cos3\alpha.$$

31. Преобразовать в произведение

$$1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}.$$

32. Привести к виду, удобному для логарифмирования

$$3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha.$$

33. Доказать тождество

$$\frac{\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

34. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

35. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}.$$

36. Найти сумму

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

37. Преобразовать в произведение

$$\operatorname{ctg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha-8\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$$

38. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha,$$

если

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$$

39. Вычислить

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

если $\cos\alpha=-0{,}625$, $\cos\beta=0{,}8$, причем известно, что угол α во второй четверти, а угол β в первой четверти.

40. Найти алгебраическую зависимость между α, β, γ, если

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma \text{ и } \operatorname{tg}\alpha\neq\operatorname{ctg}\beta.$$

41. Доказать, что

$$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{3}{8}.$$

42. Найти соотношение между m и n, если

$$\cos x-\sin x=m,\ \sin 2x=n,\ \ m>0,\ |n|\leqslant 1$$

43. Исключить x и y из следующих равенств:

$$\sin x\cdot\sin y=a,\ \cos x\cdot\cos y=b,\ x+y=c.$$

44. Доказать, что

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}.$$

45. Доказать, что

$$8\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=1.$$

46. При каких вещественных x и y справедливо равенство

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i?$$

47. Доказать, что если комплексное число $\alpha+i\beta$ есть корень квадратного уравнения с вещественными

коэффициентами, то сопряженное комплексное число $\alpha - i\beta$ также является корнем того же уравнения.

48. Доказать тождество

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha}=\operatorname{tg}\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

49. Найти сумму

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha.$$

50. Найти сумму

$$\cos^2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 5\alpha+\ldots+\cos^2(2n-1)\alpha.$$

51. Доказать тождество

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ldots\cos 2^{n-1}\alpha=\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}.$$

§ 3. Уравнения и системы уравнений

1. В уравнении $5x^2+kx+1=0$ выбрать k так, чтобы разность корней была равна 1.

2. Вычислить сумму кубов корней уравнения

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0).$$

3. При каком значении q квадрат разности корней уравнения

$$x^2-2x+q=0$$

равен 16?

4. Какими должны быть p и q, чтобы уравнение

$$x^2+px+q=0$$

имело корнями числа p и q?

5. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа

$$\frac{1}{10-\sqrt{72}}\quad\text{и}\quad\frac{1}{10+6\sqrt{2}}.$$

6. В уравнении

$$x^2-3ax+a^2=0$$

определить a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения была равна 1,75.

7. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$$

8. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$$

9. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$$

10. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12.$$

11. Зная, что 2 и 3 являются корнями **уравнения**

$$2x^3+mx^2-13x+n=0,$$

определить m и n и найти третий корень уравнения.

12. Сколько корней имеет уравнение

$$x=\lg x?$$

13. Сколько корней имеет уравнение

$$2^x=x+3?$$

Вычислить их (без таблиц) с точностью до 0,1.

В следующих примерах решить уравнения

14. $$16x^4-625=0.$$

15. $$x(x+1)(x+2)(x+3)=24.$$

16. $$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}.$$

17. $$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

18. $$\sqrt[x]{3}-\sqrt[2x]{3}-2=0.$$

19. $$2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0.$$

20. $$4x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$$

21. $$\log_a \log_b \log_c x=0.$$

22. $\log_a x + \log_a (x+5) + \log_a 0{,}02 = 0.$

23. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 1$

24. $$\frac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3} = \frac{1}{2}.$$

25 $3^{\sin x} = 1.$

26 $x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}.$

27. $$3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2.$$

28. $$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}.$$

29 $(0{,}4)^{\lg^2 x+1} = (6{,}25)^{2-\lg x^3}.$

30. $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0.$

31. $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62.$

32. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2^x.$

В следующих примерах решить системы уравнений.

33. $$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} (x^2 - y^2)\,xy = 180. \\ x^2 - xy - y^2 = -11. \end{cases}$$

35 $$\begin{cases} xy - x - y = 0. \\ \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{6x}} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n, \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 5 \\ (x+y)2^x = 100. \end{cases}$$

39. $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2. \\ \log_x y + \dfrac{1}{\log_y x} = 6. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \log_a \left(1 + \dfrac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y \\ \log_b x + \log_b y = 4. \end{cases}$

41. $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2 \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{x_1 - a_1}{m_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{m_2} = \ldots = \dfrac{x_n - a_n}{m_n} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + y = -4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{21}. \end{cases}$

§ 4. Тригонометрические уравнения

Решить следующие уравнения

1. $3\sin x = 2(1 - \cos x)$.
2. $\sin^4 x + \sin^4 (90^\circ - x) = \dfrac{3}{4}$.
3. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.
4. $\sec x + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi + x}{2}$.
5. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
6. $(\cos x + \sin x)^2 + 1 = \dfrac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}$.

7. $\cos x+\sin x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$,

8. $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=8\cos^2 x$.

9. $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos\dfrac{x}{2}$.

10. $\sin x+\cos 2x=1+\sin x\cos 2x$.

11. $2\sin 2x-\sin x=\sin 3x$.

12. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\dfrac{2}{3}$.

13. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x$

14. $2\sin x+6\cos x=\sec x$.

15. $\sin 3x=\sin 2x-\sin x$.

16. $3\sin x-3\cos x=4$.

17. $1+\cos x+\sin x=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-45^\circ\right)$.

18. $\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x$.

19. $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\dfrac{1}{4}$.

20. $\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\dfrac{3}{4}$.

21. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$.

22. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$

23. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$.

24. $2\cos^2 8x+\sin 6x=1$.

25. $\sin x-\cos x=1$.

26. $2\sin x=3\cos x+\cos 3x$.

27. $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{2}{3}$.

28. $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\dfrac{\pi+x}{2}\right)=0$.

29. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$.

30. $3\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$.

31. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}}{1-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}} = 2\sin\dfrac{x}{4}$.

32. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1+\sin 2x$.

33. $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{16}$.

34. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

35. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x$.

36. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

37. $\cos^{50} x + \sin^{50} x = 1$.

Решить следующие системы уравнений:

38. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4} \\ \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$

39. а) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0 \\ \cos x + \cos y = 0. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1. \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4. \end{cases}$

41. $\begin{cases} |\sin x| \cdot \sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

$0 < x < 2\pi, \quad \pi < y < 2\pi.$

§ 5. Неравенства

1. Доказать, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,$$

если $ab>0$.

2. Доказать, что полусумма кубов двух неравных положительных чисел больше куба их полусуммы.

3. Доказать, что $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

4. Доказать, что положительная арифметическая дробь с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная.

5. Доказать, что

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$$

при $a\neq b\neq c$.

6. Доказать, что если $x+y=1$, то

$$x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

7. Доказать, что при любом натуральном $n\geqslant 2$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

8. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма гипотенузы с высотой, проведенной к ней, больше суммы катетов.

9. Доказать, что периметр треугольника больше суммы медиан, но меньше их удвоенной суммы.

10. Доказать, что в тупоугольном треугольнике сумма квадратов синусов внутренних углов меньше двух.

В следующих примерах решить неравенства.

11. $\dfrac{2}{x-3}<0.$

12. $|2x-3|\leqslant 2.$

13. $|x+1|-|x|>0.$

14. $(m+1)x+4<(3-2m)x-1.$

15. $\dfrac{2x-1}{m+1}-\dfrac{x+1}{2(m-1)}>\dfrac{2x-3}{m+1}.$

16. $ax-b>3-2x.$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}<x+1{,}5 \\ 2x-8>3-0{,}5x. \end{cases}$

18. $-x^2-4x+5>-3x-1.$

19. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x+1}<0$

20. $4x<x^2<4x+5$

21. $\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{2}{x-3}.$

22. $-0{,}1<\dfrac{x+1}{2x-3}-3<0{,}1.$

23. $\sqrt{(x+4)(x-3)}>6-x.$

24. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}>1.$

25. $-0{,}5<x^2-2x<0{,}5$

26. $4x<x^2+4<4x+9.$

27. $4x-3<x^2<4x+5.$

28. $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-4x+4}>0.$

29. $\log_x\sqrt{x+12}>1.$

30. $\log_x(x+2)>2.$

31. $\dfrac{1}{2^x-1}>\dfrac{1}{1-2^{x-1}}.$

32. $\cos x+\operatorname{tg} x<1+\sin x.$

33. $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\dfrac{5}{8}.$

34. Найти все целые значения x, для которых выполнены одновременно два неравенства.

$$\begin{cases} x^2-12x+32>0 \\ x^2-8x-20<0. \end{cases}$$

35. Доказать, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1+\operatorname{ctg}\alpha, \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

36. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен

$$x^2-(8a-2)x+15a^2-2a-7$$

будет положительным при любых значениях аргумента?

37. При каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$(a-1)x^2-2ax+a+3=0$$

будут положительны?

38. При каких значениях a корни уравнения

$$2x^2-(2a-5)x+a-3=0$$

заключены между 0 и 1?

39. При каких значениях m уравнение

$$2mx^2-2x-3m-2=0$$

имеет различные корни?

40. Показать, что уравнение

$$(x-1)\ (x-3)+m(x-2)\ (x-4)=0$$

имеет вещественные корни при любом вещественном m.

41. Доказать, что корни уравнения

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

действительны при любых вещественных a, b, c.

42. Найти все действительные значения a, при которых оба корня уравнения

$$(2a+3)x^2+(a+1)x+4=0$$

заключены между 0 и -2.

43. При каких значениях x значения выражения

$$\frac{x}{x-1}$$

заключены между 0 и 2?

44 При каких значениях a система неравенств

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется при всех значениях x?

45. Найти все значения x, бóльшие нуля, но меньшие 2π, для которых выполняется неравенство

$$\cos x-\sin x-\cos 2x>0.$$

46. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

47. Доказать, что при $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\cos\sin\varphi>\sin\cos\varphi.$$

48. Доказать, что если первые два члена арифметической прогрессии положительные, неравны между собой и соответственно равны первым двум членам геометрической прогрессии, то все члены арифметической прогрессии, начиная с третьего, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии.

49. Доказать неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c},$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

50. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{8\sin^2 x+2\cos x-7}.$$

В следующих примерах решить неравенства.

51. $$\lg\frac{3x-5}{2x}+\lg\frac{x+1}{2(2x-7)}>\lg\frac{5}{x}.$$

52. $$\log_{0,7}(2x^2-3x+8)>0.$$

53. $$\log_{\frac{1}{3}}(x+3)(x-5)>4\sin\frac{7\pi}{6}.$$

54. $$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0.$$

55. $3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-1>0$.

56. $4\cos 2x-2\cos x+3<0$.

57. $\sin x+\sqrt{3}\cos x>0$.

§ 6. Прогрессии

1. Найти три числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что сумма этих чисел равна 26 и что от прибавления к ним соответственно 1,6 и 3 получатся три новых числа, составляющих арифметическую прогрессию.

2. Найти четыре целых числа, составляющих арифметическую прогрессию, в которой наибольший член равен сумме квадратов остальных членов.

3. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

4. Доказать, что если знаменатель прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то каждый член ее, начиная со второго, равняется разности двух соседних с ним.

5. Могут ли три числа одновременно составлять арифметическую и геометрическую прогрессии?

6. Найти арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое n первых членов ее равно $2n$.

7. Найти седьмой член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $1+\frac{1}{i}$, а первый член равен $1-i$.

8. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

9. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найти эти члены прогрессии.

10. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние

три — арифметическую, сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

11. Сумма бесконечно убывающей прогрессии равна 12, а сумма квадратов ее членов 48. Найти сумму первых десяти членов этой прогрессии.

12. Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна 18, разность между четвертым и третьим 162. Составить прогрессию.

13. Ряд чисел 1, 4, 10,... обладает тем свойством, что разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию. Найти n-й член и сумму первых n членов этой последовательности чисел.

14. Найти сумму

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(n+1)x^n.$$

15. Какова арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа членов равна удвоенному квадрату числа слагаемых.

16. Решить уравнение

$$x+1+x^{-1}+x^{-2}+\ldots=\frac{16}{3}.$$

17. В геометрической прогрессии даны $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n $(A\neq0)$.

18. Найти отношение сторон треугольника, зная, что один из его углов 120° и что стороны его образуют арифметическую прогрессию.

19. Длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. В каких границах может меняться знаменатель этой прогрессии?

20. Найти сумму

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

21. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

22. Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

23. В квадрат, сторона которого равна a, вписан другой квадрат, а в него третий и т. д. таким образом, что середина каждой стороны любого квадрата служит вершиной вписанного квадрата. Найти сумму площадей всех этих квадратов.

§ 7. Функции и графики

1. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1. \end{cases}$$

В следующих задачах определить область определения данной функции, т. е. указать, при каких действительных значениях x функция принимает действительные значения.

