Н. И. Ахиезер
И. М. Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

Н. И. Ахиезер
И. М. Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1977

УДК 517.5

517.5
А95

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Подготовкой к печати настоящего издания мне пришлось заниматься одному. По сравнению со вторым изданием содержание книги подверглось следующим изменениям. Добавлено приложение об одном классе обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов. Увеличен раздел, посвященный классическим дифференциальным операторам второго порядка. Полностью переделан параграф, содержащий доказательство существования инвариантных подпространств у вполне непрерывных операторов. Есть и другие изменения.

Особое внимание я уделил исправлению погрешностей, а также улучшению изложения в ряде мест. В этой работе мне оказали неоценимую помощь Ф. С. Рофе-Бекетов и Л. Л. Ваксман. Пользуюсь случаем выразить благодарность им, а также коллегам и ученикам, которые после выхода в свет второго издания ознакомили меня со своими критическими замечаниями.

Для удобства читателей книга выходит теперь в двух томах. Первый том примерно соответствует общему курсу теории операторов, который читается в наших университетах. Второй том посвящен специальным вопросам теории операторов, а также приложениям ее к теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Н. И. АХИЕЗЕР

$А \frac{20203-451}{М226(04)-77} 179-77$

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

1. Линейные системы. Множество R элементов f, g, h, ... (называемых также точками или векторами) образует *линейную систему*, если

a) в R определена операция, называемая сложением и обозначаемая знаком $+$, причем

$$f+g=g+f,$$
$$(f+g)+h=f+(g+h),$$

и существует единственный элемент 0 (нулевой элемент) такой, что

$$f+0=f;$$

b) определено умножение элементов множества R на комплексные числа α, β, ..., причем

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g,$$
$$(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f,$$
$$\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f,$$
$$1\cdot f=f.$$

Будем говорить, что элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n \in$ R *линейно независимы*, если соотношение

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n=0 \tag{1}$$

возможно только в тривиальном случае $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$; в противном случае элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ назовем *линейно зависимыми*.

Левую часть соотношения (1) называют *линейной комбинацией* элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Таким образом, линейная независимость элементов $f_1, f_2 \ldots, f_n$ означает, что любая нетривиальная линейная комбинация этих элементов отлична от нуля.

Если среди элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ есть равный нулю, то эти элементы, очевидно, линейно зависимы. Действительно, если, например, $f_1=0$, то мы получим нетривиальное соотношение (1), беря $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=0$.

Линейную систему R называют *конечномерной* и притом n-мерной, если R содержит n линейно независимых элементов и если всякие $n+1$ элементов из R линейно зависимы. Конечномерные линейные системы изучаются в линейной алгебре. Если линейная система имеет сколь угодно много линейно независимых элементов, то ее называют *бесконечномерной*.

2. Линейные многообразия. Часто приходится рассматривать некоторые совокупности элементов из R. Всякую такую совокупность L мы называем *линейным многообразием*, если из соотношений $f \in \mathrm{L}$, $g \in \mathrm{L}$ следует, что $\alpha f + \beta g \in \mathrm{L}$, каковы бы ни были числа α, β. Одним из наиболее распространенных приемов для получения линейных многообразий является построение *линейной оболочки*. Исходным здесь является некоторое конечное или бесконечное множество M элементов из R. Затем составляются всевозможные линейные комбинации

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$$

элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из M. Совокупность L этих линейных комбинаций, очевидно, представляет некоторое линейное многообразие в R, содержащее M. Это есть наименьшее линейное многообразие, содержащее M, и оно носит название линейной оболочки множества M.

Некоторое множество $M \subset \mathrm{R}$ называют *прямой суммой* конечного числа линейных многообразий $M_k \subset \mathrm{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и пишут

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

если каждый элемент $g \in M$ однозначно представим в виде суммы

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n,$$

где $g_k \in M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и любая сумма подобного вида принадлежит M.

Очевидно, что M есть также линейное многообразие.

Условимся называть линейные многообразия $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $(n < \infty)$ линейно независимыми, если равенство

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 0 \quad (f_k \in M_k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

возможно лишь при

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0.$$

Линейная независимость линейных многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_n$, очевидно, необходима и достаточна, чтобы можно было образовать их прямую сумму

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Пусть, далее, M и $\tilde{M}$ — два линейных многообразия и $M \subset \tilde{M}$. Векторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$ из $\tilde{M}$ называются *линейно независимыми по модулю* M, если из

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k \in M$$

следует

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, векторы из $\tilde{M}$, линейно независимые по модулю M, будут и подавно линейно независимыми в обычном смысле.

Размерностью $\tilde{M}$ *по модулю* M будем называть максимальное число m векторов из $\tilde{M}$, линейно независимых по модулю M, и будем писать

$$\dim \tilde{M} = m \pmod{M};$$

если в $\tilde{M}$ существует сколь угодно много векторов линейно независимых по модулю M, то будем считать

$$\dim \tilde{M} = \infty \pmod{M}.$$

Очевидно, что размерность по модулю не превосходит обычной размерности.

Вместо $f \in M$ можно писать

$$f \equiv 0 \pmod{M},$$

и тогда равенство

$$f \equiv g \pmod{M} \tag{1}$$

будет означать, что $f - g \in M$.

Многообразие $\tilde{M}$ можно разбить на подмножества элементов, относя элементы f и g к одному подмножеству, если они удовлетворяют условию (1), и к различным подмножествам в противном случае. Эти подмножества называются *классами* многообразия $\tilde{M}$ по модулю M.

Совокупность классов, рассматриваемых каждый в качестве отдельного элемента, сама образует некоторое линейное многообразие, называемое *фактор-многообразием* многообразия $\tilde{M}$ по многообразию M и обозначаемое

$$\tilde{M}/M.$$

При этом линейные операции в $\tilde{M}/M$ определены следующим образом. Если $\mathbf{f} \in \tilde{M}/M$, $\mathbf{g} \in \tilde{M}/M$ — некоторые классы по модулю M, а f, g — некоторые элементы из $\tilde{M}$, принадлежащие соответственно классам $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, то

$$\alpha\mathfrak{f} \text{ и } \mathfrak{f}+\mathfrak{g}$$

определяются, как классы, которым принадлежат αf, соответственно $f+g$.

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора конкретных представителей f из $\mathfrak{f}$ и g из $\mathfrak{g}$, а определенная выше размерность $\tilde{M}$ по модулю M является обычной размерностью фактор-многообразия $\tilde{M}/M$.

3. Скалярное произведение. Линейную систему R называют *метризованной*, если каждой паре элементов f, $g \in$ R сопоставляется определенное комплексное число (f, g), которое удовлетворяет следующим требованиям[1]:

a) $$(g, f) = \overline{(f, g)},$$

b) $$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g),$$

c) $(f, f) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только при $f=0$.

Число (f, g) называется *скалярным произведением* элементов f и g.

Свойство b) скалярного произведения выражает его линейность по первому аргументу. Что касается второго аргумента, то аналогичное свойство имеет вид

$\bar{\text{b}}$) $$(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 (f, g_1) + \bar{\beta}_2 (f, g_2).$$

Действительно,

$$(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2, f)} = \overline{\beta_1 (g_1, f) + \beta_2 (g_2, f)} = \\ = \bar{\beta}_1 (f, g_1) + \bar{\beta}_2 (f, g_2).$$

Арифметический корень $\sqrt{(f, f)}$ называют *нормой* элемента (вектора) f и обозначают символом $\|f\|$. Эта величина аналогична длине отрезка. Так, например, подобно длине отрезка норма вектора равна нулю только в том случае, когда равняется нулю вектор. Кроме того,

1°. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$.

Действительно, в силу свойств b) и $\bar{\text{b}}$) скалярного произведения

$$(\alpha f, \alpha f) = \alpha (f, \alpha f) = \alpha\bar{\alpha} (f, f) = |\alpha|^2 (f, f),$$

откуда и вытекает 1°.

---

[1] Черта над величиной означает переход к комплексно сопряженной величине

Докажем, что для любых двух векторов f, g

2°. $|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$,

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда векторы f, g линейно зависимы. Это неравенство называют *неравенством Коши — Буняковского* или *неравенством Шварца*.

При доказательстве неравенства 2° можно принять, что $(f, g) \neq \neq 0$. Полагая

$$\vartheta = \frac{(f, g)}{|(f, g)|},$$

найдем, что при любом вещественном λ

$$0 \leqslant (\bar{\vartheta} f + \lambda g, \bar{\vartheta} f + \lambda g) = \lambda^2 (g, g) + 2\lambda |(f, g)| + (f, f).$$

Справа мы имеем трехчлен относительно λ, и этот трехчлен при всех вещественных λ больше или равен нулю. Поэтому должно иметь место неравенство

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g),$$

что и доказывает соотношение 2°. Знак равенства будет лишь в том случае, когда рассматриваемый трехчлен имеет двойной корень, иначе говоря, только в том случае, когда при некотором вещественном λ

$$\bar{\vartheta} f + \lambda g = 0,$$

а это равенство выражает, что векторы f, g линейно зависимы.

Благодаря неравенству 2° скалярное произведение позволяет определить угол между двумя векторами. Однако это для дальнейшего не нужно. Мы ограничимся лишь понятием об *ортогональности*: два вектора f, g называются ортогональными, если

$$(f, g) = 0.$$

Докажем еще одно свойство нормы, а именно, неравенство

3°. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,

верное для любых векторов f, g и переходящее в равенство лишь при $f = 0$ или $g = \lambda f$, где $\lambda \geqslant 0$. Неравенство 3° называют *неравенством треугольника*, так как оно аналогично неравенству для сторон треугольника, известному из элементарной геометрии.

Чтобы доказать неравенство треугольника, возьмем соотношение

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g).$$

Отсюда, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$\|f + g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = \{\|f\| + \|g\|\}^2$$

и, значит,

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Чтобы имел место знак $=$, необходимо выполнение условия

$$(g, f) = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Это условие тривиальным образом выполняется при $f = 0$. Если же $f \neq 0$, то, по доказанному выше, должно иметь место равенство

$$g = \lambda f$$

и, следовательно,

$$\lambda (f, f) = \|f\| \cdot \|\lambda f\|,$$

а потому $\lambda \geqslant 0$.

Иногда приходится рассматривать линейные системы, в которых каждой паре элементов f, g относится число $\langle f, g\rangle$, удовлетворяющее требованиям a), b) и вместо c) требованию

c′) $$\langle f, f\rangle \geqslant 0$$

без оговорки, что знак $=$ невозможен при $f \neq 0$. Такие линейные системы мы назовем *квазиметризованными*, а величину $\langle f, g\rangle$ назовем *квазискалярным произведением*.

Нетрудно видеть, что квазискалярное произведение удовлетворяет условию $\bar{\mathrm{b}}$). Для него справедливо также неравенство 2° Коши — Буняковского, однако без оговорки относительно случаев, когда в этом неравенстве имеет место знак $=$.

В силу неравенства Коши — Буняковского множество $\mathfrak{N}$ всех элементов f, для которых $\langle f, f\rangle = 0$, является линейным многообразием. Действительно, если

$$\langle f, f\rangle = 0,$$

то в силу неравенства Коши — Буняковского при любом h

$$\langle f, h\rangle = 0.$$

Поэтому из

$$\langle f, f\rangle = 0, \ \langle g, g\rangle = 0$$

следует, что

$$\langle \alpha f + \beta g, \alpha f + \beta g\rangle = |\alpha|^2 \langle f, f\rangle + |\beta|^2 \langle g, g\rangle + \\ + \alpha\bar{\beta}\langle f, g\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle g, f\rangle = 0.$$

Отметим, что, имея квазиметризованную систему R', можно построить фактор-многообразие $\mathrm{R} = \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, которое оказывается уже метризованной, а не квазиметризованной системой, если определить в $\mathrm{R}'/\mathfrak{N}$ скалярное произведение $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ формулой

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \langle f, g\rangle,$$

где $\mathbf{f} \in \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, $\mathbf{g} \in \mathrm{R}'/\mathfrak{N}$, $f \in \mathbf{f}$, $g \in \mathbf{g}$.

Это определение не зависит от выбора элементов $f \in \mathbf{f}$, $g \in \mathbf{g}$.

4. Некоторые общие понятия. В настоящем пункте мы остановимся на некоторых простых понятиях, с введения которых начинается изучение любых метрических пространств. Напомним, что *метрическим пространством* называется множество E, для каждых двух элементов f, g которого определено *расстояние* $D[f, g]$, удовлетворяющее следующим требованиям:

а) $D[f, g] = D[g, f] > 0$ (при $f \neq g$),

б) $D[f, f] = 0$,

в) $D[f, g] \leqslant D[f, h] + D[h, g]$ (неравенство треугольника).

Если f_0 — некоторая точка E, а ρ — положительное число, то совокупность $K(\rho, f_0)$ всех точек f, для которых

$$D[f, f_0] < \rho,$$

называют *шаром* в E, причем ρ — его *радиус*, а f_0 — *центр*. Такой шар представляет *окрестность* (точнее, ρ-окрестность) точки f_0. Множество $S(\rho, f_0)$ всех точек $f \in E$, для которых

$$D[f, f_0] = \rho,$$

называют *сферой* (радиуса ρ с центром f_0).

Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset E$ имеет предел $f \in E$, и пишут

$$f_n \to f \text{ или } \lim_{n\to\infty} f_n = f, \tag{1}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} D[f_n, f] = 0. \tag{2}$$

Так как в силу неравенства треугольника

$$D[f_m, f_n] \leqslant D[f_m, f] + D[f_n, f],$$

то из (2) (иначе говоря, из (1)) следует

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D[f_m, f_n] = 0. \tag{3}$$

Однако обратное верно не всегда, т. е. если для последовательности $\{f_n\}_1^\infty \subset E$ соотношение (3) имеет место, существование такого элемента $f \in E$, к которому последовательность сходится, не обязательно. Последовательность $\{f_n\}_1^\infty \subset E$ называют *фундаментальной*, если для нее выполняется соотношение (3).

Если для всякой фундаментальной последовательности найдется элемент, к которому эта последовательность сходится, то метрическое пространство называют *полным*.

Если метрическое пространство не полно, то его можно сделать полным путем введения некоторых новых элементов с помощью фундаментальных последовательностей. Эта операция аналогична введению иррациональных чисел по Кантору[1].

Предельной точкой некоторого множества M из E называют всякую точку $f \in E$, в любой окрестности которой находится бесчисленное множество точек из M.

Если множество содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Присоединение к множеству M его предельных точек называется *замыканием*. Так же называют получаемое при этом и обозначаемое символом $\overline{M}$ множество.

Если линейная система является полным метрическим пространством, то наряду с линейной оболочкой некоторого множества часто полезно рассматривать ее замыкание, которое называют *замкнутой линейной оболочкой*.

Множество K точек линейной системы называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками f и g этого множества ему принадлежит весь *отрезок* $\lambda f + (1-\lambda) g$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Любое линейное многообразие в R является выпуклым множеством. Если линейная система представляет полное метрическое пространство, то вместе с выпуклым множеством можно рассматривать его замыкание, которое также является выпуклым множеством.

Если в метрическом пространстве имеется счетное множество, замыкание которого совпадает со всем пространством, то пространство называется *сепарабельным*.

Иначе говоря, в сепарабельном пространстве существует такое счетное точечное множество N, что для любой точки $f \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти $g \in N$ так, что

$$D[f, g] < \varepsilon.$$

Это обстоятельство выражают еще следующим образом: пространство называется сепарабельным, если оно содержит счетное *всюду плотное множество*.

5. Пространство Гильберта. Среди метрических пространств наиболее замечательны те, которые являются линейными системами и в которых

$$D[f, g] = D[f-g, 0], \quad D[\alpha f, 0] = |\alpha| D[f, 0].$$

В этом случае величина $D[f, 0]$, представляющая расстояние элемента f от нулевого элемента, называется нормой элемента f, а рассматриваемое метрическое пространство называется *линейным нормированным пространством*. Частным случаем линейного нормированного пространства является линейная метризованная система. В ней норма порождается скалярным произведением (см. n° 3).

---

[1] См., например, А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972, изд. 3, с. 67

Полное линейное нормированное пространство называется *пространством Банаха*.

Пространство Гильберта, которому посвящена настоящая книга, является важным частным случаем пространства Банаха; в нем, кроме расстояния между двумя элементами, имеется также скалярное произведение.

Определение. *Бесконечномерную линейную метризованную систему* H, *которая в порождаемой скалярным произведением метрике является полным метрическим пространством, называют пространством Гильберта*[1].

Каждое замкнутое линейное многообразие G в H является линейной системой, метризованной при помощи того же скалярного произведения, что и H. Кроме того, G обладает полнотой. Действительно, всякая фундаментальная последовательность элементов из G имеет предел в H, так как H полно, и этот предел должен принадлежать G, так как G замкнуто.

Из сказанного следует, что G само является пространством Гильберта, если оно содержит бесконечное число линейно независимых элементов. Как в этом случае, так и в том, когда G конечномерно, его называют *подпространством* пространства H.

Данное нами определение пространства Гильберта носит аксиоматический характер. Требованиям, которые оно содержит, удовлетворяют различные конкретные линейные системы. Поэтому часто H называют *абстрактным* пространством Гильберта, а упомянутые конкретные системы называют реализациями этого абстрактного пространства.

Одной из важнейших реализаций пространства H является пространство l^2. Именно на этом, впервые введенном Гильбертом в его теории линейных интегральных уравнений, конкретном пространстве началось построение интересующей нас общей теории. Как мы увидим, пространство l^2 сепарабельно. Первоначально и в определении абстрактного пространства Гильберта включалось требование сепарабельности. Однако в дальнейшем оказалось, что это требование не является необходимым для построения теории. Поэтому в данное нами определение пространства H оно не включено.

Что же касается требования полноты, то оно существенно почти для всех последующих рассмотрений. Поэтому его включают в определение H, делая соответствующую оговорку в тех случаях, когда это требование является излишним.

Элементами пространства l^2 являются комплексные числовые последовательности

$$f = \{x_n\}_1^\infty, \quad g = \{y_n\}_1^\infty, \quad \ldots, \tag{1}$$

[1] То, что мы называем линейной метризованной системой, часто называют предгильбертовым пространством.

для которых

$$\sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty, \quad \sum_1^\infty |y_n|^2 < \infty, \ \ldots \ . \tag{2}$$

Числа x_1, x_2, ... можно рассматривать как *компоненты* вектора f или *координаты* точки f. Нулевым является вектор, все компоненты которого равны нулю. Сложение векторов определяется формулой

$$f + g = \{x_n + y_n\}_1^\infty.$$

Неравенство

$$\sum_1^\infty |x_n + y_n|^2 < \infty$$

следует из соотношения

$$|x + y|^2 \leqslant 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Умножение вектора f на число λ определяется формулой

$$\lambda f = \{\lambda x_n\}_1^\infty.$$

Скалярное произведение в пространстве l^2 имеет вид

$$(f, g) = \sum_1^\infty x_n \bar{y}_n.$$

Ряд в правой части сходится абсолютно, так как

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2.$$

Неравенство

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left|\sum_1^\infty x_n \bar{y}_n\right| \leqslant \sqrt{\sum_1^\infty |x_n|^2} \sqrt{\sum_1^\infty |y_n|^2}$$

и принадлежит Коши.

Вектор называется *финитным*, если из его компонент только конечное число отлично от нуля.

Пространство l^2 сепарабельно. В качестве плотного в нем счетного множества можно взять совокупность всех финитных векторов с компонентами вида $\xi + i\eta$, где ξ, η — рациональные числа.

Кроме того, пространство l^2 полно. Действительно, если последовательность векторов

$$f^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

фундаментальна, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\mathcal{N}$, чтобы при $r > \mathcal{N}$, $s > \mathcal{N}$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(r)} - x_n^{(s)}|^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, при любом m и подавно

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n^{(r)} - x_n^{(s)}|^2} < \varepsilon. \tag{3}$$

Поэтому каждая из числовых последовательностей

$$\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится к некоторому пределу x_n $(n = 1, 2 \ldots)$. Увеличивая в (3) s до ∞, получим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} |x_n^{(r)} - x_n|^2} \leqslant \varepsilon.$$

А так как это верно при любом m, то

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(r)} - x_n|^2} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$f = \{x_n\}_1^{\infty} \in l^2,$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$, также, что

$$f^{(k)} \to f.$$

Таким образом, полнота пространства l^2 доказана.

Пространство l^2 бесконечномерно, так как все орты

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, 0, \ldots\}, \\ e_2 &= \{0, 1, 0, \ldots\}, \\ e_3 &= \{0, 0, 1, \ldots\}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

как легко видеть, линейно независимы.

Пространство l^2 есть бесконечномерный аналог пространства E_m, элементами которого являются конечные последовательности

$$f = \{x_n\}_1^m.$$

E_m есть m-мерное комплексное пространство Евклида.

Значительная часть теории, которую мы изложим, есть перенесение на H хорошо известных факторов, относящихся к E_m.

В заключение остановимся на пространстве l^p, где p — произвольное число $\geqslant 1$. Это пространство определяется как совокупность всех последовательностей (1), для которых, вместо (2), выполнены неравенства

$$\sum_{1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \quad \sum_{1}^{\infty} |y_n|^p < \infty, \ldots$$

В каждом l^p ($p \geqslant 1$) можно ввести норму

$$\|f\| = \{\sum_{1}^{\infty} |x_n|^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство треугольника сводится здесь к неравенству Минковского для рядов:

$$\{\sum_{1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \{\sum_{1}^{\infty} |x_n|^p\}^{\frac{1}{p}} + \{\sum_{1}^{\infty} |y_n|^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

Это неравенство известно из курса анализа (при $p = 1$ оно тривиально). Полнота и сепарабельность доказываются как и при $p = 2$.

Пространство l^p ($p \geqslant 1$) представляет пример пространства Банаха и является гильбертовым пространством только при $p = 2$.

6. Расстояние точки от выпуклого множества в H. Пусть в гильбертовом пространстве H дано некоторое выпуклое множество K, не совпадающее с H. Пусть в H взята какая-нибудь точка $h \overline{\in} K$ и пусть

$$\delta = \inf_{f \in K} \|h - f\|.$$

Возникает вопрос, существует ли в K точка g, для которой

$$\|h - g\| = \delta,$$

иначе говоря, точка, *наименее удаленная* от точки h.

Докажем, прежде всего, что интересующих нас точек g не может быть более одной, какова бы ни была точка h. С этой целью допустим, что в K существуют две точки g', g'', расстояние которых от точки h равно δ. Так как $\frac{1}{2}(g' + g'') \in K$, то

$$\left\| h - \frac{g' + g''}{2} \right\| \geqslant \delta.$$

С другой стороны,

$$\left\| h - \frac{g' + g''}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \|h - g'\| + \frac{1}{2} \|h - g''\| = \delta.$$

Следовательно,

$$\left\| h - \frac{g' + g''}{2} \right\| = \delta.$$

Возьмем теперь легко проверяемое тождество[1]

$$\| f' - f'' \|^2 = 2 \| f' \|^2 + 2 \| f'' \|^2 - \| f' + f'' \|^2 \qquad (1)$$

и положим в нем

$$f' = h - g', \ f'' = h - g''.$$

Получим равенство

$$\| g' - g'' \|^2 = 2 \| h - g' \|^2 + 2 \| h - g'' \|^2 - 4 \left\| h - \frac{g' + g''}{2} \right\|^2 = 0,$$

которое противоречит предположению.

Таким образом, единственность доказана.

Но существует ли вообще точка $g \in K$, наименее удаленная от точки h? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Если* K — *замкнутое выпуклое множество в пространстве* H *и если*

$$\delta = \inf_{f \in K} \| h - f \|,$$

то в K *существует вектор* g *(единственность его выше была доказана), для которого*

$$\| h - g \| = \delta.$$

Доказательство. По определению нижней грани, в K существует бесконечная последовательность векторов $\{g_n\}_1^\infty$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \| h - g_n \| = \delta.$$

Но

$$\left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \| h - g_m \| + \frac{1}{2} \| h - g_n \|.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{m,\, n \to \infty}} \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \leqslant \delta,$$

и поскольку

$$\left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| \geqslant \delta,$$

то

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\| = \delta.$$

[1] Это тождество иногда называют *соотношением параллелограмма.*

Полагая в тождестве (1)

$$f' = h - g_m, \quad f'' = h - g_n,$$

находим

$$\| g_n - g_m \|^2 = 2 \| h - g_m \|^2 + 2 \| h - g_n \|^2 - 4 \left\| h - \frac{g_m + g_n}{2} \right\|^2.$$

Таким образом, мы видим, что

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \| g_n - g_m \| = 0.$$

Поэтому последовательность векторов $\{g_n\}_1^\infty$ сходится к некоторому вектору $g \in G$, и этот вектор принадлежит K, так как K замкнуто. Остается доказать, что $\| h - g \| = \delta$. Но

$$\lim_{n \to \infty} \| g - g_n \| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \| h - g_n \| = \delta$$

и

$$\| h - g \| \leqslant \| h - g_n \| + \| g - g_n \|.$$

Следовательно,

$$\| h - g \| \leqslant \delta,$$

а знак $<$, очевидно, должен быть отброшен.

Таким образом, теорема доказана.

7. Проекция вектора на подпространство. Пусть G — некоторое подпространство пространства H. В силу теоремы n° 6 каждому элементу $h \in H$ отвечает вполне определенный элемент $g \in G$, для которого

$$\| h - g \| = \inf_{g' \in G} \| h - g' \|.$$

Рассматривая h и g как точки, мы говорим, что g есть точка подпространства G, которая наименее удалена от точки h. Если же элементы h и g рассматриваются как векторы, то говорят, что g есть тот из векторов подпространства G, который наименее уклоняется от вектора h. Теперь покажем, что в силу (1) вектор $h - g$ ортогонален подпространству G, т. е. ортогонален каждому вектору $g' \in G$.

Для доказательства допустим, что вектор $h - g$ ортогонален не каждому вектору из G. Пусть

$$(h - g,\ g_0) = \sigma \neq 0 \ (g_0 \in G).$$

Возьмем вектор

$$g^* = g + \frac{\sigma}{(g_0,\ g_0)} g_0 \in G.$$

Тогда

$$\|h-g^*\|^2 = \left(h-g-\frac{\sigma}{(g_0, g_0)}g_0, h-g-\frac{\sigma}{(g_0, g_0)}g_0\right) =$$
$$= \|h-g\|^2 - \frac{\bar\sigma}{(g_0, g_0)}(h-g, g_0) - \frac{\sigma}{(g_0, g_0)}(g_0, h-g) +$$
$$+\frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)} = \|h-g\|^2 - \frac{|\sigma|^2}{(g_0, g_0)}$$

и, значит,

$$\|h-g^*\| < \|h-g\|,$$

что противоречит (1).

Из доказанного следует, что вектор h представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in \mathrm{G}$, а f ортогонален G (что иногда будем писать в виде $f \perp \mathrm{G}$); при этом, как легко видеть,

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2.$$

Вектор g естественно назвать *составляющей* вектора h по подпространству G или *проекцией* вектора h на подпространство G.

Обозначим через F совокупность всех векторов f, ортогональных подпространству G. Легко видеть, что F есть линейное многообразие. Покажем, что F замкнуто и, следовательно, является подпространством. Действительно, пусть $f_n \in \mathrm{F}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, иначе говоря, $(f_n, g) = 0$ при любом $g \in \mathrm{G}$, и пусть $f_n \to f$. В таком случае имеет место равенство

$$(f, g) = (f - f_n, g),$$

правая часть которого по модулю не превосходит

$$\|f - f_n\| \cdot \|g\|$$

и поэтому стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $(f, g) = 0$, откуда и вытекает, что $f \in \mathrm{F}$ и, следовательно, многообразие F замкнуто.

Мы получили представление пространства H в виде прямой суммы

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} \oplus \mathrm{F}.$$

В данном случае слагаемые G и F ортогональны и их прямая сумма является *ортогональной суммой;* для подпространства F (или G) принято название *ортогонального дополнения* в H по отношению к подпространству G (соответственно F) со следующим обозначением:

$$\mathrm{F} = \mathrm{H} \ominus \mathrm{G} \text{ (соответственно } \mathrm{G} = \mathrm{H} \ominus \mathrm{F}).$$

По индукции определяется ортогональная сумма любого конечного числа попарно ортогональных подпространств.

Далее, ортогональной суммой бесконечного (счетного или несчетного) множества $\{G_\alpha\}$ попарно ортогональных подпространств пространства H называется замыкание многообразия всех конечных сумм вида

$$g_{\alpha'} + g_{\alpha''} + \dots ,$$

где $g_{\alpha'} \in G_{\alpha'}$, $g_{\alpha''} \in G_{\alpha''}$ и т. д.

Можно строить ортогональные суммы произвольных гильбертовых пространств, не являющихся подпространствами некоторого заранее заданного гильбертового пространства. Ограничимся для простоты двумя гильбертовыми пространствами H_1 и H_2 со скалярными произведениями $(\times, \times)_1$ и $(\times, \times)_2$ соответственно. Возьмем декартово произведение $H = H_1 \times H_2$ этих пространств. Элементами H по определению являются всевозможные пары $\{f_1, f_2\}$, где $f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2$, причем

$$\alpha\{f_1, f_2\} = \{\alpha f_1, \alpha f_2\}, \ \{f_1, f_2\} + \{g_1, g_2\} = \{f_1 + g_1, f_2 + g_2\}$$

и, значит, нулевым элементом H является пара $\{0, 0\}$, а скалярное произведение определено равенством

$$(\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}) = (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2.$$

Гильбертово пространство H, очевидно, является ортогональной суммой своих подпространств $\{H_1, 0\}$ и $\{0, H_2\}$, а эти два подпространства изоморфны[1] соответственно H_1 и H_2. Имея в виду это обстоятельство, можно производить отождествление $\{H_1, 0\}$ с H_1 и $\{0, H_2\}$ с H_2, а H считать ортогональной суммой пространств H_1 и H_2:

$$H = H_1 \oplus H_2.$$

Из приведенных выше рассмотрений вытекает простое доказательство следующего предложения: *любое подпространство* G *сепарабельного пространства Гильберта* H *сепарабельно*[2].

Действительно, пусть счетное множество векторов $\{h_k\}_1^\infty$ всюду плотно в H, а $\{g_k\}_1^\infty$ есть последовательность проекций этих векторов на подпространство G. Имеем

$$g - h_k = (g - g_k) + (g_k - h_k),$$

но $g_k - h_k \perp G$, так что $(g_k - h_k, g - g_k) = 0$ при любом $g \in G$ и, следовательно,

$$\| g - h_k \|^2 = \| g - g_k \|^2 + \| g_k - h_k \|^2,$$

---

[1] О понятии изоморфизма двух гильбертовых пространств см. ниже, с. 33.

[2] Это предложение справедливо для любого подпространства сепарабельного метрического пространства E.

откуда

$$\|g - g_k\| \leqslant \|g - h_k\|.$$

Из этого неравенства следует, что последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ образует множество, всюду плотное в подпространстве G.

Часто приходится находить проекцию вектора на конечномерное подпространство. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть G есть n-мерное подпространство и пусть

$$g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n \tag{2}$$

какие-нибудь n линейно независимых элементов G. Так как между любыми $n+1$ элементами подпространства G имеется линейная зависимость, то всякий вектор $g \in \mathrm{G}$ представим в виде линейной комбинации векторов (2).

Возьмем произвольный вектор $h \in \mathrm{H}$ и обозначим через g его проекцию на G. Вектор g имеет вид

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n.$$

По свойству проекции разность $h - g = f$ должна быть ортогональна подпространству G, т. е. каждому из векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$(f,\ g_k) \equiv (h,\ g_k) - \lambda_1 (g_1,\ g_k) - \lambda_2 (g_2,\ g_k) - \cdots - \lambda_n (g_n,\ g_k) = 0$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Мы имеем здесь систему n линейных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Матрица $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^n$ этой системы, $\alpha_{jk} = (g_k, g_j)$, называется *матрицей Грама*, а ее определитель

$$\Gamma(g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n) = \begin{vmatrix} (g_1,\ g_1) & (g_2,\ g_1) & \ldots & (g_n,\ g_1) \\ (g_1,\ g_2) & (g_2,\ g_2) & \ldots & (g_n,\ g_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (g_2,\ g_n) & (g_2,\ g_n) & \ldots & (g_n,\ g_n) \end{vmatrix}$$

— *определителем Грама* векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. На основании ранее доказанных фактов система уравнений (3) имеет единственное решение, каков бы ни был вектор h. Поэтому определитель Грама векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ отличен от нуля.

Легко видеть, что если векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно зависимы, то их определитель Грама равен нулю. Поэтому *для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама был отличен от нуля.*

Займемся теперь отысканием величины

$$\delta = \min_{g' \in \mathrm{G}} \|h - g'\|.$$

Мы увидим, что эта величина просто выражается через определители Грама.

Величина δ равна $\|f\| = \|h - g\|$ при условии, что входящие в g коэффициенты λ_i определяются уравнениями (3).

Следовательно,

$$\delta^2 = (f, f) = (f, h),$$

откуда

$$\delta^2 = (h, h) - \lambda_1 (g_1, h) - \lambda_2 (g_2, h) - \dots - \lambda_n (g_n, h). \tag{4}$$

Мы видим, что отыскание δ^2 сводится к исключению величин λ_i из уравнений (3), (4).

Это исключение дает

$$\begin{vmatrix} (h, h) - \delta^2 & (g_1, h) & (g_2, h) & \dots & (g_n, h) \\ (h, g_1) & (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h, g_n) & (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(h, g_1, g_2, \dots, g_n)}{\Gamma(g_1, g_2, \dots, g_n)}. \tag{5}$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить.

Так как $\Gamma(g_1) = (g_1, g_1) > 0$ (при $g_1 \neq 0$), то из формулы (5) по индукции следует, что определитель Грама линейно независимых векторов всегда положителен. Этот факт можно рассматривать как обобщение неравенства Коши — Буняковского, которое утверждает, что для линейно независимых векторов g_1, g_2 имеет место неравенство $\Gamma(g_1, g_2) > 0$.

8. Ортогонализация последовательности векторов. Два множества M и N векторов из R называют *эквивалентными*, если совпадают их линейные оболочки. Поэтому эквивалентность множеств M и N имеет место в том и только в том случае, когда каждый элемент одного из этих множеств является линейной комбинацией конечного числа векторов, принадлежащих другому множеству.

Последовательность векторов

$$e_1, e_2, e_3, \dots \tag{1}$$

пространства H называется *ортогональной*, если любые два вектора этой последовательности с различными номерами ортогональны, если, кроме того, норма каждого элемента последовательности (1) равна единице, то последовательность называется *ортонормированной*.

Всякую последовательность векторов

$$g_1, g_2, g_3, \dots, \tag{2}$$

между которыми нет линейных зависимостей, можно с помощью известного из линейной алгебры процесса Шмидта — Сонина *орто-*

гонализовать, т. е. построить ортонормированную последовательность (1) так, чтобы при каждом натуральном n подпоследовательности $\{g_k\}_1^n$ и $\{e_k\}_1^n$ были эквивалентны.

Для построения последовательности (1) примем в качестве e_1 вектор

$$e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|},$$

норма которого, очевидно, равна единице. Векторы e_1 и g_1 порождают одно и то же подпространство E_1 одного измерения.

Вектор e_2 мы построим в два приема. Сначала из вектора g_2 вычтем его проекцию на E_1; получим вектор

$$h_1 = g_2 - (g_2, e_1)\, e_1,$$

который ортогонален подпространству E_1, т. е. вектору e_1, и который не равен нулю, так как в противном случае вектор g_2 принадлежал бы E_1, что противоречит линейной независимости векторов g_1, g_2. Отыскав h_2, положим

$$e_2 = \frac{h_2}{\| h_2 \|}.$$

Векторы e_1, e_2 порождают то же подпространство двух измерений E_2, что и векторы g_1, g_2.

Подобным образом поступаем и далее. Если уже построены векторы

$$e_1, e_2, \ldots, e_n,$$

то полагаем

$$h_{n+1} = g_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (g_{n+1}, e_k)\, e_k$$

и затем

$$e_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{\| h_{n+1} \|}.$$

В конкретных случаях часто не стремятся к тому, чтобы попарно ортогональные элементы последовательности (1), каждая часть которой $\{e_k\}_1^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентна соответствующей части $\{g_k\}_1^n$ последовательности (2), были нормированы. Переход к такой последовательности (1) также называют ортогонализацией (см. ниже, n° 12).

Из рассмотрений n° 7 следует, что матрица Грама $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n$ системы линейно независимых векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ обладает следующими свойствами.

1°. Она эрмитова, т. е. $\alpha_{jk} = \bar{\alpha}_{kj}$.

2°. Ее главные угловые миноры положительны.

Покажем, что *любая матрица* $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^{n}$, *обладающая этими свойствами, является матрицей Грама некоторой системы векторов* $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Для доказательства воспользуемся следующей известной теоремой линейной алгебры: если все главные угловые миноры эрмитовой матрицы $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^{n}$ положительны, то найдется такое неособенное преобразование

$$\eta_s = \sum_{r=1}^{n} \tau_{rs}\xi_r \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

что

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \alpha_{jk}\bar{\xi}_j\xi_k = |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\eta_n|^2. \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольную ортонормированную систему векторов $\{e_s\}_1^n$ и покажем, что матрица Грама системы векторов

$$g_r = \sum_{s=1}^{n} \tau_{rs}e_s \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

совпадает с данной матрицей $(\alpha_{jk})_{j,\,k=1}^{n}$.

Действительно,

$$(g_k, g_j) = \Big(\sum_{r=1}^{n} \tau_{kr}e_r, \ \sum_{s=1}^{n} \tau_{js}e_s\Big) = \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\bar{\tau}_{js}.$$

С другой стороны, из (3) и (4) следует

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \alpha_{jk}\bar{\xi}_j\xi_k = \sum_{s=1}^{n} \Big|\sum_{r=1}^{n} \tau_{rs}\xi_r\Big|^2 = \sum_{j,\,k=1}^{n} \bar{\xi}_j\xi_k \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\bar{\tau}_{js},$$

откуда

$$\alpha_{jk} = \sum_{s=1}^{n} \tau_{ks}\bar{\tau}_{js} = (g_k, g_j) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

9. Неравенство Бесселя и уравнение замкнутости. Пусть в H дана ортонормированная последовательность векторов

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots \tag{1}$$

Всякий вектор $h \in$ H можно при любом натуральном n представить в виде

$$h = \sum_{k=1}^{n} (h, e_k)\, e_k + f_n,$$

где вектор f_n ортогонален векторам $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При этом вектор

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k \tag{2}$$

среди всех векторов вида

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \tag{3}$$

наименее уклоняется от вектора h, и величина наименьшего уклонения равна

$$\delta_n = \min_{\lambda_k} \| h - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_n e_n \| =$$

$$= \| f_n \| = \sqrt{\| h \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(h, e_k)|^2}; \tag{4}$$

δ_n есть расстояние точки h от линейной оболочки G_n первых n векторов последовательности (1).

Если бы вместо линейной комбинации n-го порядка (2) мы пожелали найти наименее уклоняющуюся от h линейную комбинацию $(n+1)$-го порядка

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n + \mu_{n+1} e_{n+1}, \tag{3'}$$

то мы должны были бы взять вектор

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (h, e_k) e_k,$$

т. е., не меняя коэффициентов линейной комбинации (2), прибавить еще один член

$$(h, e_{n+1}) e_{n+1}.$$

Эти рассмотрения показывают, что, имея в H бесконечную ортонормированную последовательность (1), целесообразно относить каждому вектору $h \in H$ бесконечный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k, \tag{5}$$

коэффициенты которого (h, e_k) можно назвать *коэффициентами Фурье* вектора h относительно ортонормированной последовательности (1). При этом из (4) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant \| h \|^2. \tag{6}$$

Это неравенство назовем *неравенством Бесселя*, так как оно аналогично известному под этим именем неравенству из теории тригонометрических рядов Фурье.

Если мы обозначим через G подпространство, определяемое векторами (1), т. е. замкнутую линейную оболочку этих векторов, то величина

$$\sqrt{\| h \|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2}$$

представит расстояние точки h от G и для принадлежности вектора h многообразию G необходимо и достаточно, чтобы в формуле (6) имел место знак равенства.

Условимся называть систему векторов *замкнутой* в H, если ее линейная оболочка плотна в H.

Из наших рассмотрений вытекает следующий результат: *для замкнутости в* H *ортонормированной системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора* $h \in$ H *имело место равенство*

$$\| h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2. \tag{7}$$

Это равенство часто называют *равенством Парсеваля*, так как под этим именем известно аналогичное равенство в теории тригонометрических рядов Фурье. Мы будем называть равенство (7) *уравнением замкнутости*, следуя здесь В. А. Стеклову, который пользовался этим термином для конкретных систем.

Докажем, что если уравнение замкнутости имеет место для любого вектора $h \in$ H, то для любой пары векторов g, $h \in$ H имеет место обобщенное уравнение замкнутости

$$(g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, h). \tag{8}$$

Действительно, мы имеем уравнение замкнутости для вектора $g + \lambda h$ при любом λ:

$$\| g + \lambda h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(g + \lambda h, e_k)|^2.$$

Отсюда

$$(g, g) + \lambda (h, g) + \bar{\lambda} (h, g) + |\lambda|^2 (h, h) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \{ |(g, e_k)|^2 + \lambda (h, e_k)(e_k, g) + \bar{\lambda} (g, e_k)(e_k, h) + |\lambda|^2 \ |(h, e_k)|^2 \}$$

и, следовательно,

$$\lambda (h, g) + \bar{\lambda} (g, h) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)(e_k, g) + \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, h).$$

В силу произвольности λ отсюда получается равенство (8).

Обобщим теперь, следуя С. С. Левину[1], неравенство Бесселя, а также уравнение замкнутости на тот случай, когда, вместо ортонормированной последовательности (1), в H взята произвольная последовательность векторов

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots, \tag{9}$$

между которыми нет линейных зависимостей. С этой целью введем при $n = 1, 2, 3 \ldots$ матрицы Грама

$$\nu_n = (a_{jk})_{j,\,k=1}^n, \quad a_{jk} = (g_k, g_j),$$

а также обратные матрицы

$$\nu_n^{-1} = (\beta_{jk}^{(n)})_{j,\,k=1}^n,$$

существование которых следует из того, что все определители Грама $\Gamma(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ не равны нулю (см. п° 7). Из определения чисел $\beta_{jk}^{(n)}$ вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n \beta_{jk}^{(n)} (g_p, g_k) = \delta_{jp} \, (j, p = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и

$$\sum_{j=1}^n \beta_{jk}^{(n)} (g_j, g_p) = \delta_{kp} (k, p = 1, 2, \ldots, n). \tag{10'}$$

При принятых обозначениях обобщение неравенства Бесселя гласит: *для любого вектора $h \in$ H и любого натурального n*

$$(0 \leqslant) \sum_{j,\,k=1}^n \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k) \leqslant \|h\|^2. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим через g проекцию вектора h на линейную оболочку векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ и пусть

$$g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n.$$

Из уравнений (3) п° 7 и соотношений (10) следует, что

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n \beta_{jk}^{(n)} (h, g_k) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|h - g\|^2 = (h - g, h) = \|h\|^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j (g_j, h) = \\ = \|h\|^2 - \sum_{j,\,k=1}^n \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k) \end{aligned} \tag{12}$$

и утверждение доказано.

[1] Lewin S. Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundene Eigenschaften von Funktionenfolgen, Math. Z. 1930, 32, 4. S. 491—511.

Величина

$$\sqrt{\|h\|^2 - \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k)}$$

представляет расстояние точки h от линейной оболочки векторов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Поэтому эта величина не возрастает при возрастании n и, значит, левая часть (11) при возрастании n не убывает. А так как левая часть (11) ограничена, то она имеет предел. Следовательно, *для любого вектора h существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k).$$

Из неравенства (12) мы заключаем также, что *для замкнутости в* H *последовательности векторов* (9) *необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $h \in$ H имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (g_j, h)(h, g_k) = \|h\|^2.$$

Это равенство является обобщением уравнения замкнутости (7) и переходит в него, если последовательность (9) ортонормирована.

В связи с неравенством Бесселя (6) возникает следующий вопрос: пусть в H даны ортонормированная последовательность векторов (1) и последовательность чисел $\{\xi_k\}_1^\infty$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty; \tag{13}$$

существует ли такой вектор $h \in$ H, что

$$(h, e_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)?$$

Ответ на этот вопрос положителен. Действительно, рассмотрим последовательность векторов

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как при $n > m$

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k\Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\xi_k|^2,$$

то в силу (13) последовательность $\{s_n\}_1^\infty$ фундаментальна. На основании полноты пространства H она имеет предел[1]) $h \in$ H. Но

[1] Сходимость в H последовательности $\{s_n\}_1^\infty$ позволяет говорить о сходимости в H ряда

$$\sum_{1}^{\infty} \xi_k e_k$$

в таком случае при любых натуральных p и $q > p$

$$(h, e_p) = (h - s_q, e_p) + (s_q, e_p) = (h - s_q, e_p) + \xi_p.$$

А так как

$$|(h - s_q, e_p)| \leqslant \|h - s_q\|,$$

то

$$\lim_{q \to \infty} (h - s_q, e_p) = 0$$

и, следовательно,

$$(h, e_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим тот же вопрос, но применительно к обобщенному неравенству Бессéля (11), связанному с последовательностью векторов (9).

Пусть дана последовательность чисел $\{\xi_k\}_1^\infty$, для которой

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \mathscr{M} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

где $\mathscr{M} (< \infty)$ от n не зависит. Докажем, что в таком случае существует вектор $h \in \mathrm{H}$ такой, что

$$(h, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Если бы требовалось удовлетворить только конечному числу q равенств (15):

$$(h, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, q),$$

то искомый вектор можно было бы построить непосредственно:

$$f_q = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \xi_k \Big) g_j.$$

Действительно, при $p \leqslant q$ мы имели бы с учетом (10′):

$$(f_q, g_p) = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \xi_k \Big) (g_j, g_p) = \sum_{k=1}^{q} \xi_k \delta_{kp} = \xi_p.$$

Не мешает заметить, что сходимость в H любого ряда

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

где

$$(f_i, f_k) = 0 \qquad (i \neq k),$$

эквивалентна сходимости числового ряда

$$\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \|f_3\|^2 + \cdots$$

Заметим далее, что при $p \leqslant q$

$$(f_p, f_q) = \Big(\sum_{j,\,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \xi_k g_j,\ f_q\Big) = \sum_{j,\,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \xi_k \bar{\xi}_j = (f_p, f_p),$$

а следовательно,

$$\|f_q - f_p\|^2 = (f_q, f_q) - (f_p, f_p) - (f_p, f_q) + (f_p, f_p) =$$
$$= \sum_{j,\,k=1}^{q} \beta_{jk}^{(q)} \bar{\xi}_j \xi_k - \sum_{j,\,k=1}^{p} \beta_{jk}^{(p)} \bar{\xi}_j \xi_k. \tag{16}$$

Отсюда мы видим, что левая часть неравенства (14) при возрастании n не убывает, а потому стремится к пределу. Но в таком случае из (16) следует, что последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ фундаментальна и, значит, имеет предел $h \in$ H. Для этого предела, как и выше, найдем, что

$$(h, g_p) = \lim_{n \to \infty} (f_n, g_p) = \xi_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

10. Полные ортогональные системы векторов в H. Между векторами ортонормированной системы не может быть линейных зависимостей. Поэтому в евклидовом пространстве n измерений всякая ортонормированная система векторов содержит не более n векторов.

Будем называть ортонормированную систему M *полной* в H, если система M не является истинной частью некоторой ортонормированной системы в H. Вообще систему векторов N (не обязательно ортонормированную) назовем полной, если в H нет отличного от нуля вектора, ортогонального каждому вектору системы N.

В евклидовом пространстве n измерений любая ортонормированная система из n векторов является полной. В гильбертовом же пространстве полные ортонормированные системы содержат бесконечное число элементов, и возникает вопрос о мощности этих систем.

Этот вопрос решается просто для сепарабельных пространств. С них мы и начнем.

Теорема 1. *Если пространство* H *сепарабельно, то всякая ортонормированная система векторов в нем является конечным или счетным множеством.*

Доказательство. Пусть

$$f_1, \qquad f_2, \qquad f_3, \ \ldots \tag{1}$$

— счетное множество векторов, плотное в H, и пусть M — заданное множество попарно ортогональных и нормированных векторов. Докажем, что M можно перенумеровать. Пусть $e \in$ M. Найдем в (1) какой-нибудь вектор f_k, для которого

$$\|e - f_k\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{2}$$

Пусть аналогичным вектором для $e' \in M$ будет $f_{k'}$. Докажем, что $k \neq k'$, если $e \neq e'$. Действительно,

$$\| e - e' \|^2 = \| e \|^2 + \| e' \|^2 = 2$$

и, значит,

$$\sqrt{2} = \| e - e' \| \leqslant \| e - f_k \| + \| e' - f_k \| < \frac{1}{2}\sqrt{2} + \| e' - f_k \|,$$

так что

$$\| e' - f_k \| > \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

и, следовательно, $f_{k'} \neq f_k$, т. е. $k' \neq k$.

Таким образом, с помощью соотношения (2) мы можем каждому вектору из M отнести натуральное число, и различным векторам из M относятся различные натуральные числа. Тем самым счетность множества доказана.

Наличие в некотором пространстве Гильберта несчетного множества векторов, попарно ортогональных и нормированных, является признаком того, что пространство не сепарабельно. Один важный пример этого рода ниже будет нами рассмотрен (см. n° 15).

Теорема 2. *Полнота в* H *бесконечной последовательности векторов имеет место в том и только в том случае, когда эта последовательность векторов замкнута в* H.

Доказательство. Не будет нарушением общности, если мы примем, что данная последовательность векторов ортонормирована. Обозначим ее

$$e_1, \qquad e_2, \qquad e_3, \ \ldots \tag{3}$$

A. Пусть система (3) замкнута в H. Это значит, что для всякого вектора из H имеет место уравнение замкнутости. Допуская, что система (3) не полна, обозначим через h какой-нибудь отличный от нуля вектор, ортогональный всем векторам (3). Таким образом, $(h, e_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, и уравнение замкнутости для h приводит к противоречию

$$0 \neq \| h \|^2 = 0.$$

B. Предположим теперь, что система (3) полна. Возьмем произвольный вектор $h \in$ H и рассмотрим последовательность векторов

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (h, e_k)\, e_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Она (см. n° 9) фундаментальна, а значит, сходится к некоторому вектору. Пусть g — ее предел. Тогда

$$(g, e_k) = \lim_{n \to \infty} (s_n, e_k) = (h, e_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Кроме того, g принадлежит замыканию линейной оболочки последовательности (3) и, следовательно, для g имеет место уравнение замкнутости

$$\|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(g, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2. \tag{5}$$

Вектор $g-h$ на основании (4) ортогонален всем векторам последовательности (3). В силу предположенной полноты этой последовательности вектор $g-h$ поэтому равен нулю, т. е. $g=h$ и (5) принимает вид

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2.$$

Мы доказали, что для произвольного вектора $h \in \mathrm{H}$ имеет место уравнение замкнутости. Тем самым доказано, что (3) есть замкнутая в H последовательность.

Теорема 3. *Пространство H имеет полную ортонормированную последовательность в том и только том случае, когда оно сепарабельно.*

Доказательство. А. Пусть пространство H сепарабельно. Обозначим через N счетное множество векторов, плотное в H. Выбрасывая из последовательности N каждый вектор, который является линейной комбинацией предыдущих, и подвергая полученную последовательность ортогонализации, мы получим ортонормированную последовательность M. Эта последовательность полна. В самом деле, пусть вектор $h \in \mathrm{H}$ ортогонален каждому элементу последовательности M. Тогда h ортогонален каждому вектору из N. При любом $\varepsilon > 0$ можно найти вектор $f \in \mathrm{N}$, для которого

$$\|h - f\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|h\|^2 = (h, h) = (h-f, h) \leqslant \|h-f\| \cdot \|h\| < \varepsilon \|h\|$$

и, значит,

$$\|h\| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $h = 0$, чем и доказана полнота в H ортонормированной последовательности M.

В. Допустим теперь, что в H есть полная ортонормированная последовательность (3). Обозначим через N совокупность всех линейных комбинаций

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \gamma_2^{(n)} e_2 + \cdots + \gamma_n^{(n)} e_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где каждый коэффициент $\gamma_k^{(n)}$ имеет вид $\gamma_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + i\beta_k^{(n)}$, причем $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$ — рациональные числа. Множество N счетно. Вместе с тем для любого $h \in \mathrm{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно сначала найти такое n, чтобы

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем можно числа (h, e_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ заменить столь близкими к ним числами $\gamma_k^{(n)}$, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \{(h, e_k) - \gamma_k^{(n)}\} e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, в N будет найден вектор

$$f = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k,$$

для которого

$$\| h - f \| < \varepsilon,$$

чем и доказана сепарабельность пространства H.

Вопрос о мощности полных ортонормированных систем в сепарабельном пространстве нами решен полностью: всякая полная ортонормированная система в сепарабельном пространстве есть обязательно бесконечная последовательность.

Теперь переходим к произвольным гильбертовым пространствам.

Прежде всего заметим, что, *какова бы ни была мощность ортонормированной системы* M, *всякий вектор* f *имеет не более счетного множества отличных от нуля проекций на элементы системы* M.

Действительно, для любого набора e', e'', e''', ... элементов из M имеет место неравенство

$$|(f, e')|^2 + |(f, e'')|^2 + |(f, e''')|^2 + \cdots \leqslant \| f \|^2,$$

которое показывает, что множество всех отличных от нуля чисел (f, e), $e \in \mathrm{M}$, можно перенумеровать.

Далее имеет место

Теорема 4. *Всякие две полные ортонормированные системы в пространстве Гильберта имеют одну и ту же мощность.*

Доказательство нужно провести только для того случая, когда пространство H несепарабельно.

Пусть две ортонормированные системы M и N соответственно мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ полны в H.

Для каждого элемента $f \in \mathrm{N}$ найдется элемент $e \in M$ такой, что $(e, f) \neq 0$, так как в противном случае систему M можно было бы пополнить элементом f. Найдя для элемента f указанный элемент e, отберем из N все элементы, не ортогональные e. Их будет не более счетного множества. Обозначим их

$$(S) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n \qquad (1 \leqslant n \leqslant \infty).$$

Так как множество N несчетно, то в нем найдется элемент f', отличный от элементов совокупности S и, следовательно, ортогональный e. Возьмем в M элемент e', для которого $(e', f') \neq 0$, и затем отберем из N все элементы, не ортогональные e' и не входящие в S. Перенумеруем их

$$(S') \qquad f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n'} \qquad (1 \leqslant n' \leqslant \infty).$$

Неограниченное (трансфинитное) продолжение этого процесса приведет нас к множеству совокупностей $S_\alpha \subset N$, обладающих следующими свойствами:

1) каждый элемент из N входит в одну и только одну из совокупностей S_α;

2) каждой совокупности S_α отвечает некоторый элемент $e_\alpha \in M$, причем различным совокупностям S_α, S_β отвечают различные элементы e_α, e_β;

3) каждая совокупность S_α содержит не менее одного элемента и не более счетного множества элементов.

Пусть $\mathfrak{p}$ — мощность множества совокупностей S_α. Если каждая совокупность S_α бесконечна, то по известной теореме теории множеств

$$\mathfrak{n} = \aleph_0 \mathfrak{p} = \mathfrak{p}.$$

Так как равенство

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$$

выполнено очевидным образом и в другом крайнем случае, когда каждая совокупность S_α содержит всего один элемент, то и в общем случае

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{p}.$$

С другой стороны, ясно, что

$$\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Меняя ролями системы M и N, получим, что

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n},$$

и теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, примем следующее

Определение. *Размерностью пространства Гильберта называют мощность полной ортонормированной системы в нем.*

Размерность подпространства $G \subset H$ можно уже не определять. Что же касается произвольного линейного многообразия $L \subset H$, то под его размерностью понимают размерность подпространства $\bar{L}$.

Если два пространства Гильберта, H и H', имеют одну и ту же размерность, то они *изоморфны* в том смысле, что между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее следующему условию: если элементам f, $g \in H$ соответствуют элементы f', $g' \in H'$, то 1) элементу $\alpha f + \beta g$ соответствует элемент $\alpha f' + \beta g'$ и 2) скалярные произведения $(f, g)_H$ и $(f', g')_{H'}$ равны между собой.

Действительно, поскольку пространства H и H' имеют одну и ту же размерность, то они обладают полными ортонормированными системами одинаковой мощности. Установим как-нибудь взаимно однозначное соответствие между элементами этих двух ортонормированных систем и распространим это соответствие на линейные оболочки рассматриваемых ортогональных систем так, чтобы выполнялось условие 1). При этом условие 2) выполнится автоматически, что позволит путем предельного перехода получить требуемое соответствие для всех элементов пространств H, H'.

Из доказанного, в частности, следует, что всякое сепарабельное пространство Гильберта изоморфно пространству l^2.

То, что два гильбертовых пространства неодинаковой размерности не изоморфны, очевидно.

Поэтому два абстрактных гильбертовых пространства (подобно двум абстрактным евклидовым пространствам) отличаются друг от друга только своей размерностью.

11. Пространство L^2. Мы получим весьма важную реализацию сепарабельного пространства Гильберта, беря в качестве векторов функции точки в вещественном евклидовом пространстве (любого числа измерений). Так как рассмотрения не зависят от размерности пространства и характера области этого пространства, в которой рассматриваются функции, то мы можем для упрощения принять, что областью является конечный или бесконечный интервал (a, b) числовой оси. Гильбертово пространство, получаемое при этом, обозначается $L^2(a, b)$ (или просто L^2). Под L^2 понимают совокупность всех (комплекснозначных) измеримых функций в (a, b), квадрат модуля которых интегрируем в смысле Лебега. При этом две функции не считаются различными, если они отличаются лишь на множестве меры нуль.

Так как

$$|\alpha + \beta|^2 \leqslant 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2,$$

то из $f(t)$, $g(t) \in L^2$ вытекает, что $f(t) + g(t) \in L^2$. Далее, каково бы ни было число λ, из $f(t) \in L^2$ вытекает, что $\lambda f(t) \in L^2$. Таким образом, L^2 есть линейная система, нулевым элементом которой является функция, равная нулю почти всюду в (a, b). Эта линейная система становится метризованной, если скалярное произведение определить формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Существование интеграла, стоящего в правой части, является следствием неравенства

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2.$$

Неравенство

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

в настоящем случае имеет вид

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2\,dt};$$

это неравенство было получено Буняковским (для интегралов в смысле Римана).

Теперь мы докажем полноту L^2, откуда будет вытекать, что L^2 является пространством Гильберта.

Пусть последовательность функций $f_n(t) \in L^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ фундаментальна, т. е. пусть

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt = 0.$$

В силу этого условия существует бесконечная последовательность натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_r < \ldots,$$

для которых

$$\int_a^b |f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)|^2\,dt < \frac{1}{8^r} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этого неравенства следует, что множество тех точек интервала (a, b), в которых

$$|f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)| \geqslant \frac{1}{2^r},$$

имеет меру, меньшую, чем $\frac{1}{2^r}$. Значит, неравенства

$$|f_{k_{s+1}}(t) - f_{k_s}(t)| < \frac{1}{2^s},$$
$$|f_{k_{s+2}}(t) - f_{k_{s+1}}(t)| < \frac{1}{2^{s+1}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

выполняются одновременно на точечном множестве I_s, дополнение которого до интервала $I = (a, b)$ имеет меру

$$\text{més}\,(I \setminus I_s) < \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{s-1}}.$$

Так как $I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$, то существует $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = I^*$ и $\text{més}\,(I \setminus I^*) = 0$. Последовательность $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ сходится равномерно в I_s при любом s. Действительно, в I_s

$$|f_{k_n}(t) - f_{k_m}|(t) \leqslant \sum_{r=m}^{n-1} |f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)| < \sum_{r=m}^{n-1} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2^{m-1}}$$
$$(n > m > s).$$

Следовательно, $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ сходится в I^* (т. е. почти всюду в I). Положим

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{r \to \infty} f_{k_r}(t) & (t \in I^*), \\ 0 & (t \in I \setminus I^*). \end{cases}$$

Теперь примем во внимание неравенства

$$\int\limits_{I_s(\alpha)} |f_m(t) - f_{k_r}(t)|^2\, dt \leqslant \| f_m - f_{k_r} \|^2 < \varepsilon,$$

где m, $k_r > \mathcal{N}(\varepsilon)$, а $I_s(\alpha)$ есть I_s, если интервал (a, b) конечен, и есть $I_s \cap (-\alpha, \alpha)$ в противном случае. В $I_s(\alpha)$ сходимость последовательности $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ равномерна. Поэтому в написанном интеграле законен предельный переход, и мы получаем

$$\int\limits_{I_s(\alpha)} |f_m(t) - f(t)|^2\, dt \leqslant \varepsilon \qquad [m > \mathcal{N}(\varepsilon)].$$

Увеличивая α, получим

$$\int\limits_{I_s} |f_m(t) - f(t)|^2\, dt \leqslant \varepsilon,$$

где ε — произвольно. Отсюда

$$\int_a^b |f_m(t) - f(t)|^2 \, dt \leqslant \varepsilon.$$

Это значит, что $f_m - f \in L^2$, откуда следует, что $f \in L^2$, и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказано также, что

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b |f_m(t) - f(t)|^2 \, dt = 0.$$

Подчеркнем, что в процессе доказательства нами получен следующий факт: *если последовательность сходится к $f(t)$ в метрике L^2, т. е.* $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, *то эта последовательность содержит подпоследовательность* $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$, *которая сходится к $f(t)$ почти всюду, и если из интервала (a, b) удалить надлежащее множество сколь угодной малой положительной меры, то на оставшемся множестве подпоследовательность* $\{f_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ *сходится к $f(t)$ равномерно.*

То, что пространство L^2 сепарабельно, доказывается очень просто. Назовем функцию *финитной*, если она равна нулю вне некоторого замкнутого интервала, лежащего внутри (a, b). Из теории интеграла Лебега вытекает, что множество кусочно-постоянных финитных функций плотно в L^2. Это свойство сохранится, если ограничиться лишь теми функциями, точки разрыва которых имеют рациональные абсциссы и значениями которых являются комплексные числа с рациональными компонентами. Множество же таких функций счетно.

Заметим, что пространство $L^2(a, b)$ можно рассматривать как подпространство по отношению к $L^2(a_1, b_1)$, если $a_1 \leqslant a < b \leqslant b_1$ и, в частности, как подпространство по отношению к $L^2(-\infty, \infty)$. Для этого нужно каждую функцию из $L^2(a, b)$ продолжить за пределы интервала (a, b), полагая ее равной нулю вне (a, b).

Отметим также, что сходимость в метрике пространства L^2 называют часть *сходимостью в среднем* и пишут

$$f(t) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, f_n(t),$$

если

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt = 0$$

(l. i. m. означает limes in medio, т. е. *предел в среднем*).

В заключение рекомендуем читателю доказать, повторяя рассмотрения настоящего n°, что совокупность измеримых функций $f(t)$, для которых при фиксированном $p \geqslant 1$

$$\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty,$$

является сепарабельным пространством Банаха, его обозначают $L^p = L^p(a, b)$, если положить

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

а нулевой элемент, сложение и умножение на число определить, как и в L^2.

Единственным нетривиальным пунктом является доказательство неравенства треугольника (неравенство Минковского для интегралов, ср. конец n° 5).

12. Полные ортонормированные последовательности в L^2. В настоящем пункте мы рассмотрим некоторые важные ортонормированные системы в L^2.

А. Функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

образуют ортонормированную последовательность в $L^2(0, 2\pi)$. Это — *тригонометрическая система.* Мы докажем, что для всякой функции $f(t) \in L^1(0, 2\pi)$ из выполнения всех соотношений

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt = 0 \qquad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

следует, что $f(t) = 0$ почти всюду [1].
Так как всякая функция из $L^2(0, 2\pi)$ принадлежит и $L^1(0, 2\pi)$, отсюда будет следовать полнота рассматриваемой ортонормированной последовательности.

Из соотношений (1) при помощи интегрирования по частям находим, что функция

$$F(t) = \int_0^t f(t) \, dt$$

удовлетворяет равенствам

$$\int_0^{2\pi} \{F(t) - C\} e^{-ikt} \, dt = 0 \qquad (\pm k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{2}$$

[1] В конце настоящего n° доказан континуальный аналог этого предложения

какова бы ни была константа C. Эту константу подберем так, чтобы равенство (2) имело место и при $k=0$. Мы получили непрерывную функцию

$$\Phi(t)=F(t)-C.$$

По теореме Вейерштрасса для периодических функций при любом $\varepsilon>0$ можно найти такую тригонометрическую сумму

$$\sigma(t)=\sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikt},$$

что

$$|\Phi(t)-\sigma(t)|<\varepsilon.$$

Поэтому, используя соотношения (2), будем иметь:

$$\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^2\,dt=\int_0^{2n}\overline{\Phi(t)}\,\{\Phi(t)-\sigma(t)\}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|\,dt\leqslant\varepsilon\sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^2\,dt},$$

откуда

$$\int_0^{2\pi}|\Phi(t)|^2\,dt\leqslant 2\pi\varepsilon^2.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon>0$ это значит, что $\Phi(t)=0$, т. е. $F(t)=C$ и, следовательно, $f(t)=0$ почти всюду.

Доказательство закончено.

В. Возьмем пространство $L^2(a, b)$, где (a, b) — произвольный конечный интервал. Последовательность функций

$$1,\ t,\ t^2,\ \ldots \tag{3}$$

образует полную систему в этом пространстве.

Доказательство аналогично. Пусть функция $f(t)\in L^1(a, b)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_a^b f(t)\,t^k\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Из этих соотношений интегрированием по частям получаются равенства

$$\int_a^b F(t)\,t^k\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$F(t)=\int_a^t f(t)\,dt.$$

Применяя к непрерывной функции $F(t)$ теорему Вейерштрасса, мы, как и выше, найдем, что $F(t)=0$, а значит, и $f(t)=0$ почти всюду.

Из доказанной полноты последовательности функций (3) следует полнота в $L^2(a, b)$ любой последовательности $\{P_k(t)\}_0^\infty$, где $P_k(t)$ — многочлен точно k-й степени. В частности, будет полной последовательность многочленов, которые получаются из (3) с помощью ортогонализации. Эти ортогональные многочлены носят название *многочленов Лежандра* и могут быть представлены в виде

$$C_k \frac{d^k\{(t-a)(t-b)\}^k}{dt^k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где C_k — некоторые положительные постоянные. Обычно эти многочлены рассматривают при $a=-1$, $b=1$.

C. Рассмотрим пространство $L^2(-\infty, \infty)$. Путем ортогонализации системы

$$e^{-\frac{t^2}{2}},\ te^{-\frac{t^2}{2}},\ t^2e^{-\frac{t^2}{2}},\ \ldots$$

мы получим последовательность *функций Чебышева — Эрмита*

$$\varphi_k(t)=(-1)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k}=H_k(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $H_k(t)$ — многочлен степени k, так называемый *многочлен Чебышева — Эрмита*. Функции Чебышева — Эрмита удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\,\varphi_m(t)\,dt=\begin{cases} 0 & (k\neq m)\\ 2^m m!\sqrt{\pi} & (k=m)\end{cases}$$

и, следовательно, ортогональны, но не нормированы.

Докажем, что последовательность функций Чебышева — Эрмита полна.

Пусть для некоторой функции $f(t)\in L^2(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_k(t)\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Введем функцию

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}\,dz,$$

которая, очевидно, определена (и даже непрерывна) при любом конечном комплексном z. Кроме того, функция $F(z)$ всюду в комплексной плоскости имеет конечную производную

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}\,dt.$$

Следовательно, $F(z)$ есть функция голоморфная всюду на конечном расстоянии. А так как в силу (4)

$$F^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (it)^k f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то $F(z)$ есть тождественный нуль. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itx}\,dt = 0 \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Теперь остается воспользоваться следующим фактом, *если* $g(t) \in L^1(-\infty,\ \infty)$ (в нашем случае $g(t) = f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$) *и если для всех* $x \in (-\infty,\ \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{itx}\,dt = 0, \tag{5}$$

то $g(t) = 0$ *почти всюду.*

Для полноты приведем доказательство этой теоремы единственности. С этой целью возьмем произвольные конечные числа a, b $(b > a)$ и $\varepsilon > 0$, затем умножим обе части (5) на ограниченную абсолютно интегрируемую функцию

$$\frac{1}{2\varepsilon x^2}\{e^{-iax}(1 - e^{i\varepsilon x}) + e^{-ibx}(1 - e^{-i\varepsilon x})\}$$

и проинтегрируем от $-\infty$ до ∞. Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos cx}{x^2}\,dx = |c| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx = \pi|c|,$$

где c вещественно, найдем, что равенство (5) примет вид

$$\pi \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} g(t)\,\psi_\varepsilon(t,\ a,\ b)\,dt = 0, \tag{6}$$

где $\psi_\varepsilon(t,\ a,\ b)$ — непрерывная функция, графиком которой является ломаная с вершинами $(a - \varepsilon,\ 0)$, $(a,\ 1)$, $(b,\ 1)$, $(b + \varepsilon,\ 0)$. Делая в (6) предельный переход $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int_a^b g(t)\,dt = 0.$$

Так как это верно при любых a, b, то $g(t) = 0$ почти всюду.

D. В пространстве $L^2(0, \infty)$ мы имеем ортонормированную систему *функций Лагерра*

$$\psi_k(t) = \frac{1}{k!} e^{-\frac{t}{2}} L_k(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $L_k(t)$ — *многочлен Лагерра*, который определяется формулой

$$L_k(t) = e^t \frac{d^k}{dt^k}(t^k e^{-t}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Полнота этой системы может быть доказана на основании полноты системы Чебышева — Эрмита. Предоставляем это читателю.

13. Биортогональные системы векторов в Н. Пара последовательностей $\{f_k\}_1^\infty$, $\{g_k\}_1^\infty$ из Н образует *биортогональную систему*, если

$$(f_j, g_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условимся для краткости называть каждую из последовательностей $\{f_k\}_1^\infty$, $\{g_k\}_1^\infty$ *биортогонально сопряженной* с другой из них.

Не следует думать, что для произвольно взятой последовательности векторов, между которыми нет линейных зависимостей, обязательно найдется биортогонально сопряженная последовательность. Например, в пространстве $L^2(0, 1)$ последовательность функций $\{t^k\}_0^\infty$ не имеет биортогонально сопряженной последовательности. В самом деле, если бы такая последовательность $\{g_k(t)\}_0^\infty$ существовала, то мы имели бы равенства

$$\int_0^1 g_m(t)\, t^m\, dt = 1, \tag{1}$$

$$\int_0^1 g_m(t)\, t^k\, dt = 0 \qquad (k \neq m). \tag{2}$$

Но из (2), в частности, следовало бы, что

$$\int_0^1 \{g_m(t)\, t^{m+1}\}\, t^j\, dt = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

а эти равенства на основании полноты в L^2 $(0, 1)$ последовательности $\{t^j\}_0^\infty$ возможны лишь при

$$g_m(t)\, t^{m+1} = 0,$$

что несовместимо с (1).

Теорема. *Последовательность векторов* $\{f_k\}_1^\infty$ *имеет биортогонально сопряженную последовательность в том и только том случае, когда ни при каком* j *вектор* f_j *не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных векторов*

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{j-1},\ f_{j+1},\ \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим замкнутую линейную оболочку векторов (3) через M_j, а замкнутую линейную оболочку всех векторов f_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ через M.

Если при любом j

$$M_j \neq M,$$

то, беря из ортогонального дополнения $M \ominus M_j$ вектор g_j, нормированный условием

$$(f_j, g_j) = 1,$$

мы, очевидно, найдем, что

$$(f_j, g_k) = \delta_{jk},$$

и тем самым получим последовательность $\{g_k\}_1^\infty$, биортогонально сопряженную с $\{f_k\}_1^\infty$.

Обратно, если последовательность $\{g_k\}_1^\infty$, биортогонально сопряженная с $\{f_k\}_1^\infty$, существует, то при любом j вектор f_j не может принадлежать замкнутой линейной оболочке M_j векторов (3), так как в этом случае он был бы ортогонален вектору g_j, который ортогонален всем векторам (3).

Теорема доказана.

Следует отметить, что *для выполнения* условия доказанной теоремы

$$M_j \neq M \qquad (j > 1, 2, 3, \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом j *была отлична от нуля величина*

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n)}. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно формуле (5) n° 7 величина

$$\frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n)} = \delta_j^2(n)$$

представляет квадрат расстояния точки f_j от линейной оболочки элементов $f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_n$. Отсюда следует, что при каждом j величина $\delta_j(n)$ монотонно убывает при возрастании n, а потому предел (4) существует.

Если $f_j \overline{\in} M_j$, то тем более f_j не принадлежит замкнутой линейной оболочке $M^{(j)}$ векторов $f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots$ и поэтому $\delta_j \neq 0$.

Пусть, обратно, $\delta_j \neq 0$ для любого j. При $j = 1$ это неравенство, непосредственно в силу определения, означает, что $f_j \overline{\in} M_j$. Докажем теперь, пользуясь индукцией, что $f_j \overline{\in} M_j$ при любом j. Пусть уже известно, что $f_k \overline{\in} M_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, но вопреки утверждению

$$f_{n+1} \in M_{n+1}.$$

Так как $\delta_{n+1} \neq 0$, то при этом

$$f_{n+1} \overline{\in} M^{(n+1)}.$$

Сопоставляя эти два соотношения, приходим к выводу, что f_{n+1} является линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, т. е.

$$f_{n+1} = \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} + \cdots + \alpha_n f_n,$$

где $\alpha_l \neq 0$. Отсюда следует, что

$$f_l = \beta_{l+1} f_{l+1} + \cdots + \beta_n f_n + \beta_{n+1} f_{n+1}.$$

Поэтому $\delta_l = 0$, а это противоречит условию.

Таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий доказанную теорему.

Каким условиям должна удовлетворять бесконечная последовательность натуральных чисел

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots,$$

чтобы последовательность функций

$$t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots, t^{r_n}, \ldots \tag{5}$$

обладала в $L^2(0, 1)$ биортогонально сопряженной последовательностью?

В данном случае вычисление величины $\delta_j^2(n)$ затруднений не представляет и дает[1]

$$\delta_j^2(n) = \frac{1}{2r_j + 1} \prod_{k=j+1}^{n} \left(\frac{r_j - r_k}{r_j + r_k + 1} \right)^2.$$

[1] См., например, Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. «Наука», 1965, с. 28—30.

Для выполнения условий

$$\delta_j = \lim_{n\to\infty} \delta_j(n) \neq 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k} < \infty.$$

Так как согласно известной теореме Мюнца[1] условие (6) необходимо и достаточно, чтобы последовательность (5) была неполной в $L^2(0, 1)$, то последовательность (5) имеет биортогонально сопряженную последовательность в $L^2(0,1)$ в том и только том случае, когда эта последовательность неполна в $L^2(0, 1)$.

14. Пространство L^2_σ. Пусть дана монотонная неубывающая ограниченная функция $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Примем, что она нормирована при помощи соотношения

$$\sigma(t-0) = \sigma(t).$$

Такие функции $\sigma(t)$ часто называют *функциями распределения*[2]. С помощью этой функции можно построить меру подобно тому, как строится мера Лебега. При этом построении в качестве длины полузамкнутого интервала $[a, b)$ принимается число $\sigma(b) - \sigma(a)$ (вместо числа $b - a$). Отсюда уже автоматически, с помощью простых предельных переходов, получается, что длины полузамкнутого интервала $(a, b]$, открытого интервала (a, b) и замкнутого интервала $[a, b]$ соответственно равны: $\sigma(b+0) - \sigma(a+0)$, $\sigma(b) - \sigma(a+0)$, $\sigma(b+0) - \sigma(a)$. Если $b = a$, то $[a, b] \overset{\text{def}}{=} [a]$ есть *несобственный интервал* — точка. Таким образом, теперь некоторые точки могут иметь отличную от нуля длину (точки скачка $\sigma(t)$), а некоторые интервалы — длину, равную нулю (*интервалы постоянства* $\sigma(t)$).

Введенную длину называют *σ — длиной;* с ее помощью строят *σ-меру*, *σ-измеримые функции* и интеграл Лебега — Стилтьеса. После этого определяется линейная система всех σ-измеримых функций $f(t)$, для которых конечен интеграл Лебега — Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, d\sigma(t).$$

[1] См., например, Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965, с. 53.

