В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, *Тр. МИАН СССР*, 1955, том 47, 3–199

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа посвящена изложению некоторых основных, в большей части ставших уже классическими вопросов теории гомотопий. В ней также кратко изложена теория гомологий в виде, удобном для решения гомотопических проблем.

Теория гомологий, все более играющая роль аппарата, применяемого в гомотопической топологии, изложена в первых шести параграфах работы. Осведомленный читатель может пропустить весь этот материал или бо́льшую его часть, ознакомившись лишь с терминологией и обозначениями.

В § 1 дается основное для всей работы понятие полиэдра, определяется симплициальный комплекс и рассматриваются его простейшие свойства. В отличие от распространенного способа определения ориентации (см., например, [1]), она определена здесь не при помощи порядка вершин, а на основе рассмотрения векторных базисов.

В § 2 определяется клеточный комплекс и рассматриваются основные связанные с ним понятия: клеточные отображения, коэффициент инцидентности клеток, степень клеточного отображения. Здесь автор не стремился к наибольшей возможной общности изложения и потому выбрал наиболее разумное определение клеточного комплекса с точки зрения его простоты и удобства приложений.

Группы гомологий клеточного (в частности, симплициального) комплекса построены в § 3. В заключительной части его приведена в одной из возможных форм теория непрерывных гомологий. Эта теория в дальнейшем изложении не применяется.

Первые три параграфа имеют основной целью построение групп гомологий.

Три следующих параграфа (§§ 4—6) содержат дальнейшее развитие теории гомологий.

Простейшие гомологические свойства многообразий рассмотрены в § 4. Отметим, что при построении звездных гомологий не рассматриваются так называемые h-многообразия, введенные Л. С. Понтрягиным [27]. Исключить из рассмотрения h-многообразия удалось благодаря применению понятия комбинаторного объединения комплексов. Комбинаторное объединение используется и в дальнейшем.

Построение индекса пересечения (в топологически инвариантной форме) дано в § 5. Для приведения цепей в общее положение используются подробно изученные Л. С. Понтрягиным m-подразделения [3]. В конце параграфа определяется коэффициент зацепления циклов.

В § 6 рассмотрены произведение Колмогорова—Александера и стинродовские квадраты [4, 5]. Эти гомологические операции оказываются чрезвычайно важными при решении гомотопических вопросов. При изложении стинродовского квадрата произведены некоторые упрощения, способствующие, как мне кажется, облегчению понимания этой весьма простой операции. Определение произведения Колмогорова — Александера в п. 6 : 1 аналогично построениям работы [6].

Во второй половине работы (§§ 7—15) рассматриваются гомотопические вопросы. В большинстве случаев гомотопические проблемы сводятся так или иначе к вопросу о гомотопической классификации отображений сферы в сферу той же или меньшей размерности, т. е. к вопросу о вычислении гомотопической группы $\pi^{n+k}(S^n)$, $k \geqslant 0$ (см. § 7). Проблемы, сводящиеся к вычислению группы $\pi^n(S^n)$, т. е. соответствующие случаю $k = 0$ (гомотопические проблемы «нулевой степени»), рассмотрены в §§ 7—10. В заключительных параграфах рассмотрены проблемы, сводящиеся к вычислению группы $\pi^{n+1}(S^n)$ ($k = 1$; проблемы «первой степени»). Гомотопические проблемы более высоких степеней, решение части которых получено в самое последнее время, в настоящей работе не рассматриваются.

В § 7 дается общее определение гомотопических групп и рассматриваются их простейшие свойства. Гомотопические группы являются многомерными аналогами фундаментальной группы, также рассмотренной в этом параграфе. Излагаемое определение гомотопических групп довольно просто и аналогично определению фундаментальной группы.

В § 8 дается изложение теории препятствий и различающих, являющейся важным инструментом гомотопической топологии; в § 9 содержатся классические результаты Хопфа [7] об отображениях n-мерного комплекса в n-мерную сферу. Эти результаты выводятся из классификационной теоремы Уитнея [8].

Теорема Гуревича [9] об изоморфизме первой нетривиальной гомотопической группы и соответствующей группы гомологий включена в § 10. Здесь же доказана теорема о фундаментальной группе и теорема Л. С. Понтрягина [10], устанавливающая связь между гомотопическими и гомологическими свойствами.

В § 11 содержатся общие определения, относящиеся к понятию дифференцируемого многообразия, а также подробное исследование свойств двух конкретных многообразий, играющих важную роль в дальнейшем: штифелевского многообразия $V_{n,k}$ [11] и комплексной проективной плоскости M^4. В связи с рассмотрением многообразия M^4 заканчивается изучение свойств стинродовского квадрата.

