HAMBURGER
MATHEMATISCHE EINZELSCHRIFTEN
8. HEFT/1929

O. NEUGEBAUER

ÜBER VORGRIECHISCHE MATHEMATIK

PREIS *RM* 2.—

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1929

ISBN 978-3-663-15222-4 ISBN 978-3-663-15785-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15785-4

Über vorgriechische Mathematik*).

Von O. NEUGEBAUER, Göttingen.

Die Bezeichnung „vorgriechische“ Mathematik für die Mathematik Ägyptens und Babyloniens — für diese beiden Kulturkreise allein läßt sich bisher eine zusammenhängendere Darstellung versuchen — ist zum Teil nur eine Reminiszenz aus der Zeit, in der man so wenig von den orientalischen Kulturen wußte, daß man sie in ihrer Gesamtheit als homogenes Dunkel dem Griechischen gegenüberstellen konnte. Aber die Bemühungen, die Geschichte des alten Orients aufzuhellen, sind doch nicht nur aus dem Bestreben heraus zu verstehen, irgendeine, nur möglichst alte, Kultur zu erforschen. Immer hat die Frage nach den Quellen der griechischen Kultur die Forschung wesentlich beeinflußt, dies um so mehr, als die Griechen selbst immer wieder Ägypten und Babylon als die Heimat ihrer Wissenschaft, als Orte des Studiums griechischer Gelehrten bezeichnet haben. Mit Recht wird man erwarten können, daß ein vermehrter Einblick in die Geschichte der vorgriechischen Wissenschaft auch das Wesen des Griechischen wird klarer hervortreten lassen.

Ich will im folgenden versuchen, das, was wir heute vom Typus und vom Umfang dieser „vorgriechischen Mathematik“ wissen, in großen Zügen darzustellen. Um das, was mir darin wesentlich erscheint, deutlicher hervortreten zu lassen, werde ich manche Linie härter (und subjektiver) zeichnen müssen, als es den Tatsachen entsprechen mag. Es scheint mir aber hier wichtiger, die großen Umrisse der Entwicklung möglichst deutlich hervortreten zu lassen, statt zu versuchen, mich gegen alle Einwände zu schützen und dabei jede Übersicht unmöglich zu machen[1]).

Abschnitt I. Ziffernsysteme.

Für die Bescheidenheit der Rolle, welche die Arithmetik gegenüber der Geometrie in der klassischen griechischen Mathematik gespielt hat (oder

---

*) Dieses Thema bildete den Gegenstand eines Vortrages, den ich am 11. Februar 1929 im Mathematischen Seminar Hamburg gehalten habe. Den Stoff der beiden ersten Abschnitte habe ich ausführlicher in einer Vorlesung über „Geschichte der vorgriechischen Mathematik“ in Göttingen (Sommersem. 1928) behandelt. Die im dritten Abschnitte vorgetragenen Dinge waren damals zum größten Teile noch unbekannt.

[1]) Die zitierte Literatur beschränkt sich im allgemeinen darauf, die Stellen anzuführen, an denen sich Belege der von mir vertretenen Ansichten finden. Auf Vollständigkeit mache ich in keiner Weise Anspruch.

gespielt haben soll), hat man oft die Unbequemlichkeit der griechischen Zahlbezeichnung verantwortlich gemacht. In der Tat ist die Methode, die willkürliche Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet zur Darstellung der Folge der Einer, dann der Zehner usw. zu benutzen[1]), keine sehr glückliche. Aber ganz abgesehen davon bildet ein solches Verfahren auch eine besondere historische Merkwürdigkeit. Hier sehen wir nämlich das erste Mal die Zahlen auf eine ganz willkürliche Weise bezeichnet, ganz verschieden von der unmittelbar verständlichen Art, der wir etwa in Ägypten begegnen, 2 durch ||, 5 durch ||||| auszudrücken. Dieser Wechsel der Methode ist nur noch mit einer Erscheinung in Parallele zu setzen: dem Übergang von der Bilderschrift zur Buchstabenschrift. Hier wie dort wird nämlich die Mitteilung durch die unmittelbare Abbildung[2]) ersetzt durch ein ausschließlich auf Konvention beruhendes System. Es mag vielleicht die Begeisterung über die ungeheure Einfachheit und Tragweite der Buchstabenschrift gewesen sein, die die Griechen dazu veranlaßt hat, ein Gebiet mit in die Darstellung durch die Buchstaben einzubeziehen, für das sie in Wirklichkeit nicht mehr geeignet waren[3]). Für uns bleibt nur die Parallele wesentlich: Buchstabenschrift und Bilderschrift stehen sich in derselben Weise gegenüber, wie „Zahlbuchstaben" und „*Individualzahlzeichen*" — so will ich kurz jene Zahlzeichen nennen, deren Prinzip darin besteht, jeder Anzahl ihr individuelles Bild (Strichmarken) zuzuordnen. Unser nächstes Ziel soll sein, die Entstehungsgeschichte dieser letzteren Methode etwas näher zu verfolgen.

1. Für die geschichtliche Bedingtheit des Zahlbegriffes bietet selbst eine so hoch entwickelte Kultur wie die ägyptische noch sehr deutliche Beispiele. Es ist für alle „primitiven" Zahlensysteme charakteristisch, daß sie nur einen endlichen Zahlbereich umfassen, d. h., daß an einer bestimmten Stelle das systematische Weiterzählen von n auf $n+1$ abgebrochen wird und eine Bezeichnung des allgemeinen Sinnes „viele" an dessen Stelle tritt. Oder besser umgekehrt: überschreitet die Anzahl der zu zählenden Dinge eine gewisse Schranke N, so werden sämtliche Anzahlen $>N$ mit dem „Zahlwort" N bezeichnet, dessen Bedeutung „viele" ist. „Ein Greis von drei Jahren" ist ein (der modernen Ein-

[1]) $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bedeuten bzw. $1, 2, 3, \cdots$; $\iota, \varkappa, \lambda \cdots 10, 20, 30, \cdots$ usw. $22 = \varkappa\beta$. Einzelheiten z. B. bei Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme I, Leipzig 1928.

[2]) Der allmähliche Abschleifungsprozeß, der von einer reinen Bilderschrift zu einer „rebusartigen" Silbenschrift oder zu noch näher an der Buchstabenschrift gelegenen Systemen führt, bleibt hier natürlich außer Betracht.

[3]) Das System der Buchstabenschrift haben die Griechen bekanntlich bei den Phönikern kennengelernt. Die phönikischen Zahlzeichen sind aber *nicht* Buchstaben, sondern „Individualzahlzeichen". Die hebräischen Zahlbuchstaben sind aus den griechischen abgeleitet (vgl. z. B. Hallo, Zeitschr. D. Morgenl. Ges., N. F. 5, S. 56).

geborenenforschung entnommenes) Beispiel für ein sehr kleines N[1]). Ägypten ist über diese Stufe bereits weit hinaus, wenn auch in dem „Pluraldeterminativ“ ||| solche alte Rudimente von 3 = „viele“ stecken mögen[2]). Wohl aber ist durch die geschichtliche Zeit hindurch zu verfolgen, wie sich jenes N (diesmal aber in der Größenordnung 10^3) allmählich nach oben verschiebt, um dann in der Periode des Niederganges der Spätzeit wieder herabzusinken.