[2] Заметим, что иногда принимается другая нормировка, например:

$$\sigma(t+0) = \sigma(t).$$

В теории вероятностей в определение функции распределения включается еще требование, чтобы $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = 1$, но это условие для нас не существенно.

В метрике, порождаемой скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,d\sigma(t),$$

эта линейная система становится гильбертовым пространством[1], которое называют L^2_σ.

Можно было бы и здесь при любом $p \geqslant 1$ ввести банахово пространство[1] L^p_σ с нормой

$$\|f\| = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,d\sigma(t)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

У нас встретится L^1_σ. Поэтому заметим, что $L^2_\sigma \subset L^1_\sigma$. Это является следствием неравенства Коши — Буняковского и ограниченности функции $\sigma(t)$.

Процедура, с помощью которой строится[2] интеграл Лебега — Стилтьеса, показывает, что пространство L^p_σ получается замыканием линейной оболочки семейства характеристических функций интервала[3] (причем не исключаются несобственные интервалы отличной от нуля σ-длины). Так как множество точек разрыва функции $\sigma(t)$ счетно и так как можно ограничиться лишь теми собственными интервалами, концы которых имеют рациональные абсциссы, то сепарабельность L^p_σ доказывается так же, как и сепарабельность L^2 (см. n° 11).

Часто приходится рассматривать интервалы Лебега — Стилтьеса, в которых вместо функции распределения $\sigma(t)$ берется произвольная (вещественная или даже невещественная) функция $\varphi(t)$ ограниченного изменения. Каждую такую функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде разности двух функций распределения, если она вещественна, и в виде линейной комбинации четырех функций распределения $\sigma^{(i)}(t)$, если она невещественна. Если сумму этих функций распределения обозначить $\sigma_\varphi(t)$, то под функциями, суммируемыми относительно $\varphi(t)$, понимают функции $f(t)$, для которых конечны интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,d\sigma_\varphi(t),$$

[1] Полнота доказывается аналогично тому, как и полнота L^2 (см. n° 11).

[2] См., например, Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. Изд. 3-е, М., 1972, с. 273—291.

[3] Функций, равных единице в рассматриваемом интервале и нулю вне его.

а

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\varphi(t)$$

по определению представляет некоторую линейную комбинацию (двух или четырех) интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\sigma^{(i)}(t).$$

Функцию $\Phi(x)$, представимую в некотором интервале $[a, b)$ в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, d\sigma(t),$$

где $f(t)$ — суммируема относительно $\sigma(t)$, называют *абсолютно непрерывной относительно* $\sigma(t)$.

Легко видеть, что $\Phi(x)$ есть функция ограниченного изменения.

Свойство[1], вполне характеризующее абсолютно непрерывную относительно $\sigma(t)$ функцию $\Phi(x)$, состоит в том, что для любой конечной системы принадлежащих $[a, b)$ полуинтервалов $[a_i, b_i)$ без общих точек величина

$$\sum_i |\Phi(b_i) - \Phi(a_i)|$$

будет сколь угодно мала, если достаточно мала сумма

$$\sum_i [\sigma(b_i) - \sigma(a_i)].$$

Теорема. *Если* $f(t)$ *и* $g(t) \in L^2_\sigma(a, b)$ *и*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, d\sigma(t), \tag{1}$$

то

$$\int_a^b g(t)\, d\Phi(t) = \int_a^b g(t) f(t)\, d\sigma(t). \tag{2}$$

Замечания. При $\sigma(t) = t$ это — классическая теорема Лебега.

Доказательство. Мы можем, не нарушая общности, предположить, что $f(t)$ вещественна и неотрицательна, так что $\Phi(t)$ — также функция распределения.

[1] Этот важный факт в полном объеме доказан, например, в книге А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина (см. с. 328, 332).

Равенство (2) во всяком случае верно, в силу (1), если $g(t)$ есть характеристическая функция собственного интервала (по отношению к $\sigma(t)$). Оно, как легко видеть, верно и для σ-несобственных интервалов[1], которые только и могут быть Φ-несобственными. Теперь возьмем последовательность кусочно постоянных функций $g_n(t)$, сходящуюся к $g(t)$ в L^2_σ. Так как σ — мера множества, где $|g-g_n| \geqslant \gamma > 0$, стремится к нулю при $n \to \infty$, то в силу абсолютной непрерывности $\Phi(t)$ относительно $\sigma(t)$, тем же свойством обладает Φ-мера того же множества. Поэтому

$$\int_a^b |g(t)-g_n(t)|\, d\Phi(t) \to 0$$

и остается воспользоваться тем, что

$$\int_a^b g_n(t)\, d\Phi(t) = \int_a^b g_n(t) f(t)\, d\sigma(t).$$

Следствие. *Если функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\sigma(t),$$

где $f(t) \in L^2_\sigma$, равна нулю почти всюду в (a, b) в смысле обычной меры Лебега, то $f(t)=0$ в $[a, b)$ всюду, кроме множества нулевой σ-меры.

Прежде всего убедимся в том, что $F(x)=0$ в каждой точке $x \in [a, b)$. Это очевидно, если x есть точка непрерывности для $\sigma(t)$. Если $x \in (a, b)$ есть точка скачка, то, во-первых, сколько угодно близко к x найдутся точки $\xi_n < x$, в которых $F(\xi_n)=0$, и, во-вторых, величина

$$|F(x)-F(\xi_n)|$$

---

[1] Если $[c]$ $(a<c<b)$ есть несобственный интервал, то

$$\int_{[c]} g(t)\, d\Phi(t) = \int_c^{c+0} g(t)\, d\Phi(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_c^{c+\varepsilon} g(t)\, d\Phi(t).$$

Поэтому утверждение следует из равенства

$$\int_c^{c+\varepsilon} g(t)\, d\Phi(t) = \int_c^{c+\varepsilon} g(t) f(t)\, d\varphi(t).$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $F(x)$ абсолютно непрерывна относительно $\sigma(x)$ и

$$\lim_{n\to\infty} [\sigma(x) - \sigma(\xi_n] = \sigma(x) - \sigma(x-0) = 0.$$

Так как $F(x) \equiv 0$, то

$$\int_a^b |f(t)|^2 d\sigma(t) \equiv \int_a^b \overline{f(t)}\, dF(t) = 0,$$

и утверждение доказано.

Большой интерес представляет случай, когда функция распределения $\sigma(t)$ такова, что существуют все интегралы

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Эти интегралы в силу механических соображений называют *моментами*[1] функции распределения $\sigma(t)$. Если $\sigma(t)$ имеет лишь конечное число точек роста, то интегралы Стилтьеса переходят в конечные суммы. Мы предположим, что этот случай, не представляющий для нас интереса, исключен.

Ортогонализуя в L_σ^2 последовательность

$$1, t, t^2, \ldots,$$

получим последовательность многочленов $\{P_k(t)\}_0^\infty$ (где $P_k(t)$ — многочлен точно степени k), которые удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_k(t)\, P_m(t)\, d\sigma(t) = \delta_{km}.$$

Эти многочлены носят название *ортогональных* и *нормированных многочленов* относительно функции распределения $\sigma(t)$. Если функция $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\sigma'(t) = w(t),$$

то написанные соотношения принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_k(t)\, P_m(t)\, w(t)\, dt = \delta_{km}.$$

В этом случае говорят, что многочлены $P_k(t)$ ортогональны и нормированы относительно *веса* $w(t)$.

[1] Отметим, что задача об отыскании функции $\sigma(t)$ по ее моментам s_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) носит название *степенной проблемы моментов*.

Например, многочлены Чебышева — Эрмита ортогональны (но не нормированы) относительно веса e^{-t^2} $(-\infty < t < \infty)$.

Если интервал ортогональности конечен (т. е. $\sigma(t)$ — постоянная при $t \leqslant a$ и при $t > b$), то последовательность $\{t^k\}_0^\infty$ полна в L^2_σ (и поэтому ортогональные многочлены $P_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют полную систему).

Действительно, пусть функция $f(t) \in L^2_\sigma$ такова, что

$$\int_a^b f(t)\, t^k\, d\sigma(t) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$\int_a^b F(x)\, x^k\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\sigma(t).$$

Здесь $F(x)$ — ограниченная функция и потому принадлежащая $L^2(a, b)$. На основании полноты множества всех многочленов в $L^2(a, b)$ из (3) следует, что $F(x) = 0$ почти всюду в (a, b) по обычной мере Лебега. Отсюда, в силу следствия, и вытекает, что $f(t) = 0$ почти всюду в $[a, b)$ по σ-мере.

Если интервал ортогональности бесконечен, то полнота в L^2_σ множества всех многочленов может и не иметь места.

Ограничимся рассмотрением одного примера, который принадлежит Гамбургеру[1]. Возьмем интервал $(0, \infty)$ и докажем, что ортогональные многочлены относительно веса

$$w(t) = e^{-\frac{\pi\sqrt{t}}{\ln^2 t + \pi^2}}$$

представляют неполную систему. С этой целью рассмотрим функцию

$$g(t) = e^{\frac{\ln t}{\ln^2 t + \pi^2}} \sin\frac{\sqrt{t}\ln t + \pi}{\ln^2 t + \pi^2},$$

которая, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty [g(t)]^2\, w(t)\, dt < \infty,$$

[1] См. H. Hamburger. Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche. Math. Z., 1919, 4, S. 186—222.

и докажем, что

$$\int_0^\infty t^k g(t)\,w(t)\,dt = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Действительно,

$$\int_0^\infty t^k g(t)\,w(t)\,dt = \int_0^\infty t^k e^{\frac{\ln t - \pi\sqrt{t}}{\ln^2 t + \pi^2}} \sin\frac{\sqrt{t}\ln t + \pi}{\ln^2 t + \pi^2}\,dt =$$

$$= \Im \int_0^\infty e^{\frac{1 + i\sqrt{t}}{\ln t - \pi i}} t^k dt = \Im \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1 + ie^{x/2}}{x - \pi i}} e^{(k+1)x}\,dx =$$

$$= \Im \int_{\pi i - \infty}^{\pi i + \infty} e^{\frac{1 + ie^{x/2}}{x - \pi i}} e^{(k+1)x} dx = \Im \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1 - e^{x/2}}{x}} e^{(k+1)x} (-1)^{k+1} dx = 0$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

15. Пространство почти-периодических функций. Рассмотрим множество всех функций вида $e^{i\lambda t}$ $(-\infty < t < \infty)$, где параметр λ пробегает все вещественные значения. Буквой L обозначим линейную оболочку этого множества, т. е. совокупность всех «полиномов» вида

$$\sum_k A_k e^{i\lambda_k t}.$$

Пополним L пределами всех равномерно сходящихся на оси $-\infty < t < \infty$ последовательностей таких полиномов. Мы получим тогда некоторое множество B непрерывных на всей вещественной оси функций. Как впервые показал Г. Бор, непрерывная на всей оси $-\infty < t < \infty$ функция $f(t)$ принадлежит B в том и только том случае, когда она *почти-периодична*. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l лежит по крайней мере одно число τ, для которого

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty).$$

Линейную систему L можно метризовать, определяя скалярное произведение двух полиномов

$$f(t) = \sum_{r=1}^{m} A_r e^{i\lambda_r t}, \qquad g(t) = \sum_{s=1}^{n} B_s e^{i\mu_s t}$$

формулой

$$(f,\ g) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \sum_{r,\ s=1}^{m,\ n} A_r \overline{B}_s \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda_r - \mu_s)}\,dt = \sum_{r,\ s=1}^{m,\ n} \delta(\lambda_r,\ \mu_s) A_r \overline{B}_s,$$

где

$$\delta(\lambda,\ \mu) = \begin{cases} 0 & (\lambda \neq \mu), \\ 1 & (\lambda = \mu). \end{cases}$$

Пополняя L в метрике, порождаемой этим скалярным произведением, мы придем к некоторому гильбертову пространству B^2, которое, как легко заметить, содержит B в качестве линейного многообразия.

Пространство B^2 не сепарабельно. Это следует из того, что в B^2 имеется континуум попарно ортогональных и нормированных векторов $e^{i\lambda t}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, а в n° 10 было показано, что в сепарабельном пространстве всякая ортонормированная система содержит не более счетного множества векторов.

16. Понятие о базисе пространства. Если в пространстве Банаха E имеется такая последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$, что любой вектор $f \in E$ однозначно представим в виде[1]

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k f_k,$$

то последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$ называется *базисом*[2] пространства E.

Из приведенного определения следует, что необходимым условием для существования базиса является сепарабельность пространства E.

Отметим, что если последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset E$ не содержит линейно зависимых элементов и полна в E, то отсюда еще не следует, что эта последовательность является базисом.

Возьмем, например, пространство C непрерывных функций $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с нормой $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Последовательность степеней $\{t^k\}_0^\infty$ по теореме Вейерштрасса полна в этом пространстве, но базисом она не является, так как из представления

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

в метрике C следует аналитичность функции $f(t)$ при $|t| < 1$.

---

[1] Сходимость, конечно, в метрике пространства E.

[2] Это понятие в общем случае ввел Ю. Шаудер (см. J. Schauder. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math Z, 1927, **26**, S. 47—65, 417—431.

Последовательность $\{t^k\}_0^\infty$ не является базисом также в $\mathrm{L}^2(0,1)$. В самом деле, пусть для функции $f(t) \in \mathrm{L}^2(0,1)$ имеется разложение

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \leqslant s) \\ 0 & (t > s). \end{cases}$$

Мы получим тогда при каждом s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, следующее равенство:

$$\int_0^s f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1},$$

откуда вытекает аналитичность функции

$$F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$$

при $|s| < 1$, а значит, и функции $f(t)$ при $|t| < 1$.

Вопрос о существовании базиса в любом сепарабельном пространстве Банаха до последнего времени оставался открытым. Недавно этот вопрос был отрицательно решен П. Энфло[1].

В сепарабельном пространстве Гильберта всякая полная ортонормированная последовательность векторов, очевидно, образует базис. Это — так называемый *ортонормированный базис*. Справедлива также следующая

Теорема. *Пусть* $\{f_k\}_1^\infty$ *— полная система векторов в гильбертовом пространстве* H *и пусть* $\lambda_{1n}^{(1)}$ *и* $\lambda_{1n}^{(n)}$ *— наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы Грама*

$$(\alpha_{jk})_{j,k=1}^n, \quad \alpha_{jk} = (f_k, f_j). \tag{1}$$

Если

$$\varliminf_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(1)} = \mathscr{L} > 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(n)} = \mathscr{M} < \infty,$$

[1] Enflo P. A counter example to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. 130, № 3—4 (1973), с. 309—317 (см. также период. сборник «Математика», 18:1 (1974). В основных «популярных» банаховых пространствах (C, L^p и др.) базисы построены. Первый пример базиса в пространстве C указал Шаудер; этот базис состоит из кусочно-линейных функций (см. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965).

то:

a) *последовательность* $\{f_k\}_1^\infty$ *является базисом в* H

и

b) *существует и также является базисом в* H *последовательность* $\{g_k\}_1^\infty$, *биортогонально сопряженная с последовательностью* $\{f_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что благодаря экстремальным свойствам собственных значений квадратичных форм последовательность $\lambda_{1n}^{(1)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ не возрастает, а последовательность $\lambda_{1n}^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ не убывает. Поэтому всегда существуют

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(1)} \geqslant 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \lambda_{1n}^{(n)} \leqslant \infty,$$

и, значит, в формулировке теоремы вместо нижнего и верхнего пределов можно было взять просто пределы.

Обозначим теперь последовательные собственные значения матрицы

$$(\alpha_{jk})_{j,\,k=r}^{n}$$

через

$$\lambda_{rn}^{(1)} \leqslant \lambda_{rn}^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{rn}^{(n-r+1)}.$$

На основании упомянутых выше экстремальных свойств собственных значений

$$\lambda_{1n}^{(1)} \leqslant \lambda_{rn}^{(1)}, \qquad \lambda_{rn}^{(n-r+1)} \leqslant \lambda_{1n}^{(n)} \tag{2}$$

и

$$\lambda_{rn}^{(1)} \leqslant \lambda_{r+1,\,n}^{(1)} \leqslant \lambda_{rn}^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{r+1,\,n}^{(n-r)} \leqslant \lambda_{rn}^{(n-r+1)}. \tag{3}$$

Так как

$$\Gamma(f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n) = \lambda_{rn}^{(1)}\lambda_{rn}^{(2)} \ldots \lambda_{rn}^{(n-r+1)},$$

то из неравенств (2), (3) при выполнении условий теоремы следует, что

$$\mathscr{L} \leqslant \lambda_{1n}^{(1)} \leqslant \frac{\Gamma(f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_{r+1}, \ldots, f_n)} \leqslant \lambda_{1n}^{(n)} \leqslant \mathscr{M}.$$

Отсюда, на основании рассмотрений n° 13, заключаем, что последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ имеет биортогонально сопряженную последовательность $\{g_k\}_1^\infty$.

Докажем неравенство

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{r} (g_k, g_j)\,\bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \tag{4}$$

для любого натурального r и любых комплексных ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, r$).

Задавшись числами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, введем вектор

$$h = \sum_{k=1}^{r} \xi_k g_k$$

и применим к нему обобщенное уравнение замкнутости

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j, k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} (f_j, h)(h, f_k) = \| h \|^2,$$

что возможно, так как последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ полна. Здесь $(\beta_{jk}^{(n)})_{j, k=1}^{n}$ — матрица, обратная матрице (1). Благодаря нашему выбору вектора h это равенство принимает вид

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j, k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k = \sum_{j, k=1}^{r} (g_k, g_j) \bar{\xi}_j \xi_k,$$

где

$$\xi_k = 0 \quad (k = r+1, r+2, \ldots, n).$$

Так как все собственные значения матрицы (1) лежат в интервале $[\mathscr{L}, \mathscr{M}]$, то все собственные значения обратной матрицы $(\beta_{jk}^{(n)})_{j, k=1}^{n}$ лежат в интервале $\left[\frac{1}{\mathscr{M}}, \frac{1}{\mathscr{L}}\right]$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{j, k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2.$$

Переходя к пределу по n, мы получим, что

$$\frac{1}{\mathscr{M}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2 \leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{j, k=1}^{n} \beta_{jk}^{(n)} \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=1}^{r} |\xi_k|^2,$$

а это и есть неравенство (4).

Докажем теперь, что последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ является базисом пространства H.

Если некоторый элемент $h \in$ H представим в виде

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k g_k, \tag{5}$$

то, умножая обе части этого равенства на f_j, получим

$$\xi_j = (h, f_j), \tag{5'}$$

откуда следует единственность представления (5). Остается доказать возможность представления любого элемента $h \in$ H в виде (5).

Взяв элемент $h \in \mathrm{H}$, определим числа ξ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ формулами (5′) и построим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j g_j. \tag{6}$$

Из неравенства (4) и обобщенного неравенства Бесселя для элемента h следует сходимость числового ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2,$$

а отсюда из неравенства

$$\left\| \sum_{k=p}^{p+s} \xi_k g_k \right\|^2 = \sum_{j,\, k=p}^{p+s} (g_k,\ g_j)\, \bar{\xi}_j \xi_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{L}} \sum_{k=p}^{p+s} |\xi_k|^2$$

вытекает сходимость построенного ряда (6).

Обозначим сумму ряда (6) буквой g. Тогда

$$(g - h,\ f_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

откуда в силу замкнутости системы $\{f_k\}_1^{\infty}$ следует, что $g = h$, и представление (5) доказано.

Таким образом, последовательность $\{g_k\}_1^{\infty}$ является базисом пространства H. Отсюда, в частности, следует полнота последовательности $\{g_k\}_1^{\infty}$ в H.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что данная последовательность $\{f_k\}_1^{\infty}$ также является базисом.

Так как все собственные значения матрицы (1) лежат в интервале $[\mathscr{L},\ \mathscr{M}]$, то при любом натуральном n и любых числах η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будет

$$\mathscr{L} \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 \leqslant \sum_{j,\, k=1}^{n} (f_k,\ f_j)\, \bar{\eta}_j \eta_k \leqslant \mathscr{M} \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2. \tag{7}$$

Взяв элемент $h \in \mathrm{H}$, определим числа η_k формулами

$$\eta_k = (h,\ g_k)$$

и построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f_k.$$

Пользуясь неравенствами (7), докажем, как и выше, сходимость этого ряда, а пользуясь доказанной полнотой последовательности $\{g_k\}_1^{\infty}$, установим равенство

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f_k.$$

Единственность этого представления очевидна.

Таким образом, данная последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ является базисом пространства H, и теорема доказана полностью.

Сделаем еще несколько заключительных замечаний.

Тот факт, что некоторая последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset H$ является базисом в H, приводит к выводу, что каждому вектору $h \in H$ с помощью представления

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \tag{8}$$

можно однозначно отнести некоторую числовую последовательность $\{c_k\}_1^\infty$, т. е. точку некоторого бесконечномерного пространства. Если базис $\{f_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям нашей теоремы, т. е. при любом n и любых c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют место неравенства

$$\mathcal{L} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} (f_k, f_j) \bar{c}_j c_k \leqslant \mathcal{M} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \quad (0 < \mathcal{L},\ \mathcal{M} < \infty),$$

то необходимым и достаточным условием для сходимости ряда (8) является сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае каждому элементу $h \in H$ относится точка $\{c_k\}_1^\infty \in l^2$, и обратно. Взаимно однозначное отображение H на l^2, осуществляемое при помощи базиса, будет, вообще говоря, не изометрическим. Последнее имеет место, если базис ортонормированный. Вместо равенства Парсеваля, которое получается в случае изометрического отображения, мы получаем здесь двойное неравенство

$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \| h \|^2 \leqslant \mathcal{M} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (0 < \mathcal{L},\ \mathcal{M} < \infty).$$

Заметим, что базисы, в которых имеет место это неравенство, называются *базисами Рисса*.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ И ОГРАНИЧЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

17. Функции точки. В настоящей книге изучаются функции точки в пространстве Гильберта. При этом в полном соответствии с разделением функций элементарного анализа на скалярные функции и вектор-функции в H вводятся функции двух типов: так называемые функционалы и операторы. Приведем относящиеся сюда определения.

Пусть в пространстве H дано некоторое точечное множество D.

Всякую функцию Φ, которая каждой точке $f \in \mathrm{D}$ относит определенное число $\Phi(f)$, называют *функционалом* в пространстве H с областью определения D.

Всякую функцию T, которая каждому элементу $f \in \mathrm{D}$ относит некоторый элемент $Tf = g \in \Delta \subseteq \mathrm{H}$, называют *оператором*[1] в пространстве H с областью определения D и областью значений Δ, состоящей из всех $g = Tf$, где f пробегает все D.

Область определения функционала Φ, а также область определения и область значений оператора T обозначают D_Φ и соответственно D_T, Δ_T.

Тождественный оператор, т. е. оператор, переводящий каждый вектор в себя, будем обозначать I. Оператор, переводящий каждый вектор в нуль, обозначим 0.

Если оператор T двум различным элементам из D относит различные элементы, то T имеет обратный оператор, который элементам из Δ относит элементы из D. Обратный оператор обозначают символом T^{-1}. Таким образом,

$$\mathrm{D}_{T^{-1}} = \Delta_T, \quad \Delta_{T^{-1}} = \mathrm{D}_T.$$

Два функционала (или оператора) будем считать *равными*, если совпадают их области определения и если на каждом элементе из их области определения значения этих функционалов (операторов) совпадают.

---

[1] Иногда приходится рассматривать и такие функции, которые элементам пространства H относят элементы некоторого другого пространства Гильберта. Эти функции также называют операторами.

Если область определения D_T оператора T шире области определения D_S оператора S, т. е. $D_S \subset D_T$, и если

$$Tf = Sf$$

для любого элемента $f \in D_S$, то оператор T называют *расширением* оператора S и пишут

$$S \subset T.$$

Аналогично вводится понятие о расширении функционала.

Отправляясь от элементарного понятия о непрерывности функции, мы приходим к следующему определению непрерывности оператора: оператор T называется *непрерывным* в точке f_0 $(f_0 \in D_T)$, если

$$\lim_{f \to f_0} Tf = Tf_0 \qquad (f \in D_T);$$

последнее означает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из

$$\| f - f_0 \| < \delta, \quad f \in D_T$$

следует

$$\| Tf - Tf_0 \| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется непрерывность функционала.

Если элемент f_0 не принадлежит D_T, но существует $\lim Tf = g_0$ при $f \to f_0$ и $f \in D_T$, то оператор T можно определить на элементе f_0, полагая $Tf_0 = g_0$. Поступая точно так же со всеми элементами того же типа, что и f_0, мы приходим к так называемому *расширению по непрерывности* оператора T. Это расширение однозначно определяется оператором T.

Аналогично определяется расширение по непрерывности функционала.

Оператор T называется *ограниченным*, если в каждом шаре $\| f \| < R$ выполнено неравенство

$$\| Tf \| \leqslant C_R < \infty \qquad (f \in D_T).$$

Аналогично определяется ограниченный функционал.

Дальнейшие понятия, относящиеся к функционалам и операторам, мы будем вводить ниже в связи с так называемыми линейными функционалами и линейными операторами, которые явятся основным предметом нашего изучения.

Здесь же мы остановимся лишь на операторном аналоге функции от функции. Пусть даны два оператора: S и T. Пусть область значений второго оператора имеет общие точки с областью определения первого (т. е. пусть множество $\Delta_T \cap D_S$ непусто).

В таком случае можно говорить об операторе ST, который элемент f переводит в элемент

$$STf = S(Tf).$$

Этот оператор ST носит название *произведения операторов* S и T и его областью определения является совокупность всех тех $f \in \mathrm{D}_T$, для которых $Tf \in \mathrm{D}_S$. Аналогично вводится произведение TS, которое имеет смысл, если непусто множество $\Delta_S \cap \mathrm{D}_T$. Разумеется, операторы ST и TS, вообще говоря, различны, так как, вообще говоря, различны их области определения, и если даже существует элемент g, принадлежащий обеим областям определения, то может не иметь места равенство

$$STg = TSg.$$

Дать разумное общее определение перестановочности двух операторов затруднительно, и мы ограничимся здесь тем случаем, когда из двух операторов S, T по крайней мере один (пусть это будет S) определен всюду в H. В этом случае операторы S и T считают *перестановочными*, если

$$ST \subseteq TS,$$

т. е. если из включения $f \in \mathrm{D}_T$ следует как включение $Sf \in \mathrm{D}_T$, так и равенство

$$STf = TSf.$$

В частности, если оба оператора определены всюду в H, то перестановочность эквивалентна равенству $ST = TS$.

18. Линейный функционал. Функционал Φ называется *однородным* и *аддитивным*, если его область определения D есть линейное многообразие и если

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g),$$

каковы бы ни были комплексные числа α, β и элементы f, $g \in \mathrm{D}$.

Однородный и аддитивный функционал называется *линейным*, если он ограничен. Легко видеть, что свойство ограниченности для однородного и аддитивного функционала можно выразить неравенством

$$\sup_{f \in \mathrm{D},\, \|f\| \leq 1} |\Phi(f)| < \infty.$$

Стоящая в левой части этого неравенства величина носит название *нормы функционала* Φ и обозначается символом $\|\Phi\|_{\mathrm{D}}$, а если $\mathrm{D} = \mathrm{H}$, то просто $\|\Phi\|$.

Если $f \in D$, то, по определению нормы функционала,

$$\left|\Phi\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right| \leqslant \|\Phi\|_D,$$

откуда

$$|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\|_D \|f\|. \tag{1}$$

Соотношение (1) показывает, что *линейный функционал непрерывен.* Действительно, в силу (1)

$$|\Phi(f) - \Phi(f_0)| = |\Phi(f - f_0)| \leqslant \|\Phi\|_D \|f - f_0\|$$

для любых $f, f_0 \in D$.

Из (1) следует также, что в соотношении

$$|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\|_D,$$

где $f \in D$ и $\|f\| \leqslant 1$, знак равенства не может иметь места при $\|f\| < 1$. Поэтому норма $\|\Phi\|_D$ может быть определена равенством

$$\sup_{f \in D,\ \|f\|=1} |\Phi(f)| = \|\Phi\|_D \tag{2}$$

или, то же самое, равенством

$$\sup_{f \in D} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|} = \|\Phi\|_D. \tag{2'}$$

Если Φ, Ψ — два линейных функционала с областями определения D_Φ, D_Ψ, то $\alpha\Phi + \beta\Psi$, где α, β — константы, является также линейным функционалом с областью определения $D_\Phi \cap D_\Psi$ (конечно, представляет интерес лишь тот случай, когда $D_\Phi \cap D_\Psi$ содержит точки, отличные от $f = 0$).

Если функционал Φ однороден и аддитивен и если он непрерывен хотя бы в одной точке $f_0 \in D$, то он ограничен и поэтому является линейным функционалом.

Действительно, в силу непрерывности функционала в точке f_0

$$|\Phi(h) - \Phi(f_0)| \leqslant \delta$$

при $\|h - f_0\| \leqslant \varepsilon$ и $h \in D$. А так как для произвольного $f \in D$, $f \neq 0$,

$$\Phi(f) = \frac{\|f\|}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{\varepsilon f}{\|f\|}\right) = \frac{\|f\|}{\varepsilon}\left\{\Phi\left(\frac{\varepsilon f}{\|f\|} + f_0\right) - \Phi(f_0)\right\}$$

и вектор $\frac{\varepsilon f}{\|f\|} + f_0 = h$ удовлетворяет соотношению $\|h - f_0\| = \varepsilon$, то

$$|\Phi(f)| \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon} \|f\|;$$

иными словами,

$$\frac{|\Phi(f)|}{\|f\|} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon},$$

что и доказывает наше утверждение.

Если линейное многообразие D, на котором задан линейный функционал Ф, не замкнуто, то Ф можно расширить на замыкание многообразия D. Это расширение, как легко видеть, приводит к линейному функционалу с той же нормой, что и у исходного функционала.

Легко привести примеры однородных и аддитивных, но не ограниченных функционалов. В $L^2(-\infty, \infty)$ таким примером может служить функционал

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt, \tag{3}$$

определенный на линейном многообразии D всех тех элементов $f \in L^2(-\infty, \infty)$, для которых правая часть (3) имеет смысл. Родственный пример в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H представляет функционал

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty}(f,\ e_1 + e_2 + \cdots + e_n),$$

где $\{e_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в H.

В обоих примерах область определения функционала плотна в пространстве, но не совпадает со всем пространством. Однако не следует думать, что неограниченность функционала (однородного и аддитивного) не может иметь места, если он определен во всем пространстве.

Доказательство этого утверждения мы проведем с помощью следующей конструкции.

Возьмем единичную сферу[1] $S \subset H$ и, пользуясь трансфинитной индукцией, перенумеруем все элементы этой сферы. Затем построим множество $M \subset S$, отнеся к нему первый элемент S, а затем последовательно каждый элемент S, который не является конечной линейной комбинацией предшествующих ему элементов из M. Так как каждому элементу $h \neq 0$ из H отвечает элемент $\frac{1}{\|h\|}h$ сферы S, то каждый элемент $h \neq 0$ однозначно представим в виде конечной линейной комбинации элементов из M. Теперь произвольно выделим из M бесконечную последовательность элементов $\{g_n\}_1^\infty$ и положим $\Phi(g_n) = n$, а на остальных элементах $g \in M$ определим Ф произвольным образом. Кроме того, положим $\Phi(0) = 0$. В силу однозначной представимости любого элемента $h \in H$ в виде

$$h = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \qquad (f_k \in M,\ m < \infty),$$

[1] $S = S(1, 0)$ (см. n° 4).

функционал Φ по формуле

$$\Phi(h) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi(f_k)$$

продолжается на все пространство. При этом он будет однородным и аддитивным, но не ограниченным.

19. Теорема Ф. Рисса устанавливает общий вид линейного функционала в H и гласит: *всякий линейный функционал в гильбертовом пространстве* H *имеет вид*

$$\Phi(h) = (h, f),$$

где f — *некоторый элемент из* H, *однозначно определяемый функционалом* Φ; *при этом*

$$\| \Phi \| = \| f \|.$$

Доказательство. Обозначим через G множество всех тех элементов $g \in H$, для которых

$$\Phi(g) = 0.$$

В силу линейности функционала Φ это множество есть линейное многообразие. Оно замкнуто и, значит, является подпространством. Действительно, если $g_n \to g$, то в силу непрерывности функционала

$$\Phi(g) = \lim_{n \to \infty} \Phi(g_n),$$

поэтому из $\Phi(g_n) = 0$ (т. е. из $g_n \in G$) вытекает, что $\Phi(g) = 0$, т. е. $g \in G$.

Если $G = H$, то функционал Φ всюду равняется нулю, и для доказательства теоремы Рисса надлежит принять $f = 0$. Предположим поэтому, что $G \neq H$. В таком случае существует отличный от нуля элемент $f_0 \in H \ominus G$. Рассмотрим элементы вида

$$\Phi(h) f_0 - \Phi(f_0) h,$$

где h пробегает H. Эти элементы принадлежат G, так как

$$\Phi[\Phi(h) f_0 - \Phi(f_0) h] = \Phi(h) \Phi(f_0) - \Phi(f_0) \Phi(h) = 0.$$

Следовательно,

$$(\Phi(h) f_0 - \Phi(f_0) h, \ f_0) = 0,$$

откуда

$$\Phi(h)(f_0, f_0) - (h, \overline{\Phi(f_0)} f_0).$$

Если положим

$$f = \frac{\overline{\Phi(f_0)}}{(f_0, f_0)} f_0,$$

то из полученного равенства будет вытекать, что

$$\Phi(h) = (h, f).$$

Это и есть требуемое представление функционала.

Докажем, что оно единственно. Допуская противное, придем к равенству

$$(h, f') = (h, f''),$$

верному для любого $h \in H$, где f', f'' — два различных вектора. Но это невозможно, так как стоит лишь взять $h = f' - f''$, и мы получим

$$\| f' - f'' \|^2 = 0.$$

Остается доказать, что

$$\| \Phi \| = \| f \| .$$

Так как

$$\Phi(h) = (h, f),$$

то

$$|\Phi(h)| \leqslant \| h \| \cdot \| f \|$$

и, значит,

$$\| \Phi \| \leqslant \| f \| .$$

С другой стороны, беря $h = f$, получим

$$\Phi(f) = \| f \|^2,$$

откуда следует, что

$$\| \Phi \| \geqslant \| f \| .$$

Таким образом, теорема Ф. Рисса доказана.

Положим теперь, что в H задан линейный функционал Ψ с замкнутой областью определения D_Ψ. Так как D_Ψ является подпространством пространства H, то по доказанной теореме Ф. Рисса однозначно определяется такой элемент $g \in D_\Psi$, что

$$\Psi(h) = (h, g) \qquad (h \in D_\Psi) \tag{1}$$

и

$$\| \Psi \|_{D_\Psi} = \| g \| .$$

Равенством (1) линейный функционал Ψ расширяется на все пространство H и притом без увеличения нормы[1]. Всякое другое расширение линейного функционала Ψ на все пространство H уже

[1] Так как всякий линейный функционал может быть расширен на все пространство без увеличения нормы, то обычно, говоря о линейном функционале в H, принимают, что областью определения этого линейного функционала является все пространство.

увеличит норму функционала. Действительно, если Φ есть расширение Ψ на все пространство, то

$$\Phi(h) = (h, f)$$

и

$$\| \Phi \| = \| f \| .$$

При $h \in D_\Psi$ должно иметь место равенство

$$(h, g) = (h, f),$$

откуда видно, что $f - g \perp D_\Psi$. А так как $g \in D_\Psi$, то

$$\| f \|^2 = \| g \|^2 + \| f - g \|^2$$

и, значит,

$$\| \Phi \| \geqslant \| \Psi \|_{D_\Psi},$$

причем знак равенства не имеет места, если $f \neq g$.

20. Критерий замкнутости в H заданной системы векторов. Систему векторов M из H называют, как было указано в n° 9, замкнутой в H, если любой вектор $h \in$ H можно с любой степенью точности аппроксимировать линейной комбинацией векторов, принадлежащих M.

Теорема. *Для того чтобы система* M *была замкнутой в* H, *необходимо и достаточно, чтобы всякий линейный функционал* Φ *в* H, *обращающийся в нуль на любом векторе* $g \in$ M, *равнялся нулю тождественно.*

Доказательство. Первая часть теоремы есть непосредственное следствие непрерывности линейного функционала.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, допустим, что система не замкнута, т. е. существует такой вектор $h_0 \in$ H, для которого

$$\inf_{n, \alpha_i} \| h_0 - \alpha_1 g_1 - \alpha_2 g_2 - \ldots - \alpha_n g_n \| = \delta > 0 \qquad (g_i \in \mathrm{M}).$$

Обозначим через G замкнутую линейную оболочку системы M. На основании n° 6 в G существует такой вектор g, что

$$\| h_0 - g \| = \delta.$$

Положим

$$f = h_0 - g,$$

так что $f \perp$ G. Теперь возьмем функционал

$$\Phi(h) = (h, f),$$

норма которого равна $\| f \| = \delta > 0$. Этот отличный от нуля функционал обращается в нуль на любом векторе из G и, в частности, на любом векторе из M.

Тем самым вторая часть теоремы также доказана.

21. Одна лемма относительно выпуклых функционалов[1].

Определение. *Заданный в* H *вещественный функционал* $p(h)$ *называется выпуклым, если*

$$1)\quad p(f+g)\leqslant p(f)+p(g)$$

и

$$2)\quad p(\alpha f)=|\alpha|\,p(f),$$

каковы бы ни были $f, g \in$ H *и каково бы ни было комплексное число* α.

Из этого определения вытекает, что выпуклый функционал не принимает отрицательных значений. Действительно,

$$0=p(f-f)\leqslant p(f)+p(-f)=2p(f).$$

Заметим также, что если выпуклый функционал $p(h)$ ограничен в единичном шаре, т. е.

$$\sup_{\|h\|<1} p(h)=\mathcal{M}<\infty,$$

то

1) при любом $h\in$ H имеет место неравенство

$$p(h)\leqslant \mathcal{M}\,\|h\|$$

и

2) функционал полунепрерывен сверху, т. е. для любого $h_0\in$ H и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что при $\|h-h_0\|<\delta$ имеет место неравенство

$$p(h)-p(h_0)<\varepsilon.$$

Первое утверждение является тривиальным следствием условия 2) из определения выпуклого функционала.

Второе вытекает из неравенства

$$p(h)\leqslant p(h_0)+p(h-h_0)\leqslant p(h_0)+\mathcal{M}\,\|h-h_0\|,$$

которое показывает, что в качестве δ можно принять $\frac{1}{\mathcal{M}}\varepsilon$.

Примерами выпуклых функционалов являются абсолютное значение линейного функционала $|\Phi(h)|$, а также норма элемента $\|h\|$.

Лемма (И. М. Гельфанд). *Если выпуклый функционал* $p(h)$ *полунепрерывен снизу, т. е. для любого* $h_0\in$ H *и любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta>0$, *что*

$$p(h)-p(h_0)>-\varepsilon$$

[1] В настоящем пункте мы следуем И. М. Гельфанду. См. его статью «Об одной лемме теории линейных пространств», (сообщ. Харьк. мат. о-ва сер. 4, 1936, т. XIII, с. 35—40).

при $\| h - h_0 \| < \delta$, *то функционал* $p(h)$ *ограничен в единичном шаре, а следовательно, полунепрерывен сверху и поэтому просто непрерывен.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если функционал $p(h)$ не ограничен в шаре $K(1, 0)$, то он не будет ограничен ни в каком шаре $K(\rho, g)$. Действительно, допуская, что $p(h) < C$ при $h \in K(\rho, g)$, найдем, что при $\| h - g \| < \rho$ имеет место неравенство

$$p(h-g) \leqslant p(h) + p(-g) = p(h) + p(g) < 2C.$$

Пусть теперь $f \in K(1, 0)$. Полагая $h = g + \rho f$, так что $\| h - g \| < < \rho$, найдем, что

$$p(f) = \frac{1}{\rho} p(h-g) < \frac{2C}{\rho}$$

и, следовательно, функционал $p(h)$ ограничен в шаре $K(1, 0)$.

Для доказательства леммы предположим, что она неверна. Тогда найдется точка $f_1 \in K(1, 0)$ такая, что $p(f_1) > 1$. На основании полунепрерывности снизу функционала $p(h)$ найдется шар $K(\rho_1, f_1) \subset K(1, 0)$ $\left(\text{с радиусом } \rho_1 < \frac{1}{2}\right)$, во всех точках которого выполняется неравенство $p(h) > 1$. В силу неограниченности функционала $p(h)$ в этом шаре существует точка f_2, а затем и целый шар $K(\rho_2, f_2) \subset K(\rho_1, f_1)$ $\left(\text{с радиусом } \rho_2 < \frac{1}{2}\rho_1\right)$, в которых $p(h) > 2$. Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность шаров

$$K(1, 0) \supset K(\rho_1, f_1) \supset K(\rho_2, f_2) \supset \cdots$$

таких, что $\rho_n < \frac{1}{2}\rho_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots; \ \rho_0 = 1)$, причем $p(h) > n$, если $h \in K(\rho_n, f_n)$. Но последовательность центров $\{f_n\}_1^\infty$ фундаментальна и, значит, сходится к некоторому элементу f.

При этом $p(f) > n$, каково бы ни было n, что невозможно. Таким образом, лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $p_k(h)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *есть последовательность выпуклых и непрерывных функционалов в* H. *Если эта последовательность ограничена в каждой точке* $h \in$ H, *то*

$$p(h) = \sup_n p_n(h)$$

есть также выпуклый и непрерывный функционал.

Доказательство. То, что $p(h)$ есть выпуклый функционал, очевидно. С другой стороны, при фиксированном $h_0 \in$ H и любом $\varepsilon > 0$ можно найти N так, чтобы

$$p(h_0) - p_N(h_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем можно найти такое $\delta > 0$, что

$$|p_N(h) - p_N(h_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $\| h - h_0 \| < \delta$. Но в таком случае при $\| h - h_0 | < \delta$

$$p(h) - p(h_0) > \sup_n p_n(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant p_N(h) - p_N(h_0) - \frac{\varepsilon}{2} >$$
$$> -\varepsilon$$

и, значит, функционал $p(h)$ полунепрерывен снизу. Теперь остается применить лемму.

В дальнейшем понадобится частный случай этого следствия. Мы выделим его как отдельное предложение.

Следствие 2. *Если линейные функционалы* $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ *в пространстве* H *таковы, что при любом* $h \in$ H *числовая последовательность* $\{\Phi_k(h)\}_1^\infty$ *ограничена, то и последовательность норм* $\{\|\Phi_k\|\}_1^\infty$ *рассматриваемых функционалов ограничена.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$p_k(h) = |\Phi_k(h)| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются выпуклыми и непрерывными функционалами в H. В силу следствия 1 будет выпуклым непрерывным функционалом и

$$p(h) = \sup_n |\Phi_n(h)|.$$

Значит, при некотором $\mathcal{M} < \infty$ и любом $h \in$ K(1, 0)

$$\sup_n |\Phi_n(h)| \leqslant \mathcal{M},$$

откуда следует

$$\|\Phi_k\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} |\Phi_k(h)| \leqslant \mathcal{M}.$$

Дадим два простых применения доказанных предложений. На основании теоремы Ф. Рисса мы знаем, что всякий линейный функционал $L^2(a, b)$ имеет вид

$$\Phi(h) = \int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ есть функция из $L^2(a, b)$, порождающая функционал $\Phi(h)$.

Теперь мы можем доказать, что *если некоторый функционал* $\Phi(h)$ *определен всюду в* $L^2(a, b)$ *при помощи формулы* (1), *где* $\varphi(t)$ — *какая-то фиксированная функция, о которой известно лишь, что она измерима, то* $\varphi(t) \in L^2(a, b)$, *а следовательно,* (1) *есть линейный функционал в* $L^2(a, b)$.

Этот факт является частным случаем более общей теоремы Ф. Рисса[1].

Для доказательства обозначим через $\mathscr{E}_n$ множество точек $t \in [a, b] \cap (-n, n)$, в которых $|\varphi(t)| \leqslant n$, и положим

$$\Phi_n(h) = \int_{\mathscr{E}_n} h(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Это линейный функционал в $L^2(a, b)$ с нормой

$$\|\Phi_n\| = \left\{\int_{\mathscr{E}_n} |\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}.$$

Так как при любом $h \in H$ числовая последовательность $\{\Phi_k(h)\}_1^\infty$ сходится и поэтому ограничена, то, в силу следствия 2, ограничена последовательность норм $\{\|\Phi_k\|\}_1^\infty$, а отсюда вытекает (в силу леммы Фату), что

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt < \infty.$$

Аналогичное предложение справедливо относительно пространства l^2. Ограничимся его формулировкой.

Пусть некоторый функционал $\Phi(x)$ определен всюду в l^2 с помощью формулы

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \qquad (x = \{x_k\}_1^\infty), \tag{2}$$

где $\{a_k\}_1^\infty$ есть какая-то фиксированная последовательность. В таком случае $\{a_k\}_1^\infty \in l^2$, и, следовательно, $\Phi(x)$ есть линейный функционал в l^2.

Этот факт является частным случаем более общей теоремы Э. Ландау[2]

22. Ограниченный линейный оператор. Оператор T называется *линейным*, если его область определения D есть линейное многообразие и

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$$

для любых $f, g \in D$ и любых комплексных α, β.

---

[1] Относящейся к пространству L^p при любом $p > 1$ и гласящей: если интеграл (1) существует при любой функции $h(t) \in L^p(a, b)$, то $\varphi(t) \in L^q(a, b)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[2] Относящейся к пространству l^p при любом $p > 1$ и гласящей: если ряд (2) сходится для любой последовательности $\{x_k\}_1^\infty \in l^p$, то $\{a_k\}_1^\infty \in l^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Подчеркнем, что в отличие от определения линейного функционала это определение не содержит требования об ограниченности оператора. Различие вызвано тем, что многие важные операции анализа, например, операция дифференцирования, порождают операторы неограниченные, но однородные и аддитивные, т. е. линейные в смысле данного здесь определения.

В соответствии с общим определением ограниченности оператора (см. n° 17) линейный оператор T назовем ограниченным, если

$$\sup_{f \in \mathrm{D},\ \|f\| \leqslant 1} \| Tf \| < \infty.$$

Стоящую в левой части этого неравенства величину называют *нормой оператора* T в D и обозначают символом $\| T \|_D$ или $\| T \|$.

Легко видеть, что на ограниченные линейные операторы переносятся положения n° 18, относящиеся к линейным функционалам:

1. Норма ограниченного линейного оператора T может быть определена равенствами

$$\| T \| = \sup_{f \in \mathrm{D},\ \|f\|=1} \| Tf \| = \sup_{f \in \mathrm{D}} \frac{\| Tf \|}{\| f \|}.$$

2. Ограниченный линейный оператор непрерывен.

3. Если линейный оператор непрерывен в одной точке, то он ограничен.

4. Расширение по непрерывности ограниченного линейного оператора T приводит к линейному оператору с той же нормой, что и у исходного оператора.

5. Если S и T — линейные операторы, то $\alpha S + \beta T$, где α, β — комплексные числа, является линейным оператором с областью определения $\mathrm{D}_S \cap \mathrm{D}_T$. Линейным оператором является также каждое из произведений ST, TS (см. n° 17).

Если S, T — ограниченные линейные операторы, определенные всюду в H, то операторы ST, TS также являются ограниченными линейными операторами, определенными всюду в H. При этом

$$\| ST \| \leqslant \| S \| \cdot \| T \|, \qquad \| TS \| \leqslant \| T \| \cdot \| S \|.$$

Линейный оператор T в H будем называть *конечномерным*, если он ограничен и его область значений Δ_T есть конечномерное подпространство H.

Конечномерные операторы характеризуются следующим представлением:

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} (f, g_k)\, h_k, \tag{1}$$

где n — размерность Δ_T, $\{ h_k \}_1^n$ — какой-нибудь базис в Δ_T, а $\{ g_k \}_1^n$ — некоторая конечная система векторов, которые от f не зависят.

Докажем нетривиальную часть этого утверждения, а именно, что всякий конечномерный оператор T допускает представление (1). С этой целью выберем в Δ_T ортонормированный базис $\{h_k\}_1^n$. При любом $f \in \mathrm{H}$ будем иметь равенство

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k,$$

где α_k — числа, которые, очевидно, можно найти из соотношений

$$\alpha_k = (Tf,\ h_k).$$

Таким образом, α_k являются линейными функционалами от f и, следовательно, по теореме Ф. Рисса найдутся элементы g_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), через которые α_k представимы в виде

$$\alpha_k = (f,\ g_k).$$

Одномерные операторы, входящие в правую часть (1), записываются также в виде $(\cdot,\ g_k)\,h_k$, что приводит к следующему виду представления (1):

$$T = \sum_{k=1}^{n} (\cdot,\ g_k)\,h_k.$$

В заключение настоящего пункта введем понятие ортогональной суммы операторов. Пусть гильбертово пространство H представлено в виде ортогональной суммы своих подпространств:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2,$$

и пусть в подпространстве H_1 задан оператор T_1, а в подпространстве H_2 — оператор T_2, так что $D_{T_k} \subseteq \mathrm{H}_k$ и $\Delta_{T_k} \subseteq \mathrm{H}_k$ ($k = 1,\ 2$).

Ортогональной суммой операторов T_1 и T_2 называется оператор

$$T = T_1 \oplus T_2,$$

определенный в H на элементах вида $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in D_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$, $h_2 \in D_{T_2} \subseteq \mathrm{H}_2$, формулой

$$Th = T_1 h_1 + T_2 h_2.$$

23. Билинейный функционал. Будем говорить, что в H определен *билинейный функционал* Ω, если каждой паре элементов $f,\ g \in \mathrm{H}$ отвечает определенное (вообще говоря, комплексное) число $\Omega(f,\ g)$, причем

a) $\qquad \Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\ g) = \alpha_1 \Omega(f_1,\ g) + \alpha_2 \Omega(f_2,\ g),$

b) $\qquad \Omega(f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 \Omega(f,\ g_1) + \bar{\beta}_2 \Omega(f,\ g_2),$

c) $\qquad \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1,\ \|g\| \leqslant 1} |\Omega(f,\ g)| < \infty.$

Примером билинейного функционала является скалярное произведение (f, g).

Величина

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1, \|g\| \leqslant 1} |\Omega(f, g)|$$

носит название *нормы билинейного функционала* и обозначается символом $\|\Omega\|$.

Нетрудно убедиться, что

$$\|\Omega\| = \sup_{\|f\| = \|g\| = 1} |\Omega(f, g)| = \sup \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|}.$$

Поэтому для любых $f, g \in H$

$$|\Omega(f, g)| \leqslant \|\Omega\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|.$$

Билинейный функционал есть непрерывная функция от своих аргументов. Действительно,

$$|\Omega(f, g) - \Omega(f_0, g_0)| =$$
$$= |\Omega(f - f_0, g - g_0) + \Omega(f - f_0, g_0) + \Omega(f_0, g - g_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Omega\| \{\|f - f_0\| \cdot \|g - g_0\| + \|f - f_0\| \cdot \|g_0\| + \|f_0\| \cdot \|g - g_0\|\}.$$

Часто бывает полезно следующее простое предложение.

Теорема. *Если комплексная скалярная функция* $\omega(f, g)$ *удовлетворяет условиям*

a) $\omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \omega(f_1, g) + \alpha_2 \omega(f_2, g)$,

b) $\omega(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta}_1 \omega(f, g_1) + \overline{\beta}_2 \omega(f, g_2)$,

c) $|\omega(f, f)| \leqslant C \|f\|^2$,

d) $|\omega(f, g)| = |\omega(g, f)|$,

где C — *константа,* f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 — *произвольные элементы* H, *а* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — *произвольные числа, то* ω *есть билинейный функционал с нормой* $\|\omega\| \leqslant C$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что в силу a) и b)[1]

$$\omega(f, h) + \omega(h, f) = \frac{1}{2}\{\omega(f + h, f + h) - \omega(f - h, f - h)\}.$$

---

[1] Из этого равенства и аналогичного равенства

$$\omega(f, h) - \omega(h, f) = \frac{i}{2}\{\omega(f + ih, f + ih) - \omega(f - ih, f - ih)\}$$

в силу *одного* лишь условия c) следует, что ω есть билинейный функционал с нормой $\leqslant 2C$. Благодаря же условию d) устанавливается, что норма ω не превосходит C.

Значит,

$$|\omega(f, h) + \omega(h, f)| \leqslant \frac{1}{2} C \{ \|f + h\|^2 + \|f - h\|^2 \} = C \{ \|f\|^2 + \|h\|^2 \}. \tag{1}$$

Пусть $\|f\| \leqslant 1$, $\|h\| \leqslant 1$ и $h = \lambda g$, где λ — пока неопределенный параметр и $|\lambda| = 1$; тогда (1) дает

$$|\bar{\lambda}\omega(f, g) + \lambda\omega(g, f)| \leqslant 2C. \tag{2}$$

Предположим, что $\omega(f, g) \neq 0$, и пусть в согласии с d)

$$\omega(f, g) = |\omega(f, g)| e^{i\alpha}, \quad \omega(g, f) = |\omega(f, g)| e^{i\beta}.$$

Тогда в силу (2)

$$|\omega(f, g)| \cdot |\bar{\lambda} e^{i\alpha} + \lambda e^{i\beta}| \leqslant 2C.$$

Полагая

$$\lambda = e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}},$$

найдем, что

$$\bar{\lambda} e^{i\alpha} + \lambda e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

а значит,

$$|\omega(f, g)| \leqslant C \qquad (\|f\| \leqslant 1, \quad \|g\| \leqslant 1),$$

что и доказывает теорему, так как при $\omega(f, g) = 0$ это соотношение тоже верно.

Следствие. *Если билинейный функционал Ω удовлетворяет условию*

$$|\Omega(f, g)| = |\Omega(g, f)|$$

при любых $f, g \in \mathrm{H}$, то

$$\|\Omega\| = \sup_{f \in \mathrm{H}} \frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)}.$$

Доказательство. В силу только что доказанной теоремы

$$\|\Omega\| \leqslant \sup_{f \in \mathrm{H}} \frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)},$$

а, с другой стороны,

$$\sup_{f \in \mathrm{H}} \frac{|\Omega(f, f)|}{(f, f)} \leqslant \sup_{f, g \in \mathrm{H}} \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} = \|\Omega\|.$$

24. Общий вид билинейного функционала.

Теорема. *Всякий билинейный функционал* $\Omega(f, g)$ *в* H *имеет вид*

$$\Omega(f, g) = (Af, g), \tag{1}$$

где A *есть ограниченный линейный оператор в* H, *который однозначно определяется билинейным функционалом и для которого*

$$\|A\| = \|\Omega\|.$$

Доказательство. То, что подлежащее доказательству представление может быть только единственным, доказывается совсем просто. Действительно, если бы для любых $f, g \in$ H

$$\Omega(f, g) = (A'f, g), \quad \Omega(f, g) = (A''f, g),$$

то при любых $f, g \in$ H мы имели бы соотношение

$$(A'f - A''f, g) = 0,$$

откуда

$$A'f - A''f = 0,$$

т. е. $A' = A''$.

Для доказательства представления (1) зафиксируем f. Тогда величина $\overline{\Omega(f, g)}$ будет линейным функционалом от g, определенным всюду в H. Следовательно, по теореме Ф. Рисса (n° 19) существует элемент h, однозначно определяемый элементом f, для которого

$$\overline{\Omega(f, g)} = (g, h)$$

или

$$\Omega(f, g) = (h, g)$$

при любом $g \in$ H. Каждому $f \in$ H соответствует свой элемент h. Значит, $h = Af$ и

$$\Omega(f, g) = (Af, g).$$

Так как

$$\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 \Omega(f_1, g) + \alpha_2 \Omega(f_2, g),$$

то при любом $g \in$ H

$$(A\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} - \alpha_1 A f_1 - \alpha_2 A f_2, g) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности элемента $g \in$ H

$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A f_1 + \alpha_2 A f_2,$$

и линейность оператора A доказана.

Область определения оператора A есть все пространство. Далее, так как

$$|(Af, g)| \leqslant \|Af\| \cdot \|g\|,$$

то

$$\|\Omega\| = \sup \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} = \sup \frac{|(Af, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leqslant \sup \frac{\|Af\|}{\|f\|},$$

а, с другой стороны,

$$\|\Omega\| = \sup \frac{|(Af, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \geqslant \sup \frac{|(Af, Af)|}{\|f\| \cdot \|Af\|} = \sup \frac{\|Af\|}{\|f\|}.$$

Эти соотношения показывают, что оператор A ограничен и что

$$\|\Omega\| = \|A\|.$$

25. Сопряженный оператор. Пусть A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в H. Выражение (f, Ag) есть, очевидно, билинейный функционал от f, g с нормой $\|A\|$. По доказанной в предыдущем пункте теореме однозначно найдется ограниченный линейный оператор A^*, определенный всюду в H, для которого

$$(f, Ag) = (A^*f, g), \tag{1}$$

каковы бы ни были $f, g \in$ H; при этом $\|A^*\| = \|A\|$.

Итак, каждому ограниченному линейному оператору A, определенному всюду в H, отвечает аналогичный оператор A^*, с той же нормой и такой, что для любых $f, g \in$ H имеет место (1). Этот оператор A^* носит название оператора, сопряженного с A. Легко видеть, что $(A^*)^* = A^{**}$ есть исходный оператор A.

Если $A^* = A$, то оператор A называется *самосопряженным* оператором и тогда скалярное произведение (Af, f) при любом $f \in$ H вещественно.

Ограниченный линейный оператор A, определенный всюду в H, называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, т. е. если

$$A^*A = AA^*.$$

Пусть A, B — два ограниченных линейных оператора, определенных всюду в H. В таком случае

$$(ABf, g) = (Bf, A^*g) = (f, B^*A^*g),$$

откуда следует, что

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Поэтому *произведение двух ограниченных самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор в том и только том случае, когда эти операторы перестановочны.*

Теорема. *Если A — ограниченный самосопряженный оператор, то*

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} |(Af, g)| = \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)|.$$

Иными словами, для ограниченного самосопряженного оператора A

$$\| A \| = \max \{ | \Lambda |, | \lambda | \},$$

где

$$\Lambda = \sup_{\|f\|=1} (Af, f), \quad \lambda = \inf_{\|f\|=1} (Af, f).$$

Доказательство. Билинейный функционал

$$\Omega(f, g) = (Af, g)$$

удовлетворяет соотношению

$$|\Omega(f, g)| = |\Omega(g, f)|.$$

Поэтому применимо следствие n°23 и теорема доказана.

Если $\lambda \geqslant 0$, т. е. при любом $f \in \mathrm{H}$ имеет место неравенство $(Af, f) \geqslant 0$, то ограниченный самосопряженный оператор A называется *положительным*; обычно это записывается в виде неравенства

$$A \geqslant 0.$$

Это понятие позволяет вводить неравенства между ограниченными самосопряженными операторами и, в частности, рассматривать *монотонные последовательности* таких операторов.

Отметим, что *если A — положительный оператор, то для любых $f, g \in \mathrm{H}$*

$$|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f)(Ag, g).$$

Действительно, форма (Af, g) порождает в этом случае квазискалярное произведение в H (см. n°3):

$$\langle f, g \rangle \equiv (Af, g),$$

и написанное неравенство есть просто неравенство Коши—Буняковского.

Следующее простое предложение (лемма 1), основанное на рассмотрениях настоящего пункта, устанавливает общий вид ограниченного линейного оператора, определенного всюду в L^2.

Лемма 1. *Каждому линейному ограниченному оператору T в $\mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$ отвечает функция $G(s, t)$, принадлежащая для любого $s \in (-\infty, \infty)$ пространству $\mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$ по переменной t и обладающая следующими свойствами:*

1° *для почти всех* t

$$G(0,\ t) = 0;$$

2° *для любого* $s \in (-\infty,\ \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(s,\ t)|^2\, dt < M^2 |s|,$$

где M — норма оператора T;

3° *для любой функции* $f(t) \in \mathrm{L}^2$ *почти всюду на оси* s

$$(Tf)(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} G(s,\ t) f(t)\, dt.$$

Доказательство. Обозначим через $e_s(t)$ функцию, равную $\operatorname{sign} s$, если t лежит между 0 и s, и равную 0, если t не принадлежит этому интервалу. В таком случае для любой функции $f(t) \in \mathrm{L}^2$

$$\int_0^s (Tf)(t)\, dt = (Tf,\ e_s) = (f,\ T^* e_s),$$

и поэтому $T^* e_s = \overline{G_s(t)} = \overline{G(s,\ t)}$, где $G(s,\ t)$ есть та функция, существование которой утверждается леммой 1.

Функция $G(s,\ t)$, как это вытекает из формулировки леммы 1, может быть изменена при любом s на множестве меры нуль оси t. Оказывается, что с помощью такого изменения можно получить функцию, измеримую на плоскости. Это утверждение получается как частный случай из следующего предложения.

Лемма 2. *Пусть $G(s,\ t) = G_s(t)$ как функция от t принадлежит L^2 при любом $s \in (-\infty,\ \infty)$ и пусть для любой функции $f(t) \in \mathrm{L}^2$ интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s,\ t) f(t)\, dt \tag{2}$$

представляет измеримую функцию от s. В таком случае, изменяя $G(s,\ t)$ при каждом s на множестве меры нуль оси t, можно получить функцию, измеримую на плоскости $s,\ t$.

Полное доказательство этой леммы в настоящей книге не может быть изложено. Мы приведем лишь схему доказательства, отсылая читателя за обоснованием отдельных пунктов доказательства к книге Хилле и Филлипса «Функциональный анализ и полугруппы» (ИЛ, М., 1962). Прежде всего заметим, что $G_s(t)$ является вектор-функцией скалярного аргумента $s \in (-\infty,\ \infty)$. Условие об измеримости функции (2), какова бы ни была функция $f(t) \in \mathrm{L}^2$, означает так называемую *слабую измеримость*[1] вектор-функции $G_s(t)$. Так как

[1] См. Э. Хилле и Р. Филлипс, определение 3.5.4 (1)

область значений вектор-функции содержится в пространстве L^2, а потому сепарабельна, то из слабой измеримости вектор-функции $G_s(t)$ следует ее *сильная измеримость*[1]. Последнее означает[2], что существует последовательность счетнозначных[3] вектор-функций $\{g_s^{(n)}(t)\}_1^\infty$ и такое множество e меры нуль, что

$$\lim_{n\to\infty} \| G_s - g_s^{(n)} \| = 0 \tag{3}$$

равномерно при $s \in (-\infty, \infty)\setminus e$. Заметим теперь, что каждая из функций $g_s^{(n)}(t) = g^{(n)}(s, t)$ измерима по (s, t), и возьмем произвольное множество $E \subset \subset (-\infty, \infty)\setminus e$, имеющее конечную меру. Тогда из равномерности по s соотношения (3) будет следовать, что

$$\lim_{m,\ n\to\infty} \int_E \int_{-\infty}^{\infty} | g^{(n)}(s, t) - g^{(m)}(s, t) |^2 \, ds\, dt = 0.$$

Поэтому существует такая измеримая по (s, t) функция $g(s, t)$, что при любом множестве E конечной меры

$$\lim_{n\to\infty} \int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | g(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt = 0.$$

С другой стороны, из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} | g^{(n)}(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt,$$

где каждый интеграл представляет измеримую[4] функцию от s, следует, что

$$\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{s \in E} \| G_s - g_s^{(n)} \|^2 \operatorname{m\acute{e}s} E + 2 \int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | g(s, t) - g^{(n)}(s, t) |^2 \, dt.$$

Поэтому

$$\int_E ds \int_{-\infty}^{\infty} | G(s, t) - g(s, t) |^2 \, dt = 0.$$

---

[1] См. Э. Хилле и Р. Филлипс, теорема 3.5.3, следствие 2.

[2] Там же, теорема 3.5.3, следствие 1.

[3] Вектор-функция $g_s(t) \in L_t^2$ называется *счетно-значной*, если она принимает в L_t^2 не более счетного множества (векторных) значений и притом каждое значение — на измеримом множестве оси s. См. цит. книгу, определение 3.5.2 (3).

[4] В силу измеримости нормы измеримой вектор-функции с сепарабельной областью значений. См. цит. книгу, теорема 3.5.2.

Так как множество E произвольно, то для почти всех s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(s, t) - g(s, t)|^2 dt = 0,$$

и, значит, для почти всех t при каждом из почти всех s функция $G(s, t)$ совпадает с измеримой по (s, t) функцией $g(s, t)$. Отсюда и вытекает утверждение леммы.

26. Слабая сходимость в H. Будем говорить, что последовательность векторов $f_k \in \mathrm{H}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *слабо сходится* к вектору f и будем писать $f_k \xrightarrow{\text{сл.}} f$, если для любого $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, h) = (f, h).$$

Аналогично вводятся понятия о последовательностях, фундаментальных в слабом смысле (т. е. в смысле слабой топологии) и о слабой полноте[1].

Если последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ сходится к f в обычном смысле (или, как мы теперь будем говорить, *сходится сильно*), т. е. если

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \| = 0$$

(что мы будем по-прежнему записывать в виде $f_k \to f$), то она сходится и слабо к f, но обратного заключения сделать нельзя. В самом деле, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — какая-нибудь бесконечная ортонормированная последовательность векторов из H. Так как для любого $h \in \mathrm{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, e_k)|^2 \leqslant (h, h)$$

(см. n° 8), то при любом $h \in \mathrm{H}$

$$\lim_{k\to\infty} (e_k, h) = 0.$$

Последовательность $\{e_k\}_1^\infty$, таким образом, сходится слабо к вектору 0, но сильно эта последовательность не сходится, так как

$$\| e_k - e_i \|^2 = 2 \quad (i \neq k)$$

и, значит, $\| e_k - e_i \|$ не стремится к нулю при $i, k \to \infty$.

Однако справедлива

[1] Для вводимого таким способом понятия часто пользуются более точным термином: *секвенциально* слабая полнота.

Теорема 1. *Если последовательность векторов* $\{f_k\}_1^\infty$ *слабо сходится к вектору* f *и если*

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k \| = \| f \|,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \| = 0,$$

т. е. последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ *сходится и сильно к вектору* f.

Доказательство вытекает из равенства

$$\| f_k - f \|^2 = \| f_k \|^2 - (f_k, f) - (f, f_k) + \| f \|^2.$$

Действительно, в силу условия теоремы

$$\lim_{k\to\infty} \{\| f_k \|^2 - (f_k, f) - (f, f_k) + \| f \|^2\} = 0.$$

Возникает вопрос, является ли гильбертово пространство, которое по определению полно в смысле сильной сходимости, также полным и в смысле слабой сходимости. Положительный ответ на этот вопрос дает второе утверждение следующего предложения.

Теорема 2. *Всякая последовательность* $\{f_k\}_1^\infty$, *фундаментальная в смысле слабой сходимости,*

1) *ограничена*

и

2) *слабо сходится к некоторому вектору* $f \in$ H.

Доказательство. Каждый вектор f_k порождает функционал $\Phi_k(h) = (h, f_k)$. Числовая последовательность $\{\Phi_k(h)\}_1^\infty$ при любом $h \in$ H в силу условия теоремы сходится, а поэтому ограничена. Теперь для доказательства утверждения 1) достаточно применить следствие 2 п° 21, приняв во внимание, что $\| \Phi_k \| = \| f_k \|$.

Так как в силу уже доказанного утверждения 1) имеется такое $\mathcal{M} < \infty$, что

$$\| f_k \| < \mathcal{M} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то существующая при любом $h \in$ H величина

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(h)$$

есть линейный функционал $\Phi(h)$ с нормой $\leqslant \mathcal{M}$. По теореме Рисса $\Phi(h) = (h, f)$, где f — некоторый элемент пространства H. Этот элемент и является слабым пределом последовательности $\{f_k\}_1^\infty$. Таким образом, утверждение 2) также доказано.

Теорема 3. *Для слабой сходимости последовательности векторов* $\{g_k\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *последовательность*

$$(f,\ g_k)\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

сходилась при любом f *из некоторого плотного в* H *множества* M;

2) *последовательность* $\{g_k\}_1^\infty$ *была ограничена, т. е. имело место неравенство*

$$\|g_k\| \leqslant C < \infty \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доказательство. Необходимость условия 1) очевидна. Необходимость условия 2) представляет утверждение 1) теоремы 2.

Обратимся к доказательству достаточности. Поэтому примем, что оба условия выполнены. В силу 1) для любого $f \in$ M

$$\lim_{k,\ m\to\infty} (f,\ g_k - g_m) = 0.$$

А так как M плотно в H и в силу 2)

$$|(h,\ g_k - g_m)| \leqslant 2C\,\|h-f\| + |(f,\ g_k - g_m)|,$$

то и для любого $h \in$ H

$$\lim_{k,\ m\to\infty} (h,\ g_k - g_m) = 0,$$

т. е. последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ фундаментальна в смысле слабой сходимости. Остается воспользоваться слабой полнотой H.

27. Компактность. Точечное множество называется компактным[1], если из всякой принадлежащей ему последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В соответствии с двумя типами сходимости (сильной и слабой) можно говорить о *компактности сильной* (или просто компактности) и о *компактности слабой*.

Весьма важная теорема анализа — теорема Больцано — Вейерштрасса — устанавливает, что в конечномерном пространстве является компактным всякое бесконечное ограниченное множество точек. Эта теорема оказывается несправедливой для пространства Гильберта, если имеется в виду сильная сходимость. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять бесконечную ортонормированную последовательность векторов $\{e_k\}_1^\infty$. Это множество ограничено, но никакая его последовательность не является сильно сходящейся.

В связи со сказанным весьма замечательно, что имеет место следующая

Теорема 1. *Всякое ограниченное точечное множество в* H *слабо компактно.*

[1] Точнее, секвенциально компактным (см. примечание на с. 78)

Доказательство. Выберем какую-нибудь последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ точек, принадлежащих заданному ограниченному точечному множеству $\|g_k\| \leqslant C < \infty$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, и обозначим через L линейную оболочку множества $\{g_k\}_1^\infty$.

Возьмем теперь числовую последовательность

$$(g_1, g_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Она ограничена, так как

$$|(g_1, g_k)| \leqslant \|g_1\| \cdot \|g_k\| \leqslant C^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому последовательность (1) содержит сходящуюся подпоследовательность, иначе говоря, последовательность $\{g_k\}_1^\infty$ содержит подпоследовательность $\{g_{1k}\}_{k=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_1, g_{1k}).$$

Подобным образом, отправляясь от ограниченной числовой последовательности

$$(g_2, g_{1k}), \tag{2}$$

заключаем, что последовательность $\{g_{1k}\}_{k=1}^\infty$ содержит подпоследовательность $\{g_{2k}\}_{k=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_2, g_{2k}).$$

Повторяя эти рассуждения, получим бесконечный ряд последовательностей:

$$\begin{array}{l} g_{11}, g_{12}, g_{13}, \ldots, \\ g_{21}, g_{22}, g_{23}, \ldots, \\ g_{31}, g_{32}, g_{33}, \ldots, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

каждая из которых является подпоследовательностью для предыдущей. Диагональная последовательность

$$g_{11}, g_{22}, g_{33}, \ldots,$$

очевидно, обладает тем свойством, что при любом r существует

$$\lim_{k\to\infty} (g_r, g_{kk}).$$

Отсюда уже вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} (g, g_{kk})$$

существует при любом $g \subset \overline{\mathrm{L}}$.

Теперь положим

$$F = H \ominus \bar{L},$$

так что при любом $f \in F$

$$(f, g_{kk}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно, при любом $h \in H$ существует

$$\lim_{k \to \infty} (h, g_{kk}) = \lim_{k \to \infty} (g, g_{kk}),$$

где $h = f + g$ ($f \in F$, $g \in \bar{L}$).

Последовательность $\{g_{kk}\}_1^\infty$, таким образом, фундаментальна в смысле слабой сходимости. В силу слабой полноты пространства эта последовательность слабо сходится к некоторому элементу пространства H, что и доказывает нашу теорему.

Следующее предложение дает один простой признак сильной компактности.

Теорема 2. *Пусть* H *— сепарабельное пространство и* $\{e_k\}_1^\infty$ *— некоторый ортонормированный базис в нем. Пусть, далее,* M *— некоторое ограниченное множество элементов* f *из* H *и пусть, наконец, при любом* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $n = n(\varepsilon)$, *что для каждого* $f \in M$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \right\| < \varepsilon.$$

В таком случае множество M *компактно.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{f_j\}_1^\infty \subset M$. В силу ограниченности M из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что сама последовательность $\{f_j\}_1^\infty$ слабо сходится, и пусть $f \in H$ — ее слабый предел: $f_j \xrightarrow{\text{сл.}} f$. Мы докажем, что f_j стремится к f и в сильном смысле: $f_j \to f$, а потому M компактно.

Для любого $h \in H$ обозначим

$$h^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k.$$

Тогда, очевидно,

$$h^{(n)} \to h \quad (n \to \infty).$$

По условию теоремы, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $n = n(\varepsilon)$, что при всех j

$$\| f_j^{(n)} - f_j \| < \varepsilon.$$

Потребуем также, чтобы выполнялось неравенство

$$\| f^{(n)} - f \| < \varepsilon.$$

Выбрав таким образом n, возьмем столь большое $j(\varepsilon)$, чтобы при $j > j(\varepsilon)$ имело место неравенство

$$\| f_j^{(n)} - f^{(n)} \| < \varepsilon.$$

Это возможно благодаря слабой сходимости f_j к f.

В силу написанных неравенств, при $j > j(\varepsilon)$

$$\| f_j - f \| \leqslant \| f_j - f_j^{(n)} \| + \| f_j^{(n)} - f^{(n)} \| + \| f^{(n)} - f \| < 3\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $f_j \to f$.

Теорема доказана.

28. Один критерий ограниченности оператора.

Теорема. *Пусть линейный оператор A определен во всем пространстве и пусть существует второй линейный оператор (обозначим его A^*), также определенный во всем пространстве, для которого*

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

при любых f, $g \in H$. В таком случае оператор A ограничен и, следовательно, A^* есть сопряженный с ним оператор.

Доказательство. Допустим противное и предположим, что существует такая последовательность векторов $\{f_k\}_1^\infty$, что

$$\| f_k \| = 1, \quad \| Af_k \| > k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Величины

$$(g, Af_k) = \Phi_k(g) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются линейными функционалами в H. Так как

$$\Phi_k(g) = (A^*g, f_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то при любом $g \in H$ числовая последовательность $\{\Phi_k(g)\}_1^\infty$ ограничена. На основании следствия 2 п° 21 последовательность норм $\| \Phi_k \|$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, т. е. последовательность чисел $\| Af_k \|$, также ограничена, что противоречит предположению.

Таким образом, теорема доказана.

29. Линейный оператор в сепарабельном пространстве. В этом пункте мы будем рассматривать линейные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H и будем предполагать, что областью определения оператора является все пространство. Мы покажем, что ограниченные операторы этого рода допускают *матричное представление*, которое вполне аналогично известному из элементов линейной алгебры матричному представлению операторов в конечномерных пространствах.

Выберем в H какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ и положим

$$Ae_k = g_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$(Ae_k, e_j) = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Таким образом,

$$g_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Заметим, что если оператор A определен не всюду в H, а на плотном в H множестве D, то и тогда в H существует ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, элементы которого принадлежат D.

Введем бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = (a_{jk})_{j,\, k=1}^{\infty} = (a_{jk}),$$

элементами k-го столбца которой являются компоненты вектора, в который оператор A переводит k-й элемент базиса.

Если оператор A ограничен, то написанная бесконечная матрица (a_{jk}) вполне его определяет. Для доказательства нужно показать, как по матрице (a_{jk}) и ортонормированному базису $\{e_k\}_1^\infty$ восстановить оператор. Прежде всего мы должны положить

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как оператор A линеен, то по значениям на элементах базиса мы можем его восстановить на линейной оболочке базиса, т. е. на всех финитных векторах в рассматриваемом базисе. Значение оператора A на произвольном векторе $f \in$ H найдется в силу непрерывности оператора путем предельного перехода.