В § 12 теория препятствий применяется к случаю векторных полей на многообразии. Это дает классические результаты Штиффеля [11] о векторных полях.

Классификации отображений $(n+1)$-мерной сферы в n-мерную, т. е. вычислению группы $\pi^{n+1}(S^n)$, посвящен § 13. В качестве аппарата частично используется развитый Л. С. Понтрягиным метод векторных полей [12], а также гомологические операции Колмогорова — Александера и Стинрода, рассмотренные в § 6.

В § 14 дается вычисление второго препятствия для случая отображений комплекса в сферу. Далее приводятся результаты Л. С. Понтрягина [13] и Стинрода [5] о классификации отображений $(n+1)$-мерного комплекса в n-мерную сферу. Там же приведен частный случай теоремы М. М. Постникова [14], используемый в § 15.

В § 15, заключительном, содержатся результаты автора [15] о втором препятствии для случая векторных полей.

По вопросу о вычислении второго препятствия для случая произвольного косого произведения [16] автор предполагает написать в ближайшем будущем отдельную статью.

В. Г. Болтянский

I. ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИИ

§ 1. Симплициальный комплекс

1:1. Определение симплициального комплекса. Пусть R — эвклидово векторное пространство. Элементы этого пространства мы будем называть *точками* или *векторами*. Пусть, далее, $a_0, \ldots, a_r$ — такая совокупность точек пространства R, что векторы $a_0 - a_1, \ldots, a_0 - a$ линейно независимы *. Множество R^r точек вида

$$a = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \ldots + \lambda^r a_r,$$

где λ^i — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \ldots + \lambda^r = 1,$$

называется r-мерной *плоскостью* пространства R, а подмножество $T^r = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ плоскости R^r, состоящее из точек a, для которых все числа λ^i неотрицательны, называется r-мерным *симплексом*. Плоскость R^r называется *несущей плоскостью* симплекса T^r, точки $a_0, \ldots, a_r$ называются его *вершинами*, а числа λ^i — *барицентрическими координатами* точек $a \in T^r$. Симплекс T^r представляет собой выпуклую оболочку точек $a_0, a_1, \ldots, a_r$. Отметим, что, согласно этому определению, симплекс есть замкнутое множество. Точка с координатами

$$\lambda^0 = \lambda^1 = \ldots = \lambda^r = \frac{1}{r+1}$$

называется *центром тяжести* (или просто центром) симплекса T^r.

Если мы возьмем лишь часть из точек $a_0, a_1, \ldots, a_r$, например $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$, то определяемый этими вершинами s-мерный симплекс T^s называется *гранью симплекса* T^r. В барицентрических координатах, введенных в T^r, грань T^s описывается уравнениями $\lambda^j = 0$, где j пробегает все числа от 0 до r, отличные от $i_0, i_1, \ldots, i_s$. Точки симплекса

---

* Легко видеть, что в этом случае векторы

$$a_i - a_0,\ a_i - a_1, \ldots, a_i - a_{i-1},\ a_i - a_{i+1}, \ldots, a_i - a_r$$

будут также линейно независимы.

T^r, у которых все барицентрические координаты положительны, называются *внутренними*, остальные (т. е. принадлежащие граням) — *граничными*. Одномерный симплекс называется *отрезком*. Иногда бывает удобно считать сам симплекс T^r своей гранью; эту грань (в отличие от остальных) называют *несобственной*.

Конечная совокупность K симплексов пространства R называется *симплициальным комплексом* (или просто *комплексом*), если: 1) каждые два симплекса из K либо не пересекаются, либо их пересечение является гранью, может быть несобственной, каждого из них и, кроме того, 2) вместе с каждым симплексом множеству K принадлежат и все грани этого симплекса. Теоретико-множественная сумма всех симплексов комплекса K (рассматриваемая как множество точек, т. е. не разбитая на симплексы) называется *телом* комплекса K и обозначается через $\widetilde{K}$. Множество, являющееся телом некоторого комплекса K, называется *полиэдром*; K называется *триангуляцией* этого полиэдра. Конечно, для заданного полиэдра существует не единственная триангуляция. Полиэдр является замкнутым ограниченным множеством эвклидова пространства и, следовательно, компактом. *Размерностью* комплекса и соответствующего полиэдра* называется наибольшая из размерностей входящих в комплекс симплексов. Если все симплексы некоторого комплекса K_1 входят также и в комплекс K, то K_1 называется *подкомплексом* комплекса K. Взяв все симплексы комплекса K, размерности которых не превосходят числа s, мы получаем подкомплекс K^s комплекса K, называемый его s-мерным *остовом*.