2. Wenn man auch schon aus den eben gestreiften Beispielen erkennen kann, wie sehr ein „Zahlensystem“ historisch bedingt ist, so wird dieses erst recht deutlich, wenn man die Zahlbezeichnungen der „Primitiven“ betrachtet. Es zeigt sich da ganz deutlich, wie „anschauungsgebunden“ der Zahlbegriff ursprünglich ist. So gibt es beispielsweise Sprachen, in denen a Gegenstände der einen Art anders bezeichnet werden als a Gegenstände der anderen Art *(„Zählklassen“)*. Man ist hier also noch nicht so weit gelangt, einen allgemeinen Anzahlbegriff aus dem Abzählen verschiedener Mengen zu abstrahieren. Der Ausbildung einer *„systematischen“* Zahlbezeichnung, wie der ägyptischen, mit ihren gleichartig wiederholten Einermarken, dann ebenso wiederholten Zehnerzeichen und konsequenter additiver Verknüpfung geht also noch eine *„unsystematisch“* verfahrende Stufe voran.

Die Erforschung der Primitivenkulturen liefert aber nicht nur Beispiele „unsystematischer“ Zahlbezeichnungen, sondern sie führt uns auch noch die Entstehung der „systematischen“ Methode vor Augen durch den Übergang zu Kerbmarken, durch das Einschalten der Anzahlen von „Händen“, wenn je fünf Einheiten beisammen sind, usw. Es ist eine reizvolle Aufgabe, mit Hilfe dieses (sehr umfangreichen) Materials der Geschichte der Zahlensysteme mit ihren verschiedenen „Basiszahlen“ 5, 10, 20 usw. nachzugehen[3]). Auch der Mathematiker, der sich mit den philosophischen Grundlagen seiner Wissenschaft beschäftigt, darf an diesen Erfahrungstatsachen nicht vorübergehen und sie durch reine Spekulation ersetzen.

3. Die Zahlensysteme der vorgriechischen Mittelmeerkulturen sind in geschichtlicher Zeit bereits sämtlich (soweit bis jetzt bekannt) auf

---

[1]) Eine sehr übersichtliche Zusammenstellung hierhergehöriger Dinge bietet FETTWEIS, Das Rechnen der Naturvölker, Leipzig 1927. Für Ägypten vgl. SETHE, Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern, Straßburg 1916. Besonders sei noch auf die Werke von LEVY-BRUHL hingewiesen (Das Denken der Naturvölker u. a.).

[2]) So auch vielleicht in Bezeichnungen wie „die 9-Bogenländer“ für die Gesamtheit aller (3 mal 3!) Feinde. Daran anschließend Zahlenspielereien mit 33 333 u. dgl.; vgl. ED. MEYER, Gesch. d. Altertums, 2. Aufl., Bd. 2, 1, S. 145. Vgl. aber SETHE, l. c., Anm. 1, S. 36.

[3]) Eine gute Übersicht gibt SCHMIDT, Die Sprachfamilien und Sprachkreise der Erde, Heidelberg 1926, in einem Kapitel über die Zahlwörter.

der „systematischen“ Stufe angelangt. Sie haben alle 10 als Basis — mit *einer,* aber desto wichtigeren Ausnahme (und zwar Ausnahme in zweifacher Hinsicht): Das babylonische (wissenschaftliche[1])) Zahlensystem hat 1. die *Basis 60* und kennt 2. einen *„Stellenwert“ („Position“)* seiner Zahlzeichen. D. h.: man schreibt 1,40 für 100 (nämlich $100 = 1.60 + 40$), und zwar mit demselben Zahlzeichen „1“ für alle Potenzen 60^ν bei jedem positiven oder negativen ganzzahligen Exponenten ν. Es gibt also insbesondere keine besonderen Zeichen für die einzelnen Potenzen der Basis, wie dies sonst in einem mit „Individualzahlzeichen“ geschriebenen System üblich ist[2]). Die Ungewöhnlichkeit der Basis 60 hat zu vielen Erklärungsversuchen Anlaß gegeben. Viel mehr einer Erklärung bedürftig und für die Geschichte der Mathematik sehr viel wesentlicher ist aber die andere Frage: *Woher kommt die Positionsschreibung?* Hier haben wir ein so vollkommenes Abweichen von aller sonstigen historisch verständlichen Entwicklung, andererseits einen so wesentlichen Schritt in Ausbildung des Zahlenrechnens überhaupt vor uns, daß hier vor allem jeder Erklärungsversuch einsetzen muß; die Frage nach der Basis könnte man allenfalls auf das Gebiet der primitiven Entstehung des Zahlbegriffes zu verschieben suchen (was auch wirklich unternommen worden ist), nicht aber eine Sache, die so außerhalb jeder selbstverständlichen Entwicklung liegt wie die Verwendung eines einzigen Zeichens für sämtliche Basispotenzen. Die Entstehung der Basis 10 und der Individualzahlzeichen gehört in ein Niveau, in dem man sich noch mit dem *Zählen* auseinanderzusetzen hat, die Positionsmethode ist schon eine Angelegenheit des systematischen *Rechnens.*

Abschnitt II. Rechentechnik.

1. Die Einsicht, daß vom Zählen zum wirklichen Rechnen, d. h. zum Rechnen nach einem festen Schema, nach einem „Algorithmus“, noch ein weiter Weg ist, führt dazu, eine *„präalgorithmische“* Epoche von jener „algorithmischen“ zu trennen, mit der die Entwicklung der eigentlichen Mathematik beginnt. Das im ersten Abschnitt Besprochene gehört im wesentlichen der präalgorithmischen Periode an, beeinflußt aber in vieler Hinsicht entscheidend den Typus der folgenden Entwicklung. Eine scharfe Grenze zwischen beiden Phasen ziehen zu wollen, wäre selbstverständlich etwas Künstliches; trotzdem bedeutet die volle Ausbildung einer systematischen Zahlbezeichnung, etwa dezimaler Basis, und zu-

[1]) Neben dem Zahlensystem der mathematischen und astronomischen Texte sind auch Schreibungen im Gebrauch, die dezimale Stufen (wie 600) besonders hervorheben. Die Geschichte dieses Mischungsprozesses ist im einzelnen noch ungeklärt.

[2]) So hat Ägypten beispielsweise besondere Zeichen für 1, 10, 100 ...

gehörige Addition und Subtraktion einen deutlichen Abschluß. Ein allgemeiner Anzahlbegriff, eine Vertrautheit mit dem Bereich der positiven ganzen Zahlen ist von da an vorhanden.

2. Die weitere Entwicklung ist, um es hier schon vorauszunehmen, für die vorgriechischen Kulturen ganz scharf begrenzt: sie geht über die Einbeziehung der Gesamtheit aller positiven Rationalzahlen nicht hinaus. Der nächste Schritt, die Entdeckung der Irrationalzahlen, bildet eine der Glanzleistungen der griechischen wissenschaftlichen Mathematik. Die vorgriechische Mathematik begnügt sich damit, mit dem Gebiet der Bruchrechnung auf ihre Weise fertig zu werden.

Die Entdeckung der Irrationalzahlen bedeutet aber auch für die griechische Mathematik noch lange nicht, daß das einfache Rechnen, Bruchrechnung und sogar Multiplikation, eine selbstverständliche Angelegenheit geworden wären. Insbesondere die Bruchrechnung ist noch auf lange hinaus eine sehr komplizierte Materie für die Praxis geblieben. Die Geringschätzung, mit der diese ganze „Logistik“ von der akademisch-philosophischen Richtung behandelt wurde, hat ihr auch nicht über den toten Punkt hinweghelfen können. Sie war viel zu sehr belastet von der alten ägyptischen Tradition, aus der sie erwachsen war, als daß sie zu mathematisch durchgebildeten Formen hätte gelangen können. Für die geschichtliche Betrachtung erhebt sich aber die Frage, wie ein solches Verfahren überhaupt entstehen konnte und führt uns damit zur Geschichte der ägyptischen Bruchrechnung.