Нетрудно написать окончательные формулы для компонент вектора Af через компоненты вектора f; а именно, если

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \tag{2}$$

то

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k, \tag{3}$$

где

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j. \qquad (4)$$

Действительно, пусть

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k;$$

тогда

$$Af_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} e_k,$$

где

$$y_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j,$$

и в силу ограниченности оператора

$$y_k = (Af, e_k) = \lim_{n\to\infty} (Af_n, e_k) = \lim_{n\to\infty} y_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j.$$

Определение. *Если оператор A определен всюду в* H *и если его значение на любом векторе* (2) *дается формулами* (3) *и* (4), *то говорят, что оператор A допускает матричное представление в ортонормированном базисе* $\{e_k\}_1^{\infty}$.

Таким образом, мы установили, что *всякий ограниченный линейный оператор, определенный во всем пространстве, допускает матричное представление в любом ортонормированном базисе*, и в этом состоит упомянутая в самом начале настоящего пункта аналогия между сепарабельным пространством Гильберта и конечномерным пространством по отношению к ограниченным линейным операторам.

Теорема 1. *Если определенный всюду в сепарабельном пространстве* H *оператор A допускает матричное представление в каком-нибудь ортонормированном базисе, то он ограничен.*

Доказательство. Ряды

$$(Af, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

сходятся, по условию, для любого вектора

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j,$$

если $\{e_j\}_1^{\infty}$ есть упомянутый в теореме ортонормированный базис, в котором оператор A допускает матричное представление. Поэтому (см. конец п° 21) имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

а значит, выражения

$$\Phi_k(f) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

являются линейными функционалами в l^2 от

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

Положим

$$p_n(f) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(f)|^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(g) + \Phi_k(f)|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(g)|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(f)|^2},$$

$$p_n(\alpha f) = |\alpha| \, p_n(f)$$

и

$$p_n(f) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|\Phi_k\|^2} \, \|f\|,$$

то $p_n(f)$ — выпуклые и непрерывные функционалы от f. Поскольку же

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(f)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(Af, e_k)|^2 \leqslant \|Af\|^2,$$

то при любом $f \in \mathrm{H}$ последовательность $\{p_n(f)\}_1^{\infty}$ ограничена. На основании следствия 1 леммы о выпуклых функционалах (п° 21) функционал

$$p(f) = \sup_n p_n(f) = \lim_{n \to \infty} p_n(f) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_k(f)|^2} = \|Af\|$$

непрерывен, т. е. существует такая константа $\mathcal{M} < \infty$, что

$$p(f) \leqslant \mathcal{M} \|f\|.$$

Но это и означает, что оператор A ограничен.

Доказанная теорема может быть сформулирована также следующим образом: *если для любых* x_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big|^2 < \infty,$$

то существует такая константа $\mathcal{M}$, *что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big|^2 \leqslant \mathcal{M}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Это — обобщение на матричный случай теоремы Ландау для $p=2$ (см. п°21); последняя получается, если $a_{kj}=0$ при $k>1$.

Условимся писать

$$A \sim (a_{kj}),$$

если ограниченному линейному оператору A, определенному всюду в H, отвечает согласно (1) матрица (a_{jk}). При этом ортонормированный базис $\{e_k\}_1^{\infty}$ считается фиксированным. Если

$$A \sim (a_{jk}),\quad B \sim (b_{jk}),$$

то, как легко проверить,

$$AB \sim (c_{jk}),$$

где

$$c_{jk} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{jr} b_{rk} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

и, определяя при помощи этого равенства умножение матриц, можем написать, что

$$AB \sim (a_{jr})(b_{rk}).$$

Далее, если

$$A \sim (a_{jk})$$

и

$$A^* \sim (a^*_{jk}),$$

то

$$a^*_{jk} = \overline{a}_{kj} \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Поэтому условие самосопряженности ограниченного оператора имеет вид

$$a_{jk} = \bar{a}_{kj}. \tag{6}$$

Матрицы, для которых имеет место (6), называют *эрмитовыми* Билинейный функционал, порождаемый оператором A, имеет вид

$$(Af, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big) \bar{y}_k,$$

где

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k.$$

В написанной двойной сумме можно изменить порядок суммирования, ибо равенство

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j \Big) \bar{y}_k = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \bar{y}_k \Big) x_j.$$

Из неравенства

$$|(Af, g)| \leqslant \mathcal{M} \| f \| \cdot \| g \| \tag{7}$$

следует

$$\Big| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} x_j \bar{y}_k \Big| \leqslant \mathcal{M} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}.$$

Если векторы f и g финитны, то последнее неравенство обращается в

$$\Big| \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{jk} x_j \bar{y}_k \Big| \leqslant \mathcal{M} \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{q} |y_k|^2}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для того чтобы матрица* (a_{jk}) *представляла ограниченный линейный оператор, определенный всюду в* H, *необходимо и достаточно выполнение при любых конечных* p, q *и любых* $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_q$ *неравенства (8), где* $\mathcal{M}$ — *фиксированное число.*

Доказательство. Если оператор A ограничен и

$$a_{jk} = (Ae_k, e_j) \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то (8) следует из (7).

Пусть теперь дана матрица (a_{jk}), удовлетворяющая условию (8). Покажем, что матрица (a_{jk}) определяет ограниченный оператор A.

Прежде всего, из (8) при

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{p-1} = 0, \; x_p \neq 0,$$
$$y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0$$

получаем

$$\Big| \sum_{j=n}^{q} a_{jp}\bar{y}_j \Big| \leqslant \mathcal{M} \sqrt{\sum_{j=n}^{q} |y_j|^2},$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}\bar{y}_j$$

при любой последовательности $\{y_j\}_1^{\infty} \in l^2$. На основании теоремы Ландау (см. п°21) сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jp}|^2.$$

Так как это верно при любом p, то мы можем определить оператор A_0 на элементах базиса формулами

$$A_0 e_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а затем по линейности — на всех финитных векторах.

Докажем, что оператор A_0 ограничен.

Действительно, в силу (8) при любых финитных векторах f, g

$$|(A_0 f, g)| \leqslant \mathcal{M} \|f\| \cdot \|g\|. \tag{9}$$

На основании непрерывности скалярного произведения неравенство (9) выполняется для всех $g \in \mathrm{H}$. Полагая в (9) $g = A_0 f$, получим

$$\|A_0 f\|^2 \leqslant \mathcal{M} \|f\| \cdot \|A_0 f\|,$$

значит,

$$\|A_0 f\| \leqslant \mathcal{M} \|f\|,$$

и ограниченность оператора A_0 доказана.

Расширяя A_0 по непрерывности на все пространство H мы получаем ограниченный оператор A и $A \sim (a_{jk})$.

Теорема доказана.

Заметим, что если матрица (a_{jk}) эрмитова, т. е. $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, то условие (8) можно заменить (см. п°25) на

$$\Big| \sum_{j,\,k=1}^{p} a_{jk} x_k \bar{x}_j \Big| \leqslant \mathcal{M} \sum_{j=1}^{p} |x_j|^2.$$

30. Понятие о вполне непрерывном операторе. Важный класс операторов составляют так называемые *вполне непрерывные операторы*. Открытие и первое изучение этого класса принадлежит Гильберту.

Определение. *Заданный всюду в* H *линейный оператор* A *называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество точек во множество компактное в смысле сильной сходимости.*

Вполне непрерывный оператор ограничен. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность точек f_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, для которой

$$\| f_k \| = 1, \quad \| Af_k \| > k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

но множество точек $\{Af_k\}_1^\infty$ должно быть компактным, что явно невозможно.

Вполне непрерывные операторы допускают другое определение: заданный всюду в H линейный оператор A называется вполне непрерывным, если он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в последовательность сильно сходящуюся.

Доказательство эквивалентности этих определений предоставляем читателю.

Равным образом предоставляем читателю доказательство следующих простых фактов:

1. Если оператор A вполне непрерывен, а оператор B определен всюду в H и ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.

2. Если A_1, A_2 — вполне непрерывные операторы, то $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ также вполне непрерывный оператор.

Теорема 1. *Если* A *есть ограниченный линейный оператор, определенный всюду в* H, *и если оператор* A^*A *вполне непрерывен, то и оператор* A *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть M — какое-нибудь бесконечное ограниченное ($\| f \| < C$) множество точек f. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность элементов этого множества, которая оператором A^*A переводится в сходящуюся (сильно) последовательность.

Поскольку

$$\| Af_n - Af_m \|^2 = (A(f_n - f_m), A(f_n - f_m)) =$$
$$= (A^*A(f_n - f_m), f_n - f_m) \leqslant \| A^*Af_n - A^*Af_m \| \cdot \| f_n - f_m \|$$

и

$$\lim_{m, n \to \infty} \| A^*Af_n - A^*Af_m \| = 0,$$
$$\| f_n - f_m \| \leqslant 2C,$$

то

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \| Af_n - Af_m \| = 0,$$

т. е. последовательность $\{Af_n\}_1^\infty$ сходится, чем теорема и доказана.

Следствие. *Если оператор A вполне непрерывен, то тем же свойством обладает и оператор A^*.*

Действительно, если оператор A вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор $AA^* = (A^*)^*A^*$; остается применить только что доказанную теорему.

Для установления вполне непрерывности оператора часто оказывается полезной следующая

Теорема 2. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует вполне непрерывный оператор A_ε, который удовлетворяет неравенству*

$$\| A - A_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon,$$

то и оператор A вполне непрерывен[1].

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) и рассмотрим отвечающую ей в силу условия теоремы последовательность вполне непрерывных операторов $A_{\varepsilon_1}, A_{\varepsilon_2}, \ldots$ Пусть M — произвольное ограниченное множество точек f ($\|f\| \leqslant C$) нашего пространства H. Возьмем произвольную бесконечную последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ точек, принадлежащих M. По условию, из этой последовательности можно выделить последовательность

$$f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \ldots, \tag{1}$$

которая оператором A_{ε_1} переводится в сходящуюся последовательность. Из последовательности (1) выделим подпоследовательность

$$f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \ldots, \tag{2}$$

которая переводится в сходящуюся последовательность оператором A_{ε_2}. Продолжая этот процесс, получим бесконечный ряд последовательностей

$$\begin{array}{l} f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \ldots, \\ f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \ldots, \\ f_{31},\ f_{32},\ f_{33},\ \ldots, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

из которых каждая следующая является частью предыдущей. Диагональная последовательность $\{f_{kk}\}_1^\infty$ переводится в сходящую-

[1] Таким образом, множество вполне непрерывных операторов замкнуто в пространстве всех ограниченных линейных операторов, наделенном метрикой $D[A, B] = \| A - B \|$. Эту метрику называют *равномерной*.

ся каждым из операторов A_{ε_l}. Докажем, что диагональная последовательность $\{f_{kk}\}_1^\infty$ переводится в сходящуюся также и оператором A. Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \| Af_{nn} - Af_{mm} \| = 0. \tag{3}$$

Мы имеем неравенство

$$\| Af_{nn} - Af_{mm} \| \leqslant \| (A - A_{\varepsilon_k}) f_{nn} \| + \| (A - A_{\varepsilon_k}) f_{mm} \| + \\ + \| A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm} \| \leqslant 2C\varepsilon_k + \| A_{\varepsilon_k} f_{nn} - A_{\varepsilon_k} f_{mm} \|.$$

Беря достаточно большое k, мы можем сделать сколь угодно малым первый член правой части. После этого мы можем взять столь большое $\mathcal{N}$, чтобы второй член правой части сделался сколь угодно малым при $m > \mathcal{N}$, $n > \mathcal{N}$, и соотношение (3) доказано.

31. Абсолютная норма. Снова предположим, что пространство H сепарабельно, и возьмем ограниченный линейный оператор A, определенный всюду в этом пространстве. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_l\}_1^\infty$ — два произвольных ортонормированных базиса в H. Нас будет интересовать тот случай, когда

$$\sum_{l,\, k=1}^{\infty} |(Af_k,\, e_l)|^2 < \infty.$$

Так как $(Af_k,\, e_l)$ $(l = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$ представляют коэффициенты Фурье вектора Af_k в базисе $\{e_l\}_1^\infty$, то

$$\sum_{l,\, k=1}^{\infty} |(Af_k,\, e_l)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| Af_k \|^2. \tag{1}$$

С другой стороны, рассматривая скалярные произведения $(A^*e_l,\, f_k) = (e_l,\, Af_k)$ как коэффициенты Фурье вектора A^*e_l в базисе $\{f_k\}_1^\infty$, заключаем, что

$$\sum_{l,\, k=1}^{\infty} |(Af_k,\, e_l)|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \| A^*e_l \|^2. \tag{1'}$$

Из сравнения формул (1) и (1′) находим, что величина (конечная или бесконечная)

$$\sqrt{\sum_{l,\, k=1}^{\infty} |(Af_k,\, e_l)|^2} = N(A) \tag{2}$$

не зависит от выбора базисов $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_l\}_1^\infty$, а зависит лишь от оператора A. Эту величину называют *абсолютной нормой* оператора A. Из наших рассмотрений следует, что

$$N(A^*) = N(A). \tag{3}$$

Так как в качестве f_1 можно взять произвольный единичный вектор, а в силу (1)

$$\| Af_1 \| \leqslant N(A),$$

то

$$\| A \| \leqslant N(A),$$

т. е. *обычная норма оператора не превосходит его абсолютной нормы.*

Легко видеть также, что если C — произвольный ограниченный оператор, то

$$N(CA) \leqslant \| C \| \cdot N(A),$$

и потому, в силу (3), и

$$N(AC) \leqslant \| C \| \cdot N(A).$$

Абсолютная норма обладает основными свойствами нормы, и, в частности, для нее выполняется неравенство треугольника

$$N(A+B) \leqslant N(A) + N(B).$$

Действительно,

$$N(A+B) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \| Af_j + Bf_j \|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \{\| Af_j \| + \| Bf_j \|\}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \| Af_j \|^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \| Bf_j \|^2} = N(A) + N(B).$$

Так как $N(A)$ не зависит от выбора ортонормированных базисов $\{f_k\}_1^{\infty}$ и $\{e_j\}_1^{\infty}$, то мы могли бы их взять одинаковыми, и тогда в определении абсолютной нормы фигурировали бы числа

$$(Ae_k, e_j) = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

которые являются элементами матрицы, представляющей оператор A (см. п° 29) в базисе $\{e_j\}_1^{\infty}$.

Мы видим, таким образом, что операторы с конечной абсолютной нормой образуют довольно узкий класс — это операторы, допускающие матричное представление, для которого

$$\sum_{j, k=1}^{\infty} | a_{jk} |^2 < \infty.$$

Теорема. *Если $N(A) < \infty$, то оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\{g_k\}_1^\infty$ — какой-нибудь ортонормированный базис в H. Так как

$$N(A) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \| A^* g_k \|^2},$$

то при любом $\varepsilon > 0$ можно найти n_ε, для которого

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^* g_k \|^2 < \varepsilon^2.$$

Теперь введем оператор A_ε с помощью формулы

$$A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} (Af, g_k) g_k.$$

Этот оператор определен всюду в H. Он переводит любое ограниченное множество векторов $f \in H$ в ограниченное множество векторов конечномерного пространства (размерности n_ε). Это последнее множество компактно в силу классической теоремы Больцано — Вейерштрасса. Поэтому оператор A_ε вполне непрерывен. А так как при любом $f \in H$

$$\| Af - A_\varepsilon f \|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |(Af, g_k)|^2 = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |(f, A^* g_k)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| f \|^2 \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \| A^* g_k \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| f \|^2,$$

то применима теорема 2 n° 30. Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

Подчеркнем, что конечность абсолютной нормы или, что то же самое, сходимость ряда

$$\sum_{j,\,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2$$

является только достаточным, но не необходимым условием для вполне непрерывности матричного оператора. В частном случае, когда числа a_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$a_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad |j - k| > r \quad (j, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где r фиксировано, можно указать необходимое и достаточное условие вполне непрерывности. Оно состоит в том, что

$$\lim_{j,\,k \to \infty} a_{jk} = 0.$$

Для простоты проведем доказательство в предположении, что $r=1$. В этом случае определяющая оператор матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & \beta_4 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{4}$$

и носит название *матрицы Якоби* или *якобиевой матрицы*. При $r>1$ матрицу называют *обобщенной якобиевой матрицей*.

Пусть оператор A, порождаемый матрицей (4), вполне непрерывен. Последовательность векторов

$$Ae_j = \beta_{j-1}e_{j-1} + \alpha_j e_j + \gamma_j e_{j+1}$$
$$(\beta_0 = 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

должна, таким образом, сильно сходиться. Допуская, что подлежащее доказательству утверждение неверно, выделим последовательность $j_1,\ j_2,\ j_3,\ \ldots$ так, чтобы

$$j_k \geqslant j_{k-1} + 3$$

и

$$|\beta_{j_k-1}|^2 + |\alpha_{j_k}|^2 + |\gamma_{j_k}|^2 \geqslant \varepsilon > 0.$$

Простое вычисление показывает, что

$$\|Ae_{j_n} - Ae_{j_m}\|^2 = |\beta_{j_n-1}|^2 + |\alpha_{j_n}|^2 + |\gamma_{j_n}|^2 + \\ + |\beta_{j_m-1}|^2 + |\alpha_{j_m}|^2 + |\gamma_{j_m}|^2 \geqslant 2\varepsilon,$$

что противоречит сильной сходимости последовательности $\{Ae_k\}_1^\infty$.

Докажем вторую часть утверждения (достаточность). Пусть $|\alpha_k| + |\beta_k| + |\gamma_k| \to 0$ при $k \to \infty$, так что при любом $\varepsilon > 0$ существует натуральное q, для которого

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\quad |\beta_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\quad |\gamma_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\ (k \geqslant q).$$

Теперь представим оператор A в виде суммы двух операторов: $A = A' + A''$, где

$$A'f = \sum_{k=1}^{q} x_k Ae_k,\quad A''f = \sum_{k=q+1}^{\infty} x_k Ae_k,\quad \left(f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right).$$

Оператор A' конечномерен и поэтому вполне непрерывен, кроме того,

$$A''f = \sum_{k=q+1}^{\infty} x_k(\beta_{k-1}e_{k-1} + \alpha_k e_k + \gamma_k e_{k+1}),$$

поэтому

$$\|A''f\| \leqslant \sqrt{\sum_{k=q+1}^{\infty} |\beta_{k-1}|^2 |x_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=q+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 |x_k|^2} + \\ + \sqrt{\sum_{k=q+1}^{\infty} |\gamma_k|^2 |x_k|^2} \leqslant \varepsilon \sqrt{\sum_{k=q+1}^{\infty} |x_k|^2} \leqslant \varepsilon \|f\|,$$

откуда следует, что

$$\|A''\| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ существует вполне непрерывный оператор $A' = A_\varepsilon$ такой, что $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$. По теореме 2 п° 30 оператор A вполне непрерывен.

Таким образом, наше утверждение доказано.

32. Операторы Гильберта — Шмидта. Возьмем интегральный оператор в $L^2(-\infty, \infty)$, который определяется формулой

$$g = Kf = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\, dt.$$

Если

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, ds\, dt < \infty, \tag{1}$$

то ядро $K(s, t)$ называют *ядром Гильберта — Шмидта*, а порождаемый им оператор K — *интегральным оператором Гильберта — Шмидта*.

Примем, что условие (1) выполнено, и покажем, прежде всего, что оператор K является в этом случае определенным всюду в $L^2(-\infty, \infty)$ ограниченным оператором. Действительно, в силу теоремы Фубини и неравенства Коши — Буняковского, для почти всех s

$$|g(s)|^2 \leqslant \|f\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, dt.$$

Отсюда находим с помощью интегрирования, что

$$\|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2 \, ds\, dt$$

и, значит,

$$\|K\| \leqslant \sqrt{\int\int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)|^2 \, ds\, dt}. \tag{2}$$

Покажем теперь, что оператор K имеет конечную абсолютную норму, которая при этом совпадает с правой частью неравенства (2).

Для этого возьмем в $L^2(-\infty, \infty)$ какую-нибудь полную ортонормированную систему $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ в качестве базиса и вычислим элементы a_{jk} матрицы оператора K. Они равны

$$a_{jk} = (K\varphi_k, \varphi_j) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\overline{\Phi_{jk}(s, t)}\,ds\,dt, \tag{3}$$

где

$$\Phi_{jk}(s, t) = \varphi_j(s)\overline{\varphi_k(t)}. \tag{4}$$

Функции $\Phi_{jk}(s, t)$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2 \times L^2$ функций двух переменных с суммируемым квадратом модуля в плоскости s, t. Поэтому в силу уравнения замкнутости

$$N^2(K) \equiv \sum_{j,\,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2\,ds\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, что *интегральными операторами Гильберта — Шмидта исчерпывается весь класс операторов в* $L^2(-\infty, \infty)$, *имеющих конечную абсолютную норму.*

Действительно, пусть A — произвольный линейный оператор с конечной абсолютной нормой в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Возьмем ортонормированный базис (4) в $L^2 \times L^2$ и положим

$$K(s, t) \sim \sum_{j,\,k=1}^{\infty} (A\varphi_k, \varphi_j)\ \Phi_{jk}(s, t).$$

Ряд справа сходится в пространстве $L^2 \times L^2$ и

$$\sum_{j,\,k=1}^{\infty} |(A\varphi_k, \varphi_j)|^2 = N^2(A) < \infty.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty,$$

так что $K(s, t)$ является ядром Гильберта — Шмидта. Остается показать, что Af совпадает при любом $f \in L^2(-\infty, \infty)$ с

$$Kf = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(s, t) f(t)\,dt.$$

Но это следует из того, что при любых k, $j (= 1, 2, 3, \ldots)$

$$(K\varphi_k, \varphi_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_j(s)}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \varphi_k(t)\, dt =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} K(s, t)\, \overline{\Phi_{jk}(s, t)}\, ds\, dt = (A\varphi_k, \varphi_j).$$

Рассмотрения настоящего пункта дают основание называть *оператором Гильберта — Шмидта* всякий линейный оператор в сепарабельном пространстве, имеющий конечную абсолютную норму.

33. Сходящиеся последовательности ограниченных линейных операторов. Различают три вида сходимости последовательности $\{A_n\}_1^\infty$ ограниченных линейных операторов, определенных всюду в H: сходимость *слабую*, сходимость *сильную* (или просто сходимость) и сходимость *равномерную*.

Последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ называется

слабо сходящейся к оператору A $(A_n \xrightarrow{\text{сл.}} A)$	если для любого $f \in$ H $A_n f \xrightarrow{\text{сл.}} Af$
сильно сходящейся к оператору A $(A_n \to A)$	если для любого $f \in$ H $A_n f \to Af$
равномерно сходящейся к оператору A $(A_n \rightrightarrows A)$	если $\| A_n - A \| \to 0.$

Если последовательность операторов сходится равномерно, то она и тем более сходится сильно; если она сходится сильно, то и подавно сходится слабо.

Из слабой сходимости A_n к A и B_n к B следует слабая сходимость $A_n \pm B_n$ к $A \pm B$, но не следует слабая сходимость произведения $A_n B_n$.

Из равномерной (слабой) сходимости A_n к A следует равномерная (соответственно слабая) сходимость A_n^* к A^*; для сильной сходимости это уже неверно.

Теорема 1. *Если последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ ограниченных линейных операторов, определенных всюду в* H, *слабо сходится, то последовательность $\{\| A_n \|\}_1^\infty$ норм этих операторов ограничена.*

Действительно, $p_n(h) = \| A_n h \|$ есть выпуклый непрерывный функционал. В каждой точке $h \in$ H последовательность $\{p_n(h)\}_1^\infty$ ограничена в силу теоремы 2 n° 26, так как последовательность элементов $\{A_n h\}_1^\infty$ слабо сходится. Поэтому благодаря следствию 1 n° 21

$$\sup_n \| A_n h \| = p(h)$$

есть выпуклый непрерывный функционал и, значит,

$$p(h) \leqslant \mathcal{M} \| h \|,$$

а следовательно, при любом n

$$\| A_n h \| \leqslant \mathcal{M} \| h \|,$$

и поэтому

$$\| A_n \| \leqslant \mathcal{M}.$$

Теорема 2. *Если последовательность билинейных функционалов $\{\Omega_n(f, g)\}_1^\infty$ такова, что при любых f, g существует конечный предел*

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n(f, g) = \omega(f, g),$$

то этот предел есть билинейный функционал.

Как легко видеть, достаточно доказать, что при любых $f, g \in H$

$$\frac{|\omega(f, g)|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leqslant C < \infty.$$

Каждый билинейный функционал $\Omega_n(f, g)$ порождается некоторым ограниченным линейным оператором:

$$\Omega_n(f, g) = (A_n f, g).$$

Последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$, таким образом, слабо сходится. Следовательно,

$$|(A_n f, g)| \leqslant C \|f\| \cdot \|g\|,$$

т. е.

$$|\Omega_n(f, g)| \leqslant C \|f\| \cdot \|g\|$$

для всех $f, g \in H$. Отсюда и вытекает, что

$$|\omega(f, g)| \leqslant C \|f\| \cdot \|g\|.$$

В заключение докажем еще одно простое предложение, которое в дальнейшем найдет важное применение.

Теорема 3. *Всякая монотонно убывающая последовательность ограниченных положительных операторов сильно сходится.*

Доказательство. Пусть даны ограниченные самосопряженные операторы A_k $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие соотношениям

$$A_k \geqslant 0, \quad A_{k+1} \leqslant A_k.$$

Так как

$$A_m - A_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant m),$$

то при любых f, g

$$|((A_m - A_n) f,\ g)| \leqslant \sqrt{((A_m - A_n) f,\ f)} \sqrt{((A_m - A_n) g,\ g)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|A_1\|} \cdot \|g\| \cdot \sqrt{((A_m - A_n) f,\ f)}.$$

Беря

$$g = (A_m - A_n) f,$$

получим отсюда, что

$$\|(A_n - A_m) f\| \leqslant \sqrt{\|A_1\|} \sqrt{(A_m f,\ f) - (A_n f,\ f)}.$$

Так как числовая последовательность

$$(A_n f,\ f) \quad (n = 1,\ 2\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу (числом 0), то

$$\lim_{\substack{n > m \\ m \to \infty}} \sqrt{(A_m f,\ f) - (A_n f,\ f)} = 0,$$

откуда следует, что при любом $f \in \mathrm{H}$

$$\lim_{\substack{n > m \\ m \to \infty}} \|(A_n - A_m) f\| = 0.$$

Это равенство показывает, что при любом $f \in \mathrm{H}$ существует в сильном смысле

$$\lim_{n \to \infty} A_n f = h.$$

Полагая $h = Af$, без труда установим, что предельный оператор A линеен и ограничен.

Теорема доказана.

Замечание. Вместо положительности операторов достаточно потребовать равномерную ограниченность их снизу. Теорема очевидным образом формулируется для монотонно возрастающих последовательностей.

34. Множества ограниченных линейных операторов в сепарабельном пространстве Гильберта.

Теорема 1. *В сепарабельном пространстве* H *любое множество линейных операторов, нормы которых ограничены, слабо компактно (т. е. содержит слабо сходящуюся последовательность).*

Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — последовательность операторов с нормами $\|A_n\| < C$, а $\{f_i\}_1^\infty$ — последовательность элементов, плотная в H. Пользуясь теоремой 1 n° 27, выберем из последовательности $\{A_n\}_1^\infty$ часть $\{A_{1k}\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся на элементе[1] f_1, затем из нее часть $\{A_{2k}\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся на элементе f_2, и т. д. Далее построим диагональную последовательность $\{A_{kk}\}_1^\infty$ и дока-

[1] Это значит, что слабо сходится последовательность векторов $\{A_{1k} f_1\}_{k=1}^\infty$.

жем, что эта последовательность слабо сходится на любом элементе $f \in H$. С этой целью для произвольно взятого элемента f и произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\mathcal{N}$, чтобы

$$\| f - f_{\mathcal{N}} \| < \varepsilon.$$

Тогда при любом $g \in H$

$$(A_{nn}f - A_{mm}f,\ g) = (A_{nn}f_{\mathcal{N}} - A_{mm}f_{\mathcal{N}},\ g) + \delta,$$

где

$$|\delta| = |(A_{nn}(f - f_{\mathcal{N}}),\ g) + (A_{mm}(f_{\mathcal{N}} - f),\ g)| \leqslant 2C\varepsilon \| g \|.$$

С другой стороны,

$$(A_{nn}f_{\mathcal{N}} - A_{mm}f_{\mathcal{N}},\ g)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, $m \to \infty$. Отсюда, благодаря слабой полноте пространства H, вытекает, что последовательность

$$\{A_{nn}f\}_1^\infty$$

слабо сходится к некоторому элементу h. Полагая $h = Af$, получаем требуемое соотношение:

$$A_{nn} \overset{\text{сл.}}{\to} Af.$$

Так как при любом n

$$|(A_{nn}f,\ g)| \leqslant C \| f \| \cdot \| g \|,$$

то

$$|(Af,\ g)| \leqslant C \| f \| \cdot \| g \|,$$

откуда следует, что

$$\| A \| \leqslant C.$$

Теорема доказана.

Прежде чем идти дальше, обозначим через $\{e_p\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему векторов в H. Каждый ограниченный оператор A заданный всюду в H, вполне определяется матрицей $(a_{pq})_{p,\,q=1}^\infty$, где $a_{pq} = (Ae_q,\ e_p)$. Будем обозначать буквой R всякий такой оператор, для которого $r_{pq} = (Re_q,\ e_p)$ есть комплексное число с рациональными компонентами и притом равное нулю, когда по крайней мере один из индексов p, q превосходит некоторое число, свое для каждого оператора. Множество всех таких операторов счетно. Перенумеруем их: R_1, R_2, R_3, ..., и положим

$$(R_k e_q,\ e_p) = r_{pq}^{(k)}.$$

Лемма. *Каков бы ни был ограниченный линейный оператор A, определенный во всем пространстве, найдется подпоследовательность $\{R_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| R_{j_k} e_m - A e_m \| = \lim_{k\to\infty} \| R_{j_k}^* e_m - A^* e_m \| = 0$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доказательство. Выберем j_k так, чтобы

$$|r_{pq}^{j_k} - a_{pq}| < \frac{1}{k} \quad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots k)$$

и

$$r_{pq}^{(j_k)} = 0 \text{ при } \max\{p,\ q\} > k.$$

Тогда

$$\| R_{j_k} e_m - A e_m \|^2 = \| \sum_{n=1}^{k} r_{nm}^{(j_k)} e_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} e_n \|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} | r_{nm}^{(j_k)} - a_{nm} |^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} | a_{nm} |^2 < \frac{1}{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} | a_{nm} |^2, \tag{1}$$

если $m \leqslant k$. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_{nm} |^2$$

сходится при любом m, то правая часть (1) стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \| R_{j_k} e_m - A e_m \| = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

и аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Теорема 2. *Каждое бесконечное множество* $\mathfrak{M}$ *определенных всюду в* H *ограниченных операторов содержит последовательность* $\{A_k\}_1^\infty$, *плотную в* $\mathfrak{M}$ *в том смысле, что для любого оператора* $A \in \mathfrak{M}$, *если он сам не принадлежит* $\{A_k\}_1^\infty$, *существует последовательность* $\{A_{k_q}\}_{q=1}^\infty$, *удовлетворяющая при любом* $f \in$ H *соотношениям*

$$\lim_{q \to \infty} \|A_{k_q} f - Af \| = \lim_{q \to \infty} \| A_{k_q}^* f - A^* f \| = 0.$$

Доказательство. Множество $\mathfrak{M}$ можно представить в виде суммы множеств $\mathfrak{M}_n$ таких, что норма каждого из операторов, принадлежащих $\mathfrak{M}_n$, не превосходит числа n. Так как теорему достаточно доказать для каждого $\mathfrak{M}_n$, то мы можем принять, что исходное множество $\mathfrak{M}$ есть некоторое $\mathfrak{M}_n$, т. е., что при некотором фиксированном $\mathscr{C}$ неравенство $\| A \| \leqslant \mathscr{C}$ выполнено для любого $A \in \mathfrak{M}$.

Возьмем теперь произвольную пару натуральных чисел p, q и исследуем, существуют ли в $\mathfrak{M}$ операторы B, для которых

$$\|R_p g - Bg \| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \| R_p^* g - B^* g \| \leqslant \frac{1}{q} \quad (g = e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_q).$$

Если требуемые операторы B существуют, выберем один из них и обозначим его $B_{p,q}$, а пару p, q в этом случае назовем допустимой. Из леммы вытекает, что при любом q найдется бесчисленное множество значений p, при которых пара p, q допустима. Поэтому множество операторов $B_{p,q}$ не пусто. Это множество, очевидно, счетное. Покажем, что его можно принять в качестве последовательности $\{A_k\}_1^\infty$.

С этой целью возьмем какой-нибудь оператор $A \in \mathfrak{M}$, $A \overline{\in} \{A_k\}_1^\infty$. На основании леммы существует такая последовательность $\{R_{n_q}\}_{q=1}^\infty$, что

$$\| R_{n_q} g - Ag \| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \| R_{n_q}^* g - A^* g \| \leqslant \frac{1}{q}$$

$$(g = e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_q).$$

Поэтому при любом q пара n_q, q является допустимой, а значит, существует оператор $B_{n_q, q} = A_{k_q}$, для которого

$$\| R_{n_q} g - A_{k_q} g \| \leqslant \frac{1}{q}, \quad \| R_{n_q}^* g - A_{k_q}^* g \| \leqslant \frac{1}{q}$$

$$(g = e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_q).$$

Следовательно, при $q = 1, 2, \ldots$

$$\| Ag - A_{k_q} g \| \leqslant \frac{2}{q}, \quad \| A^* g - A_{k_q}^* g \| \leqslant \frac{2}{q}$$

$$(g = e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_q).$$

Возьмем теперь произвольный элемент из H:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

При любом $\varepsilon > 0$ найдем такое $\mathcal{N}$, что

$$f = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \xi_n e_n + f', \quad \| f' \| < \varepsilon.$$

Так как нормы рассматриваемых операторов $\leqslant \mathscr{E}$, то при $q > \mathcal{N}$

$$\| Af - A_{k_q} f \| < \frac{2}{q} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} | \xi_n | + 2\mathscr{E}\varepsilon \leqslant \frac{2\sqrt{\mathcal{N}}}{q} \| f \| + 2\mathscr{E}\varepsilon$$

и аналогично

$$\| A^* f - A_{k_q}^* f \| < \frac{2\sqrt{\mathcal{N}}}{q} \| f \| + 2\mathscr{E}\varepsilon.$$

Для завершения доказательства остается сначала взять достаточно малое ε, а затем достаточно большое q.

ГЛАВА III

ПРОЕКТИРУЮЩИЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

35. Определение проектирующего оператора. Пусть в H взято подпространство G и пусть

$$F = H \ominus G,$$

так что

$$H = G \oplus F,$$

и, значит, каждый вектор $h \in H$ однозначно представим в виде

$$h = g + f,$$

где $g \in G$ и $f \in F$. В n° 7 вектор g был назван проекцией вектора h на G. Определенный во всем пространстве H оператор, который каждому $h \in H$ относит его проекцию на подпространство G, называют *проектирующим оператором, оператором проектирования* (на G) или *проектором*[1] и обозначают символом P или P_G, так что

$$g = Ph = P_G h.$$

Проектирующий оператор, очевидно, линеен. Кроме того, он ограничен и его норма равна единице. Действительно, так как

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2,$$

то

$$\|g\| \leqslant \|h\|, \tag{1}$$

т. е.

$$\|P\| \leqslant 1.$$

Но если $h \in G$, то $g = h$, так что в (1) знак равенства достигается, и поэтому

$$\|P\| = 1.$$

36. Свойства проектирующих операторов. Из определения проектирующего оператора легко заключить, что

$$1)\ P^2 = P$$
$$2)\ P^* = P.$$

---

[1] В дальнейшем мы введем также «косое» проектирование, и тогда для оператора, который здесь назван проектором, мы будем иногда, во избежание недоразумений, применять название *ортопроектор*.

Действительно, при любом $h \in \mathrm{H}$ вектор $g = Ph$ уже принадлежит G и поэтому $Pg = g$, т. е. $P^2h = Ph$; но это и означает, что $P^2 = P$.

Возьмем теперь два произвольных вектора $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$. Пусть

$$h_1 = g_1 + f_1, \quad h_2 = g_2 + f_2.$$

В таком случае

$$(g_1, h_2) = (g_1, g_2) = (h_1, g_2),$$

т. е.

$$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2)$$

для любых $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$. Но это и означает, что $P^* = P$.

Из доказанных свойств вытекает, что проектирующий оператор P положителен, т. е. (см. п°. 25)

$$(Ph, h) \geqslant 0.$$

Действительно,

$$(Ph, h) = (P^2h, h) = (Ph, P^*h) = (Ph, Ph) \geqslant 0.$$

Теперь мы докажем, что свойства 1), 2) характерны для проектирующего оператора.

Теорема. *Если P есть определенный всюду в H оператор, для которого при любых $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$*

1) $(P^2h_1, h_2) = (Ph_1, h_2)$,

2) $(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2)$,

то существует подпространство $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{H}$, оператором проектирования на которое является P.

Доказательство. Оператор P ограничен. Это вытекает из теоремы п°. 28, так как

$$(Ph_1, h_2) = (h_1, Ph_2),$$

но проще всего убедиться в этом следующим образом:

$$\| Ph \|^2 = (Ph, Ph) = (P^2h, h) = (Ph, h),$$

поэтому

$$\| Ph \|^2 \leqslant \| Ph \| \cdot \| h \|$$

и, следовательно,

$$\| Ph \| \leqslant \| h \|,$$

т. е. оператор P ограничен и его норма не больше 1.

Обозначим через G множество всех векторов $g \in \mathrm{H}$, для которых

$$Pg = g.$$

Ясно, что G есть линейное многообразие. Докажем, что G замкнуто, т. е. является подпространством. Пусть $g_n \in$ G ($n = 1, 2, 3, \ldots$), так что

$$g_n = Pg_n$$

и, значит, при любом $g \in$ H

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n),$$

откуда

$$\| Pg - g_n \| \leqslant \| g - g_n \|.$$

Как видим, из $g_n \to g$ следует, что $Pg = g$, чем и доказано, что G замкнуто.

Обозначим через P_G оператор проектирования на G. Мы должны доказать, что $P_G = P$. При любом $h \in$ H вектор $Ph = g$ принадлежит G, так как $P(Ph) = Ph$. Подпространству G принадлежит также $P_G h$. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$(Ph - P_G h,\ g') = 0$$

или

$$(Ph,\ g') = (P^G h,\ g')$$

при любом $g' \in$ G. Но это следует из

$$(Ph,\ g') = (h,\ Pg') = (h,\ g'),$$
$$(P_G h,\ g') = (h,\ P_G g') = (h,\ g').$$

Заканчивая настоящий пункт, заметим, что если P есть проектирующий оператор и G — подпространство, на которое он проектирует, то $I - P$, где I — тождественный оператор, есть также проектирующий оператор, причем $I - P$ проектирует на H $\ominus$ G.

37. Действия над проектирующими операторами. В настоящем пункте мы докажем несколько простых предложений относительно умножения, сложения и вычитания проектирующих операторов.

1°. *Произведение двух проектирующих операторов P_{G_1}, P_{G_2} является проектирующим оператором в том и только том случае, когда они перестановочны:*

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}, \tag{1}$$

и если это условие выполнено, то

$$P_{G_1} P_{G_2} = P_G,$$

где $G = G_1 \cap G_2$.

Доказательство. Если произведение $P_{G_1} P_{G_2}$ есть проектирующий оператор, то

$$P_{G_1} P_{G_2} = (P_{G_1} P_{G_2})^* = P^*_{G_2} P^*_{G_1} = P_{G_2} P_{G_1}.$$

Таким образом, необходимость условия доказана.

Допустим теперь, что

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}.$$

Отсюда следует, что

$$(P_{G_1}P_{G_2})^2 = P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_2}$$

и

$$(P_{G_1}P_{G_2})^* = P^*_{G_2}P^*_{G_1} = P_{G_2}P_{G_1} = P_{G_1}P_{G_2}.$$

Мы видим, что оператор $P_{G_1}P_{G_2}$ удовлетворяет условиям теоремы п° 36 и поэтому является проектирующим оператором.

Таким образом, достаточность условия также доказана.

Если условие (1) выполнено, то при любом $h \in H$ вектор

$$g = P_{G_1}P_{G_2}h = P_{G_2}P_{G_1}h = P_G h$$

в силу первого представления принадлежит G_1, а в силу второго — принадлежит G_2, т. е. он принадлежит $G_1 \cap G_2$. Таким образом,

$$G \subseteq G_1 \cap G_2.$$

Обратное включение очевидно.

Второе утверждение, следовательно, также доказано.

Особо выделим частный случай.

2°. *Два пространства G_1, G_2 ортогональны в том и только том случае, когда*

$$P_{G_1}P_{G_2} = 0.$$

3°. *Сумма проектирующих операторов*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + \cdots + P_{G_n} = Q \quad (n < \infty)$$

есть проектирующий оператор в том и только том случае, когда

$$P_{G_j}P_{G_k} = 0 \quad (j \neq k), \tag{2}$$

т. е. тогда и только тогда, когда подпространства G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) попарно ортогональны, и в этом случае $Q = P_G$, где $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$.

Доказательство. Если подпространства G_i попарно ортогональны, то, в силу предложения 2°, справедливы равенства (2) и поэтому $Q^2 = Q$. Так как, кроме того, $Q^* = Q$, то Q есть проектирующий оператор. Последнее утверждение очевидно.

Поэтому докажем необходимость условия. Пусть Q есть проектирующий оператор. Значит,

$$\|f\|^2 \geqslant (Qf, f) = \sum_{i=1}^{n} (P_{G_i}f, f) \geqslant (P_{G_j}f, f) + (P_{G_k}f, f),$$

каковы бы ни были два различных индекса j, k. Из полученного неравенства вытекает, что

$$\|P_{G_j}f\|^2 + \|P_{G_k}f\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Положим здесь

$$f = P_{G_k}h.$$

Это дает

$$\|P_{G_j}P_{G_k}h\|^2 + \|P_{G_k}h\|^2 \leqslant \|P_{G_k}h\|^2$$

и, значит,

$$\|P_{G_j}P_{G_k}h\| = 0$$

при любом $h \in H$, что и доказывает равенство

$$P_{G_j}P_{G_k} = 0,$$

т. е. ортогональность подпространств G_j, G_k.

4°. *Разность двух проектирующих операторов*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \tag{3}$$

есть проектирующий оператор тогда и только тогда, когда $G_2 \subseteq G_1$, *и в этом случае* (3) *есть оператор проектирования на* $G_1 \ominus G_2$.

Доказательство. Пусть

$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_G \tag{4}$$

есть проектирующий оператор. Тогда сумма

$$P_G + P_{G_2} = P_{G_1} \tag{5}$$

также является проектирующим оператором и, значит, в силу предложения 3°

$$G \perp G_2 \text{ и } G \oplus G_2 = G_1, \tag{6}$$

откуда следует, что

$$G_2 \subseteq G_1 \text{ и } G = G_1 \ominus G_2. \tag{7}$$

Из (7) следует (6), а поэтому (5) и, значит, (4).

Из предложений 1°, 2°, 4° вытекает

5°. *Перестановочность операторов* P_{G_1} *и* P_{G_2} *эквивалентна ортогональности подпространств*

$$G_1 \ominus (G_1 \cap G_2), \quad G_2 \ominus (G_1 \cap G_2).$$

6°. *Соотношение* $G_2 \subseteq G_1$ *эквивалентно неравенству*

$$\|P_{G_2}h\| \leqslant \|P_{G_1}h\| \tag{8}$$

(*для любого* $h \in H$), *а также неравенству*

$$P_{G_2} \leqslant P_{G_1}. \tag{9}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что эквивалентность неравенств (8) и (9) является следствием эквивалентности каждого из них неравенству

$$(P_{G_2}h, h) \leqslant (P_{G_1}h, h).$$

Пусть теперь $G_2 \subseteq G_1$. Отсюда вытекает, что

$$P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1},$$

поэтому при любом $h \in H$

$$\| P_{G_2}h \| = \| P_{G_2}(P_{G_1}h) \| \leqslant \| P_{G_1}h \|.$$

Следовательно, неравенство (8) доказано.

Обратно, пусть дано, что (8) имеет место для любого $h \in H$. Значит, из $P_{G_1}f = 0$ следует $P_{G_2}f = 0$, другими словами, если

$$F_1 = H \ominus G_1 \text{ и } F_2 = H \ominus G_2,$$

то из включения $f \in F_1$ следует включение $f \in F_2$. Но это означает, что $F_1 \subseteq F_2$, а поэтому

$$G_2 = H \ominus F_2 \subseteq H \ominus F_1 = G_1,$$

что и требовалось доказать.

38. Последовательности проектирующих операторов.

Теорема 1. *Если $\{P_k\}_1^\infty$ — бесконечная монотонная последовательность проектирующих операторов, то P_k при $k \to \infty$ сильно сходится к некоторому проектирующему оператору P.*

Доказательство. Пусть, например, последовательность $\{P_k\}_1^\infty$ — неубывающая: $P_k \leqslant P_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Так как она ограничена, ибо $P_k \leqslant I$ при любом k, то по теореме 3 п° 33 и по замечанию к этой теореме существует в смысле сильной сходимости[1]

$$\lim_{k \to \infty} P_k \equiv P.$$

Кроме того, при любом k и любых $f, g \in H$

$$(P_kf, P_kg) = (P_kf, g) = (f, P_kg).$$

Поэтому в пределе

$$(Pf, Pg) = (Pf, g) = (f, Pg).$$

[1] В этом можно также убедиться, не прибегая к упомянутым предложениям п° 33, с помощью соотношения

$$\| P_nf - P_mf \|^2 = ([P_n - P_m] f, f) = \| P_nf \|^2 - \| P_mf \|^2,$$

которое следует из того, что при $m < n$ разность $P_n - P_m$ является проектирующим оператором.

Значит,

$$P = P^* = P^2,$$

чем и доказано, что P есть проектирующий оператор.

Следующая теорема относится к последовательностям проекторов без предположения об их монотонности.

Теорема 2. *Если последовательность проектирующих операторов* $\{P_k\}_1^\infty$ *слабо сходится к некоторому проектирующему оператору* P, *то она сходится к нему и сильно.*

Доказательство. В силу условия при любом $h \in \mathrm{H}$

$$(P_k h,\ h) \to (Ph,\ h).$$

Значит,

$$\| P_k h \| \to \| Ph \|,$$

а так как последовательность векторов $\{P_k h\}_1^\infty$ слабо сходится к вектору Ph, то, в силу теоремы 1 п° 26, она сходится и сильно, что и требовалось доказать.

39. Раствор двух линейных многообразий[1].

Определение. *Раствором двух линейных многообразий в* H *называется норма разности операторов, проектирующих на замыкания этих линейных многообразий.*

Раствор линейных многообразий M_1, M_2 обозначают символом $\theta(M_1,\ M_2)$. Поэтому

$$\theta(M_1,\ M_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| P_2 - P_1 \|,$$

где P_1, P_2 — операторы проектирования на подпространства $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ соответственно.

Из данного определения раствора вытекает, что

$$\theta(M_1,\ M_2) = \theta(\overline{M}_1,\ \overline{M}_2) = \theta(\mathrm{H} \ominus \overline{M}_1,\ \ \mathrm{H} \ominus \overline{M}_2).$$

Возьмем тождество

$$P_2 - P_1 = P_2(I - P_1) - (I - P_2) P_1.$$

В применении к элементу $h \in \mathrm{H}$ оно дает

$$(P_2 - P_1) h = P_2 (I - P_1) h - (I - P_2) P_1 h,$$

откуда в силу ортогональности векторов $P_2(I - P_1) h$, $(I - P_2) P_1 h$ следует, что

$$\|(P_2 - P_1) h\|^2 = \| P_2 (I - P_1) h \|^2 + \| (I - P_2) P_1 h \|^2 \leqslant \\ \leqslant \|(I - P_1) h\|^2 + \| P_1 h \|^2 = \| h \|^2. \quad (1)$$

[1] B. Sz.-Nagy (Comment. Math. Hel. 1947, № 19, с. 347—366). М. Г. Крейн и М. А. Красносельский (УМН, 1947, т. III, вып. 3, с. 60—107).

Это неравенство показывает, что раствор двух линейных многообразий не превосходит 1:

$$\theta(M_1, M_2) \leqslant 1.$$

Мало того, мы видим, что раствор обязательно равняется 1, если одно из многообразий содержит отличный от нуля вектор, ортогональный другому многообразию. Это замечание позволяет установить следующий критерий равенства размерностей двух многообразий.

Теорема. *Если раствор линейных многообразий* M_1, M_2 *меньше* 1, *то размерности этих линейных многообразий одинаковы:*

$$\dim M_1 = \dim M_2.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что из неравенства

$$\dim M_2 > \dim M_1$$

вытекает существование в $\overline{M}_2$ отличного от нуля вектора, ортогонального $\overline{M}_1$. С этой целью спроектируем $\overline{M}_1$ на $\overline{M}_2$. Мы получим линейное многообразие

$$G = P_2\overline{M}_1,$$

размерность которого, очевидно, не превосходит размерности подпространства $\overline{M}_1$ и, следовательно, меньше, чем размерность подпространства $\overline{M}_2$. Поэтому в $\overline{M}_2 \ominus G$ существуют отличные от нуля векторы, т. е. в $\overline{M}_2$ найдется вектор, отличный от нулевого и ортогональный G. Этот вектор будет ортогонален всему подпространству $\overline{M}_1$, так как подпространство $\overline{M}_2$ ортогонально $\overline{M}_1 \ominus G$.

Раствор двух линейных многообразий допускает второе определение:

$$\theta(M_1, M_2) = \max\{\sup_{f \in \overline{M}_2,\ \|f\|=1} \|(I-P_1)f\|, \sup_{g \in \overline{M}_1,\ \|g\|=1} \|(I-P_2)g\|\}. \quad (2)$$

Величина

$$\|(I-P_1)f\| = D[f, \overline{M}_1]$$

представляет расстояние точки f от многообразия $\overline{M}_1$. Поэтому формула (2) может быть переписана в виде[1]

$$\theta(M_1, M_2) = \max\{\sup_{f \in \overline{M}_2,\ \|f\|=1} D[f, \overline{M}_1], \sup_{g \in \overline{M}_1,\ \|g\|=1} D[g, \overline{M}_2]\}.$$

[1] Значение этой формулы состоит в том, что она позволяет определить раствор двух линейных многообразий не только в пространстве Гильберта, но и в любом пространстве Банаха. По этому поводу см. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, № 11 (1948).

Займемся доказательством формулы (2). Согласно первоначальному определению раствора и формуле (1)

$$\theta(M_1, M_2) = \sup_{h\in H} \frac{\|(P_2 - P_1)h\|}{\|h\|} = \sup_{h\in H} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2 + \|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|}. \quad (3)$$

Заставим вектор h пробегать не все пространство H, а лишь подпространство $\overline{M}_1$. Тогда стоящая в правой части верхняя грань либо не изменится, либо станет меньше, т. е.

$$\theta(M_1, M_2) \geqslant \sup_{h\in\overline{M}_1} \frac{\sqrt{\|P_2(I-P_1)h\|^2 + \|(I-P_2)P_1h\|^2}}{\|h\|} = \sup_{h\in\overline{M}_1} \frac{\|(I-P_2)h\|}{\|h\|} = \rho_2.$$

Точно так же доказывается, что

$$\theta(M_1, M_2) \geqslant \sup_{h\in\overline{M}_2} \frac{\|(I-P_1)h\|}{\|h\|} = \rho_1.$$

Таким образом, уже доказано, что

$$\theta(M_1, M_2) \geqslant \max\{\rho_1, \rho_2\},$$

и остается доказать, что

$$\theta(M_1, M_2) \leqslant \max\{\rho_1, \rho_2\}.$$

С этой целью заметим, что по определению величины ρ_2

$$\|(I-P_2)P_1h\|^2 \leqslant \rho_2^2 \|P_1h\|^2, \quad (4)$$

с другой стороны,

$$\begin{gathered}\|P_2(I-P_1)h\|^2 = (P_2\{I-P_1\}h,\ P_2\{I-P_1\}h) = \\ = (P_2\{I-P_1\}h,\ \{I-P_1\}h) = (\{I-P_1\}P_2\{I-P_1\}h, \\ \{I-P_1\}h) \leqslant \|(I-P_1)P_2(I-P_1)h\| \cdot \|(I-P_1)h\|\end{gathered}$$

и, следовательно, по определению величины ρ_1,

$$\|P_2(I-P_1)h\|^2 \leqslant \rho_1 \|P_2(I-P_1)h\| \cdot \|(I-P_1)h\|,$$

т. е.

$$\|P_2(I-P_1)h\| \leqslant \rho_1 \|(I-P_1)h\|. \quad (5)$$

Из (4) и (5) заключаем, что

$$\begin{gathered}\|(I-P_2)P_1h\|^2 + \|P_2(I-P_1)h\|^2 \leqslant \rho_2^2\|P_1h\|^2 + \rho_1^2\|(I-P_1)h\|^2 \leqslant \\ \leqslant \max\{\rho_1^2, \rho_2^2\}[\|P_1h\|^2 + \|(I-P_1)h\|^2] = \|h\|^2 \max\{\rho_1^2, \rho_2^2\}\end{gathered}$$

и формула (3) дает

$$\theta(M_1, M_2) \leqslant \max\{\rho_1, \rho_2\}.$$

40. Унитарный оператор.

Определение. *Оператор U, заданный во всем пространстве* ($D_U = H$) *и отображающий его на все пространство* ($\Delta_U = H$), *называется унитарным, если для любых $f, g \in H$ имеет место равенство*

$$(Uf, Ug) = (f, g). \tag{1}$$

Заметим, что в данное определение не входит требование линейности оператора.

Докажем, прежде всего, что унитарный оператор имеет обратный оператор, который также унитарен. Так как для существования оператора, обратного оператору T, необходимо и достаточно, чтобы из $Tf = Tg$ следовало $f = g$ (см. п° 17), то предположим, что $Uf = Ug$; тогда

$$0 = (Uf - Ug, Uf - Ug) = (Uf, Uf) - (Uf, Ug) - (Ug, Uf) + \\ + (Ug, Ug) = (f, f) - (f, g) - (g, f) + (g, g) = (f - g, f - g),$$

т. е. $f = g$.

Таким образом, обратный оператор U^{-1} существует. Так как $D_{U^{-1}} = \Delta_U$, $\Delta_{U^{-1}} = D_U$, то оператор U^{-1} подобно U определен во всем пространстве и отображает его на все пространство. Если положить

$$Uf = f', \quad Ug = g',$$

то равенство (1) можно переписать в виде

$$(f', g') = (U^{-1}f', U^{-1}g'),$$

и доказательство унитарности оператора U^{-1} закончено, так как f', g' могут быть любыми элементами пространства H.

Из доказанного следует, что при любых $f, g \in H$

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g). \tag{2}$$

Действительно, пусть $U^{-1}g = g'$, так что $g = Ug'$. В таком случае

$$(Uf, Ug') = (f, g'),$$

что тождественно с (2).

Равенство (2) выражает, что для унитарного оператора сопряженный оператор совпадает с обратным:

$$U^* = U^{-1},$$

т. е.

$$U^*U = UU^* = I.$$

Покажем теперь, что унитарный оператор обязательно линеен. Действительно, пусть

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2.$$

В таком случае на основании (2) получаем:

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g) = \alpha_1 (f_1, U^{-1}g) + \alpha_2 (f_2, U^{-1}g) =$$
$$= \alpha_1 (Uf_1, g) + \alpha_2 (Uf_2, g) = (\alpha_1 Uf_1 + \alpha Uf_2, g).$$

В силу произвольности g это значит, что

$$Uf = \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2.$$

Часто полезно следующее простое предложение: *если оператор T линеен, удовлетворяет условию*

$$(Tf, Tf) = (f, f) \tag{3}$$

и $D_T = \Delta_T = H$, *то оператор T унитарен.*

Доказательство. В силу условия (3)

$$(T\{f + \alpha g\}, T\{f + \alpha g\}) = (f + \alpha g, f + \alpha g).$$

Отсюда, на основании линейности оператора,

$$(Tf, Tf) + \alpha (Tg, Tf) + \bar{\alpha} (Tf, Tg) + |\alpha|^2 (Tg, Tg) =$$
$$= (f, f) + \alpha (g, f) + \bar{\alpha} (f, g) + |\alpha|^2 (g, g).$$

Поэтому, снова в силу (3),

$$\alpha (Tg, Tf) + \bar{\alpha} (Tf, Tg) = \alpha (g, f) + \bar{\alpha} (f, g).$$

А так как α произвольно, то

$$(Tf, Tg) = (f, g),$$

и унитарность оператора T доказана.

41. Изометрический оператор. Пусть даны два гильбертовых пространства: H_1 и H_2. Условимся отмечать скалярное произведение в первом пространстве индексом 1, а во втором пространстве индексом 2.

Определение. Оператор V, заданный на всем пространстве H_1 ($D_V = H_1$) и отображающий его на все пространство H_2 ($\Delta_V = H_2$), называется *изометрическим*, если для любых f, $g \in H_1$

$$(Vf, Vg)_2 = (f, g)_1. \tag{1}$$

В частности, H_1 и H_2 могут быть подпространствами одного пространства H. В этом случае индексы у скалярных произведений излишни.

Унитарный оператор в H является частным случаем изометрического оператора; мы получим его, если оба пространства, H_1, H_2 совпадают с H.

Многие свойства унитарного оператора переносятся на произвольные изометрические операторы. Некоторые из этих свойств мы приведем, опуская те из доказательств, которые ничем не отличаются от доказательств соответствующих свойств унитарных операторов.

1°. *Изометрический оператор имеет обратный оператор, который также изометричен.*

2°. *Если оператор V линеен и отображает все пространство* H_1 *на все пространство* H_2 *и если для любого* $f \in \mathrm{H}_1$

$$(Vf,\ Vf)_2 = (f,\ f)_1,$$

то V — изометрический оператор.

3°. *Всякий изометрический оператор линеен.*

Действительно, пусть $f',\ f'' \in \mathrm{H}_1$ и $f = \alpha' f' + \alpha'' f''$. В таком случае при любом $g \in \mathrm{H}_1$

$$(Vf,\ Vg)_2 = (f,\ g)_1 = \alpha'(f',\ g)_1 + \alpha''(f'',\ g)_1 =$$
$$= \alpha'(Vf',\ Vg)_2 + \alpha''(Vf'',\ Vg)_2 = (\alpha' Vf' + \alpha'' Vf'',\ Vg)_2.$$

А так как $\Delta_V = \mathrm{H}_2$, то из полученного равенства следует, что

$$Vf = \alpha' Vf' + \alpha'' Vf'',$$

т. е. линейность оператора V.

В неявном виде изометрический оператор уже встречался у нас в n° 10, когда мы ввели понятие об изоморфизме двух гильбертовых пространств.

Иногда приходится рассматривать так называемый *частично изометрический* оператор. Так называют линейный оператор U, действующий в гильбертовом пространстве H, который на некотором подпространстве $\mathrm{D}_V \subset \mathrm{H}$ совпадает с изометрическим оператором V, а на ортогональном дополнении $\mathrm{H} \ominus \mathrm{D}_V$ обращается в нуль. Подпространство D_V называется *начальной*, а подпространство $\Delta_U \equiv \Delta_V$ — *конечной* областью частично изометрического оператора U.

Легко проверить, что вместе с U является частично изометрическим также оператор U^*. При этом для U^* начальной областью является Δ_V, а конечной — D_V, и осуществляемые операторами U, U^* отображения этих областей взаимно обратны. Это значит, что

$$U^*U = P,\ UU^* = Q, \tag{2}$$

где P и Q — операторы проектирования на D_V и Δ_V соответственно. В том частном случае, когда одно из подпространств D_V, Δ_V совпадает с H, частично изометричный оператор U называется *полуунитарным*.

Заканчивая настоящий пункт, введем одно важное понятие, которое будет нами неоднократно использовано в дальнейшем.

Определение. Пусть T_1 и T_2 — линейные операторы, действующие в пространствах H_1 и H_2, так что $\mathrm{D}_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$, $\Delta_{T_1} \subseteq \mathrm{H}_1$,

$D_{T_2} \subseteq H_2$, $\Delta_{T_2} \subseteq H_2$ (в частности, пространства H_1, H_2 могут совпадать).

Операторы T_1 и T_2 называются *унитарно эквивалентными*, если существует изометрический оператор V, отображающий H_1 в H_2 и переводящий D_{T_1} в D_{T_2} таким образом, что если элемент $f \in D_{T_1}$ переводится оператором V в элемент g, то элемент $T_1 f$ переводится оператором V в $T_2 g$, т. е.

$$D_{T_2} = V D_{T_1}$$

и

$$T_1 = V^{-1} T_2 V.$$

42. Оператор Фурье — Планшереля. Предметом настоящего пункта является доказательство теоремы Планшереля: *какова бы ни была функция* $g(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ *для почти всех* $t\,(-\infty < t < \infty)$, *существует и также принадлежит* $L^2(-\infty, \infty)$ *функция*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-its}-1}{-is} g(s)\, ds = h(t); \tag{1}$$

определяемый этой формулой оператор $\mathfrak{F}$, *который функцию* $g(t)$ *переводит в* $h(t)$, *унитарен; обратный оператор имеет вид*

$$g(t) = (\mathfrak{F}^{-1} h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} h(s)\, ds.$$

Оператор $\mathfrak{F}$ носит название *оператора Фурье — Планшереля*. Если предположить, что функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то формула (1) может быть переписана в виде

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g(s)\, ds, \tag{2}$$

т. е. в этом случае $h(t)$ является *интегралом Фурье* в элементарном смысле. Абсолютно интегрируемые на всей оси и принадлежащие $L^2(-\infty, \infty)$ функции представляют некоторое плотное в $L^{(2)}(-\infty, \infty)$ линейное многообразие L, и значение теоремы Планшереля состоит в том, что с ее помощью расширяется на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$ элементарный оператор Фурье, который на L задается формулой (2).

Этот подход к оператору Фурье — Планшереля позволяет дать ему другое определение. Пусть $g(t)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty, \infty)$ и пусть

$$g_N(t) = \begin{cases} g(t) & (-N \leqslant t \leqslant N), \\ 0 & (|t| > N). \end{cases}$$

Таким образом, $g_N(t)$ есть финитная функция. Так как она абсолютно интегрируема, то

$$(\mathfrak{F}g_N)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} g_N(s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds.$$

В силу унитарности, оператор $\mathfrak{F}$ ограничен и поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \| \mathfrak{F}g - \mathfrak{F}g_N \| = 0$$

или

$$h(t) = (\mathfrak{F}g)(t) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds. \tag{3}$$

Это и есть вытекающее из (1) второе определение оператора Фурье — Планшереля.

Легко видеть, что, в свою очередь, определение (1) вытекает из определения (3). Действительно, при любом элементе $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$

$$\lim_{N\to\infty} (\mathfrak{F}g_N, f) = (\mathfrak{F}g, f). \tag{4}$$

Веря

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ лежит между } 0 \text{ и } \tau, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

перепишем (4) в виде

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\tau dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ist} g(s)\, ds = \int_0^\tau (\mathfrak{F}g)(t)\, dt,$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is\tau} - 1}{-is} g(s)\, ds = \int_0^\tau (\mathfrak{F}g)(t)\, dt.$$

Но это соотношение показывает, что почти всюду

$$(\mathfrak{F}g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist} - 1}{-is} g(s)\, ds.$$

Имеются различные доказательства теоремы Планшереля, однако существенным элементом большинства из них является доказательство того, что определяемый равенством (2) на множестве $L \subset L^2(-\infty, \infty)$ оператор $\mathfrak{F}_0$ не меняет норм векторов, а также, что он переводит множество L в множество, плотное в $L^2(-\infty, \infty)$. После этого, расширяя оператор $\mathfrak{F}_0$ по непрерывности на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$, мы получим оператор $\mathfrak{F}$, определенный формулой (3). Областью определения этого оператора будет все пространство $L^2(-\infty, \infty)$. А так как оператор $\mathfrak{F}$ не меняет норм векторов и его область значений плотна в $L^2(-\infty, \infty)$, то его областью значений, очевидно[1], также будет все пространство. Для завершения доказательства останется проверить, что обратный оператор $\mathfrak{F}^{-1}$ получается заменой i на $-i$.

Упомянутое доказательство достаточно провести для какого-нибудь множества $L_0 \subset L$, лишь бы оно было плотно в $L^2(-\infty, \infty)$; например, оно проходит, если в качестве L_0 взять совокупность всех кусочно-постоянных финитных функций.

С точки зрения геометрии пространства Гильберта особенно поучительно принять в качестве L_0 плотное в $L^2(-\infty, \infty)$ множество всех функций

$$f(t) = P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{5}$$

где $P(t)$ пробегает совокупность всех многочленов. Всякая функция (5) может быть представлена в виде

$$f(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(t), \tag{6}$$

где $\varphi_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — функции Чебышева — Эрмита. В силу ортогональности этих функций (n° 12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{n} 2^k k!\, |\alpha_k|^2.$$

Теперь применим к функции $f(t)$ оператор $\mathfrak{F}_0$. С этой целью воспользуемся соотношением (которое будет доказано ниже):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} (-1)^k e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\, ds = i^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} \tag{7}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Соотношение (7) показывает, что

$$\mathfrak{F}_0\varphi_k = (-i)^k \varphi_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

На основании этого соотношения

$$h(t) \equiv (\mathfrak{F}_0 f)(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + (-i)^1 \alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + (-i)^n \alpha_n\varphi_n(t) \tag{8}$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt.$$

[1] Действительно, допуская противное и расширив по непрерывности обратный оператор $\mathfrak{F}^{-1}$ на все пространство $L^2(-\infty, \infty)$, мы получили бы изометрический оператор, принимающий одинаковые значения по крайней мере в двух различных точках, что невозможно.

Таким образом, оператор $\mathfrak{F}_0$ не меняет нормы элементов множества L_0. Кроме того, из наших рассмотрений следует, что область значений оператора $\mathfrak{F}_0$ содержит L_0 и, значит, плотна в $L^2(-\infty, \infty)$. Сравнение (6) и (8) показывает также, что для перехода от $\mathfrak{F}_0$ к $\mathfrak{F}_0^{-1}$ надлежит лишь изменить i на $-i$.

Таким образом, все сводится к доказательству тождества (7). Вот это доказательство[1]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}}\frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}\left(e^{-ist+\frac{s^2}{2}}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} i^k e^{-s^2}\frac{d^k}{dt^k}e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\,ds =$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}-ist}\,ds = i^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k}.$$

В виде упражнения рекомендуем читателю проверить, что в пространстве $L^2(0, \infty)$ унитарен каждый из операторов $\mathfrak{F}_c$, $\mathfrak{F}_s$, определяемых формулами

$$(\mathfrak{F}_c g)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{\sin st}{s}\,g(s)\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_0^N g(s)\cos st\,ds,$$

$$(\mathfrak{F}_s g)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos st}{s}\,g(s)\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_0^N g(s)\sin st\,ds.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{F}_c^* = \mathfrak{F}_c^{-1} = \mathfrak{F}_c,\quad \mathfrak{F}_s^* = \mathfrak{F}_s^{-1} = \mathfrak{F}_s$$

и, следовательно, являются также самосопряженными операторами.

---

[1] В самом конце доказательства используется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}e^{-ist}\,ds = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

представляющее частный случай ($k=0$) тождества (7) и известное из элементарного курса анализа или теории функций.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

43. Понятие о замкнутом операторе.

В настоящей главе мы приступаем к изучению линейных операторов, не предполагая их непрерывными. Вместо непрерывности во многих случаях оказывается вполне достаточным наличие родственного, но менее ограничительного свойства, так называемой замкнутости.

Определение. *Оператор T (здесь не обязательно линейный) называется замкнутым, если из одновременного выполнения соотношений*

$$f_n \in D_T, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = g$$

следует, что

$$f \in D_T, \quad g = Tf.$$

Таким образом, отличие замкнутости от непрерывности состоит в следующем: если оператор T непрерывен, то из существования $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ $(f_n \in D_T)$ обязательно следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n$; если же оператор T только замкнут, то из сходимости последовательности

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \quad (f_n \in D_T) \tag{1}$$

сходимость последовательности

$$Tf_1, Tf_2, Tf_3, \ldots \tag{2}$$

вытекать не обязана, не дозволяется лишь двум последовательностям типа (2) сходиться к различным пределам, если соответствующие последовательности (1) сходятся к одному и тому же пределу.

Это последнее условие не означает еще, что оператор T замкнут, однако оно гарантирует существование *замкнутых расширений* оператора T, если сам оператор T окажется не замкнутым. Среди этих расширений выделяется так называемое *минимальное замкнутое расширение*, которое содержится во всяком замкнутом расширении оператора T. Минимальное замкнутое расширение однозначно определяется оператором T; его обозначают $\overline{T}$ и называют *замыканием* T. Чтобы получить $\overline{T}$, достаточно присоединить к D_T все те элементы $f \in \overline{D}_T$, для каждого из которых найдется хотя бы одна сходящаяся к нему последовательность (1), порождающая сходящуюся последовательность (2), и положить

$$\overline{T}f = \lim_{n\to\infty} Tf_n.$$

Нетрудно доказать (мы предоставляем это читателю) справедливость следующего утверждения: если оператор T замкнут, то замкнут оператор $T - \lambda I$, а также обратный оператор T^{-1}, если он существует.

В заключение приведем простой пример оператора в $L^2(0, 1)$, который замыкания не допускает. Этот оператор определен формулой

$$Tf = xf(1)$$

на всех непрерывных в $[0, 1]$ функциях $f(x)$. Таким образом, область D_T плотна в $L^2(0, 1)$. Оператор T не замкнут и не допускает замыкания. Действительно, можно построить[1] две последовательности непрерывных функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$ и $\{h_n(x)\}_1^\infty$, сходящиеся в L^2 $(0, 1)$ к общему пределу, однако такие, что $f_n(1) = 1$, $h_n(1) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $Tf_n = x$, $Th_n = 0$, и, значит, пределы последовательностей $\{Tf_n\}_1^\infty$, $\{Th_n\}_1^\infty$ существуют и различны.

44. Общее определение сопряженного оператора. В n° 25, вводя сопряженный оператор для данного ограниченного оператора A, определенного всюду в H, мы исходили из того, что всякому элементу g однозначно относится элемент g^*, для которого при любом f имеет место равенство

$$(Af, g) = (f, g^*).$$

Беря произвольный оператор T, мы снова будем рассматривать скалярное произведение

$$(Tf, g), \tag{1}$$

где f пробегает D_T. Теперь уже нельзя утверждать, что при любом элементе g выражение (1), как функция от пробегающего D_T вектора f, представимо в виде

$$(f, g^*);$$

однако вообще найдутся пары g, g^*, для которых

$$(Tf, g) = (f, g^*) \tag{2}$$

[1] Например, можно взять

$$f_n(x) = 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad h_n(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{n-1}{n}\right) \\ n(1-x) & \left(\frac{n-1}{n} \leqslant x \leqslant 1\right). \end{cases}$$

при любом $f \in D_T$. Действительно, это равенство имеет место во всяком случае при $g = g^* = 0$.

Наличие пар g, g^*, для которых равенство (2) справедливо при любом $f \in D_T$, еще не позволяет ввести оператор T^*, сопряженный с T. Необходимо еще, чтобы элемент g^* однозначно определялся элементом g. Это последнее требование будет выполнено в том и только том случае, если D_T плотно в H. Действительно, если D_T не плотно в H и, скажем, элемент h ортогонален к D_T, то наряду с равенством (2) при любом $f \in D_T$ будет иметь место равенство

$$(Tf, g) = (f, g^* + h).$$

Наоборот, если D_T плотно в H и если при любом $f \in D_T$

$$(Tf, g) = (f, g_1^*), \quad (Tf, g) = (f, g_2^*),$$

то при любом $f \in D_T$

$$(f, g_1^* - g_2^*) = 0,$$

что невозможно, если $g_1^* \neq g_2^*$.

Таким образом, если D_T плотно в H, то оператор T имеет сопряженный оператор T^*; его областью определения D_{T^*} является совокупность всех тех g, для которых существуют g^*, удовлетворяющие (2) при любом $f \in D_T$, и

$$T^* g = g^*.$$

Приведем теперь ряд простых предложений относительно сопряженного оператора, доказательство которых непосредственно следует из определения:

1°. Оператор T^* линеен.

2°. Если $S \subset T$, то $S^* \supseteq T^*$.

3°. Оператор T^* замкнут, хотя оператор T может быть незамкнутым.

4°. Если оператор T имеет замыкание $\overline{T}$, то

$$(\overline{T})^* = T^*.$$

5°. Если оператор T^{**} существует, то

$$T \subseteq T^{**}.$$

Последнее предложение показывает, что необходимым условием для существования оператора T^{**} является возможность замкнуть оператор T. Вопрос о том, является ли это условие достаточным для существования T^{**}, мы оставляем открытым до n° 51. Там же будет рассмотрен вопрос о возможности обобщения на случай произвольных операторов равенства $T^{**} = T$, доказанного в n° 25 для ограниченных операторов, определенных всюду в H.

Пусть теперь T — произвольный линейный оператор с плотной в H областью определения D_T, а G — множество всех $g \in \mathrm{D}_T$, аннулирующих оператор T, т. е. таких, что $Tg = 0$. Очевидно, множество G линейно (а в случае замкнутости T оно также и замкнуто); его называют *нулевым многообразием* оператора T, а в случае замкнутости — *нулевым подпространством*. Предоставляем читателю доказать следующее простое, но важное предложение.

Теорема 1. *Нулевое подпространство* G^* *оператора* T^*, *сопряженного с* T, *и область значения* Δ_T *оператора* T *ортогональны друг другу. При этом*

$$\mathrm{G}^* = \mathrm{H} \ominus \overline{\Delta}_T.$$

Заканчивая настоящий пункт, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть линейный оператор* T *имеет обратный оператор* T^{-1} *и пусть* D_T *и* $\mathrm{D}_{T^{-1}}$ *плотны в* H, *так что существуют операторы* T^* *и* $(T^{-1})^*$.

Тогда T^* *также имеет обратный оператор и*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*. \tag{3}$$

Доказательство. Примем вначале, что f пробегает D_T, а g пробегает $\mathrm{D}_{(T^{-1})^*}$. В таком случае

$$(f, g) = (T^{-1}Tf, g) = (Tf, (T^{-1})^* g).$$

Но это равенство показывает, что

$$(T^{-1})^* g \in \mathrm{D}_{T^*}$$

и

$$T^* (T^{-1})^* g = g. \tag{4'}$$

С другой стороны, если f пробегает $\mathrm{D}_{T^{-1}}$, а h пробегает D_{T^*}, то

$$(f, h) = (TT^{-1}f, h) = (T^{-1}f, T^*h),$$

откуда следует, что

$$T^*h \in \mathrm{D}_{(T^{-1})^*}$$

и

$$(T^{-1})^* T^*h = h. \tag{4''}$$

Соотношения (4′), (4″) и показывают, что

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

45. Собственные векторы, инвариантные подпространства и приводимость линейных операторов. Число λ называют *собственным значением* линейно оператора T, если существует такой вектор $f \neq 0$, что

$$Tf = \lambda f. \tag{1}$$

При этом вектор f называют *собственным вектором* оператора T (точнее, собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ).

Если оператор T замкнут, то пополненное нулевым вектором множество всех его собственных векторов, принадлежащих данному собственному значению λ, является подпространством (конечно- или бесконечномерным). Это подпространство называется *собственным подпространством* оператора T, а его размерность — *кратностью собственного значения* λ.

Более общим, чем понятие о собственном подпространстве, является понятие об инвариантном многообразии.

Линейное многообразие $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{H}$ называется *инвариантным многообразием* оператора T, если $\mathrm{L} \subseteq D_T$ и из $f \in \mathrm{L}$ следует, что $Tf \in \mathrm{L}$.

Может случиться, что L является подпространством: $\mathrm{L} = \mathrm{H}_1 \subseteq \subseteq \mathrm{H}$. В этом случае L будет *инвариантным подпространством* оператора T.

Каждое конечномерное инвариантное многообразие является инвариантным подпространством и по известной теореме алгебры содержит, по крайней мере, один собственный вектор оператора.

Оператор T порождает на инвариантном многообразии (подпространстве) новый оператор, который называется частью оператора T на этом многообразии (соответственно в подпространстве).

Если H_1 есть инвариантное подпространство оператора T, то ортогональное дополнение $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$ может и не быть инвариантным подпространством рассматриваемого оператора. Но допустим, что оба подпространства H_1, $\mathrm{H}_2 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$ являются инвариантными подпространствами оператора T. Заметим, что в силу нашего определения это возможно лишь в том случае, когда оператор T определен всюду в H. Пусть T_1, T_2 — части оператора T в подпространствах H_1, H_2. Легко видеть, что изучение оператора T сводится к изучению операторов T_1, T_2.