Пусть K — комплекс, $\widetilde{K}$ — соответствующий полиэдр, K^* — компакт, гомеоморфный полиэдру $\widetilde{K}$, и e — гомеоморфное отображение полиэдра $\widetilde{K}$ на K^*. Если T^r — симплекс комплекса K, a — его точка с барицентрическими координатами $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^r$, то в множестве $e(T^r)$, гомеоморфном симплексу, мы припишем точке $e(a)$ те же барицентрические координаты $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^r$. Мы получаем разбиение компакта K^* на «криволинейные симплексы» $e(T^r)$, в которых введены барицентрические координаты. При переходе от симплекса к его граням эти барицентрические координаты ведут себя так же, как и в комплексе K. Мы будем говорить, что K^* является *криволинейным полиэдром*, а построенное разбиение на криволинейные симплексы — его триангуляцией. Для того чтобы триангулировать криволинейный полиэдр K^*, нужно не только разбить его на подмножества, гомеоморфные симплексам, но и ввести в них барицентрические координаты, т. е. выбрать определенный гомеоморфизм комплекса K на компакт K^*. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем всегда иметь в виду

---

* Нетрудно доказать, используя, например, доказываемую ниже теорему об инвариантности внутренних точек (см. п. 1 : 7), что определенная в этом смысле размерность полиэдра не зависит от способа его триангуляции.

не криволинейные, а обычные полиэдры, расположенные в некотором эвклидовом пространстве R. Конечно, все сказанное будет справедливо, с очевидными изменениями, и для криволинейных полиэдров.

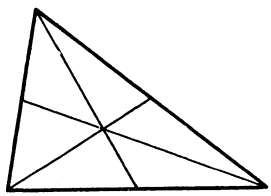
1:2. Пирамида. Барицентрическое подразделение. Пусть K — симплициальный комплекс, расположенный в R. Допустим, что в R существует такая точка a, что для любой точки $x \in \tilde{K}$ отрезок $[a, x]$ имеет с полиэдром $\tilde{K}$ единственную общую точку, а именно x*. В этом случае теоретико-множественную сумму всех отрезков $[a, x]$ для $x \in \tilde{K}$ мы назовем *пирамидой* над $\tilde{K}$ и обозначим через $a\tilde{K}$. Точка a называется *вершиной* пирамиды. Легким упражнением, связанным с использованием барицентрических координат, является доказательство того факта (см., например, [1]), что пирамида aT^r над r-мерным симплексом T^r является $(r+1)$-мерным симплексом. В силу этого пирамида $a\tilde{K}$ разбивается на симплексы трех видов: симплексы самого комплекса K, пирамиды над этими симплексами и нульмерный симплекс a. Мы получаем таким образом комплекс, обозначаемый через aK и называемый *пирамидой* над комплексом K.

Комплекс K_1 называется *подразделением* комплекса K, если соответствующие полиэдры $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}$ совпадают и для каждого симплекса T комплекса K_1 найдется хотя бы один (может быть, имеющий бóльшую размерность) симплекс комплекса K, содержащий T. При помощи понятия пирамиды мы определим подразделение особого вида, называемое *барицентрическим*. Барицентрическое подразделение K' комплекса K мы определим по индукции. Для нульмерного комплекса K положим: $K' = K$. Если определено барицентрическое подразделение для комплексов размерности $\leqslant s$ и K — некоторый $(s+1)$-мерный комплекс, то построим прежде всего барицентрическое подразделение s-мерного остова K^s. Пусть T^{s+1} — произвольный $(s+1)$-мерный симплекс комплекса K. Его граница лежит в K^s, и потому при барицентрическом подразделении остова K^s она также подразделится. Эту подразделенную границу мы обозначим через Σ^s и построим над Σ^s пирамиду, вершину которой выберем внутри симплекса T^{s+1}. Тело пирамиды $a\Sigma^s$ совпадает с T^{s+1} (это легко доказывается при помощи барицентрических координат; см., например, [1]), так что мы получим подразделение симплекса T^{s+1}. Построив такие подразделения для всех $(s+1)$-мерных симплексов, мы получим барицентрическое подразделение комплекса K. Если вершины пирамид брать каждый раз совпадающими с центром тяжести соответствующего симплекса, то получающееся барицентрическое подразделение называют *собственным*. (На черт. 1 изображено барицентрическое подразделение двумерного симплекса.)