Hier haben wir es wieder mit einem jener Punkte zu tun, wo uns nur die Betrachtung der „präalgorithmischen“ Periode zu einem geschichtlichen Verständnis führen kann. Man muß sich nämlich darüber klar werden, daß der Bruchbegriff ebenso eine Entstehungs*geschichte* hinter sich hat wie der Zahlbegriff. Es gibt oder gab wenigstens eine Schul-„definition“ des Bruches als „angezeigte Division“. Daß eine solche Betrachtungsweise selbst für die historische Entwicklung nicht in Frage kommt, liegt auf der Hand. Vielmehr zeigt sich, daß *parallel* mit der Entstehung eines Zahlensystems auch die Entwicklung gewisser einfachster Bruchbegriffe einhergeht, die ich kurz als die *„natürlichen Brüche“* bezeichne. Sie treten als selbständige und gleichberechtigte Elemente neben den eigentlichen Anzahlbegriff. Solche „natürliche Brüche“ sind einfache *„Stammbrüche“* (d. h. Brüche des Zählers 1), so vor allem $\frac{1}{2}$, dann $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw., zu denen sich noch gewisse „Komplementbrüche“ $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ wie $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ gesellen. SETHE hat für diese letztere Erscheinung den Grund darin aufgedeckt, daß er nachwies, daß ihrem sprachlichen Ausdruck die Bedeutung „des letzten in der Reihe der Bruchteile der Einheit bis zu ihrer Wiedervervollständigung“ zukommt. Überhaupt ist gerade die

Sprache das Hilfsmittel, aus dem man noch jetzt die ehemalige Sonderstellung der natürlichen Brüche gegen die Gesamtheit der übrigen erkennen kann (in Analogie zum deutschen „halb“ statt „zweitel“). Aber nicht nur die Sprache allein, auch die Bruchteile der Maße und Gewichte verhelfen uns zur genaueren Umgrenzung dieses Bereiches — daß er sich allmählich verändert, läßt sich an analogen Erscheinungen, wie sie oben an der Schranke „N“ eines Zahlensystems erwähnt wurden, verfolgen. Auf die enge Verknüpfung von Entwicklung des Bruchbegriffes und Ausbildung der Maßsysteme werden wir noch zurückzukommen haben.

Die ägyptische Bruchrechnung zeigt nun in ihrer eigentümlichen Gestalt noch deutlich die Spuren jener Fragen, die sich beim Beginne eines algorithmischen Rechnens einstellen mußten. Die einfachste und erste Rechenoperation nach dem Dazugeben und Wegnehmen (bei Individualzahlzeichen ist das eine Selbstverständlichkeit, da es im Prinzip noch auf ein Abzählen der Marken hinausläuft) ist das Verdoppeln (Parallele: die Rolle des Bruches $\frac{1}{2}$!). In der konsequenten Art, mit der die Ägypter das einmal Erreichte nicht wieder fallen lassen und das Neue nur als Umwandlung des Alten gelten lassen, wird nun jede Vervielfachung additiv aus geeigneten Verdopplungen zusammengesetzt. Damit ist bereits für alle Zeiten ein festes Rechen-*Schema* eingeführt, das nie mehr verlassen worden ist. Aber gerade die Ausbildung einer solchen festen Methode muß sofort zeigen, daß der bisherige Zahlbegriff (ganze Zahlen *und* natürliche Bruchteile) zu eng ist, daß man zur Ausführung der „Division“[1]) die Unterteilung der Einheit weitertreiben muß, daß man die „natürlichen“ Brüche um die Gesamtheit der „algorithmischen“ Brüche, wie sie das Rechnen bedingt, erweitern muß. Das Fundament einer solchen erweiterten Bruchrechnung bilden selbstverständlich die eigentlichen „Teile“ der Einheit, die „Stammbrüche“, denn nur diese können unmittelbar als Elemente der Anschauung, als einfache „Zahlen“ gelten[2]).

---

[1]) In der Verwendung dieses Wortes liegt natürlich ein Anachronismus. Der Ägypter faßt seine „Division“ ganz sauber in die Worte: „addiere, angefangen mit (a), bis Du (b) findest“ (unter deutlicher Bezugnahme auf seine dyadische Multiplikationsmethode!).

[2]) An die Tatsache, daß die ägyptische Bruchrechnung ausschließlich Stammbrüche kennt (immer abgesehen von dem einen Komplementbruch $\frac{2}{3}$), hat sich eine ganze Literatur geknüpft, die sich mit der Frage beschäftigt, ob der Ägypter „den Begriff“ des allgemeinen oder gemischten Bruches m/n ($m \neq 1$) gekannt hätte, ob er ihn hätte „denken können“. Dabei ist der historische Sachverhalt ganz eindeutig der, daß nirgends in der ägyptischen Mathematik andere als Stammbrüche vorkommen, daß der ganze Apparat der ägyptischen Bruchrechnung nur dazu bestimmt ist, den gemischten Bruch zu vermeiden, daß der Ägypter weder eine sprachliche noch schriftliche Möglichkeit gekannt hat, einen allgemeinen Bruch auszudrücken (hierauf hat Sethe besonders hingewiesen). All dies zeigt doch ganz klar, daß der Ägypter nie m/n als *eine* Zahl, mit der man als solcher rechnen könnte, angesehen hat. Das allein ist aber für die Geschichte

Aber das dyadische Multiplikationsschema erzwingt noch mehr: man muß immer wieder das Doppelte von Stammbrüchen bilden (aber auch nicht mehr!) und diese neuen mathematischen Gebilde durch die elementaren, die Stammbrüche, ausdrücken[1]). Mit andern Worten: *das Grundproblem der ägyptischen Bruchrechnung besteht in der Aufgabe, das Doppelte eines Stammbruches als Summe von Stammbrüchen auszudrücken.* Hinzukommt aber noch eine Verschärfung: *dabei ist aber $\overline{n}+\overline{n}$ auszuschließen*[2]), offenbar deshalb, weil diese Zerlegung im Laufe der weiteren Rechnung bloß zu einer Anhäufung desselben Schriftzeichens führen würde, das nicht mehr als der „triviale" (weil additive) Ausdruck der Vielfachheit wäre. Der Wunsch, auch bei der Vervielfachung von Bruchteilen zu einem formal neuen Ergebnis zu gelangen, wie es bei der Multiplikation ganzer Zahlen erreicht wird, mag hier bestimmend gewesen sein. Wir werden sehen, wie die *dyadische* Struktur dieser Zerlegungen schließlich auch in gewissem Sinne zur Erfüllung dieses Wunsches führt.

Rein mathematisch genommen ist die gestellte Aufgabe offenbar unendlich-vieldeutig. Trotzdem stimmen alle erhaltenen Zeugnisse der

---

der Mathematik interessant und zeigt nur wieder sehr deutlich, wie logisch einwandfrei die ägyptische Mathematik in ihrer Ursprünglichkeit ist. Erst der Umweg über den gedankenlos zu handhabenden (weil äußerst bequemen) Dezimalbruchalgorithmus hat zu jenem „Begriff" des allgemeinen Bruches führen können, den mit Recht auch heute noch Kinder nicht verstehen wollen. — Daß sich der Ägypter fünf Siebentel ebensogut denken konnte, wie 5 Ochsen, ist eine Selbstverständlichkeit. Nur haben sie sich geweigert, einen solchen *komplexen* Begriff als den ganzen Zahlen und Stammbrüchen prinzipiell gleichwertig zu betrachten und damit so zu rechnen, als wären es richtige „Zahlen". Es erscheint mir als besonderer Reiz der geschichtlichen Betrachtung, verfolgen zu können, zu welchen Umwegen die Beschränkung auf den „natürlichen" Zahlbegriff gezwungen hat — die ägyptische Bruchrechnung ist ein viel drastischeres Beispiel, als das übliche der imaginären Zahlen.