Действительно, беря любой элемент $h \in \mathrm{H}$, мы можем положить

$$h = h_1 + h_2,$$

где $h_1 \in \mathrm{H}_1$, $h_2 \in \mathrm{H}_2$, после чего получаем

$$Th = T_1 h_1 + T_2 h_2.$$

Мы теперь обобщим этот простой факт на тот случай, когда оператор T определен не всюду в H. Для этого введем следующее

Определение 1. *Пусть* G — *некоторое подпространство в* H, *а* P — *оператор проектирования на* G. *Если для некоторого оператора* T *в* H

1) *из* $f \in \mathrm{D}_T$ *следует, что* $Pf \in \mathrm{D}_T$ (*т. е. проектирование на* G *не выводит элементов из* D_T);

2) *из* $h \in D_T \cap G$ *следует, что* $Th \in G$, *то оператор* S, *для которого* $D_S = D_T \cap G$ *и* $Sh = Th$ *при* $h \in D_S$ *называется частью оператора* T, *лежащей в* G.

Теорема 1. *Если для некоторого оператора* T *в* H *оба подпространства* $H_1 \subseteq H$ *и* $H_2 = H \ominus H_1$ *удовлетворяют условиям определения 1, то для любого* $f \in D_S$

$$Tf = T_1 f_1 + T_2 f_2,$$

где f_1, f_2 — *проекции* f_1 *на* H_1, *соответственно* H_2, *а* T_1, T_2 — *части оператора* T, *лежащие соответственно в* H_1 *и* H_2.

Доказательство так же просто, как и в рассмотренном выше случае, когда T есть оператор, определенный всюду в H.

Определение 2. *Если подпространство* H_1 *удовлетворяет условиям теоремы 1, то говорят, что оно приводит оператор* T.

Легко видеть, что если подпространство H_1 приводит оператор T, то ортогональное дополнение H_2 также приводит T. Тривиальными подпространствами, приводящими T, являются нулевое подпространство и само H. Если оператор T не имеет других приводящих подпространств, то его называют *неприводимым*.

Теорема 2. *Пусть* P *есть оператор проектирования на подпространство* G. *В таком случае для приводимости оператора* T *подпространством* G *необходимо и достаточно, чтобы из* $f \in D_T$ *следовало*

$$1)\ Pf \in D_T \text{ и } 2)\ PTf = TPf,$$

иначе говоря, чтобы оператор T *был перестановочен с оператором* P.

Доказательство. Покажем необходимость условия теоремы. Если подпространство G приводит T, то из $f \in D_T$ следует, что $Pf \in D_T$, и, значит, условие 1) доказано. Чтобы доказать условие 2), положим

$$f = g + h,$$

где

$$g = Pf.$$

Так как G приводит T, то

$$Tf = Tg + Th,$$

где $Tg \in G$, $Th \in H \ominus G$. Поэтому

$$PTf = PTg = Tg,$$

т. е.

$$PTf = TPf.$$

Так же просто доказывается и достаточность условия.

Говорят, что проектирующий оператор P *приводит* T, если приводит T подпространство G, на которое P проектирует.

Сведе́ние изучения структуры оператора T к исследованию приводящих его подпространств и лежащих в них частей оператора T основано на следующем предложении.

Теорема 3. *Пусть подпространства* H_k $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $n \leqslant \infty)$ *попарно ортогональны и*

$$\mathrm{H} = \sum_k \oplus \mathrm{H}_k.$$

Пусть T — линейный оператор, который приводится каждым из подпространств H_k и который мы будем предполагать замкнутым, если $n = \infty$. Пусть, наконец, P_k — оператор проектирования на H_k, а T_k — часть T, лежащая в H_k.

В таком случае для принадлежности элемента f к D_T необходимо и достаточно, чтобы

$$P_k f \in \mathrm{D}_{T_k} \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \| T_k P_k f \|^2 < \infty; \tag{2}$$

при этом

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} T_k P_k f. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{D}_T$. Так как H_k приводит T, то $P_k f \in \mathrm{D}_T$ и, значит,

$$P_k f \in \mathrm{D}_T \cap \mathrm{H}_k = \mathrm{D}_{T_k}.$$

Кроме того, $P_k T f = T P_k f$. Поэтому

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} P_k T f = \sum_{k=1}^{n} T P_k f = \sum_{k=1}^{n} T_k P_k f.$$

Отсюда в случае $n = \infty$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| T_k P_k f \|^2.$$

Примем теперь, что условия (2) выполнены. Если $n < \infty$, то принадлежность f к D_T и равенство (3) следуют из линейности D_T. Если же $n = \infty$, то из линейности D_T следует вначале принадлежность к D_T сумм

$$\sum_{k=1}^{r} P_k f \; (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Далее, из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| T_k P_k f \|^2$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f = \lim_{r \to \infty} T \left(\sum_{k=1}^{r} P_k f \right),$$

откуда в силу замкнутости оператора T

$$f \in D_T \text{ и } Tf = \sum_{k=1}^{\infty} T_k P_k f.$$

Замечание. Теорема остается в силе и для того случая, когда пространство H расщеплено на несчетное множество подпространств H_α. Это следует из того, что каждый из векторов f, Tf имеет не более счетного множества отличных от нуля проекций на подпространства H_α (см. n° 10).

Заканчивая настоящий пункт, рассмотрим один характерный пример.

Пусть пространство H сепарабельно и $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — ортонормированный базис в нем. Рассмотрим линейный оператор U_0, который на ортах задается равенствами

$$U_0 e_k = e_{k+1} \quad (-\infty < k < \infty),$$

а затем расширяется по непрерывности. U_0 есть унитарный оператор. Замкнутая линейная оболочка G совокупности векторов $\{e_k\}_{k=q}^{\infty}$ при каком-нибудь $q > -\infty$ является инвариантным подпространством оператора U_0, однако G не приводит U_0. Действительно, если P — оператор проектирования на G, то

$$U_0 P e_{q-1} = 0, \quad P U_0 e_{q-1} = P e_q = e_q,$$

т. е.

$$U_0 P \neq P U_0.$$

Оператор U_0 является примером оператора, не имеющего собственных векторов.

Действительно, предположение

$$U_0 f = \lambda f, \quad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k \neq 0$$

означает, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_{k+1} = \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

откуда

$$\alpha_k = \lambda \alpha_{k+1} \quad (-\infty < k < \infty).$$

Так как

$$(f, f) = (U_0 f, U_0 f) = (\lambda f, \lambda f) = |\lambda|^2 (f, f)$$

и $f \neq 0$, то $|\lambda| = 1$. Поэтому

$$|\alpha_k| = |\alpha_0| \quad (\pm k = 1, 2, 3, \ldots),$$

что противоречит предположению

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Так как U_0 не имеет собственных векторов, то, очевидно, не существует конечномерных подпространств, приводящих U_0. В дальнейшем (см. n° 54) мы установим существование бесконечномерных подпространств, приводящих U_0.

46. Симметрические операторы. Линейный оператор A называется *симметрическим*[1], если

a) область определения D_A плотна в H и

b) для любых двух элементов f, g из D_A имеет место равенство

$$(Af, g) = (f, Ag).$$

Из определения следует, что скалярное произведение (Af, f) при любом $f \in D_A$ вещественно. Может случиться, что при некотором вещественном γ

$$(Af, f) \geqslant \gamma (f, f)$$

для любого $f \in D_A$. В этом случае симметрический оператор A называют *полуограниченным снизу*, а наибольшее из всех значений, γ, при которых выполняется это неравенство, называют *нижней гранью*[2] оператора A (аналогично определяется оператор, *полуограниченный сверху*, и его *верхняя грань*). Если, в частности,

$$(Af, f) \geqslant 0 \quad (f \in D_A),$$

то оператор A называют *положительным*.

Если симметрический оператор ограничен, то его расширение по непрерывности определено всюду в H и является, очевидно, ограниченным самосопряженным оператором (см. n° 25).

Если же симметрический оператор не ограничен, то в силу теоремы n° 28 его область определения не может совпадать со всем пространством.

---

[1] Наряду с термином *симметрический* применяется термин *эрмитов*.

[2] Для ограниченных самосопряженных операторов это понятие было введено в n° 25.

Для удобства при дальнейших ссылках сформулируем этот результат в виде следующего предложения.

Теорема 1. *Если симметрический оператор A определен всюду в* H, *то A есть самосопряженный ограниченный оператор.*

Если A — симметрический оператор, то, очевидно, $A^* \supseteq A$, а так как сопряженный оператор замкнут, то это соотношение показывает, что симметрический оператор всегда допускает замыкание.

Если B — симметрическое расширение оператора A, то $B \subseteq A^*$, т. е. *всякое симметрическое расширение оператора A содержится в сопряженном операторе A^*.*

Действительно, из $B \supseteq A$ следует, что $B^* \subseteq A^*$, и остается принять во внимание, что $B \subseteq B^*$.

Оператор, совпадающий со своим сопряженным ($A = A^*$), называется *самосопряженным*; он не имеет симметрических расширений.

Симметрический оператор, не имеющий симметрических расширений, но не совпадающий со своим сопряженным ($A \subset A^*$), называется *максимальным* симметрическим оператором.

Теорема 2. *Симметрический оператор A, область значений которого Δ_A совпадает со всем пространством, есть оператор самосопряженный.*

Доказательство. Надлежит проверить, что любой элемент g из D_{A^*} принадлежит D_A. Итак, пусть $g \in D_{A^*}$ и $A^*g = g^*$. Так как, по условию теоремы, $\Delta_A = H$, то существует такой элемент $h \in D_A$, что $Ah = g^*$. Следовательно, при любом $f \in D_A$

$$(Af,\ g) = (f,\ g^*) = (f,\ Ah) = (Af,\ h),$$

откуда, снова используя совпадение Δ_A с H, заключаем, что $g = h$, т. е. $g \in D_A$, а это требовалось доказать.

Теорема 3. *Если самосопряженный оператор имеет обратный оператор, то этот обратный оператор является оператором самосопряженным (ограниченным или неограниченным).*

Доказательство. По теореме 1 п.° 44 нулевое подпространство G оператора A есть

$$G = H \ominus \bar{\Delta}_A,$$

а в силу условия теоремы 3 $G = 0$. Поэтому $\bar{\Delta}_A = H$, т. е. $\bar{D}_{A^{-1}} = H$, и остается применить теорему 2 п.° 44.

Теорема 4. *Собственные значения симметрического оператора вещественны. Собственные векторы f_1, f_2, принадлежащие двум различным собственным значениям λ_1, λ_2 симметрического оператора, ортогональны.*

Действительно, если

$$Af = \lambda f \quad (f \neq 0),$$

то

$$(Af, f) = \lambda (f, f),$$

и так как для симметрического оператора (Af, f) вещественно, а $(f, f) > 0$, то число λ вещественно.

Итак, первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения положим

$$Af_1 = \lambda_1 f_1, \ Af_2 = \lambda_2 f_2, \ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

В таком случае

$$\lambda_1 (f_1, f_2) = (Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) = \lambda_2 (f_1, f_2),$$

откуда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$$

и, следовательно,

$$(f_1, f_2) = 0.$$

Теорема 5. *Если* G *есть инвариантное подпространство симметрического оператора* A *и если проектирование на* G *не выводит элементов из* D_A, *то подпространство* G *приводит оператор* A.

Доказательство. На основании теоремы 1 п° 45 все сводится к доказательству того, что подпространство $H \ominus G$ является инвариантным подпространством оператора A.

Беря произвольный элемент

$$f \in D_A \cap (H \ominus G)$$

и заставляя g пробегать D_A, будем, в силу условий теоремы, иметь равенство

$$(Af, Pg) = (f, APg) = 0,$$

где P — оператор проектирования на G. Итак, при любом g из D_A

$$(Af, Pg) = 0$$

или

$$(PAf, g) = 0.$$

В силу плотности D_A в H это значит, что

$$PAf = 0,$$

т. е.

$$Af \in H \ominus G,$$

и теорема доказана.

В заключение приведем одно простое предложение, которым нам придется воспользоваться позднее.

Лемма. *Для того чтобы линейное многообразие* $\mathrm{D}\,(\mathrm{D}_A \subset \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{D}_{A^*})$ *являлось областью определения самосопряженного расширения симметрического оператора* A, *необходимо и достаточно, чтобы совокупность всех элементов* f *из* D_{A^*}, *удовлетворяющих при любом* $g \in \mathrm{D}$ *условию*

$$(A^*f,\ g) = (f,\ A^*g),$$

совпадала с D.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из рассмотрений настоящего параграфа.

47. Снова об изометрических и унитарных операторах. Мы будем рассматривать в настоящем пункте изометрические операторы в узком смысле, т. е. областью определения D_V и областью значений Δ_V оператора V будут некоторые подпространства одного и того же пространства H. Изометрический оператор называют *максимальным*, если он не имеет изометрических расширений.

Теорема 1. *Собственные значения изометрического оператора по модулю равны* 1.

Доказательство. Действительно, пусть

$$Vf = \lambda f.$$

Тогда

$$(f,\ f) = (Vf,\ Vf) = (\lambda f,\ \lambda f) = |\lambda|^2 (f,\ f),$$

откуда $|\lambda| = 1$, так как $(f,\ f) \neq 0$.

Теорема 2. *Собственные векторы* f_1, f_2, *принадлежащие двум различным собственным значениям* λ_1, λ_2 *изометрического оператора, ортогональны.*

Доказательство. Пусть

$$Vf_1 = \lambda_1 f_1,\quad Vf_2 = \lambda_2 f_2.$$

В таком случае

$$(f_1,\ f_2) = (Vf_1,\ Vf_2) = (\lambda_1 f_1,\ \lambda_2 f_2) = \lambda_1\overline{\lambda_2}\,(f_1,\ f_2),$$

откуда

$$(1 - \lambda_1\overline{\lambda_2})\,(f_1,\ f_2) = 0$$

и, значит,

$$(f_1,\ f_2) = 0,$$

так как $1 - \lambda_1\overline{\lambda_2} \neq 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы подпространство* G *приводило унитарный оператор* U, *необходимо и достаточно, чтобы подпространство* G *было инвариантным подпространством для каждого из операторов* U, U^{-1}.

Доказательство. Пусть G приводит U. Тогда $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ есть инвариантное подпространство оператора U, т. е. при любом $f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ и любом $g \in \mathrm{G}$

$$(Uf,\ g) = 0,$$

откуда

$$(f,\ U^{-1}g)=0,$$

а это и означает, что $U^{-1}g \in \mathrm{G}$, т. е. что G является инвариантным подпространством для U^{-1}.

Обратно, пусть G инвариантно относительно оператора U^{-1}. Тогда при любом $f \in \mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ и любом $g \in \mathrm{G}$

$$(Uf,\ g)=(f,\ U^{-1}g)=0,$$

откуда вытекает, что подпространство $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}$ инвариантно относительно оператора U. Кроме того, G инвариантно относительно U по условию. Следовательно, G приводит оператор U.

48. Понятие о спектре. В линейной алгебре под спектром матрицы понимают совокупность ее собственных значений. В элементарной теории линейных интегральных уравнений спектр вводится через посредство характеристических чисел этого уравнения. При этом оказывается, что некоторое неоднородное линейное уравнение, содержащее параметр, разрешимо и притом однозначно при любой правой части, если значение параметра не принадлежит спектру, и неразрешимо, если значение параметра принадлежит спектру.

Перейдем теперь к общим рассмотрениям и примем, что нам дан некоторый замкнутый линейный оператор T, определенный на плотном в H многообразии D_T. Обозначим через λ параметр, который может принимать любые комплексные значения, и рассмотрим операторное уравнение

$$Tf-\lambda f=g.$$

Исследование этого уравнения сводится к исследованию линейного многообразия $\Delta_T(\lambda)$, пробегаемого вектором $(T-\lambda I)f$, когда f пробегает D_T. Коротко $\Delta_T(\lambda)$ можно записать в виде $\Delta_T(\lambda)=$ $=(T-\lambda I)\mathrm{D}_T$. Оператор $T-\lambda I=T_\lambda$ осуществляет соответствие (не обязательно взаимно однозначное) между D_T и $\Delta_T(\lambda)$. Если это соответствие взаимно однозначно, то оператор $T-\lambda I$ имеет обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ с областью определения $\Delta_T(\lambda)$ и областью значений D_T.

Определение 1. *Значения параметра λ, для которых обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует, определен всюду в* H $(\Delta_T(\lambda)=\mathrm{H})$ *и ограничен, называются регулярными значениями (или регулярными точками) оператора T. Все остальные точки комплексной плоскости образуют спектр оператора T.*

В упомянутых выше случаях, которые относятся к линейной алгебре и теории интегральных уравнений, спектр оператора состоит из всех его собственных значений[1]. Вообще же совокупность соб-

[1] Собственное значение линейного интегрального оператора есть единица, деленная на характеристическое число соответствующего интегрального уравнения.

ственных значений не исчерпывает спектр. Действительно, приводимая далее теорема 1 характеризует собственные значения оператора, как такие значения параметра λ, для которых оператор $T-\lambda I$ не имеет обратного, а между тем может представиться еще и тот случай, когда при рассматриваемом значении параметра λ обратный оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ существует, но определен не всюду в H или неограничен.

Теорема 1. *Осуществляемое оператором $T-\lambda I$ соответствие между D_T и $\Delta_T(\lambda)$ взаимно однозначно в том и только том случае, если λ не есть собственное значение оператора T.*

Доказательство. Если оператор $T-\lambda I$ не осуществляет взаимно однозначного соответствия между D_T и $\Delta_T(\lambda)$, то существуют такие $f_1,\ f_2 \in \mathrm{D}_T\ (f_1 \neq f_2)$, что

$$Tf_1-\lambda f_1=g,\quad Tf_2-\lambda f_2=g.$$

Следовательно,

$$Tf=\lambda f,$$

где $f=f_1-f_2\neq 0$, т. е λ есть собственное значение оператора T.

Доказательство обратного утверждения так же просто.

Не останавливаясь в общем случае на детальном априорном разборе всех возможных предположений относительно оператора $(T-\lambda I)^{-1}$ и области $\Delta_T(\lambda)$, ограничимся здесь тем особенно важным случаем, когда рассматриваемый оператор самосопряженный (мы будем его обозначать не T, а A).

Прежде всего введем обозначение G_λ для нулевого подпространства оператора $A-\lambda I$. На основании теоремы 1 n° 44

$$\mathrm{G}_\lambda=\mathrm{H}\ominus\overline{\Delta_A(\bar\lambda)}.$$

С другой стороны, если $\mathrm{G}_\lambda\neq 0$, то λ есть собственное значение оператора A, а G_λ является собственным подпространством, принадлежащим этому собственному значению. Если же $\mathrm{G}_\lambda=0$, то λ не является собственным значением оператора A. Напомним также (см. первое утверждение теоремы 4 n° 46), что все собственные значения оператора A вещественны. Поэтому

$$\overline{\Delta_A(\lambda)}=\mathrm{H}$$

в том и только том случае, когда λ не является собственным значением оператора A. Нам удобно сформулировать эти выводы в виде специального предложения.

Теорема 2. *Число λ является собственным значением самосопряженного оператора A в том и только том случае, когда*

$$\overline{\Delta_A(\lambda)}\neq\mathrm{H}.$$

Если это условие выполнено, то $\mathfrak{J}\lambda = 0$ и $\mathrm{H} \ominus \overline{\Delta_A(\lambda)}$ является собственным подпространством оператора A, принадлежащим собственному значению λ.

Теорема 3. *Невещественные точки комплексной плоскости λ являются регулярными точками самосопряженного оператора A.*

Доказательство. Число $\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ не может быть собственным значением оператора A. Следовательно, на основании теоремы 1 оператор $A - \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между D_A и $\Delta_A(\lambda)$. Для произвольно взятого $g \in \Delta_A(\lambda)$ поэтому однозначно находится такое f, что $(A - \lambda I) f = g$, и мы можем написать равенство

$$\|g\|^2 = ((A - \xi I) f - i\eta f,\ (A - \xi I) f - i\eta f) =$$
$$= \|(A - \xi I) f\|^2 + i\eta((A - \xi I) f,\ f) - i\eta(f,\ (A - \xi I) f) + \eta^2 \|f\|^2 =$$
$$= \|(A - \xi I) f\|^2 + \eta^2 \|f\|^2,$$

откуда

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{|\eta|} \|g\|,$$

т. е.

$$\|(A - \lambda I)^{-1} g\| \leqslant \frac{1}{|\eta|} \|g\|,$$

значит, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Поскольку λ не является собственным значением оператора, то в силу теоремы 2

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = \mathrm{H}.$$

Остается доказать, что многообразие $\Delta_A(\lambda)$ замкнуто. Допуская, что $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$, мы найдем, что $(A - \lambda I)^{-1}$, как оператор ограниченный, можно расширить на $\overline{\Delta_A(\lambda)}$. Это расширение совпадет с замыканием оператора $(A - \lambda I)^{-1}$, который поэтому не замкнут. Но это невозможно, так как замкнутость оператора A влечет замкнутость оператора $(A - \lambda I)^{-1}$.

Следствие 1. *Спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси.*

Следствие 2. *Регулярная точка самосопряженного оператора A может быть определена как такое значение параметра λ, для которого $\Delta_A(\lambda) = \mathrm{H}$.*

Доказательство. Если λ — невещественная точка, то ее регулярность установлена теоремой 3. Если λ вещественно и $\Delta_A(\lambda) = \mathrm{H}$, то, в силу теоремы 2, λ не есть собственное значение оператора A. Поэтому, в силу теоремы 1, существует определенный всюду в H обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Этот оператор самосопряженный и, следовательно (см. начало n° 46), он ограничен, так что применимость определения 1 доказана.

Мы можем теперь, не вступая в противоречие с определением 1, принять следующее

Определение 2. *Если A — самосопряженный оператор, то точка λ называется регулярной его точкой при $\Delta_A(\lambda) = \mathrm{H}$ и точкой спектра при $\Delta_A(\lambda) \neq \mathrm{H}$.*

Классификацию точек спектра самосопряженного оператора дает следующее

Определение 3. *Значение λ принадлежит точечному спектру самосопряженного оператора A, если $\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq \mathrm{H}$, и принадлежит непрерывному спектру, если $\Delta_A(\lambda) \neq \overline{\Delta_A(\lambda)}$ или если λ есть собственное значение бесконечной кратности.*

Заметим, что этим определением не исключается принадлежность точки λ одновременно обеим частям спектра даже в том случае, когда λ не есть собственное значение бесконечной кратности.

На основании теоремы 2 точечный спектр оператора совпадает с совокупностью его собственных значений. Множество всех изолированных точек спектра, за исключением собственных значений бесконечной кратности, называют иногда *дискретным* спектром[1].

Заканчивая настоящий пункт, докажем следующее предложение.

Теорема 4. *Спектр самосопряженного оператора замкнут*[2].

Доказательство. Достаточно доказать, что множество регулярных точек самосопряженного оператора A открыто.

Пусть λ_0 — регулярная точка. В таком случае существует такое число $k > 0$, что при любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$\|Af - \lambda_0 f\| \geqslant k\|f\|.$$

Если $0 < \delta < \frac{1}{2}k$, то при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ и любом $f \in \mathrm{D}_A$

$$\|Af - \lambda f\| \geqslant \|Af - \lambda_0 f\| - \delta\|f\| \geqslant \frac{1}{2}k\|f\|,$$

откуда видно, во-первых, что λ не есть собственное значение оператора A, так что $\overline{\Delta_A(\lambda)} = \mathrm{H}$, и, во-вторых, что обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Равенство $\Delta_A(\lambda) = \overline{\Delta_A(\lambda)}$ является следствием замкнутости оператора A. Таким образом, все точки λ из окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ регулярны, и теорема доказана.

49. Резольвента. Как и в предыдущем пункте, начнем с произвольного замкнутого линейного оператора T, область определения которого плотна в H, а затем обратимся к самосопряженному оператору A.

[1] Из дальнейшего (см. n° 93) вытекает, что дискретный спектр является частью точечного спектра.

[2] Имеет место следующий общий факт: спектр любого замкнутого оператора замкнут. См., например, Данфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. М., «Наука», 1966. 353 с

Резольвентой оператора T называют зависящий от параметра λ оператор

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1},$$

рассматриваемый на множестве всех тех значений λ, для которых он существует и для которых его область определения, т. е. $\Delta_T(\lambda)$, плотна в H.

В каждой регулярной точке оператора T резольвента R_λ есть определенный во всем пространстве ограниченный оператор.

Оператор R_λ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\Delta_T(\lambda)$ и D_T. Отсюда, в частности, вытекает, что если для какой-нибудь регулярной точки λ оператора T имеет место равенство $R_\lambda h = 0$, то $h = 0$.

Теорема 1. *Для любых двух регулярных значений λ, μ оператора T имеет место равенство (так называемое соотношение Гильберта)*

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda.$$

Доказательство. Так как λ, μ — регулярные точки оператора T, то для любого $h \in \mathrm{H}$

$$R_\lambda h = R_\mu (T - \mu I) R_\lambda h, \quad R_\mu h = R_\mu (T - \lambda I) R_\lambda h.$$

Вычитая первое равенство из второго, мы и получим требуемое соотношение.

Из соотношения Гильберта следует перестановочность резольвент при всех регулярных значениях λ, μ:

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

Это есть частный случай следующего общего предложения.

Теорема 2. *Для перестановочности оператора T с ограниченным оператором S, определенным всюду в H, необходимо, чтобы оператор S был перестановочен с резольвентой $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ для любого регулярного значения λ, и достаточно, чтобы S и R_λ были перестановочны хотя бы для одного регулярного значения λ.*

Доказательство. Если операторы T и S перестановочны, то при любом $f \in \mathrm{D}_T$ имеет место равенство

$$TSf = STf,$$

а значит и равенство

$$(T - \lambda I) Sf = S (T - \lambda I) f.$$

Какова бы ни была регулярная точка λ оператора T, элемент $f = R_\lambda h$ пробегает D_T, когда h пробегает H. Поэтому, при любом h

$$R_\lambda (T - \lambda I) SR_\lambda h = R_\lambda S (T - \lambda I) R_\lambda h,$$

а следовательно,

$$SR_\lambda h = R_\lambda Sh. \tag{1}$$

Таким образом, необходимость доказана.

Обратно, если равенство (1) верно (при каком-нибудь регулярном λ) для всех $h \in \mathrm{H}$, то при любом $f \in \mathrm{D}_T$ справедливо равенство

$$SR_\lambda (T - \lambda I) f = R_\lambda S (T - \lambda I) f,$$

а значит и равенство

$$(T - \lambda I) SR_\lambda (T - \lambda I) f = (T - \lambda I) R_\lambda S (T - \lambda I) f,$$

которое можно переписать в виде

$$(T - \lambda I) Sf = S (T - \lambda I) f,$$

откуда уже следует, что

$$TSf = STf.$$

Тем самым доказана и достаточность.

Обратимся теперь к самосопряженному оператору A с тем, чтобы определить его резольвенту R_λ также и для собственных значений, после чего резольвента самосопряженного оператора будет определена для всех точек плоскости λ.

С этой целью примем, что λ' есть собственное значение оператора A и обозначим через $\mathrm{G}_{\lambda'}$ собственное подпространство оператора A, принадлежащее λ'. Как мы знаем, $\mathrm{G}_{\lambda'}$ приводит оператор A. Пусть A' — часть оператора A, лежащая в $\mathrm{H} \ominus \mathrm{G}_{\lambda'} = \mathrm{H}'$. Легко видеть, что A' есть самосопряженный оператор в H', для которого λ' не есть собственное значение. Мы определим $R_{\lambda'}$, полагая

$$R_{\lambda'} = (A' - \lambda' I)^{-1}.$$

Областью определения оператора $R_{\lambda'}$ является плотное в H' многообразие $\Delta_{A'}(\lambda')$. Его описывает точка

$$(A' - \lambda' I) f' = (A - \lambda' I) f',$$

когда точка f' пробегает $\mathrm{D}_{A'}$. Но легко видеть, что то же многообразие описывает точка

$$(A - \lambda' I) f,$$

когда точка f пробегает D_A. Таким образом,

$$\Delta_{A'}(\lambda') = \Delta_A(\lambda').$$

Что касается области значений оператора $R_{\lambda'}$, то она получится, если D_A спроектировать на ортогональное дополнение к собственному подпространству, принадлежащему собственному значению λ'.

Заканчивая настоящий пункт, покажем, что

$$(R_\lambda)^* = R_{\bar{\lambda}}, \tag{2}$$

если только λ не принадлежит точечному спектру оператора (в последнем случае оператор R_λ вообще не имеет сопряженного).

Действительно, в силу теоремы 2 n° 44 имеем

$$(R_\lambda)^* = [(A - \lambda I)^{-1}]^* = [(A - \lambda I)^*]^{-1} = (A - \bar{\lambda} I)^{-1} = R_{\bar{\lambda}},$$

что и доказывает формулу (2).

50. Оператор сопряжения[1]. Так называют определенный всюду в H оператор J, для которого

1) $$(Jf,\ Jg) = \overline{(f,\ g)},$$
2) $$J^2 f = f$$

для любых $f,\ g \in$ H.

Из 2) следует, что областью значений оператора J также является все пространство. Действительно, любой вектор $h \in$ H можно представить в виде $h = Jg$, стоит лишь взять $g = Jh$.

Оператор J вместо обычной линейности обладает следующим свойством:

$$J(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} Jf + \bar{\beta} Jg.$$

Действительно, полагая в 1)

$$g = Jh,$$

где h будет пробегать H, получим

$$(Jf,\ h) = \overline{(f,\ Jh)},$$

откуда

$$(J(\alpha f + \beta g),\ h) = \overline{(\alpha f + \beta g,\ Jh)} = \bar{\alpha}\,\overline{(f,\ Jh)} + \bar{\beta}\,\overline{(g,\ Jh)} =$$
$$= \bar{\alpha}(Jf,\ h) + \bar{\beta}(Jg,\ h) = (\bar{\alpha} Jf + \bar{\beta} Jg,\ h),$$

и утверждение доказано.

Примером оператора сопряжения в L^2 является операция перехода к комплексно-сопряженной функции

$$J\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}.$$

[1] Результаты настоящего пункта будут использованы лишь в добавлении II.

Для всякого оператора сопряжения в сепарабельном пространстве можно так выбрать ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, что из

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

будет следовать

$$Jf = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k e_k.$$

Доказательство. Каждый элемент $h \in H$ можно представить в виде $h = h' + ih''$, где $h' = \frac{1}{2}(Jh + h)$, $h'' = \frac{i}{2}(Jh - h)$. Элементы h', h'', очевидно, удовлетворяют соотношению $Jh = h$. Совокупность всех таких элементов g обозначим G. Теперь возьмем в H какое-нибудь плотное счетное множество $\{h_k\}_1^\infty$ и с его помощью образуем счетное множество $\{g_m\}_1^\infty$, где $g_{2k-1} = h'_k$, $g_{2k} = h''_k$. Так как множество $\{g_{2k-1} + ig_{2k}\}_1^\infty$ плотно в H, то ортогонализуя последовательность $\{g_m\}_1^\infty$, мы получим ортонормированный базис в H. Замечая, что все g_m принадлежат G, а также, что скалярное произведение любых двух элементов из G вещественно, и вспоминая метод ортогонализации Шмидта—Сонина (n° 8), заключаем, что построенный ортонормированный базис принадлежит G. Это и есть требуемый базис $\{e_k\}_1^\infty$.

Определение. *Симметрический оператор A называют вещественным по отношению к данному оператору сопряжения J, если операторы A и J перестановочны, т. е. если из $f \in D_A$ следует, что $Jf \in D_A$ и $JAf = AJf$.*

Теорема. *Если A — самосопряженный оператор, вещественный относительно данного оператора сопряжения J, то резольвента оператора A при всех невещественных λ удовлетворяет соотношению*

$$R_\lambda = JR_\lambda^* J. \tag{1}$$

Доказательство. Применим оператор сопряжения к обеим частям равенства

$$(A - \lambda I) R_\lambda = I.$$

Получим

$$J(A - \lambda I) R_\lambda = J.$$

Отсюда, в силу вещественности оператора A по отношению к оператору J, находим

$$(A - \bar{\lambda} I) JR_\lambda = J.$$

Теперь применим к обеим частям оператор JR_λ^-. Это даст требуемое равенство, так как $R_\lambda^- = R_\lambda^*$.

Если T — линейный оператор с плотной в H областью определения, а J — заданный оператор сопряжения, то, по аналогии с терминологией теории матриц, оператор JT^*J можно назвать *транспонированным* с T и обозначить T'. Доказанное только что соотношение (1) можно, следовательно, записать в виде

$$R_\lambda' = R_\lambda.$$

51. Метод графика. Рассмотрим множество пар $\{f, g\}$, где абсцисса f и ордината g пробегают H. Будем считать эти пары элементами декартова произведения $\mathbf{H} = \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ или (см. п. 7) элементами ортогональной суммы $\{\mathrm{H}, 0\} \oplus \{0, \mathrm{H}\}$.

Пусть T — какой-нибудь оператор в H. В таком случае совокупность $\mathbf{M}(T)$ всех точек вида $\{f, Tf\}$ называют *графиком* оператора T.

Все точки множества $\mathbf{M}(T)$ однозначно определяются своими абсциссами. Обратно, если все точки некоторого множества $\mathbf{M}$ из $\mathbf{H}$ однозначно определяются своими абсциссами, то в H существует оператор T, графиком которого является множество $\mathbf{M}$.

Весьма просто отражается на графике, замкнут или не замкнут оператор T, а именно, для замкнутости оператора T необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто в $\mathbf{H}$ точечное множество $\mathbf{M}(T)$. Так как любое множество в $\mathbf{H}$ можно замкнуть, то на основании сказанного может показаться, что любой оператор T в H допускает замыкание. Но дело в том, что замыкание графика $\mathbf{M}(T)$ оператора T может привести к множеству $\overline{\mathbf{M}(T)}$, точки которого не определяются однозначно своими абсциссами, и в этом случае множество $\overline{\mathbf{M}(T)}$ не будет графиком, т. е. не порождается никаким оператором. Если же множество $\overline{\mathbf{M}(T)}$ не содержит двух различных точек с равными абсциссами, то оператор T допускает замыкание $\overline{T}$ и $\mathbf{M}(\overline{T}) = \overline{\mathbf{M}(T)}$.

Легко видеть, что если оператор T линеен, то множество $\mathbf{M}(T)$ будет линейным многообразием в $\mathbf{H}$.

Определим теперь всюду в $\mathbf{H}$ оператор $\mathbf{U}$, полагая

$$\mathbf{U}\{f, g\} = \{g, -f\}.$$

$\mathbf{U}$ есть унитарный оператор. Действительно, его областью значений является все пространство $\mathbf{H}$, а с другой стороны,

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}\{f_1, g_1\}, \mathbf{U}\{f_2, g_2\}) &= (\{g_1, -f_1\}, \{g_2, -f_2\}) = \\ &= (g_1, g_2) + (f_1, f_2) = (\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}).\end{aligned}$$

Заметим также, что $\mathbf{U}^2 = -\mathbf{I}$, Применим метод графика для решения поставленных в n° 44 вопросов относительно существования T^{**} и равенства $T^{**} = \overline{T}$. С этой целью возьмем равенство

$$(Tf, g) - (f, g^*) = (\{Tf, -f\}, \{g, g^*\}) = (\mathbf{U}\{f, Tf\}, \{g, g^*\}),$$

верное для любого $f \in D_T$ и любой пары элементов g, g^* из H.

Из написанного равенства вытекает ряд следствий:

1°. Для того чтобы элементы g, $g^* \in \mathrm{H}$ удовлетворяли соотношению

$$(Tf, g) = (f, g^*)$$

при любом $f \in D_T$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $\{g, g^*\}$ пространства **H** был ортогонален множеству $\mathbf{UM}(T)$, в которое оператор **U** переводит график оператора T.

2°. Если оператор T^* существует, то его графиком является

$$\mathbf{M}(T^*) = \mathbf{H} \ominus \overline{\mathbf{UM}(T)}.$$

3°. Для существования оператора T^* необходимо и достаточно, чтобы точки множества

$$\mathbf{H} \ominus \overline{\mathbf{UM}(T)}$$

однозначно определялись своими абсциссами.

Следствие 3° есть другой критерий существования сопряженного оператора (первый критерий — плотность многообразия D_T в H — был установлен в n° 44).

Теорема 1. *Если линейный оператор T с плотной в* H *областью определения допускает замыкание, то оператор T^{**} существует и является замыканием*[1] *оператора T:*

$$T^{**} = \overline{T}.$$

(В частности, если оператор T замкнут и $\overline{D}_T = \mathrm{H}$, то $T = T^{**}$.)

Доказательство. Допустим вначале, что оператор T замкнут. В таком случае замкнуто множество $\mathbf{M}(T)$, а значит, и множество $\mathbf{UM}(T)$. Поэтому устанавливаемое следствием 2 соотношение можно переписать в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{UM}(T) \oplus \mathbf{M}(T^*).$$

Отсюда, применяя оператор **U** и учитывая, что $\mathbf{U}^2\mathbf{M}(T) = \mathbf{M}(T)$, получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}(T) \oplus \mathbf{UM}(T^*). \tag{1}$$

---

[1] Таким образом, теорема 1 дает прием для нахождения замыкания оператора. Этот прием иногда применяется в приложениях (см. n° 54).

Иначе говоря,

$$\mathbf{H} \ominus \mathbf{U}\mathbf{M}(T^*) = \mathbf{M}(T). \tag{2}$$

А так как точки множества $\mathbf{M}(T)$, как графика, однозначно определяются своими абсциссами, то, в силу следствия 3, оператор T^{**} существует, а на основании (2) и следствия 2° он совпадает с T. Итак, если оператор T замкнут, теорема доказана.

Примем теперь, что оператор T не замкнут, но допускает замыкание. В таком случае, по доказанному,

$$(\bar{T})^{**} = \bar{T}.$$

Но

$$(\bar{T})^{**} = [(\bar{T})^*]^* = (T^*)^* = T^{**}$$

и, следовательно,

$$T^{**} = \bar{T},$$

что и требовалось доказать.

Докажем методом графика еще одно замечательное предложение.

Теорема 2. *Если T — замкнутый линейный оператор с плотной в H областью определения, то произведение T^*T есть самосопряженный (и притом положительный) оператор.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что при любых $f, g \in \mathrm{D}_{T^*T}$ имеет место соотношение

$$(T^*Tf, g) = (Tf, Tg) = (f, T^*Tg)$$

и, в частности,

$$(T^*Tf, f) = (Tf, Tf) \geqslant 0,$$

так что положительность оператора T^*T уже доказана.

Пусть h — произвольный элемент H. В силу замкнутости оператора T справедливо соотношение (1), а поэтому элемент $\{h, 0\} \in \mathbf{H}$ однозначно представим в виде

$$\{h, 0\} = \{f_0, Tf_0\} + \mathbf{U}\{g_0, T^*g_0\}$$

или

$$\{h, 0\} = \{f_0, Tf_0\} + \{T^*g_0 - g_0\}.$$

Следовательно,

$$h = f_0 + T^*g_0, \quad 0 = Tf_0 - g_0$$

и, значит,

$$h = (I + T^*T)f_0.$$

Таким образом, при любом $h \in \mathrm{H}$ уравнение

$$(I + T^*T)f = h \tag{3}$$

разрешимо (однозначно). Отсюда вытекает, что D_{T^*T} плотно в H. В самом деле, допустим, что существует вектор $h \neq 0$, ортогональный D_{T^*T}. Этот вектор h представим в виде (3). Следовательно, при любом $g \in D_{T^*T}$

$$0 = (h, g) = ((I + T^*T) f, g) = (f, (I + T^*T) g)$$

и, беря $g = f$, получим

$$0 = (f, f) + (f, T^*Tf) = (f, f) + (Tf, Tf),$$

откуда $f = 0$ и, значит, $h = 0$, что противоречит предположению.

Итак, D_{T^*T} плотно в H. Значит, T^*T и, следовательно, $I + T^*T$ — симметрический оператор. Но область значений оператора $I + T^*T$, по доказанному, совпадает со всем пространством H. Поэтому (см. n° 46) $I + T^*T$ есть самосопряженный оператор и таковым является также

$$T^*T = (I + T^*T) - I.$$

Доказательство закончено.

Совершенно аналогично доказывается, что при условиях теоремы является положительным самосопряженным оператором произведение TT^*.

Результат, полученный в настоящем пункте, позволяет обобщить теорему 1 n° 46 на случай произвольного замкнутого оператора, а именно, справедлива

Теорема 3. *Если замкнутый линейный оператор T определен всюду в H, то он ограничен.*

Доказательство. Установим вначале ограниченность сопряженного оператора T^*. С этой целью допустим противное. В таком случае существует последовательность $\{g_k\}_1^\infty \subset D_{T^*}$ $(\|g_k\| = 1)$, для которой

$$\lim_{k \to \infty} \| T^* g_k \| = \infty. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность функционалов

$$\Phi_k (f) = (f, T^* g_k) = (Tf, g_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как при каждом $f \in H$ числовая последовательность $\{\Phi_k (f)\}_1^\infty$ ограничена, то по теореме 2 n° 26 найдется такое $\mathcal{M} < \infty$, что

$$\| \Phi_k \| \leqslant \mathcal{M} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а это противоречит (4), ибо $\| \Phi_k \| = \| T^* g_k \|$.

Итак, оператор T^* ограничен; а так как он замкнут, то его область определения D_{T^*} есть подпространство. С другой стороны, из замкнутости исходного оператора T, в силу теоремы 1 настоящего пункта, вытекает, что D_{T^*} плотно в H. Поэтому $D_{T^*} = H$.

А так как $T=(T^*)^*$, то и T — ограниченный оператор, что и требовалось доказать.

Заметим, что теорема 3 является частным случаем одной общей теоремы Банаха[1].

52. Обобщение понятия о проектирующем операторе, о котором здесь будет идти речь, соответствует переходу от ортогонального проектирования к проектированию косому.

Пусть пространство H разложено в прямую (но, вообще говоря, не ортогональную) сумму подпространств G и F:

$$\mathrm{H}=\mathrm{G}\oplus\mathrm{F},$$

так что каждый элемент $h\in\mathrm{H}$ однозначно представим в виде

$$h=g+f,$$

где $g\in\mathrm{G}$ и $f\in\mathrm{F}$.

Определенный всюду в H оператор P, который каждому вектору h относит его компоненту $g\in\mathrm{G}$, называется оператором проектирования (на G параллельно F) или, короче, *проектором.*

В частности, если подпространства G и F ортогональны, оператор P является ортопроектором (см. п° 35).

Равенство $\|P\|=1$, имеющее место для ортопроекторов, не сохраняется при переходе к произвольным проекторам, так как уже в конечномерном пространстве норма проектора может быть сколь угодно большой. В связи с этим возникает вопрос о том, является ли произвольный проектор в H ограниченным оператором. Положительный ответ на этот вопрос вытекает из теоремы 3 предыдущего пункта. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь доказать, что всякий проектор P является замкнутым оператором.

Допуская противное, мы приходим к выводу, что существует последовательность $\{h_n\}_1^\infty$, для которой

$$h_n\to h,\quad Ph_n\to g'\neq Ph. \tag{1}$$

Так как

$$h_n=Ph_n+f_n',$$

где $f_n'\in\mathrm{F}$, то в силу (1) $f_n'\to f''\in\mathrm{F}$, и, значит, справедливо следующее разложение h на две компоненты:

$$h=g'+f'.$$

Но, с другой стороны, имеет место второе представление

$$h=Ph+f\quad (f\in\mathrm{F}).$$

Это противоречит определению прямой суммы.

---

[1] Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ, 1948, с. 35.

Теперь нетрудно (мы предоставляем это читателю) перенести на проекторы основные свойства ортопроекторов, изложенные в n° 36 и 37. В частности,

1°. Оператор P, определенный всюду в H, является проектором в том и только том случае, когда он ограничен и удовлетворяет соотношению $P^2 = P$.

2°. Если P есть проектор на G параллельно F, то $I - P$ есть проектор на F параллельно G.

3°. Если проекторы P_1 и P_2 перестановочны, то их произведение $P = P_1P_2$ также является проектором.

Заметим, однако, что, в отличие от ортопроекторов, косой проектор не является самосопряженным оператором.

В заключение рассмотрим случай, когда прямая (не ортогональная) сумма двух подпространств G и F плотна в H, но не совпадает со всем H. В этом случае можно определить оператор P на плотном в H многообразии $D_P = G \oplus F$ формулой

$$Ph = g, \tag{2}$$

если

$$h = g + f, \quad g \in G, \quad f \in F. \tag{3}$$

Подобно рассмотренным выше проекторам, этот оператор P удовлетворяет условию

$$P^2 = P, \tag{4}$$

однако, в отличие от проекторов, определенных во всем H, оператор P неограничен.

Мы сохраним название проектор лишь за операторами, определенными во всем H. Операторы, обладающие свойством (4), в том числе все проекторы, называются *идемпотентными* операторами.

Приведем пример неограниченного идемпотентного оператора P. Пусть совокупности $\{e_l\}_1^\infty$ и $\{f_l\}_1^\infty$ *вместе* образуют ортонормированный базис в H. Построим последовательность $g_n = f_n + \frac{1}{n} e_n$ и обозначим через F подпространство, натянутое на орты $\{f_l\}_1^\infty$, а через G — подпространство, натянутое на совокупность $\{g_l\}_1^\infty$. Очевидно, H есть замкнутая линейная оболочка подпространств F и G, однако H не совпадает с их прямой суммой. Действительно, возьмем вектор

$$h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \in H.$$

Тогда

$$h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - f_n),$$

но h_0 нельзя представить в виде (3), так как тогда следовало бы положить

$$g = \sum_1^\infty g_n, \; f = -\sum_1^\infty f_n,$$

однако ни одна из этих сумм не существует. Легко видеть, что идемпотентный оператор P, определенный формулами (2), (3) на многообразии $\mathrm{D}_P = \mathrm{G} \oplus \mathrm{F}$, не ограничен.

53. Матричное представление неограниченных симметрических операторов. Настоящий пункт примыкает по своему содержанию к n° 29. Мы снова предположим пространство H сепарабельным и снова займемся вопросом о матричном представлении оператора A, на сей раз уже неограниченного, но зато симметрического и замкнутого.

Как и в n° 29, возьмем в H ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, который теперь не может быть произвольным, но должен принадлежать (плотному в H) множеству D_A. Затем положим

$$Ae_k = g_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

и

$$(Ae_k, e_i) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

и сделаем попытку восстановить оператор A по его значениям на ортах e_k или, что то же, по матрице (a_{ik}). С этой целью введем линейную оболочку $\mathrm{L} = \mathrm{L}(e_1, e_2, \ldots)$ совокупности всех ортов $e_k (k = 1, 2, \ldots)$ и построим линейный оператор B с областью определения $\mathrm{D}_B = \mathrm{L}$, который удовлетворяет соотношениям

$$Be_k = g_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Оператор B этими условиями определяется однозначно и $B \subset A$. Так как B — симметрический оператор (поскольку $\overline{a}_{ik} = a_{ki}$), то он допускает замыкание $\overline{B}$, которое однозначно определяется оператором B, т. е. условиями (3), и

$$\overline{B} \subseteq A.$$

$\overline{B}$ есть минимальный замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условиям (1), и если матрицу (a_{ik}) мы хотим рассматривать как представление в базисе $\{e_k\}_1^\infty$ некоторого линейного замкнутого оператора, то этим оператором, очевидно, следует считать именно оператор $\overline{B}$, а не какое-нибудь его расширение, которое, конечно, также удовлетворяет соотношениям (1), (2). Может оказаться, что $\overline{B} = A$. В этом случае можно сказать, что оператор A представим матрицей (a_{ik}) в базисе $\{e_k\}_1^\infty$. При изменении базиса $\{e_k\}_1^\infty$ меняется матрица (a_{ik}), а также оператор $\overline{B}$. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли для данного замкнутого симметрического оператора A найти такой ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$, чтобы в этом базисе $\overline{B}=A$, т. е. чтобы в этом базисе оператор A допускал матричное представление? Ниже (теорема 3) мы дадим на этот вопрос положительный ответ.

Определение. Ортонормированный базис $\{e_k\}_1^\infty$ называется *базисом матричного представления* для замкнутого симметрического оператора A, если

1) элементы этого базиса принадлежат D_A и

2) A есть минимальный замкнутый линейный оператор, принимающий на ортах e_k значения Ae_k.

В отличие от n° 29, мы пока не касались вопроса о нахождении компонент вектора Af по компонентам вектора f. Следедующие две теоремы посвящены этому вопросу.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — произвольный ортонормированный базис, элементы которого принадлежат D_A, и пусть, наконец,*

$$(Ae_k,\ e_i)=a_{ik}\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

В таком случае значение оператора A на каждом элементе $f\in D_A$ находится по формулам

$$Af=\sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i, \tag{4'}$$

$$y_i=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{4''}$$

если

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{5}$$

Доказательство. В самом деле,

$$y_i=(Af,\ e_i)=(f,\ Ae_i)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\ e_k)(e_k,\ Ae_i)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\ e_k)(Ae_k,\ e_i)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — его базис матричного представления и*

$$a_{ik}=(Ae_k,\ e_i)\quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Пусть, наконец, оператор T определен соотношениями

$$Tg=\sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i,\quad z_i=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$$

на совокупности D_T *всех векторов*

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 < \infty.$$

В таком случае $T = A^*$, *т. е.* T *есть оператор, сопряженный с* A.

Доказательство. Докажем вначале, что

$$A^* \subseteq T. \tag{6'}$$

Пусть $g \in D_{A^*}$ и $A^* g = g^*$. Полагая

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \quad g^* = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i,$$

будем иметь

$$z_i = (g^*, e_i) = (g, Ae_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(e_k, Ae_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (g, e_k)(Ae_k, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 = \|g^*\|^2 < \infty,$$

то вектор g принадлежит D_T и $Tg = g^*$.

Соотношение (6′), следовательно, доказано, причем даже не использовано, что $\{e_k\}_1^{\infty}$ есть базис матричного представления.

Теперь докажем, что

$$T \subseteq A^*, \tag{6''}$$

после чего теорема будет доказана полностью.

Пусть $g \in D_T$ и

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

В таком случае

$$(Ae_i, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k (Ae_i, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} \bar{x}_k.$$

А так как

$$(Tg, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ki} x_k,$$

то

$$(Ae_i, g) = (\overline{Tg, e_i}) = (e_i, Tg).$$

Мы видим, что равенство

$$(Af,\ g) = (f,\ Tg) \tag{7}$$

справедливо при $f = e_i$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots$). Следовательно, это равенство справедливо также при любом f из линейной оболочки ортов e_i ($i = 1,\ 2,\ \ldots$). А так как $\{e_k\}_1^\infty$ есть базис матричного представления оператора A, то равенство (7) справедливо при любом $f \in \mathrm{D}_A$. Отсюда вытекает, что $g \in \mathrm{D}_{A^*}$ и $A^*g = Tg$. Таким образом, соотношение (6″) доказано.

Заметим, что в силу теоремы 2 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big)\bar{y}_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}y_i\Big)}, \tag{8}$$

каков бы ни был вектор $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ из D_A, и вектор $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i e_i$ из D_{A^*}. Равенство (8) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big)\bar{y}_i = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\bar{y}_i\Big)x_k.$$

Если эта перестановка порядка суммирования допустима для любых векторов из D_{A^*}, то оператор A^* является симметрическим. В этом и только в этом случае A есть оператор самосопряженный.

Доказанные теоремы поясняют, почему для неограниченных симметрических операторов нельзя определять матричную представимость одним лишь наличием формул вида (4′), (4″), (5), как это делалось в n° 29 для ограниченных операторов.

Теорема 3. *Для любого замкнутого симметрического оператора A существует базис матричного представления.*

Доказательство. Мы докажем, что существует последовательность $\{f_k\}_1^\infty \subset \mathrm{D}_A$, обладающая тем свойством, что при любом $f \in \mathrm{D}_A$ найдется подпоследовательность $\{f_{k_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i} = f, \quad \lim_{i\to\infty} Af_{k_i} = Af.$$

После этого для доказательства теоремы останется ортогонализовать последовательность $\{f_k\}_1^\infty$.

Итак, займемся построением последовательности $\{f_k\}_1^\infty$. С этой целью возьмем произвольную плотную в H последовательность $\{h_k\}_1^\infty$. Если для некоторой тройки натуральных чисел $m,\ n,\ p$ существуют элементы $f \in \mathrm{D}_A$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|h_m - f\| \leqslant \frac{1}{p}, \quad \|h_n - Af\| \leqslant \frac{1}{p},$$

то отнесем этой тройке один из таких элементов f и назовем его $f_{m,n,p}$. Таким образом, мы получим последовательность $\{f_{m,n,p}\}$. То обстоятельство, что не каждой тройке m, n, p относится требуемый элемент, а также, что различным тройкам может быть отнесен один и тот же элемент, никакой роли в дальнейшем играть не будет. Перенумеровав последовательность $\{f_{m,n,p}\}$ с помощью одного индекса, мы и получим требуемую последовательность $\{f_k\}_1^\infty$. Для доказательства возьмем произвольный элемент $f \in D_A$ и произвольное положительное число ε, затем возьмем натуральное число $p' \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ и, поскольку последовательность $\{h_k\}_1^\infty$ плотна в H, найдем натуральные числа m', n' так, чтобы

$$\| h_{m'} - f \| \leqslant \frac{1}{p'}, \quad \| h_{n'} - Af \| \leqslant \frac{1}{p'}. \tag{9'}$$

Эти неравенства свидетельствуют о том, что при построении последовательности $\{f_{m,n,p}\}$ тройке m', n', p' был отнесен некоторый элемент $f_{m',n',p'}$, причем

$$\| h_{m'} - f_{m',n',p'} \| \leqslant \frac{1}{p'}, \quad \| h_{n'} - Af_{m',n',p'} \| \leqslant \frac{1}{p'}. \tag{9''}$$

Из (9′) и (9″) вытекает, что

$$\| f_{m',n',p'} - f \| \leqslant \varepsilon, \quad \| Af_{m',n',p'} - Af \| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то существование требуемой подпоследовательности $\{f_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ доказано. Тем самым доказана теорема.

Мы доказали, что всякому замкнутому симметрическому оператору отвечает матрица (эрмитова), представляющая оператор в определенном базисе. Однако не всякая эрмитова матрица представляет симметрический оператор.

Теорема 4. *Если эрмитова матрица (a_{ik}) удовлетворяет соотношениям*

$$\sum_{i=1}^{\infty} | a_{ik} |^2 < \infty \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

то при заданном ортонормированном базисе она представляет замкнутый симметрический оператор.

Доказательство. Достаточно положить

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} e_i \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а затем построить оператор $\overline{B}$ указанным в начале настоящего пункта приемом.

Эрмитовы матрицы, удовлетворяющие условиям (10), но не удовлетворяющие требованиям ограниченности, называют неограниченными эрмитовыми матрицами.

Неограниченная эрмитова митрица (a_{ik}) не допускает, вообще говоря, преобразований с помощью унитарной матрицы по схеме

$$(\overset{\circ}{a}_{ik}) = (u_{ir}^*) \cdot (a_{rs}) \cdot (u_{sk}).$$

Если соответствующие бесконечные ряды сходятся и, следовательно, такое преобразование формально допустимо, то может случиться, что преобразованная эрмитова матрица

$$(\overset{\circ}{a}_{ik})$$

уже не будет удовлетворять условиям (10) и, следовательно, вовсе не определяет оператора в H. Более того, если даже преобразованная матрица удовлетворяет условию (10), то определяемый ею оператор $\overset{\circ}{A}$ может не совпадать с A. (Любопытно отметить, что пересечение $D_A \cap D_{\overset{\circ}{A}}$ может оказаться пустым.)

Изложенные обстоятельства составляют основу так называемых *патологических* свойств неограниченных эрмитовых матриц*). Эти свойства являются причиной нецелесообразности изучения неограниченных симметрических операторов с помощью матриц.

54. Оператор умножения на независимую переменную. Если (a, b) — конечный интервал, то оператор $\mathfrak{Q}$ умножения на независимую переменную определяется на всех функциях $\varphi = \varphi(t) \in$ $\in L^2(a, b)$ равенством

$$\mathfrak{Q}\varphi = t\varphi(t). \tag{1}$$

$\mathfrak{Q}$ есть ограниченный самосопряженный оператор, норма которого равна большему из чисел $|a|$, $|b|$. В случае бесконечного интервала (a, b) мы считаем оператор умножения $\mathfrak{Q}$ определенным формулой (1) на многообразии $D_{\mathfrak{Q}}$ функций $\varphi(t) \in L^2(a, b)$, для которых также $t\varphi(t) \in L^2(a, b)$.

В случае бесконечного интервала оператор умножения $\mathfrak{Q}$ определен на всюду плотном многообразии (так как он определен, например, на множестве $D \subset D_{\mathfrak{Q}}$ всех финитных функций, принадлежащих $L^2(a, b)$) и является, очевидно, неограниченным симметрическим оператором. Покажем, что и в этом случае оператор $\mathfrak{Q}$ самосопряженный.

Пусть $\psi \in D_{\mathfrak{Q}^*}$ и $\psi^* = \mathfrak{Q}^*\psi$. При всех $\varphi \in D_{\mathfrak{Q}}$

$$(\mathfrak{Q}\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*),$$

---

* J. von Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen, J. f. reine und angew. Math. 161 (1929), S. 208—236.

т. е.

$$\int_a^b i\varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt = \int_a^b \varphi(t)\overline{\psi^*(t)}\,dt$$

или

$$\int_a^b \varphi(t)\{\overline{t\psi(t)} - \overline{\psi^*(t)}\}\,dt = 0.$$

Последнее равенство справедливо, в частности, для любой финитной функции $\varphi(t)$, принадлежащей $L^2(a, b)$, т. е.

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\{\overline{t\psi(t)} - \overline{\psi^*(t)}\}\,dt = 0$$

при любых α и β из интервала (a, b), откуда следует почти всюду в (a, b) равенство

$$\psi^*(t) = t\psi(t)$$

и, значит, включение

$$t\psi(t) \in L^2(a, b),$$

так что

$$\psi \in D_{\mathfrak{A}}, \quad \psi^* = \mathfrak{A}\psi.$$

Приведенные рассуждения показывают, что $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}$, а так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$ в силу симметричности оператора $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$.

Из равенства $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ следует, в частности, замкнутость $\mathfrak{A}$.

Если бы мы ограничили область определения оператора умножения лишь финитными функциями из L^2, положив

$$\mathfrak{A}_1\varphi = t\varphi(t), \quad D_{\mathfrak{A}_1} = D,$$

то, повторяя приведенные выше рассуждения, получили бы

$$\mathfrak{A}_1^* = \mathfrak{A},$$

откуда (см. n° 51, теорема 1)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_1^{**} = \overline{\mathfrak{A}}_1,$$

т. е. ранее определенный оператор $\mathfrak{A}$ является замыканием оператора $\mathfrak{A}_1$.

Оператор умножения на независимую переменную не имеет собственных функций, так как предположение

$$\mathfrak{A}\varphi = \lambda\varphi$$

означает, что

$$\int_a^b |t - \lambda|^2 |\varphi(t)|^2\,dt = 0,$$

откуда $\varphi(t)=0$ всюду, за исключением множества меры нуль, т. е. $\varphi=0$.

Все точки интервала (a, b) принадлежат непрерывному спектру оператора $\mathcal{Q}$, ибо многообразие

$$\Delta_{\mathcal{Q}}(\lambda)=(\mathcal{Q}-\lambda I)\,\mathrm{D}_{\mathcal{Q}} \quad (a<\lambda<b)$$

состоит из функций $\psi(t)$, остающихся в $\mathrm{L}^2(a, b)$ после деления на $t-\lambda$, т. е.

$$\psi(t) \in \mathrm{L}^2(a, b)$$

и

$$\frac{\psi(t)}{t-\lambda} \in \mathrm{L}^2(a, b).$$

Очевидно, $\Delta_{\mathcal{Q}}(\lambda)$ плотно в $\mathrm{L}^2(a, b)$, но не совпадает с $\mathrm{L}^2(a, b)$, так как, например, не содержит функции, равной единице в окрестности точки $t=\lambda$.

Подпространство $M=M_e$ функций из $\mathrm{L}^2(a, b)$, которые равны нулю вне некоторого точечного множества $e \subset (a, b)$, очевидно, приводит оператор $\mathcal{Q}$.

С другой стороны, если $\beta-\alpha \leqslant \varepsilon$, то оператор $\mathcal{Q}$ в $\mathrm{L}^2(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению

$$\|\mathcal{Q}\varphi-\lambda_0\varphi\| \leqslant \varepsilon\|\varphi\|$$

при произвольно выбранном фиксированном λ_0 из интервала $[\alpha, \beta]$, т. е. оператор $\mathcal{Q}$ в этом пространстве отличается не более чем на ε от преобразования подобия $\lambda_0 I$.

Таким образом, разбивая интервал (a, b) на части достаточно малой длины, мы получаем разложение пространства $\mathrm{L}^2(a, b)$ на счетную сумму приводящих $\mathcal{Q}$ подпространств, в каждом из которых индуцированный оператор мало отличается от оператора подобия[1].

Можно было бы рассмотреть оператор умножения не на независимую переменную, а на функцию от нее. Мы ограничимся здесь одним частным случаем.

Пусть оператор U определен на всех функциях $\varphi(t)$ из $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ равенством

$$U\varphi=e^{it}\varphi(t).$$

Каждый элемент ортонормированного базиса $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ преобразуется оператором U в следующий элемент, так как

$$Ue^{ikt}=e^{i(k+1)t} \quad (-\infty<k<\infty).$$

---

[1] В дальнейшем (см. главу VI) мы увидим, что аналогичное приближенное разложение на преобразования подобия допускает всякий самосопряженный оператор. Это обстоятельство играет фундаментальную роль во всей теории.

Из этого обстоятельства следует, что оператор U унитарно эквивалентен рассмотренному нами в n° 45 оператору U_0 в сепарабельном H. Действительно, если определить изометрический оператор V, преобразующий H в $L^2(0, 2\pi)$, равенствами

$$Ve_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad (-\infty < k < \infty), \tag{2}$$

то

$$U = VU_0V^{-1}.$$

Реализация U оператора U_0 позволяет обнаружить приводящие U_0 (бесконечномерные) подпространства[1]. При этом мы будем опираться на следующее общее предложение (доказательство которого предоставляем читателю): *если подпространство* G *пространства* H *приводит линейный оператор* T, *а оператор* T_1, *действующий в пространстве* H_1, *унитарно эквивалентен оператору* T $(T_1 = VTV^{-1})$, *то подпространство* $G_1 = VG$ *пространства* H_1 *приводит оператор* T_1.

В соответствии с этим предложением оператор U_0 обладает приводящими подпространствами G_e, состоящими из элементов f вида

$$f = V^{-1}\varphi(t),$$

где $\varphi(t) = 0$ вне произвольно взятого, но фиксированного измеримого множества $e \in (0, 2\pi)$, а оператор V определен формулами (2).

В заключение отметим, что вместо оператора умножения $\mathcal{Q}$ в пространстве $L^2(a, b)$ можно было бы рассмотреть оператор умножения $\mathcal{Q}_\sigma$ на независимую переменную в пространстве $L^2_\sigma(a, b)$.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{Q}_\sigma$ — самосопряженный оператор.

Мы предлагаем читателю в качестве полезного упражнения доказать следующие предложения:

a) вещественные точки регулярности оператора $\mathcal{Q}_\sigma$ совпадают с точками постоянства функции $\sigma(t)$;

b) собственные значения оператора $\mathcal{Q}_\sigma$ совпадают с точками разрыва функции $\sigma(t)$;

c) непрерывный спектр оператора $\mathcal{Q}_\sigma$ совпадает с множеством неизолированных точек роста функции $\sigma(t)$.

Операторы $\mathcal{Q}_\sigma$ играют особую роль в теории самосопряженных операторов: в главе VI мы увидим, что изучение любого самосопряженного оператора может быть сведено к изучению операторов $\mathcal{Q}_\sigma$.

55. Оператор дифференцирования. Оператор $\mathcal{P}$ в $L^2(a, b)$ с определяемой ниже областью $D_{\mathcal{P}}$, который функции $\varphi(t)$ относит функцию

$$\mathcal{P}\varphi = i\frac{d\varphi}{dt},$$

называется *оператором дифференцирования*.

Необходимым для принадлежности функции $\varphi(t)$ к области $D_{\mathcal{P}}$ является следующее условие:

[1] См. конец n° 45.

(A) Функция $\varphi(t)$ должна быть абсолютно непрерывной в каждой конечной части интервала (a, b) и должна принадлежать $L^2(a, b)$ вместе с $\varphi'(t)$.

Мы отдельно рассмотрим случай конечного интервала (a, b), полуоси и всей оси. В первых двух случаях область определения оператора будет состоять из функций, которые, кроме условия (A), удовлетворяют еще некоторому краевому условию (B).

1°. Конечный интервал. В случае конечного интервала, в качестве которого мы примем $(0, 2\pi)$, краевое условие имеет вид

$$\text{(B)} \qquad \varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0.$$

Совокупность $D_{\mathscr{P}}$ функций, удовлетворяющих условиям (A), (B), очевидно, плотна в $L^2(0, 2\pi)$. При этом $\mathscr{P}$ есть симметрический (неограниченный) оператор, так как для любых $\varphi, \psi \in D_{\mathscr{P}}$

$$(\mathscr{P}\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\psi(t)}\,dt =$$

$$= i\{\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\overline{\{i\psi'(t)\}}\,dt$$

и, значит,

$$(\mathscr{P}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathscr{P}\psi),$$

поскольку внеинтегральное выражение равняется нулю. Это внеинтегральное выражение равняется нулю также и в том случае, когда только φ принадлежит $D_{\mathscr{P}}$, а ψ удовлетворяет одному лишь условию (A). Следовательно, всякая функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условию (A), принадлежит $D_{\mathscr{P}^*}$, и при этом

$$\mathscr{P}^*\psi = i\psi'(t).$$

Наоборот, пусть $\psi \in D_{\mathscr{P}^*}$ и $\mathscr{P}^*\psi = \psi^*$. Тогда при любом $\varphi \in D_{\mathscr{P}}$

$$(\mathscr{P}\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*) = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\overline{\psi^*(t)}\,dt =$$

$$= -i\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{d}{dt}\overline{\left\{-\int_0^t i\psi^*(s)\,ds + C\right\}}\,dt,$$

где C — произвольная константа. Интегрируя по частям, получим

$$(\mathscr{P}\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\left\{-\int_0^t i\psi^*(s)\,ds + C\right\}}\,dt, \tag{1}$$

так как $\varphi(t)$ обращается в нуль на концах интервала. Из (1) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi'(t) \overline{\left\{\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C\right\}}\,dt = 0 \tag{2}$$

при любой функции $\varphi(t) \in D_{\mathscr{P}}$. Определив C равенством

$$\int_0^{2\pi} \left\{\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C\right\} dt = 0,$$

возьмем в качестве $\varphi(t)$ функцию

$$\varphi_0(t) = \int_0^t \left\{\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C\right\} dt,$$

которая, очевидно, принадлежит $D_{\mathscr{P}}$. Тогда (2) примет вид

$$\int_0^{2\pi} \left|\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C\right|^2 dt = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(t) + \int_0^t i\psi^*(s)\,ds - C = 0,$$

и, значит, почти всюду

$$i\psi'(t) = \psi^*(t).$$

Мы доказали, что областью определения оператора $\mathscr{P}^*$ является совокупность всех функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условию (A), и что

$$\mathscr{P}^*\psi = i\psi'(t).$$

Из доказанного факта следует, что симметрический оператор $\mathscr{P}$ не является самосопряженным оператором; действительно, функции из $D_{\mathscr{P}}$ удовлетворяют двум условиям (A) и (B), а функции из $D_{\mathscr{P}^*}$ — одному лишь условию (A).

Докажем теперь, что оператор $\mathscr{P}$ замкнут. Вместо того, чтобы непосредственно проверять этот факт, покажем, что (см. n° 51)

$$\mathscr{P}^{**} = \mathscr{P}.$$

Из соотношения

$$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}^*$$

следует, что

$$\mathscr{P}^{**} \subseteq \mathscr{P}^*.$$

Поэтому функции $\chi(t)$ из $D_{\mathcal{P}^{**}}$ удовлетворяют условию (A) и

$$\mathcal{P}^{**}\chi = i\chi'(t),$$

а следовательно, при любом $\psi \in D_{\mathcal{P}^*}$

$$\int_0^{2\pi} \psi(t)\,\overline{i\chi'(t)}\,dt = (\psi, \mathcal{P}^{**}\chi) = (\mathcal{P}^*\psi, \chi) = \int_0^{2\pi} i\psi'(t)\,\overline{\chi(t)}\,dt =$$

$$= i\,[\psi(2\pi)\,\overline{\chi(2\pi)} - \psi(0)\,\overline{\chi(0)}] + \int_0^{2\pi} \psi(t)\,\overline{i\chi'(t)}\,dt.$$

Это соотношение показывает, что

$$\psi(2\pi)\,\overline{\chi(2\pi)} - \psi(0)\,\overline{\chi(0)} = 0.$$

В силу произвольности значений $\psi(0)$, $\psi(2\pi)$, это равенство возможно лишь при

$$\chi(0) = \chi(2\pi) = 0,$$

т. е. при $\chi(t) \in D_{\mathcal{P}}$. Мы доказали, таким образом, что

$$\mathcal{P}^{**} \subseteq \mathcal{P}.$$

А так как всегда

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^{**},$$

то

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{**},$$

и замкнутость оператора $\mathcal{P}$ доказана.

Если бы мы заменили условия (A) и (B) более жесткими, потребовав, например, от функций из области определения оператора многократной (или даже бесконечнократной) дифференцируемости и обращения в нуль при $t = 0$ и $t = 2\pi$ производных всех порядков, то после замыкания такого оператора мы снова получили бы оператор $\mathcal{P}$. Чтобы убедиться в этом, следует проверить, что новый оператор с двумя звездочками совпадает с $\mathcal{P}$.

Можно, конечно, так усилить условия (A) и (B), что полученный оператор после замыкания уже не совпадает с оператором $\mathcal{P}$.

Если, например, оставить условие (A) без изменения, а условие (B) заменить на

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = 0,$$

то полученный оператор $\mathcal{P}_0$ окажется замкнутым, но $\mathcal{P}_0 \neq \mathcal{P}$ (разумеется, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$).

Кстати, заметим, что подпространство равных нулю при $\pi < t \leqslant 2\pi$ функций из $L^2(0, 2\pi)$, мы можем это подпространство отождествить с $L^2(0, \pi)$, приводит оператор $\mathcal{P}_0$, но не приводит оператора $\mathcal{P}$.

Перейдем к отысканию симметрических расширений оператора $\mathcal{P}$. Пусть $\tilde{\mathcal{P}}$ — одно из них. Так как $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}^*$, то функции из $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ удовлетворяют условию (A).

Следовательно, для любых двух функций φ, $\psi \in D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ будем иметь:

$$(\tilde{\mathcal{P}}\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\psi(t)}\,dt =$$

$$= i[\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)}] + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\overline{i\psi'(t)}\,dt =$$

$$= i[\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)}] + (\varphi, \tilde{\mathcal{P}}\psi).$$

Так как оператор $\tilde{\mathcal{P}}$, по условию, симметричен, то должно выполняться соотношение

$$\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)} = 0. \tag{3}$$

Если

$$\tilde{\mathcal{P}} \neq \mathcal{P},$$

то в $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ существует функция $\psi_0(t)$, не удовлетворяющая условию (B); пусть, для определенности, $\psi_0(2\pi) \neq 0$. Полагая в (3) $\psi(t) = \psi_0(t)$, мы найдем для любой функции $\varphi(t) \in D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ соотношение

$$(\tilde{\text{B}}) \qquad \varphi(2\pi) = \vartheta\varphi(0),$$

где постоянная ϑ равна

$$\vartheta = \frac{\overline{\psi_0(0)}}{\overline{\psi_0(2\pi)}}.$$

Так как условие $(\tilde{\text{B}})$ должно выполняться и при $\varphi(t) = \psi_0(t)$, то $|\vartheta| = 1$.

Наш результат гласит: все функции $\varphi(t)$ из $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ должны удовлетворять условию (A) и условию $(\tilde{\text{B}})$ при фиксированном для данного расширения $\tilde{\mathcal{P}}$ значении постоянной ϑ, равной по модулю единице.

Докажем, что справедливо и обратное, т. е. что всякая функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условиям (A), $(\tilde{\text{B}})$, принадлежит $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$.

С этой целью выберем постоянную α так, чтобы

$$\psi(0) - \alpha\psi_0(0) = 0,$$

и положим

$$\varphi(t) = \psi(t) - \alpha\psi_0(t).$$

Легко видеть, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (A), (B) и, следовательно, принадлежит $D_{\mathcal{P}}$. А так как $D_{\mathcal{P}} \subset D_{\tilde{\mathcal{P}}}$, то $\varphi(t) \in D_{\tilde{\mathcal{P}}}$, и, следовательно, принадлежит $D_{\tilde{\mathcal{P}}}$ также и функция

$$\psi(t) = \varphi(t) + \alpha\psi_0(t).$$

Итак, любое симметрическое расширение $\tilde{\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{P}$ характеризуется условиями (A) и ($\tilde{\text{B}}$). Расширение оператора $\mathcal{P}$ свелось к ослаблению условия (B).

Поскольку каждое расширение определяется числом ϑ ($|\vartheta| = 1$), фигурирующим в ($\tilde{\text{B}}$), то мы будем вместо $\tilde{\mathcal{P}}$ писать $\mathcal{P}_\vartheta$.

Нетрудно проверить, что $D_{\mathcal{P}_\vartheta^*}$ содержит те и только те функции $\psi(t)$ из $D_{\mathcal{P}^*}$, для которых при любой функции $\varphi(t) \in D_{\mathcal{P}_\vartheta}$ имеет место равенство

$$\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $D_{\mathcal{P}_\vartheta}$ и $D_{\mathcal{P}_\vartheta^*}$ совпадают и, следовательно, каждое расширение $\mathcal{P}_\vartheta$ оператора $\mathcal{P}$ является оператором самосопряженным.

Для примера найдем спектр оператора $\mathcal{P}_\vartheta$ при $\vartheta = 1$. Равенство

$$\mathcal{P}_1\varphi = \lambda\varphi$$

означает, что

$$i\varphi'(t) = \lambda\varphi(t),$$
$$\varphi(2\pi) = \varphi(0).$$

Отсюда

$$\lambda = \lambda_k = k, \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$
$$\varphi(t) = \varphi_k(t) = e^{-ikt}.$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda \neq \lambda_k$ уравнение

$$(\mathcal{P}_1 - \lambda I)f = g$$

или

$$if'(t) - \lambda f(t) = g(t) \quad [f(2\pi) = f(0)]$$

разрешимо при любой функции $g(t) \in L^2(0,\ 2\pi)$. Следовательно, непрерывный спектр у $\mathcal{P}_1$ отсутствует.

2°. Полуось $(0,\ \infty)$. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (A) для случая полуоси, то на всей полуоси абсолютно интегрируемо произведение $\varphi(t)\overline{\varphi'(t)}$.

Формула

$$\int_0^t \varphi(s)\overline{\varphi'(s)}\,ds = |\varphi(t)|^2 - |\varphi(0)|^2 - \int_0^t \varphi'(s)\overline{\varphi(s)}\,ds$$

показывает поэтому, что $|\varphi(t)|$ имеет предел при $t \to \infty$. А так как $\varphi(t) \in L^2(0, \infty)$, то

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0.$$

Как видим, краевое условие на правом, бесконечно удаленном конце полуоси выполняется автоматически.

В качестве второго условия для определения области $D_{\mathscr{P}}$ мы примем поэтому

$$\text{(B)} \qquad \varphi(0) = 0.$$

При любых $\varphi, \psi \in D_{\mathscr{P}}$ будем иметь:

$$(\mathscr{P}\varphi, \psi) = i \int_0^\infty \varphi'(t) \overline{\psi(t)}\, dt = \int_0^\infty \varphi(t) \overline{i\psi'(t)}\, dt = (\varphi, \mathscr{P}\psi).$$

Следовательно, $\mathscr{P}$ есть оператор симметрический.