2. $y=x^2-2x+7.$

3. $y=\sqrt{x-3}.$

4. $y=\dfrac{1}{2x-5}.$

5. $y=\sqrt{x^2-3x+2}.$

6. $y=\log_3(x+4).$

7. $y=\sqrt{x^2-5x+4}+\lg(x+2).$

8. $y=\lg\sin x.$

9. $y=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{2}{\sin x}.$

Построить графики следующих функций

10. $y=-x+3.$

11. $y=x^2-5x+6.$

12. $y=2x+1.$

13. $y=|x|-x.$

14. $y=|x-1|+|2-x|.$

15. $y = |1 - x| - |x - 2| - |x - 3|$.

16 $y = |\sin x|$.

17 $y = 3\cos 2x$.

18. $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

В следующих задачах найти наибольшее и наименьшее значения функций.

19. $y = x^2 - 7x + 10$.

20. $y = \cos x + \sin x$.

21. $y = \cos^6 x + \sin^6 x$.

22. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные: а) $y = x^4 - 4x^2 + 5$, б) $y = x^3 + 2x$, в) $y = \frac{\sin x}{x}$, г) $y = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$, д) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$, е) $y = x\sin^2 x$, ж) $y = x + x^2$.

§ 8. Задачи по геометрии

1. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

2. На продолжении основания равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что разность расстояний этой точки от боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

3. На основании равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что сумма расстояний этой точки от обеих боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону.

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

5. Доказать, что если у треугольника равны две высоты, то он равнобедренный.

6. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

7. Доказать, что квадрат, построенный на стороне правильного вписанного в окружность треугольника, равновелик вписанному правильному двенадцатиугольнику.

8. На гипотенузе лежит центр окружности, имеющей касание с катетами. Доказать, что отрезок, соединяющий точки касания, равен биссектрисе прямого угла.

9. Доказать, что площадь квадрата, вписанного в сегмент с дугою в 180°, в десять раз больше площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугою в 90°.

10. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Доказать, что площадь одного из этих кругов в три раза больше площади другого круга.

11. Доказать, что прямая, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, пройдет через точку пересечения диагоналей.

12. К двум окружностям проведены внешние касательные, и точки касания соединены хордами. Доказать, что полученный четырехугольник — равнобедренная трапеция.

13. Доказать, что геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки окружности, есть окружность, диаметр которой в два раза меньше диаметра данной.

14. Из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, квадрат имеет наибольшую площадь. Доказать.

15. Доказать, что плоскость, параллельная двум скрещивающимся прямым, перпендикулярна к прямой, которая перпендикулярна к этим двум прямым.

16. Доказать, что плоскость, перпендикулярная к прямой, лежащей на другой плоскости, перпендикулярна и к самой плоскости.

17. Доказать, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

18. Доказать, что отрезки прямых, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, в точке пересечения делятся пополам.

19. Доказать, что произведение отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же точку, есть величина постоянная для данного шара.

20. Доказать, что радиус шара, вписанного в усеченный конус, есть среднее геометрическое радиусов оснований конуса.

21. В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум ее непересекающимся ребрам. Найти сечение с наибольшей площадью.

22. В треугольник со сторонами a, b и c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Найти величину этого диаметра.

23. Ребро куба равно a. Определить расстояние от вершины куба до его диагонали, не проходящей через данную вершину.

24. Найти высоту правильного тетраэдра, объем которого равен V.

25. Около круга радиуса R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определить его стороны.

26. В ромб, который разделяется диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг единичного радиуса. Найти сторону ромба.

27. Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 *м*, а внешний 9 *м*; внутренний отрезок второй секущей на 72 *м* больше внешнего ее отрезка. Определить длину второй секущей.

28. В конус, высота которого 12, вписан шар радиуса 3. Вычислить объем конуса.

29. По стороне a правильного шестиугольника определить объем и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг диаметра.

30. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 *дм*, а расстояние между точками касания равно 120 *дм*. Определить радиус круга.

31. Две окружности, радиусы которых равны r и R, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

32. Прямая, параллельная основанию трапеции, разделяет ее на две части, площади которых относятся, как 7:2 (считая от большого основания). Найти длину этой прямой, если основания трапеции 5 и 3.

33. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его 12 *см*, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середины основания и боковых сторон.

34. Найти зависимость между высотой цилиндра и радиусом его основания, если их сумма служит радиусом круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

35. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит боковые стороны треугольника?

36. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противоположного острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найти ее радиус, если катеты равны 3 и 4.

37. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороной a и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

38. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ проведена окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

39. Три стороны описанного четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Определить стороны, если периметр его равен 24 *см*.

40. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{6}$.

41. Определить площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

42. В треугольнике основание равно 60 *см*, высота 12 *см* и медиана, проведенная к основанию, 13 *см*. Определить боковые стороны.

43. Определить площадь сегмента, если периметр его равен P, а дуга содержит 120°.

44. В равнобедренной трапеции средняя линия равна d, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

45. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объем пирамиды.

§ 9. Геометрические задачи с применением тригонометрии

1. Разность длин диагоналей ромба равна d, каждый из тупых его углов равен a. Вычислить сторону ромба.

2. Определить отношение радиусов кругов, вписанных в ромб с острым углом α, и в половину того же ромба, отсеченную меньшей диагональю.

3. В параллелограмме даны острый угол α и расстояния a и b от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма.

4. Вычислить острый угол прямоугольного треугольника, стороны которого составляют: 1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию.

5. Внутрь правильного n-угольника со стороной a вписано n равных кругов так, что каждый круг касается двух смежных сторон многоугольника и двух других кругов. Найти площадь «звездочки», образующейся в центре многоугольника.

6. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга, как 5:2.

7. В треугольнике ABC даны длина a стороны BC и угол A. Найти стороны b и c, если известно, что $c=2b$.

8. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом α вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определить площадь квадрата.

9. В сектор радиуса R с центральным углом α вписан круг. Определить его радиус.

10. К кругу радиуса R проведены из одной точки две касательные, составляющие между собой угол 2α. Определить площадь между этими касательными и дугой круга.

11. Перпендикуляр, опущенный из одной из вершин при основании равнобедренного треугольника на противоположную сторону делит ее в отношении $m:n$. Найти углы треугольника.

12. Определить угол ромба, зная его площадь Q и площадь S вписанного в него круга.

13. Определить площадь треугольника, если даны длины двух его сторон a и b и длина t биссектрисы угла между этими сторонами.

14. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого c, а острый угол α. Каждая из боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β. Определить полную поверхность пирамиды.

15. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороны основания q проведена плоскость, перпендикулярная противоположному ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$. Определить полную поверхность пирамиды.

16. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии b от противоположной боковой грани. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α.

17. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

18. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол β. Определить объем пирамиды.

19. Плоскость, проходящая через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно боковому ребру, делит пирамиду на две части. Определить объем меньшей части пирамиды, если боковое ребро пирамиды равно a и наклонено к плоскости основания под углом α.

20. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противоположная ему сторона a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под уголом β. Определить полную поверхность пирамиды.

21. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой грани равна Q, и она наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.

22. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а плоский угол при вершине равен α.

23. Объем правильной четырехугольной пирамиды

равен V, а угол наклона плоскости боковой грани к плоскости основания пирамиды равен α. Определить полную поверхность пирамиды.

24. Основанием пирамиды служит ромб со стороною a и острым углом α; из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

25. Через одно из ребер правильного тетраэдра проведена плоскость, наклоненная под углом α к противоположному (т. е. не пересекающемуся с данным ребром) ребру. Определить площадь полученного сечения, если ребро тетраэдра равно a.

26. Образующая конуса составляет с его осью угол α. Определить отношение объема этого конуса к объему описанного около него шара.

27. Прямой круговой конус рассечен на две части, равные по объему, плоскостью, проходящей через центр вписанного шара, перпендикулярно оси. Вычислить угол между образующей и плоскостью основания.

28. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

29. Через вершину конуса проведены две плоскости. Одна из них наклонена к плоскости основания конуса под углом α и пересекает это основание по хорде, длина которой равна a; другая наклонена к плоскости основания под углом β и пересекает основание по хорде, длина которой равна b. Определить объем конуса.

30. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Вычислить объем пирамиды, если ее ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

31. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

32. В прямой круговой усеченный конус вписан шар. Объем этого шара составляет половину объема конуса. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

33. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен r. Радиус шара, проведенный в любую точку этой окруж-

ности, наклонен к ее плоскости под углом α. Найти объем конуса.

34. Конус, у которого образующая наклонена к плоскости основания под углом α, вписан в шар. Объем конуса равен V. Определить поверхность шара.

35. В шар, объем которого равен V, вписан конус. Определить объем этого конуса, зная, что угол, составленный двумя его образующими, проведенными к концам одного и того же диаметра основания, равен α.

36. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найти боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

37. Угол, составленный образующей конуса с плоскостью его основания, равен α, а разность между образующей и радиусом основания равна d. Определить поверхность шара, вписанного в этот конус.

38. Найти двугранный угол φ между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, зная, что радиус описанного около пирамиды шара в 3 раза больше радиуса вписанного в нее шара.

39. Около шара радиуса r описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

40. В цилиндр вписан конус, объем которого равен V. Угол, составленный образующей конуса с плоскостью основания, равен α. Определить полную поверхность цилиндра.

§ 10. Разные задачи

1. Число перестановок из n букв относится к числу перестановок из $(n+2)$ букв, как 0,1 к 3. Найти n.

2. Сколько можно сделать из n элементов перестановок, в которых два элемента a и b не стоят рядом?

3. Каково наибольшее число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, лежащих внутри него?

4. Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

5. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же

металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

6. Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым числом равных кругов. Узнать, сколько кругов для этого потребовалось, если на стороне треугольника умещается на 14 кругов больше, чем на стороне квадрата.

7. Имеется четыре предмета разного веса и весы без гирь. Показать, что с помощью пяти взвешиваний можно расположить предметы в порядке возрастания их весов. Доказать, что с помощью четырех взвешиваний это не всегда возможно.

8. Доказать, что уравнению $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_n x_n = b$, в котором не все коэффициенты равны нулю, не может удовлетворять больше половины наборов $(x_1, x_2,\ldots x_n)$, состоящих из нулей и единиц.

9. Доказать, что

$$1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$$

10. Решить уравнение

$$\cos(\cos x)=1.$$

11. Доказать, что дробь

$$\frac{14n+3}{21n+4}$$

не сократимы при целом n.

12. На окружности длины 15 выбраны n точек так, что для каждой точки имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояние измеряется по окружности). Доказать, что n делится на 10.

13. На прямой имеется n отрезков. Доказать, что если каждые два из них имеют общую точку, то существует по крайней мере одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

14. Доказать, что если a, b, c неотрицательные числа, то

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

15. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9 без остатка.

16. Доказать, что

$$\mathrm{tg}10^\circ\cdot\mathrm{tg}50^\circ\mathrm{tg}70^\circ=\mathrm{tg}30^\circ.$$

17. Вычислить

$$\lg\mathrm{tg}1^\circ\lg\mathrm{tg}2^\circ\cdot\lg\mathrm{tg}3^\circ\ldots\ldots\lg\mathrm{tg}89^\circ.$$

18. В ящик вложим k ящиков. В каждый из этих k ящиков либо вложим k ящиков, либо не вложим ни одного и т. д. Найти число пустых ящиков, если наполненных оказалось m.

19. Доказать, что для любого числа α $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ и любого числа N найдутся такие целые числа m и n $(0\leqslant m\leqslant n\leqslant N,\ n>0)$, что

$$|\alpha n-m|<\frac{1}{N}.$$

20. Построить неравнобедренный греугольник по высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.

21. Найти все целые и положительные n, при которых дробь

$$\frac{3n^2-3n+20}{n+1}$$

принимает целые значения.

22. Доказать, что

$$\cos\varphi=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

где α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, а φ — линейный угол, противоположный плоскому углу α.

23. Доказать, что

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}}=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ цифр}},$$

24. В одном из томских вузов на разных курсах учились четыре товарища. Самый младший учился на I курсе, а старший на IV курсе. Определить имя и фамилию каждого студента, а также курс, на котором он учился, если известно, что

1) Борис не учился на I курсе;

2) Василий должен был ехать на практику в Омск, а Иванов собирался ехать домой в Кузбасс;

3) Николай был курсом старше Петра;

4) Борис и Орлов были коренными томичами;

5) Крылов в прошлом году окончил школу и поступил на тот же факультет, где учился Карпов;

6) Борис иногда пользовался прошлогодним конспектом Василия.

25. Наугад выбрано 1973-значное число A, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим через a, сумму цифр числа a обозначим через b; сумму цифр числа b — через c. Чему равно c?

26. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого a, b, c заключены в следующих пределах:

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3?$$

27. Высоты треугольника — 3, 4, 5. Какой это треугольник — прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

28. На некоторой планете 20 государств, причем среди любых трех из них некоторые два еще не установили дипломатические отношения (не обменялись посольствами). Доказать, что на этой планете не более 200 посольств.