In diese Diskussion wird rein gefühlsmäßig die Frage nach der „Wissenschaftlichkeit" des ägyptischen Denkens überhaupt hineingezogen, die durch die Nichtexistenz eines scheinbar so „elementaren" Begriffes wie des „allgemeinen" Bruches bedroht erscheint (statt im Gegenteil zu sagen: *daß* er nicht existiert, ist ein besonderer Beweis für die Sauberkeit der Überlegung!). Ich gestehe, daß mir diese Frage hauptsächlich eine Frage des persönlichen Geschmackes und der Terminologie zu sein scheint. In dem speziellen Gebiete der Mathematik wäre eine Einigung dadurch sehr einfach möglich, daß man als *wissenschaftliche* Mathematik nur diejenige bezeichnet, die die *Beweisbarkeit* mathematischer Tatsachen klar erfaßt hat. Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen vorgriechischer und griechischer Mathematik. — Die idealistische Gesinnung ist eine nur schwer konstatierbare Sache und würde auch für andere Epochen zu Schwierigkeiten in der Terminologie Anlaß geben.

[1]) Psychologisch ist hier dasselbe Streben am Werke, das in der Geschichte des Funktionsbegriffes zu Unterscheidungen wie „algebraisch"-„transzendent" oder „elementar"-„willkürlich" usw. Anlaß gegeben hat.

[2]) Ich schreibe immer $\overline{n}$ für $1/n$ (und $\overline{\overline{3}}$ für $\frac{2}{3}$), um dem ägyptischen Schriftbild nahezukommen, das keine Bezeichnung des Zählers kennt.

ägyptischen Bruchrechnung darin überein, daß ausschließlich *eine* ganz bestimmte Art von Zerlegungen verwendet wird. Die umfangreichste Liste dieser Zerlegungen ist die „*2/n-Tabelle*" des „mathematischen Papyrus Rhind". Um das Prinzip ihrer Auswahl zu erklären, darf man selbstverständlich nicht erwarten, mit modernen Vorstellungen, wie möglichst gute Approximation durch das erste Glied der Zerlegung od. dgl., durchzukommen, denn diese Bruchrechnung ist ein ganz allmählich entstandenes Gebilde[1]) — man hätte sich sonst die ganze Sache schon sehr viel einfacher machen können, wenn man so weittragende mathematische Begriffsbildungen zur Verfügung gehabt hätte. Wohl aber läßt sich die historisch gegebene Struktur der $2/n$-Tabelle verstehen, wenn man versucht, sie aus den sinngemäß erweiterten ägyptischen Methoden herzuleiten, wie sie für das Operieren mit ganzen Zahlen üblich sind. Ich habe schon oben erwähnt, daß in konsequenter Beibehaltung der additiven Grundlage des Zahlenrechnens die ägyptische Multiplikation zu einem festen dyadischen Schema gelangt war, das (modern ausgedrückt) darin besteht, daß man den einen Faktor dyadisch entwickelt. Dieses Aufbauen aus dyadisch geordneten Elementen führt nun in rein schematischer Übertragung zu den „kanonischen" (d. h. historisch allein bevorzugten) $2/n$-Zerlegungen: an die Stelle der dyadischen Multipla $2n$, $4n \cdots$ treten einfach $\overline{2}\,\overline{n}$, $\overline{4}\,\overline{n}$ usw. oder (und das zeigt wieder die Bedeutung des Komplementbruches $\frac{2}{3}$) $\overline{\overline{3}}\,\overline{n}$, $\overline{3}\,\overline{n}, \cdots$ um daraus $2\,\overline{n}$ aufzubauen. Nur eines muß man dabei beachten: man darf auch hier nicht in den Fehler verfallen, einen modernen Begriff, die systematische Entwicklung nach Dualbrüchen, in die Untersuchung einzuschmuggeln. Nicht die Aufgabe, nach einem bestimmten Gesetz zu „entwickeln", entspricht dem historischen Sachverhalt, sondern das Bestreben, kompliziertere, unanschauliche Gebilde durch elementarere zu umschreiben. „Elementarere" Begriffe sind aber vor allem die „natürlichen" Bruchteile, so daß die Aufgabe nun so lautet: *$2\,\overline{n}$ durch Aggregate „natürlicher" Bruchteile von $\overline{n}$, in dyadischer Reihenfolge geordnet, aufzubauen.* Die Durchrechnung dieser Forderung, die ich hier nicht in ihren Einzelheiten vorführen kann[2]), führt nun wirklich auf die als

[1]) Ebenso halte ich es für methodisch ganz verkehrt, wenn man immer Dokumente mit zur Diskussion der ägyptischen Bruchrechnung heranzieht, die $1\frac{1}{2}$ Jahrtausende jünger sind, nur weil sie auch aus dem Lande Ägypten stammen (Pap. v. Achmim). Man schaltet dadurch die ganze griechische Entwicklung einfach aus, von der wir doch so gut wie gar nichts wissen.

[2]) Hinsichtlich dieser Einzelheiten, insbesondere der Frage nach der Bestimmung des ergänzenden Stammbruches, der durch die Endlichkeit der dyadischen Entwicklung bedingt wird, vgl. NEUGEBAUER, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Springer, 1926 und Zeitschr. f. Äg. Sprache und Altertumskunde, Bd. 64 (1929), S. 44 ff.

„kanonisch“ überlieferten Zerlegungen der ägyptischen Texte. Ihr Fundament ist nun historisch verständlich: Übertragung des gewohnten dyadischen Schemas auch auf die Stammbrüche, unter Hervorhebung ihrer natürlichen Bruchteile.

In der Praxis des Rechnens mit diesen Zerlegungen von $2/n$ in bestimmte Stammbruchsummen wird nun von selbst ein Wunsch erfüllt, den wir oben zur Motivierung des Verbotes der „trivialen“ Zerlegung $\bar{n} + \bar{n}$ herangezogen hatten: der Wunsch, bei dem Vervielfachen von Brüchen ebenso formal neue Ergebnisse zu erhalten, wie bei der Multiplikation ganzer Zahlen. Die dyadische Anordnung der zur Zerlegung herangezogenen Bruchteile von $\bar{n}$ hat nämlich den Erfolg, daß die einzelnen Glieder der Zerlegung Potenzen von 2 enthalten, die bei fortgesetzter Verdopplung, wie sie bei einer Multiplikation mit Zahlen größer als 3 nötig wird, sich einfach wegkürzen, so daß sich die $2/n$-Zerlegungen nicht fortgesetzt häufen und im Resultat oft recht übersichtliche Zerlegungen ergeben, die man dann sehr gut zu approximativer Abschätzung gebrauchen kann. Jede wirkliche Konsequenz im Aufbau eines Algorithmus (hier die Dyadik) trägt eben irgendwo ihre Früchte, selbst wenn sie nicht vorhergesehen und beabsichtigt waren.