Как и в случае конечного интервала, нетрудно доказать, что $D_{\mathscr{P}^*}$ есть совокупность всех функций, удовлетворяющих одному лишь условию (A), и что

$$\mathscr{P}^*\psi = i\psi'.$$

Таким образом, $\mathscr{P} \neq \mathscr{P}^*$, т. е. оператор $\mathscr{P}$ не самосопряженный. При этом, в отличие от случая конечного интервала, оператор дифференцирования на полуоси не имеет симметрических расширений.

Действительно, область определения такого расширения $\tilde{\mathscr{P}}$ должна была бы содержать функцию $\psi_0(t)$, отличную от нуля при $t = 0$. Но тогда мы имели бы

$$(\tilde{\mathscr{P}}\psi_0, \psi_0) = i \int_0^\infty \psi_0'(s) \overline{\psi_0(s)}\, ds =$$

$$= -i\,|\psi_0(0)|^2 + \int_0^\infty \psi_0(s) \overline{i\psi_0'(s)}\, ds \neq (\psi_0, \tilde{\mathscr{P}}\psi_0),$$

что невозможно.

Таким образом, оператор дифференцирования на полуоси есть максимальный симметрический оператор. Позже (см. n° 104) мы покажем, что он неприводим.

3°. Полная ось. Для всякой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию (A), краевые условия

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = 0$$

выполняются автоматически. Поэтому область $D_{\mathscr{P}}$ определяется одним лишь требованием (A) и без труда доказывается, что $\mathscr{P}$ есть самосопряженный оператор.

Оператор $\mathscr{P}$ не имеет собственных значений, так как уравнение

$$i\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\varphi$$

не имеет нетривиальных решений в $L^2(-\infty, \infty)$.

Мы установим связь между оператором $\mathscr{Q}$ (умножения на независимую переменную) и оператором $\mathscr{P}$. Из этой связи, между прочим, будет следовать, что любая точка вещественной оси принадлежит непрерывному спектру оператора $\mathscr{P}$.

На мысль о наличии упомянутой связи, точнее, об унитарной эквивалентности[1] операторов дифференцирования и умножения на независимую переменную (в случае полной оси), наводят формальные соотношения

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,e^{-ist}\,ds,$$

$$i\psi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s\varphi(s)\,e^{-ist}\,ds,$$

которые показывают, что умножение на s функции $\varphi(s)$ соответствует дифференцированию функции $\psi(t)$.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{P} = \mathfrak{F}\mathscr{Q}\mathfrak{F}^{-1},$$

где $\mathfrak{F}$ — оператор Фурье — Планшереля.

Доказательство распадается на две части. Во-первых, надлежит доказать, что из $h \in D_{\mathscr{Q}}$ следует

$$\mathfrak{F}h \in D_{\mathscr{P}}, \quad \mathscr{P}\mathfrak{F}h = \mathfrak{F}\mathscr{Q}h,$$

и, во-вторых, надлежит доказать, что из $g \in D_{\mathscr{P}}$ следует

$$\mathfrak{F}^{-1}g \in D_{\mathscr{Q}}, \quad \mathfrak{F}^{-1}\mathscr{P}g = \mathscr{Q}\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Пусть $h \in D_{\mathscr{Q}}$. В таком случае

$$\mathfrak{F}\mathscr{Q}h = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ist}-1}{-is}\,sh(s)\,ds =$$

$$= i\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{e^{-ist}-1\}\,h(s)\,ds. \tag{4}$$

Так как $h \in D_{\mathscr{Q}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(s)|\,ds < \infty.$$

[1] См. n° 41

Поэтому

$$\mathfrak{F}h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} h(s)\, ds,$$

и соотношение (4) можно представить в виде

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Q}h = i \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} h(s)\, ds,$$

откуда и следует как включение $\mathfrak{F}h \in \mathrm{D}_{\mathcal{P}}$, так и равенство

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Q}h = \mathcal{P}\mathfrak{F}h.$$

Примем теперь, что $g \in \mathrm{D}_{\mathcal{P}}$. В таком случае

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{P}g = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} ig'(s)\, ds =$$

$$= -\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist} ist - (e^{ist}-1)}{s^2} g(s)\, ds =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} g(s)\, ds + \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1-ist}{s^2} g(s)\, ds =$$

$$= t \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}-1}{is} g(s)\, ds = t\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Так как левая часть принадлежит $\mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$, то правая тоже принадлежит $\mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$, следовательно, включение $\mathfrak{F}^{-1}g \in \mathrm{D}_{\mathfrak{Q}}$ доказано. Равным образом доказано и соотношение

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathcal{P}g = \mathfrak{Q}\mathfrak{F}^{-1}g.$$

Пользуясь унитарной эквивалентностью операторов $\mathfrak{Q}$ и $\mathcal{P}$, легко указать подпространства, приводящие $\mathcal{P}$. Таковы подпространства функций $\psi(t)$, допускающих представление

$$\psi(t) = \mathfrak{F}\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ равняется нулю вне произвольного измеримого фиксированного множества числовой оси.

ГЛАВА V

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

56. Два вспомогательных предложения. Настоящая глава посвящена спектральной теории некоторых классов вполне непрерывных операторов. Являясь прямым и легко обозримым обобщением соответствующих разделов линейной алгебры и элементарной теории интегральных уравнений, спектральная теория вполне непрерывных операторов представляет наиболее естественное введение в общую спектральную теорию операторов в пространстве Гильберта.

При построении спектральной теории вполне непрерывных операторов полнота пространства, как мы ниже увидим, используется не всюду[1]. С другой стороны, при отказе от требования полноты область приложений теории расширяется. Поэтому в настоящей главе наряду с предложениями, относящимися к операторам в пространстве Гильберта H, будет установлен ряд предложений относительно операторов в произвольной линейной метризованной системе R. К числу этих предложений относятся также две леммы, которым посвящен настоящий пункт.

***Лемма 1.** Если $\{g_k\}_0^\infty$ есть бесконечная ортонормированная последовательность векторов в R и если*

$$Ag_k = \beta_{k0}g_0 + \beta_{k1}g_1 + \cdots + \beta_{kk}g_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где A — вполне непрерывный оператор в R, то

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{kk} = 0.$$

Доказательство. Пусть $n > m$. Тогда

$$\| Ag_n - Ag_m \|^2 \geqslant | \beta_{nn} |^2.$$

Если β_{kk} не стремится к нулю при $k \to \infty$, то существует бесконечная последовательность индексов

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

для которой

$$| \beta_{n_j n_j} | \geqslant \delta > 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

[1] Приведенное в n° 30 определение вполне непрерывного в H дословно переносится на операторы в R.

Поэтому

$$\| Ag_{n_k} - Ag_{n_l} \|^2 \geqslant \delta^2 > 0$$

и, значит, бесконечная последовательность векторов $\{Ag_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности множества векторов $\{Ag_k\}_0^{\infty}$, вытекающей из вполне непрерывности оператора A.

Лемма 2. *Если $\lambda \neq 0$, A — вполне непрерывный оператор в R и $\{f_k\}_0^{\infty}$ — бесконечная последовательность векторов в R и если*

$$Af_0 - \lambda f_0 = 0$$

$$Af_n - \lambda f_n = f_{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то $f_0 = 0$ (а значит, и $f_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$).

Доказательство. Докажем вначале, что если $f_0 \neq 0$, то среди векторов f_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) нет линейно зависимых. Действительно, если мы примем, что в ряду векторов

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k,\ \ldots$$

найдутся элементы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих, и первый среди них есть вектор f_n, так что

$$f_n = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1}, \tag{1}$$

то, применяя к обеим частям этого соотношения оператор A, получим равенство

$$\lambda f_n + f_{n-1} = \alpha_0 \lambda f_0 + \alpha_1 (\lambda f_1 + f_0) + \cdots + \alpha_{n-1} (\lambda f_{n-1} + f_{n-2}),$$

откуда в силу (1) будет следовать противоречащее нашему предположению соотношение

$$f_{n-1} = \alpha_1 f_0 + \alpha_2 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-2}.$$

Допуская, что лемма неверна, мы должны, следовательно, считать векторы $f_0, f_1, f_2, \ldots$ линейно независимыми и поэтому можем эту последовательность ортогонализовать. Пусть

$$\begin{aligned} g_0 &= \alpha_{00} f_0, \\ g_1 &= \alpha_{10} f_0 + \alpha_{11} f_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_k &= \alpha_{k0} f_0 + \alpha_{k1} f_1 + \cdots + \alpha_{kk} f_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

есть полученная таким образом ортонормированная последовательность. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} Ag_k &= \alpha_{k0} \lambda f_0 + \alpha_{k1} (\lambda f_1 + f_0) + \cdots + \alpha_{kk} (\lambda f_k + f_{k-1}) = \\ &= \alpha_{k1} f_0 + \alpha_{k2} f_1 + \cdots + \alpha_{kk} f_{k-1} + \lambda g_k = \\ &= \beta_{k0} g_0 + \beta_{k1} g_1 + \cdots + \beta_{k,\,k-1} g_{k-1} + \lambda g_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}$$

Однако эти соотношения противоречат лемме 1, что и доказывает невозможность неравенства $f_0 \neq 0$.

57. О собственных значениях вполне непрерывных операторов в R.

Теорема 1. *Всякий вполне непрерывный оператор A в R может иметь при любом $\rho > 0$ только конечное число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственным значениям, которые по модулю превосходят ρ.*

Доказательство. Допуская противное, предположим, что существует бесчисленное множество линейно независимых векторов f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых

$$Af_n = \lambda_n f_n, \ |\lambda_n| > \rho > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ортогонализируя последовательность $\{f_n\}_1^\infty$, получим ортонормированную последовательность векторов

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_{11} f_1, \\ g_2 &= \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k &= \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \cdots + \alpha_{kk} f_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} Ag_k - \lambda_k g_k &= \alpha_{k1}(\lambda_1 - \lambda_k) f_1 + \cdots + \alpha_{k,\,k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) f_{k-1} = \\ &= \beta_{k1} g_1 + \beta_{k2} g_2 + \cdots + \beta_{k,\,k-1} g_{k-1} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$Ag_k = \beta_{k1} g_1 + \beta_{k2} g_2 + \cdots + \beta_{k,\,k-1} g_{k-1} + \lambda_k g_k.$$

В силу леммы 1 n° 56 это противоречит предположению $|\lambda_k| > \rho > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Следствие 1. *Единственной предельной точкой собственных значений вполне непрерывного оператора в R может быть точка 0.*

Следствие 2. *Каждому отличному от нуля собственному значению вполне непрерывного оператора в R принадлежит конечное число линейно независимых собственных векторов.* Иначе говоря, *кратность каждого отличного от нуля собственного значения вполне непрерывного оператора в R конечна.*

Следствие 3. *Всякий вполне непрерывный оператор в R имеет не более счетного множества линейно независимых собственных векторов, принадлежащих отличным от нуля собственным значениям.*

Теорема 2. *Если A есть вполне непрерывный оператор в R и если уравнение*

$$Af - \lambda f = h \tag{1}$$

при некотором $\lambda \neq 0$ *разрешимо для любого* $h \in \mathrm{R}$, *то уравнение*

$$Af - \lambda f = 0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $f = 0$, *т. е.* λ *не есть собственное значение оператора* A.

Доказательство. Если уравнению (2) удовлетворяет вектор $f_0 \neq 0$, то, решая уравнение (1) при $h = f_0$, мы найдем вектор f_1, для которого

$$Af_1 - \lambda f_1 = f_0.$$

Затем найдем вектор f_2, для которого

$$Af_2 - \lambda f_2 = f_1,$$

и, продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность векторов $\{f_k\}_0^\infty$ таких, что

$$\begin{aligned} &Af_k - \lambda f_k = f_{k-1} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \\ &Af_0 - \lambda f_0 = 0, \qquad f_0 \neq 0, \end{aligned}$$

но эти соотношения противоречат лемме 2 предыдущего пункта. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 4. *Если при некотором* $\lambda \neq 0$ *уравнение* (1) *разрешимо при любом* $h \in \mathrm{R}$, *то это уравнение при любом* $h \in \mathrm{R}$ *разрешимо однозначно, и следовательно, оператор* $A - \lambda I$ *имеет обратный оператор* $(A - \lambda I)^{-1}$ *(во всем* R*).*

Теорема 3. *Существует такая константа* $\mathscr{L}$, *зависящая только от оператора* A *(вполне непрерывного в* R*) и от числа* $\lambda \neq 0$, *что всякий раз, когда уравнение*

$$Af - \lambda f = h \tag{1}$$

разрешимо, по крайней мере для одного его решения f *выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant \mathscr{L}\|h\|.$$

Доказательство. Пусть

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k$$

все линейно независимые собственные векторы оператора A, принадлежащие λ. Мы не исключаем и того случая, когда λ не является собственным значением оператора A; в этом случае $k=0$. Пусть f^* — некоторое решение уравнения (1); тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$f = f^* + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k,$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ — произвольные числа. Эти числа подберем так, чтобы норма вектора $\|f\|$ была минимальной. Полученное решение назовем f; оно совпадает с f^*, если $k=0$. Пусть h пробегает совокупность $\mathrm{M}=\Delta_A(\lambda)$ всех тех векторов, для которых уравнение (1) разрешимо. Каждому вектору $h \in \mathrm{M}$ отвечает некоторый вектор f, и нам надлежит доказать, что

$$\sup_{h \in \mathrm{M}} \frac{\|f\|}{\|h\|} < \infty.$$

Допустим противное. Это значит, что существует последовательность векторов $\{h_k\}_1^\infty \subset \mathrm{M}$, которая вместе с последовательностью $\{f_k\}_1^\infty$ соответствующих минимальных решений уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\|f_k\|}{\|h_k\|} \to \infty.$$

Разделим обе части равенства

$$Af_k - \lambda f_k = h_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

на $\|f_k\|$. Получим

$$Af'_k - \lambda f'_k = h'_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$h'_k = \frac{h_k}{\|f_k\|}, \quad \|f'_k\| = 1.$$

При этом единица есть минимум нормы решения уравнения (1), если правая часть равна h'_k. Так как оператор A вполне непрерывен, то найдется подпоследовательность $\{f'_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{i \to \infty} Af'_{n_i}.$$

Поскольку, кроме того,

$$h'_k \to 0$$

то существует также

$$\lim_{i \to \infty} f'_{n_i} = g$$

и, следовательно,

$$Ag - \lambda g = 0,$$

причем $\|g\| = 1$, т. е. g есть собственный вектор оператора A.

Вектор $f'_{n_j} - g$, подобно вектору f'_{n_j}, представляет решение уравнения (1) при правой части h'_{n_j}. А так как минимум нормы решения этого уравнения есть единица, то

$$\|f'_{n_j} - g\| \geqslant 1,$$

что невозможно. Таким образом, теорема доказана.

Следствие 5. *Если* $\lambda \neq 0$ *и* A — *вполне непрерывный оператор в* H, *то*

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = \Delta_A(\lambda).$$

Доказательство. Пусть $\{h_n\}_1^\infty \subset \Delta_A(\lambda)$. Согласно теореме 3, найдется последовательность решений $\{f_n\}_1^\infty$:

$$Af_n - \lambda f_n = h_n,$$

для которой

$$\| f_n \| \leqslant \mathscr{L} \, \| h_n \|.$$

Если $h_n \to h$ $(n \to \infty)$, то

$$\sup_n \| f_n \| < \infty.$$

Поэтому существует подпоследовательность $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой сходится Af_{n_i}, а значит, и

$$f_{n_i} = \frac{1}{\lambda} \{Af_{n_i} - h_{n_i}\},$$

и поэтому найдется такое f, что

$$Af - \lambda f = h.$$

Следовательно, $h \in \Delta_A(\lambda)$, и утверждение доказано.

58. Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов.

Теорема 1. *Если* $\lambda \neq 0$ *есть собственное значение вполне непрерывного оператора* A *в пространстве* H, *то* $\bar{\lambda}$ *есть собственное значение оператора* A^*.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора A. Тогда по теореме 2 n° 57

$$\Delta_A(\lambda) \neq \mathrm{H},$$

а в силу следствия 5 n° 57,

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = \Delta_A(\lambda).$$

Поэтому

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} \neq \mathrm{H},$$

а значит, в силу теоремы 1 n° 44,

$$\mathrm{G}_{\bar{\lambda}}^* \equiv \mathrm{H} \ominus \overline{\Delta_A(\lambda)} \neq 0,$$

откуда и следует, что $\bar{\lambda}$ есть собственное значение оператора A^*.

Так же просто доказывается следующее предложение, углубляющее (в связи с переходом от R к H) теорему 2 n° 57.

Теорема 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор в* H. *В таком случае для разрешимости уравнения*

$$Af - \lambda f = h \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор h был ортогонален собственному подпространству $\mathfrak{G}^*_{\bar\lambda}$ оператора A^*, принадлежащему числу $\bar\lambda$.

Доказательство вытекает из теоремы 1 n° 44, в силу которой нулевое подпространство оператора $A^* - \bar\lambda I$ есть

$$\mathfrak{G}^*_{\bar\lambda} = \mathrm{H} \ominus \overline{\Delta_A(\lambda)}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{G}^*_{\bar\lambda},$$

и остается использовать следствие 5 n° 57, в силу которого

$$\Delta_A(\lambda) = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{G}^*_{\bar\lambda}.$$

Если λ не является собственным значением оператора A, то $\bar\lambda$ не будет собственным значением оператора A^* и поэтому $\Delta_A(\lambda) = \mathrm{H}$.

Читатель, знакомый с теорией интегральных уравнений, заметил, что доказанные нами предложения являются обобщением двух теорем Фредгольма[1].

Справедливо также обобщение третьей теоремы Фредгольма. Имеет место

Теорема 3. *Размерности собственных подпространств вполне непрерывных операторов A и A^* в* H, *принадлежащих собственным значениям λ и $\bar\lambda$, одинаковы.*

Доказательство[2]. Пусть собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ, имеет размерность p и ортонормированный базис $\{e_i\}_1^p$. Пусть, подобным образом, оператору A^* и собственному значению $\bar\lambda$ отвечает число q и ортонормированный базис $\{f_i\}_1^q$.

---

[1] Первое обобщение теории Фредгольма на линейные уравнения в произвольных функциональных пространствах принадлежит Ф. Риссу. Его статья Über lineare Functionalglei chungen напечатана в журнале Acta Mathematica, 1918, **41**, с. 71—98. Перевод этой статьи на русский язык содержится в первом выпуске журнала «Успехи математических наук» (М., 1936). В самом начале своей статьи Ф. Рисс пишет: «В этой работе не так важны новые результаты, как применение чрезвычайно элементарного метода». В следующем n° мы излагаем замечательный метод Ф. Рисса на случае гильбертова пространства.

[2] Приводимое здесь доказательство теоремы 3 принадлежит Шаудеру (см. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Київ, 1948, с 132—134).

Допустим, что вопреки утверждению теоремы 3 $q \neq p$. Примем вначале, что $q > p$, и определим в H оператор B, очевидно, вполне непрерывный, формулой

$$Bh = Ah + \sum_{i=1}^{p} (h, e_i) f_i. \tag{2}$$

Докажем, что λ не является собственным значением оператора B. С этой целью допустим, что для некоторого вектора $g \neq 0$ имеет место равенство

$$Bg = \lambda g, \tag{3}$$

так что, в силу (2),

$$(A - \lambda I) g + \sum_{i=1}^{p} (g, e_i) f_i = 0.$$

Умножив это равенство скалярно на f_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$, найдем, что

$$(g, (A^* - \bar{\lambda} I) f_j) + (g, e_j) = 0.$$

А так как первый член левой части есть 0, то

$$(g, e_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, p). \tag{4}$$

Поэтому из (2) следует

$$Bg = Ag,$$

а из (3)

$$Ag = \lambda g.$$

Таким образом, g есть собственный вектор оператора A который, в силу (4), не является линейной комбинацией собственных векторов e_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, что абсурдно. Следовательно, (3) невозможно, т. е. λ не является собственным значением оператора B. Поэтому существует вектор h, для которого

$$(B - \lambda I) h = f_{p+1}.$$

А так как, в силу (2),

$$(Bh, f_{p+1}) = (Ah, f_{p+1}) = (h, A^* f_{p+1}) = (h, \bar{\lambda} f_{p+1}) = \lambda (h, f_{p+1}),$$

то

$$1 = (f_{p+1}, f_{p+1}) = ((B - \lambda I) h, f_{p+1}) = 0.$$

Как видим, предположение $q > p$ приводит к абсурду.

Поскольку $A = (A^*)^*$, то операторы A и A^* можно поменять местами. Следовательно, в силу уже доказанного, неравенство $p > q$ также невозможно, и теорема доказана.

Из рассмотрений настоящего n° и n° 57 вытекает законченное описание спектра вполне непрерывного оператора в H. Мы приведем его в виде специального предложения.

Теорема 4. *Пусть* A — *вполне непрерывный оператор в* H. *В таком случае*

1) *каждая отличная от* 0 *точка спектра оператора* A *является собственным значением этого оператора;*

2) *точка* $\lambda = 0$ *принадлежит спектру оператора* A *(и является единственной предельной точкой множества собственных значений, если последних бесконечно много).*

Доказательство. Утверждение, взятое в скобки, уже было доказано ранее (см. следствие 1 n° 57).

Чтобы доказать утверждение 2, примем, что вопреки этому утверждению $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора A, т. е. оператор A^{-1} существует и ограничен всюду в H. Но в таком случае (см. начало n° 30) должен быть вполне непрерывным оператор

$$A^{-1}A = I,$$

что абсурдно.

Для доказательства утверждения 1 возьмем точку $\lambda \neq 0$, которая не является собственным значением оператора A. Тогда по теореме 1 точка $\bar{\lambda}$ не является собственным значением оператора A^*. Следовательно, по теореме 2 уравнение (1) разрешимо при любой правой части h и значит (следствие 4 n° 57) оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен всюду в H и (теорема 3 n° 57) ограничен. Но в таком случае λ есть регулярная точка оператора и поэтому спектру оператора не принадлежит.

59. Метод Ф. Рисса в теории линейных функциональных уравнений.

Пусть A — вполне непрерывный оператор в H и λ — какое-нибудь отличное от 0 собственное значение этого оператора. При любом натуральном n будем рассматривать линейное многообразие $\Delta(A_\lambda^n)$ (где $A_\lambda = A - \lambda I$) всех векторов g, представимых в виде

$$g = (A - \lambda I)^n x. \tag{1}$$

Если положить

$$A_\lambda^n \equiv (A - \lambda I)^n = B + (-\lambda)^n I = B - \mu I, \tag{2}$$

то B, как следует из биномиальной формулы, будет вполне непрерывным оператором, и поэтому в силу следствия 5 n° 57 линейное многообразие $\Delta(A_\lambda^n) = \Delta(B_\mu)$ является подпространством. Заметим далее, что

$$\Delta(A_\lambda^{n+1}) \subseteq \Delta(A_\lambda^n) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

При этом $\Delta(A_\lambda^0) = \text{H}$ и $\Delta(A_\lambda^1) \neq \text{H}$. Характерным и существенным для метода Ф. Рисса является следующий факт.

1°. *При некотором натуральном k справедливо соотношение*

$$\Delta(A_\lambda^{k+1}) = \Delta(A_\lambda^k) \neq \Delta(A_\lambda^{k-1}).$$

Отсюда уже следует, что все $\Delta(A_\lambda^n)$ при $n = k, \ k+1, \ k+2, \ldots$ совпадают. Поэтому *линейное многообразие* K_λ *всех элементов* g, *которые представимы в виде* (1) *для любого натурального* n, *есть не что иное, как подпространство* $\Delta(A_\lambda^k)$.

Доказательство. Допустим вопреки утверждению, что требуемого k нет и поэтому $\Delta(A_\lambda^{n+1}) \neq \Delta(A_\lambda^n)$ при любом целом $n \geqslant 0$. Из этого предположения вытекает существование последовательности $\{g_i\}_0^\infty$ такой, что

$$\text{a)}\ g_i \in \Delta(A_\lambda^i), \quad \|g_i\| = 1.$$
$$\text{b)}\ g_i \perp \Delta(A_\lambda^{i+1}).$$

Из b) и (2) следует, что

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij}. \tag{4}$$

Так как при $j \geqslant i$

$$A_\lambda g_j \in \Delta(A_\lambda^{j+1}) \subseteq \Delta(A_\lambda^{i+1}),$$

то

$$(g_i, A_\lambda g_j) = 0 \quad (j \geqslant i), \tag{4_1}$$

откуда в силу (4)

$$(g_i, Ag_j) = 0 \quad (j > i). \tag{4_2}$$

Используя соотношения (4_1), (4_2), находим, что при $j > i$

$$\|Ag_j - Ag_i\|^2 = \|Ag_j - A_\lambda g_i - \lambda g_i\|^2 = \|Ag_j - A_\lambda g_i\|^2 + |\lambda|^2 \geqslant |\lambda|^2.$$

Это неравенство противоречит компактности последовательности $\{Ag_n\}_0^\infty$.

Аналогично доказывается существование подпространства $K_{\bar\lambda}^*$, образованного всеми элементами g, которые при любом натуральном n допускают представление

$$g = (A^* - \bar\lambda I)^n x.$$

Теперь обозначим через N_λ линейное многообразие всех векторов f, которые при каком-нибудь натуральном m (и, следовательно, при всех больших значениях) удовлетворяют соотношению

$$(A - \lambda I)^m f = 0. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

2°. *Если* $f \in N_\lambda$, *то равенство* (5) *выполняется уже при* $m = k$, *где число* k *определено в предложении* 1°. *Отсюда между прочим следует, что* N_λ *замкнуто, т. е. является подпространством.*

Доказательство. Если $f \in N_\lambda$, то (5) имеет место для всех достаточно больших m. Пусть это равенство выполнено при каком-нибудь $m > k$. Так как $m \geqslant k+1$, то

$$g_0 \equiv (A - \lambda I)^{m-1} f \in K_\lambda = \Delta(A_\lambda^k). \tag{6}$$

Из (5) вытекает, что

$$(A - \lambda I) g_0 = 0,$$

а из (6) следует, что $g_0 \in \Delta(A_\lambda^{k+1})$, т. е.

$$g_0 = (A - \lambda I) g_1, \quad g_1 \in \Delta(A_\lambda^k).$$

Из последнего соотношения мы заключаем, что

$$g_1 = (A - \lambda I) g_2, \quad g_2 \in \Delta(A_\lambda^k).$$

Продолжая это рассуждение, получаем бесконечную последовательность равенств

$$Ag_0 - \lambda g_0 = 0.$$
$$Ag_n - \lambda g_n = g_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда, благодаря лемме 2 n° 56, заключаем, что $g_0 = 0$, т. е. из (5) и $m > k$ следует, что

$$(A - \lambda I)^{m-1} f = 0.$$

Тем самым утверждение 2° доказано.

Заметим, что попутно мы доказали следующий факт.

3°. *Если* $g \in K_\lambda$ *и* $Ag = \lambda g$, *то* $g = 0$.

Теперь докажем еще три простых предложения, из которых второе является дополнением к предложению 2°.

4°. *Подпространство* N_λ *конечномерно.*

5°. *Равенство* (5), *которому удовлетворяет* $f \in N_\lambda$, *может не иметь места при* $m = k - 1$.

6°. *Пространство* H *является прямой суммой своих подпространств* K_λ *и* N_λ.

Чтобы доказать утверждение 4°, достаточно выполнить разложение (2) (при $n = k$), из которого следует, что N_λ есть собственное подпространство вполне непрерывного оператора B, принадлежащее собственному значению $(-1)^{k-1} \lambda^k \neq 0$.

Доказательство предложений 5° и 6° основано на одном и том же построении. Пусть h — произвольный элемент H.
Вектор

$$h_1 = (A - \lambda I)^k h \tag{7$_1$}$$

принадлежит $K_\lambda = \Delta(A_\lambda^m)$ $(m \geqslant k)$ и поэтому представим в виде

$$h_1 = (A - \lambda I)^{2k} h_0 = (A - \lambda I)^k g, \qquad (7_2)$$

где

$$g = (A - \lambda I)^k h_0 \in K_\lambda.$$

Из представлений (7_1), (7_2) следует, что

$$(A - \lambda I)^k (h - g) = 0,$$

т. е. $f \equiv h - g \in N_\lambda$.

Мы видим, что произвольный вектор $h \in H$ представим в виде

$$h = g + f \quad (g \in K_\lambda,\ f \in N_\lambda).$$

6° будет доказано, если мы покажем, что это представление единственно. Допуская противное, найдем, что подпространства N_λ, K_λ имеют общий элемент $f \neq 0$. Из $f \in N_\lambda$ вытекает, что при некотором $p \leqslant k$

$$(A - \lambda I)^p f = 0, \quad (A - \lambda I)^{p-1} f \neq 0.$$

Следовательно, вектор $g = (A - \lambda I)^{p-1} f$ обладает двумя свойствами:

$$g \in K_\lambda, \quad Ag - \lambda g = 0.$$

Но тогда, в силу предложения 3°, неравенство $g \neq 0$ невозможно. Итак, предложение 6° доказано.

Чтобы доказать предложение 5°, выберем вектор h так, чтобы

$$(A - \lambda I)^{k-1} h \,\overline{\in}\, \Delta(A_\lambda^k).$$

Такой выбор возможен, так как $\Delta(A_\lambda^{k-1}) \neq \Delta(A_\lambda^k)$.

Затем построим векторы g и $f = h - g$ с помощью формул (7_1), (7_2) и возьмем равенство

$$(A - \lambda I)^{k-1} f = (A - \lambda I)^{k-1} h - (A - \lambda I)^{k-1} g.$$

Левая часть не может равняться 0, так как первое слагаемое правой части не принадлежит, а второе принадлежит подпространству $\Delta(A_\lambda^k)$.

Ясно, что утверждения 4°, 5°, 6° остаются в силе при замене K_λ, N_λ на K_λ^*, N_λ^*.

7°. *Имеют место соотношения*

$$N_\lambda^* = H \ominus K_\lambda, \quad N_\lambda = H \ominus K_\lambda^*.$$

Доказательство. Снова возьмем представление (2) при $n = k$. Из него следует, что N_λ^* есть собственное подпространство оператора B^*, принадлежащее собственному значению $\bar{\mu} =$

$=(-1)^{k-1}\bar{\lambda}^k$. С другой стороны, $K_\lambda=\Delta(A_\lambda^k)=\Delta(B_\mu)$. Но в таком случае первое соотношение есть следствие теоремы 1 n° 44. Это же относится и ко второму соотношению.

8°. *Размерности подпространств* N_λ *и* N_λ^* *одинаковы.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь базис $\{f_i\}_1^n$ в N_λ. Обозначим через g_i ортогональную проекцию f_i на K_λ и положим

$$f_i^*=f_i-g_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Поскольку $f_i^*\perp K_\lambda$, то $f_i^*\in N_\lambda^*$. Векторы f_i^* линейно независимы, так как в противном случае мы имели бы равенство

$$\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n=\alpha_1 g_1+\cdots+\alpha_n g_n,$$

где не все α_i равны 0. Но левая часть $\neq 0$ и принадлежит N_λ, а правая принадлежит K_λ. Это невозможно в силу предложения 6°. Отсюда видно, что размерность N_λ^* не меньше, чем размерность N_λ. Но операторы A и A^* можно поменять местами. Следовательно, размерность N_λ не меньше чем размерность N_λ^*.

Таким образом, утверждение доказано.

Число измерений собственного подпространства, принадлежащего собственному значению λ, называют *кратностью*, а число измерений подпространства N_λ называют *рангом* этого собственного значения. Легко видеть, что ранг больше или равен кратности. Само подпространство N_λ называется *корневым подпространством* оператора A, принадлежащим собственному значению λ, а каждый отличный от 0 вектор $f\in N_\lambda$ называется *корневым вектором.*

Изложенная теория Ф. Рисса представляет большой самостоятельный интерес. Покажем теперь, как с ее помощью получается третья теорема Фредгольма, одно доказательство которой уже было приведено в конце n° 58.

С этой целью заметим, что каждый собственный вектор e оператора A, принадлежащий собственному значению $\lambda\neq 0$, можно представить в виде

$$e=\xi_1 f_1+\xi_2 f_2+\cdots+\xi_n f_n,$$

где $\{f_i\}_1^n$ — какой-нибудь базис в N_λ. Для определения коэффициентов $\{\xi_i\}_1^n$ имеем уравнение

$$(A-\lambda I)\,e\equiv\xi_1[Af_1-\lambda f_1]+\xi_2[Af_2-\lambda f_2]+\cdots+\xi_n[Af_n-\lambda f_n]=0.$$

Так как вектор, представляющий левую часть этого уравнения (назовем его h), принадлежит N_λ, то в силу 7° он ортогонален K_λ^*, а в силу 6° —

$$h=g+f,$$

где $g \in K_{\bar\lambda}^*$ и $f \in N_{\bar\lambda}^*$. Следовательно,

$$(h, h) = (h, g + f) = (h, f).$$

Поэтому для равенства $h = 0$ достаточно, чтобы $h \perp N_{\bar\lambda}^*$. Но это условие очевидно и необходимо. Итак, для определения коэффициентов ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ мы должны потребовать, чтобы вектор h был ортогонален каждому из линейно независимых векторов f_k^*, порождающих $N_{\bar\lambda}^*$. Так как в силу 8° число этих векторов есть n, мы получим систему

$$\xi_1 (Af_1 - \lambda f_1, f_i^*) + \xi_2 (Af_2 - \lambda f_2, f_i^*) + \cdots + \xi_n (Af_n - \lambda f_n, f_i^*) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Подобным образом для нахождения собственных векторов

$$e^* = \eta_1 f_1^* + \eta_2 f_2^* + \cdots + \eta_n f_n^*$$

оператора A^*, принадлежащих $\bar\lambda$, получим систему

$$\eta_1 (A^* f_1^* - \bar\lambda f_1^*, f_i) + \eta_2 (A^* f_2^* - \bar\lambda f_2^*, f_i) + \cdots + \eta_n (A^* f_n^* -$$
$$- \bar\lambda f_n^*, f_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

которую можно переписать в виде

$$\bar\eta_1 (Af_i - \lambda f_i, f_1^*) + \bar\eta_2 (Af_i - \lambda f_i, f_2^*) + \cdots + \bar\eta_n (Af_i - \lambda f_i, f_n^*) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Системы (8) и (9) являются транспонированными одна относительно другой. Поэтому у них одинаковое число линейно независимых решений. Таким образом, кратность собственного значения λ оператора A равна кратности собственного значения $\bar\lambda$ оператора A^*. В этом и состоит третья теорема Фредгольма.

60. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в R. Основным предположением этого n° является.

Теорема 1. *Всякий вполне непрерывный самосопряженный оператор $A \neq 0$ в произвольной линейной метризованной системе R имеет по крайней мере один собственный вектор e, принадлежащий отличному от нуля собственному значению λ.*

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{M} = \sup_{\|g\|=1} |(Ag, g)| = \sup_{\|g\|=1} \| Ag \|.$$

В силу вещественности скалярного произведения (Ag, g) по определению верхней грани найдется последовательность $\{g_n\}_1^\infty$ (нормированных) векторов, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty}(Ag_n, g_n),$$

равный $+\mathcal{M}$ или $-\mathcal{M}$. Этот отличный от нуля предел назовем λ.

Из ограниченной последовательности $\{g_n\}_1^\infty$ выделим подпоследовательность $\{g_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, для которой существует

$$\lim_{i\to\infty} Ag_{n_i} = h, \tag{1}$$

что возможно по определению вполне непрерывного оператора.

Поскольку

$$\| Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i} \|^2 = \| Ag_{n_i} \|^2 - 2\lambda (Ag_{n_i}, g_{n_i}) + \lambda^2,$$

то

$$\lim_{i\to\infty} \| Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i} \|^2 = \| h \|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \| h \|^2 - \lambda^2. \tag{2}$$

Но

$$\| Ag_{n_i} \| \leqslant \mathcal{M} \| g_{n_i} \| = \mathcal{M} = |\lambda|.$$

Следовательно,

$$\| h \| \leqslant |\lambda|.$$

А так как левая часть равенства (2) неотрицательна, то $\| h \| = |\lambda|$ и, значит,

$$\lim_{i\to\infty} \| Ag_{n_i} - \lambda g_{n_i} \| = 0, \tag{3}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} g_{n_i}$ существует и равняется $\frac{h}{\lambda}$. Вводя вектор $e = \frac{h}{\lambda}$, норма которого равна 1, перепишем (3) в виде

$$Ae - \lambda e = 0.$$

Тем самым доказательство закончено.

Заметим, что доказанная теорема для произвольных (несамосопряженных) вполне непрерывных операторов неверна. Например, интегральный оператор Вольтерра в $L^2(0, 1)$

$$Tf = \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt$$

с непрерывным ядром $K(x, t)$ не имеет ни одного собственного вектора.

Однако продолжим изучение вполне непрерывных самосопряженных операторов в R.

Теорема 2. *Оператор A имеет конечную или бесконечную последовательность попарно ортогональных и нормированных собственных векторов*

$$e_1, e_2, e_3, \ldots,$$

отвечающих отличным от нуля собственным числам

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \quad (|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots),$$

которая в области значений Δ_A оператора A полна, т. е. для всякого вектора f вида $f = Ah$ имеет место уравнение замкнутости

$$\| f \|^2 = \sum_k |(f, e_k)|^2.$$

Доказательство. На основании теоремы 1 существует такой вектор e_1 ($\| e_1 \| = 1$), что

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$

где

$$\lambda_1 = \pm \sup_{\|g\|=1} |(Ag, g)|.$$

Для удобства обозначим нашу линейную систему R через R_1, а оператор A — через A_1. Положим

$$\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1 \ominus \{e_1\}.$$

Ясно, что R_2 также является линейной метризованной системой. При этом если $f \in \mathrm{R}_2$, то $A_1 f \in \mathrm{R}_2$. Действительно, из $(f, e_1) = 0$ следует, что

$$(A_1 f, e_1) = (f, Ae_1) = (f, \lambda_1 e_1) = 0.$$

Далее, часть A_2 оператора A_1, лежащая в R_2, является также оператором вполне непрерывным и самосопряженным. Если оператор A_2 не равен нулю тождественно, то к нему можно применить теорему 1. На основании этой теоремы существует вектор e_2, для которого

$$A_2 e_2 = \lambda_2 e_2 \quad (\| e_2 \| = 1).$$

Так как $e_2 \in \mathrm{R}_2$, то $(e_2, e_1) = 0$. При этом

$$|\lambda_2| = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in R_2}} |(A_1 f, f)| \leqslant \sup_{\|g\|=1} |(A_1 g, g)| = |\lambda_1|.$$

Теперь продолжаем процесс далее. Строим линейную систему

$$\mathrm{R}_3 = \mathrm{R}_2 \ominus \{e_2\}$$

и определяем собственный вектор e_3 и собственное значение λ_3 и т. д. Этот процесс оборвется только в том случае, если при некотором n часть A_n оператора A_1, лежащая в R_n, окажется тождественно равной нулю. В этом случае мы получим конечное число попарно ортогональных и нормированных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, принадлежащих не равным нулю собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, причем

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_{n-1}|, \quad |\lambda_k| = \sup |(A_1 f, f)| \quad (\|f\| = 1, \ f \in R_k).$$

Следует отметить, что в этой формуле символ sup можно заменить на max.

Если процесс не оборвется, мы получим бесконечную ортонормированную последовательность $\{e_k\}_1^\infty$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ в силу следствия 1 п° 57.

Возьмем теперь какой-нибудь вектор $f = Ah$ и положим

$$g = h - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k) e_k,$$

где m равно числу элементов последовательности $\{e_k\}$, если это число конечно, и m равняется произвольному натуральному числу в противном случае.

Так как

$$(g, e_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

то $g \in R_{m+1}$. Поэтому

$$\|Ag\|^2 \leqslant \|A_{m+1}\|^2 \|g\|^2,$$

где $\|A_k\|$ есть норма оператора A в R_k, или

$$\Big\| Ah - \sum_{k=1}^{m} (h, e_k) Ae_k \Big\|^2 \leqslant \|A_{m+1}\|^2 \|g\|^2. \tag{4}$$

Замечая, что

$$(h, e_k) Ae_k = (h, e_k) \lambda_k e_k = (h, Ae_k) e_k = (Ah, e_k) e_k,$$

а также, что

$$\|g\| \leqslant \|h\|,$$

и учитывая, что $f = Ah$, перепишем (4) в виде

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k \Big\|^2 \leqslant \|A_{m+1}\|^2 \|h\|^2. \tag{5}$$

В случае, когда последовательность $\{e_k\}$ конечна, отсюда вытекает равенство

$$f = \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k.$$

Если же последовательность $\{e_k\}$ бесконечна, то из (5) следует, что

$$\| f - \sum_{k=1}^{m} (f, e_k) e_k \|^2 \leqslant \lambda_{m+1}^2 \| h \|^2$$

или

$$0 \leqslant \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{m} |(f, e_k)|^2 \leqslant \lambda_{m+1}^2 \| h \|^2.$$

Полагая $m \to \infty$, мы получим, что

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2,$$

и теорема доказана.

Замечание. В наших построениях для определения n-го собственного значения $\lambda_n (n \geqslant 2)$ и соответствующего собственного вектора e_n требовалось знание предыдущих собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Однако n-е собственное значение может быть определено независимым экстремальным свойством. Это обстоятельство было впервые указано Фишером для конечномерного случая, а затем далеко обобщено Курантом. Приведем относящийся сюда результат применительно к случаю позитивного вполне непрерывного оператора.

Пусть A — позитивный вполне непрерывный оператор в R, *так что всегда $(Af, f) \geqslant 0$. В таком случае при любом $n \geqslant 2$*

$$\lambda_n = \min_{g_i \in R} \max_{(f, g_i)=0} (Af, f) \quad (\| f \| = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

(Здесь max берется при фиксированных $g_i \in$ R $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, а затем min по всевозможным наборам элементов g_i).

Доказательство. Неравенство

$$\lambda_n \geqslant \min_{g_i \in \mathrm{R}} \max_{(f, g_i)=0} (Af, f) \quad (\| f \| = 1, i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

очевидно, в чем можно убедиться, беря $g_i = e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, так как

$$\lambda_n = \max_{(f, f_i)=0} (Af, f) \quad (\| f \| = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, зададимся набором векторов $g_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$, а элемент f возьмем в виде

$$f = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n,$$

где коэффициенты $c_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ подобраны так, что

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, g_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ясно, что такой выбор возможен. При этом выборе вектора f, во-первых, $\|f\| = 1$, во-вторых, $(f, g_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и, наконец,

$$Af = \lambda_1 c_1 e_1 + \lambda_2 c_2 e_2 + \cdots + \lambda_n c_n e_n,$$

так что

$$(Af, f) = \lambda_1 |c_1|^2 + \lambda_2 |c_2|^2 + \cdots + \lambda_n |c_n|^2 \geqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \lambda_n.$$

Значит,

$$\max_{(f,\, g_i)=0} (Af, f) \geqslant \lambda_n \quad (\|f\| = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и утверждение доказано.

61. Вполне непрерывные нормальные операторы. Пусть в линейной метризованной системе R дан вполне непрерывный оператор S, обладающий определенным всюду в R сопряженным оператором S^*; пусть, кроме того, $S^*S = SS^*$.

Коротко скажем, что S есть вполне непрерывный *нормальный* оператор в R. Рассмотрим оператор $A = S^*S$. Это — вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого $AS = SA$, $AS^* = S^*A$ и $(Af, f) \geqslant 0$ при любом $f \in$ R. Последнее вытекает из того, что

$$(Af, f) = (S^*Sf, f) = (Sf, Sf).$$

Отметим, что в силу этого свойства все отличные от нуля собственные значения оператора A положительны. Обозначим их

$$\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2 \geqslant \cdots \quad (\rho_k > 0).$$

На основании предыдущего n° оператор A имеет полную в Δ_A ортонормированную систему собственных векторов g_k:

$$Ag_k = \rho_k^2 g_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Возьмем какое-нибудь отличное от нуля собственное значение оператора A (пусть это будет ρ^2), имеющее кратность $r > 1$. Далее, обозначим через

$$g^{(1)},\ g^{(2)},\ \ldots,\ g^{(r)}$$

ортонормированные собственные векторы оператора A, принадлежащее этому собственному значению, а натянутое на них подпространство обозначим через G. Покажем, что G является инвариантным подпространством для S и для S^*.

Пусть $g \in$ G. Тогда

$$ASg = SAg = \rho^2 Sg$$

и, значит, $Sg \in$ G. Аналогично устанавливается, что $S^*g \in$ G.

Заметим, что если $g \in \mathrm{G}$ и $h \in \mathrm{G}$, то

$$(Sg, Sh) = (S^*Sg, h) = (Ag, h) = \rho^2 (g, h).$$

Поэтому на подпространстве G имеем $S = \rho U$, где U — унитарный в G оператор. Кроме того, справедливы равенства

$$S^* = \rho U^* = \rho U^{-1}.$$

Так как $Ug^{(i)} \in \mathrm{G}$, то можно положить

$$Ug^{(i)} = \alpha_{1i} g^{(1)} + \alpha_{2i} g^{(2)} + \cdots + \alpha_{ri} g^{(r)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Будем искать собственные векторы оператора U. Если f один из них и

$$f = x_1 g^{(1)} + x_2 g^{(2)} + \cdots + x_r g^{(r)},$$

то из равенства

$$Uf = \theta f$$

будет следовать, что

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1r}x_r &= \theta x_1; \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2r}x_r &= \theta x_2; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \cdots + \alpha_{rr}x_r &= \theta x_r.
\end{aligned}$$

Таким образом, для θ получается уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \theta & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \theta & \ldots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rr} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Каждому корню этого уравнения отвечает собственный вектор оператора U; поэтому все корни нашего уравнения по модулю равны 1. Пусть $\theta^{(1)}$ — один из этих корней, а $f^{(1)}$ — соответствующий ему собственный вектор. Возьмем совокупность всех векторов пространства $\mathrm{G} \equiv \mathrm{G}_1$, которые ортогональны $f^{(1)}$. Эта совокупность векторов есть некоторое пространство G_2, и U является унитарным оператором в G_2. Поэтому, повторяя проведенные рассуждения, мы найдем, что оператор U имеет собственный вектор в G_2 (назовем этот вектор $f^{(2)}$), а соответствующее собственное значение — $\theta^{(2)}$.

Применяя этот процесс отщепления, построим систему из r ортогональных и нормированных векторов

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(r)},$$

для которых

$$Uf^{(j)} = \theta^{(j)} f^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Но

$$Sf^{(j)} = \rho U f^{(j)} = \rho\theta^{(j)} f^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Поэтому $f^{(j)}$ есть собственный вектор оператора S, принадлежащий собственному значению $\rho\theta^{(j)}$. Аналогично доказывается, что $f^{(j)}$ есть собственный вектор оператора S^*, принадлежащий собственному значению $\rho\overline{\theta^{(j)}}$. Заменяя в системе собственных векторов

$$g_1, \ g_2, \ g_3, \ \ldots$$

оператора A векторы

$$g^{(1)}, \ g^{(2)}, \ \ldots, \ g^{(r)}$$

векторами

$$f^{(1)}, \ f^{(2)}, \ \ldots, \ f^{(r)}$$

и поступая так с каждым положительным собственным значением оператора A, кратность которого больше 1, мы получаем доказательство первой части следующей теоремы.

Теорема. *Всякому вполне непрерывному нормальному оператору $S \neq 0$ в R отвечает ортонормированная система векторов $\{e_k\}$ и система не равных нулю (комплексных) чисел $\{\lambda_k\}$, для которых*

$$Se_k = \lambda_k e_k, \quad S^* e_k = \bar{\lambda}_k e_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эта система векторов является полной в том смысле, что любой элемент f, имеющий вид Sh или S^*h, представим рядом

$$f = \sum_k (f, e_k)\, e_k. \tag{1}$$

Чтобы доказать вторую часть утверждения, положим $f = Sh$ и рассмотрим вектор

$$f' = S^* f = S^* S h = Ah.$$

На основании теоремы 2 n°60 о самосопряженном вполне непрерывном операторе и того, что векторы[1] e_k образуют полную в смысле указанной теоремы ортонормированную систему векторов оператора A, имеет место уравнение замкнутости

$$\| f' \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f', e_k)|^2.$$

Иначе говоря, f' есть сильный предел последовательности

$$\sum_{k=1}^{n} (f', e_k)\, e_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[1] Мы примем для определенности, что их бесконечное множество.

Поэтому

$$(f', h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f', e_k)(e_k, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (f', e_k)(e_k, h).$$

А так как

$$(f', h) = (S^*f, h) = (f, Sh) = (f, f),$$

$$(f', e_k) = (S^*f, e_k) = (f, Se_k) = \bar{\lambda}_k (f, e_k),$$

$$(e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(S^*e_k, h) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(e_k, Sh) = \frac{1}{\bar{\lambda}_k}(e_k, f),$$

то полученное нами соотношение можно представить в виде

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2.$$

Таким образом, равенство (1) доказано, если $f = Sh$, и аналогично доказывается, если $f = S^*h$.

62. Приложение к теории почти-периодических функций. Как уже было указано в n° 15, непрерывная комплексная функция $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ называется почти-периодической, если каждому $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое $l = l(\varepsilon) > 0$, что в любом интервале длины l содержится по крайней мере одно число τ (число смещения), для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

при всех t.

Отправляясь от этого определения, нетрудно установить ряд простых свойств почти-периодических функций, мы приведем эти свойства без доказательства[1].

I. Всякая почти-периодическая функция ограничена и равномерно непрерывна на всей оси.

II. Для всякой почти-периодической функции $f(t)$ существует и притом равномерно по a так называемое *среднее значение*

$$\mathbf{M}\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} f(t)\,dt.$$

III. Произведение и сумма двух почти-периодических функций являются функциями почти-периодическими.

IV. Если $f(t)$ есть почти-периодическая функция и если

$$\mathbf{M}\{|f(t)|^2\} = 0,$$

то $f(t) \equiv 0$.

[1] Читатель найдет подробное изложение в монографии Б. М. Левитана «Почти-периодические функции», М., Гостехиздат, 1953, 396 с.

Совокупность всех почти-периодических функций становится линейной метризованной системой R, если скалярное произведение определить формулой

$$(f, g) = \mathbf{M}\{f(t)\overline{g(t)}\}. \qquad (1)$$

То, что из $(f, f) = 0$ следует $f = 0$, составляет содержание свойства IV.

В n° 15 скалярное произведение (1) было введено для всех многочленов вида

$$\sum_k A_k e^{i\lambda_k t}. \qquad (2)$$

Будучи суммой чисто периодических, а значит, и почти-периодических функций, всякий такой многочлен принадлежит нашей линейной системе R. В частности, линейной системе принадлежит континуум функций

$$e^{i\lambda t} \ (-\infty < \lambda < \infty),$$

образующий ортонормированную систему. Поэтому, подобно упомянутому в n° 15 пространству B^2, линейная система R несепарабельна. Заметим также, что R не обладает полнотой.

Центральное место в теории почти-периодических функций занимает своеобразный гармонический анализ.

Вместо обычных констант Фурье чисто-периодической функции, при гармоническом анализе почти-периодической функции $f(t)$ вводится величина

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt = \mathbf{M}\{f(t) e^{-i\lambda t}\} = (f, e^{i\lambda t}),$$

существование которой при любом вещественном λ вытекает из свойств II и III. На основании замечания на с. 31 (см. n° 10) для каждой функции $f(t) \in R$ существует не более счетного множества значений (вещественного) параметра λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$. Обозначим эти значения

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

и назовем их *показателями Фурье* функции $f(t)$. Отвечающие им числа

$$C_k = a(\lambda_k) \ (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

назовем *константами Фурье* функции $f(t) \in R$.

Таким образом, каждой функции $f(t) \in R$ принадлежит *ряд Фурье*

$$f(t) \sim \sum_k C_k e^{i\lambda_k t}$$

и из общих положений n° 8 следует, что

$$\sum_k |C_k|^2 \leqslant \mathbf{M}\{|f(t)|^2\}. \tag{3}$$

Такой вид принимает здесь неравенство Бесселя.

Основной теоремой теории Бора является теорема о том, что *в неравенстве* (3) *всегда имеет место знак равенства*. Мы приведем принадлежащее Г. Вейлю доказательство этой теоремы, основанное на теории вполне непрерывных операторов.

С этой целью положим

$$v(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)\,u(t)\,dt = \mathbf{M}_t\{f(s-t)\,u(t)\}.$$

Эта формула относит каждой функции $u(t) \in \mathrm{R}$ некоторую функцию $v(t)$, которая, очевидно, также принадлежит R. Таким образом, мы имеем некоторый линейный оператор, который порождается функцией $f(t)$ и переводит $u(t)$ в $v(t)$. Этот оператор мы обозначим через A.

Докажем в первую очередь, что A есть оператор нормальный. С этой целью введем второй оператор, полагая $w = Bu$, если

$$w(s) = \mathbf{M}_t\{\overline{f(t-s)}\,u(t)\},$$

и докажем, что:

a) $(Au_1, u_2) = (u_1, Bu_2)$ для любых $u_1(t)$, $u_2(t) \in \mathrm{R}$,

b) $AB = BA$.

Свойство a) доказывается с помощью следующих простых преобразований, справедливость которых вытекает из равномерности существования средних:

$$(Au_1, u_2) = \mathbf{M}_s\{\mathbf{M}_t[f(s-t)\,u_1(t)]\,\overline{u_2(s)}\} = \mathbf{M}_t\{u_1(t)\,\mathbf{M}_s[f(s-t)\,\overline{u_2(s)}]\} =$$
$$= \mathbf{M}_t\{u_1(t)\,\overline{\mathbf{M}_s[\overline{f(s-t)}\,u_2(s)]}\} = (u_1, Bu_2).$$

Докажем свойство b). Прежде всего заметим, что

$$ABu = \mathbf{M}_t\{f(s-t)\,\mathbf{M}_\tau[\overline{f(\tau-t)}\,u(\tau)]\} = \mathbf{M}_\tau\{u(\tau)\,\mathbf{M}_t[f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}]\}.$$

Затем рассмотрим подробнее функцию

$$\varphi = \mathbf{M}_t[f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)\,\overline{f(\tau-t)}\,dt.$$

С помощью замены переменной

$$\tau - t = \sigma - s$$

получаем

$$\varphi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{\tau+s-T}^{\tau+s+T} f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}\,d\sigma =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}\,d\sigma = \mathop{\mathbf{M}}_{\sigma}[f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}].$$

Следовательно,

$$ABu = \mathop{\mathbf{M}}_{\tau}\{u(\tau)\mathop{\mathbf{M}}_{\sigma}[f(\sigma-\tau)\overline{f(\sigma-s)}]\} =$$

$$= \mathop{\mathbf{M}}_{\sigma}\{\overline{f(\sigma-s)}\mathop{\mathbf{M}}_{\tau}[f(\sigma-\tau)u(\tau)]\} = BAu,$$

и свойство b) доказано.

Теперь докажем, что A есть оператор вполне непрерывный. Пусть дано некоторое множество функций $u(t) \in \mathrm{R}$, для которых

$$\| u \|^2 = \mathbf{M}\{| u(t) |^2\} \leqslant 1.$$

Мы должны доказать, что это множество содержит последовательность $\{u_n(t)\}_1^\infty$, которая оператором A переводится в последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$, сходящуюся в метрике R к некоторой функции $v(t) \in \mathrm{R}$. Функция $u(t)$ оператором A переводится в функцию

$$v(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s-t)\,u(t)\,dt. \tag{4}$$

Из этой формулы следует, что

$$| v(s) | \leqslant \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} | f(s-t) |^2 dt}\,\sqrt{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} | u(t) |^2 dt}$$

или

$$| v(s) | \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\{| f(t) |^2\}} = C,$$

т. е. преобразованные функции $v(s)$ равномерно ограничены.

Далее из формулы (4) следует, что

$$v(s') - v(s'') = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{f(s'-t) - f(s''-t)\}\,u(t)\,dt,$$

откуда

$$|v(s')-v(s'')| \leqslant \sqrt{\underset{t}{\mathbf{M}}\{|f(s'-t)-f(s''-t)|^2\}}.$$

Это неравенство показывает, что функции $v(s)$ равностепенно непрерывны. В самом деле, $f(t)$ равномерно непрерывна. Поэтому при $|s'-s''| \leqslant \delta = \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|f(s'-t)-f(s''-t)| \leqslant \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty)$$

и, следовательно, при $|s'-s''| \leqslant \delta$

$$|v(s')-v(s'')| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\{\varepsilon^2\}} = \varepsilon.$$

С помощью теоремы Арцеля и диагонального процесса из множества функций $v(t)$ можно выделить последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$, равномерно сходящуюся в каждом конечном интервале числовой оси. Пусть предельная функция есть $V(t)$. Она также удовлетворяет неравенству

$$|V(s')-V(s'')| \leqslant \sqrt{\underset{t}{\mathbf{M}}\{|f(s'-t)-f(s''-t)|^2\}}.$$

Поэтому, во-первых, $V(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, во-вторых, если τ есть число смещения функции $f(t)$, принадлежащее ε и $s'-s''=\tau$, то

$$|V(s')-V(s'')| \leqslant \varepsilon.$$

Покажем, что в силу этих двух фактов последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$ сходится к $V(t)$ равномерно на всей оси. Действительно, зададимся числом $\varepsilon > 0$ и прежде всего найдем для функции $f(t)$ число $l = l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, которое входит в определение почти-периодической функции. Это число l принадлежит в понятном смысле каждой функции $v_n(t)$, а также функции $V(t)$. Затем определим номер $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\varepsilon)$ так, чтобы при $n \geqslant \mathcal{N}$ имело место неравенство

$$|v_n(t)-V(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad (-l \leqslant t \leqslant l),$$

что возможно, так как в каждом конечном интервале сходимость последовательности $\{v_n(t)\}_1^\infty$ равномерна. Теперь возьмем любую точку x числовой оси, заключим ее в интервал длины l и найдем в этом интервале точку τ, представляющую число смещения, принадлежащее $\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $x=\tau+t$, где $-l \leqslant t \leqslant l$, и поэтому

$$|v_n(x)-V(x)| \leqslant |v_n(\tau+t)-v_n(t)| + |v_n(t)-V(t)| +$$
$$+ |V(t)-V(\tau+t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, наше утверждение доказано. А так как

$$\sqrt{\mathbf{M}\{|w_1(t)-w_2(t)|^2\}} \leqslant \sup_{-\infty<t<\infty} |w_1(t)-w_2(t)|,$$

то последовательность $\{v_n(t)\}_1^\infty$ сходится не только равномерно на оси, но и подавно в метрике R. Таким образом, вполне непрерывность оператора A доказана.

Пусть μ — какое-нибудь отличное от нуля собственное значение оператора A и пусть

$$g_1(t),\ g_2(t),\ \ldots,\ g_n(t) \tag{5}$$

есть какая-нибудь полная ортонормированная система собственных элементов оператора A, принадлежащих собственному значению μ. Если $g(t)$ — один из этих собственных элементов, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\,g(t)\,dt = \mu g(s).$$

Отсюда видно, что при любом (вещественном) σ функция $g(t+\sigma)$ также будет собственным элементом, принадлежащим числу μ. В силу этого обстоятельства должны иметь место соотношения

$$g_r(t+\sigma) = \sum_{k=1}^{n} c_{rk}(\sigma)\,g_k(t) \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{6}$$

Таким образом, попарно ортогональные и нормированные почти-периодические функции (5) удовлетворяют функциональным уравнениям (6). Отсюда различными способами* можно установить, что каждая из функций $g_r(t)$ имеет вид

$$g_r(t) = \sum_{k=1}^{n} c_r^{(k)} e^{i\lambda_k t},$$

* Из ортонормированности функций (5) вытекает, что $\det(g_k(t_i))_{k,\,i=1}^{n}$ не может тождественно равняться нулю. Взяв набор $\{t_i\}_1^n$ так, чтобы этот детерминант был отличен от нуля, найдем достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором тем же свойством будет обладать $\det(\gamma_{ki})_{k,\,i=1}^{n}$, где

$$\gamma_{ki} = \int_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon} g_k(t)\,dt.$$

Но тогда из соотношений (6) при фиксированном r следует, что система

$$\int_{\sigma+t_i-\varepsilon}^{\sigma+t_i+\varepsilon} g_r(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} c_{rk}(\sigma) \int_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon} g_k(t)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где $c_r^{(k)}$ — константы. Вводя, если это нужно, вместо первоначальных собственных элементов $g_r(t)$ их надлежащие линейные комбинации, можно в качестве собственных элементов принять функции

$$e^{i\lambda_1 t},\ e^{i\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{i\lambda_n t}.$$

По определению величины $a(\lambda)$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\,e^{i\lambda_r t}dt =$$

$$= e^{i\lambda_r s}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(s-t)\,e^{i\lambda_r (t-s)}dt = e^{i\lambda_r s}a(\lambda_r).$$

Таким образом, мы нашли общий вид собственных векторов оператора A и установили, что собственному вектору $e^{i\lambda_r t}$ в качестве собственного значения отвечает константа Фурье

$$a(\lambda_r) = \mathbf{M}\left\{f(t)\,e^{-i\lambda_r t}\right\}.$$

Пусть

$$e^{i\lambda_1 t},\ e^{i\lambda_2 t},\ e^{i\lambda_3 t},\ \ldots$$

есть последовательность всех собственных векторов оператора A, которым отвечают отличные от нуля собственные значения

$$C_1 = a(\lambda_1),\quad C_2 = a(\lambda_2),\quad C_3 = a(\lambda_3),\ \ldots$$

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(\Phi,\ e^{i\lambda_k t}\right)e^{i\lambda_k t}, \tag{7}$$

разрешима относительно $c_{rk}(\sigma)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, откуда лёгко усмотреть, что $c_{rk}(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемы. Поэтому из (6) вытекает система дифференциальных уравнений

$$g_r'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{rk}'(0)\,g_k(t)\quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Решениями этой дифференциальной системы являются линейные комбинации функций вида

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)\,e^{\beta t}.$$

Затем остается принять во внимание, что функции $g_k(t)$ должны быть ограничены на всей оси. В силу этого обстоятельства β должно быть число мнимым, а многочлен — множитель при $e^{\beta t}$ — должен сводиться к первому члену.

Другой, идейно более содержательный, путь основан на одновременном приведении к диагональному виду абелевой группы унитарных матриц

$$(c_{rk}(\sigma))_{r,\,k=1}^{n}.$$

где $\Phi \in R$. Так как

$$\sum_{k=m}^{\infty} |C_k(\Phi, e^{i\lambda_k t})| \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |(\Phi, e^{i\lambda_k t})|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} |C_k|^2 \sqrt{M\{|\Phi(t)|^2\}}},$$

то ряд (7) сходится равномерно по t. Теперь рассмотрим функцию

$$\underset{s}{\mathbf{M}}\{f(t-s)\overline{f(-s)}\},$$

имеющую вид Ag, где $g(t) \in R$. По теореме n° 61 эта функция в метрике R представима рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \underset{s}{\mathbf{M}}\{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\} e^{i\lambda_k t}.$$

Так как по сказанному выше[1] этот ряд сходится равномерно, то имеет место равенство

$$\underset{s}{\mathbf{M}}\{f(t-s)\overline{f(-s)}\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathbf{M}\{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\} e^{i\lambda_k t},$$

откуда при $t=0$

$$\mathbf{M}\{|f(-s)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathbf{M}\{\overline{f(-s)}\, e^{-i\lambda_k s}\}$$

или

$$\mathbf{M}\{|f(t)|^2\} = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2,$$

и основная теорема Бора доказана.

63. Разложение произвольного вполне непрерывного оператора в ряд одномерных операторов. В n° 22 было показано, что конечномерный оператор T характеризуется представлением в виде суммы одномерных операторов следующего вида:

$$Th = (h, f_1) g_1 + (h, f_2) g_2 + \cdots + (h, f_n) g_n. \qquad (1)$$

Обобщением этого элементарного факта является.

Теорема 1. *Пусть T — произвольный вполне непрерывный оператор в H, а H_0 — его нулевое подпространство. В таком случае существуют две ортонормированные системы векторов $\{e_k\}_1^{\infty}$, $\{g_k\}_1^{\infty}$ и монотонно убывающая последовательность положительных чисел*

---

[1] Роль функции $\Phi(t)$ играет $\overline{f(-t)}$.

$\{\mu_k\}_1^\infty$, $\mu_k \to 0$, *обладающие следующим свойством: для любого вектора* $h \in \mathrm{H}$ *имеют место разложения*

$$\left.\begin{aligned} h &= h_0 + (h, e_1)e_1 + (h, e_2)e_2 + \cdots \quad (h_0 \in \mathrm{H}_0) \\ Th &= \mu_1(h, e_1)g_1 + \mu_2(h, e_2)g_2 + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

в смысле сильной сходимости.

Доказательство. Начнем с того, что в случае, когда оператор T самосопряженный, наша теорема является следствием теоремы 2 n° 60. Действительно, полагая в этом случае $T = A$ (чтобы не отклоняться от обозначений n° 60) и беря собственные векторы $e_1, e_2, e_3, \ldots$ оператора A, принадлежащие отличным от нуля собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ $(\lambda_k \to 0)$, мы получим согласно n° 60 для любого вектора вида $f = Ah$ представление

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)e_k,$$

где

$$(f, e_k) = (Ah, e_k) = (h, Ae_k) = \lambda_k(h, e_k).$$

Таким образом, для любого $h \in \mathrm{H}$

$$Ah = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(h, e_k)e_k.$$

Если положить

$$h_0 = h - \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)e_k,$$

так что

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)e_k,$$

то

$$Ah_0 = Ah - \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k)Ae_k = 0.$$

Итак, в случае, когда $T = A$ есть самосопряженный оператор, наша теорема верна, причем можно принять $\mu_k = \lambda_k$ и $g_k = e_k$.

Обратимся теперь к случаю произвольного вполне непрерывного оператора T. Прежде всего, построим вполне непрерывный самосопряженный оператор $A = T^*T$ и введем последовательность отличных от нуля собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\lambda_k \to 0)$ этого оператора и ортонормированную последовательность $\{e_k\}_1^\infty$ соответствующих собственных векторов.

Заметим при этом, что

$$\lambda_k = (Ae_k, e_k) = (T^*Te_k, e_k) = (Te_k, Te_k) > 0.$$

Следовательно, можно положить $\lambda_k = \mu_k^2$, где $\mu_k > 0$, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots$. По доказанному, любой элемент $h \in \mathrm{H}$ можно представить в виде

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k, \tag{3}$$

где h_0 принадлежит нулевому подпространству оператора A. Так как при любых $f_1, f_2 \in \mathrm{H}$

$$(Tf_1, Tf_2) = (T^*Tf_1, f_2) = (Af_1, f_2), \tag{4}$$

то нулевые подпространства операторов T и A совпадают. Из (3) следует поэтому, что

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) Te_k.$$

Полагая

$$Te_k = \mu_k g_k,$$

получаем соотношение

$$\mu_k \mu_j (g_k, g_j) = (Te_k, Te_j) = (Ae_k, e_j) = \lambda_k (e_k, e_j),$$

из которых следует, что

$$(g_k, g_j) = \delta_{kj}.$$

Так как представление (4) можно записать в виде

$$Th = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (h, e_k) g_k,$$

то наша теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 2 n° 30 вытекает следующий важный результат.

Теорема 2. *Для вполне непрерывности определенного всюду в* H *линейного оператора T необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал конечномерный линейный оператор T_ε, удовлетворяющий неравенству*

$$\| T - T_\varepsilon \| < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство необходимости. Пусть оператор T вполне непрерывен. В таком случае он допускает представление (2) и, значит, при любом $\varepsilon > 0$ конечномерный оператор, определяемый формулой

$$T_\varepsilon h = \mu_1 (h, e_1) g_1 + \mu_2 (h, e_2) g_2 + \cdots + \mu_n (h, e_n) g_n.$$

удовлетворяет неравенству

$$\| Th - T_\varepsilon h \| \leqslant \mu_{n+1}^2 \{ |(h, e_{n+1})|^2 + |(h, e_{n+2})|^2 + \ldots \} \leqslant \mu_{n+1}^2 \| h \|^2, \quad (6)$$

откуда и вытекает (5), если $\mu_{n+1} < \varepsilon$.

Достаточность прямо следует из теоремы 2п° 30, так как конечномерный оператор всегда вполне непрерывен.

Если мы обозначим через $\mathrm{K}(n)$ линейное многообразие конечномерных операторов размерности $\leqslant n$, то из неравенства (6), поскольку $T_\varepsilon \in \mathrm{K}(n)$, вытекает, что

$$\inf_{T' \in \mathrm{K}(n)} \| T - T' \| \leqslant \mu_{n+1}. \quad (7)$$

Оказывается, что справедлива следующая

Теорема 3[1]. *Пусть T — вполне непрерывный оператор в* H, *а* $\mu_1^2 \geqslant \mu_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n^2 \geqslant \ldots$ — *собственные значения самосопряженного оператора T^*T. В таком случае*

$$\inf_{T' \in \mathrm{K}(n)} \| T - T' \| = \mu_{n+1},$$

т. е. расстояние от вполне непрерывного оператора T до линейного многообразия операторов размерности $\leqslant n$ в точности равно μ_{n+1}.

Доказательство. Возьмем линейный оператор T' размерности $k \leqslant n$. Ортогональное дополнение к его нулевому подпространству имеет размерность k. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — базис этого подпространства. Тогда в силу замечания п° 60 (см. формулу (6))

$$\mu_{k+1}^2 \leqslant \max_{(f, g_i)=0} (T^*Tf, f) \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \ \| f \| = 1).$$

Из соотношений $(f, g_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ следует, что

$$(T^*Tf, f) = \| Tf \|^2 = \| (T - T') f \|^2 \leqslant \| T - T' \|^2.$$

Поэтому

$$\mu_{n+1} \leqslant \mu_{k+1} \leqslant \| T - T' \|$$

и, значит,

$$\inf_{T' \in \mathrm{K}(n)} \| T - T' \| \geqslant \mu_{n+1}.$$

Остается сопоставить это неравенство с неравенством (7).

64. Ядерные операторы. Этот пункт, где пространство H снова предполагается сепарабельным, посвящен одному классу вполне

[1] См. Аллахвердиев Д. О скорости приближения вполне непрерывных операторов конечномерными операторами.— «Учен. зап. Азерб. ун-та», 1957, 2, с. 27—37.

непрерывных операторов, еще более специальному, чем класс операторов Гильберта-Шмидта.

Начнем с того, что при рассмотрении произвольного вполне непрерывного оператора T полезно вводить, как это уже было сделано в n° 36, положительный вполне непрерывный оператор $A = T^*T$. Его отличные от нуля собственные значения положительны. Пусть

$$\mu_1^2 \geqslant \mu_2^2 \geqslant \mu_3^2 \geqslant \cdots \quad (\mu_k > 0)$$

есть полная последовательность этих собственных значений, а

$$e_1, \ e_2, \ e_3, \ \ldots$$

— соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов. Числа μ_n часто называют *s-числами (сингулярными числами)* оператора T и пишут

$$\mu_n = s_n(T) \quad (n = 1, 2, 3, \ \ldots).$$

Приведем два свойства s-чисел, которые являются простыми следствиями теоремы 3 n° 63.

Свойство 1. *Если T_1 и T_2 — вполне непрерывные операторы, то при любом натуральном N справедливо неравенство*[1]

$$\sum_{n=1}^{2N} s_n(T_1 + T_2) \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} s_n(T_1) + 2\sum_{n=1}^{N} s_n(T_2).$$

Доказательство. Пусть операторы T_1', T_2' принадлежат $K(n-1)$. Тогда $T_1' + T_2' \in K(2n-2)$ и поэтому

$$s_{2n-1}(T_1 + T_2) = \inf_{T' \in K(2n-2)} \| T_1 + T_2 - T' \| \leqslant \| T_1 + T_2 - $$
$$ - (T_1' + T_2') \| \leqslant \| T_1 - T_1' \| + \| T_2 - T_2' \|.$$

Так как левая часть не зависит от T_1', T_2', то

$$s_{2n-1}(T_1 + T_2) \leqslant \inf_{T_1' \in K(n-1)} \| T_1 - T_1' \| + \inf_{T_2' \in K(n-1)} \| T_2 - T_2' \| =$$
$$= s_n(T_1) + s_n(T_2)$$

и тем более

$$s_{2n}(T_1 + T_2) \leqslant s_n(T_1) + s_n(T_2).$$

[1] Это неравенство является грубым. В действительности справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} s_n(T_1 + T_2) \leqslant \sum_{n=1}^{N} s_n(T_1) + \sum_{n=1}^{N} s_n(T_2).$$

См. монографию Гохберг И. и Крейн М. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965, с. 70, лемма 4.2. (Хорн, Фань-Цюй).

Остается просуммировать полученные неравенства от $n=1$ до $n=N$.

Свойство 2. *Пусть T — вполне непрерывный, а B — ограниченный оператор, тогда*

$$s_n(BT) \leqslant \| B \| s_n(T), \quad s_n(TB) \leqslant \| B \| s_n(T)$$

Доказательство. Если $T' \in \mathrm{K}(n-1)$, то и $BT' \in \mathrm{K}(n-1)$ а также $T'B \in \mathrm{K}(n-1)$. Поэтому

$$s_n(BT) \leqslant \| BT - BT' \| \leqslant \| B \| \cdot \| T - T' \|.$$

Отсюда следует, что

$$s_n(BT) \leqslant \| B \| \inf_{T' \in \mathrm{K}(n-1)} \| T - T' \| = \| B \| s_n(T),$$

а аналогично доказывается второе неравенство.

Непосредственно из определения наибольшего собственного значения следует, что

$$\| T \| = \sqrt{\| A \|} = \mu_1.$$

В терминах спектра оператора A нетрудно представить также и абсолютную норму оператора T. Действительно,

$$N^2(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \| Te_k \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Te_k, Te_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (T^*Te_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2.$$

Таким образом, оператор T является оператором Гильберта — Шмидта в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty. \tag{1}$$

Теперь примем следующее

Определение. *Вполне непрерывный оператор T называется ядерным, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty. \tag{2}$$

Из приведенных выше свойств s-чисел вытекает, что сумма двух ядерных операторов, а также произведение ядерного оператора на ограниченный оператор снова будут ядерными операторами.

Далее, поскольку из (2) следует (1), то всякий ядерный оператор является оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 1. *Пусть T — ядерный оператор. В таком случае при любом выборе в* H *ортонормированного базиса* $\{f_k\}_1^\infty$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k, f_k)$$

сходится абсолютно, его сумма не зависит от выбора базиса и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Tf_k, f_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 n° 63, для любого вектора $h \in$ H можно написать следующие разложения:

$$h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h, e_k) e_k, \quad Th = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (h, e_k) g_k, \tag{4}$$

где

$$Te_k = \mu_k g_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

а h_0 принадлежит нулевому подпространству оператора T. Из этих разложений следует, что

$$(Tf_k, f_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f_k, e_i)(g_i, f_k) \tag{5}$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Tf_k, f_k)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k, e_i)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k, g_i)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i.$$

Поэтому первое и третье утверждения доказаны. Второе утверждение следует из соотношений

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k, e_i)(g_i, f_k) = (g_i, e_i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Действительно, суммируя (5), получаем в силу этих соотношений равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k, f_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (g_i, e_i),$$

из которого видно, что левая часть зависит от выбора ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^\infty$.

Вспоминая терминологию линейной алгебры, можем сказать, что всякий ядерный оператор T имеет конечный матричный след

$$\operatorname{Sp} T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k, f_k).$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если T — ядерный оператор, а B — ограниченный оператор, то*

$$\mathrm{Sp}(BT) = \mathrm{Sp}(TB).$$

Доказательство. Используя для вектора $h \in \mathrm{H}$ разложение (4) найдем, что

$$BTh = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (h, e_k) Bg_k$$

и

$$TBh = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (h, B^* e_k) g_k.$$

Остается вычислить $\mathrm{Sp}(BT)$ по формуле

$$\mathrm{Sp}(BT) = \sum_{i=1}^{\infty} (BTe_i, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (Bg_i, e_i),$$

а $\mathrm{Sp}(TB)$ — по формуле

$$\mathrm{Sp}(TB) = \sum_{i=1}^{\infty} (TBg_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (g_i, B^* e_i).$$

Теорема 1 утверждает значительно меньше, чем соответствующая теорема алгебры. Однако и в интересующем нас вопросе имеются дальнейшие важные предложения и в первую очередь следующая

Теорема 2. *Если T — ограниченный оператор, определенный всюду в* H *и если для любого ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^{\infty}$ ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k, f_k) \tag{6}$$

сходится, то T — ядерный оператор.