29. Докажите, что число 11...1122...22 (1973 единицы и 1973 двойки) есть произведение двух последовательных целых чисел

30. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно покрыть круг радиуса $R=1{,}001$? $R=1{,}2$? $R=2$?

31. Доказать, что выпуклый 1973-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

32. В таблицу 9×9 расставлены числа от 1 до 81. Доказать, что при любой расстановке найдутся две соседние клетки, такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, не меньше 6 (соседними называются клетки, имеющие общую сторону).

§ 11. Варианты письменных работ, предлагавшихся на вступительных экзаменах

Вариант 1

1. Из города A в город B выехал мотоциклист, а из B в A навстречу ему выехал велосипедист. При встрече оказалось, что велосипедист проехал a *км*, а мотоци-

клист на d *км* больше. Продолжая путь после встречи с прежними скоростями, велосипедист приехал в A через t часов после того, как мотоциклист приехал в B. Определить скорости мотоциклиста и велосипедиста, если мотоциклист проезжает на b *км* в час больше велосипедиста.

2. Вычислить объем правильной пирамиды высоты h, зная, что в ее основании лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $n\pi$, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 4x = \sin 8x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-1}.$$

Вариант 2

1. Два лыжника проходят расстояние в a *км*, первый из них, скорость которого на b *км* в час меньше скорости другого, проходит это расстояние на b часов больше. Найти скорость каждого лыжника.

2. Ромб, сторона которого a и острый угол равен α, вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно к стороне. Определить поверхность тела вращения.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} + x > 4.$$

Вариант 3

1. Основанием пирамиды служит треугольник, два угла которого равны α и β. Высота пирамиды равна h, а боковые ребра ее наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

2. Два самолета вылетают одновременно из пункта A

в пункт B, расстояние между которыми s *км*. Скорость первого самолета на m *км* в час меньше скорости второго, поэтому первый самолет прилетает в B на n часов позже второго. Найти скорость первого самолета и время, затрачиваемое им на перелет из A в B.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{\log_9 x} - 2^{\log_4 y} = 77 \\ 3^{\log_9 \sqrt{x}} - 2^{\log_4 \sqrt{y}} = 7. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} = 3.$$

Вариант 4

1. Тракторист рассчитывал вспахать поле в m *га* за определенное время. Вспахав n *га*, он отдохнул 15 минут и, чтобы вспахать поле вовремя, он увеличил часовую производительность на p *га*. Определить первоначальную производительность тракториста.

2. Пирамида имеет в основании равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а другие два наклонены к ней под острым углом α. Плоскость, перпендикулярная к основанию, дает в сечении с пирамидой квадрат. Определить площадь этого квадрата.

3. Решить уравнение

$$\sec^2 x = \frac{2 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x}.$$

4. При каком значении a уравнение

$$(a+5)x^2 + (2a-3)x + a - 10 = 0$$

имеет действительные корни одного и того же знака?

Вариант 5

1. С двух станций, расстояние между которыми s *км*, были отправлены навстречу друг другу два поезда с расчетом, что они встретятся на половине пути. Определить скорость в час каждого поезда, если первый вышел на

один час раньше второго со скоростью на a *км* в час меньшей, чем скорость второго поезда.

2. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой образует с плоскостью основания угол α. Определить объем пирамиды.

3. Решить систему уравнений

$$x^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=y^4;\quad y^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}.$$

Вариант 6

1. Самолет летел из A в B по прямой. Через некоторое время вследствие встречного ветра он уменьшил скорость до v *км* в час, в силу чего опоздал на t_1 минут. Во время второго рейса самолет по той же причине уменьшил свою скорость до прежней величины, но на d *км* дальше от A, чем в первый рейс, и опоздал на t_2 минут. Найти первоначальную скорость самолета.

2. Около шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью большого основания. Определить объем и боковую поверхность усеченного конуса.

3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-6}=1.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{3}{x+1}>\frac{2}{x-2}.$$

Вариант 7

1. Часы показывают в некоторый момент на 2 минуты меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на три минуты меньше, чем следует, но уходили бы в сутки вперед на $\frac{1}{2}$ минуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки рань-

ше, чем покажут. Насколько минут в сутки спешат эти часы?

2. Две боковые грани треугольной пирамиды — прямоугольные равнобедренные треугольники, гипотенузы которых равны a и образуют между собой угол α. Найти объем пирамиды.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=28 \\ y^2+xy=21. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sin(x+30°)+\cos(x+60°)=1+\cos 2x.$$

Вариант 8

1. В арифметической прогрессии, содержащей 9 членов, первый член равен 1, а сумма всех членов равна 369. Геометрическая прогрессия также имеет 9 членов, причем первый и последний члены ее совпадают с соответствующими членами данной арифметической прогрессии. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

2. В конус, радиус основания которого R, вписана треугольная пирамида. Определить объем пирамиды, если ее основанием служит прямоугольный треугольник с острым углом α и все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равным α.

3. Решить неравенство

$$5<x^2-8x+25<18.$$

4. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2=3\sin 2x.$$

Вариант 9

1. В кинозале имеются две двери. Через обе двери зрители после сеанса выходят из зала в течение $3\frac{3}{4}$ мин. Если их выпускать через одну большую дверь, то выход из зала займет времени на 4 минуты меньше, чем в том случае, если их выпускать через меньшую дверь. Сколько времени требуется для выпуска зрителей из зала кино через каждую дверь в отдельности?

2. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α и боковой стороной b, равной меньшему основанию. Определить объем призмы, если угол между диагональю призмы и диагональю трапеции равен $\frac{\alpha}{2}$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$3\cos x+5\sin\frac{x}{2}=-1.$$

Вариант 10

1. Первый член арифметической прогрессии равен 24. Первый, пятый и одиннадцатый члены составляют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

2. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объем пирамиды, зная, что боковая поверхность конуса равна S, а образующая его наклонена к плоскости основания под углом β.

3. Решить неравенство

$$0<x^2-3x+2<6.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2.$$

Вариант 11

1. Один из двух заводов может выполнить некоторый заказ на 4 дня скорее, чем другой. Во сколько времени может каждый из них выполнить этот заказ, если известно, что при совместной работе они выполнили за 24 дня заказ в пять раз больший?

2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при точке C, в котором даны катет $BC=a$ и угол $A=\alpha$.

Через точки A, B_1 и C_1 проведена плоскость, образующая в сечении угол B_1AC_1, равный β. Найти объем призмы.

3. Решить неравенство

$$x^2 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0.$$

4. Решить уравнение

$$1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Вариант 12

1. Бригада лесорубов должна была в несколько дней по плану заготовить 216 $м^3$ дров. Первые три дня она работала по плану, а затем каждый день заготовляла на 8 $м^3$ дров больше плана; поэтому уже за день до срока было заготовлено 232 $м^3$ дров. Сколько кубометров дров должна была заготовлять бригада в день по плану?

2. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с ребрами AB и AD углы β. Определить объем параллелепипеда.

3. Решить уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

4. Решить уравнение

$$\sec x - 4\sin x = 6\cos x.$$

Вариант 13

1. Из A выехал связист, а через шесть часов должен был оттуда выехать другой связист с тем, чтобы нагнать первого на 180-м километре от A. Первый связист поехал со скоростью на a *км* в час большей, чем предполагал; поэтому второй, чтобы выполнить задание, не увеличивая скорости, выехал из A на три часа раньше. Сколько времени должен был пробыть в пути каждый?

2. Определить объем пирамиды, основанием которой служит треугольник с углами α и β, если высота пира-

миды, равная h, образует с каждым боковым ребром угол γ.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3x^2)>0.$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2 x-3\cos x\sin x-1=0.$$

Вариант 14

1. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать шоссе в 18 дней. Если бы сначала первая бригада, работая одна, выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, а затем вторая бригада — оставшуюся часть, то на ремонт всего шоссе потребовалось бы 40 дней. Определить, во сколько дней каждая бригада, работая отдельно, могла бы отремонтировать шоссе.

2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противоположная ему сторона a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом β. Определить полную поверхность пирамиды.

3. Решить уравнение

$$x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 3x+4\sin^2 x\cos x=0.$$

Вариант 15

1. Мотоциклист проезжает 1 *км* на 4 минуты скорей, чем велосипедист. Сколько километров проезжает каждый из них за 5 часов, если известно, что мотоциклист проезжает за это время на 100 *км* больше велосипедиста?

2. Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β. Определить полную поверхность куба, вписанного в этот конус.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x+\cos x-\sin x=1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\lg x+\lg y}{\lg(x+y)}=1 \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найти неизвестное число.

2. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α. Определить полную поверхность конуса, если поверхность шара равна Q.

3. Решить уравнение

$$\cos^4 x+\sin^4 x=\cos 4x.$$

4. Решить уравнение

$$\lg 10^{\lg(x^2+21)}-1=\lg x.$$

Вариант 17

1. Между станцией и поселком 4 *км*. Мальчик и автомобиль одновременно отправились со станции в поселок. Через 10 минут мальчик встретил автомобиль, возвращающийся из поселка, а еще через $\frac{1}{14}$ *км* от места встречи автомобиль, который дошел до станции и опять направился в поселок, нагнал мальчика. Найти их скорости, если известно, что они двигались равномерно и не делали остановок.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β. Высота параллелепипеда равна H. Определить объем параллелепипеда.

3. Решить неравенство

$$\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}<0.$$

4. Решить уравнение

$$1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2$$

Вариант 18

1. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная геометрическая прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую прогрессию. Определить эти числа.

2. Поверхность шара, вписанного в конус, равна S. Определить полную поверхность конуса, если наибольший угол между образующими конуса равен α.

3 Решить уравнение

$$\sin 2x+\operatorname{tg} x=2.$$

4. Решить уравнение

$$4^{\log_9 x^2}-1=4^{\log_9 x+1}-4^{\log_9 x-1}.$$

Вариант 19

1. По наклонной плоскости длиной в 6 *м* катятся два цилиндра, один из которых имеет окружность в 3 *дм*, а другой в 2 *дм*. На сколько дециметров надо увеличить окружность того и другого цилиндра, чтобы один из них сделал на три оборота больше другого?

2. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна a, а острый угол α. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к основанию, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом α. Найти объем пирамиды.

3. Решить неравенство

$$(0{,}5)^{\frac{x+1}{x-1}}>\frac{1}{32}.$$

4. Найти

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha,\ \text{если}\ \sin\alpha+\cos\alpha=b.$$

Вариант 20

1. По окружности, длина которой равна l *м*, двигаются две точки со скоростями v_1 и $v_2 < v_1$. Через сколько времени от начала движения будут происходить последовательные встречи точек, если эти точки двигаются по одному и тому же направлению и первая начала двигаться на t секунд раньше второй, отставая в начальный момент на расстояние a *м* от второй по ходу движения ($a < l$)?

2. Найти двугранный угол правильного тетраэдра.

3. Доказать неравенство

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2 x - 3\cos x + a = 0.$$

Вариант 21

1. Лодка опускается по течению реки на расстояние 10 *км*, а затем поднимается против течения реки на расстояние 6 *км*. Скорость течения реки равна 1 *км/час*. В каких пределах должна быть собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

2. Найти угол между ребром и гранью правильного тетраэдра.

3. Доказать неравенство

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2.$$

4. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x + 2 \cos x = a.$$

Вариант 22

1. Автомобиль выехал из города A в город B, расстояние между которыми равно 234 *км*. Через час навстречу ему выехал из города B второй автомобиль, проезжавший в час на 12 *км* больше первого. Опре-

делить скорость каждого автомобиля, если они встретились на расстоянии 108 *км* от города B.

2. Найти площадь треугольника по двум сторонам a, b и углу между ними $C=75°$.

3. Решить уравнение

$$\log_x 3 - \log_x 2 = \frac{1}{2}.$$

4. Доказать тождество

$$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$$

Вариант 23

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 16, цифра десятков на 1 больше цифры сотен. Если из него вычесть число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 594. Найти это число.

2. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Длина каждого бокового ребра равна l. Плоские углы трехгранных углов при основании пирамиды α, β и $90°$. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение.

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1).$$

4. Доказать

$$\frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cos 2\alpha.$$

Вариант 24

1. Для ремонта дома наняты плотники и маляры. Те и другие получили за работу одну и ту же сумму, но маляров было двумя меньше, чем плотников, и поэтому каждый маляр получил одним рублем больше плотника. Сколько было плотников и сколько маляров, если известно, что число рублей, уплаченных им всем, было на 26 более утроенного числа всех рабочих?

2. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α между боковой гранью и плоскостью основания.

3. Преобразовать в произведение

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

4. Решить уравнение

$$\left(\lg_x\sqrt{5}\right)^2-\lg_x 5\sqrt{5}+1{,}25=0.$$

Вариант 25

1. Два туриста, находящиеся друг от друга на расстоянии a *км*, отправляются одновременно из пунктов A и B, двигаясь по прямой AB в одном направлении, и встречаются через b часов. Они встретились бы через c часов, если бы шли навстречу друг другу. Найти скорость каждого туриста.

2. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная радиус r вписанного в нее шара и угол наклона α ее боковой грани к основанию.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x-1=2\sin 2x.$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-4}<\sqrt{3x-5}.$$

Вариант 26

1. Из пункта A в пункт B выехала машина с почтой. Через t минут за ней выехала другая. Двигаясь со скоростью v *км/час*, она нагнала первую и, передав забытый срочный пакет, повернула назад. В пункт A вторая машина прибыла одновременно с прибытием первой в пункт B. С какой скоростью двигалась первая машина, если расстояние между A и B равно d *км*?

2. В тупоугольном треугольнике ABC с тупым углом A сторона $AC=a$, сторона $BC=2a$ и $C=\alpha$. Определить объем тела, полученного вращением этого треугольника около оси, проходящей через вершину C перпендикулярно к стороне AC.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg\left(25^{\sqrt{x}}-5^{\sqrt{x}}\right)-2}{\lg 6}=1.$$

4. Решить неравенство

$$15a^2 < 8ax - x^2.$$

Вариант 27

1. Из двух городов навстречу один другому выезжают два путешественника. Проехав число дней, равное разности между числами километров, проезжаемых ими в день, они встречаются и узнают, что первый проехал 216 *км*. Расстояние между городами 396 *км*. Сколько километров проезжал в день каждый?

2. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол α. Найти объем описанной около конуса пирамиды, имеющей своим основанием ромб, острый угол которого равен β.

3. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$$

4. Решить уравнение

$$\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1).$$

Вариант 28

1. Решить уравнение

$$\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$$

2. В конус, радиус основания которого равен R и образующая наклонена к плоскости основания под углом α, вписана прямая треугольная призма, все ребра которой равны между собой и основание которой лежит в плоскости основания конуса. Найти объем призмы.

3. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2xy + 2xz = 5 \\ 2xy + 2yz = 3 \\ xz + yz = 3. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\log_2 (3 - x) - \log_2 \frac{\sin \frac{3}{4}\pi}{5 - x} > \frac{1}{2} + \log_2 (x + 7).$$

Вариант 29

1. Два вертолета одновременно вылетают навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми s *км*. Через час после вылета они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь. Первый прибыл в город B на m минут раньше, чем второй прибыл в город A. Найти скорости вертолетов.

2. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен γ, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания (длина общего перпендикуляра) равно d. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + x - y^2 = 14, \\ (x-y)(x^2-y^2) = 24. \end{cases}$$

Вариант 30

1. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

2. В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно a и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Через одну из вершин основания проведена плоскость перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Определить площадь сечения.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\log_{0,4} \frac{7x-2}{7x+1} < 0.$$

Вариант 31

1. Катеты прямоугольного треугольника 3 *см* и 6 *см*. Определить радиус круга, который касается катетов и центр которого лежит на гипотенузе.

2. На обработку одной детали один рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем другой. Сколько деталей каждый из них обработает за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 28 деталей больше второго?

3. Доказать тождество

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

4 Решить уравнение

$$x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2.$$

Вариант 32

1. Велосипедист отправляется из города A в город B. Расстояние между этими городами c *км*. В то же время из B в A выехал мотоциклист. Встреча произошла через час после их отправления. После встречи мотоциклист приехал в город A на a часов раньше, чем велосипедист приехал в город B. Найти скорость велосипедиста.

2. Доказать, что если из точки пересечения диагоналей ромба опустить перпендикуляры на его стороны и соединить основания этих перпендикуляров, то получится прямоугольник.

3. Решить уравнение

$$\sin x-\cos x-4\cos^2 x\sin x=4\sin^3 x.$$

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}}>125.$$

Вариант 33

1. Расстояние от A до B равно 10 *км*. Из A в B вышел пешеход и одновременно навстречу ему из B в A выехал велосипедист. Через 20 минут они встретились.

Доехав до A, не останавливаясь, велосипедист повернул обратно и догнал пешехода через 8 минут 20 сек. после выезда из A. Определить скорость каждого.

2. Грани правильной усеченной треугольной пирамиды касаются шара. Определить отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом α.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sec x + 1 + \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2} = 0.$$

Вариант 34

1. Два лыжника проходят расстояние в a *км*; первый из них, скорость которого на b *км* в час меньше, чем скорость другого, проходит это расстояние на b часов больше. Найти скорость каждого лыжника.

2. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при большем основании вписан усеченный конус. Определить боковую поверхность конуса, если апофема пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8\cos^2 x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 3.$$

Вариант 35

1. Двое рабочих, работая вместе, окончили работу в 2 дня. Определить, во сколько времени окончит эту же работу каждый из них, работая отдельно, зная, что

если бы первый проработал два дня, а второй — один день, то они вместе сделали бы $\frac{5}{6}$ всей работы.

2. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине в боковой грани равен α. Найти высоту пирамиды.

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha.$$

4. Найти область определения функции:

$$y=\sqrt{x^2-9}+\lg(x+1).$$

Вариант 36

1. Расстояние между пунктами A и B равно s *км*, причем $\frac{2}{3}$ этого расстояния — асфальтированное шоссе. Скорость автомашины на асфальтированном шоссе на v *км* в час больше скорости, с которой она движется на остальной части пути по грунтовой дороге. Определить скорость автомашины на асфальтированном шоссе и на грунтовой дороге, если все расстояние AB автомашина проходит за t часов.

2. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится от противолежащей боковой грани на расстоянии, равном b. Найти полную поверхность конуса, вписанного в данную пирамиду, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α.

3. Решить уравнение

$$\cos^2x-\sin^2x-\sin x=0.$$

4. При каких вещественных значениях m в уравнении

$$2x^2-(2m+1)\,x+m^2-9m+39=0$$

один корень будет в два раза больше другого. Найти эти корни.

Вариант 37

1. Из пункта A по направлению к B вышел пешеход. Через a часов из B навстречу выехал велосипедист; через b часов после своего выезда он встретил пешехода,

Сколько времени надо велосипедисту и сколько пешеходу, чтобы пройти весь путь между A и B, если велосипедисту на это потребуется на c часов меньше, чем пешеходу?

2. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция с острым углом α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом β. Найти полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен R.

3. Решить уравнение

$$81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30.$$

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-x}{1+x}} > 32.$$

Вариант 38

1. Поезд, выезжающий из города A в город B, должен приехать туда через a часов. Одновременно с ним из города C выезжает другой поезд. Чтобы успеть приехать в B вместе с первым поездом, он должен каждый километр проезжать на 1 *мин* скорее, чем первый поезд. Расстояние от C до B на b *км* больше расстояния от A до B. Определить эти расстояния.

2. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с одной боковой гранью угол α, а с другой — угол β. Найти объем параллелепипеда.

3. Решить уравнение:

$$2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5.$$

4. При каком условии

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)?$$

Вариант 39

1. Решить уравнение

$$2(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

2. Около конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус основания конуса r, острый угол треугольника α и образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ.

3. Решить уравнение:

$$4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=50.$$

4. Доказать тождество:

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Вариант 40

1. Два туриста вышли одновременно, один из A в B и другой из B в A Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в a *км* от B; второй раз в b *км* от A через n час. после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих туристов.

2. В осевом сечении шара и вписанного в него усеченного конуса дуги, стягиваемые диаметрами оснований конуса, равны α и β. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если радиус описанного шара равен r.

3. Какому условию должны удовлетворять значения параметра a, чтобы уравнение $\sin x=\dfrac{2a-3}{4-a}$ имело решения?

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_a\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=2-\log_a y\\ \log_b x+\log_b y=4.\end{cases}$$

Вариант 41

1. Колхоз купил пиломатериалов на a руб Если бы колхоз купил пиломатериалов на b $м^3$ больше, а весь пиломатериал стоил бы также a руб., то каждый $м^3$ пи-

ломатериалов стоил бы на c руб. меньше. Сколько $м^3$ пиломатериалов купил колхоз?

2. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Сумма высоты конуса и его образующей равна a. Определить объем шара.

3. Решить уравнение:

$$4^{\lg x}=\frac{1}{2}\cdot 10^{1-\lg\frac{5}{2}}.$$

4. Решить уравнение:

$$\cos 3x=\sin 2x+\cos x.$$

Вариант 42

1. Планом было предусмотрено, что завод на протяжении нескольких месяцев будет изготовлять 6000 единиц продукции. Увеличив производительность труда, завод стал изготовлять в месяц на 70 единиц продукции больше, чем было предусмотрено, и на месяц раньше установленного срока перевыполнил задание на 30 единиц. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 единиц продукции?

2. Определить объем прямой треугольной призмы, зная, что основание ее — прямоугольный треугольник, радиус окружности, описанной около основания, равен R, и диагонали наибольшей и наименьшей боковых граней составляют с основанием углы α и 2α.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \lg^2 x+\lg^2 y=7, \\ \lg x-\lg y=2. \end{cases}$$

4. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Вариант 43

1. На участке реки от A до B течение так слабо, что им можно пренебречь, на участке от B до C течение уже достаточно сильное. Лодка покрывает расстояние вниз по течению от A до C за 6 часов, а от C до A, вверх про-

тив течения, за 7 час. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 часа. Сколько времени в этом случае понадобилось бы на то, чтобы подняться вверх от C до A?

2. Из вершины конуса, как из центра, описана внутри его сферическая поверхность, касательная к основанию конуса. Определить угол при вершине в осевом сечении этого конуса, если указанная поверхность делит его объем пополам.

3. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$$

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}>1.$$

Вариант 44

1. Перевозка одной тонны груза от пункта M до пункта N по ж. д. обходится на b коп. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти по ж. д. из M в N на сумму s руб., если водным путем на ту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по ж. д.?

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определить поверхность шара, если известно, что сторона основания равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α.

3. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1.$$

4. Пусть S_n есть сумма n первых членов геометрической прогрессии. Доказать

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$$

Вариант 45

1. Ученик взял в библиотеке книгу, которая имеет 480 стр. Рассчитав, сколько времени он должен читать ежедневно, чтобы вернуть эту книгу в срок, он решил

прочитывать ежедневно на 20 стр. больше, чтобы вернуть книгу на 4 дня раньше срока. На какой срок была взята книга из библиотеки?

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а угол между боковыми гранями равен φ. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$(\sin x)^{-4\sin x}-1=\operatorname{ctg}^2 x.$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

Вариант 46

1. Ремонт пути производили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 *км*, несмотря на то, что вторая бригада работала на один день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада в день, если обе вместе ремонтировали в день 4,5 *км*?

2. Вокруг шара описан прямой параллелепипед, объем которого в m раз больше объема шара. Определить двугранные углы параллелепипеда.

3. Решить уравнение

$$\sin^2 c^x+\sin^2 2c^x=\sin^2 3c^x.$$

4. Решить неравенство

$$x^{\log_{0,5}x+1}>\frac{x}{4}.$$

Вариант 47

1. Две молотилки обмолачивают весь хлеб в a дней. Если бы первая молотилка обмолотила половину всего хлеба, а затем вторая — остальную часть, они бы проработали b дней. Во сколько дней каждая из них в отдельности могла бы окончить эту работу?

2. На сторонах ромба описаны как на диаметрах полуокружности, обращенные внутрь. Диагонали ромба равны a и b. Определить площадь полученной розетки.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\lg(x-9)+\lg\sqrt{2x-1}=1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 2x = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$$

Вариант 48

1. Решить неравенство

$$\log_{5x-6} x < \frac{1}{2}.$$

2. Если от 3-го члена геометрической прогрессии отнять 4, то первые три члена образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=2$. Найти геометрическую прогрессию.

3. В правильной треугольной пирамиде площадь поверхности равна S, угол между боковой гранью и основанием равен α. Найти высоту пирамиды.

4. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

Вариант 49

1. Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся как 1:6. Определить скорость движения каждой точки, если известно, что за 10 *сек* точка, движущаяся по большой окружности, прошла на два метра больше и совершила при этом в пять раз меньше оборотов.

2 В сектор радиуса R с центральным углом α вписан круг. Определить его радиус.

3. Решить уравнение

$$0{,}01 x^{\lg x - 1} = 100.$$

4. Решить уравнение

$$3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x.$$

Вариант 50

1. Решить уравнение

$$1 + \cos\alpha = \sin\alpha + 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

2. Определить объем правильной четырехугольной

пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r.

3. Решить неравенство

$$27^x - 1 > 2(9^x - 3^x).$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{xy} \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Вариант 51

1. Для испытания мотоциклов разных систем два мотоциклиста выехали одновременно из A в B и из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p *км* от B, второй раз в q *км* от A через t часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклистов.

2. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α. Определить объем призмы.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = a. \end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$$\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1.$$

Вариант 52

1. Сосуд емкостью n литров наполнен воздухом, содержащим $m\%$ кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после этого опять выпускают такое же количество смеси и опять дополняют тем же количеством

азота, после чего в новой смеси оказалось $p\%$ кислорода. Определить, сколько литров выпускают из сосуда каждый раз?