Нетрудно доказать (при помощи несложного вычисления в

* Такую точку a всегда можно найти, если размерность эвклидова пространства больше, чем $2n+1$, где n — размерность полиэдра $\tilde{K}$ (см. [1]).

барицентрических координатах) (см. [1]), что всякая отличная от вершины точка симплекса T^r является внутренней точкой отрезка, целиком принадлежащего симплексу T^r. Отсюда следует, что если хотя бы одна из точек a, b не является вершиной симплекса T^r, то отрезок $[a, b]$ не является наибольшим из содержащихся в T^r отрезков. Таким образом, диаметр симплекса равен длине наибольшего из его ребер (одномерных граней). Диаметр наибольшего входящего в комплекс симплекса называется *степенью мелкости* комплекса. Она равна наибольшей из длин ребер (одномерных симплексов) комплекса.



Черт. 1.

Покажем, что степень мелкости собственного барицентрического подразделения K' не превосходит $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$, где δ — степень мелкости исходного комплекса K, а r — его размерность.

Действительно, считая это предложение доказанным для комплексов размерности $<r$, рассмотрим r-мерный комплекс K. Тогда каждое ребро комплекса K' либо содержится в остове K^{r-1} и тогда (согласно предположению индукции) его длина не превосходит величины $\delta\left(1-\frac{1}{r}\right)<\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$, либо соединяет центр некоторого r-мерного симплекса T^r с точкой его границы. Но расстояние центра тяжести m симплекса T^r от любой точки a этого симплекса не превосходит $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$, ибо точка $b=m+\frac{1}{r}(m-a)$ принадлежит симплексу T^r (что проверяется применением барицентрических координат), а точка m делит отрезок $[a, b]$, длина которого не превосходит δ, в отношении $r:1$.

Из доказанного следует, что, произведя барицентрическое подразделение s раз, мы получим комплекс $K^{(s)}$, степень мелкости которого не превосходит величины $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^s$. Таким образом, *для любого полиэдра $\widetilde{K}$ существуют сколь угодно мелкие симплициальные подразделения.*

Пусть K — некоторый комплекс, K' — его барицентрическое подразделение и a — вершина комплекса K. Объединение всех симплексов комплекса K', имеющих a своей вершиной, называется *барицентрической звездой* вершины] a. Барицентрические звезды являются замкнутыми множествами, причем объединение их (взятых для всех вершин комплекса K) равно $\widetilde{K}$. Барицентрические звезды вершин $a_0, \ldots, a_s$ имеют непустое пересечение в том и только в том случае, если в K имеется симплекс с вершинами $a_0, \ldots, a_s$ (см., например, [1]).

Условимся говорить, что система множеств $\{F_1, \ldots, F_q\}$ имеет *кратность* r, если существует r множеств этой системы, имеющих непустое пересечение, но пересечение каждых $r+1$ множеств системы пусто. Система $\{F_1, \ldots, F_q\}$ *замкнутых* множеств называется *покрытием* компакта X, если X содержится в объединении этих множеств. Покрытие называется ε-покрытием, если диаметр каждого из множеств F_i меньше ε. Таким образом, если $\tilde{K}$ есть r-мерный полиэдр, то барицентрические звезды вершин некоторого его подразделения образуют покрытие полиэдра $\tilde{K}$, имеющие кратность $r+1$. Из существования сколь угодно мелких подразделений следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для каждого r-мерного полиэдра существует ε-покрытие кратности $r+1$.

1:3. Симплициальная аппроксимация отображения. Отображение f симплекса $T^r = [a_0, a_1, \ldots, a_r]$ в симплекс T^s называется *симплициальным*, если оно переводит вершины симплекса T^r в вершины симплекса T^s и является аффинным, т. е. переводит точку $a = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^r a_r$ в точку $f(a) = \lambda^0 f(a_0) + \lambda^1 f(a_1) + \cdots + \lambda^r f(a_r)$. Рассматриваемое на любой грани симплекса T^r отображение f также является симплициальным. Если K и L — симплициальные комплексы, то отображение f полиэдра $\tilde{K}$ в $\tilde{L}$ называется *симплициальным* отображением комплекса K в комплекс L, если оно симплициально отображает каждый симплекс комплекса K в некоторый симплекс комплекса L. Говорят, что симплекс T *вырождается* при симплициальном отображении f, если в нем найдутся по крайней мере вершины, переходящие при отображении f в одну и ту же вершину комплекса L.