Доказательство этой теоремы читатель найдет в цитированной на с. 195 книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна.

Мы ограничимся здесь доказательством более простого предложения.

Теорема 2'. *Если T — ограниченный положительный оператор, определенный всюду в* H, *и если ряд* (6) *сходится хотя бы для одного ортонормированного базиса $\{f_k\}_1^{\infty}$, то T — ядерный оператор.*

Доказательство. Для рассматриваемого в теореме 2' оператора T, очевидно, справедливы соотношения

$$|(Tf_i, f_k)|^2 \leqslant (Tf_i, f_i)(Tf_k, f_k).$$

Поэтому сходимость ряда (6) влечет неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |(Tf_i,\ f_k)|^2 < \infty,$$

откуда следует, что T — оператор Гильберта—Шмидта, а значит, он вполне непрерывен. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — полная последовательность его положительных собственных значений, а $\{e_k\}_1^\infty$ — соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов. Построим оператор S, определяемый на любом элементе $h \in \mathrm{H}$ с помощью формулы

$$Sh = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,(h,\ e_k)\,e_k \quad (\sqrt{\lambda_k} > 0).$$

Ясно, что S — положительный вполне непрерывный оператор и $S^2 = T$.

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Tf_k,\ f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (S^2 f_k,\ f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \| Sf_k \|^2,$$

то в силу сходимости ряда (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Sf_k \|^2 < \infty,$$

а это значит, что S есть также оператор Гильберта—Шмидта и поэтому при любом ортонормированном базисе $\{g_k\}_1^\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Sg_k \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| Sf_k \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| Se_k \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k. \tag{7}$$

Здесь один шаг нуждается в пояснении. Дело в том, что ортонормированная последовательность $\{e_k\}$ не является базисом в H, однако если бы мы ее дополнили до базиса с помощью некоторой последовательности векторов $\{e_i'\}$, то каждый из векторов e_i' принадлежал бы нулевому подпространству оператора T, и мы имели бы равенства

$$\| Se_i' \|^2 = (Se_i',\ Se_i') = (Te_i',\ e_i') = 0.$$

Из равенства (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Tg_k,\ g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Тем самым утверждение теоремы 2′ доказано.

В книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна приводится также доказательство следующей важной теоремы В. Б. Лидского, обобщающей известное предложение теории матриц.

Теорема 3. *Если оператор T ядерный и $\{\lambda_k\}$ — совокупность всех его собственных значений, то*

$$\operatorname{Sp} T = \sum_k \lambda_k.$$

В частности, $\operatorname{Sp} T = 0$, если у оператора T нет собственных значений, как, например, у интегрального оператора Вольтерра.

65. Теорема Шаудера о неподвижной точке. В этом п° нашим опорным пунктом будет знаменитая

Теорема Брауэра[1]. *Пусть Q — ограниченное замкнутое выпуклое точечное множество в конечномерном евклидовом пространстве. В таком случае для каждого непрерывного отображения f множества Q в себя существует по крайней мере одна неподвижная точка, т. е. такая точка $x \in Q$, что $f(x) = x$.*

Мы воспользуемся этой чисто топологической теоремой для доказательства одной теоремы о существовании неподвижной точки в бесконечномерном пространстве. Однако доказательство[2] самой теоремы Брауэра выходит за рамки настоящей книги.

Если об отображении f предполагать лишь простую непрерывность, то на бесконечномерный случай теорема Брауэра не переносится. Очень простой пример, доказывающий это, принадлежит Какутани[3].

Пример Какутани. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и пусть Q — замкнутый шар $\|x\| \leqslant 1$. Обозначим через U унитарный оператор, который на ортах задается равенствами

$$Ue_n = e_{n+1} \quad (\pm n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

В примере Какутани рассматривается оператор f, определяемый равенством

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)\, e_0 + Ux.$$

---

[1] Brouwer L. E. Über eineindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich, Math. Ann., 1910, **69**, S. 176—180.

[2] С доказательством читатель может познакомиться, например, по следующим книгам: Ху Сы-цзян. Теория гомотопий. М., «Мир», 1964, с. 12; Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. 1962, т. 1, с. 506—508; Jane Cronin, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis, Math. Surv. Amer. Math. Soc. 1964, N 11, p. 76—83.

[3] Kakutani S. Topological Properties of the Unit Sphere in Hilbert Space, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943, 19. См. также Cronin J. (loc. cit.), p. 125—127.

Легко видеть, что этот оператор непрерывен в Q и отображает Q в себя. Мало того, это отображение представляет гомеоморфизм[1].

Между тем оператор f не имеет ни одной неподвижной точки. Это мы и покажем. С этой целью допустим противное и обозначим неподвижную точку через x. Тогда

$$x = \frac{1}{2}(1 - \|x\|) e_0 + Ux.$$

И если положить

$$(x, e_k) = \alpha_k \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

то мы найдем, что

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)(e_0, e_k) + \alpha_{k-1}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} \quad (k \neq 0), \tag{1}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \|x\|) + \alpha_{-1}. \tag{2}$$

Из (1) находим, что

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots, \alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \alpha_{-3} = \ldots$$

Поэтому для сходимости ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

необходимо, чтобы все α_k были равны 0, но тогда $x = 0$, а это несовместимо с равенством (2).

Таким образом, пример построен.

Хотя наша книга посвящена гильбертовому пространству, мы будем в этом и следующем n° предполагать, что имеем дело с пространством Банаха E (комплексным или вещественным). Наши рассмотрения будут ничуть не сложнее[2], чем в пространстве H. Начнем с понятия об *ε-сети*, которое у нас ранее не встречалось.

---

[1] На доказательстве этого свойства мы не остановимся. Заметим лишь, что если бы в правой части формулы, определяющей $f(x)$, первый член был $(1 - \|x\|) e_0$, то отображение Q в Q не было бы взаимно однозначным.

[2] Такие понятия как компактность множества (секвенциальная, см. n° 27), а также непрерывность и вполне непрерывность оператора (нелинейного) при переходе от H к E в дополнительных пояснениях не нуждаются и будут использованы в этом и следующем n° без каких-либо оговорок Лишь для одного предложения мы приведем в конце настоящего пункта те изменения в построениях, которые необходимы в доказательствах при переходе от H к E

Определение. *Пусть* M — *какое-нибудь точечное множество в* E. *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *в* M *имеется конечное число таких элементов* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *что любому* $x \in M$ *можно отнести хотя бы одно* v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *так, чтобы* $\|x - v_i\| < \varepsilon$, *то говорят, что эти элементы* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *образуют в* M *конечную* ε-*сеть*.

Теорема 1. *Для компактности замкнутого множества* $K \subset E$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$ *в* K *существовала конечная* ε-*сеть*.

Доказательство необходимости.

Пусть замкнутое множество $K \subset E$ компактно. Допустим, что вопреки утверждению для некоторого $\varepsilon > 0$ в K не существует конечной ε-сети. В таком случае в K найдется пара элементов x_1, x_2, для которых

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant \varepsilon.$$

Теперь положим, что уже найдены элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k \in K$, для которых

$$\|x_j - x_i\| \geqslant \varepsilon \quad (i \neq j) \tag{3}$$

при $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Так как $\{x_i\}_1^k$ не является ε-сетью, то найдется элемент $x_{k+1} \in K$, для которого

$$\|x_{k+1} - x_i\| \geqslant \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

и значит (3) верно при $i, j = 1, 2, \ldots, k+1$. Таким образом, мы можем построить по индукции бесконечную последовательность $\{x_i\}_1^\infty \subset K$, для которой верно (3). Но эта последовательность вопреки предположению о компактности K не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности, так как никакая такая подпоследовательность не является, в силу (3), фундаментальной.

Доказательство достаточности. Пусть в замкнутом множестве K существует конечная ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}\varepsilon_1$ $(k = 2, 3, \ldots)$, и пусть построена ε_k-сеть при любом $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $\{x_i\}_1^\infty$ — произвольная последовательность в K. Тогда в одном из шаров, определяющих ε_1-сеть (назовем этот шар Q_1), лежит бесконечная часть $\sigma_1 = \{x_{1i}\}_{i=1}^\infty$ последовательности $\sigma = \{x_i\}_1^\infty$. Затем в некотором шаре Q_2 из тех, которые соответствуют ε_2-сети, лежит бесконечная часть $\sigma_2 = \{x_{2i}\}_{i=1}^\infty$ последовательности σ_1, и так далее. Построим диагональную подпоследовательность $\{x_{ii}\}_{i=1}^\infty$ по этим подпоследовательностям $\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$. Тогда все элементы $y_i = x_{ii}$, начиная с некоторого, лежат внутри любого из шаров Q_m, а значит, для любых m, $n > \mathcal{N}(\varepsilon_j)$ будет выполнено неравенство

$$\| y_n - y_m \| < 2\varepsilon_j = \frac{1}{2^{j-1}} \varepsilon_1.$$

Отсюда видно, что $\{y_i\}_1^\infty$ есть фундаментальная последовательность, содержащаяся в $\{x_i\}_1^\infty$.

Остается принять во внимание полноту E и замкнутость K.

С помощью теоремы 1 доказывается следующее обобщение теоремы Гейне—Бореля[1].

Теорема 2. *Если бесконечное множество открытых областей $\{G_\alpha\}$ покрывает замкнутое компактное множество $K \subset E$, т. е. каждый элемент K принадлежит одной из этих открытых областей, то из $\{G_\alpha\}$ можно извлечь конечное подмножество, которое также покрывает* K.

Вспомогательное построение. Пусть K — компактное множество в E и пусть $\{v_i\}_1^n$ — некоторая ε-сеть в $\overline{K}$. В таком случае под F_ε мы будем понимать оператор (нелинейный) из $\overline{K}$ в E, определяемый для любого $x \in \overline{K}$ формулой

$$F_\varepsilon x \equiv F_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) v_i,$$

где[2]

$$\lambda_i(x) = \frac{m_i(x)}{\sum_{k=1}^{n} m_k(x)}, \quad m_i(x) = \{\varepsilon - \| x - v_i \|\}^+.$$

По определению ε-сети $\sum_{k=1}^{n} m_k(x) \neq 0$ для каждой точки $x \in \overline{K}$. Поэтому все функции $\lambda_i(x)$ непрерывны и

$$\lambda_i(x) \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1.$$

Лемма. *Пусть в некоторой ограниченной области $M \subset E$ определен вполне непрерывный (нелинейный) оператор T и пусть $TM \subset K \subseteq \overline{K}$, где $\overline{K}$ — замкнутое компактное множество. В таком случае для любой точки $x \in M$*

$$\| Tx - F_\varepsilon Tx \| < \varepsilon.$$

---

[1] Подробное доказательство и обобщение читатель найдет в цитированной выше книге Колмогорова и Фомина (см. с. 80—85, 97—102).

[2] $\{\omega\}^+$ означает ω, если $\omega > 0$, и 0 — в противном случае

Доказательство. Так как $y \equiv Tx \in \overline{\mathrm{K}}$ при любом $x \in \mathrm{M}$, то в силу нашего построения

$$Tx - F_\varepsilon T_x = y - F_\varepsilon y = y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) v_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y)(y - v_i),$$

и поэтому

$$\| Tx - F_\varepsilon T_x \| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) = \varepsilon.$$

Теорема Шаудера. *Пусть* Q *— ограниченное замкнутое выпуклое множество в* E *и* T *— вполне непрерывный (нелинейный) оператор, переводящий* Q *в себя* ($T\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{Q}$). *В таком случае* T *имеет неподвижную точку, т. е. такую точку* $x \in \mathrm{Q}$, *что* $Tx = x$.

Доказательство. Множество $T\mathrm{Q} = \mathrm{K}$ компактно, и так как $T\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{Q}$, то и $\overline{\mathrm{K}}$ также принадлежит Q.

Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и возьмем в $\overline{\mathrm{K}}$ ε-сеть $\{v_i\}_1^n$. Затем обозначим через Q_n выпуклую оболочку этой ε-сети. При этом, очевидно, $\mathrm{Q}_n \subset \mathrm{Q}$. Теперь рассмотрим оператор $T_n = F_\varepsilon T$; он определен и непрерывен на n-мерном ограниченном замкнутом выпуклом множестве Q_n, причем $T_n \mathrm{Q}_n \subseteq \mathrm{Q}_n$. По теореме Брауэра оператор T_n в Q_n имеет по крайней мере одну неподвижную точку x_n:

$$T_n x_n = x_n.$$

На основании леммы

$$\| Tx_n - T_n x_n \| < \varepsilon,$$

поэтому

$$\| Tx_n - x_n \| < \varepsilon. \tag{4}$$

Теперь возьмем монотонно убывающую к 0 последовательность $\{\varepsilon_i\}_1^\infty$, построим соответствующие ε-сети, выпуклые оболочки Q_{n_i} (их размерности n_i), затем операторы $T_{n_i} = F_{\varepsilon_i} T$ и их неподвижные точки $x_{n_i} \in \mathrm{Q}_{n_i}$; тогда на основании (4)

$$\| Tx_{n_i} - x_{n_i} \| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

В силу вполне непрерывности оператора T либо сама последовательность $\{Tx_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, либо ее подпоследовательность имеет предел x, который, очевидно, принадлежит Q. Примем для простоты, что имеет место первое. Тогда при любом $\delta > 0$ и $i > \mathscr{N}_\delta$

$$\| Tx_{n_i} - x \| < \delta, \tag{6}$$

а значит, в силу (5), при $i > \mathscr{N}_\delta$

$$\| x - x_{n_i} \| < \delta + \varepsilon_i.$$

Отсюда следует, что при $i \to \infty$

$$x_{n_i} \to x,$$

а на основании непрерывности оператора T из (6) вытекает, что

$$\| Tx - x \| \leqslant \delta,$$

и так как δ произвольно, то

$$Tx = x.$$

Теперь обратимся к предложению, упомянутому в подстрочном примечании (с. 201).

Теорема. *Всякий линейный вполне непрерывный оператор A в E может иметь при любом $\rho > 0$ только конечное число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственным значениям, которые по модулю превосходят ρ.*

Эта теорема для пространства H (даже для любой линейной метризованной системы R) доказана в n° 57 (теорема 1).

Доказательство. Допуская противное, примем, что существует бесконечная последовательность линейно независимых векторов x_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ таких, что

$$Ax_k = \lambda_k x_k, \quad |\lambda_k| > \rho \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В случае пространства H (n° 57) мы могли ортогонализовать последовательность $\{x_k\}_1^\infty$ и получить бесконечную систему равенств

$$Ay_k = \lambda_k y_k + z_{k-1} \quad (z_0 = 0, \ k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где (z_{k-1} есть линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$)

$$(y_k, z_{k-1}) = 0, \quad \| y_k \| = 1. \tag{7}$$

Затем применялась лемма 1 n° 56.

Теперь возможность ортогонализации отпадает. Вместо этого по $\{x_k\}_1^\infty$ построим последовательность подпространств E_n, порождаемых векторами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и докажем, что существует последовательность $\{y_k\}_1^\infty$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\| y_k \| = 1, \ y_k \in \mathrm{E}_k, \ \inf_{z \in \mathrm{E}_{k-1}} \| y_k - z \| \geqslant \frac{1}{2} \ (k = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{E}_0 = 0).$$

Последнее неравенство заменит отсутствующее здесь соотношение ортогональности (7). Действительно, допустим, что последовательность $\{y_k\}_1^\infty$ построена. Тогда из

$$Ax_k = \lambda_k x_k,$$

если положить

$$x_k = \alpha_{k1}y_1 + \alpha_{k2}y_2 + \dots + \alpha_{kk}y_k,$$

будет следовать, что

$$A\frac{y_k}{\lambda_k} = y_k + z_{k-1}, \quad z_{k-1} \in E_{k-1}.$$

Поэтому для любых m и $n > m$

$$A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m} = y_n - (y_m + z_{m-1} - z_{n-1}).$$

А так как

$$y_m + z_{m-1} - z_{n-1} \in \mathrm{E}_{n-1},$$

то

$$\left\| A\frac{y_n}{\lambda_n} - A\frac{y_m}{\lambda_m} \right\| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Теперь заметим, что при любом n

$$\left\| \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| \leqslant \frac{1}{\rho},$$

но в таком случае последовательность $\left\{A\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}_1^\infty$ компактна. Однако это абсурдно, так как благодаря неравенству (8) ни сама эта последовательность, ни какая-либо ее подпоследовательность не является фундаментальной.

Остается показать, как построить последовательность $\{y_k\}_1^\infty$. В качестве y_1 возьмем $\frac{1}{\|x_1\|}x_1$, а при любом $n > 1$ положим

$$\inf_{z \in \mathrm{E}_{n-1}} \|x_n - z\| = \alpha_n$$

(α_n, очевидно, > 0) и затем возьмем какой-либо вектор $z_{n-1} \in \mathrm{E}_{n-1}$ так, чтобы

$$\|x_n - z_{n-1}\| < 2\alpha_n.$$

После этого можно положить

$$y_n = \frac{x_n - z_{n-1}}{\|x_n - z_{n-1}\|} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

и так как при любом $z' \in \mathrm{E}_{n-1}$

$$y_n - z' = \frac{x_n - z''}{\|x_n - z_{n-1}\|},$$

где также $z'' \in \mathrm{E}_{n-1}$, то

$$\|y_n - z'\| > \alpha_n \frac{1}{2\alpha_n} = \frac{1}{2}.$$

Как и в n° 57, из этой теоремы вытекает

Следствие. *Если A вполне непрерывный оператор в* E, *то размерность его собственного подпространства, принадлежащего отличному от* 0 *собственному значению, конечна.*

66. Теорема о существовании инвариантного подпространства у любого вполне непрерывного оператора и ее обобщение. Наличие у оператора собственного вектора означает, что оператор обладает одномерным инвариантным подпространством. Как было отмечено в конце n° 60, даже вполне непрерывный оператор может не иметь ни одного собственного вектора. Иначе говоря, он может не иметь ни одного одномерного инвариантного подпространства. Но отсюда вовсе не следует, что у этого оператора вообще нет инвариантных подпространств. Приведенный в n° 60 интегральный оператор

$$(Tf)(x)=\int_0^x K(x,\ t)\,f(t)\,dt,\quad f\in \mathrm{L}^2(0,\ 1),$$

у которого нет ни одного собственного вектора, обладает целым множеством инвариантных подпространств. В самом деле, при любом $a\,(0<a<1)$ совокупность всех функций $f(t)\in \mathrm{L}^2(0,\ 1)$, которые равны нулю в интервале $(0,\ a)$, представляет такое инвариантное подпространство.

На основании сказанного возникает вопрос, не имеет ли каждый ограниченный оператор нетривиального инвариантного подпространства. В общем случае ответ на этот вопрос не известен. Однако еще в 1935 году Нейман доказал, что любой вполне непрерывный оператор в H обладает нетривиальным инвариантным подпространством. Результат Неймана впервые опубликовали Н. Ароншайн и К. Смит[1] в статье, посвященной обобщению теоремы Неймана на банаховы пространства. Затем А. Бернштейн и А. Робинсон[2] доказали, что оператор имеет инвариантное подпространство, если некоторый многочлен от этого оператора вполне непрерывен. Наконец, в 1973 году В. И. Ломоносов[3] получил замечательную теорему, обобщающую все эти результаты.

Теорема Ломоносова. *Пусть A нетривиальный (т. е. отличный от нулевого) вполне непрерывный оператор в бесконечномерном комплексном (или вещественном) банаховом пространстве* E. *Тогда в* E *существует нетривиальное подпространство, инва-*

---

[1] Aronszain N., Smith K. T. Invariant subspaces of completely continuous operators, Ann. Math., 1954, vol. 60, p. 345—350. (Есть русский перевод в сб. переводов «Математика», 2 : 1 (1958), с. 97—102).

[2] Bernstein A. Robinson A. Solutions of an invariant subspace problem of K. Smith and P. Halmos, Pacific J. Math., 1966, vol. 16, p. 421—431.

[3] Ломоносов В. И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным.— «Функц. анализ и его применения», 1973, т. 7, вып. 3, с. 55—56.

риантное для каждого ограниченного оператора, который перестановочен с A.

Доказательство. Заметим сначала, что из условия $A \neq 0$ вытекает существование такого $x_0 \in \mathrm{E}$, что

$$\inf_{\|x-x_0\|<1} \| Ax \| > 0.$$

В самом деле, можно выбрать $x_0 \in \mathrm{E}$ так, чтобы $\| Ax_0 \| = 2 \| A \|$. Тогда в шаре $\| x - x_0 \| \leqslant 1$ (назовем его Q)

$$\| Ax \| \geqslant \| Ax_0 \| - \| A(x - x_0) \| \geqslant \| A \|.$$

Введем компактное множество $A\mathrm{Q} = \mathrm{K}$ и его замыкание $\overline{\mathrm{K}}$.

Далее обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность всех ограниченных операторов в E, перестановочных с A. Легко видеть, что из B_1, $B_2 \in \mathfrak{P}$ следует $B_1 B_2 \in \mathfrak{P}$ и $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 \in \mathfrak{P}$ при любых комплексных (соответственно вещественных) α_1, α_2; кроме того, $I \in \mathfrak{P}$.

Рассмотрим в отдельности два случая, которые здесь могут представиться:

a) для некоторого $v \in \overline{\mathrm{K}}$ при любом $B \in \mathfrak{P}$ выполняется неравенство

$$\| Bv - x_0 \| \geqslant 1;$$

b) для любого $y \in \overline{\mathrm{K}}$ найдется такой оператор $T \in \mathfrak{P}$, что

$$\| Ty - x_0 \| < 1.$$

Пусть имеет место случай a). Заставим B пробегать $\mathfrak{P}$. Тогда замыкание $\overline{Bv}$ линейного многообразия Bv будет некоторым подпространством $\mathrm{E}_1 \subseteq \mathrm{E}$. Оно обладает следующими свойствами: во-первых, $\mathrm{E}_1 \neq \mathrm{E}$, так как $x_0 \overline{\in} \mathrm{E}_1$; во-вторых, $\mathrm{E}_1 \neq 0$, так как $Bv \neq 0$, например, при $B = I$. Наконец, E_1 инвариантно для любого оператора $C \in \mathfrak{P}$, т. е. из $z \in \mathrm{E}_1$ следует $Cz \in \mathrm{E}_1$. В самом деле, $z \in \mathrm{E}_1$ означает, что $z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} B_n v$; но тогда $Cz = \lim_{n\to\infty} Cz_n = \lim_{n\to\infty} CB_n z = \lim_{n\to\infty} B_n' v$, где $B_n' = CB_n$.

Таким образом, E_1 есть нетривиальное инвариантное подпространство для любого $C \in \mathfrak{P}$. Следовательно, в случае a) теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай b), т. е. примем, что для любого $y \in \overline{\mathrm{K}}$ найдется такой оператор $T \in \mathfrak{P}$, что

$$\| Ty - x_0 \| < 1.$$

Ясно, что это неравенство будет иметь место для любого $y' \in \overline{\mathrm{K}}$, если только $\| y' - y \| < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Таким образом, каждому $y \in \bar{K}$ отвечает некоторый открытый шар Q_ε^y ($\| y' - y \| < \varepsilon$) с центром y и такой оператор $T \in \mathfrak{P}$, что

$$\| Ty' - x_0 \| < 1$$

для любого $y' \in Q_\varepsilon^y$. Мы имеем, следовательно, некоторое покрытие множества $\bar{K}$ системой открытых шаров. Так как $\bar{K}$ — замкнутое компактное множество, то из этого покрытия можно на основании теоремы Гейне—Бореля выделить конечное покрытие. Иначе говоря, существует конечная система точек $\{y_i\}_1^n \subset \bar{K}$, соответствующая система шаров $\{Q_{\varepsilon_i}^{y_i}\}_{i=1}^n$ и система операторов $\{T_i\}_1^n \subset \mathfrak{P}$ такие, что для любого $y \in \bar{K}$ неравенство

$$\| T_i y - x_0 \| < 1$$

будет выполнено по крайней мере при одном значении i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Теперь построим функции[1]

$$m_i(y) = \{1 - \| T_i y - x_0 \|\}^+ \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Далее положим

$$\lambda_i(y) = \frac{m_i(y)}{\sum_{k=1}^{n} \{1 - \| T_k y - x_0 \|\}^+} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь знаменатель в 0 не обращается и все функции $\lambda_i(y)$ непрерывны на $\bar{K}$.

Наконец, введем в рассмотрение нелинейный оператор F, определенный на $\bar{K}$ формулой

$$Fy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) T_i y.$$

Так как

$$\| x_0 - Fy \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y) \| x_0 - T_i y \| < 1,$$

то оператор F отображает $\bar{K}$ в Q. В таком случае оператор

$$FAx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Ax) T_i Ax$$

отображает Q в Q. Но этот оператор вполне непрерывен. Следовательно, он имеет на основании теоремы Шаудера по крайней

[1] Ср. аналогичное (вспомогательное построение предыдущего п°)

мере одну неподвижную точку, т. е. такую точку x^*, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Ax^*) T_i A x^* = x^*.$$

Теперь рассмотрим линейный вполне непрерывный оператор A_1 в E, определяемый равенством

$$A_1 x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Ax^*) T_i A x.$$

Этот оператор принадлежит $\mathfrak{P}$, имеет собственное значение 1 (с собственным вектором x^*). Собственное подпространство $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ оператора A_1, отвечающее собственному значению 1, конечномерно, так как A_1 — оператор вполне непрерывный. Поэтому G есть нетривиальное подпространство в E. Если $x \in \mathrm{G}$, то и $Ax \in \mathrm{G}$. Действительно, из $x \in \mathrm{G}$ следует

$$Ax = AA_1 x = A_1 A x.$$

Поэтому A является ненулевым линейным оператором, отображающим конечномерное пространство G в себя. Значит, A имеет по крайней мере одно собственное значение $\lambda \neq 0$. Пусть $E_1 \subseteq \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ соответствующее (конечномерное) собственное подпространство. Если B — произвольный оператор из $\mathfrak{P}$ и $x \in \mathrm{E}_1$, то

$$\lambda Bx = BAx = ABx.$$

Поэтому $Bx \in \mathrm{E}_1$, т. е. E_1 является инвариантным подпространством для B. Итак, в случае b) теорема также верна.

ГЛАВА VI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УНИТАРНЫХ И САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основная цель настоящей главы — обобщение на любые самосопряженные (и унитарные) операторы в H понятия разложения по собственным векторам, рассмотренного нами в предыдущей главе для вполне непрерывных операторов. Мы будем оставаться в рамках классической теории и не затронем вопросов, связанных с разложениями по обобщенным собственным векторам (или обобщенным собственным функциям — в L^2), исследованных в течение последних 15—20 лет (главным образом, в связи с теорией дифференциальных операторов в частных производных). Эти вопросы нашли глубокое развитие и освещение в ряде фундаментальных монографий [1], где содержатся также подробные библиографические указания.

67. Разложение единицы. Припомним результат, относящийся к вполне непрерывным самосопряженным операторам, который был получен в п° 61, а затем в иной форме представлен в п° 64. Согласно этому результату задание в гильбертовом пространстве H вполне непрерывного самосопряженного оператора A позволяет рассматривать пространство H как ортогональную сумму

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$$

подпространств H_k, из которых все кроме H_0, конечномерны, а H_0 может быть даже несепарабельным. Каждому подпространству H_k отвечает вещественное число λ_k, причем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_k \neq \lambda_i$, если $k \neq i$. Это расщепление пространства H таково, что в каждом из подпространств H_k действие оператора A сводится к умножению элемента на соответствующее число λ_k, т. е.

$$Af = \lambda_k f,$$

[1] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, «Обобщенные функции», вып. 3, Физматгиз, 1958; И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, «Обобщенные функции», вып. 4, Физматгиз, 1961; Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев, 1965.

если $f \in \mathrm{H}_k$. Обозначая оператор проектирования на H_k через P_k, мы можем написать, что

$$I = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots \tag{1}$$

и

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots \tag{2}$$

Числа λ_k единственной предельной точкой могут иметь только точку 0. С целью дальнейших обобщений удобно записать представления (1), (2) с помощью интеграла Стилтьеса.

Для этого введем при любом вещественном t подпространство G_t, порождаемое всеми собственными векторами, принадлежащими собственным значениям, меньшим, чем t. При этом число 0 также рассматривается как собственное значение, относящееся к собственному подпространству H_0. Пусть E_t есть оператор проектирования на G_t. Оператор E_t имеет предел как при возрастании, так и при убывании t. Поэтому существуют E_{t-0} и E_{t+0}. Легко видеть, что E_t есть непрерывная слева операторная функция от t. Если λ_k есть собственное значение, то разность

$$E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k} = P_k$$

есть оператор проектирования на собственное подпространство H_k. Теперь формулы (1), (2) можно представить в виде

$$f = If = \int_\alpha^\beta dE_t f, \tag{1'}$$

$$Af = \int_\alpha^\beta t\, dE_t f, \tag{2'}$$

где интегралы берутся по интервалу $[\alpha, \beta]$, содержащему все собственные значения оператора.

Эти интегралы являются не чем иным, как суммами некоторых рядов, и если мы их написали, то потому, что именно формулы (1′), (2′) допускают, как мы дальше увидим, обобщение на произвольные (не обязательно вполне непрерывные) самосопряженные операторы в H. Имея в виду этот общий случай, примем следующее

Определение. *Разложением единицы* называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов E_t, заданное в конечном или бесконечном интервале[1] $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющее следующим условиям:

---

[1] Если интервал $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается

$$E_{-\infty} = \lim_{t \to -\infty} E_t, \quad E_\infty = \lim_{t \to \infty} E_t$$

(в смысле сильной сходимости) Эти пределы существуют по теореме 3 n° 33.

a) $E_u E_v = E_s \quad (s = \min\{u, v\})$,

b) в смысле сильной сходимости

$$E_{t-0} = E_t \qquad (\alpha < t < \beta),$$

c) $E_\alpha = 0, \ E_\beta = I$.

Из определения следует, что при любом $f \in \mathrm{H}$ величина

$$(E_t f, f) = \sigma(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченного изменения, для которой

$$\sigma(\alpha) = 0, \qquad \sigma(\beta) = (f, f).$$

Действительно, при $s < t$

$$(E_s f, f) = \| E_s f \|^2 = \| E_s E_t f \|^2 \leqslant \| E_t f \|^2 = (E_t f, f).$$

Имея интервал $\Delta = [t', t'') \subset [\alpha, \beta]$, мы будем разность $E_{t''} - E_{t'}$ обозначать $E(\Delta)$.

Возьмем два интервала Δ_1, Δ_2; в таком случае из а) следует, что

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = E(\Delta),$$

где Δ — пересечение интервалов Δ_1, Δ_2. В частности, если интервалы Δ_1, Δ_2 не имеют общих точек, то

$$E(\Delta_1) E(\Delta_2) = 0,$$

т. е. подпространства, на которые $E(\Delta_1)$ и $E(\Delta_2)$ проектируют, ортогональны. На основании сказанного свойство а) называют свойством *ортогональности* разложения единицы.

Рассмотрения, которые мы предпослали нашему общему определению, показывают, что всякий вполне непрерывный самосопряженный оператор порождает некоторое разложение единицы и сам представим через него. В настоящей главе эти результаты будут распространены на унитарные операторы U и произвольные самосопряженные операторы A в H, а именно, будет показано, что каждый такой оператор обладает вполне определенным разложением единицы E_t и представим через него в виде интеграла Стилтьеса:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it}\, dE_t, \qquad A = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t.$$

Точный смысл этих представлений будет выяснен ниже, в соответствующих пунктах.

Имеются различные пути для получения интересующих нас общих результатов. Хронологически первый из них связан с так называемой проблемой моментов. Ему посвящены n°n° 71—75, которым предпосылается (см. n°n° 68—70) изложение всех необходимых теоретико-функциональных фактов. Далее, в n°n° 77—79 дано непосредственное, чисто операторное построение теории[1].

68. Тригонометрическая проблема моментов. В общем виде проблема моментов может быть сформулирована следующим образом: дано некоторое множество функций $u_\alpha(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, каждой из которых сопоставлено некоторое число c_α; требуется найти неубывающую функцию ограниченного изменения $\sigma(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\int_a^b u_\alpha(t)\, d\sigma(t) = c_\alpha. \tag{1}$$

Эта проблема распадается на несколько проблем, из которых первая состоит в определении условий разрешимости написанной системы уравнений в указанном классе функций $\sigma(t)$.

В настоящем пункте мы рассмотрим тригонометрическую проблему моментов. Для нее система (1) имеет вид

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t) \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \overline{c_k} = c_{-k}). \tag{2}$$

Теорема 1. *Для существования неубывающей функции*[2] $\sigma(t)$, *удовлетворяющей уравнениям* (2), *необходимо, чтобы из неотрицательности тригонометрической суммы*

$$\sum_{k=-n}^{n} \xi_k e^{ikt} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

во всем интервале $[0,\ 2\pi]$ *всегда следовало неравенство*

$$\sum_{k=-n}^{n} \xi_k c_k \geqslant 0,$$

и достаточно, чтобы для любого вещественного числа v были неотрицательны выражения

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikv} c_k \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

отвечающие специальным неотрицательным тригонометрическим суммам

$$\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ik(t-v)} = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik(t-v)} \right|^2.$$

[1] Это изложение не зависит от n°n° 68—75 (кроме n° 72).

[2] Ограниченность изменения здесь получается автоматически в силу того из уравнений (2), для которого $k = 0$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна, так как в случае разрешимости системы (2) будет иметь место равенство

$$\sum_{k=-n}^{n} \xi_k c_k = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \xi_k e^{ikt}\, d\sigma(t).$$

Чтобы доказать вторую часть теоремы, рассмотрим последовательность неотрицательных по условию тригонометрических сумм

$$\psi_n(v) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-ikv} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Положим

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \psi_n(v)\, dv \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Это — неубывающие функции, для которых

$$\sigma_n(0) = 0, \quad \sigma_n(2\pi) = c_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом, мы имеем последовательность неубывающих в интервале $[0, 2\pi]$ функций $\sigma_n(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$0 \leqslant \sigma_n(t) \leqslant c_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно первой теореме Хелли поэтому существует такая неубывающая функция $\sigma(t)$ и такая подпоследовательность $\{\sigma_{n_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$, что во всех точках непрерывности функции $\sigma(t)$

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{n_j}(t) = \sigma(t).$$

По второй теореме Хелли

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t) = \lim_{j\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma_{n_j}(t) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \psi_{n_j}(t)\, dt =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(1 - \frac{|k|}{n_j}\right) c_k = c_k,$$

и наше предложение полностью доказано.

Обратимся теперь к вопросу о числе решений системы (2). С этой целью допустим, что система (2) имеет два различных решения $\sigma(t)$ и $\sigma^*(t)$. Их разность

$$\omega(t) = \sigma(t) - \sigma^*(t)$$

есть функция ограниченного изменения, для которой

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,d\omega(t) = 0 \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Теорема 2. *Если функция ограниченного изменения* $\omega(t)$ *(вещественная или даже комплексная) удовлетворяет соотношениям* (3), *то она равна постоянной во всех своих точках непрерывности.*

Доказательство. Возьмем вернóе при любом целом $k \neq 0$ равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,d\omega(t) = e^{ikt}\omega(t)\Big|_0^{2\pi} - ik\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\,dt = \int_0^{2\pi} d\omega(t) - ik\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\,dt.$$

Из него в силу соотношений (3) следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\omega(t)\,dt = 0 \quad (\pm k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Беря

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(t)\,dt,$$

найдем, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\{\omega(t) - C\}\,dt = 0 \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

По теореме единственности теории рядов Фурье из последних равенств вытекает, что во всех точках непрерывности функции $\omega(t)$ имеет место равенство

$$\omega(t) - C = 0.$$

Из доказанного, в частности, следует, что если $\sigma(t)$, $\sigma^*(t)$ — два различных решения системы (2), то их разность есть постоянная во всех точках, где эта разность непрерывна. Этот факт коротко выражают словами: решение системы (2) *в существенном* единственно.

Единственность решения будет обеспечена полностью, а не только в существенном, если искомую функцию $\sigma(t)$ подчинить дополнительно следующим двум условиям нормировки:

1) Непрерывность слева, т. е. $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ $(0 < t \leqslant 2\pi)$,

2) $\sigma(0) = 0$.

Чтобы перейти от некоторого решения $\sigma_1(t)$ системы (2) к нормированному решению $\sigma(t)$, следует положить

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t-0) - \sigma_1(0) + \sigma_1(2\pi) - \sigma_1(2\pi - 0) & (0 < t \leqslant 2\pi), \\ 0 \quad (t = 0). \end{cases} \tag{4}$$

Функция $\sigma(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям нормировки. С другой стороны, какова бы ни была непрерывная функция $f(t)$ с периодом 2π,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, d\sigma(t) = \int_0^{2\pi} f(t)\, d\sigma_1(t).$$

Действительно,

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, d\sigma(t) - \int_0^{2\pi} f(t)\, d\sigma_1(t) = \int_{+0}^{2\pi-0} f(t)\, d\sigma(t) - \int_{+0}^{2\pi-0} f(t)\, d\sigma_1(t) +$$
$$+ f(0)\,\sigma(+0) - f(0)\,[\sigma_1(+0) - \sigma_1(0)] - f(2\pi)\,[\sigma_1(2\pi) -$$
$$- \sigma_1(2\pi - 0)] = f(0)\,\{\sigma(+0) - [\sigma_1(+0) - \sigma_1(0)] -$$
$$- [\sigma_1(2\pi) - \sigma_1(2\pi - 0)]\},$$

а это, в силу (4), равно 0.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненными условия нормировки для всех рассматриваемых решений тригонометрической проблемы моментов.

69. Аналитические функции со значениями, лежащими в полуплоскости. В этом пункте мы будем рассматривать аналитические функции, регулярные внутри круга или полуплоскости и принимающие значения, которые также принадлежат некоторой полуплоскости.

Теорема 1. *Для того чтобы заданная и конечная в круге $|\zeta| < 1$ функция $f(\zeta)$ допускала представление*

$$f(\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta}\, d\sigma(t), \tag{1}$$

где β — вещественная постоянная, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция[1]*, необходимо и достаточно, чтобы $f(\zeta)$ в круге $|\zeta| < 1$ была регулярна и имела неотрицательную вещественную часть.*

Предварительное замечание. Мы имеем здесь некоторую проблему моментов, где моментные функции равны

$$u_\zeta(t) = \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta},$$

[1] Ограниченность изменения функции $\sigma(t)$ получается автоматически в силу конечности значения $f(0)$.

а роль моментов играют числа

$$c_\zeta = f(\zeta) - i\beta,$$

причем параметр ζ пробегает уже не последовательность, а двумерный континуум $|\zeta| < 1$.

Заметим также, что $\beta = \mathfrak{J} f(0)$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна, так как правая часть формулы (1) в области $|\zeta| < 1$ регулярна и

$$\mathfrak{R}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\sigma(t)\right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\, d\sigma(t) \geqslant 0,$$

где $r = |\zeta| < 1$ и $\varphi = \arg\zeta$.

Займемся доказательством достаточности. Если $f(\zeta)$ регулярна в круге $|\zeta| < 1$, то, как известно из теории функций, при $|\zeta| < R < 1$ имеет место представление

$$f(\zeta) = i\beta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}+\zeta}{Re^{it}-\zeta}\, u(Re^{it})\, dt,$$

где

$$u(re^{it}) = \frac{f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})}}{2}$$

есть вещественная часть функции $f(\zeta)$. При этом

$$\mathfrak{R} f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\, dt.$$

Указанное представление можно переписать в виде

$$f(R\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\sigma_R(t), \quad (|\zeta| < 1), \tag{2}$$

где

$$\sigma_R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t} u(Re^{is})\, ds.$$

Так как по условию, $u(Re^{is}) \geqslant 0$, то $\sigma_R(t)$ — неубывающая функция от t и для любого t из $[0, 2\pi]$

$$0 \leqslant \sigma_R(t) \leqslant \sigma_R(2\pi) = \mathfrak{R} f(0),$$

т. е. множество функций $\sigma_R(t)$ $(0 < R < 1)$ равномерно ограничено. По теореме Хелли, следовательно, существует неубывающая функция $\sigma(t)$ и такая последовательность

$$R_1 < R_2 < R_3 < \ldots \qquad (R_j \to 1),$$

что во всех точках непрерывности функции $\sigma(t)$

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_{R_j}(t) = \sigma(t).$$

Применяя к (2) вторую теорему Хелли, мы и найдем, что всюду в круге $|\zeta| < 1$

$$f(\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\sigma(t). \tag{3}$$

Теорема доказана.

Если $f(\zeta)$ разложить в ряд Маклорена

$$f(\zeta) = c + 2c_{-1}\zeta + 2c_{-2}\zeta^2 + \ldots$$

и положить $\frac{c+\bar{c}}{2} = c_0$, то в силу (3), мы получим для коэффициентов следующие выражения:

$$c_0 = \int_0^{2\pi} d\sigma(t), \quad c_{-k} = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\sigma(t) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Вводя еще числа $c_k = \bar{c}_{-k}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, мы приходим к тем уравнениям, которые выражают тригонометрическую проблему моментов. Поэтому при условиях нормировки n° 68 функция $\sigma(t)$ в представлении (3) однозначно определяется функцией $f(\zeta)$.

В справедливости этого факта можно убедиться также при помощи следующей, известной из теории рядов Фурье, формулы обращения

$$\frac{\sigma(t-0)+\sigma(t+0)}{2} = \mathrm{const} + \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \Re f(re^{is})\, ds.$$

Теорема 2. *Для того чтобы заданная и конечная в полуплоскости $\Im z > 0$ функция $\varphi(z)$ допускала представление*

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\, d\sigma(t), \tag{4}$$

где $\mu \geq 0$ и вещественная α — постоянные, а $\sigma(t)$ — неубывающая функ-

ция[1]*, необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(z)$ *была в полуплоскости* $\Im z > 0$ *регулярна и имела неотрицательную мнимую часть.*

При этом интеграл Стилтьеса с бесконечными пределами понимается как

$$\lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} \int_A^B \frac{1+tz}{t-z}\, d\sigma(t),$$

что соответствует предположению

$$\sigma(-\infty) = \lim_{A\to-\infty} \sigma(A),$$
$$\sigma(\infty) = \lim_{B\to\infty} \sigma(B).$$

Если к этому добавить условия нормировки

$$\sigma(t-0) = \sigma(t), \quad \sigma(-\infty) = 0,$$

то функция $\sigma(t)$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Положим

$$z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$
$$\varphi(z) = if(\zeta).$$

Тогда полуплоскость $\Im z > 0$ переходит в круг $|\zeta| < 1$, а регулярная в полуплоскости функция $\varphi(z)$ с неотрицательной мнимой частью переходит в регулярную в круге функцию $f(\zeta)$ с неотрицательной вещественной частью, интегральное представление которой рассмотрено выше. Это представление имеет вид

$$f(\zeta) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\rho(s) = i\beta + \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\rho(s) +$$
$$+ \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\{\rho(2\pi) - \rho(2\pi-0) + \rho(+0) - \rho(0)\} =$$
$$= i\beta + \mu\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\, d\rho(s),$$

---

[1] Ограниченность изменения функции $\sigma(t)$ следует из конечности значения $\varphi(i)$.

Представление (4) можно записать также в виде

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\omega(t),$$

где

$$d\omega(t) = (1+t^2)\, d\sigma(t).$$

где функцию распределения мы обозначили $\rho(s)$. С помощью упомянутых преобразований мы получаем, что

$$\varphi(z) = -\beta + i\mu\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\int_{+0}^{2\pi-0}\frac{e^{is}+\zeta}{e^{is}-\zeta}\,d\rho(s) \tag{5}$$

или

$$\varphi(z) = -\beta + \mu z + \int_{+0}^{2\pi-0}\frac{z\operatorname{ctg}\frac{s}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{s}{2}+z}\,d\rho(s).$$

Если положить

$$-\beta = \alpha,\quad -\operatorname{ctg}\frac{s}{2} = t,\quad \rho(s) = \sigma(t),$$

то мы придем для $\varphi(z)$ к представлению (4).

Полученный нами переход от (5) к (4), очевидно, верен и в обратную сторону, что и позволяет считать теорему 2 доказанной, включая ее утверждение о единственности функций $\sigma(t)$. Впрочем единственность $\sigma(t)$ может быть установлена и непосредственно с помощью формулы обращения Стилтьеса—Перрона для интеграла

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{y}{(x-t)^2+y^2} - \frac{y}{1+t^2}\right\}d\psi(t) \quad (-\infty < x < \infty,\ y > 0).$$

где $\psi(t)$ имеет ограниченное изменение в каждом конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|d\psi(t)|}{1+|t|^3} < \infty.$$

Формула обращения имеет вид[1]

$$\frac{\psi(t+0)+\psi(t-0)}{2} - \frac{\psi(c+0)+\psi(c-0)}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_c^t \varphi(x, y)\,dx,$$

где c, t — произвольные вещественные числа.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция $\varphi(z)$ допускала в полуплоскости $\Im z > 0$ представление*

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega(t)}{t-z}$$

[1] Доказательство см., например, в книге Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз. 1961, с. 155—156.

с неубывающей функцией ограниченного изменения $\omega(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(z)$ *в полуплоскости* $\mathfrak{J}z > 0$ *была регулярна и имела неотрицательную мнимую часть, и чтобы*

$$\sup_{y>0} |y\varphi(iy)| < \infty.$$

При этом функция $\omega(t)$ *однозначно определяется функцией* $\varphi(z)$, *если потребовать, чтобы*

$$\omega(-\infty) = \lim_{A \to -\infty} \omega(A) = 0, \quad \omega(t-0) = \omega(t) \quad (-\infty < t \leqslant \infty).$$

Доказательство. Необходимость условия проверяется очень просто. Поэтому мы займемся доказательством достаточности. Если функция $\varphi(z)$ в полуплоскости $\mathfrak{J}z > 0$ регулярна и имеет неотрицательную мнимую часть, то она во всяком случае допускает представление

$$\varphi(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} \, d\sigma(t),$$

бывшее предметом рассмотрения предыдущей теоремы. Из этого представления следует, что

$$y\varphi(iy) = \alpha y + i\mu y^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1+ity)}{t-iy} \, d\sigma(t).$$

По условию доказываемой теоремы, существует такая постоянная M, что

$$\left| \alpha y + i\mu y^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1+ity)}{t-iy} \, d\sigma(t) \right| \leqslant M. \quad (y > 0).$$

Следовательно, и подавно

$$\left.\begin{aligned} &\left| \alpha y + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(1-y^2)\,t}{t^2+y^2} \, d\sigma(t) \right| \leqslant M, \\ &\left| \mu y^2 + y^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{t^2+y^2} \, d\sigma(t) \right| \leqslant M. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Второе соотношение показывает, что $\mu = 0$, а также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{t^2+y^2} (1+t^2) \, d\sigma(t) \leqslant M.$$

Следовательно, при любом $N > 0$

$$\int_{-N}^{N} \frac{y^2}{t^2+y^2}(1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M,$$

откуда, полагая $y \to \infty$,

$$\int_{-N}^{N} (1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)\,d\sigma(t) \leqslant M. \tag{7}$$

Мы можем поэтому ввести неубывающую функцию

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} (1+t^2)\,d\sigma(t),$$

для которой, очевидно,

$$\lim_{t\to-\infty} \omega(t) = 0,$$

и которая непрерывна слева вместе с $\sigma(t)$.

Первое из соотношений (6) показывает, что

$$\alpha = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y^2-1)\,t}{t^2+y^2}\,d\sigma(t) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[t - \frac{t(1+t^2)}{t^2+y^2}\right] d\sigma(t)$$

и, следовательно,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\sigma(t),$$

ибо в силу (7)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(1+t^2)}{t^2+y^2}\,d\sigma(t) \right| \leqslant \frac{M}{2y}.$$

Так как, по доказанному, $\mu = 0$, то (5) принимает вид

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\sigma(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\,d\sigma(t)$$

или

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z},$$

что и требовалось доказать

Единственность этого представления (при наших условиях нормировки) вытекает из единственности функции $\sigma(t)$ в теореме 2, как это следует из равенства

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{d\omega(t)}{1+t^2},$$

связывающего функции $\sigma(t)$, $\omega(t)$. Впрочем, и здесь единственность может быть установлена непосредственно с помощью формулы обращения Стилтьеса

$$\frac{\omega(t-0)+\omega(t+0)}{2}=\mathrm{const}+\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^t \mathfrak{J}\varphi(x+iy)\,dx.$$

70. Теорема Бохнера — Хинчина. В настоящем пункте мы рассмотрим континуальный аналог тригонометрической проблемы моментов. Задача состоит в нахождении условий, которым должна удовлетворять заданная конечная на всей оси $-\infty<t<\infty$ функция $F(t)$ для того, чтобы имело место представление

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ist}d\omega(s), \tag{1}$$

где $\omega(s)$ — неубывающая функция[1]. С. Бохнер и А. Я. Хинчин доказали, что *указанное представление при надлежащей нормировке*[2] *единственно и существует в том и только том случае, когда функция $F(t)$ непрерывна и для любого натурального n, любых вещественных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и любых комплексных $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F(t_\alpha-t_\beta)\rho_\alpha\bar\rho_\beta\geqslant 0. \tag{2}$$

Функции, удовлетворяющие условию (2), называются *положительно определенными*.

Необходимость этих условий почти очевидна. Действительно, правая часть формулы (1) есть непрерывная функция от t, а с другой стороны, в силу (1) имеет место равенство

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F(t_\alpha-t_\beta)\rho_\alpha\bar\rho_\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\rho_k e^{ist_k}\right|^2 d\omega(s),$$

правая часть которого, конечно, больше или равна нулю.

---

[1] Ограниченность ее изменения следует из конечности значения $F(0)$.
[2] См. теорему 3 n° 69.

Доказательство достаточности, к которому мы теперь перейдем, уже не так просто.

Итак, пусть $F(t)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая условию (2). Заметим, что в силу (2) мы имеем[1] для любого t $(-\infty < t < \infty)$ равенство

$$\overline{F(t)} = F(-t)$$

и неравенство

$$|F(t)| \leqslant F(0). \tag{3}$$

Положим

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{itz} F(t)\,dt.$$

В силу (3) функция $\Phi(z)$ регулярна в области $\Im z > 0$. Кроме того, для любого $y > 0$

$$|y\Phi(iy)| \leqslant \int_0^\infty ye^{-ty}|F(t)|\,dt \leqslant F(0)\int_0^\infty ye^{-ty}dt = F(0).$$

Докажем теперь, что $\Re\Phi(z) \geqslant 0$ при $y > 0$ $(z = x + iy)$. С этой целью возьмем тождество

$$\frac{1}{2y} = \int_0^\infty e^{izv} e^{-i\bar{z}v}dv.$$

Имеем далее

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = \int_0^\infty e^{izu}F(u)\,du + \int_0^\infty e^{-i\bar{z}u}F(-u)\,du.$$

Поэтому

$$\frac{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}}{2y} =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{iz(u+v)}e^{-i\bar{z}v}F(u)\,du\,dv + \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-i\bar{z}(u+v)}e^{izv}F(-u)\,du\,dv =$$

---

[1] Достаточно положить $n = 2$, $t_1 = t$, $t_2 = 0$. Мы найдем, что при любых ρ_1, ρ_2:

$$F(0)|\rho_1|^2 + F(t)\rho_1\bar{\rho}_2 + F(-t)\bar{\rho}_1\rho_2 + F(0)|\rho_2|^2 \geqslant 0,$$

а это значит, что

$$F(0) \geqslant 0, \quad F(-t) = \overline{F(t)}$$

и

$$\begin{vmatrix} F(0) & F(t) \\ F(-t) & F(0) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

$$= \int_0^\infty d\beta \int_\beta^\infty e^{i\alpha z} e^{-i\beta\bar{z}} F(\alpha-\beta)\, d\alpha + \int_0^\infty d\alpha \int_\alpha^\infty e^{i\alpha z} e^{-i\beta\bar{z}} F(\alpha-\beta)\, d\beta =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha-\beta)\, e^{ix(\alpha-\beta)} e^{-y(\alpha+\beta)}\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A \int_0^A F(\alpha-\beta)\, e^{ix(\alpha-\beta)} e^{-y(\alpha+\beta)} d\alpha\, d\beta =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{A^2}{n^2} \sum_{r,\, s=1}^{n} F\left(\frac{r-s}{n} A\right) e^{ix\frac{r-s}{n}A} e^{-y\frac{r+s}{n}A},$$

и наше утверждение вытекает из того, что сумма в правой части имеет вид (2) $\left(\text{достаточно положить } t_k = \frac{kA}{n},\ \rho_k = e^{-y\frac{kA}{n}} e^{ix\frac{kA}{n}}\right)$.

Так как $\Phi(z)$ отличается только множителем i от функции, бывшей предметом рассмотрения в n° 69 (теорема 3), то при наших условиях нормировки однозначно определяется неубывающая функция $\omega(s)$, для которой

$$\Phi(z) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(s)}{s+z} \qquad (\Im z > 0).$$

С другой стороны,

$$\frac{i}{s+z} = \int_0^\infty e^{i(s+z)t} dt,$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{itz} F(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(s) \int_0^\infty e^{i(s+z)t} dt = \int_0^\infty e^{itz} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega(s).$$

Значит, две кусочно-непрерывные абсолютно интегрируемые функции от t, равные нулю при $t < 0$ и равные

$$e^{-ty} F(t), \quad e^{-ty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega(s)$$

при $t \geqslant 0$, имеют одинаковые преобразования Фурье. В силу теоремы единственности (см. n° 12), эти функции тождественны, т. е.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega(s)$$

(сначала при $t \geqslant 0$, а затем и на всей числовой оси $-\infty < t < \infty$). Таким образом, представление (1) получено, и его единственность доказана.

Из единственности этого представления вытекает следующее более общее предложение: если $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ — две комплексные функции ограниченного изменения, принятым образом нормированные, и если при $-\infty < t < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega_2(s), \tag{4}$$

то

$$\omega_1(s) = \omega_2(s).$$

Действительно, если (4) имеет место и

$$\tilde{\omega}(s) = \omega_1(s) - \omega_2(s),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\tilde{\omega}(s) = 0 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Полагая

$$\tilde{\omega}(s) = \varphi(s) + i\psi(s),$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — вещественны, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\psi(s),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\varphi(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\psi(s).$$

Отсюда, поскольку в одной части каждого из этих равенств четная, а в другой — нечетная функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\varphi(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos st\, d\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin st\, d\psi(s) = 0.$$

Иначе говоря, для всех вещественных t

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\varphi(s) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\psi(s) = 0.$$

Так как каждая из функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$ есть разность двух неубывающих функций, то равенства

$$\varphi(s)=0, \quad \psi(s)=0 \quad (-\infty < s < \infty)$$

являются прямым следствием теоремы Бохнера — Хинчина.

71. Спектральное разложение унитарного оператора. Пусть U — унитарный оператор в H. Взяв произвольный элемент $f \in$ H, положим

$$(U^k f, f) = c_k(f) = c_k \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

так что

$$c_{-k} = (U^{-k} f, f) = (f, U^k f) = \bar{c}_k.$$

Докажем, что при любом натуральном n и любом вещественном t:

$$\Phi_n(t) \equiv \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{-ikt} \geqslant 0. \tag{2}$$

Действительно, на основании (1)

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikt} (U^k f, f).$$

С другой стороны, если

$$T = I + e^{-it}U + e^{-2it}U^2 + \ldots + e^{-(n-1)it}U^{n-1},$$

то

$$(Tf, Tf) = \sum_{r, s=0}^{n-1} e^{i(s-r)t} (U^r f, U^s f) =$$

$$= \sum_{r, s=0}^{n-1} e^{i(s-r)t} (U^{r-s} f, f) = \sum_{k=-n}^{n} (n - |k|) e^{-ikt} (U^k f, f).$$

Таким образом,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n}(Tf, Tf),$$

чем и доказана справедливость неравенства (2).

Как видим, последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 1 n° 68. Поэтому однозначно определяется нормированная неубывающая функция $\sigma(t)$, для которой

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Функция $\sigma(t)$ при каждом t является некоторым функционалом от f:

$$\sigma(t) = \sigma(t;\ f).$$

Определим с помощью этого функционала другой функционал, уже от пары векторов $f,\ g \in H$, а именно положим

$$\sigma(t;\ f,\ g) = \frac{1}{4}\sigma(t;\ f+g) - \frac{1}{4}\sigma(t;\ f-g) + \frac{i}{4}\sigma(t;\ f+ig) - \\ - \frac{i}{4}\sigma(t;\ f-ig).$$

Переменная t здесь, как и выше, изменяется в интервале $[0, 2\pi]$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t;\ h) = (U^k h,\ h) \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и беря последовательно

$$h = f+g,\ f-g,\ f+ig,\ f-ig,$$

мы найдем без труда, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t;\ f,\ g) = (U^k f,\ g) \quad (\pm k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Таким образом, мы получили представление в виде тригонометрических интегралов Стилтьеса не только величин $(U^k f,\ f)$, но и величин $(U^k f,\ g)$. Это представление единственно (в силу условий нормировки функций $\sigma(t;\ f,\ g)$) на основании теоремы 2 n° 68. Поэтому

$$\overline{\sigma(t;\ f,\ g)} = \sigma(t;\ g,\ f).$$

Опираясь на единственность представления (3), докажем, что $\sigma(t;\ f,\ g)$ есть билинейный функционал от $f,\ g$, норма которого не превосходит 1.

Пусть

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2.$$

В таком случае

$$(U^k f,\ g) = \alpha_1 (U^k f_1,\ g) + \alpha_2 (U^k f_2,\ g)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t;\ f,\ g) = \alpha_1 \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2 \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t;\ f_2,\ g) = \\ = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d_t \{\alpha_1 \sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2 \sigma(t;\ f_2,\ g)\}.$$

Так как это соотношение имеет место при $\pm k = 0, 1, 2, \ldots$, и условия нормировки выполнены, то

$$\sigma(t;\ f,\ g) = \alpha_1 \sigma(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2 \sigma(t;\ f_2,\ g).$$

Мы видим, что σ, как функция от f, g, линейна по первому из этих аргументов. Отсюда уже вытекает, что

$$\sigma(t;\ f,\ \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 \sigma(t;\ f,\ g_1) + \bar{\beta}_2 \sigma(t;\ f,\ g_2).$$

Припомним теперь теорему n° 23. Так как $\sigma(t;\ f,\ f)$ — неубывающая функция от t и

$$\sigma(0;\ f,\ f) = 0,$$

$$\sigma(t;\ f,\ f) \leqslant \sigma(2\pi,\ f,\ f) = \int_0^{2\pi} d\sigma(t;\ f,\ f) = (f,\ f),$$

то из указанной теоремы и следует, что $\sigma(t;\ f,\ g)$ есть билинейный функционал от f, g с нормой, не превосходящей единицы.

На основании теоремы об общем виде билинейного функционала существует такое зависящее от параметра t $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ семейство операторов E_t, что

$$\sigma(t;\ f,\ g) = (E_t f,\ g).$$

Теперь мы докажем, что E_t есть разложение единицы.

Прежде всего из справедливости равенства

$$\overline{\sigma(t;\ f,\ g)} = \sigma(t;\ g,\ f)$$

заключаем, что

$$(g,\ E_t f) = (E_t g,\ f),$$

иначе говоря, E_t есть ограниченный самосопряженный оператор.

Переписав формулу (3) в виде

$$(U^k f,\ g) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d(E_t f,\ g), \tag{3'}$$

положим

$$g = U^{-r} h \quad (\pm r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы получим тогда равенство

$$(U^k f,\ U^{-r} h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d(E_t f,\ U^{-r} h),$$

или

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d(U^r E_t f,\ h).$$

А так как

$$(U^r E_t f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{irs} d_s (E_s E_t f,\ h),$$

то

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d_t \left\{ \int_0^{2\pi} e^{irs} d_s (E_s E_t f,\ h) \right\}. \qquad (4)$$

Но, с другой стороны,

$$(U^{k+r} f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{i(k+r)t} d (E_t f,\ h) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d_t \left\{ \int_0^{t} e^{irs} d (E_s f,\ h) \right\}. \qquad (5)$$

Из справедливости представлений (4), (5) при любом целом k и наличия у функций от t

$$\int_0^{2\pi} e^{irs} d_s (E_s E_t f,\ h), \quad \int_0^{t} e^{irs} d (E_s f,\ h)$$

принятых свойств нормировки следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{irs} d_s (E_s E_t f,\ h) = \int_0^{t} e^{irs} d (E_s f,\ h).$$

Это соотношение выполняется при любом целом r. Поэтому снова в силу единственности представления справедливо равенство

$$(E_s E_t f,\ h) = (E_s f,\ h)$$

при любых $f,\ h \in H$, если только $s \leqslant t$.
Иными словами, мы доказали, что

$$E_s E_t = E_s \quad (s \leqslant t). \qquad (6)$$

Отсюда вытекает, что

$$E_t^2 = E_t,$$

т. е. E_t есть оператор проектирования, а также, что вместо (6) можно написать более общее соотношение

$$E_u E_v = E_s \quad (s = \min\{u,\ v\}).$$

Теперь мы докажем, что $E_{t-0} = E_t \ (0 < t \leqslant 2\pi)$. Так как $E_0 = 0$, $E_{2\pi} = I$, то тем самым будет доказано, что E_t есть разложение единицы.

С этой целью воспользуемся условиями нормировки, которые показывают, что

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} (E_s f,\ g) = (E_t f,\ g).$$

Таким образом, в смысле слабой сходимости равенство

$$E_{t-0} = E_t$$

доказано. Но оно имеет место и в смысле сильной сходимости, так как при $t > s$

$$\|(E_t - E_s) f\|^2 = ((E_t - E_s) f,\ f) = (E_t f,\ f) - (E_s f,\ f)$$

и, значит,

$$\|(E_t - E_s) f\|$$

стремится к нулю, когда $s \to t$ $(s < t)$.

Мы получили некоторое разложение единицы в интервале $[0, 2\pi]$, которое принадлежит оператору U в том смысле, что при любом целом k и любых $f,\ g \in \mathrm{H}$

$$(U^k f,\ g) = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d(E_t f,\ g). \tag{3'}$$

Часто эти равенства записываются в виде

$$U^k f = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dE_t f \quad \text{или} \quad U^k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dE_t. \tag{3''}$$

Полученные формулы (3′) и (3″) дают при $k = 1$ искомое спектральное разложение унитарного оператора U. При произвольном целом k они представляют спектральное разложение унитарного оператора U^k.

Мы покажем теперь, что интеграл в правой части (3″) существует как предел операторных интегральных сумм Римана—Стилтьеса T_n в смысле равномерной операторной сходимости, а потому равенства (3″) можно понимать непосредственно, а не лишь как символическую запись представления (3′).

Возьмем, как это делается в элементах интегрального исчисления, некоторое подразделение интервала $[0, 2\pi]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 2\pi, \quad \max_j (t_j - t_{j-1}) = \delta.$$

Для этого подразделения построим оператор

$$T_n = e^{ikt_1} E(\Delta_1) + e^{ikt_2} E(\Delta_2) + \ldots + e^{ikt_n} E(\Delta_n),$$

где $\Delta_j = [t_{j-1},\ t_j)$. При любом $f \in \mathrm{H}$ имеем

$$((T_n - U^k) f,\ f) = (T_n f,\ f) - (U^k f,\ f) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (e^{ikt_j} - e^{ikt})\, d(E_t f,\ f).$$

Отсюда следует, что

$$|((T_n - U^k) f, f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |k| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - t)\, d(E_t f, f) \leqslant \delta |k| \cdot \|f\|^2,$$

а потому (см. подстрочное примечание к теореме n° 23)

$$\| T_n - U^k \| \leqslant 2 |k| \delta,$$

т. е. оператор T_n равномерно стремится к U^k при $\delta \to 0$ $(n \to \infty)$. Предел оператора T_n и принимается за определение интеграла

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dE_t.$$

Не мешает заметить, что в силу наших рассмотрений разложение единицы E_t $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ не только вполне определяется оператором U, но в свою очередь вполне определяет этот оператор.

Заканчивая настоящий n°, покажем еще, что оператор E_t при любом фиксированном t приводит оператор U, а также любую целую степень оператора U. Наше утверждение сводится к тому, что операторы U^k и E_t перестановочны. Доказательство немедленно следует из формул представления (3'); действительно,

$$(U^k E_t f, g) = \int_0^{2\pi} e^{iks} d_s (E_s E_t f, g) = \int_0^t e^{iks} d(E_s f, g),$$

а с другой стороны,

$$(E_t U^k f, g) = (U^k f, E_t g) = \int_0^{2\pi} e^{iks} d_s (E_s f, E_t g) = \int_0^{2\pi} e^{iks} d_s (E_t E_s f, g) =$$

$$= \int_0^t e^{iks} d(E_s f, g).$$

72. Операторные интегралы Стилтьеса. В n° 71 мы определили интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dE_t,$$

с одной стороны, как некоторый символ, связанный с билинейным функционалом

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} d(E_t f, g),$$

а с другой стороны, непосредственно, как предел в смысле равномерной сходимости операторных сумм

$$e^{ikt_1}E(\Delta_1) + e^{ikt_2}E(\Delta_2) + \ldots + e^{ikt_n}E(\Delta_n),$$

построенных по образцу интегральной суммы Стилтьеса. Частный вид подынтегральной функции e^{ikt} здесь, очевидно, не существен. В настоящем пункте мы покажем, как наши построения проводятся в общем виде.

Возьмем какое-нибудь разложение единицы E_t в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$. С помощью этого разложения единицы сопоставим любому вектору $f \in \mathrm{H}$ функцию распределения $\sigma(t) = (E_t f, f)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, а значит, и σ-меру, которая позволяет строить интегралы Лебега — Стилтьеса.

Если какое-нибудь условие выполняется относительно всех σ-мер, порождаемых различными элементами $f \in \mathrm{H}$, то будем говорить, что оно выполняется относительно *операторной меры* E_t. Не мешает заметить, что в случае сепарабельного пространства здесь появляется сильное упрощение. Например, в этом случае можно найти один элемент $g \in \mathrm{H}$ так, что «почти всюду» относительно меры $(E_t g, g)$ означает то же самое, что и «почти всюду» относительно операторной меры E_t. Эта теорема будет доказана ниже (см. n° 76).

Переходя теперь к функциям $\varphi(t)\,(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, на которых мы хотим определить операторные интегралы, условимся раз навсегда, что эти функции (как вещественные, так и невещественные) должны быть определенными и конечными почти всюду относительно операторной меры E_t и, кроме того, относительно E_t измеримыми. Отсюда, в частности, следует, что функция $\varphi(t)$ не может обращаться в ∞ в точке t_0 $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, если в этой точке хотя бы при одном элементе $f \in \mathrm{H}$ функция $(E_t f, f)$ имеет скачок.

Простейшим случаем, несомненно, является тот, когда функция $\varphi(t)$ ограничена. В этом случае при любом $f \in \mathrm{H}$ имеет смысл интеграл Лебега — Стилтьеса,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\, d(E_t f, f).$$

А так как при любых $f, h \in \mathrm{H}$

$$(E_t f, h) = \frac{1}{4}\{(E_t(f+h), f+h) - (E_t(f-h), f-h) + \\ + i(E_t(f+ih), f+ih) - i(E_t(f-ih), f-ih)\},$$

то, очевидно, при любых $f, h \in \mathrm{H}$ имеет смысл интеграл Лебега — Стилтьеса

$$\int_\alpha^\beta \overline{\varphi(t)}\, d\,\overline{(E_t f, h)},$$

и при фиксированном f этот интеграл представляет линейный функционал от h.

По теореме Ф. Рисса, следовательно, существует такой зависящий от f элемент Tf, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,\overline{(E_t f,\ h)} = (h,\ Tf)$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, d\,(E_t f,\ h) = (Tf,\ h). \tag{1}$$

При этом легко видеть, что T есть линейный оператор. Кроме того, он ограничен. Для доказательства последнего утверждения положим $h = Tf$ и заметим, что

$$(E_t f,\ Tf) = \overline{(Tf,\ E_t f)} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(s)}\, d_s\,\overline{(E_s f,\ E_t f)} = \int_{0}^{t} \overline{\varphi(s)}\, d\,(E_s f,\ f).$$

Благодаря этому равенству формула (1) при $h = Tf$ принимает вид

$$\| Tf \|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, d \int_{\alpha}^{t} \overline{\varphi(s)}\, d\,(E_s f,\ f) = \int_{\alpha}^{\beta} | \varphi(t) |^2 d\,(E_t f,\ f), \tag{2}$$

откуда следует неравенство

$$\| Tf \| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} | \varphi(t) | \cdot \| f \|,$$

выражающее, что оператор T ограничен.

Формулу (1) можно представить в виде

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(h,\ E_t f) = (h,\ Tf);$$

а так как левая часть есть

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(E_t h,\ f),$$

то мы приходим к выводу, что сопряженный оператор T^* определяется формулой

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\,(E_t h,\ f) = (T^* h,\ f). \tag{3}$$

Мы можем теперь определить интегралы

$$T = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, dE_t, \quad T^* = \int_\alpha^\beta \overline{\varphi(t)}\, dE_t \tag{4}$$

в слабом смысле, т. е. как операторы, отвечающие билинейным функционалам (1) и (3), где f, h — любые элементы H. Если предположить, что функция $\varphi(t)$ не только ограничена, но и непрерывна, то интегралы (4), как легко показать, повторяя рассмотрения n° 71, определяются и непосредственно, как равномерные пределы операторных интегральных сумм Римана — Стилтьеса.

Следующий шаг состоит в отказе от предположения об ограниченности функции $\varphi(t)$. Вместо этого предположения примем, что множество D элементов f, для которых

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(t)|^2 d(E_t f, f) < \infty, \tag{5}$$

плотно в H. Здесь прежде всего легко доказать, что D есть линейное многообразие. Действительно, из неравенства

$$\|E_t(f+g)\|^2 \leqslant \|E_t(f+g)\|^2 + \|E_t(f-g)\|^2 = 2\|E_t f\|^2 + 2\|E_t g\|^2$$

находим, что

$$(E_t(f+g), f+g) \leqslant 2(E_t f, f) + 2(E_t g, g).$$

Поэтому соотношения

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(t)|^2 d(E_t f, f) < \infty, \quad \int_\alpha^\beta |\varphi(t)|^2 d(E_t g, g) < \infty$$

влекут соотношение

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(t)^2 d(E_t(f+g), f+g) < \infty.$$

Введя обычное обозначение

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } |\varphi(t)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |\varphi(t)| > n, \end{cases}$$

мы можем согласно предыдущему построить билинейные функционалы, определенные всюду в H, и принадлежащие им ограниченные операторы

$$T_n = \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\, dE_t. \tag{4'}$$

Согласно (2)

$$\| T_n f - T_m f \|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} | \varphi_n(t) - \varphi_m(t) |^2 \, d(E_t f, f).$$

Если $f \in D$, то правая часть этого соотношения стремится к нулю при $m \to \infty$, $n \to \infty$. Поэтому последовательность элементов $T_n f$ стремится при $n \to \infty$ к некоторому элементу из H. Этот элемент и является, по определению, значением на векторе f операторного интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \, dE_t = T.$$

Таким образом, T определяется как оператор с областью определения $D_T = D$.

Заменяя в наших рассуждениях $\varphi(t)$ на $\overline{\varphi(t)}$, мы придем ко второму оператору, а именно,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)} \, dE_t,$$

с областью определения D_S, которая также совпадает с D. Докажем, что $S = T^*$ и в рассматриваемом случае. Так как для любых $f, g \in D$

$$(Tf, g) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \, d(E_t f, g)$$

и

$$(f, Sg) = \overline{(Sg, f)} = \overline{\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)} \, d(E_t g, f)} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \, d(E_t f, g),$$

т. е.

$$(Tf, g) = (f, Sg),$$

то $S \subseteq T^*$. Покажем теперь, что $D_{T^*} \subseteq D$, откуда будет следовать, что $T^* = S$. С этой целью примем, что для некоторой пары элементов $h, h^* \in H$

$$(Tf, h) = (f, h^*) \tag{6}$$

при любом $f \in D$. Затем определим оператор S_n по функции $\overline{\varphi(t)}$, подобно тому как формулой (4') был определен оператор T_n по функции $\varphi(t)$. Так как

$$(E_t S_n h, g) = (S_n h, E_t g) =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi_n(u)} \, d_u(E_u h, E_t g) = \int_{\alpha}^{t} \overline{\varphi_n(u)} \, d(E_u h, g), \tag{7}$$

то

$$(E_tS_nh,\ S_nh)=\int_a^t\overline{\varphi_n(u)}\,d_u\left\{\int_a^u\varphi_n(v)\,d(E_vh,\ h)\right\}=\int_a^t|\varphi_n(u)|^2\,d(E_uh,\ h).$$

Следовательно, при любом $h\in\mathrm{H}$ для элемента $f_n=S_nh$ будем иметь неравенство

$$\int_a^\beta|\varphi(t)|^2\,d(E_tf_n,\ f_n)=\int_a^\beta|\varphi_n(t)|^4\,d(E_th,\ h)<\infty,$$

т. е. $f_n\in\mathrm{D}$, и мы можем в формуле (6) положить $f=f_n$. Здесь мы учли, что $\varphi(t)\varphi_n(t)=\varphi_n^2(t)$. Снова пользуясь тождеством (7), уже при $g=h$, найдем, что

$$(Tf_n,\ h)=(TS_nh,\ h)=\int_a^\beta\varphi(t)\,d(E_tS_nh,\ h)=\int_a^\beta|\varphi_n(t)|^2\,d(E_th,\ h).$$

На основании формулы (6) при $f=f_n$ получаем отсюда, что

$$\int_a^\beta|\varphi_n(t)|^2\,d(E_th,\ h)\leqslant\|f_n\|\cdot\|h^*\|=\sqrt{\int_a^\beta|\varphi_n(t)|^2\,d(E_th,\ h)}\cdot\|h^*\|,$$

откуда

$$\int_a^\beta|\varphi_n(t)|^2\,d(E_th,\ h)\leqslant\|h^*\|^2$$

и, значит,

$$\int_a^\beta|\varphi(t)|^2\,d(E_th,\ h)\leqslant\|h^*\|^2,$$

т. е. $h\in\mathrm{D}$. Тем самым включение $\mathrm{D}_{T^*}\subseteq\mathrm{D}$ доказано, а вместе с ним установлено и сформулированное выше утверждение: $S=T^*$.

Заметим, что так как переход от T к T^* получается заменой $\varphi(t)$ на комплексно сопряженную функцию $\overline{\varphi(t)}$, в соответствии с формулой (4), то $(T^*)^*=T$. Отсюда, в частности, следует, что оператор T замкнут.

Из рассмотрений настоящего пункта вытекает, как частный, но особо важный случай, следующая

Теорема. *Всякому разложению единицы E_t $(-\infty<t<\infty)$ отвечает вполне определенный самосопряженный оператор*

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}t\,dE_t. \tag{8}$$

Областью определения D_B *этого оператора является совокупность всех векторов* f, *для которых выполняется неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t f,\ f) < \infty. \tag{9}$$

При этом левая часть этого неравенства есть $\| Bf \|^2$.

73. Интегральное представление группы унитарных операторов. Метод, который мы применили в n° 71 при рассмотрении унитарного оператора, применим и в некоторых других случаях. Мы получим с его помощью интегральное представление *группы унитарных операторов* (настоящий пункт) и *резольвенты самосопряженного оператора* (n° 74).

Пусть дано семейство унитарных операторов U_s, зависящих от одного параметра $s\,(-\infty < s < \infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U_s U_t = U_{s+t}$,

2) $U_0 = I$,

3) $(U_t f,\ g)$ есть непрерывная функция от t при любых $f,\ g \in H$.

Из 1) и 2) вытекает, что $U_t^{-1} = U_{-t}$. А так как $U_t^* = U_t^{-1}$, то, следовательно, $U_t^* = U_{-t}$.

Рассматриваемое семейство операторов представляет *непрерывную абелеву группу*.