3. Die besondere Rolle der „natürlichen“ Bruchteile versteht man besser, wenn man nicht nur das Rechnen, sondern auch seine geschichtliche Quelle, das Messen, etwas näher betrachtet. Überall sind es gerade die natürlichen Bruchteile, die von den größeren zu den kleineren Maßeinheiten führen. Diese Bedeutung der „Metrologie“ für den Bruchbegriff zeigt z. B. sehr deutlich die römische Bezeichnung *uncia* für $\frac{1}{12}$ oder die babylonische „10 Schekel“ für $\frac{1}{6}$ gewisser anderer Maße, die ursprünglich mit dem Gewichtsmaß „Schekel“ nichts zu tun haben (denn das Schekel ist $\frac{1}{60}$ der „Mine“) u. a. m. Maßsystem und Zahlensystem stehen eben in dauernder Wechselwirkung aufeinander und bedingen gegenseitig ihren Aufbau. Während der Bruchbegriff wesentlich der Metrologie entstammt, verdankt diese ihrerseits die Ordnung ihrer ganzzahligen Multipla der Struktur des Zahlensystems[1]). So ist beispielsweise die Reihe der ägyptischen „Scheffel“-Multipla dezimal geordnet und dies mit einer sehr

[1]) Um Mißverständnisse, von der Art der S. 6, Anm. 2, erwähnten, auszuschließen, möchte ich betonen, daß ich nicht etwa sagen will, daß man z. B. zuerst bis 10 zählen „kann“, ohne $\frac{1}{2}$ „denken zu können“, dann erst in der Metrologie „lernt“ usw. Was ich sagen will, ist nur: die entscheidende Prägung erhält der Bruchbegriff durch seine Bedeutung beim Messen, das ja auch in erster Linie zur Betrachtung von „Teilen“ zwingt. Dagegen ist der Anzahlbegriff in prinzipieller Hinsicht um eine Stufe tiefer zu rücken, da er bereits ein Abstraktionsresultat ist. Daß sich beide Prozesse in der kompliziertesten Weise überlagern, ist eine Selbstverständlichkeit. Schlagworte, wie „Zählen geht vor Messen“, halte ich für absolut verderblich, weil sie jedes geschichtliche Denken behindern und der Diskussion den Charakter einer Wählerversammlung geben.

charakteristischen Eigentümlichkeit; diese dezimalen Multipla können kurzerhand wieder mit „1“ bezeichnet werden ohne besondere Kennzeichnung der Absolutgröße der Einheit[1]). Die scheinbare Unzulänglichkeit und Mehrdeutigkeit einer solchen Bezeichnungsweise fällt sofort weg, wenn man sich klar macht, daß wir in der Praxis immer wieder genau dasselbe erleben; niemand wird bei dem Wort „Millionendiebstahl“ im Zweifel über die gemeinte Größenordnung sein[2]). Geschichtlich gesehen, haben wir es aber hier mit einer äußerst belangreichen Sache zu tun: Die Metrologie führt ganz von selbst zu einer Art „positioneller“ Schreibung der Zahlen in dem Sinne, daß die Reihe der Zahlen nicht von einer bestimmten Einheit an in infinitum fortgesetzt wird, sondern bei Erreichen der nächsthöheren Stufe wieder mit „1“ beginnt.

Hier ergibt sich, wie mir scheint, auch ein Anhaltspunkt, von dem aus man auch die Entstehung des babylonischen Sexagesimalsystems aufhellen kann, das wir am Ende des ersten Abschnittes in keiner Weise unter die übrigen Zahlensysteme einzuordnen vermochten. Wie schon dort hervorgehoben, ist das mathematisch Entscheidende nicht so sehr der ungewöhnliche Wert 60 der „Basis“ als die Bezeichnung aller Potenzen dieser Basis durch „1“. Das eben Dargelegte weist deutlich den Weg, den man zu gehen hat: Man hat die Wurzeln des Systems in der Geschichte der Maßsysteme zu suchen.

Zunächst muß man aber dieses „Positions“system selbst noch etwas näher in Augenschein nehmen. Es zeigt sich nämlich dabei ganz unmittelbar, daß es von einem mathematisch konsequenten Stellenwertsystem ganz prinzipiell verschieden ist: Es kennt keine Null (wenigstens in der klassischen Epoche der sumerisch-babylonischen Mathematik — später erscheint dann eine Aushilfsbezeichnung). Das besagt, daß man ausfallende Potenzen nur durch größeren Abstand der Zahlzeichen andeutet, und vor allem: man kennt kein „Sexagesimalkomma“, also keinen absoluten Stellenwert. Alle Zahlen sind demnach nur bis auf eine multiplikative (positive *oder* negative!) 60er Potenz bestimmt. Ferner: Es gibt nicht 59 verschiedene Zahlzeichen, sondern nur 10, (oder, wenn man will, nur 2, nämlich ein Einer- und ein Zehnerzeichen), aus denen man alles andere additiv aufbaut. Die ganze Ziffernschreibung zwischen 1 und 60 entspricht genau der sonst üblichen Methode (mit „Individualzahlzeichen“), und die Besonderheiten beginnen erst bei der Zahl 60; man schreibt 23 als 10 10 1 1 1, aber 71 als 1 10 1 (was ich in

---

[1]) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers in der Zeitschrift für ägypt. Sprache und Altertumskunde „Über den Scheffel und seine Teile“.

[2]) Ein sehr krasses Beispiel ist der heutige Sprachgebrauch in Österreich: Niedrige Zahlen sind in Schillingen zu verstehen, hohe („Millionen“) aber in den 10000mal wertloseren Inflationskronen.

Zukunft durch 1,11 abkürzen werde)[1]. Man sieht: das „sexagesimale Positionssystem“ ist im strengen Sinne weder ein Sexagesimalsystem noch ein Positionssystem!

Diese scheinbare Komplizierung der Tatsachen gibt aber die Möglichkeit, sie als historisch geworden zu verstehen. Unmittelbar erkennbar ist so die Zusammensetzung aus zwei Komponenten: einem ganz üblichen dezimalen Zahlensystem und einem positionellen System der Stufe 60 von Einheit zu Einheit. Ich habe in einer ausführlichen Arbeit[2]) zu zeigen versucht, daß die Untersuchung der Metrologie wirklich zu einer Erklärungsmöglichkeit dieser sexagesimal-positionellen Komponente führen kann. Eine Diskussion des im einzelnen recht verwickelten sumerischen (d. h. vorsemitischen) Maßsystems bringt eine klare Anordnung der Einheiten ans Licht, deren typische Struktur folgendermaßen zu kennzeichnen ist: Neben der Grundeinheit einer Gruppe sind ihr Zehnfaches und ihr Halbes, Drittel und Zweidrittel besonders hervorgehoben. Um diesen „Kern“ liegt dann beiderseits ein „Rand“ der Stufe 60, d. h. Einheiten, die das 60fache bzw. $\frac{1}{60}$ der Grundeinheit ausmachen. Und diese letzteren sind, was im Bereiche der Maße nicht weiter Wunder nimmt, wieder mit „1“ bezeichnet[3]. Ein Problem bleibt jetzt nur die Größe 60 der Stufe. Diese ist aber wieder aus der Struktur der eben erwähnten „Kerne“ leicht zu verstehen. Bei der Aneinandergliederung der einzelnen Maßgruppen wird man naturgemäß darauf bedacht sein, den Abstand sukzessiver Einheiten so zu wählen, daß sich die Bruchteile der einen Einheit als ganzzahlige Multipla der nächst kleineren ausdrücken. Die Bruchteile $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ verlangen Teilbarkeit durch 6, die, zusammengenommen mit der dezimalen Struktur der ganzen Multipla und des Zahlensystems, in der Tat die Stufe 60 sehr nahelegt[4].