2. В шар вписано два одинаковых конуса, оси которых совпадают, а вершины находятся в противоположных концах диаметра шара. Найти отношение объема общей части этих двух конусов к объему шара, зная, что отношение высоты конуса h к радиусу шара R равно k.

3. Решить неравенство:

$$x^{\log_a x+1} > a^2 x, \quad (a > 1).$$

4. Решить уравнение:

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

Вариант 53

1. По окружности движутся равномерно два тела: первое пробегает окружность на a *сек* скорее второго. Если они движутся по одному направлению, то сходятся через каждые c *сек*. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело в 1 *сек*?

2. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, зная, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \left[\log_4 (x^2 - 5)\right] > 0.$$

4. Решить систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Вариант 54

1. В каких пределах может быть скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 *м/сек* эта точка расстояние в 630 *м* проходит скорее, причем не менее чем на 1 *сек* и не более чем на 4 *мин*. 40 *сек*.

2. Около шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью большого основания. Определить объем и боковую поверхность усеченного конуса.

3. Решить уравнение:

$$\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3.$$

Вариант 55

1. Расстояние между городами A и B равно 100 *км*. Из города A в город B отправляются одновременно два автомобиля. Первый делает на 10 *км* в час больше второго, но на пути делает остановку на 50 минут. В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля при условии, что он прибудет в город B не позже второго автомобиля.

2. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объем пирамиды.

3. Решить уравнение:

$$\sin\pi x\cdot\sin 3\pi x=\frac{1}{2}.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>1.$$

Вариант 56

1 Основанием пирамиды служит квадрат. Двугранные углы, образуемые гранями с основанием, относятся как 1:2:4:2. Найти эти углы.

2. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m *кг* и n *кг*, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков

сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(x-\alpha)=2\operatorname{tg}\alpha.$$

4. Доказать неравенство:

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}}+\sqrt{\frac{a^2}{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

где $a>0$; $b>0$.

Вариант 57

1. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости его основания. Определить расстояние от центра нижнего основания до этой прямой, если его расстояние от точки касания равно d, а радиус цилиндра равен r.

2. Песок для строительства привозят грузовики одной и той же грузоподъемности и одинаковые самосвалы. За день было перевезено 330 *т* песка. Если бы каждый грузовик перевозил за один рейс столько же, сколько самосвал, то было бы перевезено m *т* песка, а если бы, наоборот, каждый самосвал перевозил столько, сколько грузовик, то за один день было бы перевезено n *т* песка. Сколько песка перевозили все грузовики и все самосвалы отдельно?

3. Решить уравнение:

$$7\cos x+2\sin 3x\cos 2x-\sin 5x=5.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}<\frac{6}{x-1}.$$

Вариант 58

1. Определить объем трехгранной пирамиды по трем ее боковым ребрам a, b, c и плоским углам α, β, γ при вершине.

2. По окружности в противоположных направлениях движутся два тела, причем первое — равномерно со

скоростью v, вторая — равноускоренно с линейным ускорением a. В начальный момент они находились в одной точке окружности A, причем скорость второго тела была равна нулю. Через какое время произойдет первая встреча этих тел, если вторая встреча произойдет в точке A?

3. Решить уравнение:

$$2\cos 2x+2\cos 4x+3\sin^2 2x=1.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}<\frac{1}{2x(x+1)}.$$

Вариант 59

1. На общем основании построено два прямых конуса (один внутри другого) так, что их вершины находятся друг от друга на расстоянии a. Определить объем тела, ограниченного боковыми поверхностями обоих конусов, если угол при вершине осевого сечения большего конуса равен 2α, а угол при вершине меньшего конуса равен 2β.

2. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{3}{2}$, а сумма квадратов ее членов равна $\frac{9}{8}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

3. Решить неравенство:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{0,8}\frac{3x+1}{2x-1}}<1.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\cos\frac{x}{2}.$$

Вариант 60

1. По графику поезд должен проходить перегон AB в 20 *км* с постоянной скоростью. Первый раз поезд прошел полпути с этой скоростью и остановился на 3 *мин.*,

чтобы вовремя прийти в B, ему пришлось остальные полпути идти на 10 *км* в час быстрее. Второй раз поезд остановился на полпути уже на 5 *мин*. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в B по расписанию?

2. Конус с углом α между осью и образующей и радиусом основания r рассечен сферической поверхностью, центр которой находится в вершине конуса, так что объем конуса разделен пополам. Найти радиус этой сферы.

3. Решить уравнение:

$$2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x).$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§ 1. Задачи на составление уравнений

1. $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$. 2. 20 *м*. 3. 15 час., 12 час.

4. $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+2abc}}{2c}$. 5. $\frac{3a-2b+\sqrt{9a^2+4b^2+4ab}}{4}$

6. $m\pm\frac{n}{2}+\sqrt{m^2+\frac{n^2}{4}}$. 7 $\frac{-a+\sqrt{a^2+240at}}{120t}s$.

8. $d\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. 9. $\frac{\pm mn+\sqrt{m^2n^2+4amn}}{2n}$.

10. $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$

11. Первого сплава 1 *кг*, второго 7 *кг*.

12. 16 *км/час*, 14 *км/час*. 13. 200 *км/час*, 160 *км/час*.

$$14.\ \frac{2ac+a-b+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)},$$

$$\frac{2bc+b-a+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)},$$

$$c\cdot\frac{-a-b+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}.$$

15. $b+\sqrt{b^2-ab}$, $b-a+\sqrt{b^2-ab}$, $\sqrt{b^2-ab}$.

16. $AB=3p-q$, $v_1=2\frac{2p-q}{t}$, $v_2=\frac{2p}{t}$.

17. $m\frac{\sqrt{q}+\sqrt{p}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}$. 18. $\frac{qs-2mt+\sqrt{q^2s^2+4m^2t^2}}{2qt}$,

$$\frac{qs+2mt-\sqrt{q^2s^2+4m^2t^2}}{2qt}.$$

19. $a\pm\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a^2}$.

20 Керосина $\frac{bn-2a+\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}$ *кг*,

лигроина $\frac{bn+2a-\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b}$ *кг*.

21. $\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$, $\frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$. 22. $AB=14$ *км*, $BC=16$ *км*.

23. 10 *час*. 24. $\frac{mp+\sqrt{m^2p^2+4mnp}}{2p}$,

$\frac{-mp+\sqrt{m^2p^2+4mnp}}{2m}$. 25. $\frac{-mn+\sqrt{m^2n^2+240\,mnt}}{2n}$.

26. $\frac{-c+\sqrt{c^2+16(a-b)c}}{2}$.

27. $\frac{2m\pm n+\sqrt{4m^2+n^2}}{2}$.

28. $b\pm\sqrt{b^2-2ab}$. Объяснить полученные решения.

29. Скорость $\frac{-mn+\sqrt{m^2n^2+4mns}}{2n}$ *км/час*,

время $\frac{mn+\sqrt{m^2n^2+4mns}}{2m}$ *час*.

30. $\frac{100b+aq}{p+q}$, $\frac{ap-100b}{p+q}$.

31. $\frac{m-n-t+\sqrt{m^2+n^2+t^2-2mn+2mt+2nt}}{2}$,

Указание. При составлении уравнения использовать соотношение для времени, через которое часы будут показывать верное время.

32. $\frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}}\pm 1\right)$.

33. $\sqrt{a^2-\frac{2as}{m}}$.

34. 2 *л*. 35. 3762

§ 2. Алгебраические и тригонометрические преобразования

2. $x-1$. 3. $(a^2+3a+1)^2$.

Указание. Одно из изящных доказательств следует из легко показываемого факта, что искомое выражение может быть лишь квадратом квадратного трехчлена вида $a^2+\alpha a+1$.

4. $\frac{a-x}{8x^2}$.

5. $\frac{2(a+b)ab}{(a-b)^2}$. 6. 11.

7. Не делится. Указание. На основании следствия теоремы Безу корни делителя должны быть корнями делимого.

8. *n*. 9. а) $2+\sqrt{3}$, б) $\frac{2(1-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4})}{17}$,

в) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 10. $\frac{1}{2}$.

11 $(a^2+b^2+c^2)\cdot(bc+ca+ab)$. 12. $(y-z)(z-x)(x-y)$.

13. $5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.

14. $\frac{1}{10}$. 15. $\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}$. 16. $\frac{20(a-5)}{a-4}$.

17 5 18. Указание. Полезно применить свойство $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

22. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

23. $n\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}(2n+1)$. 28. $\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$. 29. $1-\cos\alpha$.

30. $4\sin 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

31. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$.

32. $8\sin^4\alpha$. 34. Указание. Один из изящных приемов доказательства данного равенства состоит в том, что левую часть доказываемого равенства умножить и разделить на $\sin\frac{\pi}{11}$ и полученные произведения преобразовать в разности синусов.

36. $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 37. $\dfrac{8\cos 4\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{\sin^2 4\alpha}$.

39. $-0{,}075\sqrt{39}$. 40. $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$. 42. $m^2=1-n$.

43. $\cos c = b-a$. 44. Найти сначала произведения синусов и косинусов тех же углов. См. следующую задачу. 45. Указание. Для доказательства левую часть равенства умножить и разделить на $\cos 10^\circ$. 46. $x=1$, $y=11$.

49. $\frac{n}{2}-\frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. 50. $\frac{n}{2}+\frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}$.

§ 3. Уравнения и системы уравнений

1. $\pm 3\sqrt{5}$. 2. $\frac{3abc-b^3}{a^3}$. 3. -3. 4. $p=q=0$; $p=1$; $q=-2$. 5. $28x^2-20x+1=0$. 6. $\pm\frac{1}{2}$. 7. $\frac{5}{4}$. 8. 1; $\frac{-8}{3}$.

9. 80; -109. **10.** 81. **11.** $m=-5$, $n=30$, $x_3=-\frac{5}{2}$. **12.** Ни одного. **13.** Уравнение имеет два корня. $-2{,}9<x_1<<-2{,}8$; $2{,}4<x_2<2{,}5$. Указание. Число корней определить по графику. Границы для значений корней устанавливаются сравнением значений функций 2^x и $x+3$. Например, $2^{2,4}<2{,}4+3$, но $2^{2,5}>2{,}5+3$. Следовательно, равенство достигается при значении $x>2{,}4$, но $x<2{,}5$.

14. $\pm 2{,}5$; $\pm 2{,}5i$. **15.** 1; -4; $\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$.

16. 81. **17.** 15. **18.** $\frac{\lg 3}{2\lg 2}$. **19.** $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{3}{2}$. **21.** c^0.

22. 5. **23.** $100\sqrt{10}$. **24.** 9. **25.** $n\pi$. **26.** 10; 0,1. **27.** a; $a^{\frac{4}{3}}$.
28. a. **29.** 10; 10^5. **30.** -1; 1. **31.** ± 2. **32.** 2. Указание. Один из способов решения состоит в том, что числа $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ могут быть значениями синуса и косинуса одного и того же аргумента, а равенство $\cos^m\alpha+\sin^m\alpha=1$ имеет место только для одного значения $m=2$. Другое решение основывается на факте, что равенство $(a+b)^x=a^x+b^x$ справедливо только при одном значении $x=1$. **33.** (8, 2); (2, 8).
34. $x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm 4i$, $y_{3,4}=\mp 5i$.

$$x_{5,6}=\pm\sqrt{\sqrt{181}-10},\quad y_{5,6}=\mp\sqrt{\sqrt{181}+10};$$

$$x_{7,8}=\pm i\sqrt{\sqrt{181}+10},\quad y_{7,8}=\mp i\sqrt{\sqrt{181}-10}$$

35. $\left(\frac{24}{23}, 24\right)$; $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ **36.** (1, 1), если $m\neq n$. Если же $m=n$, то система имеет бесконечное число решений. Если $\frac{m}{n}>0$, то система имеет еще решение

$$\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}},\quad \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}\right].$$

37. (4, 10); (10, 4). **38.** (2, 23). **39.** 0,1; 0,001.

40. $x_{1,2}=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$, $y_{1,2}=\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$.

41. $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$ 42. $(1, 0)$. 43. $x_k=m_kt+a_k$,

$k=1, 2, \dots, n$, где $t=\frac{a-(a_1+a_2+\dots+a_n)}{m_1+m_2+\dots+m_n}$.

44. $(2,4)$; $(4,2)$. 45. $(3, -7)$, $(-7,3)$.

§ 4. Тригонометрические уравнения

1. $2k\pi$; $2\left(k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}\right)$. 2. $\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 3. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$k\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 4. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $\pi(2k+1)$. 5. $\frac{2k\pi}{3}$;

$\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 6. $\frac{\pi}{4}(4k-1)$; 7. $\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $2k\pi$;

$\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\frac{k\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{24}$ 9. $\frac{2\pi}{3}(6k\pm1)$,

$\frac{2\pi}{5}(2k+1)$. 10. $k\pi$; $\frac{\pi}{2}(4k\pm1)$. 11. $\frac{k\pi}{2}$.

12. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}-3}{12}+k\pi$. 13. $\frac{k\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$.

14. $\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{6})+k\pi$. 15. $\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$.

16. $2k\pi+2\operatorname{arctg}(3\pm\sqrt{2})$. 17. $\frac{\pi}{2}(4k-1)$,

$\frac{\pi}{2}(8k+1)$. 18. $\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $\frac{\pi}{9}(6k\pm1)$. 19. $\frac{\pi}{8}(4k-1)$,

20. $\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 21. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

22. $\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\pi$. **23.** $k\pi+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)$,

$$\frac{\pi}{2}(2k+1)-\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1).$$

24. $\frac{\pi}{20}(4k+1)$, $\frac{\pi}{44}(4k-1)$. Замечание. Устранение повторяющихся корней значительно усложняет запись ответа.

$$\textbf{25. } k\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}.\ \textbf{26. } \frac{\pi}{4}(4k+1).$$

$$\textbf{27. } \pm\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{k\pi}{2}\ \textbf{28. } \pi(2k+1),$$

$$\frac{4\pi}{3}(3k\pm1).\ \textbf{29. } \pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2k\pi.$$

Указание. Сделать переход к функции дополнительного угла, например, $\sin(\pi\cos x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x\right)$, а затем разность косинусов преобразовать в произведение.

$$\textbf{30. } \frac{\pi}{4}(2k+1).\ \textbf{31. } \frac{8\pi}{3}(3k\pm1).\ \textbf{32. } \frac{\pi}{4}(4n-1),\ n\pi.$$

$$\textbf{33. } \frac{\pi}{6}(3k\pm1).\ \textbf{34. } 2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi.\ \textbf{35. } \frac{n\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}(2n+1).$$

36. $\frac{n\pi}{3}$. **37.** $\frac{n\pi}{2}$. Указание. Корнями данного уравнения могут быть только такие значения x, для которых $\cos x=0$ или $\sin x=0$, так как в противном случае $\cos^{50}x<\cos^2 x$ и $\sin^{50}x<\sin^2 x$, откуда следует $\cos^{50}x+\sin^{50}x<\cos^2 x+\sin^2 x=1$. **38.** $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ — главные значения.

39. а) В этой системе одно уравнение есть следствие другого. Преобразование суммы косинусов в произведение сразу приводит первое уравнение ко второму. Система не имеет определенного решения. б) Между уравнениями данной системы есть зависимость. Для неизвестных легко установить зависимость более простого вида: $x-y=\pi(2n+1)$.

40. $x_1=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad y_1=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},$

$x_2=k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad y_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

41. $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right); \quad \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right).$

§ 5. Неравенства

5. Воспользоваться неравенством $xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$. 7. Воспользоваться неравенством $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. 11. $x<3$. 12. $0{,}5\leqslant x\leqslant 2{,}5$. 13. $x>-0{,}5$. 14. $x>\frac{5}{2-3m}$, если $m<\frac{2}{3}$; $x<\frac{5}{2-3m}$; если $m>\frac{2}{3}$. При $m=\frac{2}{3}$ решений нет. 15. $x>\frac{3m-5}{m+1}$, если $m<-1$ или $-1<m<1$; $x<\frac{3m-5}{m+1}$, если $m>1$; если $m=-1$ или $m=1$, то неравенство не имеет смысла. 16. Если $a<-2$, то $x<\frac{3+b}{a+2}$; если $a=-2$ и $b<-3$, то неравенство справедливо при любом x; если $a=-2$ и $b>-3$, то неравенство не имеет решений; если $a>-2$, то $x>\frac{3+b}{a+2}$ 17. $x>4{,}4$. 18. $-3<x<2$.

19. $2<x\leq 3$. 20. $-1<x\leq 0$, $4\leq x<5$.

21. $x<-5$ и $-1<x<3$. 22. $1\frac{51}{52}<x<2\frac{1}{48}$.

23. $x>3\frac{9}{13}$. 24 $2<x<3$. 25. $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$1+\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ 26. $-1<x<2$; $2<x<5$.

27. $-1<x<1$; $3<x<5$. 28. $x<-3$, $\frac{1}{2}<x<2$; $x>2$.

29. $1<x<4$. 30. $1<x<2$. 31. $0<x<2-\log_2 3$, $x>1$,

32. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$, где k — любое целое число.

33. $-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, где k — любое целое число.

34. -1, 0, 2, 3, 9. 36. $2<a<4$. 37. $a<-3$,

$1<a\leqslant\frac{3}{2}$. 38. $3<a<4$. 39. m — любое действительное число. 40. Рассмотреть дискриминант квадратного уравнения.

42. $-\frac{3}{2}<a<15-4\sqrt{17}$, $a>15+4\sqrt{17}$.

43. $x<0$, $x>2$. 44. $-1<a<2$. 45. $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$,

$\frac{5\pi}{4}<x<2\pi$. 47. Применить неравенство $\sin\alpha\leqslant\alpha$ и воспользоваться убыванием $\cos\alpha$ в первой четверти.

50. $\frac{\pi}{3}+2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi-\arccos\frac{1}{4}$,

$(2n-1)\pi+\arccos\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}+2n\pi$.

51. $x<\frac{7}{2}$. 52. Решений нет. 53. $-3<x<-4$; $5<x<6$.

54. $0<x<\frac{1}{8}$, $1<x<4$. 55. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+n\pi<x<\frac{\pi}{2}(2n+1)$,

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi<x<\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi.$$

56. $\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<(2n+1)\pi-\arccos\frac{1}{4}$.

$$(2n-1)\pi+\arccos\frac{1}{4}<x<-\frac{\pi}{3}+2n\pi.$$

57. $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{2}{3}\pi+2n\pi$.

§ 6. Прогрессии

1. $\div 2, 6, 18$ или $\div 18, 6, 2$. **2.** $\div -1, 0, 1, 2$. Указание. Из условия вещественности первого члена прогрессии найти границы возможных значений разности прогрессии и взять единственное целое значение, равное 1. **3.** $q=2$. Указание. Члены геометрической прогрессии, стоящие на нечетных местах, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^2. **5.** Неравные числа не могут. **6.** $\div 2, 6, 10,\ldots$ Указание. Полагая $n=1$ и $n=2$, найдем $S_1=a$ и $S_2=2a+d$, где a — первый член искомой арифметической прогрессии, а d — ее разность. Прямой подстановкой доказать справедливость равенства S_n: $n=2n$ для любого n. **7.** $8(1+i)$. **8.** $\div 12, 6, 3,\ldots$ Указание. Квадраты членов геометрической прогрессии составляют новую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и со знаменателем q^2. **9.** $\div 2, 10, 50$ или $\div 50, 10, 2$. **10.** 2, 4, 8, 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **11.** $\frac{3069}{256}$. **12.** $\div 9, 27, 81, 243,\ldots$ и $\div -4{,}5; 13{,}5; -40{,}5; 121{,}5\ldots$

13. $a_n=1+\frac{3}{2}n(n-1)$. $S_n=\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

14. $S_n=\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$ при $x\neq 1$; при $x=1$

$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{}$ 15. $\div 2, 6, 10 \ldots$

16. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$. 17. $a_m = \sqrt{AB}$, $a_n = A^{\frac{2n-m}{2n}} B^{\frac{m}{2n}}$.

18. 3:5:7. 19. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

20. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 22. $\frac{n}{n+1}$. 23. $2a^2$.

§ 7. Функции и графики

2. x — любое число. 3. $x \geqslant 3$. 4. $x \neq 2,5$. 5. $x \leqslant 1$, $x \geqslant 2$. 6. $x > -4$. 7. $-2 < x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$. 8. $0 < x < \pi$, $2n\pi < x < (2n+1)\pi$, где n — любое целое число. 9. $x \neq \frac{n\pi}{2}$. 18. Указание. Построить графики прямой и обратной функции. 19. $y_{\text{наим.}} = y(3,5) = -2,25$.

20. $y_{\text{наим.}} = -\sqrt{2}$, $y_{\text{наиб.}} = \sqrt{2}$. 21. $y_{\text{наим.}} = \frac{1}{4}$, $y_{\text{наиб.}} = 1$.

22. а, в, — четные; б, г, д, е — нечетные.

§ 8. Задачи по геометрии

21. Искомое сечение проходит через середины ребер пирамиды.

22. $\frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b}$. 23. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 24. $\frac{2\sqrt[3]{V}}{\sqrt{3}}$

25. $\frac{2}{3}(2\sqrt{3}+3)R$, $2(2+\sqrt{3})R$. 26. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 27. 84 *м.*

28. 72π. 29. $V = \pi a^3$, $S = 2\pi\sqrt{3a^2}$. 30. 65 *дм.*

31. $2\sqrt{Rr}$. 32. $\frac{1}{3}\sqrt{113}$. 33. $12\sqrt{3}$ *см*². 34. $r = h$.

35. $\sqrt{2}+1$, считая от вершины. 36. $\frac{15}{8}$. 37. $\frac{3}{4}a$.

38. $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$. 39. 3 *см*, 6 *см*, 9 *см*, 6 *см*.

40. $\sqrt{2S}$. 41. $3a^2(7-4\sqrt{3})$. 42. 37 *см*, $\sqrt{769}$ *см*.

43. $\frac{3(4\pi-3\sqrt{3})}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}P^2$. 44. d^2.

45. $\frac{16b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$.

§ 9. Геометрические задачи с применением тригонометрии

1. $\frac{d\sqrt{2}}{4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)}$. 2. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$.

3. $S=\frac{4ab}{\sin\alpha}$, $d_{1,2}=\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$.

4. 1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$, 2) $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5. $\frac{a^2}{4}\frac{n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}-(n-2)\frac{\pi}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2}$. 6. $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$,

$\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$. 7. $b=\frac{a}{\sqrt{5-4\cos A}}$.

8. $\frac{a^2\sin^2 2\alpha}{4+4\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha}$.

9. $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(\frac{\pi+\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}$.

10. $R^2\left(\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

11. $A=B=\arccos\sqrt{\frac{n}{2(m+n)}}$, $C=\arccos\frac{m}{m+n}$.

12. $\arcsin\frac{4S}{\pi Q}$. 13. $\frac{(a+b)t}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2t^2}$.

14. $\frac{1}{4}c^2\frac{\sin 2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. Указание. Применить легко выводимую формулу $S_{осн.}=S_{бок.}\cos\beta$.

15. $\frac{q^2\sqrt{3}}{4m}[m+\sqrt{3m(m+2n)}]$.

16. $\frac{\sqrt{3}b^2}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$. 17. $a^2\frac{\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

18. $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta$. 19. $\frac{1}{12}a^3\cos\alpha\sin 2\alpha$.

20. $\frac{a^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$. Указание. См. выше указание к задаче 14.

21. $\frac{4}{3}Q\sin\alpha\sqrt{Q\cos\alpha}$. 22. $\frac{4}{3}l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

23. $4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{9V^2}{\cos\alpha\sin^2\alpha}}$. 24. $a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$.

25. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4\sin\alpha}$. 26. $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$. 27. $\alpha=2\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Указание. Взять отношение объемов конусов — отсеченного и исходного. 28. $\cos\varphi=\sin\alpha\sin\beta$.

29. $\frac{\pi(b^2\operatorname{ctg}^2\alpha-a^2\operatorname{ctg}^2\beta)\sqrt{b^2-a^2}}{24(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}}$.

30. $\frac{\sqrt{3}}{2}R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 31. $\frac{4}{3}R^3\frac{(1+\cos\varphi)^3}{\cos\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha}$.

32. $\operatorname{arctg} 2$. 33. $\dfrac{2\pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\cos\alpha \sin 2\alpha}$.

34. $\dfrac{\sqrt{9\pi V^2 \operatorname{tg}\alpha}}{\cos\alpha \sin^3\alpha}$. 35. $\dfrac{V \sin^3\alpha \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{4}$.

36. $\dfrac{4p^2 \sin 2\alpha}{(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$. 37. $4\pi d^2 \operatorname{ctg}^2\alpha$.

38. $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}}$.

39. $\dfrac{4\pi}{n} \operatorname{tg}^3 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

40. $2\sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{tg}\alpha} \cdot (1+\operatorname{ctg}\alpha)$.

§ 10. Разные задачи

1. 4. 2. $(n-1)!\,(n-2)$. 3. C_n^4.

4. $a_{17}=3420$, $a_{18}=0$.

5. На 9 частей первого сплава нужно взять 35 частей второго сплава.

6. На заполнение каждой фигуры потребовалось 1225 кругов.

7. Указание. Рассмотреть сначала случай трех предметов. 8. Указание. Один из способов доказательства состоит в том, что нужно показать, что всякому решению уравнения указанного вида соответствует набор из нулей и единиц, не являющийся решением данного уравнения. 10. $\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$. 11. Указание. Общий делитель двух алгебраических выражений есть делитель остатка от деления одного алгебраического выражения на другое. 13. Указание. Рассмотреть крайние отрезки.