Взяв произвольный элемент $f \in H$, рассмотрим функцию

$$F(t) = (U_t f,\ f).$$

Это — положительно определенная функция. Действительно, она непрерывна и при любых вещественных $t_\alpha\,(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ и комплексных $\rho_\alpha\,(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} F(t_\alpha - t_\beta)\,\rho_\alpha\bar{\rho}_\beta = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} (U_{t_\alpha} U_{-t_\beta} f,\ f)\,\rho_\alpha\bar{\rho}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} (\rho_\alpha U_{t_\alpha} f,\ \rho_\beta U_{t_\beta} f) = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \rho_k U_{t_k} f \Big\|^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, к $F(t)$ применима теорема Бохнера — Хинчина, и в силу этой теоремы однозначно определяется неубывающая функция

$$\omega(s) = \omega(s;\ f),$$

удовлетворяющая условиям

$$\omega(-\infty) = \lim_{s \to -\infty} \omega(s) = 0, \qquad \omega(s - 0) = \omega(s) \qquad (-\infty < s \leqslant \infty),$$

через которую $F(t)$ выражается в виде

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega(s) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Отсюда при $t = 0$ следует, что

$$(f, f) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(s) = \omega(\infty).$$

Далее, по функции $\omega(s; f)$ строится функция $\omega(s; f, g)$ такая, что

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\omega(s; f, g).$$

При принятых условиях нормировки

$$\omega(-\infty; f, g) = \lim_{s \to -\infty} \omega(s; f; g) = 0, \quad \omega(s-0; f, g) = \omega(s; f, g)$$
$$(-\infty < s \leqslant \infty)$$

это представление единственно. На основании этой единственности, как и выше, доказывается, что $\omega(s; f, g)$ есть билинейный функционал от f, g, норма которого не превосходит единицы и который обладает следующим свойством:

$$\overline{\omega(s; \overline{f, g})} = \omega(s; g, f).$$

Поэтому существует однопараметрическое семейство ограниченных самосопряженных операторов E_s такое, что

$$\omega(s; f, g) = (E_s f, g) \quad (-\infty \leqslant s \leqslant \infty).$$

Доказательство того, что $E_s (-\infty \leqslant s \leqslant \infty)$ есть разложение единицы, также мало отличается от аналогичного доказательства n° 71. Действительно, с одной стороны,

$$(U_{t+\tau} f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(t+\tau)} d(E_s f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d_s \left\{ \int_{-\infty}^{s} e^{i\sigma t} d(E_\sigma f, g) \right\},$$

а с другой стороны,

$$(U_{t+\tau} f, g) = (U_t U_\tau f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d_s (E_s U_\tau f, g).$$

Поэтому в силу единственности представления

$$(E_s U_\tau f, g = \int_{-\infty}^{s} e^{i\sigma\tau} d(E_\sigma f, g).$$

Воспользуемся теперь равенством

$$(E_s U_\tau f, g) = (U_\tau f, E_s g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\tau} d_\sigma (E_\sigma f, E_s g).$$

Отсюда, снова в силу единственности представления, и получается равенство

$$(E_\sigma f, g) = (E_\sigma f, E_s g) = (E_s E_\sigma f, g) \quad (\sigma \leqslant s),$$

из которого следует соотношение

$$E_u E_v = E_s \quad (s = \min\{u, v\}).$$

Далее, на основании условий нормировки функции ω доказывается сначала в смысле слабой сходимости, а затем и в смысле сильной, что

$$E_{s-0} = E_s, \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_\infty = I.$$

Таким образом, показано, что рассматриваемая *группа унитарных операторов допускает интегральное представление*[1]

$$U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f, \tag{1}$$

которое, как легко видеть, справедливо в смысле сильной сходимости несобственного интеграла, а не есть лишь символическая запись равенства

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d(E_s f, g).$$

Предоставляем читателю проверку того, что оператор E_s приводит оператор U_t.

В заключение отметим, что полученное представление (1), как мы увидим ниже, после введения функций от самосопряженного оператора (n° 88), может быть записано в виде

$$U_t f = e^{iBt} f,$$

где B — самосопряженный оператор, отвечающий разложению единицы E_s в силу теоремы n° 72.

74. Интегральное представление резольвенты самосопряженного оператора. Пусть A — самосопряженный оператор и $R_z = (A - zI)^{-1}$ — его резольвента, которую мы будем рассматривать лишь при $\Im z \neq$

[1] Это представление группы унитарных операторов впервые получено М. Стоном.

$\neq 0$. Возьмем какой-нибудь элемент $f \in \mathrm{H}$ и порождаемую им в верхней половине плоскости z функцию

$$(R_z f, f) = \varphi(z).$$

На основании соотношения Гильберта

$$R_{z'} - R_z = (z' - z) R_{z'} R_z$$

получаем

$$\frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z' - z} = (R_{z'} R_z f, f),$$

откуда, благодаря неравенству $\| R_z \| \leqslant \frac{1}{|y|}$ (см. n° 48) следует, что при $z' \to z$ существует

$$\lim \frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z' - z} = (R_z R_z f, f).$$

Мы видим, что $\varphi(z)$ есть регулярная аналитическая функция в верхней полуплоскости. Ее мнимая часть равна

$$\frac{\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}}{2i} = \frac{(R_z f, f) - (f, R_z f)}{2i} = \frac{(R_z f, f) - (R_z^* f, f)}{2i}.$$

Но (см. n° 49)

$$R_z^* = R_{\bar{z}}.$$

Следовательно, снова в силу соотношения Гильберта,

$$(R_z f, f) - (R_z^* f, f) = (z - \bar{z})(R_{\bar{z}} R_z f, f) = (z - \bar{z})(R_z f, R_z f).$$

Поэтому при $y = \Im z > 0$

$$\Im \varphi(z) = y (R_z f, R_z f) \geqslant 0,$$

т. е. мнимая часть функции $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости неотрицательна; она даже положительна, если $f \neq 0$, так как из $R_z f = 0$ следует $f = 0$.

Заметим еще, что

$$\sup_{y > 0} y |\varphi(iy)| < \infty.$$

Действительно из

$$\| R_z f \| \leqslant \frac{1}{y} \| f \|$$

следует, что

$$y |\varphi(iy)| = y |(R_{iy} f, f)| \leqslant (f, f).$$

Вспомним теперь теорему 3 n° 69. В силу этой теоремы существует неубывающая функция ограниченного изменения $\omega(t) = \omega(t;\ f)$, которая однозначно определяется нормировкой

$$\omega(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} \omega(t) = 0, \quad \omega(t-0) = \omega(t) \quad (-\infty < t \leqslant \infty),$$

и для которой

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t)}{t-z} \quad (\Im z > 0).$$

Таким образом доказано, что при $\Im z > 0$

$$(R_z f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-z}. \tag{1}$$

Из этого представления находим, что

$$(f,\ R_{\bar z} f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-z}$$

и, значит,

$$(R_{\bar z} f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f)}{t-\bar z}. \tag{2}$$

Если z лежит в верхней полуплоскости, то $\bar z$ лежит в нижней. Поэтому из формул (1) и (2) следует, что представление

$$(R_z h,\ h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ h)}{t-z}$$

справедливо для любого невещественного z и любого $h \in H$. Полагая

$$\omega(t;\ f,\ g) = \frac{1}{4}\omega(t;\ f+g) - \frac{1}{4}\omega(t;\ f-g) + \\ + \frac{i}{4}\omega(t;\ f+ig) - \frac{i}{4}\omega(t,\ f-ig),$$

найдем, что для любого невещественного z и любых $f,\ g \in H$

$$(R_z f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega(t;\ f,\ g)}{t-z}. \tag{3}$$

Здесь $\omega(t;\ f,\ g)$ есть некоторая комплексная функция ограниченного изменения, равная нулю при $t = -\infty$ и в каждой точке

$t > -\infty$ непрерывная слева. Нетрудно проверить, что при этих условиях нормировки интегральное представление (3) единственно. Действительно, в противном случае существует комплексная функция ограниченного изменения

$$\sigma(t) = \alpha(t) + i\beta(t),$$

для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \bar{z}} = 0 \tag{4}$$

при любом невещественном z. Следовательно, вместе с (4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} = 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{d\sigma(t)}}{t - \bar{z}} = 0. \tag{4'}$$

Сравнение (4) с (4′) показывает, что при любом невещественном z

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(t)}{t - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta(t)}{t - \bar{z}} = 0.$$

Но в силу теоремы 3 n° 69 и условий нормировки отсюда вытекает, что

$$\alpha(t) = \beta(t) = 0.$$

После того, как единственность представления (3) доказана, уже легко доказать, что

$$\overline{\omega(t;\ f,\ g)} = \omega(t;\ g,\ f), \tag{5}$$

а также, что

$$\omega(t;\ \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\ g) = \alpha_1 \omega(t;\ f_1,\ g) + \alpha_2 \omega(t;\ f_2,\ g).$$

Покажем теперь, что

$$\omega(t;\ f,\ f) \leqslant (f,\ f).$$

Тогда из теоремы n° 23 будет следовать, что $\omega(t;\ f,\ g)$ есть билинейный функционал от f, g с нормой, не превосходящей единицы.

Мы уже отмечали, что

$$y\,|(R_{iy}f, f)| \leqslant (f,\ f) \quad (y > 0).$$

Иначе говоря,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, d\omega(t;\, f,\, f)}{t - iy} \right| \leqslant (f,\, f).$$

Разбивая интеграл на три части, находим, что

$$\left| \int_{-A}^{A} \frac{y\, d\omega(t;\, f,\, f)}{t - iy} \right| \leqslant (f,\, f) + \int_{-\infty}^{-A} d\omega(t;\, f,\, f) + \int_{A}^{\infty} d\omega(t;\, f,\, f).$$

Переходя к пределу при $y \to \infty$, получим

$$\int_{-A}^{A} d\omega(t;\, f,\, f) \leqslant (f,\, f) + \int_{-\infty}^{-A} d\omega(t;\, f,\, f) + \int_{A}^{\infty} d\omega(t;\, f,\, f).$$

Отсюда при $A \to \infty$

$$\omega(\infty;\, f,\, f) \leqslant (f,\, f).$$

Но $\omega(t;\, f,\, f)$ есть неубывающая функция от t; поэтому неравенство

$$\omega(t;\, f,\, f) \leqslant (f,\, f)$$

доказано.

На основании теоремы об общем виде билинейного функционала существует семейство операторов $E_t\ (-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ такое, что

$$\omega(t;\, f,\, g) = (E_t f,\, g).$$

Из соотношения (5) вытекает, что

$$(E_t f,\, g) = (f,\, E_t g),$$

т. е. оператор E_t самосопряженный. Далее, функция $(E_t f,\, f)$ не убывает при увеличении t.

Мы имеем равенство

$$(R_z f,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - z}\, d(E_t f,\, g),$$

справедливое для любых $f,\ g \in \mathrm{H}$ и любого невещественного z.

Из этого равенства вытекает, что

$$(R_z f,\, R_{\bar{z}'} g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - z}\, d(E_t f,\, R_{\bar{z}'} g), \tag{6}$$

а с другой стороны,

$$(R_z f,\ R_{\bar z'} g) = (R_{z'} R_z f,\ g) = \frac{1}{z'-z}\{(R_{z'} f,\ g) - (R_z f,\ g)\} =$$

$$= \frac{1}{z'-z}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z'} - \frac{1}{t-z}\right) d(E_t f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-z)(t-z')}\, d(E_t f,\ g).$$

Итак, кроме представления (6), мы имеем представление

$$(R_z f,\ R_{\bar z'} g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, d_t\left\{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'}\, d(E_s f,\ g)\right\}.$$

Эти представления должны быть тождественными, так как условия нормировки выполнены здесь для обеих функций распределения. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'}\, d(E_s f, g) = (E_t f,\ R_{\bar z'} g) = (R_{z'} E_t f,\ g)$$

или

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'}\, d(E_s f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s-z'}\, d_s(E_s E_t f,\ g).$$

Так как эти представления тождественны, то

$$(E_s f,\ g) = (E_s E_t f,\ g) \quad (s \leqslant t).$$

Отсюда следует, что

$$E_u E_v = E_s \quad (s = \min\{u,\ v\})$$

и, значит,

$$E_s \leqslant E_t \quad (s \leqslant t).$$

Из условий нормировки функции $\omega(t;\ f,\ g)$ вытекает сначала в смысле слабой сходимости, а затем и в смысле сильной, что

$$E_{-\infty} = 0, \quad E_{t-0} = E_t.$$

Далее, существует сильный предел

$$\lim_{t\to\infty} E_t = E_\infty.$$

Докажем, что

$$E_\infty = I,$$

откуда будет следовать, что E_t есть некоторое разложение единицы. Пусть $I - E_\infty = F$. Тогда

$$FE_t = (I - E_\infty) E_t = E_t - \lim_{s\to\infty} E_s E_t = E_t - E_t = 0.$$

Следовательно, при любых $f,\ g \in \mathrm{H}$

$$(R_z F f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, d(E_t F f,\ g) = 0.$$

Значит, при любом $f \in \mathrm{H}$

$$R_z F f = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$F f = 0.$$

Следовательно, $F = 0$, что и требовалось доказать.

Полученное нами представление резольвенты R_z самосопряженного оператора A также является иллюстрацией общих построений n° 72 и может быть записано в виде

$$R_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, dE_t \quad (\Im z \neq 0).$$

Предлагаем читателю проверить следующий факт: *если S — произвольный ограниченный оператор, определенный всюду в* H, *и если*

$$SR_z = R_z S$$

при любом невещественном z, то

$$SE_t = E_t S$$

при любом $t \in [-\infty,\ \infty]$.

75. Спектральное разложение самосопряженных операторов. В конце n° 72 было установлено, что каждым разложением единицы $E_t\ (-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ порождается некоторый самосопряженный оператор B. Основной задачей настоящего пункта является доказательство обратного предложения, именно, что каждому самосопряженному оператору S принадлежит некоторое разложение единицы, которое порождает его в смысле упомянутой теоремы n° 72. Более того, мы докажем, что этим разложением единицы является разложение единицы резольвенты оператора A. Первым шагом на пути к этому доказательству является следующая

Лемма. *Если $E_t\ (-\infty \leqslant t \leqslant \infty)$ есть разложение единицы, принадлежащее резольвенте R_z самосопряженного оператора A, то совокупность всех векторов $f \in \mathrm{H}$, для которых имеет место неравенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d(E_t f,\ f) < \infty,$$

совпадает с областью определения D_A оператора A.

Доказательство. Мы знаем, что вектор $f = R_z h$ пробегает D_A, когда вектор h пробегает H, а z есть какое-нибудь фиксированное невещественное число. Мы примем $z = i$ и для краткости будем писать

$$R_i = R, \quad R_{-i} = R^*.$$

Наше предложение будет доказано, если мы проверим эквивалентность следующих двух утверждений:

α. Элемент f таков, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(E_t f, f) < \infty.$$

β. Существует такой вектор h, что

$$f = Rh.$$

Докажем вначале, что из β следует α. Итак, пусть

$$f = Rh.$$

В таком случае

$$(E_t f, f) = (E_t Rh, Rh) = (RE_t h, Rh) = (R^* R E_t h, h) =$$
$$= \frac{1}{2i}(\{R - R^*\} E_t h, h) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) d_s (E_s E_t h, h) =$$
$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+s^2} \, d(E_s h, h),$$

а следовательно,

$$\int_{-M}^{M} t^2 \, d(E_t f, f) = \int_{-M}^{M} \frac{t^2}{1+t^2} \, d(E_t h, h) \leqslant \int_{-M}^{M} d(E_t h, h) \leqslant (h, h).$$

Это неравенство и показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(E_t f, f) \leqslant (h, h) < \infty,$$

т. е. утверждение α доказано.

Теперь докажем, что из α следует β. Пусть α имеет место. Это значит, что вектор f принадлежит области определения оператора B, о котором шла речь в теореме п° 72.

Положим

$$h = (B - iI) f.$$

Утверждение β будет доказано, если мы проверим, что

$$R(B-iI)f=f.$$

Взяв произвольный вектор $g\in H$, можем написать равенство

$$(R(B-iI)f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-i}\,d(E_t(B-iI)f,\ g).$$

А с другой стороны,

$$((B-iI)f,\ E_tg)=\int_{-\infty}^{\infty}(s-i)\,d_s(E_sf,\ E_tg)=\int_{-\infty}^{t}(s-i)\,d(E_sf,\ g).$$

Поэтому

$$(R(B-iI)f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-i}{t-i}\,d(E_tf,\ g)=(f,\ g).$$

В силу произвольности g это и означает, что

$$R(B-iI)f=f. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Разложение единицы E_t $(-\infty<t<\infty)$ резольвенты R_z самосопряженного оператора A является разложением единицы оператора A, т. е., во-первых, D_A есть совокупность всех векторов f, для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,d(E_tf,\ f)<\infty,$$

и, во-вторых, для любого $f\in D_A$

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty}t\,dE_tf.$$

Доказательство. Построим оператор B, отвечающий в смысле теоремы n° 72 разложению единицы E_t резольвенты R_z оператора A. На основании леммы $D_B=D_A$, следовательно, остается доказать, что для любого $f\in D_A$ имеет место равенство

$$Bf=Af. \qquad (2)$$

Но в n° 49 было показано, что равенство

$$R_zg=0$$

при каком-нибудь невещественном z реализуется лишь в том случае, когда $g=0$. Поэтому вместо (2) достаточно доказать, что

$$RBf=RAf$$

или

$$R(B-iI)f=R(A-iI)f.$$

Это равенство, несомненно, имеет место, так как левая часть равна f в силу (1), а правая равна f по определению резольвенты.

Интегральное представление оператора A, установленное теоремой 1, называется *спектральным разложением* этого оператора. Спектральное разложение ограниченного самосопряженного оператора было впервые получено Гильбертом, а обобщение на неограниченные самосопряженные операторы принадлежит Нейману.

Теорема 2. *Разложение единицы $E_t\ (-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$ принадлежит самосопряженному оператору A в том и только том случае, если:* 1° *$E(\Delta)$ приводит A при любом $\Delta\subset[-\infty,\ \infty]$;* 2° *из включения*

$$f\in(E_t-E_s)\,\mathrm{H}\quad(-\infty\leqslant s<t\leqslant\infty)$$

всякий раз следует неравенство

$$s\,\|f\|^2\leqslant(Af,\ f)\leqslant t\,\|f\|^2.$$

Доказательство. Необходимость условия 1° доказана выше для унитарных операторов. В теперешнем случае доказательство аналогично. Необходимость условия 2° вытекает из представления

$$(Af,\ f)=\int_s^t \tau\, d(E_\tau f,\ f),$$

верного, если $f\in(E_t-E_s)\,\mathrm{H}$.

Обратимся к доказательству достаточности указанных условий. Итак, пусть условия 1°, 2° выполнены. Возьмем какой-нибудь элемент $f\in D_A$. В силу условия 1° области D_A принадлежит $(E_\beta-E_\alpha)f$, каковы бы ни были числа α, β. Произведя разбиение (мы считаем α, β конечными)

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=\beta \tag{3}$$

интервала $[\alpha,\ \beta]$ представим $(E_\beta-E_\alpha)f$ в виде

$$(E_\beta-E_\alpha)f=\sum_{k=0}^{n-1}(E_{\alpha_{k+1}}-E_{\alpha_k})f.$$

Отсюда на основании 1°

$$(E_\beta-E_\alpha)Af=\sum_{k=0}^{n-1}A\,(E_{\alpha_{k+1}}-E_{\alpha_k})f. \tag{4}$$

Но из условия 2° вытекает, что при $f\in(E_t-E_s)\,\mathrm{H}$

$$-\frac{t-s}{2}(f,\ f)\leqslant\left(Af-\frac{s+t}{2}f,\ f\right)\leqslant\frac{t-s}{2}(f,\ f),$$

иначе говоря, часть самосопряженного оператора

$$A - \frac{s+t}{2} I,$$

лежащая в $(E_t - E_s)\,H$, имеет норму $\leqslant \frac{t-s}{2}$. Поэтому, переписав (4) в виде

$$(E_\beta - E_\alpha)\,Af = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(A - \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} I\right) (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f, \tag{5}$$

и замечая, что

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(A - \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2} I\right) (E_{\alpha_{k+1}} + E_{\alpha_k}) f \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2}\right)^2 \| (E_{\alpha_{k+1}} - E_{\alpha_k}) f \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| f \|^2,$$

где

$$\varepsilon = \max_k \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2},$$

сделаем в (5) предельный переход, устремляя диаметр подразделения (3), т. е. число 2ε, к нулю. Мы получим тогда, что

$$(E_\beta - E_\alpha)\,Af = \int_\alpha^\beta t\, dE_t f$$

и

$$\| (E_\beta - E_\alpha)\,Af \|^2 = \int_\alpha^\beta t^2\, d\,(E_t f, f).$$

Второе из этих соотношений показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d\,(E_t f, f) = \| Af \|^2 < \infty,$$

а первое дает

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t f.$$

Тем самым теорема доказана.

При выводе интегрального представления резольвенты самосопряженного оператора (n° 74) было использовано лишь, что R_z ($\Im z \neq 0$) есть семейство определенных всюду в H операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. $\| R_z \| \leqslant \frac{1}{|y|} \| f \| \quad (y = \Im z)$.

2°. $R_z^* = R_{\bar{z}}$.

3°. $R_{z'} - R_z = (z' - z) R_{z'} R_z$.

4°. Если $R_z f = 0$ при каком-нибудь z, то $f = 0$.

Теперь мы можем утверждать, что всякое семейство операторов, удовлетворяющее этим условиям, представляет резольвенту некоторого самосопряженного оператора[1]. Действительно, имея такое семейство операторов, мы можем найти его интегральное представление через некоторое разложение единицы E_t, а затем построить самосопряженный оператор A с этим разложением единицы. Резольвентой этого оператора A и является семейство R_z.

Заканчивая настоящий n°, приведем несколько простых фактов относительно самосопряженных операторов, которые являются непосредственными следствиями интегрального представления этих операторов:

1). Если A — самосопряженный оператор, для которого

$$\inf_{f \in D_A} \frac{(Af, f)}{(f, f)} = \alpha, \qquad \sup_{f \in D_A} \frac{(Af, f)}{(f, f)} = \beta,$$

то спектральное разложение оператора A имеет вид

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} t \, dE_t,$$

т. е.

$$E_t = 0 \ (\text{при } t \leqslant \alpha),$$
$$E_t = I \ (\text{при } t \geqslant \beta).$$

2). Для того чтобы некоторый вектор $f \in$ H допускал n-кратное применение самосопряженного оператора A, иначе говоря, чтобы имели смысл

$$A^k f = A(A^{k-1} f) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

[1] Следует заметить, что этот факт может быть установлен без использования интегрального представления семейства операторов R_z. Если опираться лишь на свойства 2°, 3°, 4°, то легко показать, что оператор A, определенный равенством $A = zI + R_z^{-1}$, не зависит от z и является самосопряженным, а его резольвента есть R_z. При этом обнаруживается, что свойство 1° является следствием остальных.

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, d(E_t f, f) < \infty,$$

и если это неравенство выполнено, то

$$A^k f = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, dE_t f, \quad \| A^k f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\, d(E_t f, f) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3). Существует плотное в H линейное многообразие, на котором определены все натуральные степени самосопряженного оператора A. В качестве такого многообразия можно взять совокупность векторов вида $E(\Delta)h$, где h пробегает H, а Δ пробегает множество всех конечных интервалов числовой оси.

Доказательство этих утверждений предоставляем читателю.

76. О множествах нулевой операторной меры в случае сепарабельного пространства. В этом пункте мы докажем предложение, которое было упомянуто в n° 72. Вот оно:

Теорема 1. *Если* H — *сепарабельное пространство Гильберта и* E_t — *некоторое разложение единицы на конечном или бесконечном интервале, то можно указать элемент* $g \in$ H *так, чтобы множество меры нуль относительно функции распределения* $(E_t g, g)$ *имело меру нуль относительно* $(E_t h, h)$ *при любом* $h \in$ H.

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай разложения единицы на конечном интервале. Действительно, если E_t есть разложение единицы на оси $[-\infty, \infty]$, то $F_s = E_t$, где $t = \operatorname{tg} s$, будет разложением единицы на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. При этом, каков бы ни был элемент $h \in$ H, любому точечному множеству оси $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, имеющему нулевую σ_1-меру, где $\sigma_1(t) = (E_t h, h)$, в силу соответствия $t = \operatorname{tg} s$ отвечает множество нулевой σ_2-меры на интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}$, где $\sigma_2(s) = (F_s h, h)$ и наоборот. Поэтому мы можем сразу предположить, что разложение единицы E_t задано на конечном интервале. Обозначим через A ограниченный самосопряженный оператор, принадлежащий разложению единицы E_t.

Так как пространство H сепарабельно, то существует счетное множество $\{g^{(i)}\}_1^\infty$, плотное в H. Положим $g_1 = g^{(1)}$ и введем подпространство

$$G_1 = \{g_1, Ag_1, A^2 g_1, \ldots\},$$

порождаемое векторами $g_1, Ag_1, A^2 g_1, \ldots$ Оператор проектирования на G_1 обозначим P_1. Положим далее

$$g_2 = g^{(2)} - P_1 g^{(2)}$$

и введем подпространство

$$G_2 = \{g_2,\ Ag_2,\ A^2g_2,\ \ldots\}$$

и ортопроектор P_2, проектирующий на G_2. Затем положим

$$g_3 = g^{(3)} - P_1g^{(3)} - P_2g^{(3)},$$

введем G_3 и P_3 и т. д. Таким образом, мы получим бесконечную последовательность векторов $\{g_k\}_1^\infty$, соответствующих подпространств $\{G_k\}_1^\infty$ и ортопроекторов $\{P_k\}_1^\infty$.

Заметим, что подпространства G_k (а значит, и векторы g_k) попарно ортогональны, а каждый из ортопроекторов P_k перестановочен с оператором A. При доказательстве второго из этих утверждений используются теоремы 1 и 2 n° 45.

Теперь возьмем последовательность положительных чисел γ_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \| g_k \|^2 < \infty,$$

и докажем, что в качестве требуемого вектора g можно взять

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k. \tag{1}$$

Доказательство основано на следующих леммах:

1°. Если точечное множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_tf,\ f)$, то оно имеет меру нуль относительно $(E_tCf,\ Cf)$, где C — любой ограниченный самосопряженный оператор, перестановочный с оператором A, а потому (см. конец n° 74) и с E_t.

2°. Если множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_tf',\ f')$ и относительно $(E_tf'',\ f'')$, то оно обладает тем же свойством относительно $(E_tf,\ f)$, где $f = f' + f''$.

3°. Если множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно каждой из функций $(E_tf_n,\ f_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и если $\| h - f_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_th,\ h)$.

Чтобы доказать леммы 1° и 2°, положим $F = E_\mu - E_\lambda$ $(\mu > \lambda)$. Тогда

$$(FCf,\ Cf) = (F^2Cf,\ Cf) = (CFf,\ CFf) \leqslant \| C \|^2 (Ff,\ Ff) = \| C \|^2 (Ff,\ f),$$

откуда вытекает справедливость леммы 1°. Далее

$$(F(f' + f''),\ (f' + f'')) = (F(f' + f''),\ F(f' + f'')) \leqslant$$
$$\leqslant \{(Ff',\ Ff')^{\frac{1}{2}} + (Ff'',\ Ff'')^{\frac{1}{2}}\}^2 \leqslant 2(Ff',\ f') + 2(Ff'',\ f'').$$

Из этого неравенства следует справедливость леммы 2°.

Для доказательства леммы 3° заметим, что функция $\psi_n(t) = (E_t(h - f_n), h - f_n)$ при возрастании t не убывает и всегда $\leqslant \|h - f_n\|^2$. Возьмем n столь большим, чтобы $\|h - f_n\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, и заключим $\mathfrak{M}$ в систему интервалов, на которой изменение функции $(E_t f_n, f_n)$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда на этой системе интервалов изменение функции $(E_t h, h)$ будет меньше ε. Тем самым лемма 3° также доказана.

Теперь обратимся к доказательству теоремы.

Пусть некоторое множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t g, g)$, где g — построенный нами вектор (1). Пусть, далее, h — произвольный вектор из H. Мы хотим доказать, что $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t h, h)$. С этой целью заметим, что элемент h можно представить в виде

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k, \tag{2}$$

где $h_k = P_k h$. Действительно, вектор

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n$$

представляет проекцию вектора h на подпространство

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n,$$

а каждый из векторов $g^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежит этому подпространству. Поэтому

$$\| h - h_1 - h_2 - \cdots - h_n \| \leqslant \| h - g^{(k)} \| \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

А так как множество $\{g^{(k)}\}_1^{\infty}$ плотно в H и, значит, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $k = k_\varepsilon$, что $\| h - g^{(k)} \| < \varepsilon$, то при $n \geqslant k_\varepsilon$

$$\| h - h_1 - h_2 - \cdots - h_n \| < \varepsilon.$$

Следовательно, представление (2) доказано.

На основании лемм 2° и 3° поэтому достаточно доказать, что множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t h_k, h_k)$ при любом натуральном k. Это мы и докажем. Для этого прежде всего возьмем равенства

$$g_n = \frac{1}{\gamma_n} P_n g, \quad AP_n = P_n A,$$

из которых по лемме 1° следует, что множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t g_n, g_n)$, и на основании той же леммы 1° множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно каждой из функций $(E_t A^r g_n, A^r g_n)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в силу лемм 2° и 3° множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно функции $(E_t f, f)$, каков бы ни был элемент $f \in \mathrm{G}_n$. Но в таком случае множество $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль относительно $(E_t h_k, h_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и доказательство закончено, так как n можно взять сколь угодно большим.

Следующее предложение, которое будет использовано далее в n° 91, примыкает к теореме 1.

Теорема 2. *Пусть* H — *сепарабельное пространство Гильберта,* E_t — *некоторое разложение единицы на конечном интервале и* A — *принадлежащий ему самосопряженный оператор. Если* T — *линейный замкнутый оператор с плотной в* H *областью определения* D_T, *перестановочный с каждым ограниченным самосопряженным оператором, который сам перестановочен с оператором* A, *то можно указать элемент* $g \in \mathrm{D}_T$ *так, чтобы множество меры нуль относительно функции распределения* $(E_t g, g)$ *имело меру нуль относительно* $(E_t h, h)$ *при любом* $h \in \mathrm{H}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Отметим лишь, что теперь плотное в H счетное множество векторов $\{g^{(i)}\}_1^\infty$ нужно выбрать из элементов, принадлежащих D_T. Тогда векторы g_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, определяемые, как и в предыдущем доказательстве, по оператору A, все будут принадлежать D_T, так как из перестановочности операторов P_j и A следует перестановочность P_j и T и включение $P_j g^{(i)} \in \mathrm{D}_T$ $(j < i;\ i, j = 1, 2, 3, \ldots)$. Поэтому вектор

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k,$$

где числа γ_k положительны и выбраны так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \{\|g_k\|^2 + \|Tg_k\|^2\} < \infty,$$

также будет принадлежать D_T.

77. Функции от унитарного оператора. Отправляясь от простейших понятий и определений, мы можем, так же как и в линейной алгебре, ввести всевозможные многочлены от оператора, заданного во всем гильбертовом пространстве. Наибольшее значение для нас имеют случаи, когда в качестве исходного оператора взят ограниченный самосопряженный оператор A или унитарный оператор U. В этом последнем случае, которому[1] посвящен настоящий пункт, многочлены могут содержать также и отрицательные степени оператора.

[1] С помощью применяемого здесь метода, при весьма незначительных изменениях, трактуется и тот случай, когда исходным является ограниченный самосопряженный оператор, а не унитарный.

Если

$$P(e^{it}) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt}$$

— произвольный «квазиполином» от e^{it}, то мы полагаем

$$P(U) = \sum_{k=-m}^{n} c_k U^k,$$

устанавливая, таким образом, некоторое соответствие между тригонометрическими суммами от t и функциями от оператора U. Это соответствие обладает следующими свойствами:

1°. Если

$$P_3(e^{it}) = P_1(e^{it}) + P_2(e^{it}), \quad P_4(e^{it}) = P_2(e^{it}) P_2(e^{it}),$$

то

$$P_3(U) = P_1(U) + P_2(U), \quad P_4(U) = P_1(U) P_2(U).$$

2°. Если

$$P(e^{it}) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt} \tag{1}$$

и $T = P(U)$, то

$$T^* = \sum_{k=-m}^{n} \bar{c}_k U^{-k} = \bar{P}(U^{-1}),$$

так что оператор $P(U)$ будет самосопряженным в том и только том случае, когда $m = n$ и $c_{-k} = \bar{c}_k$, т. е. когда квазиполином (1) веществен.

3°. Если квазиполином (1) удовлетворяет неравенству

$$P(e^{it}) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), \tag{2}$$

то при любом $f \in \mathrm{H}$

$$(P(U)f, f) \geqslant 0,$$

т. е. оператор $P(U)$ позитивен.

В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Приведем его. С этой целью воспользуемся тем, что квазиполином $P(e^{it})$, удовлетворяющий неравенству (2), можно представить в виде[1]

$$P(e^{it}) = \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k e^{ikt} \right|^2 = \bar{Q}(e^{-it}) Q(e^{it}),$$

[1] Чтобы получить это представление, нужно принять во внимание, что в силу вещественности функции $P(z)$ на окружности $|z| = 1$ она удовлетворяет равенству

$$P(z) = \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

и ее корни расположены симметрично относительно окружности $|z| = 1$.

где

$$Q(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k e^{ikt}.$$

Поэтому

$$P(U) = T^*T,$$

где

$$T = Q(U).$$

Следовательно, при любом $f \in H$

$$(P(U)f,\ f) = (T^*Tf,\ f) = (Tf,\ Tf) \geqslant 0.$$

Займемся теперь распространением рассматриваемого соответствия на функции, отличные от квазиполиномов. В настоящем пункте это будет сделано для функций довольно узкого класса. Общей же постановке вопроса будет посвящен один из дальнейших пунктов.

Обозначим буквой $\mathbf{K}$ класс, который состоит из всех непрерывных на единичной окружности вещественных функций — мы будем их обозначать $\varphi(e^{it})$, а также из всех кусочно-непрерывных функций $\psi(e^{it})$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, которые являются пределами монотонно убывающих, сходящихся в каждой точке последовательностей $\{\varphi_n(e^{it})\}_1^\infty$.

Лемма. *Для всякой функции $\psi(e^{it}) \in \mathbf{K}$ можно построить бесконечную последовательность квазиполиномов $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$, монотонно убывающую и сходящуюся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$.*

Доказательство. По определению класса $\mathbf{K}$ существует монотонно убывающая последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n(e^{it})\}_1^\infty \subset \mathbf{K}$, сходящаяся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$. При каждом натуральном n построим в согласии с теоремой Вейерштрасса вещественный квазиполином $P_n(e^{it})$, удовлетворяющий для всех t неравенству

$$\left| P_n(e^{it}) - \left[\varphi_n(e^{it}) + \frac{3}{2^{n+2}} \right] \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Из этого неравенства следует, что в каждой точке t

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant P_n(e^{it}) - \varphi_n(e^{it}) \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{3}$$

и, значит, последовательность $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$ сходится к $\psi(e^{it})$ в каждой точке. С другой стороны, благодаря неравенству (3)

$$P_{n+1}(e^{it}) \leqslant \varphi_{n+1}(e^{it}) + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \varphi_n(e^{it}) + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant P_n(e^{it}), \tag{4}$$

и лемма доказана.

Теперь построим операторы $P_n(U)$. Они самосопряженные, имеют общую нижнюю грань

$$\inf \varphi(e^{it})$$

и образуют монотонно убывающую последовательность. Согласно теореме 3 n° 33 эта последовательность сильно сходится к некоторому оператору S, который, по определению, примем за $\psi(U)$. Нужно только доказать, что оператор S не зависит от выбора последовательности квазиполиномов, аппроксимирующих указанным в лемме способом функцию $\psi(e^{it})$, а зависит лишь от этой функции. Для доказательства допустим, что, кроме последовательности $\{P_n(e^{it})\}_1^\infty$, есть вторая монотонно убывающая последовательность квазиполиномов $\{Q_n(e^{it})\}_1^\infty$, сходящаяся в каждой точке к функции $\psi(e^{it})$.

Возьмем произвольное натуральное m и рассмотрим сумму

$$P_m(e^{it}) + \frac{1}{m}.$$

Для каждого t, очевидно, найдется такое N, при котором

$$Q_N(e^{it}) < P_m(e^{it}) + \frac{1}{m}.$$

В силу непрерывности обеих функций $P_m(e^{it})$, $Q_N(e^{it})$ это неравенство будет иметь место не только в точке e^{it}, но и в некоторой дуговой окрестности этой точки. Ясно, что во всей этой окрестности будет и подавно выполнено неравенство

$$Q_n(e^{it}) < P_m(e^{it}) + \frac{1}{m} \tag{5}$$

при любом $n \geqslant N$. По лемме Бореля, окружность можно покрыть конечным числом таких окрестностей и тогда, беря наибольшее из отвечающих им чисел N, мы найдем, что для всех n, превосходящих его, неравенство (5) будет выполнено во всех точках окружности. Аналогично найдем, что при любом натуральном m всюду на окружности будет иметь место неравенство

$$P_n(e^{it}) < Q_m(e^{it}) + \frac{1}{m},$$

если только n достаточно велико. Этим неравенствам между квазиполиномами соответствуют следующие неравенства между операторами:

$$Q_n(U) < P_m(U) + \frac{1}{m} I, \quad P_n(U) < Q_m(U) + \frac{1}{m} I. \tag{6}$$

Полагая

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(U) = T, \quad \lim_{n\to\infty} P_n(U) = S$$

и фиксируя в неравенствах (6) число m, найдем, что

$$T \leqslant P_m(U) + \frac{1}{m} I, \quad S \leqslant Q_m(U) + \frac{1}{m} I.$$

Увеличивая теперь m, получим, что

$$T \leqslant S, \quad S \leqslant T,$$

откуда и следует наше утверждение.

Таким образом, соответствие между функциями и операторами распространено на весь класс $\mathbf{K}$. Легко видеть, что отмеченные выше для квазиполиномов свойства этого соответствия переносятся на весь класс $\mathbf{K}$. А именно, если $\psi_1(e^{it})$, $\psi_2(e^{it}) \in \mathbf{K}$ и

$$\psi_3(e^{it}) = \psi_1(e^{it}) + \psi_2(e^{it}), \quad \psi_4(e^{it}) = \psi_1(e^{it})\,\psi_2(e^{it}),$$

то

$$\psi_3(U) = \psi_1(U) + \psi_2(U), \quad \psi_4(U) = \psi_1(U)\,\psi_2(U),$$

и если

$$\psi_1(e^{it}) \geqslant \psi_2(e^{it}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

то

$$\psi_1(U) \geqslant \psi_2(U).$$

Теперь введем линейную оболочку $\hat{\mathbf{K}}$ множества $\mathbf{K}$ и распространим соответствие на нее, полагая

$$\psi(U) = \sum_{k=1}^{m} c_k \psi_k(U),$$

если

$$\psi(e^{it}) = \sum_{k=1}^{m} c_k \psi_k(e^{it}),$$

каковы бы ни были функции $\psi_k(e^{it}) \in \mathbf{K}$ и комплексные числа c_k. Однако здесь нужно убедиться в том, что оператор $\psi(U)$ при этом определяется по функции $\psi(e^{it})$ однозначно. Последний факт достаточно установить для случая вещественных коэффициентов c_k, так как общий случай сводится к этому путем выделения самосопряженной части оператора $\psi(U)$ и вещественной части функции $\psi(e^{it})$. (Напомним, что функции $\psi_k(e^{it})$ вещественны, а потому операторы $\psi_k(U)$ самосопряжены). Итак, пусть c_k вещественны. Группируя отдельно слагаемые с положительными c_k и отдельно с отрицательными c_k, мы сведем вопрос к следующему: пусть функция $\omega(e^{it})$ представлена двумя способами в виде разности двух функций из $\mathbf{K}$, а именно

$$\omega(e^{it}) = \psi_1(e^{it}) - \psi_2(e^{it}), \quad \omega(e^{it}) = \psi_3(e^{it}) - \psi_4(e^{it});$$

будет ли иметь место равенство

$$\psi_1(U) - \psi_2(U) = \psi_3(U) - \psi_4(U)? \tag{7}$$

Ответ на этот вопрос положителен, так как из тождества

$$\psi_1(e^{it}) - \psi_2(e^{it}) = \psi_3(e^{it}) - \psi_4(e^{it})$$

следует тождество

$$\psi_1(e^{it}) + \psi_4(e^{it}) = \psi_2(e^{it}) + \psi_3(e^{it}),$$

обе части которого принадлежат $\mathbf{K}$, в силу чего

$$\psi_1(U) + \psi_4(U) = \psi_2(U) + \psi_3(U).$$

Из этого равенства уже следует равенство (7).

Аналогичным путем доказывается, что свойство монотонности построенного соответствия справедливо не только в $\mathbf{K}$, а и в $\hat{\mathbf{K}}$. Под этим мы понимаем, что если $\omega_1(e^{it})$, $\omega_2(e^{it}) \in \hat{\mathbf{K}}$ и

$$\omega_1(e^{it}) \geqslant \omega_2(e^{it}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

то

$$\omega_1(U) \geqslant \omega_2(U).$$

Замечание. Унитарный оператор U перестановочен со всеми функциями $\psi(U)$, где $\psi(e^{it}) \in \hat{K}$. Действительно, равенство $U\psi(U) = \psi(U)U$ является прямым следствием тождества

$$z\psi(z) = \psi(z)z \quad (z = e^{it}).$$

78. Прямой вывод спектрального разложения унитарного оператора. Введем на окружности характеристическую функцию множества, по определению:

$$\chi_{\mathscr{E}}(e^{it}) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \mathscr{E} \ (\operatorname{mod} 2\pi) \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} \mathscr{E} \ (\operatorname{mod} 2\pi), \end{cases}$$

где $\mathscr{E} \subset [0, 2\pi]$. Если $0 < \lambda < 2\pi$, то

$$\chi_{[\lambda]}(e^{it}) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \lambda \\ 0, & \text{если } t \neq \lambda \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

при $\lambda = 0$ (или $\lambda = 2\pi$) эта функция равна 1 в двух точках: $t = 0$, $t = 2\pi$ и равна нулю в остальных точках интервала $[0, 2\pi]$. Легко видеть, что при любом $\lambda \in [0, 2\pi]$ функция $\chi_{[\lambda]}(e^{it})$ принадлежит классу $\mathbf{K}$ n° 77. Подобным образом принадлежит классу $\mathbf{K}$ функция $\chi_{[\alpha, \beta]}(e^{it})$, каков бы ни был интервал $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$. Но функция $\chi_{[\alpha, \beta)}(e^{it})$ при $[\alpha, \beta) \neq [0, 2\pi)$ классу K уже принадлежать не будет. Однако из равенства

$$\chi_{[\alpha, \beta)}(e^{it}) = \chi_{[\alpha, \beta]}(e^{it}) - \chi_{[\beta]}(e^{it}) \tag{1}$$

видно, что функция $\chi_{[\alpha, \beta)}(e^{it})$ будет всегда принадлежать классу $\hat{K}$. Положим

$$\psi_0(e^{it}) = 0, \quad \psi_\lambda(e^{it}) = \chi_{[0, \lambda)}(e^{it}) \quad (0 < \lambda \leqslant 2\pi).$$

Таким образом, $\psi_\lambda(e^{it})$ при любом $\lambda \in [0, 2\pi]$ принадлежит классу $\hat{K}$. Поэтому мы можем сопоставить функции $\psi_\lambda(e^{it})$ оператор

$$E_\lambda = \psi_\lambda(U) \quad (E_0 = 0, \ E_{2\pi} = I).$$

Так как E_λ — самосопряженный оператор и $E_\lambda^2 = E_\lambda$, то это проектирующий оператор. Если $0 \leqslant \lambda < \mu \leqslant 2\pi$, то

$$\psi_\mu(e^{it}) \geqslant \psi_\lambda(e^{it}) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi);$$

поэтому

$$E_\lambda \leqslant E_\mu,$$

т. е. мы имеем монотонную (неубывающую) последовательность ортопроекторов. Докажем теперь, что

$$E_{\lambda-0} = E_\lambda \quad (0 < \lambda \leqslant 2\pi). \tag{2}$$

Так как при $0 < \varepsilon < \lambda$

$$E_\lambda - E_{\lambda-\varepsilon} = \psi_\lambda(U) - \psi_{\lambda-\varepsilon}(U) = \chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda)}(U),$$

то нам достаточно доказать, что $\chi_{[\lambda-\varepsilon_n, \lambda)}(U) \to 0$ при $\varepsilon_n \searrow 0$. Для этого возьмем равенство (1) при $\alpha = \lambda - \varepsilon_n$. В силу сказанного выше, существует монотонно убывающая последовательность квазиполиномов $P_n(e^{it})$, сходящаяся к $\chi_{[\lambda]}(e^{it})$; при достаточно малом $\varepsilon_n > 0$ мы, очевидно, будем иметь неравенство

$$\chi_{[\lambda-\varepsilon_n, \lambda]}(e^{it}) \leqslant P_n(e^{it}) + \frac{1}{n} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Следовательно,

$$\chi_{[\lambda]}(U) \leqslant \chi_{[\lambda-\varepsilon_n, \lambda]}(U) \leqslant P_n(U) + \frac{1}{n} I,$$

а так как правая часть при $n \to \infty$ стремится к $\chi_{[\lambda]}(U)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[\lambda-\varepsilon_n, \lambda)}(U) = \lim_{n\to\infty} \chi_{[\lambda-\varepsilon_n, \lambda]}(U) - \chi_{[\lambda]}(U) = 0,$$

и соотношение (2) установлено.

Таким образом, E_λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi)$ представляет некоторое разложение единицы. Остается доказать, что оно порождает спектральное разложение рассматриваемого унитарного оператора U. С этой целью заметим, что при фиксированном целом r, любом $t \in [0, 2\pi]$ и любом подразделении

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 2\pi$$

справедливо неравенство

$$|e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})]| \leqslant |r| \max_s (t_s - t_{s-1}). \quad (3)$$

Действительно, если $t_{s-1} \leqslant t < t_s$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, то левая часть написанного неравенства есть

$$|e^{irt} - e^{irt_{s-1}}| = 2\left|\sin \frac{r(t - t_{s-1})}{2}\right| \leqslant |r| \cdot |t_s - t_{s-1}|.$$

Если $t = 2\pi$, то левая часть (3) обращается в 0; поэтому неравенство (3) верно и при $t = 2\pi$.

Если подразделение имеет достаточно малый диаметр, то мы получим, что всюду в интервале $[0, 2\pi]$

$$\overline{\left\{e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})]\right\}} \times$$
$$\times \left\{e^{irt} - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} [\psi_{t_k}(e^{it}) - \psi_{t_{k-1}}(e^{it})]\right\} \leqslant \varepsilon^2.$$

Переходя к операторам, находим, что

$$0 \leqslant \left\{U^r - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}})\right\}^* \left\{U^r - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}})\right\} \leqslant \varepsilon^2 I$$

или

$$\left\| U^r - \sum_{k=1}^{n} e^{irt_{k-1}} (E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) \right\| \leqslant \varepsilon,$$

Откуда в пределе получаем

$$U^r = \int_0^{2\pi} e^{irt} dE_t \; (\pm r = 0, 1, 2 \dots),$$

а это при $r = 1$ и есть спектральное разложение оператора U.

Так как $E_\lambda = \psi_\lambda(U)$, то из замечания в конце n° 77 следует перестановочность оператора U со своим разложением единицы.

Заметим, что аналогичным методом можно было бы вывести спектральное разложение ограниченного самосопряженного оператора. Однако в этом нет надобности, так как, имея спектральное разложение унитарного оператора, можно получить спектральное разложение любого самосопряженного оператора с помощью так называемого преобразования Кэли, что и будет нами сделано в n° 79.

В качестве приложения наших построений докажем следующую теорему: *пусть последовательность унитарных операторов* $\{U_n\}_1^\infty$ *сильно сходится к унитарному оператору* U, *для которого точка* 1 *не является собственным значением; в таком случае при любом* λ $(0<\lambda<2\pi)$, *для которого* $e^{i\lambda}$ *не есть собственное значение оператора* U, *имеет место в сильном смысле соотношение*

$$E_\lambda^{(n)} \to E_\lambda,$$

где $E_t^{(n)}$ — *спектральная функция оператора* U_n, *а* E_t — *спектральная функция оператора* U.

В самом деле, рассмотрим непрерывную на единичной окружности $\zeta = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, функцию

$$\omega(e^{it}) = \psi_\lambda(e^{it})(e^{it} - e^{i\lambda})(e^{it} - 1).$$

Положим

$$B_n = (U_n - e^{i\lambda}I)(U_n - I),$$
$$B = (U - e^{i\lambda}I)(U - I).$$

Так как по условию теоремы имеют место в сильном смысле соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \omega(U_n) = \omega(U) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

и так как

$$\psi_\lambda(U) = E_\lambda, \quad \psi_\lambda(U_n) = E_\lambda^{(n)},$$

то при любом $f \in \mathrm{H}$

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} B_n f = E_\lambda B f.$$

С другой стороны,

$$\| E_\lambda^{(n)} Bf - E_\lambda Bf \| \leqslant \| E_\lambda^{(n)} (B - B_n) f \| + \| E_\lambda^{(n)} B_n f - E_\lambda B f \|.$$

Поэтому мы заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} Bf = E_\lambda Bf. \tag{4}$$

На основании условия теоремы оператор B^{-1} определен на плотном в H многообразии Δ_B. Для любого g из этого многообразия найдем в силу (4)

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} g = \lim_{n\to\infty} E_\lambda^{(n)} BB^{-1} g = E_\lambda BB^{-1} g = E_\lambda g.$$

Окончание доказательства теоремы очевидно.

79. Преобразование Кэли. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, а z — какое-нибудь невещественное число; пусть h пробегает D_A и пусть

$$(A-\bar{z}I)h=f, \tag{1}$$

$$(A-zI)h=g. \tag{2}$$

Вектор f будет пробегать некоторое линейное многообразие F, а вектор g — некоторое линейное многообразие G. Докажем, что F и G замкнуты и, следовательно, являются подпространствами в H. С этой целью положим, что

$$f_n=(A-\bar{z}I)h_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и

$$f_n\to f. \tag{3}$$

Если $z=x+iy$, $y\neq 0$, то

$$f_n=(A-xI)h_n+iyh_n$$

и, значит,

$$\|f_n-f_m\|^2=\|(A-xI)(h_n-h_m)\|^2+y^2\|h_n-h_m\|^2.$$

Поэтому из (3) следует, что существуют

$$\lim_{n\to\infty}(A-xI)h_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}h_n.$$

Обозначая второй из этих пределов через h, мы заключаем на основании замкнутости оператора A, что

$$f=(A-xI)h+iyh=(A-\bar{z}I)h.$$

Следовательно, $f\in$ F, т. е. многообразие F замкнуто. Аналогично доказывается замкнутость G.

С помощью соотношения (1) многообразие D_A отображается взаимно однозначно на F, а с помощью (2) на G. Поэтому для любого $f\in$ F найдется один и только один элемент $h\in D_A$, удовлетворяющий соотношению (1). Найдя этот элемент h, определим по формуле (2) элемент g. Таким образом, каждому элементу $f\in$ F однозначно сопоставляется элемент $g\in$ G, т. е. мы имеем некоторый оператор V с областью определения $D_V=$ F и областью значений $\Delta_V=$ G:

$$g=Vf.$$

Легко видеть, что V есть оператор изометрический. Действительно, он линеен и

$$\|f\|^2=\|(A-xI)h\|^2+y^2\|h\|^2=\|g\|^2.$$

Изометрический оператор V называют *преобразованием Кэли* симметрического оператора A.

Мы будем полагать $z = i$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$(A + iI)\,h = f, \tag{1'}$$

$$(A - iI)\,h = g = Vf. \tag{2'}$$

Из этих соотношений следует, что

$$h = \frac{1}{2i}(f - g) = \frac{1}{2i}(I - V)\,f,$$

$$Ah = \frac{1}{2}(f + g) = \frac{1}{2}(I + V)\,f.$$

Поэтому

$$Ah = i\,(I + V)\,(I - V)^{-1}h. \tag{4}$$

Так выражается симметрический оператор A через его преобразование Кэли V.

Заметим, что преобразование Кэли самосопряженного оператора есть оператор унитарный. Следующая теорема показывает, что справедливо и обратное. Попутно получается новый вывод спектрального разложения самосопряженного оператора, установленного в n° 75.

Теорема 1. *Пусть преобразование Кэли симметрического оператора A есть унитарный оператор U с разложением единицы $F_s\,(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$. В таком случае оператор A самосопряжен, и ему принадлежит разложение единицы $E_t = F_s$, $t = -\operatorname{ctg}\frac{s}{2}$. Это значит, что область определения D_A оператора A есть совокупность всех тех векторов h, для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\,(E_t h,\ h) < \infty,$$

и оператор A допускает представление

$$Ah = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t h.$$

Доказательство. Пусть $h \in D_A$, а f — тот элемент, который отвечает элементу h в силу отображения (1′), т. е.

$$h = \frac{1}{2i}(I - U)\,f.$$

В таком случае

$$F_s h = \frac{1}{2i}(I - U)\,F_s f = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(1 - e^{i\tau})\,d_\tau (F_\tau F_s f) = \frac{1}{2i}\int_0^{s}(1 - e^{i\tau})\,dF_\tau f \tag{5}$$

и

$$(F_s h, h) = \frac{1}{4}(\{I - U\} F_s f, \{I - U\} f) = \frac{1}{4}(\{I - U^{-1}\}\{I - U\} F_s f, f) =$$

$$= \frac{1}{4}(\{2I - U - U^{-1}\} F_s f, f) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(2 - e^{i\tau} - e^{-i\tau})\, d_\tau (F_\tau F_s f, f) =$$

$$= \int_0^s \sin^2\frac{\tau}{2}\, d(F_\tau f, f). \tag{6}$$

С другой стороны,

$$Ah = \frac{1}{2}(I + U) f = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + e^{is})\, dF_s f \tag{7}$$

и

$$\| Ah \|^2 = \frac{1}{4}(\{I + U\} f, \{I + U\} f) = \frac{1}{4}(\{2I + U + U^{-1}\} f, f) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{s}{2}\, d(F_s f, f). \tag{8}$$

Сравнение (6) и (8) показывает, что

$$\| Ah \|^2 = \int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{s}{2}\sin^2\frac{s}{2}\, d(F_s f, f) = \int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{s}{2}\, d(F_s h, h).$$

Равным образом из (5) и (7) следует, что при любом $h' \in \mathrm{H}$

$$(Ah, h') = -\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\, d(F_s h, h').$$

Положим теперь

$$t = -\operatorname{ctg}\frac{s}{2}, \quad E_t = F_s.$$

Если мы докажем, что E_t является разложением единицы на всей оси $[-\infty, \infty]$, то полученный нами результат сведется к тому, что из включения $h \in \mathrm{D}_A$ следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t h, h) < \infty \tag{9}$$

и представление

$$Ah = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t h. \tag{10}$$

Для доказательства заметим, что $z = 1$ не является собственным значением оператора U, так как этот оператор есть преобразование Кэли. Но в таком случае

$$F_{+0} = F_0 = 0, \quad F_{2\pi} = F_{2\pi-0} = I,$$

откуда следует, что

$$E_{-\infty} = F_{+0} = 0, \quad E_\infty = F_{2\pi-0} = I.$$

Что касается условий a, b из определения разложения единицы (см. n° 67), то они, очевидно, также выполнены.

Теперь покажем, что если имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t h, h) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}^2 \frac{s}{2}\, d(F_s h, h) < \infty, \tag{11}$$

то $h \in D_A$.

Итак, пусть (11) имеет место. В таком случае на элементе h определен оператор

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin\frac{s}{2}}\, dF_s.$$

Положим

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin\frac{s}{2}}\, dF_s h = f.$$

Тогда при любом $h' \in H$

$$-\int_0^{2\pi} e^{-\frac{is}{2}} \frac{1}{\sin\frac{s}{2}}\, d(F_s h, h') = (f, h').$$

Беря

$$h' = -\frac{1}{2i}(I - U^{-1}) f',$$

найдем

$$\left(\frac{1}{2i}\{I - U\} f, f'\right) = (f, h') = -\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{is}{2}}}{\sin\frac{s}{2}}\, d(F_s h, \{I - U^{-1}\} f') =$$

$$= -\frac{1}{2i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{is}{2}}}{\sin\frac{s}{2}}(1-e^{is})\,d(F_s h, f') = \int\limits_0^{2\pi} d(F_s h, f') = (h, f').$$

В силу произвольности элемента f' это означает, что

$$h = \frac{1}{2i}(I-U)f;$$

иными словами, элемент h допускает представление, из которого следует, что он принадлежит D_A.

Таким образом, спектральное разложение оператора A и область определения D_A определяются разложением единицы E_t по формулам (10) и (9), а потому в силу теоремы конца n° 72 оператор A самосопряжен.

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — последовательность произвольных самосопряженных операторов, для которой на некотором плотном множестве существует в сильном смысле $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, и замыкание этого предельного оператора есть самосопряженный оператор A с разложением единицы E_t. В таком случае в каждой точке μ, которая не является собственным значением оператора A, имеет место в сильном смысле соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu^{(n)} = E_\mu,$$

где $E_\mu^{(n)}$ — разложение единицы оператора A_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Перейдем от рассматриваемых самосопряженных операторов к их преобразованиям Кэли — унитарным операторам

$$U_n = (A_n - iI)(A_n + iI)^{-1}, \quad U = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

Разложение единицы операторов U_n, U получаются по формулам

$$F_s^{(n)} = E_t^{(n)}, \quad F_s = E_t, \quad t = -\operatorname{ctg}\frac{s}{2}.$$

Точка $e^{i\lambda} = \frac{\mu - i}{\mu + i}$ в силу условия теоремы не будет собственным значением оператора U, а точка 1 не является собственным значением ни одного из операторов U_n, U по свойству преобразования Кэли. Поэтому применима теорема конца n° 78, в силу которой в сильном смысле

$$\lim_{n\to\infty} F_\lambda^{(n)} = F_\lambda,$$

а значит, в том же смысле

$$\lim_{n\to\infty} E_\mu^{(n)} = E_\mu.$$

Теорема доказана.

80. О перестановочных операторах. В n° 17 было дано определение перестановочности двух операторов S и T, из которых по крайней мере один (пусть это будет S) задан всюду в H. В силу этого определения перестановочность означает, что из включения $f \in D_T$ следует включение $Sf \in D_T$ и равенство

$$STf = TSf.$$

Теперь мы примем в качестве оператора T некоторый самосопряженный оператор A. Оператор же S по-прежнему будет произвольным, определенным всюду в H ограниченным оператором.

Теорема. *Перестановочность операторов S и A эквивалентна перестановочности оператора S с разложением единицы E_t оператора A при любом t.*

Доказательство. Пусть операторы S и A перестановочны. Тогда при любом невещественном z и любом $f \in D_A$

$$S(A - zI)f = (A - zI)Sf.$$

Вектор f пробегает D_A, если он имеет вид $R_z h$, где h пробегает H, а R_z есть резольвента оператора A. Таким образом, для любого $h \in$ H

$$S(A - zI)R_z h = (A - zI)SR_z h,$$

откуда

$$Sh = (A - zI)SR_z h$$

и, значит,

$$R_z Sh = SR_z h.$$

В силу интегрального представления резольвенты из этого неравенства вытекает при любом $g \in$ H следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - z}\, d(E_t Sh,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - z}\, d(SE_t h,\ g).$$

Так как это отношение имеет место для любого невещественного z, то в силу уже применявшейся аргументации (см. n° 74) при любом t

$$E_t S = SE_t.$$

Рассматривая написанные нами формулы в обратном порядке, завершим доказательство теоремы.

81. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов. Пусть T — ограниченный нормальный оператор. Введем его вещественную и мнимую компоненты

$$A=\frac{1}{2}(T+T^*), \qquad B=\frac{1}{2i}(T-T^*),$$

которые являются перестановочными, ограниченными, самосопряженными операторами. Таким образом,

$$T=A+iB. \tag{1}$$

Пусть

$$A=\int_a^b s\,dE_s, \quad B=\int_c^d t\,dF_t$$

— интегральные представления операторов A, B. Согласно условию

$$E_sF_t=F_tE_s \qquad (a\leqslant s\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d).$$

Это соотношение показывает, что зависящий от двух параметров оператор

$$\mathscr{E}_{st}=E_sF_t$$

является (см. теорему 1 n° 37) проектирующим оператором (ортопроектором). Каждому прямоугольнику $Q=\Delta'\times\Delta''$, где $\Delta'\subset\subset[a, b]$, $\Delta''\subset[c, d]$, мы можем сопоставить оператор

$$E(\Delta')\,F(\Delta'')=\mathscr{E}(Q),$$

который, очевидно, также является ортопроектором. Если мы обозначим буквой R прямоугольник, определяемый неравенствами $a\leqslant s\leqslant b$, $c\leqslant t\leqslant d$, то при любом $f\in H$ сможем написать следующие представления:

$$Af=\int_a^b s\,dE_sf=\int_a^b s\,dE_s\int_c^d dF_tf=\iint_R s\,d\mathscr{E}_{st}f,$$

$$Bf=\int_c^d t\,dF_tf=\int_c^d t\,dF_t\int_a^b dE_sf=\iint_R t\,d\mathscr{E}_{st}f.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем следующее интегральное представление для Tf:

$$Tf=\iint_R (s+it)\,d\mathscr{E}_{st}f. \tag{2}$$

Таким образом, спектральное разложение нормального оператора получено. Из этого разложения (2), между прочим, вытекает, что

$$\|Tf\|^2=\iint_R (s^2+t^2)\,d(\mathscr{E}_{st}f, f).$$

Обоснование выполненных выше преобразований не представляет труда, если определять кратный интеграл (2) как сильный предел соответствующих векторных интегральных сумм вида

$$\sum_{j,\,k} (s_j + it_k)\,\mathscr{E}(Q_{jk})\,f,$$

где $Q_{jk} = \Delta_j' \times \Delta_k''$. С помощью приема, примененного впервые в n° 71, можно, сверх того, показать, что операторные суммы

$$\sum_{j,\,k} (s_j + it_k)\,\mathscr{E}(Q_{jk})$$

равномерно сходятся к оператору T, так что можно писать

$$T = \iint\limits_R (s + it)\,d\mathscr{E}_{st}.$$

Семейство операторов $\mathscr{E}_{st}$, представляющее двумерный аналог разложения единицы, обладает по отношению к оператору T рядом свойств, аналогичных тем, которые по отношению к самосопряженному оператору имеют одномерное разложение единицы. В частности,

1°. При любом $Q = [s',\ s'') \times [t',\ t'') \subset R$ подпространство $\mathscr{E}(Q)\,\mathrm{H}$ приводит оператор T.

2°. Если $f \in \mathscr{E}(Q)\,\mathrm{H}$, то

$$s' \leqslant \Re(Tf,\ f) \leqslant s'',\quad t' \leqslant \Im(Tf,\ f) \leqslant t''.$$

Заканчивая настоящий пункт, заметим, что унитарный оператор U является нормальным. Поэтому он обладает представлением (2). Однако из равенства $\|Uf\| = \|f\|$, которое имеет место при любом $f \in \mathrm{H}$, нетрудно вывести, что $\mathscr{E}(Q) = 0$ всякий раз, когда прямоугольник Q не имеет общих точек с окружностью $s^2 + t^2 = 1$. Это дает возможность преобразовать двойной интеграл (2) в интеграл по единичной окружности в полном соответствии с полученным выше спектральным разложением унитарного оператора.

82. Спектр самосопряженного и унитарного операторов. Пусть E_t — некоторое разложение единицы. Мы будем считать, что интервалом изменения t является вся числовая ось. Действительно, если t изменяется в интервале $[\alpha,\ \beta]$, отличном от всей оси, то мы можем продолжить E_t за пределы этого интервала, полагая $E_t = I$ при $t \geqslant \beta$ и $E_t = 0$ при $t < \alpha$.

Будем называть точку t *точкой постоянства* разложения единицы, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $E_{t+\varepsilon} - E_{t-\varepsilon} = 0$, и *точкой роста* в противном случае. Естественно, далее, точку t считать *точкой разрыва* (скачка), если $E_{t+0} - E_t \neq 0$, и *точкой непрерывности*, если $E_{t+0} - E_t = 0$. (Напомним, что по определению, $E_{t-0} - E_t = 0$ всегда).

Лемма. *Если E_t есть разложение единицы самосопряженного оператора A, то:*

a) *вещественное число λ является регулярной точкой оператора A в том и только том случае, когда λ есть точка постоянства E_t;*

b) *число λ является собственным значением оператора A в том и только том случае, когда λ есть точка скачка E_t.*

Чтобы доказать утверждение a, напишем равенство

$$\|(A-\lambda I)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f), \tag{1}$$

верное для любого $f\in D_A$.

Если λ — точка постоянства разложения единицы, то функция $(E_tf,\,f)$ постоянна в некоторой окрестности точки λ. Пусть ε — радиус этой окрестности. Тогда из (1) вытекает неравенство

$$\|(A-\lambda I)f\|^2\geqslant\int_{-\infty}^{\lambda-\varepsilon}+\int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f)\geqslant\varepsilon^2(f,\,f).$$

Это неравенство означает, что λ есть регулярная точка оператора A.

Обратно, если λ — регулярная точка, то при некотором $\varepsilon>0$ и любом $f\in D_A$

$$\|(A-\lambda I)f\|\geqslant\varepsilon\|f\|,$$

и, значит, при любом $f\in D_A$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^2\,d(E_tf,\,f)\geqslant\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}d(E_tf,f). \tag{2}$$

Допуская, что λ не есть точка постоянства для разложения единицы оператора A, выберем элемент g и некоторое положительное $\eta<\varepsilon$ так, чтобы

$$(E_{\lambda+\eta}-E_{\lambda-\eta})g\neq 0,$$

и применим неравенство (2) к элементу

$$f=(E_{\lambda+\eta}-E_{\lambda-\eta})g,$$

который, как известно, принадлежит D_A. Мы получим неравенство

$$\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta}(t-\lambda)^2\,d(E_tg,\,g)\geqslant\varepsilon^2\int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta}d(E_tg,\,g),$$

невозможность которого показывает, что утверждение a) верно.

Перейдем к доказательству утверждения b).

Пусть λ есть собственное значение оператора A и f — принадлежащий ему собственный вектор. В таком случае

$$0 = \|(A - \lambda I) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda)^2 \, d(E_t f, f).$$

Это равенство показывает, что единственной точкой роста функции $(E_t f, f)$ может быть точка $t = \lambda$. А так как

$$0 \neq (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, f),$$

то точка $t = \lambda$ не только может быть точкой роста, но и обязательно ею будет. Но изолированная точка роста есть точка скачка, следовательно,

$$(E_{\lambda+0} f, f) \neq (E_\lambda f, f)$$

и, значит $E_{\lambda+0} \neq E_\lambda$. Обратно, пусть точка λ такова, что $E_{\lambda+0} \neq E_\lambda$. Это значит, что для некоторого вектора g

$$(E_{\lambda+0} - E_\lambda) g = f \neq 0.$$

Вектор f принадлежит D_A и

$$\|(A - \lambda I) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda)^2 \, d(E_t f, f).$$

Но функция

$$(E_t f, f) = (E_t \{E_{\lambda+0} - E_\lambda\} g, f)$$

равно нулю при $t < \lambda$ и не зависит от t при $t > \lambda$. Следовательно,

$$\|(A - \lambda I) f\| = 0,$$

т. е. λ есть собственное значение оператора A.

Лемма доказана.

Тривиальным следствием наших рассмотрений является то, что спектр всякого самосопряженного оператора есть множество непустое.

Из приведенных выше рассуждений также вытекает, что если λ есть собственное значение оператора A, то $(E_{\lambda+0} - E_\lambda) H$ есть соответствующее собственное подпространство.

Используя формулу (1), можно получить следующую теорему, которая содержит в качестве частного случая доказанное выше утверждение а). В формулировке этой теоремы каждое собственное значение при подсчете количества точек спектра учитывается столько раз, какова его кратность.

Теорема 1. *Количество r ($r \leqslant \infty$) точек спектра самосопряженного оператора A, лежащих в интервале $\Delta = [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$,* *равно максимальной размерности s $(s \leqslant \infty)$ линейных многообразий $G \subset D_A$, на которых выполнено неравенство*

$$-\delta(g, g) \leqslant (Ag - \lambda_0 g, g) < \delta(g, g). \tag{3}$$

Доказательство. Так как в качестве G можно, в частности, взять подпространство $E(\Delta)$ H, размерность которого равна r, то должно быть $r \leqslant s$. Предположив, что $r < s$, легко придем к противоречию. Действительно, в этом случае существует многообразие $G \subset D_A$, на котором выполнено неравенство (3) и размерность которого больше $r = \dim E(\Delta)$ H. Поэтому в G найдется вектор $g \neq 0$, ортогональный к $E(\Delta)$ H. Но для такого вектора будет выполняться одно из неравенств $(Ag - \lambda_0 g, g) \geqslant \delta(g, g)$, $(Ag - \lambda_0 g, g) < -\delta(g, g)$, а каждое из них несовместимо с (3).

Совершенно аналогично устанавливается.

Теорема 2. *Количество точек спектра самосопряженного оператора A, лежащих левее данной точки λ_0, равно максимальной размерности линейных многообразий $G \subset D_A$, на которых выполнено неравенство*

$$(Af - \lambda_0 f, f) < 0.$$

Переходя от самосопряженного оператора к унитарному оператору, припомним, что всякое собственное значение унитарного оператора по модулю равно единице, т. е. имеет вид $e^{i\lambda}$, где λ называют *собственной частотой* унитарного оператора. При этом для любого целого k будет иметь место равенство

$$U^k f = e^{ik\lambda} f,$$

если f есть собственный вектор, принадлежащий собственной частоте λ.

В континуальном случае, когда рассматривается непрерывная группа унитарных операторов U_s $(-\infty < s < \infty)$, число λ называют собственной частотой этой группы, если существует такой элемент $f \neq 0$ (собственный вектор), что при любом вещественном s

$$U_s f = e^{is\lambda} f.$$

Докажем, что *вещественное число λ является собственной частотой унитарного оператора U (соответственно непрерывной группы унитарных операторов U_s) в том и только том случае, если λ есть точка скачка разложения единицы.*

Для определенности рассмотрим случай группы унитарных операторов. Пусть λ есть ее собственная частота, а f — собственный вектор, так что при любом вещественном s

$$U_s f - e^{is\lambda} f = 0.$$

Так как

$$\|(U_s - e^{is\lambda}I)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ist} - e^{is\lambda}|^2 \, d(E_t f, f) =$$

$$= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{s(\lambda - t)}{2} \, d(E_t f, f),$$

то единственной точкой роста функции $(E_t f, f)$ может быть $t = \lambda$; эта точка и должна быть точкой роста, ибо в противном случае не могло бы иметь место неравенство

$$0 \neq (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E_t f, f).$$

Следовательно,

$$(E_{\lambda+0} f, f) \neq (E_\lambda f, f),$$

и, значит,

$$E_{\lambda+0} \neq E_\lambda.$$

Мы замечаем, что роль неотрицательного множителя $(\lambda - t)^2$ (в случае самосопряженного оператора) теперь играет $4 \sin^2 \frac{s(\lambda - t)}{2}$. В остальном нет разницы в доказательстве. Это относится и к доказательству второй части утверждения.

Так как разложение единицы самосопряженного или унитарного оператора вполне определяет спектр этого оператора, то разложение единицы часто называют *спектральной функцией*.

О принадлежности данной точки λ к спектру самосопряженного оператора A можно также судить по поведению его резольвенты R_z в окрестности точки λ.

Вот относящееся сюда предложение: *вещественная точка λ не принадлежит спектру самосопряженного оператора A и, следовательно, является регулярной точкой этого оператора в том и только том случае, когда для любого элемента $f \in H$ функция $(R_z f, f)$, во-первых, регулярна в некоторой окрестности точки λ и, во-вторых, принимает вещественные значения в некотором интервале $\lambda - \delta < t < \lambda + \delta$.*

Необходимость этих условий вытекает из интегрального представления резольвенты и из условия а). Достаточность следует из формулы обращения Стилтьеса (см. п° 69) и из условия а).

В п° 83 мы познакомимся с классом операторов, для которых указанные условия достаточно проверить лишь для одного (специальным образом выбранного) элемента f.

83. Простой спектр. В линейной алгебре и теории интегральных уравнений спектр оператора называют *простым*, если кратность каждого собственного значения этого оператора равна единице. Это определение не переносится на произвольные операторы в пространстве Гильберта, так как, вообще говоря, совокупность собственных значений оператора не исчерпывает его спектр. Если рассматривается случай сепарабельного пространства, то в полном согласии с элементарным определением, принятым в линейной алгебре, находится следующее

Определение. *Спектр самосопряженного (соответственно унитарного) оператора называется простым, если существует такой вектор* $g \in \mathrm{H}$ *(порождающий вектор), что плотна в* H *линейная оболочка множества векторов* $E(\Delta)g$, *где* Δ *пробегает совокупность всех интервалов числовой оси (соответственно, отрезка* $[0,2\pi]$).

В силу этого определения спектры самосопряженного оператора и его преобразования Кэли одновременно просты или непросты.

В несепарабельном пространстве порождающий вектор не может существовать, так что при переходе к несепарабельному пространству понятие о простом спектре подлежит дальнейшему обобщению. Это обобщение выходит за рамки настоящей книги[1]. Поэтому во всем дальнейшем, когда речь идет об операторе с простым спектром, пространство предполагается сепарабельным и это специально не оговаривается. Кроме того, из данного определения следует, что в несепарабельном пространстве самосопряженный (унитарный оператор) не может иметь простой спектр.

Для оператора, с которым имеет дело линейная алгебра и теория интегральных уравнений, характерно, что линейная оболочка совокупности всех его собственных векторов совпадает с пространством или, во всяком случае, плотна в нем. Нетрудно показать, что для произвольного самосопряженного (или унитарного) оператора в H, обладающего этим свойством, принятое нами теперь новое определение простоты спектра находится в полном согласии с упомянутым в начале настоящего пункта элементарным определением. Это обстоятельство можно рассматривать как оправдание данного нами общего определения.

Рассмотрим в качестве примера оператор умножения $\mathfrak{Q}$ в $L_\sigma^2(-\infty, \infty)$ (см. п° 54). Спектральная функция E_t этого оператора определяется равенством

$$E(\Delta) f(t) = \chi_\Delta(t) f(t) \quad (f(t) \in L_\sigma^2),$$

где $\chi_\Delta(t)$ есть характеристическая функция интервала Δ. Чтобы в этом убедиться достаточно вспомнить теорему 2 п° 75. Оператор $\mathfrak{Q}$

[1] Мы можем по этому поводу отослать читателя к книге: Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. М., «Наука», 1965.

имеет простой спектр. В самом деле, возьмем кусочно-постоянную функцию $g(t)$, удовлетворяющую условиям

$$g(t) = \alpha_k > 0 \quad (k-1 \leqslant t < k),$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^2 \{\sigma(k) - \sigma(k-1)\} < \infty.$$

Эта функция является порождающей функцией для оператора $\mathfrak{Q}$ в смысле нашего определения. Действительно, линейная оболочка множества функций $E(\Delta)\,g(t)$ совпадает с совокупностью всех финитных кусочно-постоянных функций, а эта совокупность плотна в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ (см. п° 14).

Очевидно, функция, равная нулю на множестве положительной σ-меры, не может быть порождающей для оператора $\mathfrak{Q}$.

Наоборот, в качестве порождающего элемента можно взять любую функцию $g(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, отличную от нуля всюду, за возможным исключением множества нулевой σ-меры.

Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что любую функцию $f(t)$ из $L^2_\sigma(a, b)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать произведениями вида $g(t)\,q(t)$, где $q(t)$ — кусочно-постоянная функция:

$$\int_a^b |f(t) - g(t)\,q(t)|^2\, d\sigma(t) < \varepsilon^2. \tag{1}$$

Введем пространство $\mathrm{L}^2_\rho(a, b)$, где

$$\rho(t) = \int_a^t |g(s)|^2\, d\sigma(s). \tag{2}$$

Функция $\frac{f(t)}{g(t)}$ принадлежит $\mathrm{L}^2_\rho(a, b)$; поэтому существует такая кусочно-постоянная функция $q(t)$, что

$$\int_a^b \left|\frac{f(t)}{g(t)} - q(t)\right|^2 d\rho(t) < \varepsilon^2.$$

Отсюда после замены $\rho(t)$ по формуле (2) и получаем (1).