---

[1]) Übrigens zeigt schon dieses Beispiel die Möglichkeit von Mehrdeutigkeiten in dieser Schreibweise: 1 10 1 ist nicht nur als 1, 10 + 1 lesbar, sondern auch als 1,10,1 = 4201. Nur der Zusammenhang eines Textes vermag oft allein solche Schwierigkeiten zu beseitigen, wenn sich auch gut geschriebene Texte Mühe geben, sie dadurch zu vermeiden, daß verschiedene Sechzigerpotenzen hinreichend aneinandergerückt werden (wie 14 und 1 4).

[2]) Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. nat. Kl., N. F. 13, 1 (1927).

[3]) Auf eine hiermit eng zusammenhängende Frage, nämlich das Auftreten mehrdeutiger Zahlzeichen im Gebiete der sumerischen Metrologie, kann ich hier nicht näher eingehen, wenn sie auch für die Untersuchung selbst von großer Bedeutung ist.

[4]) In einer unlängst erschienenen Arbeit (L'origine du système sexagésimal, Rev. d'Ass. 25, p. 115) hat THUREAU-DANGIN im Gegensatz zu meiner Auffassung wieder den Bruch $\frac{1}{6}$ in den Vordergrund zu schieben versucht. Ich kann dieser Ansicht deshalb nicht beipflichten, weil ich glaube, daß die Erscheinung der „Position“ zwangläufig dazu führt, die Wurzeln des Systems in der Metrologie zu suchen (was auch THUREAU-

So können wir uns von dem gesamten geschichtlichen Werdegang ein Bild machen. Neben einem dezimalen Zahlensystem steht ein sexagesimal und positionell geordnetes Maßsystem, dessen Ziffernschreibung nach der Methode der Individualzahlzeichen angelegt ist. Dadurch, daß der Anwendungsbereich des Zahlenschreibens naturgemäß im Wirtschaftsleben zu suchen ist, ist man gar nicht vor die Notwendigkeit gestellt, dieses dezimale System über 59 hinaus mit besonderen Zehnerpotenzen weiterzuführen, weil dort die Einheitenfolge sexagesimal geregelt ist. So wird allmählich jede Zahlenschreibung sexagesimal, wobei dieser Prozeß sicherlich durch die idealen Teilbarkeitseigenschaften der Basis 60 unterstützt worden ist[1]). So werden sich insbesondere Feldmessung und Astronomie dieses Systems bemächtigt haben, wie ja auch die 360grädige Kreisteilung ersichtlich eine Abrundung des vollen Jahreskreises zugunsten der Anpassung an dieses Zahlensystem darstellt[2]).

4. Für die babylonische (oder besser sumerische) Mathematik ist die Entwicklung des Zahlensystems mit der Erreichung dieses pseudosexagesimalen Positionssystems abgeschlossen. Erst in Indien gelangt man zum eigentlichen Positionssystem mit bewußter Verwendung der Null — die Geschichte dieser Entdeckung liegt heute noch ganz im Dunkel.

Aber auch ohne absoluten Stellenwert[3]) hat es die babylonische Mathematik zu einer glänzenden Beherrschung des sexagesimalen Rechnens gebracht — weit über alles hinausgehend, was wir etwa für Ägypten oder die frühgriechische Zeit gewohnt sind. Die Unbestimmtheit aller Rechnungen bezüglich eines Faktors 60^{ν} bringt es mit sich, daß man die Sorge einer besonderen Bruchrechnung los ist. $\frac{1}{2}$ mal $\frac{4}{5}$ (das in Ägypten durch $\overline{3}+\overline{15}$ wiederzugeben wäre) ist einfach 30.48 gleich 24. Solche Rechnungen werden durch Tafeln der Produkte und Reziproken erleichtert, bei einiger Übung bedarf man aber ihrer nur in den komplizierteren Fällen.

Dangin zubilligt), daß man aber dann nicht von vorneherein alle Verhältnisse zwischen den Einheiten durch Sechstel umschreiben darf (z. B. $\frac{4}{6}$ für $\frac{2}{3}$ usw.), da man damit das zu Beweisende bereits in die Voraussetzungen nimmt. Woher diese Sonderrolle des $\frac{1}{6}$ kommen soll — dazu außerdem noch unter Umgehung von $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ im Gegensatz zu aller „natürlichen" Entwicklung des Bruchbegriffes (vgl. oben S. 5) —, bleibt dabei vollkommen unverständlich. (Zusatz bei der Korrektur.)

[1]) Diese allein für die Entstehung des Sexagesimalsystems verantwortlich zu machen, geht nicht an, einmal, weil derartige Überlegungen nicht an der Spitze der Entwicklung stehen können, dann aber, weil damit der markanteste Zug des Systems, die unvollkommene Position, nicht erfaßt werden kann.

[2]) Vgl. S. 3 f. der in Anm. 2 von S. 11 genannten Arbeit.

[3]) Gelegentlich hilft man sich dadurch, daß man in den Angaben die entscheidende Zahl in Worten ausdrückt, woraus sich dann meist der Stellenwert aller folgenden Zahlen eindeutig ergibt.

Zu welcher Höhe der Rechentechnik man in sehr früher Zeit gelangt war, mag ein Beispiel zeigen[1]), dessen Zusammenhang mit dem übrigen Text uns hier nicht weiter interessieren soll.

„... 13,20 quadriert ist 2,57,46,40.

2,57,46,40 zu 50,33,20 addiere.

53,31,6,40 gibt es. 53,31,6,40 hat 56,40 als Quadratwurzel ...“

Ich glaube, daß man schon aus diesen wenigen Zahlen die Leistungsfähigkeit der babylonischen Rechentechnik erkennen kann; in dezimaler Umschreibung ist 53,31,6,40 = 11 560 000[2]).

Abschnitt III. Geometrie.

Was haben die Griechen an mathematischen Kenntnissen in Ägypten und Babylonien lernen können? — das ist die Frage, die man sich immer wieder vorlegen muß, wenn man die antiken Berichte über den Aufenthalt der griechischen Gelehrten in diesen Ländern hört. In der Tat sind diese immer wiederholten Studienreisen kaum zu verstehen (selbst wenn man bei den Griechen zunächst absolute Kenntnislosigkeit voraussetzt), falls es dort nicht mehr zu holen gegeben hätte, wie die elementarsten Sätze über Drei- und Viereck.

Man kann wohl sagen, daß der in den beiden vorangehenden Abschnitten behandelte Stoff nur sehr wenig geeignet ist, zur Klärung dieser Frage beizutragen. Hinsichtlich der Entwicklung des Zahlbegriffes erscheinen die Griechen mit ihrer Irrationalzahltheorie nur als Neuschöpfer, wenn auch auf einer primitiveren Grundlage aufbauend, die zwar schwer genug zu erwerben war, bei der aber von einem systematischen „Erlernen“ nicht die Rede sein kann — abgesehen allein von der ägyptischen Bruchrechnung, die aber die Griechen nur ziemlich unverändert übernommen zu haben scheinen, ohne sie einer ernstlichen Durcharbeitung und damit wohl unvermeidlichen Vereinfachung unterzogen zu haben. Wo es aber wirklich etwas sehr Wesentliches zu lernen gegeben hätte, bei der babylonischen Rechentechnik, hat eine wirkliche Aneignung scheinbar nicht stattgefunden, wenn uns auch die Verwendung von Sexagesimalbrüchen in der Astronomie (Hipparch, Geminus, Ptolemäus) einen Hinweis auf babylonische Einflüsse gibt. Nimmt man aber außerdem die Dinge, die man etwa der ionischen Schule als erstmalige Erfindung zuzuschreiben pflegt, wirklich als griechische Entdeckung hin, so bleibt

---

[1]) Aus einem von FRANK publizierten Text der Straßburger Sammlung.