18. $m(k-1)+1$.

19. Указание. Рассмотреть случаи рационального и иррационального числа α. 21. 1; 12; 25. 23. Замеча-

ние. Если обозначить число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$ через A, то $\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ цифр}}=A(10^n+1)$, а число $10^n-1=9A$. 24. Петр Крылов на 1 курсе, Николай Иванов на 2 курсе, Борис Карпов на 3 курсе, Василий Орлов на 4 курсе. 25. $c=9$. 26. 1.

§ 11. Варианты письменных работ, предлагавшихся на вступительных экзаменах

Вариант 1. 1. Скорость велосипедиста

$$\frac{d-bt+\sqrt{(d+bt)^2+4bta}}{2t}\ \textit{км/час.}$$

$$2.\ \frac{1}{3}\frac{(n+2)h^3}{k^2-1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

Указание. Если сумма внутренних углов правильного многоугольника равна $n\pi$, то число его сторон $n+2$.

$$3.\ \frac{k\pi}{4},\ \frac{\pi}{16}(2k+1).$$

$$4.\ 1-\sqrt{2}<x<1,\ 2<x<1+\sqrt{2},\ x>3.$$

Вариант 2. 1. $\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$ — скорость второго.

$$2.\ 8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.\ 3.\ 2k\pi,\ \frac{\pi}{4}(4k+1).\ 4.\ x>3.$$

Вариант 3. 1. $\dfrac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}^2\varphi.$

2. Скорость $\dfrac{-mn+\sqrt{m^2n^2+4mns}}{2n}$ *км/час.*

$$3.\ (81,\ 16).\ 4.\ \pi(4k+1),\ \frac{\pi}{3}(12k+1).$$

Вариант 4. 1. $\frac{-p+\sqrt{p(p+16m-16n)}}{2}$.

2. $\frac{2a^2}{(1+\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\alpha)^2}$. 3. $2k\pi$, $\frac{\pi}{4}(4k+1)$.

4. $a>10$, $-26\frac{1}{8}\leqslant a<-5$.

Вариант 5. 1. $\frac{\mp a+\sqrt{a^2+2as}}{2}$.

2. $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$. 3. (16; 4), (1; 1). 4. Решений нет.

Вариант 6. 1. $\frac{60vd}{60d+v(t_2-t_1)}$ *км/час.*

2. $S_б=\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$, $V=\frac{2}{3}\pi R^3\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. 3. $1\pm 2\sqrt{13}$.

4. $-1<x<2$, $x>8$.

Вариант 7. 1. 0,5 мин. См. указание к задаче 31 § 1.

2. $\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

3. (4, 3), (—4, —3). 4. $\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$, $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Вариант 8. 1. $q=\pm\sqrt{3}$, $a_7=27$.

2. $\frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha$ 3. $1<x<7$.

4. $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$.

Вариант 9. 1. 6 мин. и 10 мин. 2. $2b^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$

3. (2,3), (3,2), (1,5), (5,1).

4. $\frac{\pi}{3}(12n-1)$, $\frac{\pi}{3}(12n+7)$ или $x=2k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{3}$.

Вариант 10. 1. $\frac{3}{2}$; 1. 2. $\frac{S}{3\pi}\sin 2\alpha \sin\beta\sqrt{\frac{S\cos\beta}{\pi}}$.

3. $-1<x<1$; $2<x<4$.

4. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $\frac{\pi}{12}(2n+1)$.

Вариант 11. 1. 8 и 12 дней.

2. $\frac{a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$, $\beta<\alpha$.

3. $x<-\frac{1}{2}$, $x>0$. 4. $\pi(2n+1)$,

$\frac{4\pi}{3}(3n\pm 1)$.

Вариант 12. 1. 24.

2. $2a^2 b\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \left(\beta>\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. 4; 2.

4. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$, $\operatorname{arctg} 5+n\pi$.

Вариант 13. 1. $\frac{3(a+\sqrt{a^2+240a})}{2a}$,

$\frac{3(-3a+\sqrt{a^2+240a})}{2a}$. 2. $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}^2\gamma$.

3. $0<x<\frac{1}{3}$. 4. $n\pi$; $-\operatorname{arctg} 3+n\pi$.

Вариант 14. 1. 45 дней и 30 дней или 24 дня и 72 дня. Условия задачи не позволяют дать определенного ответа.

2. $\frac{a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}}{2\cos\beta}$. 3. 10; 10^{-4}.

4. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Вариант 15 1. 50 *км*, 150 *км*. 2 $\dfrac{12l^2\sin^2\beta}{(\sqrt{2}+\operatorname{tg}\beta)^2}$.

3. $\dfrac{\pi}{4}(4n+1)$, $2n\pi$. 4. (2,2).

Вариант 16. 1. 27; 3. 2. $Q\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin 2\alpha\sin\alpha$.

3. $\dfrac{\pi n}{2}$. 4. 3; 7.

Вариант 17. 1. 3 *км/час*, 45 *км/час*.

2. $\dfrac{H^3\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha}$.

3. $x<0$, $x>1$. 4. $n\pi$, $\dfrac{\pi}{8}(2n+1)$.

Вариант 18. 1. 4, 12, 36; $\dfrac{4}{9}$, $-\dfrac{20}{9}$, $\dfrac{100}{9}$.

2. $\dfrac{S}{2}\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}$.

3. $\dfrac{\pi}{4}(4n+1)$. 4. 9.

Вариант 19. 1. 2 *дм*. 2. $\dfrac{\sqrt{2}a^3\sin^3\alpha\cos\alpha}{12\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

3. $x<1$, $x>\dfrac{3}{2}$. 4. $\dfrac{1}{2}(1+2b^2-b^4)$.

Вариант 20. 1. Последовательные встречи точек будут происходить в моменты времени

$$t_n=\frac{a-v_2t+l(n-1)}{v_1-v_2},$$

если $v_1t\leqslant a$. При $v_1t>a$ указанная формула верна для $n\geqslant 2$, первая встреча произойдет в момент времени $t_1=\dfrac{a}{v_1}$. 2. $\arccos\dfrac{1}{3}$ 3. Можно воспользоваться неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим .

4. При $-4 \leqslant a \leqslant 2$

$$x = \pm \arccos \frac{3-\sqrt{9-4a}}{2} + 2n\pi,$$

при других значениях a решений нет.

Вариант 21. **1.** $4 \leqslant v \leqslant \frac{8+\sqrt{61}}{3}$. **2.** $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. См. указание к задаче 3 (вариант 20). Можно использовать также неравенство для суммы положительного числа и обратного к нему. **4.** $\cos x = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

при $a \leqslant -2$; $\cos x = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ при $a \geqslant 2$; при $|a| < 2$ решений нет.

Вариант 22. **1.** 42 *км/час*, 54 *км/час*. **2.** $\frac{ab}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

3. $\frac{9}{4}$.

Вариант 23. **1.** 781.

2. $\frac{4}{3} l^3 \cos\alpha\cos\beta \sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **3.** 4; 2.

Вариант 24. **1.** 8 маляров и 10 плотников.

2. $3\sqrt[6]{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{V^2 \operatorname{tg}\alpha}$. **3.** $2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

4. 5; $\sqrt[5]{5}$.

Вариант 25. **1.** $\frac{a(b+c)}{2bc}$, $\frac{a(b-c)}{2bc}$.

2. $\sqrt{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

3. $\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}$, $\pi n - \frac{\pi}{4}$. **4.** $x \geqslant 4$.

Вариант 26. 1. $\frac{-(60d+vt)+\sqrt{(60d+vt)^2+240dvt}}{2t}$

2. $\frac{8}{3}\pi a^3 \sin\alpha \cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. 3. 4.

4. При $a>0$ $3a<x<5a$; при $a<0$ $5a<x<3a$; при $a=0$ решений нет.

Вариант 27. 1. 36 *км* и 30 *км*. 2. $\frac{2l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3\sin\beta}$.

3. $2n\pi$, $\frac{\pi}{4}(4n-1)$, $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. 4. 1; 2.

Вариант 28. 1. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $\frac{\pi}{2}(4n-1)$; $2n\pi$.

2. $\frac{9R^3\sin^3\alpha}{32\sin^3(60^\circ+\alpha)}$.

3. $x=\pm1$; $y=\pm\frac{1}{2}$; $z=\pm2$.

4. $-7<x<1$.

Вариант 29. 1. $s\frac{(m-120)+\sqrt{120^2+m^2}}{2m}$ для первого, для второго $s\frac{(120+m)-\sqrt{120^2+m^2}}{2m}$.

2. $\frac{d^3}{3\sin\frac{3}{2}\gamma}$. 3. $\frac{\pi}{6}(6n+1)$, $\frac{\pi}{12}(6n-1)$.

4. $(4; 2)$, $\left(6\frac{1}{12}; -5\frac{11}{12}\right)$.

Вариант 30.

1. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\frac{2\pi}{3}(3n\pm1)$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$.

2. $\frac{a^2 \cos\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}{\operatorname{tg}\alpha}$. 3. (12; 10), (—10; —12).

4. $x<-\frac{1}{7}$.

Вариант 31. 1. 2 *см*. 2. 48 и 20. 4. 1.

Вариант 32. 1. $\frac{c\left(a+2-\sqrt{a^2+4}\right)}{2a}$.

3. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+n\pi$. 4. $1<x<4$.

Вариант 33. 1. 6 *км/час*, 24 *км/час*.

2. $\frac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}(4-\sin^2\alpha)}$. 3. (1; 1), (2; 4), (—2; 4).

4. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$, $\pi(2n+1)$.

Вариант 34. 1. Скорость второго $\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

2. $\frac{\pi r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{4}}$. 3. $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

Вариант 35. 1. 3 и 6 дней. 2. $\frac{\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{2}$.

3. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$. 4. $x\geqslant 3$.

Вариант 36. 1. Скорость по грунтовой дороге

$$\frac{3(s-tv)+\sqrt{9s^2-6tvs+9t^2v^2}}{6t}.$$

2. $\frac{2\pi b^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$.

3. $\frac{\pi}{6}(4n+1)$, $\frac{\pi}{2}(4n-1)$ 4. $m_1=7$, $x_1=2{,}5$, $x_2=5$; $m_2=10$, $x_1=3{,}5$, $x_2=7$.

Вариант 37. 1. Для велосипедиста

$$\frac{a-2b+c+\sqrt{a^2+4b^2+c^2+4ab-2ac}}{2} \text{ часов.}$$

$$2.\ \frac{8R^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

3. $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$. 4. $x<-\frac{3}{2}$, $x>-1$.

Вариант 38. 1. $\frac{-b+\sqrt{b^2+240ab}}{2}$ *км.*

$$2.\ 8R^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)},$$

где $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 3. 1; $10^{\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}}$. 4. $\alpha=2n\pi$, или $\beta=2n\pi$, или $\alpha+\beta=2n\pi$.

Вариант 39. 1. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$.

$$2.\ \frac{r^2\sin^2\alpha}{2\cos\varphi\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.\quad 3.\ 11.$$

Вариант 40. 1. $AB=3a-b$.

2. $2\pi r^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}$. 3. $-1\leqslant a\leqslant\frac{7}{3}$.

4. $x=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}$; $y=\frac{a^2\mp\sqrt{a^4-4b^4}}{}$.

Вариант 41. 1. $\frac{-bc+\sqrt{b^2c^2+4abc}}{2c}$.

2. $\dfrac{\pi a^3}{48\sin^3\alpha\sin^6\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. 3. $\sqrt{10}$.

4. $\dfrac{n\pi}{2}$, $-(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi$.

Вариант 42. 1. 10.

2. $\dfrac{2R^3}{\cos^4\alpha}\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha\sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}$,

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$. 3. $\left(10^{\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}},\ 10^{\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}}\right)$.

Вариант 43. 1. 7,7 часа.

2. $2\arccos\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$. 3. $\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$. 4. $-1<x<1$.

Вариант 44. 1. $\dfrac{bk+\sqrt{b^2k^2+400bks}}{2b}$.

2. $\pi a^2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 3. $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$; $-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$.

Вариант 45. 1. 12.

2. $\dfrac{h^3\sqrt{3\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

3. $\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$; $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi$. 4. 1; 2.

Вариант 46. 1. 2 *км* и 2,5 *км*.

2. $\arcsin\dfrac{6}{m\pi}$. 3. $\dfrac{\lg n\pi}{\lg c}$; $\dfrac{\lg\dfrac{\pi}{6}(2n+1)}{\lg c}$;

$n=1, 2, \ldots$. 4. $\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}<x<2^{\sqrt{2}}$.

Вариант 47. **1.** $b\pm\sqrt{b^2-2ab}$.

2. $\frac{\pi(a^2+b^2)-4ab}{8}$. **3.** 13.

4. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$.

Вариант 48. **1.** $2<x<3$; $1{,}2<x<1{,}4$.

2. 1, 3, 9,...

3. $\frac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{27}}$. **4.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$.