Теорема 1. *Если спектр унитарного оператора U прост и g есть какой-нибудь порождающий элемент, то линейная оболочка векторов $U^k g$ ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) плотна в* H.

Обратно, если существует такой вектор g, что линейная оболочка векторов $U^k g$ ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) плотна в H, *то спектр оператора U прост и вектор g является порождающим элементом.*

Доказательство. Пусть спектр оператора U прост и пусть g — какой-нибудь порождающий элемент. Допуская, что линейная оболочка множества векторов $U^k g$ $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ не плотна в H, возьмем вектор $h \neq 0$, для которого

$$(U^k g, h) = 0 \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

В силу интегрального представления унитарного оператора отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d(E_t g, h) = 0 \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этих равенств на основании теоремы единственности вытекает, что

$$(E_t g, h) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

и, значит, вектор h ортогонален каждому вектору вида $E(\Delta)g$, а это противоречит тому, что g — порождающий элемент. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается так же просто.

Теорема 2 (каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром). *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром, g — какой-нибудь порождающий элемент и $\sigma(t) = (E_t g, g)$. В таком случае формула*

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g \tag{3}$$

относит каждой функции $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ вектор $f \in$ H, и это соответствие является изометрическим отображением $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ на H.

Оно переводит область определения $D_{\mathfrak{A}}$ оператора умножения $\mathfrak{A}$ в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ в область определения D_A оператора A, и если элементу $f \in D_A$ отвечает функция $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, то элементу Af отвечает функция $tf(t)$.

Доказательство. Обозначим через G совокупность всех векторов из H, допускающих представление (3). G есть линейное многообразие, содержащее все векторы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t)\, dE_t g = E(\Delta) g,$$

и поэтому G плотно в H. Если $f(t)$ принадлежит введенному в n°72 множеству функций (например, непрерывна), то

$$(E_t g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(s)}\, d_s(E_t g, E_s g) = \int_{-\infty}^{t} \overline{f(s)}\, d(E_s g, g)$$

и

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d(E_t g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d(E_t g, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t).$$

Таким образом, линейное многообразие функций, плотное в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, формулой (3) изометрически переводится в некоторое линейное многообразие, плотное в G. Из полноты $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ поэтому вытекает замкнутость G и, следовательно, G совпадает с H, т. е. первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заставим $f(t)$ пробегать совокупность всех финитных непрерывных функций. Если $f(t)$ — такая функция и f — отвечающий ей вектор из H, то $f \in D_A$ и в силу (3) при любом $h \in H$

$$(Af, h) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(E_t f, h) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(f, E_t h) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t\, d\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, d_s(E_s g, E_t h)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t\, d\left\{\int_{-\infty}^{t} f(s)\, d(E_s g, h)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, d(E_t g, h). \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dE_t g, \tag{5}$$

а полагая в (4)

$$h = Af,$$

получим

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | t f(t) |^2 d\sigma(t). \tag{6}$$

Припоминая определение операторного интеграла (n° 72), мы заключаем на основании формул (5) и (6), что принадлежность к области $D_{\mathfrak{A}}$ произвольной функции $f(t) \in D^2_\sigma(-\infty, \infty)$ имеет место в том и только том случае, когда $f \in D_A$, а также что применению оператора A к вектору f отвечает умножение функции $f(t)$ на t.

В силу доказанной теоремы любой самосопряженный оператор с простым спектром изоморфен оператору умножения на независимую переменную в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, который и принимается в качестве *канонической формы* оператора A.

В силу этого изоморфизма из

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g \tag{3}$$

следует

$$E(\Delta) f = \int_{\Delta} f(t)\, dE_t g \tag{3'}$$

сначала для финитных непрерывных функций $f(t)$, а затем для любых $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Беря в (3) различные порождающие элементы g, мы получим целый класс операторов умножения, изоморфных A. Характеристикой всех функций распределения $\sigma(t) = (E_t g, g)$ мы займемся в n° 84.

Здесь же отметим одно общее свойство всех порождающих элементов g: каждая точка роста спектральной функции E_t является точкой роста функции $(E_t g, g)$. Справедливость этого утверждения следует из того, что если Δ_0 — интервал постоянства функции $(E_t g, g)$, то линейная оболочка множества векторов $E(\Delta) g$, где Δ пробегает совокупность всех интервалов числовой оси, ортогональна к подпространству $E(\Delta_0)$ H.

Отсюда, между прочим, и вытекает, что указанный в конце n° 82 критерий принадлежности данной точки λ к спектру самосопряженного оператора A в случае простоты спектра этого оператора достаточно проверить лишь для какого-нибудь одного порождающего элемента.

Закончим настоящий пункт одним предложением относительно самосопряженных операторов, которое аналогично теореме 1.

Теорема 3. *Если самосопряженный оператор A имеет простой спектр, то существует вектор h, на котором имеют смысл все натуральные степени оператора A, такой, что линейная оболочка множества векторов $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в* H.

Обратно, если на некотором векторе h имеют смысл все натуральные степени оператора A, и если линейная оболочка множества векторов $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в H, *то спектр оператора A простой, а вектор h является порождающим.*

Доказательство второй части очень просто. Действительно, пусть линейная оболочка множества $A^k h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ плотна в H. Интегральное представление

$$(A^k h, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, d(E_t h, f)$$

показывает, что не существует вектора $f \neq 0$, ортогонального $E_t h$ при любом t. Следовательно, линейная оболочка множества $E(\Delta)h$ плотна в H, т. е. спектр оператора A прост и h есть порождающий элемент.

Переходя к первой части теоремы, докажем, что в качестве вектора h можно взять

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dE_t g,$$

где g — какой-нибудь порождающий элемент оператора A. Действительно,

$$A^k h = \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2}\, dE_t g \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

и если бы существовал вектор $f \neq 0$, ортогональный всем векторам Ah^k, то мы имели бы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} f(t)\, d\sigma(t) = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

где $\sigma(t) = (E_t g,\ g)$, а $f(t)$ определена формулой (3), и

$$0 \neq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d\sigma(t) < \infty. \tag{7}$$

Отсюда, полагая

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, d\sigma(s) - C, \tag{8}$$

мы нашли бы при надлежащем выборе константы C, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} \omega(t)\, dt = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

а это в силу полноты системы функций Чебышева — Эрмита влечет равенство $\omega(t) = 0$, которое на основании (7) и (8) приводит к противоречию;

$$0 \neq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, d\omega(t) = 0.$$

Ортогонализуя последовательность векторов $\{A^k h\}_0^\infty$, мы получим ортонормированный базис $\{e_k\}_0^\infty$, все элементы которого принадлежат D_A. Очевидно, при $i > k+1$

$$(Ae_k,\ e_i) = 0,$$

а так как оператор A симметричен, то это равенство имеет место и при $i < k-1$. Следовательно, матрица $((Ae_k, e_i))_{i,k=0}^{\infty}$ оператора A в базисе $\{e_k\}_0^{\infty}$ является якобиевой матрицей. При этом построенный нами базис есть базис матричного представления оператора A в смысле n° 53.

84. О спектральных типах. Напомним, что мы называем функцией распределения любую непрерывную слева, неубывающую функцию ограниченного изменения, заданную на всей числовой оси.

Если $\sigma(t)$ — такая функция, то $\sigma(\Delta) = \sigma(t'') - \sigma(t')$, где $\Delta = [t', t'')$ является *аддитивной функцией интервала* (мы сохраним также для $\sigma(\Delta)$ название функции распределения).

Условимся говорить, что функция распределения $\sigma(t)$ *подчинена* функции распределения $\rho(t)$, и писать

$$\sigma(t) \prec \rho(t), \tag{1}$$

если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна по отношению к $\rho(t)$, т. е. если при любом $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$\sigma(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi(t)\, d\rho(t),$$

где $\varphi(t)$ — ρ-измеримая неотрицательная функция.

Если одновременно с (1)

$$\rho(t) \prec \sigma(t), \tag{2}$$

то функции распределения $\sigma(t)$ и $\rho(t)$ считаются имеющими одинаковый *спектральный тип*.

Если имеет место (1), но не имеет места (2), то мы будем говорить, что спектральный тип $\sigma(t)$ менее спектрального типа $\rho(t)$.

Пусть теперь A — произвольный самосопряженный оператор и E_t — его спектральная функция.

Функция $(E_t f, f)$ при любом $f \in H$ является, очевидно, функцией распределения.

Спектральный тип функции $(E_t f, f)$ мы будем называть *спектральным типом элемента* f (относительно оператора A), а о спектральных типах элементов f мы будем говорить, что они принадлежат A. Если среди элементов $f \in H$ существует элемент *максимального спектрального типа* относительно A (т. е. такой элемент g, что $(E_t f, f) \prec (E_t g, g)$ при любом $f \in H$, то этот спектральный тип приписывается оператору A.

Если A — самосопряженный оператор с простым спектром, то существуют элементы максимального спектрального типа относительно A. Это вытекает из следующей теоремы, которая вместе с тем дает ответ на вопрос предыдущего пункта о характеристике множества порождающих элементов оператора с простым спектром.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром. Для того чтобы элемент g был порождающим, необходимо и достаточно, чтобы он обладал максимальным спектральным типом относительно A.*

Доказательство. Пусть g есть порождающий элемент, а f — произвольный вектор из H. В таком случае

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g,$$

где $f(t)$ — некоторая функция из $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, а $\sigma(t) = (E_t g, g)$. Вместе с этим соотношением при любом $\Delta \subset [-\infty, \infty]$ имеет место соотношение

$$E(\Delta) f = \int_\Delta f(t)\, dE_t g = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t) f(t)\, dE_t g.$$

Таким образом, при рассматриваемом отображении H на $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ векторам f, $E(\Delta) f$ отвечают функции $f(t)$, $\chi_\Delta(t) f(t)$. В силу изометричности отображения

$$(E(\Delta) f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \chi_\Delta(t)\, d\sigma(t) = \int_\Delta |f(t)|^2\, d\sigma(t).$$

Мы видим, что

$$(E_t f, f) \prec (E_t g, g),$$

т. е. необходимость доказана.

Примем теперь, что g — элемент максимального спектрального типа, так что для любого $f \in$ H

$$(E_t f, f) \prec (E_t g, g).$$

В частности, это соотношение имеет место и для порождающего элемента g_0 (которым оператор A обладает в силу простоты своего спектра), т. е.

$$(E_t g_0, g_0) \prec (E_t g, g).$$

С другой стороны, в силу уже доказанной первой части теоремы,

$$(E_t g, g) \prec (E_t g_0, g_0).$$

Таким образом, элементы g и g_0 имеют один и тот же спектральный тип и, значит,

$$\sigma(\Delta) \equiv (E(\Delta) g, g) = \int_\Delta p^2(t)\, d\sigma_0(t),$$

$$\sigma_0(\Delta) \equiv (E(\Delta) g_0, g_0) = \int_\Delta p_0^2(t)\, d\sigma(t),$$

где функции $p(t) \geqslant 0$ и $p_0(t) \geqslant 0$ принадлежат соответственно $L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\sigma}(-\infty, \infty)$. В силу этих равенств множества нулевой σ-меры и нулевой σ_0-меры совпадают. Кроме того, нетрудно видеть, что всюду, кроме множества σ-меры нуль,

$$p(t)\, p_0(t) = 1.$$

Поэтому каждая из функций $p(t)$, $p_0(t)$ может равняться нулю лишь на множестве нулевой σ-меры.

Мы должны доказать, что g есть порождающий элемент для оператора A, т. е. что выполнение равенства

$$(E(\Delta)\, g,\ h) = 0$$

для любого $\Delta \subset [-\infty, \infty]$ возможно только при $h = 0$. Но в силу изоморфизма между H и $L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$

$$(E(\Delta)\, g,\ h) = \int_\Delta g(t)\, \overline{h(t)}\, d\sigma_0(t),$$

где $g(t)$, $h(t) \in L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$ и $|g(t)| = p(t)$. Следовательно, если g не есть порождающий элемент, то для некоторой функции $h(t) \in L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$ не σ_0-эквивалентной нулю и для любого $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$\int_\Delta g(t)\, \overline{h(t)}\, d\sigma_0(t) = 0$$

или

$$\int_\Delta p(t)\, \overline{h_0(t)}\, d\sigma_0(t) = 0,$$

где $h_0(t)$ определена равенством $g(t)\, \overline{h(t)} = p(t)\, \overline{h_0(t)}$. Это невозможно, так как линейная оболочка сувокупности функций $\chi_\Delta(t)\, p(t)$, как мы показали в n° 83, полотна в $L^2_{\sigma_0}(-\infty, \infty)$, поскольку функция $p(t) \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве нулевой σ_0-меры.

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос: можно ли любую функцию распределения с типом, не превосходящим спектрального типа A, представить в виде $(E_t f, f)$. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром, а $\sigma(t)$ — заданная функция распределения с типом, не превосходящим спектрального типа A. При этих условиях существует вектор $f \in \mathrm{H}$, порождающий эту функцию распределения, т. е. такой, что*

$$\sigma(t) = (E_t f,\ f).$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция распределения $\sigma(t)$ представима в виде

$$\sigma(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi(t)\, d(E_t g,\ g),$$

где g — порождающий элемент, а $\varphi(t) \geqslant 0$, и мы вправе положить

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\varphi(t)}\, dE_t g.$$

Элемент f порождает функцию распределения $\sigma(t)$, так как

$$(E(\Delta) f,\ f) = \int_{\Delta} |f(t)|^2 d(E_t g,\ g) = \sigma(\Delta).$$

85. Кратный спектр. В случае конечномерного пространства общая кратность спектра оператора определяется как максимальная кратность его собственных значений. Это определение, очевидно, не переносится на произвольные операторы в пространстве Гильберта. Мы ограничимся здесь (ср. n° 83) случаем сепарабельного пространства и для определения кратности спектра воспользуемся понятием о порождающем подпространстве.

Подпространство G называется *порождающим подпространством* самосопряженного оператора A со спектральной функцией E_t, если совпадает с H замыкание линейной оболочки множества $\{E(\Delta)\,\mathrm{G}\}$, где Δ пробегает совокупность всех интервалов числовой оси[1].

Определение 1. *Кратностью (или общей кратностью) спектра самосопряженного*[2] *оператора A называется минимальная размерность порождающего подпространства этого оператора. Если у оператора A не существует конечномерных порождающих подпространств, то кратность спектра такого оператора считается бесконечной. Кратностью спектра оператора A в интервале Δ_0 называется общая кратность спектра оператора $E(\Delta_0)\,A$ в подпространстве $E(\Delta_0)\,\mathrm{H}$.*

Легко видеть, что если G — порождающее подпространство оператора $E(\Delta_0)\,A$, то при $\Delta_1 \subset \Delta_0$ подпространство $E(\Delta_1)\,\mathrm{G}$ является порождающим подпространством оператора $E(\Delta_1)\,A$. Поэтому при $\Delta_1 \subset \Delta_0$ кратность спектра оператора A в интервале Δ_1 не превосходит его кратности в интервале Δ_0.

[1] Заметим, что в несепарабельном пространстве всякое порождающее подпространство должно быть бесконечномерным (и даже несепарабельным).

[2] Аналогичные определения для унитарных операторов мы опускаем. Очевидно, кратности спектров самосопряженного оператора и его преобразования Кэли совпадают.

Мы вправе, следовательно, принять также

Определение 2. *Кратностью спектра самосопряженного оператора A в точке λ называется предел (монотонно убывающей) последовательности кратностей спектра этого оператора в интервалах $\left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.*

Легко видеть, что в том случае, когда λ есть изолированная точка спектра, кратность спектра в точке λ совпадает с кратностью собственного значения λ. Если линейная оболочка совокупности всех собственных векторов оператора A плотна в H, то определение 1 дает в качестве общей кратности спектра максимальную кратность собственных значений оператора A.

В заключение докажем лемму, которая будет использована в n° 86.

Лемма. *Пусть самосопряженный оператор A имеет порождающее подпространство G. Если оператор $A_0 \subset A$ определен лишь на линейной оболочке множества $E(\Delta)$ G, где Δ пробегает совокупность всех конечных интервалов, то оператор A есть замыкание оператора A_0.*

Доказательство. Так как включение $\overline{A}_0 \subseteq A$ очевидно, то нам надлежит лишь доказать, что $A \subseteq \overline{A}_0$. С этой целью возьмем произвольный вектор $f \in D_A$ и положим $f_k = E(\Delta_k) f$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, где $\Delta_k = [-k, k)$. Так как G есть порождающее подпространство, то замкнутая линейная оболочка множества $E(\Delta')$ G, где Δ' пробегает все подынтервалы конечного интервала Δ, совпадает с $E(\Delta)$ H. Поэтому векторы f_k принадлежат области определения оператора A_0 и

$$A_0 f_k = AE(\Delta_k) f = E(\Delta_k) Af.$$

При $k \to \infty$ мы имеем

$$E(\Delta_k) f \to f, \quad E(\Delta_k) Af \to Af.$$

Поэтому вектор f принадлежит области определения оператора $\overline{A}_0$ и $\overline{A}_0 f = Af$, т. е. включение $A \subseteq \overline{A}_0$ доказано.

86. Каноническая форма самосопряженного оператора с конечнократным спектром[1]. В настоящем n° мы наметим обобщения теоремы 2n° 83 на случай операторов со спектром конечной кратности. С этой целью введем сначала пространство вектор-функций $L^2_S(-\infty, \infty)$, являющееся обобщением пространства скалярных функций $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Пусть

$$S(t) = (\sigma_{ik}(t))_{i,k=1}^m \qquad (m < \infty, \ -\infty < t < \infty)$$

— эрмитова матрица-функция, удовлетворяющая двум условиям:

1°. При любых комплексных ξ_k

$$\sum_{i,k=1}^m \{\sigma_{ik}(t'') - \sigma_{ik}(t')\} \xi_i \overline{\xi}_k \geqslant 0,$$

если только $t' \leqslant t''$.

2°. $S(-\infty) = 0$, $S(t - 0) = S(t)$.

В таком случае будем называть $S(t)$ *матричной функцией распределения* и будем писать $S(\Delta)$ вместо $S(t'') - S(t')$, если $\Delta = [t', t'')$.

---

[1] Как и в предыдущем n° пространство H предполагается сепарабельным.

Из условия 1° легко заключить, что функции $\sigma_{ii}(t)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ не убывает и что функции $\sigma_{ik}(t)$ $(i, k=1, 2, \ldots, m)$ имеют в каждом конечном интервале ограниченное изменение.

По матрице-функции $S(t)$ мы вначале построим некоторую линейную метризованную систему R. С этой целью примем в качестве отправного пункта совокупность всех вектор-функций вида

$$\vec{\chi}(t)=\{\chi_1(t), \chi_2(t), \ldots, \chi_m(t)\},$$

где $\chi_k(t)$ есть характеристическая функция интервала Δ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$. Такие вектор-функции будем называть *характеристическими*.

Для получения линейной метризованной системы R образуем линейную оболочку всех характеристических вектор-функций, полагая

$$\alpha_1\vec{\chi}^{(1)}(t)+\alpha_2\vec{\chi}^{(2)}(t)=\{\alpha_1\chi_1^{(1)}(t)+\alpha_2\chi_1^{(2)}(t),\ \alpha_1\chi_2^{(1)}(t)+\alpha_2\chi_2^{(2)}(t), \ldots,\},$$

и определяя скалярное произведение вектор-функций вида

$$\vec{\chi}^{(1)}(t)=\{0, \ldots, 0, \chi_i^{(1)}(t),\ 0, \ldots, 0\},$$
$$\vec{\chi}^{(2)}(t)=\{0, \ldots, 0, \chi_k^{(2)}(t),\ 0, \ldots, 0\}$$

по формуле

$$(\vec{\chi}^{(1)}(t),\ \vec{\chi}^{(2)}(t))=\sigma_{ik}(\Delta_i'^{(1)}\cap\Delta_k^{(2)}),$$

где $\Delta_i^{(1)}, \Delta_k^{(2)}$ — интервалы, характеристическими функциями которых являются $\chi_i^{(1)}(t)$, $\chi_k^{(2)}(t)$. По линейности скалярное произведение распространяется на всю систему R. После этого пространство $L_S^2(-\infty, \infty)$ определяется как результат пополнения линейной метризованной системы R.

Что касается теоретико-функциональной характеристики элементов пространства $L_S^2(-\infty, \infty)$, то, вводя скалярную функцию распределения

$$v(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{ii}(t),$$

можно показать[1], что пространство $L_S^2(-\infty, \infty)$ состоит из всех вектор-функций $\vec{f}(t)=\{f_1(t), \ldots, f_m(t)\}$ с v-измеримыми и v-почти всюду конечными компонентами, для которых

$$\lim_{N\to\infty}(\vec{f}_N(t),\ \vec{f}_N(t))<\infty,$$

где

$$\vec{f}_N(t)=\begin{cases}\vec{f}(t), \text{ если для рассматриваемого значения } t\text{: } \max\limits_{1\le i\le m}|f_i(t)|<N,\\ 0, \text{ если для рассматриваемого значения } t\text{: } \max\limits_{1\le i\le m}|f_i(t)|\geq N.\end{cases}$$

[1] Кац И. О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями.— «Зап. Научно-исследовательского ин-та мат. и мех. и Харьковского мат. о-ва», 1950, т. XXII, с. 95—113.

Впрочем, для нашей цели теоретико-функциональная характеристика элементов пространства $L_S^2(-\infty, \infty)$ не является необходимой. Заметим лишь, что из нашего построения пространства $L_S^2(-\infty, \infty)$ во всяком случае следует принадлежность к нему вектор-функций с непрерывными финитными компонентами. Поэтому мы вправе определить на многообразии таких непрерывных финитных вектор-функций

$$\vec{f}(t) = \{f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_m(t)\} \tag{1}$$

оператор умножения:

$$\mathfrak{A}_0\vec{f}(t) = \{tf_1(t),\ tf_2(t),\ \ldots,\ tf_m(t)\}.$$

Замыкание $\mathfrak{A}$ этого симметрического оператора мы и назовем *оператором умножения на t в пространстве* $L_S^2(-\infty, \infty)$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{A}$ есть самосопряженный оператор. Действительно, возьмем преобразование Кэли оператора $\mathfrak{A}$:

$$(\mathfrak{A} + iI)\vec{f}(t) = \vec{g}(t), \qquad (\mathfrak{A} - iI)\vec{f}(t) = V\vec{g}(t).$$

Линейные многообразия D_V и Δ_V, очевидно, содержат все непрерывные финитные вектор-функции. Поэтому оператор V унитарен. Но тогда по теореме n° 79 оператор $\mathfrak{A}$ является самосопряженным.

Теорема 2 n° 75 позволяет получить спектральную функцию оператора $\mathfrak{A}$. На непрерывных финитных вектор-функциях (1) спектральная функция E_t задается равенством

$$E(\Delta)\vec{f}(t) = \{\chi_\Delta(t)f_1(t),\ \chi_\Delta(t)f_2(t),\ \ldots,\ \chi_\Delta(t)f_m(t)\},$$

где $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ. Отсюда видно, что кратность спектра оператора $\mathfrak{A}$ в $L_S^2(-\infty, \infty)$ не превосходит порядка m матрицы-функции $S(t)$, так как для $\mathfrak{A}$ можно указать m-мерные порождающее подпространство, натянутое на элементы

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1(t) &= \{g(t),\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\},\\
\vec{g}_2(t) &= \{0,\ g(t),\ 0,\ \ldots,\ 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{g}_m(t) &= \{0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ g(t)\}.
\end{aligned}$$

где функция $g(t) > 0$ построена по весу $v(t)$ так же, как на с. 278 она строилась по $\sigma(t)$.

Пусть теперь A — самосопряженный оператор со спектром кратности n $(n < \infty)$ и спектральной функцией E_t.

Условимся называть всякий базис любого порождающего подпространства оператора A *порождающим базисом* этого оператора. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — какой-нибудь порождающий базис оператора A. Обозначим через G_i замыкание линейной оболочки множества всех векторов $E(\Delta)g_i$ при рассматриваемом i. Мы будем предполагать порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_m$ выбранным всегда так, что соответствующие подпространства $G_1, G_2, \ldots, G_m$ линейно независимы. Покажем, что такой выбор базиса возможен, по крайней мере при $m = n$, т. е. в случае, когда он является *минимальным порождающим* *базисом*. Действительно, пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — какой-нибудь минимальный порождающий базис. Положим $g_1 = h_1$ и образуем подпространство G_1. Ясно, что $h_2 \overline{\in} \mathrm{G}_1$, так как в противном случае уже система векторов $h_1, h_3, h_4, \ldots$ $\ldots, h_n$ представляла бы порождающий базис и, следовательно, кратность спектра была бы $<n$. Из сказанного вытекает, что $g_2 = (I - P_{G_1}) h_2 \neq 0$. Образуем подпространство G_2, которое, как легко видеть, ортогонально G_1. Ясно, как следует эту процедуру продолжать далее. В результате мы получим порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$, для которого подпространства G_1, $\mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n$ попарно ортогональны, а следовательно, и линейно независимы.

Каждому порождающему базису $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $(n \leqslant m < \infty)$ мы можем отнести матрицу

$$S(t) = ((E_t g_i, g_k))_{i,k=1}^m,$$

которая, очевидно, является матричной функцией распределения.

Теорема. *Пусть A — самосопряженный оператор с n-кратным спектром, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ $(n \leqslant m < \infty)$ — какой-нибудь порождающий базис и $S(t) = ((E_t g_i, g_k))_{i,k=1}^m$.*

В таком случае существует изометрическое отображение пространства H на $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$, при котором области определения D_A оператора A в H и $\mathrm{D}_{\mathcal{Q}}$ оператора умножения $\mathcal{Q}$ в $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$ переходят друг в друга и элементу Af соответствует вектор-функция $\mathcal{Q}\vec{f}(t)$, если элементу $f \in \mathrm{H}$ соответствует вектор-функция $\vec{f}(t) \in \mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Отнесем вектору

$$f = E(\Delta_1) g_1 + E(\Delta_2) g_2 + \cdots + E(\Delta_m) g_m \tag{2}$$

из H характеристическую вектор-функцию

$$\vec{f}(t) = \{ \chi_{\Delta_1}(t), \chi_{\Delta_2}(t), \ldots, \chi_{\Delta_m}(t) \} \tag{3}$$

из $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$. Тогда

$$\| f \|^2 = (f, f) = \Big(\sum_{i=1}^m E(\Delta_i) g_i, \sum_{k=1}^m E(\Delta_k) g_k\Big) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^m (E(\Delta_i \cap \Delta_k) g_i, g_k) = \sum_{i,k=1}^m \sigma_{ik}(\Delta_i \cap \Delta_k) = \| \vec{f}(t) \|^2.$$

Легко также проверить, что ортогональным векторам вида (2) соответствуют ортогональные вектор-функции вида (3). Отсюда следует, что, расширяя по линейности и непрерывности установленное соответствие на все пространство H, мы получим изометрическое отображение пространства H на $\mathrm{L}_S^2(-\infty, \infty)$.

Нетрудно также видеть, что для непрерывных финитных вектор-функций $\vec{f}(t) = \{ f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t) \}$ формула, соответствующая формуле (3) n° 83, теперь имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\, dE_t g_i.$$

Найдем вектор-функцию, соответствующую вектору Af, где f — вектор вида (2). Имеем:

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t f=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t\left(\sum_{l=1}^{m} E(\Delta_l)\,g_l\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\int_{\Delta_l} t\,dE_t g_l=\sum_{l=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty} t\chi_l(t)\,dE_t g_l.$$

Если учесть способ построения оператора умножения $\mathfrak{A}$ и лемму предыдущего пункта, то теорема о канонической форме доказана.

В n° 83 мы показали, что для всякого самосопряженного оператора с простым спектром можно выбрать ортогональный базис, в котором матрица оператора будет якобиевой.

Теперь мы покажем, что этот результат обобщается на самосопряженные операторы с конечнократным спектром. Пусть A — такой оператор. Выберем порождающий базис $g_1, g_2, \ldots, g_n$ так, чтобы

$$\mathrm{H}=\mathrm{G}_1\oplus\mathrm{G}_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{G}_n\qquad(\mathrm{G}_l\perp\mathrm{G}_k,\quad i\neq k).$$

Повторяя упомянутые рассуждения n° 83, получим в каждом $\mathrm{G}r$ свою матрицу Якоби

$$(Ae_{rl},\ e_{rk}).$$

Если выбрать теперь в H единый ортонормированный базис e_s ($s=1, 2, 3, \ldots$), нумеруя орты e_{rk} ($r=1, 2, 3, \ldots, n$, $k=1, 2, 3, \ldots$) сначала в порядке возрастания первых индексов, а затем в порядке возрастания вторых индексов, т. е. полагая

$$e_1=e_{11},\quad e_2=e_{21},\ \ldots,\ e_n=e_{n1},\quad e_{n+1}=e_{12},\quad e_{n+2}=e_{22},\ \ldots,$$

то в базисе $\{e_s\}_{s=1}^{\infty}$ мы получим обобщенную якобиеву матрицу $((Ae_l, e_k))$. Она будет специального вида, так как ее значащие элементы будут располагаться лишь на главной и двух n-х диагоналях.

87. Понятие об унитарных инвариантах самосопряженных операторов. Операторы A_1 и A_2, действующие соответственно в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, называются[1] *изоморфными* (или *унитарно эквивалентными*), если существует такое изометрическое отображение V пространства H_1 на H_2, что

$$\mathrm{D}_{A_2}=V\mathrm{D}_{A_1}\tag{1}$$

и

$$A_2=VA_1V^{-1}.\tag{2}$$

Если оператор A_1 — симметрический (самосопряженный), то изоморфный ему оператор A_2 также симметрический (самосопряженный), как это непосредственно следует из (1) и (2).

Спектры изоморфных самосопряженных операторов совпадают, ибо из (1) и (2) вытекает, что

$$\Delta_{A_2-\lambda I}=(A_2-\lambda I)\,\mathrm{D}_{A_2}=(VA_1V^{-1}-\lambda VV^{-1})\,\mathrm{D}_{A_2}=V(A_1-\lambda I)\,\mathrm{D}_{A_1}=V\Delta_{A_1-\lambda I}.\tag{3}$$

[1] Мы повторяем здесь определение, данное в n° 41.

Более того, из этих равенств следует, что не только весь спектр, но и каждая из его частей (дискретная и непрерывная) также являются *унитарными инвариантами*, т. е. не меняются при переходе от A_1 к изоморфному оператору A_2.

Мы ограничимся здесь некоторыми замечаниями относительно унитарной эквивалентности самосопряженных операторов.

Пусть E_{1t} — разложение единицы оператора A_1. Положим

$$E_{2t} = VE_{1t}V^{-1}. \tag{4}$$

Эта формула определяет некоторое семейство ограниченных самосопряженных операторов в H_2, и легко видеть, что E_{2t} есть разложение единицы в пространстве H_2.

Проверим, например, что

$$E_{2u}E_{2v} = E_{2s},$$

где $s = \min\{u, v\}$. Действительно,

$$E_{2u}E_{2v} = VE_{1u}V^{-1}VE_{1v}V^{-1} = VE_{1u}E_{1v}V^{-1} = VE_{1s}V^{-1} = E_{2s}.$$

Покажем теперь, что E_{2t} является разложением единицы оператора A_2. С этой целью возьмем интегральное представление

$$(A_1f_1, g_1) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(E_{1t}f_1, g_1).$$

Полагая здесь

$$f_1 = V^{-1}f_2, \quad g_1 = V^{-1}g_2,$$

получим

$$(VA_1V^{-1}f_2, g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(VE_{1t}V^{-1}f_2, g_2)$$

или

$$(A_2f_2, g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(E_{2t}f_2, g_2),$$

что и является основным моментом в подлежащем доказательству утверждении.

Дальнейшие замечания относятся к случаю, когда пространство сепарабельно. В этом случае мы можем говорить о кратности спектра и видим из (4), что кратность спектра (общая кратность и кратность в каждой точке) также является унитарным инвариантом самосопряженного оператора.

Если линейная оболочка совокупности всех собственных векторов самосопряженного оператора плотна в H, то совокупность всех собственных значений и кратность каждого из них представляют полную систему унитарных инвариантов оператора, т. е. все такие операторы с одинаковыми собственными значениями и одинаковой кратностью каждого из них являются изоморфными.

В случае самосопряженных операторов с произвольным простым спектром также нетрудно указать полную систему унитарных инвариантов.

Пусть A_1 и A_2 — два унитарно эквивалентных самосопряженных оператора с простым спектром, действующие в пространствах H_1 и H_2. Равенства

$$(E_{2t}f_2, f_2) = (E_{1t}V^{-1}f_2, V^{-1}f_2) = (E_{1t}f_1, f_1)$$

показывают, что спектральные типы элемента f_1 относительно A_1 и элемента $f_2 = Vf_1$ относительно A_2 совпадают. Отсюда следует совпадение спектральных типов операторов A_1 и A_2.

Из этого вытекает, что спектр и кратность спектра в каждой точке, вообще говоря, не представляют полной системы унитарных инвариантов.

Так, например, операторы умножения: $\mathfrak{C}_{\sigma_1}$ в $L^2_{\sigma_1}(0, 1)$ и $\mathfrak{C}_{\sigma_2}$ в $L^2_{\sigma_2}(0, 1)$ при $\sigma_1(t) = t$ и

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1+t & (t>0), \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

имеют общий спектр кратности единица, но они не изоморфны, так как спектральные типы функций распределения $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ не совпадают.

С другой стороны, два оператора с простым спектром и одинаковыми спектральными типами изоморфны, так как согласно nn° 83 и 84 оба они изоморфны одному и тому же оператору умножения.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. *Для того чтобы два оператора с простым спектром были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их спектральные типы совпадали.*

При переходе от случая простого спектра к общему случаю кратного спектра отыскание полной системы унитарных инвариантов существенно усложняется. Вопрос о полной системе унитарных инвариантов самосопряженного оператора с кратным спектром не может быть решен простым разложением такого оператора в ортогональную сумму операторов с простым спектром, ибо такое разложение не определяется однозначно. Для решения задачи в общем случае следует специальным образом выбрать разложение оператора в ортогональную сумму, что требует введения понятия о так называемых *независимых спектральных типах.*

Теория унитарных инвариантов самосопряженных операторов была разработана Хеллингером для случая сепарабельного пространства и развита далее А. И. Плеснером для случая несепарабельного пространства.

Рассмотрение относящихся сюда вопросов не входит в задачу настоящей книги[1].

88. Общее определение функции от самосопряженного оператора.

В n° 72 мы строили операторные интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t,$$

отправляясь от заданного разложения единицы E_t. При этом мы предполагали, что функция $\varphi(t)$ определена и конечна почти всюду относительно операторной меры E_t и относительно этой меры измерима. Сохраняя во всем дальнейшем это предположение о функции $\varphi(t)$, мы введем теперь в рассмотрение еще тот самосопряженный оператор A, которому принадлежит разложение еди-

[1] Читателю, желающему ознакомиться с теорией инвариантов, можно рекомендовать книгу А. И. Плеснера, впервые цитированную на с. 277.

ницы E_t. Мы предположим, так же как в n° 72, что в H существует плотное множество D элементов f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t f, f) < \infty, \qquad (1)$$

и примем следующее

Определение. *Функцией* $\varphi(A)$ *называется оператор, определяемый формулой*

$$\varphi(A) f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t f$$

на всех тех векторах $f \in$ H, *для которых выполнено соотношение* (1).

Необходимо отметить, что для некоторой части рассматриваемого здесь класса функций мы уже ранее определили понятие функции от оператора. Данное ранее определение согласуется с определением этого пункта. Далее заметим, что некоторые свойства оператора $\varphi(A)$, вытекающие из приведенного определения, фактически уже были установлены в n° 72. Так, в n° 72 было доказано, что область определения $D = D_{\varphi(A)}$ есть линейное многообразие, а также, что $[\varphi(A)]^* = \overline{\varphi}(A)$. Заметим еще, что для существования оператора, обратного по отношению к $\varphi(A)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$ удовлетворяла всем условиям, перечисленным в начале настоящего пункта, и тогда

$$[\varphi(A)]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varphi(t)} dE_t.$$

Наконец, отметим, что равенство $|\varphi(t)| = 1$ (почти всюду относительно операторной меры E_t) необходимо и достаточно, чтобы оператор $\varphi(A)$ был унитарным. Это условие, например, выполнено в случае

$$\varphi(t) = \frac{t-i}{t+i},$$

который приводит к преобразованию Кэли, и в случае

$$\varphi(t) = e^{ist} \; (-\infty < s < \infty),$$

который приводит к абелевой группе унитарных операторов. Точно также, для того чтобы оператор $\varphi(A)$ был ортопроектором, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(t)$ принимала лишь два значения: 0 или 1, если из оси $-\infty < t < \infty$ исключить множество нулевой операторной меры относительно E_t.

Рассмотрим теперь, какие упрощения вносит в теорию предположение, что спектр оператора A прост. Примем это предположение и обозначим через g какой-нибудь порождающий элемент оператора A, а через $\sigma(t)$ — функцию распределения $(E_t g, g)$. Покажем, что достаточно проверить налагаемые на $\varphi(t)$ требования на единственной мере $\sigma(t) = (E_t g, g)$, вместо всех мер $(E_t f, f)$ в общем случае. Действительно, пусть некоторое множество $e \in \in (-\infty, \infty)$ имеет конечную σ-меру. Эта мера равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t)\, d\sigma(t). \tag{2}$$

где $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества e. Если f — произвольный вектор, то при любом $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$(E(\Delta) f, f) = \int_{\Delta} p(t)\, d(E_t g, g) = \int_{\Delta} p(t)\, d\sigma(t), \tag{3}$$

где $p(t)$ — некоторая неотрицательная σ-интегрируемая функция. Сопоставляя (2) и (3), получаем, что мера множества e относительно функции распределения $(E_t f, f)$ равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t)\, d(E_t f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \chi_e(t)\, d\sigma(t),$$

т. е. конечна и обращается в нуль вместе с интегралом (2).

Сделаем еще одно замечание относительно изоморфизма между пространством $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ и пространством H, осуществляемого соотношением

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dE_t g. \tag{4}$$

Это соотношение показывает, что

$$f = f(A) g.$$

Отсюда, если $f \in D_{\varphi(A)}$, то

$$\varphi(A) f = \varphi(A) f(A) g = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t)\, dE_t g.$$

Таким образом, при изоморфном отображений H на $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ с помощью соотношения (4) оператору $\varphi(A)$ в H отвечает оператор умножения на $\varphi(t)$ в $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

89. Примеры. Проиллюстрируем некоторые из рассмотренных нами фактов на примере оператора дифференцирования

$$\mathcal{P} = i\frac{d}{dt}$$

в $L^2(-\infty, \infty)$ и оператора $\mathcal{Q}$ умножения на независимую переменную в том же пространстве. Оба оператора являются самосопряженными. При этом они унитарно эквивалентны, а именно,

$$\mathcal{P} = \mathfrak{F}\mathcal{Q}\mathfrak{F}^*,$$

где $\mathfrak{F}$ есть оператор Фурье — Планшереля. Поскольку спектр оператора $\mathcal{Q}$ прост и заполняет всю числовую ось (см. n° 83), то тем же свойством обладает спектр оператора $\mathcal{P}$.

А. Пусть $E_t^{\mathcal{Q}}$ есть спектральная функция оператора $\mathcal{Q}$, а $E_t^{(\mathcal{P})}$ — оператора $\mathcal{P}$. Так как

$$E^{\mathcal{Q}}(\Delta)h = \chi_\Delta(t)h(t),$$

где $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ, а $h = h(t)$ — произвольный элемент пространства $L^2(-\infty, \infty)$ и так как (см. n° 87)

$$E_t^{(\mathcal{P})} = \mathfrak{F}E_t^{(\mathcal{Q})}\mathfrak{F}^*,$$

то для произвольного конечного интервала $\Delta = [\alpha, \beta)$

$$E^{(\mathcal{P})}(\Delta)f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta(u-t)} - e^{i\alpha(u-t)}}{i(u-t)}f(u)\,du,$$

где $f = f(t)$ — произвольный элемент $L^2(-\infty, \infty)$.

В. Припомним теорему 2 n° 83. В силу этой теоремы, если g есть какой-нибудь порождающий элемент оператора $\mathcal{Q}$, то формула

$$f = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dE_t^{\mathcal{Q}}g,$$

которая элементу $f = f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ относит элемент $\varphi(t) \in L_\sigma^2(-\infty, \infty)$, где $\sigma(t) = (E_t^{(\mathcal{Q})}g, g)$, устанавливает изометрическое отображение $L^2(-\infty, \infty)$ на $L_\sigma^2(-\infty, \infty)$. Так как исходный оператор есть уже сам оператор умножения в $L^2(-\infty, \infty)$, то естественно возникает вопрос о таком выборе порождающего элемента g_0, при котором указанное изометрическое отображение превратилось бы в тождественное преобразование

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dE_t^{(\mathcal{Q})}g_0.$$

Для возможности этого равенства необходимо и достаточно, чтобы

$$E^{\mathfrak{Q}}(\Delta)g_0 = \chi_\Delta(t),$$

где Δ — произвольный конечный интервал, а $\chi_\Delta(t)$ — его характеристическая функция. Но при $\Delta \to [-\infty, \infty]$ функция $\chi_\Delta(t)$ не имеет предела в $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, требуемый вектор g_0 не существует. Если мы все же желаем, чтобы ответ на поставленный выше вопрос был положителен, то мы должны пополнить пространство $L^2(-\infty, \infty)$ *несобственным элементом* g_0, проекция которого на подпространство $L^2(a, b)$ при любых конечных a, b есть функция, равная тождественно единице. Этот элемент g_0 есть, таким образом, не принадлежащая пространству $L^2(-\infty, \infty)$ *единичная функция*, $g_0(t) \equiv 1$.

C. Обратимся теперь к оператору $\mathscr{P}$. Пусть $h = h(t)$ — какой-нибудь порождающий элемент этого оператора. Тогда для любого $f \in L^2(-\infty, \infty)$ существует такой элемент $\psi(t) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$, где $\sigma(t) = (E_t^{(\mathscr{P})}h, h)$, что

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dE_t^{(\mathscr{P})}h.$$

Здесь естественно поставить вопрос о таком выборе порождающего элемента h_0, при котором $\psi(t)$ есть преобразование Фурье — Планшереля функции $f(t)$ (или ему обратное). Мы потребуем, чтобы

$$\psi(t) = (\mathfrak{F}^* f)(t).$$

Таким образом, наряду с представлением

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dE_t^{(\mathscr{P})}h_0$$

мы имеем представление

$$f(s) = \text{l.i.m.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, e^{-ist} dt,$$

и, следовательно, должно иметь место соотношение

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\, h_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{-it},$$

каков бы ни был конечный интервал $\Delta = [\alpha, \beta)$. Таким образом, требуемый вектор h_0 должен удовлетворять соотношениям

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\; h_0 = \mathfrak{F} E^{\mathfrak{Q}}(\Delta)\, g_0, \tag{1}$$

где g_0 есть единичная функция. Такого вектора h_0 в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ не существует. Мы введем h_0 как второй несобственный элемент пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Равенство (1) показывает, что элемент h_0 надлежит рассматривать как преобразование Фурье — Планшереля несобственного элемента $g_0 \equiv 1$, которым, как известно, оказывается $h_0 = \sqrt{2\pi}\,\delta(t)$, где $\delta(t)$ есть δ-функция Дирака.

D. Функции φ от оператора $\mathcal{P}$, к которым мы теперь обратимся, должны удовлетворять прежде всего требованию измеримости. Если мы хотим, чтобы функция $\varphi(t)$ порождала ограниченный оператор, определенный всюду в $L^2(-\infty, \infty)$, то мы должны потребовать, чтобы она была ограниченной.

Пусть $\varphi(t)$ — такая функция. Если $f = f(t)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty, \infty)$, а $g = g(t)$ — ее обратное преобразование Фурье — Планшереля, то

$$\varphi(\mathcal{P}) f = \mathfrak{F}\{\varphi(t) g(t)\} \tag{2}$$

Особенно просто обстоит дело в том случае, когда функция $\varphi(t)$ не только ограничена, но и принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Действительно, в этом случае существует

$$\psi(t) = (\mathfrak{F}\varphi)(t),$$

и правая часть формулы (2) равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-s) f(s)\, ds.$$

Таким образом, в этом случае

$$\varphi(\mathcal{P}) f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-s) f(s)\, ds. \tag{3}$$

Так как правая часть формулы (2) превращается в $\psi(t)$, когда в качестве $g(t)$ взята единичная функция $g_0(t)$, то $\psi(t)$ надлежит рассматривать как результат применения оператора $\varphi(\mathcal{P})$ к несобственному элементу h_0:

$$\psi(t) = \varphi(\mathcal{P}) h_0.$$

Итак, если $\varphi(t)$ ограничена и принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$, то достаточно найти $\varphi(\mathcal{P}) h_0$, и определение $\varphi(\mathcal{P}) f$ сведется к нахождению некоторой свертки по формуле (3).

Допустим теперь, что функция $\varphi(t)$ ограничена, но не принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Тогда естественно представить функцию $\varphi(t)$ в следующем виде:

$$\varphi(t) = (t + i)\,\varphi_1(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi(t)}{t+i}$$

уже принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$. Пусть

$$\varphi_1(\mathcal{P}) h_0 = \psi_1(t).$$

Тогда

$$\varphi_1(\mathcal{P}) f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t-s) f(s)\, ds$$

и

$$\varphi(\mathcal{P}) f = (\mathcal{P} + i)\varphi_1(\mathcal{P}) f = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{dt} + 1\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t-s) f(s)\, ds.$$

Е. В различных вопросах анализа часто встречаются интегральные операторы, ядра которых — функции от разности двух аргументов. Мы видим, что такие операторы являются функциями от оператора дифференцирования. В качестве примера приведем оператор D_λ, определяемый формулой

$$D_\lambda f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-s)}{t-s} f(s)\, ds,$$

где λ — неотрицательный вещественный параметр. Этот оператор играет важную роль в теории интеграла Фурье. Для нас здесь представляет интерес то, что D_λ есть разложение единицы. Этот факт вытекает из следующего общего положения: *если E_λ есть разложение единицы самосопряженного оператора A, то*

$$E_{\sqrt{\lambda}} - E_{-\sqrt{\lambda}+0} \quad (\lambda \geqslant 0)$$

есть разложение единицы оператора A^2. Но легко видеть, что

$$D_\lambda = E^{(\mathcal{P})}_{\sqrt{\lambda}} - E^{(\mathcal{P})}_{-\sqrt{\lambda}+0}.$$

Поэтому D_λ есть разложение единицы и притом оператора $\mathcal{P}^2$. А теперь покажем, что оператор $\mathcal{P}^2$ совпадает с оператором L, который определяется формулой

$$Lf = -\frac{d^2 f}{dt^2}$$

на всех функциях $f(t)$ из $L^2(-\infty, \infty)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $f'(t)$ и производную $f''(t)$, принадлежащую $L^2(-\infty, \infty)$.

Наперед ясно, что

$$\mathscr{D}^2 \subseteq L.$$

Поэтому подлежит доказательству лишь следующий факт: если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(t)|^2 dt < \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt < \infty.$$

Достаточно доказать этот факт для случая, когда функция $f(t)$ вещественна, а интегрирование происходит по полуоси. Возьмем тождества

$$\int_0^s [f'(t)]^2 dt = f(s) f'(s) - f(0) f'(0) - \int_0^s f(t) f''(t) dt,$$

$$\int_0^t f(s) f'(s) ds = \frac{1}{2} [f(t)]^2 - \frac{1}{2} [f(0)]^2.$$

Допуская, что $f'(t)$ не принадлежит $L^2(0, \infty)$ и, значит, принимая, что

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^s [f'(t)]^2 dt = \infty,$$

заключаем из первого тождества, последний член правой части которого ограничен, что

$$\lim_{s \to \infty} f(s) f'(s) = \infty.$$

Поэтому из второго тождества найдем, что

$$\lim_{t \to \infty} [f(t)]^2 = \infty,$$

а это противоречит предположению о конечности интеграла

$$\int_0^{\infty} [f(t)]^2 dt < \infty.$$

Докажем теперь, что спектр оператора L двукратный. Прежде всего убедимся в том, что этот спектр не может быть простым.

Допуская противное, возьмем какой-нибудь порождающий элемент g оператора L, так что линейная оболочка множества векторов $D_\lambda g\,(\lambda \geqslant 0)$ плотна в $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, элемент g и подавно является порождающим для оператора $\mathscr{P}$. А так как спектр оператора $\mathscr{P}$ заполняет всю числовую ось, то ни для какого конечного интервала Δ вектор $E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g$ не может равняться нулю. Возьмем какой-нибудь конечный интервал $\Delta = [\alpha, \beta)$, где $\beta > \alpha > 0$, и представим вектор $E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g$ в виде

$$E^{(\mathscr{P})}(\Delta)\,g = \int_0^\infty \varphi(t)\,dD_t g,$$

что возможно, так как g есть порождающий элемент оператора L. Это представление можно переписать в виде

$$\int_\alpha^\beta dE_t^{(\mathscr{P})} g = \int_0^\infty \varphi(s)\,d\,\{E_{\sqrt{s}}^{(\mathscr{P})} - E_{-\sqrt{s}+0}^{(\mathscr{P})}\}\,g = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t^2)\,dE_t^{(\mathscr{P})} g,$$

откуда вытекает, что

$$\varphi(t^2) = \begin{cases} 1 & (\alpha < t < \beta), \\ 0 & (-\beta < t < -\alpha), \end{cases}$$

что невозможно.

Итак, спектр оператора L не простой. Чтобы доказать, что он двукратный, надлежит показать, что оператор L имеет порождающий базис, состоящий из двух векторов. Возьмем два порождающих элемента $h_1 = h_1(t)$, $h_2 = h_2(t)$ оператора $\mathscr{P}$, из которых первый представляет нечетную, а второй — четную функцию. Произвольную функцию $f(t)$ из $L^2(-\infty, \infty)$ представим в виде суммы

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

нечетной функции $f_1(t)$ и четной функции $f_2(t)$. Так как h_1 — порождающий элемент оператора $\mathscr{P}$, то

$$f_1 = f_1(t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(s)\,d\,(E_s^{(\mathscr{P})} - E_0^{(\mathscr{P})})\,h_1. \tag{4}$$

Но

$$(E_s^{(\mathscr{P})} - E_0^{(\mathscr{P})})\,h_1 \equiv g_1(t;\ s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{is(u-t)} - 1}{i(u-t)}\,h_1(u)\,du.$$

Следовательно,

$$g_1(-t;\ -s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(-u-t)}-1}{i(u+t)}h_1(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(u-t)}-1}{i(-u+t)}h_1(-u)\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{is(u-t)}-1}{i(u-t)}h_1(u)\,du=g_1(t;\ s).$$

Благодаря нечетности $f_1(t)$ из (4) вытекает поэтому, что

$$f_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(-s)\,d\,(E_s^{(\mathscr{P})}-E_0^{(\mathscr{P})})\,h_1.$$

Значит, $\varphi_1(t)$ есть четная функция и представление (4) принимает вид

$$f_1=\int\limits_0^{\infty}\varphi_1(s)\,d\,(E_s^{(\mathscr{P})}-E_{-s}^{(\mathscr{P})})\,h_1=\int\limits_0^{\infty}\varphi_1(\sqrt{t})\,dD_th_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$f_2=\int\limits_0^{\infty}\varphi_2(\sqrt{t})\,dD_th_2.$$

Следовательно, векторы h_1, h_2 образуют порождающий базис для оператора L. Не мешает заметить, что этот базис ортогональный.

F. Пространство $L^2(-\infty,\ \infty)$ представимо в виде ортогональной суммы подпространств, составленных только из четных или только из нечетных функций. Каждое из этих подпространств приводит оператор $L=\mathscr{P}^2$. Учитывая четность (или нечетность) элементов из данных приводящих подпространств, легко видеть, что разложение единицы оператора L на каждом из этих подпространств есть интегральный оператор, в качестве ядра которого можно взять четную или, соответственно, нечетную часть ядра

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(t-s)}{t-s}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}}(\cos\mu t\cdot\cos\mu s+\sin\mu t\cdot\sin\mu s)\,d\mu.$$

Рассмотрение оператора L на четных (или нечетных) функциях в $L^2(-\infty,\ \infty)$ эквивалентно изучению (положительных) операторов

$$L_cf=-f''\ \text{ и }\ L_sf=-f''$$

в пространстве $L^2(0, \infty)$ с областью определения, состоящей из функций f с абсолютно непрерывной производной f' и с $f'' \in L^2 \in (0, \infty)$, при дополнительном условии

$$f'(0) = 0 \quad (\text{для } L_c), \quad f(0) = 0 \quad (\text{для } L_s).$$

Поэтому разложение единицы для оператора L_c в $L^2(0, \infty)$ порождается ядром

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \cos \mu t \cdot \cos \mu s \cdot d\mu = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{t-s} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t+s)}{t+s} \right\},$$

а для оператора L_s — ядром

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \sin \mu t \cdot \sin \mu s \, d\mu = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{t-s} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t+s)}{t+s} \right\}$$

(в обеих формулах $\lambda \geqslant 0$).

Таким образом, *спектр каждого из операторов* L_c и L_s *непрерывен и состоит из полуоси* $0 \leqslant \lambda < \infty$. Легко видеть, что этот спектр прост.

90. Кольца ограниченных самосопряженных операторов.

Определение. *Совокупность* $\mathfrak{R}$ *ограниченных самосопряженных операторов называют кольцом, если из включений* $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$ *вытекают включения* $AB \in \mathfrak{R}$ *и* $\alpha A + \beta B \in \mathfrak{R}$, *где* α, β — *произвольные вещественные числа.*

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется *слабо замкнутым*, если из $A_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и $A_n \xrightarrow{\text{сл}} A$ следует, что $A \in \mathfrak{R}$.

Так как произведение двух ограниченных самосопряженных операторов является самосопряженным оператором в том и только том случае, когда эти операторы перестановочны, то все операторы образующие кольцо, должны быть попарно перестановочными.

Обратно, всякое множество $\mathfrak{M} = \{A, B, C, \ldots\}$ попарно перестановочных ограниченных самосопряженных операторов вполне определяет некоторое слабо замкнутое кольцо, а именно минимальное слабо замкнутое кольцо, содержащее $\mathfrak{M}$. Это кольцо мы обозначим $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ или $\mathfrak{R}(A, B, C, \ldots)$. Оно может быть определено как пересечение всех слабо замкнутых колец, содержащих $\mathfrak{M}$.

Нейману принадлежит следующая

Теорема. *Если пространство* H *сепарабельно, то всякому слабо замкнутому кольцу* $\mathfrak{R}$ *принадлежит такой ограниченный самосопряженный оператор* A, *что* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$.

Настоящий пункт посвящен доказательству этой теоремы. Для большей ясности выделим в виде лемм два промежуточных утверждения, которые в этом доказательстве используются.

Лемма 1. Ограниченный самосопряженный оператор A с разложением единицы E_t принадлежит слабо замкнутому кольцу $\mathfrak{R}$ в том и только том случае, когда этому кольцу принадлежит E_λ при любом $\lambda \leqslant 0$ и $I - E_\mu$ при любом $\mu > 0$. (При этом сепарабельность пространства H не предполагается.)

Доказательство. Чтобы доказать достаточность условия, примем, что спектр оператора A лежит в интервале $(-c, c)$, и возьмем точки

$$-c = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < \cdots < t_n = c,$$

среди которых содержится также точка 0 (скажем, $t_m = 0$). Введем оператор

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}(E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} t_{k-1}(E_{t_k} - E_{t_{k-1}}) + \sum_{k=m+2}^{n} t_{k-1}\{(I - E_{t_{k-1}}) - (I - A_{t_k})\},$$

который, по условию, принадлежит $\mathfrak{R}$. При неограниченном увеличении n и стремлении к нулю наибольшей из разностей $t_k - t_{k-1}$ оператор A_n равномерно стремится к оператору

$$\int_{-c}^{c} t\,dE_t = A.$$

Поэтому, в силу слабой замкнутости кольца, $A \in \mathfrak{R}$, и значит, достаточность доказана.

При доказательстве необходимости будем опираться на то, что вместе с A кольцу $\mathfrak{R}$ принадлежит любой многочлен от A без свободного члена (с вещественными коэффициентами). Построим при любом $\lambda \leqslant 0$ функцию

$$h_\varepsilon(t;\ \lambda) = \begin{cases} 1 & (t \leqslant \lambda - \varepsilon), \\ \dfrac{\lambda - t}{\varepsilon} & (\lambda - \varepsilon \leqslant t \leqslant \lambda), \\ 0 & (t \geqslant \lambda) \end{cases}$$

и возьмем вещественный многочлен $p_\varepsilon(t)$ без свободного члена, удовлетворяющий неравенству

$$|h_\varepsilon(t;\ \lambda) - p_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (-c \leqslant t \leqslant c).$$

Существование такого многочлена доказывается с помощью теоремы Вейерштрасса. Теперь при любых $f,\ g \in$ H можно написать следующее тождество:

$$(p_\varepsilon(A)f,\ g) - (E_\lambda f,\ g) = \int_{-c}^{c} p_\varepsilon(t)\,d(E_t f,\ g) - \int_{-c}^{\lambda} d(E_t f,\ g) =$$

$$= \int_{-c}^{c} \{ p_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t;\ \lambda) \}\, d(E_t f,\ g) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} (\lambda - \varepsilon - t)\, d(E_t f,\ g) =$$

$$= \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2.$$

Но легко видеть, что

$$|\mathfrak{J}_1| \leqslant \|g\| \sqrt{\int_{-c}^{c} |p_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(t;\ \lambda)|^2\, d(E_t f,\ f)} \leqslant \varepsilon\, \|f\| \cdot \|g\|$$

и, значит, $\mathfrak{J}_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны,

$$|\mathfrak{J}_2| \leqslant \|g\| \sqrt{\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} d(E_t f,\ f)} = \|(E_\lambda - E_{\lambda-\varepsilon}) f\| \cdot \|g\|,$$

т. е. $\mathfrak{J}_2$ также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, принадлежащий $\mathfrak{R}$ оператор $p_\varepsilon(A)$ слабо (и даже сильно) сходится к оператору E_λ, который поэтому должен принадлежать $\mathfrak{R}$. Аналогично доказывается, что кольцу $\mathfrak{R}$ принадлежит $I - E_\mu$ при $\mu > 0$. Здесь нужно лишь взять функцию

$$h_\varepsilon(t;\ \mu) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant \mu - \varepsilon), \\ \dfrac{t - \mu + \varepsilon}{\varepsilon} & (\mu - \varepsilon \leqslant t \leqslant \mu), \\ 1 & (t \geqslant \mu). \end{cases}$$

Лемма 2. *Если пространство* H *сепарабельно, то для любого слабо замкнутого кольца* $\mathfrak{R}$ *можно указать последовательность попарно перестановочных ортопроекторов* $P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,$ *такую, что*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots).$$

Доказательство. Пусть кольцо $\mathfrak{R}$ порождается ограниченными самосопряженными операторами $A^{(\alpha)}$, $A^{(\beta)}$, ..., которым принадлежат разложения единицы $E_t^{(\alpha)}$, $E_t^{(\beta)}$, ... В таком случае, по лемме 1,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(E_\lambda^\alpha,\ I - E_\mu^\alpha,\ E_\lambda^\beta,\ I - E_\mu^\beta,\ \ldots),$$

где μ пробегает всевозможные положительные, а λ — всевозможные неположительные значения. Таким образом, мы можем сказать, что

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{N}),$$

где $\mathfrak{R}$ означает некоторый континуум попарно перестановочных проектирующих операторов. Однако, по теореме 2 n° 34 этот континуум содержит плотную в нем в смысле сильной сходимости последовательность $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Если мы положим

$$\mathfrak{R}(P_1, P_2, P_3, \ldots) = \mathfrak{R}_1,$$

то, очевидно, $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. А так как для любого $P \in \mathfrak{R}$ найдется подпоследовательность $\{P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сильно сходящаяся к P, то $P \in \mathfrak{R}_1$ и, значит, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_1$, откуда следует, что и $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_1$. Поэтому $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$, и лемма 2 доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы Неймана.

Итак, пусть дано слабо замкнутое кольцо $\mathfrak{R}$. Согласно лемме 2 оно порождается какой-то последовательностью попарно перестановочных проектирующих операторов:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Займемся прежде всего некоторой «перестройкой» этой порождающей последовательности $\{P_k\}_1^{\infty}$. Точнее, шаг за шагом построим другую последовательность $\{Q_k\}_1^{\infty}$ попарно перестановочных проектирующих операторов, которая порождает то же кольцо $\mathfrak{R}$.

Прежде всего полагаем

$$Q_1 = P_1. \tag{1}$$

Затем возьмем ортопроектор P_2 и с его помощью построим и присоединим к Q_1 два оператора, а именно

$$Q_2 = P_2 Q_1, \qquad Q_3 = Q_1 + P_2 - P_2 Q_1. \tag{2}$$

Эта запись показывает, что операторы Q_2 и Q_3 входят в $\mathfrak{R}$, и из нее видно также, что

$$P_2 = Q_2 + Q_3 - Q_1. \tag{2'}$$

Оператор Q_3 можно еще представить в виде суммы

$$Q_3 = Q_1 + P_2 (I - Q_1)$$

двух ортопроекторов, проектирующих на взаимно ортогональные подпространства. Отсюда и из вида оператора Q_2, который проектирует на пересечение двух подпространств, заключаем, что

$$Q_2 \leqslant Q_1 \leqslant Q_3. \tag{2''}$$

На дальнейших этапах мы будем по уже построенным новым операторам Q_i и одному старому P_j получать целую систему новых операторов, а именно, на n-м шаге мы введем 2^{n-1} операторов, которые будут «перемежаться» с уже построенными до этого $2^{n-1}-1$

операторами в том смысле, что будет иметь место неравенство, аналогичное неравенству (2″). При этом оператор P_n будет представляться через операторы Q_l по формуле, аналогичной равенству (2′). Третий шаг таков: берем оператор P_3 и по операторам Q_2, Q_1, Q_3 строим

$$\left.\begin{aligned} &Q_4 = P_3Q_2, && Q_5 = Q_2 + P_3(Q_1 - Q_2), \\ &Q_6 = Q_1 + P_3(Q_3 - Q_1), && Q_7 = Q_3 + P_3 - P_3Q_3 = Q_3 + P_3(I - Q_3); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

при этом

$$P_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 - (Q_1 + Q_2 + Q_3) \qquad (3')$$

и

$$Q_4 < Q_2 < Q_5 < Q_1 < Q_6 < Q_3 < Q_7. \qquad (3'')$$

Отсюда уже видно, как эта процедура продолжается далее; в результате мы и получим искомую последовательность проекторов Q_l, которая порождает кольцо $\mathfrak{R}$ и которую мы примем вместо первоначальной.

Теперь займемся построением некоторого разложения единицы. С этой целью возьмем интервал $[-1, 0]$, разделим его на три равные части и обозначим открытый средний интервал $\mathfrak{J}_1$. Каждый из двух оставшихся интервалов также разделим на три равные части и обозначим два открытых средних интервала в порядке слева направо через $\mathfrak{J}_2$ и $\mathfrak{J}_3$. Неограниченно продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность открытых интервалов, которые представляют собой не что иное, как смежные интервалы канторова совершенного множества. После построения последовательности интервалов $\{\mathfrak{J}_k\}_1^\infty$ положим

$$E_t = Q_k, \quad \text{если } t \in \mathfrak{J}_k.$$

Функция E_t определена, таким образом, на некотором плотном в интервале $[-1, 0]$ точечном множестве $\mathfrak{J}$. Из свойства ортопроекторов Q_k следует, что

$$E_\lambda \leqslant E_\mu, \quad E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda \qquad (\lambda \leqslant \mu; \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{J}).$$

Первое из этих соотношений показывает, что всякая последовательность $\{E_{t_n}\}_{n=1}^\infty$, где

$$t_n \in \mathfrak{J}, \quad t_n \leqslant t_{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t \quad (-1 < t \leqslant 0), \qquad (4)$$

имеет предел, который по теореме 1 n° 38 является ортопроектором. Если мы убедимся в том, что этот предел не зависит от последовательности $\{t_n\}_1^\infty$, а лишь от t, после чего обозначим его E_t, то, дополнив данное определение соглашениями

$$E_{-1} = 0, \quad E_0 = I,$$

мы и получим разложение единицы в интервале $[-1, 0]$, которое представляет цель нашего построения. Упомянутая независимость является следствием того, что из двух различных последовательностей, удовлетворяющих условиям (4) и имеющих общий предел, можно составить единую последовательность того же типа и с тем же пределом.

Построенное разложение единицы определяет некоторый ограниченный самосопряженный оператор A, и этот оператор, как легко видеть, порождает кольцо $\mathfrak{R}$. Действительно, по лемме 1

$$\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(E_\lambda),$$

где λ пробегает интервал $[-1, 0]$. С другой же стороны, в силу нашего построения,

$$\mathfrak{R}(E_\lambda) = \mathfrak{R}.$$

Таким образом, теорема Неймана доказана.

91. Характеристическое свойство функций от самосопряженного оператора. Пусть T — линейный замкнутый оператор с плотной в H областью определения, а A — некоторый самосопряженный оператор в том же пространстве. При каких условиях T является функцией от A? Необходимое условие без труда получается из рассмотрений n° 90 и состоит в перестановочности оператора T со всяким самосопряженным оператором, который сам перестановочен с A. Оказывается, что в случае сепарабельного пространства это условие является и достаточным. Относящаяся сюда теорема в неявной форме содержится в работах Неймана, относящихся к 1931—1932 г. г. (она получается из сопоставления результатов двух статей этого автора)[1]. Первая явная формулировка и прямое доказательство принадлежат Ф. Риссу[2] (1935 г.). В дальнейшем доказательство Ф. Рисса упростил Б. С. -Надь[3] (1942 г.). В книге по функциональному анализу Ф. Рисса и Б. С. -Надя[4] читатель найдет это упрощенное доказательство вместе с некоторыми дальнейшими литературными указаниями. Здесь же мы изложим некоторый близкий к нему вариант доказательства.

Переходя к подлежащей доказательству теореме, заметим, что оператор A можно предположить ограниченным. Действительно,

---

[1] Neumann J. Über Funktionen von Funktionaloperatoren.— „Ann. of Math.", 1931, **32**, s. 191—226; Über einen Satz von Herrn M. Stone.—„Ann. of Math.", 1932, **33**, s. 567—573.

[2] Riesz F. Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert.— „Acta Sci. Math. Szeged", 1935, 7, s. 147—159.

[3] Sz.-Nagy B. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes.— „Erg. d, Math.„, Berlin, 1942.

[4] Riesz F. et Sz-Nagy B., Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest, 1953. (Есть русский перевод: Ф. Рисс и Б. С.-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.)

оператор $A' = \operatorname{arctg} A$ всегда ограничен, а если мы докажем, что некоторый оператор T есть функция от оператора A', то тем самым будет доказано, что он является также функцией от оператора A.

Условимся в дальнейшем обозначать символом $\mathfrak{B}(A)$ совокупность всех ограниченных самосопряженных операторов, перестановочных с самосопряженным оператором A.

Теорема. *Пусть пространство* H *сепарабельно, а A — некоторый ограниченный самосопряженный оператор в нем. Если замкнутый линейный оператор T с плотной в* H *областью определения перестановочен с каждым из операторов совокупности $\mathfrak{B}(A)$, то T есть функция от оператора A.*

Доказательство. Пусть E_t — разложение единицы оператора A, а $g \in \mathrm{D}_T$ — существующий согласно теореме 2 n° 76 элемент, такой, что всякое множество меры нуль относительно функции распределения $(E_t g, g)$ имеет меру нуль относительно $(E_t h, h)$ при любом $h \in \mathrm{H}$. Этим элементом g мы воспользуемся ниже, а вначале докажем одно вспомогательное предложение.

Лемма. *Для любого $f \in \mathrm{D}_T$ можно указать последовательность многочленов $\mathcal{P}_n(t)$ так, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}_n(A) f = Tf. \tag{1}$$

Действительно, как и в n° 76, введем в H подпространство

$$\mathrm{F} = \{f,\ Af,\ A^2 f,\ \ldots\}$$

и пусть P — оператор проектирования на F. Этот самосопряженный оператор перестановочен с A и, значит, входит в $\mathfrak{B}(A)$. Следовательно, оператор T перестановочен с P, а потому

$$Tf = TPf = PTf \in \mathrm{F}.$$

Полученное включение означает, что для некоторой последовательности полиномов $\mathcal{P}_n(t)$ имеет место (1).

Теперь образуем, как это было сделано в n° 51, гильбертово пространство $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ пар $\{h_1, h_2\}$ и сопоставим оператору B в H оператор

$$\mathbf{B}\{h_1, h_2\} = \{Bh_1, Bh_2\}$$

в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$. Оператору A в H будет соответствовать ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$, а оператору T — лишь замкнутый линейный оператор $\mathbf{T}$ с плотной в $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ областью определения. Ясно, что оператор $\mathbf{T}$ перестановочен с каждым из операторов совокупности $\mathfrak{B}(\mathbf{A})$. Поэтому мы можем к операторам $\mathbf{T}$ и $\mathbf{A}$ применить только что доказанную лемму. Мы применим ее к элементу $\{g, f\}$, где f — произвольный вектор из D_T, а g — тот специальный вектор, который был введен в самом начале доказательства. На основании леммы найдется последовательность полиномов $\mathcal{P}_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_n(\mathbf{A})\{g, f\} = \mathbf{T}\{g, f\}.$$

Но это равенство означает, что

$$\lim \mathcal{P}_n(A)\,g = Tg, \tag{2}$$
$$\lim \mathcal{P}_n(A)\,f = Tf, \tag{3}$$

т. е. одна и та же последовательность полиномов, о которых идет речь в лемме, может быть выбрана для двух элементов из D_T (то, что один из этих двух элементов нами взят специальным образом, сыграет свою роль позже). Благодаря соотношению (2) величина

$$\| [\mathcal{P}_n(A) - \mathcal{P}_m(A)]\,g \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{P}_m(t)|^2\, d(E_t g, g)$$

стремится к нулю при $m, n \to \infty$. Отсюда следует, что последовательность $\{\mathcal{P}_n(t)\}_1^\infty$ сходится в пространстве L_σ^2, где $\sigma(t) = (E_t g, g)$ к некоторой функции $\varphi(t)$. На основании известной теоремы теории функций (ср. n° 11), найдется подпоследовательность $\{\mathcal{P}_{n_i}(t)\}_{i=1}^\infty$, которая сходится к $\varphi(t)$ всюду, кроме некоторого множества нулевой σ-меры, на котором мы можем положить $\varphi(t) = 0$.

Если бы мы взяли другую последовательность полиномов $\{\mathcal{Q}_n(A)\}_1^\infty$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{Q}_n(A)\,g = Tg,$$

то из соотношения

$$\| [\mathcal{P}_n(A) - \mathcal{Q}_m(A)]\,g \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}_n(t) - \mathcal{Q}_m(t)|^2\, d(E_t g, g)$$

мы заключили бы, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \mathcal{Q}_m(t)|^2\, d(E_t g, g) = 0,$$

т. е. функция, к которой в L_σ^2 сходится последовательность $\{\mathcal{Q}_n(t)\}_1^\infty$ совпадает с $\varphi(t)$ почти всюду относительно $\sigma(t)$.

Таким образом, мы получили вполне определенную функцию $\varphi(t)$, которая в силу свойства элемента g измерима и почти всюду конечна относительно операторной меры E_t. Кроме того, благодаря соотношению (3), функция $\varphi(t)$ принадлежит также пространству L_τ^2 при $\tau(t) = (E_t f, f)$, где f — любой элемент из D_T. Отсюда видно, что функция $\varphi(t)$ определяет некоторый оператор $\varphi(A)$ и из равенства

$$(Tf, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E_t f, f) \qquad (f \in D_T)$$

легко заключить, что

$$\varphi(A) f = Tf$$

для любого $f \in D_T$. Это означает, что $\varphi(A) \supseteq T$. Теперь докажем, что $T \supseteq \varphi(A)$, откуда уже будет следовать, что $T = \varphi(A)$. С этой целью обозначим через $\chi_n(t)$ характеристическую функцию множества, на котором $|\varphi(t)| \leqslant n$, и введем проектирующий оператор $\chi_n(A)$, который, очевидно, принадлежит $\mathfrak{B}(A)$. Поэтому оператор T перестановочен с $\chi_n(A)$ и, следовательно, для любого $f \in D_T$ вектор $\chi_n(A) h$ принадлежит D_T, а значит, и $D_{\varphi(A)}$, так что

$$T\chi_n(A) h = \varphi(A) \chi_n(A) h.$$

Покажем, что это равенство справедливо не только при $h \in D_T$, но и при любом $h \in H$. Для этого построим последовательность $h_i \in D_T$, $h_i \to h$, где h — произвольный вектор из H. Так как оператор $\varphi(A)\chi_n(A)$ ограничен, то при $i \to \infty$

$$T\chi_n(A) h_i = \varphi(A) \chi_n(A) h_i \to \varphi(A) \chi_n(A) h.$$

Из замкнутости оператора $T\chi_n(A)$ следует, что $h \in D_{T\chi_n(A)}$ и

$$T\chi_n(A) h = \varphi(A) \chi_n(A) h. \tag{4}$$

Теперь примем, что $h \in D_{\varphi(A)}$. Тогда это равенство можно представить в виде

$$T\chi_n(A) h = \chi_n(A) \varphi(A) h.$$

Но вектор $\chi_n(A) h$ стремится к h при $n \to \infty$. Так как правая часть (4) при $n \to \infty$ стремится к $\varphi(A) h$, то вектор $T\chi_n(A) h$ при $n \to \infty$ имеет предел. В силу замкнутости оператора T это означает, что $h \in D_T$, чем и доказано включение $D_{\varphi(A)} \subseteq D_T$.

92. Теорема о порождающем операторе. Нейману принадлежит также следующая

Теорема. *Для любого множества $\{C_\alpha\}$ попарно перестановочных самосопряженных операторов C_α в сепарабельном пространстве можно указать ограниченный самосопряженный оператор A такой, что все операторы C_α являются функциями от него.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда все операторы C_α ограничены. Сделав это предположение, введем минимальное слабо замкнутое кольцо $\mathfrak{R}$, содержащее все операторы C_α. По теореме n° 90 это кольцо $\mathfrak{R}$ порождается каким-то одним ограниченным самосопряженным оператором A:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A).$$

Теперь введем кольцо $\mathfrak{F}(A)$ всех ограниченных самосопряженных операторов, являющихся функциями от оператора A. Ограниченный самосопряженный оператор B принадлежит $\mathfrak{F}(A)$ в том и только том случае, когда он перестановочен с каждым из операторов, входящих в $\mathfrak{B}(A)$. Отсюда следует, что кольцо $\mathfrak{F}(A)$ слабо замкнуто. А так как это кольцо содержит оператор A, то оно содержит кольцо $\mathfrak{R}(A)$, порождаемое оператором A. Значит,

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{F}(A),$$

что и доказывает теорему.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава III

ПРОЕКТИРУЮЩИЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава V

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава VI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УНИТАРНЫХ И САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Наум Ильич Ахиезер,
Израиль Маркович Глазман

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Том I

Харьков, Издательство при Харьковском государственном университете

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорокун*

Редактор *А. П. Гужва*
Обложка художника *А. Ш. Грубман*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *М. Ф. Христенко,*
Л. П. Пипенко

Информ. бланк № 1858

Сдано в набор 12.XI 1976 г. Подписано в печать 7.II 1977 г. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. 19,75 усл. печ. л. 17,8. уч.-изд. л. Тираж 4000. БЦ 50023. Изд. № 451. Заказ 6-448. Цена 2 р. 45 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков, 3, Университетская, 16.

Книжная фабрика им. М. В. Фруизе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 310057, Харьков, 57, Донец-Захаржевская, 6/8.

2 руб. 45 коп.

Ахиезер Н. И., Глазман И. М.
Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, Издательское объединение «Вища школа», 1977. 316 с.

Монография представляет собой систематическое изложение теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Первое издание вышло в 1950 г., второе — в 1966 в Москве в издательстве «Наука».

Настоящее издание является первой частью второго издания. Оно переработано и дополнено новыми исследованиями, а также отдельными классическими результатами.

Книга предназначена для специалистов-математиков и физиков-теоретиков.