[2]) Die Gewohnheit, die Zahlen der Texte fast immer als *ganze* Zahlen zu fassen und sie dann dezimal zu umschreiben, haben der Interpretation des Inhaltes die größten Hindernisse bereitet, da man sich so den Sinn mancher Rechnungen (nämlich der Divisionen enthaltenden) gänzlich verschleierte.

für das, was die Griechen im Orient noch vorher hätten lernen können, so gut wie nichts übrig. Unsere Frage scheint also von einer befriedigenden Lösung weiter als je entfernt.

Der Eindruck, die griechischen Mathematiker hätten sich ihre Reisen in den Orient eigentlich sparen können, wird noch verstärkt, wenn man etwa in der assyriologischen Literatur nachschlägt, was an mathematischen Kenntnissen außer der bloßen Rechenfertigkeit in Babylonien zu holen gewesen sein mag[1]). Umschrieben wird das Niveau der dort geschilderten Kenntnisse am besten durch die Geometrie der „Felderpläne". Das sind Vermessungspläne unregelmäßig polygonal begrenzter Gebiete, deren Areal durch Zerlegung in Dreiecke und Vierecke bestimmt wird, meist nur näherungsweise als Produkt der arithmetischen Mittel der Gegenseiten. Ähnliches kennt man auch aus Ägypten, dort allerdings noch eine recht gute Approximation von π ($\pi/4 \approx (8/9)^2$, d. h. $\pi \approx 3{,}16$) und einige elementare Volumsberechnungen.

Die Bearbeitung neuer bzw. noch unbearbeiteter Texte zeigt aber, daß dieses Bild doch sehr gründlich wird revidiert werden müssen. So hat schon Turajeff 1917 aus einem mathematischen Papyrus aus Ägypten[2]) einen Abschnitt übersetzt, aus dem hervorgeht[3]), daß man in der Zeit des „Mittleren Reichs" (um —1800) die Formel

$$v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

für das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfes der Höhe h und der Kantenlängen a, b gekannt hat — mit jenem Faktor $\frac{h}{3}$ also, dessen Entdeckung Demokrit zugeschrieben wird (einen Beweis soll Eudoxus gegeben haben). Jede Andeutung eines Beweises fehlt, wie immer in diesen Texten; aber der Ausweg unmittelbarer Empirie wird bei einer derartigen Relation kaum mehr gangbar sein. — Die vollständige Kommentierung dieses Textes durch Prof. W. Struve in Leningrad[4]) hat diesem Resultat noch das weitere hinzufügen können, daß die Oberfläche der Halbkugel als das Doppelte der Fläche des Hauptkreises berechnet wurde — womit eine berühmte Archimedessche Entdeckung um etwa 1500 Jahre zurückdatiert wird.

---

[1]) Man vgl. z. B. Meissner, Babylonien und Assyrien, Bd. 2, Heidelberg 1925, Kap. 21. Für Ägypten: Erman-Ranke, Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum, Tübingen 1923, Kap. 14.

[2]) Er kam mit der Sammlung Golenischeff in das Moskauer Museum.

[3]) Ancient Egypt 1917, S. 100ff.

[4]) Die Edition dieses Textes (des zweitgrößten nach dem Pap. Rhind) ist in absehbarer Zeit zu erhoffen.

Ähnliche Dinge können über die babylonische Mathematik berichtet werden. Unser Textmaterial läßt sich in dreierlei Typen einteilen: Texte, die nur Aufgaben stellen, ohne sie zu lösen; dann solche, die noch das Ergebnis nennen und schließlich (und das sind zum Glück die Mehrzahl) Beispiele, die auch den ganzen Gang der Ausrechnung in vollem Umfang ausführen, wenn sie auch, wie alle vorgriechische Mathematik, auf allgemeine Formeln und Beweise verzichten. Aber die beigefügten erklärenden Worte (z. B. „mit 6, der Höhe, multipliziere") gestatten ohne weiteres, die allgemeine Methode erkennen zu lassen.

Das Bild, das sich auf diese Weise von der babylonischen Mathematik entrollt, ist ein unerwartet reichhaltiges. Aus dem Gebiet der Arithmetik sei nur eine Verteilungsaufgabe in arithmetischer Progression erwähnt, sowie lineare und quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten[1]. Vor allem aber nehmen die geometrischen Aufgaben einen sehr breiten Raum ein. Weit über den Rahmen der Geometrie der Felderpläne hinausgehend werden da z. B. Zerlegungsaufgaben für Dreiecke behandelt, die teils auf Systeme linearer Gleichungen, teils auf quadratische Gleichungen führen. Daran schließen sich Beispiele, die solche quadratische Probleme nun auch explizite lösen, und zwar genau nach der üblichen Auflösungsformel auf Grund der quadratischen Ergänzung[2]. Dann kommen Volumsberechnungen, des öfteren eingekleidet als Aufgaben über Wälle und Gräben belagerter Städte, die wieder die Auflösung recht verwickelter Gleichungen bedingen, ferner Aufgaben über die Sehne im Kreise, Höhe des Bogens, Fläche des Segmentes usw., Aufgaben, die z. B. die Kenntnis des „Pythagoreischen" Lehrsatzes erfordern[3].

All dies ist oft mit ganz trivialen Aufgaben durchmischt oder mit Beispielen, die nur Näherungsformeln geben. So läßt sich im gegenwärtigen Stande dieser Untersuchungen noch nicht ein einheitliches Bild des Aufbaues der babylonischen Mathematik entwerfen — ganz abgesehen davon, daß die Gesamtzahl der bisher zugänglichen Beispiele etwa 100 ist (dieselbe Größenordnung hat übrigens das ägyptische Material), während noch etliches in den verschiedenen Museen vergraben sein dürfte, das sich der Beurteilung entzieht. Aber das wenige, das wir haben, genügt, um zu beweisen, daß wir bereits in frühbabylonischer Zeit (ca. — 2000) mit Kenntnissen rechnen müssen, deren Entdeckung man bisher um $1\frac{1}{2}$ Jahrtausende später ansetzte. Man wird wohl kaum fehlgehen, wenn man die sumerische Kultur mit der Kultur des „Alten

[1]) Eine ausführliche Bearbeitung dieser Texte erscheint in den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik", Abt. B 1, Heft 2.

[2]) Vgl. Quellen und Studien, B 1, S. 67 ff.

[3]) Quellen und Studien, B 1, S. 81 ff.

Reichs" in Ägypten in Parallele setzt, sowohl hinsichtlich ihrer Höhe, als auch bezüglich des entscheidenden Einflusses, den sie auf die Folgezeit ausgeübt haben.