Вариант 49. **1.** 1 *м/сек* и 1,2 *м/сек*.

2. $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$. **3.** $\lg x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

4. $\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$.

Вариант 50. **1.** $\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $\pi(2n+1)$.

2. $\frac{4r^2\sqrt{\cos\alpha}}{3\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$. **3.** $x>0$. **4.** (4; 16), (16, 4).

Вариант 51 **1** $v_1=\frac{4p-2q}{t}$, $v_2=\frac{2p}{t}$,

$s=3p-q$. **2.** $\frac{h^3}{2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

3. $x=\frac{1}{2}\left(a\pm\arccos\frac{1}{4\cos\alpha}\right)+n\pi$,

$y=\frac{1}{2}\left(a\pm\arccos\frac{1}{4\cos\alpha}\right)-n\pi$. Решение существует, если $|\cos\alpha|>\frac{1}{4}$. **4.** $x=1$; $x=3$.

Вариант 52. 1. $x_{1,2}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{p}}{\sqrt{m}}n$. Исследовать решение.

2. $\frac{(k-1)(2-k)(k^2-5k+3)}{6k}$. 3. $x>a^{\sqrt{2}}$, $0<x<a^{-\sqrt{2}}$

4. $\frac{\pi}{4}(4n-1)$, $n\pi$.

Вариант 53

1. $\frac{a+\sqrt{a^2+4ac}}{ac}180°$, $\frac{\sqrt{a^2+4ac}-a}{ac}180°$.

2. $\frac{\pi r^2}{3(d\pm r)^2}\left(\sqrt{d^2\pm 2dr+2r^2}+r\right)^3$.

Возможны два положения касательной плоскости относительно вершины конуса и вписанного шара.

3. $-\sqrt{6}>x>-3$, $\sqrt{6}<x<3$. 4. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$,

$y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(2n-k)$.

Вариант 54. 1. $5\leqslant v$ (*м/сек*) $\leqslant 42$.

2. $\frac{2\pi(4-\sin^2\alpha)}{3\sin^2\alpha}R^3$, $\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$. 3. $\frac{1}{4}+2n$, $-\frac{5}{12}+2n$.

4. $2<x<3$, если $a>1$; $3<x<\sqrt[3]{35}$, если $0<a<1$.

Вариант 55. 1. $10\leqslant v\leqslant 40$ (*км/час*).

2. $\frac{2\sqrt{3}R^2}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2\sqrt{3}R^3}{3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}$. 3. $\frac{2n+1}{4}$, $n\pm\frac{1}{6}$.

4. $1<x<10$.

Вариант 56. 1. 30°, 60°, 120°, 60°. 2. $\frac{mn}{m+n}$.

3. Если $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, то $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1+\sqrt{\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1}}{\operatorname{tg}\alpha}$;
если $\operatorname{tg}\alpha=0$, то $x=n\pi$

Вариант 57. 1. $\sqrt{d^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha}$.

$$2.\ \frac{(m-330)n}{m-n} \quad \frac{(330-n)m}{m-n}.$$

3. $\pm\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+2n\pi$. 4. $x<-2$; $-\frac{5}{4}<x<-1$; $1<x<5$.

Вариант 58.

$$1.\ \frac{abc}{3}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{a+b-\gamma}{2}}$$

$$2.\ \frac{v}{a}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Указание. Для составления уравнения воспользоваться равенством пути, пройденного каждым телом до второй встречи, и суммы путей, пройденных каждым телом до первой встречи. Время до второй встречи следует исключить из полученных уравнений.

3. $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. 4. $\frac{-(5+\sqrt{33})}{2}<x<-1$; $0<x<\frac{\sqrt{33}-5}{2}$; $1<x<2$.

Вариант 59. 1. $\frac{\pi a^3\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin(\alpha+\beta)}{3\sin(\alpha-\beta)}$.

2. $a=1$, $q=\frac{1}{3}$. 3. $-2<x<-\frac{1}{3}$.

4. $\frac{2\pi}{5}(2n+1)$, $\frac{2\pi}{3}(6n\pm 1)$.

Вариант 60. 1. 60 *км/час*. 2. $\frac{r}{2\sin\alpha}\sqrt[3]{4\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

3. $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+(2n+1)\pi$.

4. $0<x<1$; $x>2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗ ПО МАТЕМАТИКЕ

Общие указания

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой; умение доказывать эти теоремы;

б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении;

в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой; умение применять их при решении задач.

Программа по математике состоит из трех разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий, которыми должен владеть поступающий. Во втором разделе указаны теоремы, которые необходимо уметь доказывать, и формулы, которые надо уметь выводить. Содержание теоретической части экзаменационных билетов должно черпаться из этого раздела. В третьем разделе охарактеризованы основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

I. Основные математические понятия

Арифметика, алгебра и элементарные функции

1. Простые и составные натуральные числа.
2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел.
3. Рациональные и иррациональные числа.

4. Числовая прямая. Модуль (абсолютная величина) действительного числа.

5. Предел числовой последовательности.

6. Степени и корни с натуральным показателем. Арифметическое значение корня.

7. Степени с нулевым, целым и рациональным показателем. Понятие о степени с иррациональным показателем

8. Комплексные числа и арифметические действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа.

9. Одночлены и многочлены. Степень одночлена и многочлена.

10 Многочлены от одного неизвестного. Корни многочлена.

11. Тождества и уравнения. Корни уравнения. Равносильные уравнения.

12. Система уравнений. Решения системы. Совместные и несовместные системы.

13. Неравенства. Решения неравенства. Равносильные неравенства.

14. Функции одного аргумента. Область определения и область значений. Свойства функций: четность, нечетность, монотонность, периодичность. График функции. Взаимно обратные функции.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

16. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

17. Логарифмы.

18. Градусное и радианное измерение углов. Углы, бóльшие 360°. Положительные и отрицательные углы.

19. Тригонометрические функции.

20. Обратные тригонометрические функции.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная. Сумма и разность отрезков. Длина отрезка. Отношение отрезков. Пропорциональные пары отрезков. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки.

2. Угол. Сумма и разность углов. Вертикальные и смежные углы.

3. Перпендикулярные и параллельные прямые.

4. Многоугольник. Его вершины, стороны, диагона-

ли. Периметр многоугольника. Выпуклый многоугольник. Правильный многоугольник.

5. Равенство и подобие геометрических фигур.

6. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота и средняя линия треугольника. Виды треугольников.

7. Четырехугольники: трапеция, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Средняя линия трапеции.

8. Понятие о площади прямоугольника и многоугольника.

9. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр и радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор и сегмент.

10. Центральные и вписанные углы.

11. Многоугольники, вписанные в окружность и описанные вокруг нее.

12. Длина окружности.

13. Площадь круга.

14. Плоскость; параллельные и пересекающиеся плоскости.

15. Параллельность прямой и плоскости.

16. Перпендикулярность прямой и плоскости.

17. Двугранные углы. Линейные углы двугранных углов. Перпендикулярность двух плоскостей.

18. Угол между прямой и плоскостью.

19. Скрещивающиеся прямые. Угол между двумя скрещивающимися прямыми.

20. Многогранники: призма и пирамида. Их вершины, ребра, грани и диагонали. Прямая и наклонная призмы. Правильные призма и пирамида. Параллелепипед. Прямоугольный параллелепипед. Куб.

21. Площадь поверхности и объем призмы и пирамиды.

22. Цилиндр и конус.

23. Площадь поверхности и объем цилиндра и конуса.

24. Шар. Его центр, хорды, диаметр, радиус. Касательная плоскость к шару. Шаровые сектор, сегмент и пояс.

25. Площадь поверхности и объем шара.

II. Основные формулы и теоремы

Арифметика, алгебра и элементарные функции

1. Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10^n.

2. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел.

3. Существование иррациональных чисел

4. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.

5. Решение линейных уравнений с одним неизвестным.

6. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

7. Геометрическая интерпретация решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

8. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ и ее график.

9. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

10. Решение квадратных уравнений

11. Формулы Виета для квадратных уравнений.

12. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

13. Свойства числовых неравенств

14. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.

15. Решение линейных неравенств с одним неизвестным.

16. Решение квадратных неравенств с одним неизвестным.

17. Формулы общего члена арифметической прогрессии и суммы ее членов.

18. Формулы общего члена геометрической прогрессии и суммы ее членов.

19. Вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

20. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную.

21. Свойства показательной функции и ее график.

22. Свойства логарифмической функции и ее график.

23. Логарифм произведения, частного и степени.

24. Свойства десятичных логарифмов.

25. Зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента.

26. Формулы приведения.

27. Свойства функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и их графики.

28. Свойства функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ и их графики.

29. Решение уравнений вида

$$\sin x=p,\ \cos x=p,\ \operatorname{tg} x=p,\ \operatorname{ctg} x=p.$$

30*. Решение неравенств вида

$$\sin x>p,\ \ \cos x>p,\ \ \operatorname{tg} x>p,$$
$$\sin x<p,\ \ \cos x<p,\ \ \operatorname{tg} x<p.$$

31. Выражение тригонометрических функций двойного и половинного аргумента через функции основного аргумента.

32. Формулы сложения тригонометрических функций.

33. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

34. Преобразование в произведение выражений вида

$$\sin\alpha\pm\sin\beta,\ \ \cos\alpha\pm\cos\beta,\ \ \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta.$$

35. Преобразование в сумму выражений вида

$$\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin\beta\cos\alpha,\ \ \cos\alpha\cos\beta.$$

Геометрия

1. Свойства вертикальных и смежных углов. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Признаки равенства треугольника.

3. Зависимость между сторонами и углами треугольника.

4. Свойства перпендикуляра и наклонных. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

5. Свойства биссектрисы угла и перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину.

6. Признаки параллельности прямых.

---

* В 1972 г. этот пункт исключался из экзаменационных билетов.

7. Свойства углов с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами.

8. Сумма углов треугольника. Сумма углов выпуклого многоугольника.

9. Свойства сторон и углов параллелограмма.

10. Свойства диагоналей параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата.

11. Свойства средних линий треугольника и трапеции.

12. Свойства касательной и окружности.

13. Измерение углов, вписанных в окружность.

14. Существование вписанной окружности треугольника.

15. Существование описанной окружности треугольника.

16. Свойства параллельных прямых, пересекающих стороны угла.

17. Признаки подобия треугольников.

18. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

19. Теорема Пифагора.

20. Теорема косинусов.

21. Теорема синусов.

22. Вычисление площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции.

23. Отношение площадей подобных треугольников и подобных выпуклых многоугольников.

24. Подобие правильных одноименных многоугольников. Постоянство отношения длины окружности к диаметру. Формула длины окружности.

25. Формула площади круга.

26. Признак перпендикулярности прямой к плоскости.

27. Теорема о трех перпендикулярах и обратная ей.

28 Признаки параллельности прямой и плоскости; параллельности двух плоскостей.

29. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

30. Свойства граней и диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

31. Вычисление объема параллелепипеда.

32. Вычисление площади поверхности и объема призмы

33. Свойства параллельных сечений в пирамиде.

34. Вычисление площади поверхности и объема пирамиды.

35. Вычисление площади поверхности и объема цилиндра и конуса.

36. Вычисление площади поверхности шара.

37. Вычисление объема шара.

III. Основные умения и навыки

Экзаменуемый должен уметь:

1. С достаточной беглостью производить арифметические действия над именованными и отвлеченными числами, заданными в виде десятичных или обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные и результаты вычислений; производить приближенную прикидку результата; пользоваться таблицами для производства вычислений.

2. Проводить тождественные преобразования алгебраических выражений (многочленов, алгебраических дробей и выражений, содержащих показательные, логарифмические и тригонометрические функции).

3. Строить графики функций, описанных в разделе II, а также графики функций, которые приводятся к ним элементарными преобразованиями.

4. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств описанных в программе типов, а также сводящиеся к ним. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений описанных типов.

5. Изображать геометрические фигуры и тела на чертеже.

6. Представлять перечисленные в программе пространственные тела и простейшие комбинации этих тел (сечения многогранников плоскостями, расположение вписанных в многогранники и описанных вокруг них шаров, проекции многогранников на плоскость и т. п.).

7. Производить простейшие построения на плоскости.

8. Использовать геометрические и графические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии при решении геометрических задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Николаевич Круликовский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ

Томск. Изд. ТГУ, 1973 г. 120 с.

Редактор издательства *Т. К. Кюрс*
Технический редактор *Р. М. Подгорбунская*
Корректор *М. И. Сваровская*

КЗ01655 Сдано в набор 15/XII 1972 г. Подписано к печати 13/II 1973 г.
Формат 84X108 $^{1}/_{32}$; п.л. 3,75; уч-изд л. 6; усл.п.л. 6,3.
Заказ 9878 Тираж 100000 (1—50000). Цена 32 коп.

Издательство ТГУ, Томск-10, пр. Ленина, 36.
Полиграфическое объединение «Томь». Кемерово, Ноградская, 5

Цена 32 коп.