Mit diesen historischen Tatsachen vor Augen kann man, scheint mir, nun doch sehr viel besser verstehen, daß sich die Griechen um die ägyptische und babylonische Wissenschaft bemüht haben[1]). In der Zeit, in der sie in diese Länder kommen, war die wirkliche Blüte der einheimischen Kulturen längst vorüber. Mit um so mehr Geheimniskrämerei werden die überlieferten Kenntnisse den Fremden mitgeteilt worden sein — und mit entsprechend viel Unrichtigkeiten, das zeigen schon die uns vorliegenden Texte mit ihren typischen Interpretationsfehlern der Abschreiber. So mag es schon eines, dem unseren ganz analogen, Studiums bedurft haben, um überhaupt in den wirklichen Sinn dieser Texte einzudringen. Und selbst dann noch gaben sie nur Regeln für einzelne numerisch gegebene Fälle ohne jede Andeutung der dahinterstehenden mathematischen Gesetzmäßigkeit. Wir, denen der sachliche Inhalt zur Selbstverständlichkeit geworden ist, haben noch reichlich zu tun, um einen derartigen Text vollständig zu interpretieren und die dahinter verborgenen Kenntnisse herauszuschälen. Um wieviel mehr mußte das den Griechen so gehen, wenn sie ohne Kommentar hinter Gesetzmäßigkeiten kommen sollten, die ihnen selbst noch fremd waren: ich denke etwa an das schrittweise Vorrechnen Zahl für Zahl der Auflösung einer quadratischen Gleichung, ohne diese Gleichung selbst anzugeben (es heißt nur: wenn die und die Größen gegeben sind, so kombiniere sie miteinander in der und der Weise, um die Unbekannten zu finden — „so ist das Verfahren"!), geschweige denn etwa zu sagen, w a r u m mit den verschiedenen Größen in der angegebenen Weise zu verfahren ist. So hatten die Griechen in der Tat allerhand zu erforschen und zu erlernen und mögen hier in dem Wust zahlloser Beispiele mit immer variierten Zahlenangaben in erster Linie dazu veranlaßt worden sein, nach dem allgemeinen Zusammenhang geometrischer Beziehungen zu fragen, sich nach einem *Beweis* der Regeln umzusehen, weil nur auf diesem Wege eine Sicherheit für die aus speziellen Beispielen zu vermutenden Beziehungen zu gewinnen war.

So können wir uns in der Tat eine ganz intensive Einwirkung der orientalischen Mathematik auf die griechische vorstellen. Das reiche,

---

[1]) Alles hier Gesagte bezieht sich nur auf die eigentliche Mathematik. Seit Eppings und Kuglers bahnbrechenden Arbeiten zur babylonischen Astronomie (insbesondere Kugler, Babylonische Mondrechnung und Sternkunde und Sterndienst in Babel) braucht niemand mehr die Frage zu stellen, was in astronomischer Hinsicht in Babylon zu lernen war. An die babylonischen Tabellenwerke über die feinsten Einzelheiten der Mond- und Planetenbewegung konnten die Griechen ebenso unmittelbar ihre kosmologischen Theorien anknüpfen, wie später Kepler und Kopernikus sich auf die Errungenschaften der griechischen Mathematik und Astronomie stützten.

die ganze Elementarmathematik umfassende Erfahrungsmaterial zweier Kulturen höchster Stufe, der sumerischen und der ägyptischen, bildet die Grundlage der griechischen Kenntnisse. Man wird wohl annehmen können, daß ihre Übernahme etwa gleichzeitig mit der der Buchstabenschrift, der Ordnung der Maße und Gewichte usw. erfolgt ist und etwa in der Zeit des THALES (erste Hälfte des 6. vorchr. Jahrh.) einen gewissen Höhepunkt erreicht hat — die berühmte Vorhersage einer Finsternis durch THALES beruht doch sicherlich auf babylonischen Methoden. Einen ersten Abschluß dieser Entwicklung bilden dann die Umwälzungen des Orients durch die Begründung des Perserreiches (539 ist Babylon, 525 Ägypten erobert worden).

Für diese erste Rezeptionsphase des orientalischen Wissens durch die Ionier halte ich es für durchaus möglich, daß wir der Angabe des Euklid-Kommentators PROKLOS, THALES habe als erster bewiesen, daß ein Durchmesser den Kreis halbiere, vollen Glauben schenken dürfen. Nicht nur deshalb, weil diese Nachricht vermutlich der berühmten Geschichte der Geometrie des EUDEMOS (eines Aristoteles-Schülers) entnommen ist, sondern weil sie sich auch mit den beiden anderen Entdeckungen des THALES[1]), die ihm von PROKLOS zugeschrieben werden, der Gleichheit der Scheitelwinkel (dies unter expliziter Berufung auf EUDEMOS) und der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, zu einem ganz einheitlichen Bilde zusammenschließen. Es ist doch von vorneherein selbstverständlich, daß man nicht annehmen kann, THALES habe als erster diese Tatsachen als solche bemerkt und ausgesprochen, sind sie doch gerade für das nichtmathematische Denken eine reine Selbstverständlichkeit. Es bleibt also nur übrig, entweder diese Nachrichten als unwahr abzutun — was mit Rücksicht auf die Qualität der Quellen nicht gut angeht — oder sie im Sinne des erstmaligen *Beweises* voll anzuerkennen. Letzteres würde heißen, THALES und der Milesischen Schule diejenige Rolle in der Geschichte der Mathematik zuzuschreiben, die ich oben als die notwendige Folge der Höhe der orientalischen Kenntnisse angedeutet habe: *sie sind als die Erfinder des mathematischen Beweises anzusehen,* mindestens hinsichtlich der Elementarsätze der Geometrie. Damit setzt dann die eigentlich griechische Entwicklung ein, die etwa nach einem Jahrhundert ihren ersten Abschluß in jener Grundlagenkrisis gefunden hat, die durch die Anfechtbarkeit der Infinitesimalmethoden beim Quadraturenproblem hervorgerufen war — noch verschärft durch das Problem des Irrationalen. All dies hat sich wohl unter Ausschluß neuer

---

[1]) Der Bericht über die Entfernungsbestimmung von Schiffen vom Lande aus (übrigens vollkommen im Machtbereich der babylonischen Geometrie gelegen) wird wohl als jene Wirkung der populären Tradition zu verstehen sein, die in GAUSS nur den Erfinder des Telegraphen sieht.

direkter Beziehungen zum Orient vollzogen, wenn sich auch für diesen Zeitraum immer wieder Hinweise auf eine Bezugnahme auf orientalisches Gut zu finden scheinen. Dagegen bringt die Stabilisierung des Perserreiches am Ende des 5. Jahrhunderts eine neue Blüte babylonischer Astronomie mit sich[1]), deren Auswirkung auf die Griechen aber erst nach den Stürmen der Alexanderzüge und der Begründung der Diadochenreiche fühlbar wird. Erst seit HIPPARCH (2. vorchr. Jahrh.) ist eine neue Übernahme babylonischen Gutes in der griechisch-hellenistischen Astronomie nachweisbar und bildet damit nur einen Teil des immer stärker werdenden Einflusses des Orients auf den Westen. So scheint also die griechische Mathematik und Astronomie in zwei großen Etappen die Errungenschaften der „vorgriechischen" Wissenschaften übernommen zu haben, um sie in jenes großartige Gebäude antiker Wissenschaft einzugliedern, an das die Renaissance später unmittelbar anknüpfen konnte.

---

[1]) Man vgl. etwa SCHNABEL, Berossos und die babylonisch-hellenistische Literatur, Teubner, Berlin 1923.

Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev,* Die natürliche Geometrie. 1923. Preis *RM* 1.—.
2. *H. Tietze,* Über Analysis Situs. 1923. Preis *RM* 1.—.
3. *W. Wirtinger,* Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. Preis *RM* 1—.
4. *W. Blaschke,* Leonardo und die Naturwissenschaften. 1928. *RM* 1.—.
5. *D. Hilbert,* Die Grundlagen der Mathematik. Mit Zusätzen von *H. Weyl* und *P. Bernays.* 1928. *RM* 1.—.
6. *J. Radon,* Zum Problem von Lagrange. Vier Vorträge, gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (7.—24. Juli 1928). 1928. *RM* 2.—.
7. *E. Sperner,* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. 1928. *RM* 1.—.
8. *O. Neugebauer,* Über vorgriechische Mathematik. 1929. *RM* 2.—.