Два отображения f и g пространства X в пространство Y называются *гомотопными* между собой, если существует такое семейство отображений f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ пространства X в Y, что $f_0 = f$, $f_1 = g$ и точка $f_t(x)$ непрерывно зависит от пары переменных t и $x \in X$. Семейство f_t называется *деформацией* или *гомотопией* отображения f_0 в f_1. Деформация f_t называется деформацией *относительно множества* $M \subset X$, если при любых $t \in [0, 1]$ и $x \in M$ имеем: $f_t(x) = f_0(x)$, т. е. если образ любой точки $x \in M$ не перемещается при деформации. Нетрудно видеть, что для отображений пространства X в Y отношение гомотопности (относительно некоторого множества $M \subset X$) рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для дальнейшего удобна следующая геометрическая интерпретация деформации. Рассмотрим топологическое произведение $X \times \bar{I}$ пространства X на единичный отрезок $\bar{I} = [0, 1]$ переменного t. Пусть F — непрерывное отображение произведения $X \times \bar{I}$ в Y. Определим отображение f_t пространства X в Y при помощи соотношения: $f_t(x) = F(x, t)$. Тогда f_t есть непрерывная деформация отображения f_0, получаемого из рассмотрения «нижнего основания» $X \times 0$ произведения $X \times \bar{I}$, в отображение f_1, получаемое из рассмотрения «верхнего основания» $X \times 1$. Обратно, если задана деформация f_t отображений пространства X в Y, то, определив F формулой $F(x, t) = f_t(x)$, мы получаем непрерывное отображение произведения $X \times \bar{I}$ в Y.

Теорема. *Пусть K и L — симплициальные комплексы и f — непрерывное отображение полиедра $\tilde{K}$ в $\tilde{L}$. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для каждого имеющего степень мелкости $< \varepsilon$ подразделения K^* комплекса K существует симплициальное отображение φ комплекса K^* в L, гомотопное отображению f. Отображение φ называется симплициальной аппроксимацией отображения f.*

Доказательство. Пусть b — вершина комплекса L. Обозначим через L_b совокупность всех симплексов из L, не имеющих b своей вершиной; L_b есть комплекс, так что множество $\tilde{L}_b$ замкнуто в $\tilde{L}$. Открытое в $\tilde{L}$ множество $U_b = \tilde{L} \setminus \tilde{L}_b$ состоит из точки b и внутренних точек всех симплексов, имеющих b своей вершиной; оно называется *звездой* (или *открытой звездой*) вершины b. Звезды всех вершин комплекса $\tilde{L}$ дают в сумме весь полиедр $\tilde{L}$ (ибо каждая точка из $\tilde{L}$ есть либо вершина комплекса L, либо внутренняя точка одного из его симплексов). Доказательством «от противного» легко установить существование такого числа δ, что δ-окрестность (в $\tilde{L}$) любой точки $x \in \tilde{L}$ содержится целиком в одной из звезд U_b (см., например, [2]). Далее, так как непрерывное отображение f комплекса $\tilde{K}$ в $\tilde{L}$ равномерно непрерывно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого множества $M \subset \tilde{K}$, имеющего диаметр $< \varepsilon$, образ $f(M)$ имеет диаметр, меньший δ.

Пусть K^* — подразделение комплекса K, имеющее степень мелкости $< \varepsilon$. Каждой вершине $a \in K^*$ поставим в соответствие такую вершину $\varphi(a) \in L$, что δ-окрестность точки $f(a)$ содержится в звезде $U_{\varphi(a)}$. Тогда для любого симплекса T' комплекса K^*, имеющего a своей вершиной, образ $f(T')$ также содержится в $U_{\varphi(a)}$. Если теперь $T = [a_0, \ldots, a_s]$ — симплекс комплекса K^*, то образ $f(T)$ этого симплекса содержится в каждой из звезд $U_{\varphi(a_0)}, \ldots, U_{\varphi(a_s)}$. Таким образом, эти звезды имеют непустое пересечение, и потому в L существует симплекс с вершинами $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_s)$ (среди которых могут быть и совпадающие). Из этого следует, что отображение φ, построенное пока только для вершин комплекса K^*, может быть продолжено в симплициальное отображение φ комплекса K^* в L.

Пусть, наконец, x — произвольная точка из K^* и $T = [a_0, \ldots, a_s]$ — симплекс комплекса K^*, содержащий x. Тогда точка $f(x)$ содержится в каждой из звезд $U_{\varphi(a_0)}, \ldots, U_{\varphi(a_s)}$, т. е. лежит в некотором симплексе T_1 комплекса L, имеющем точки $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_s)$ своими вершинами. Точка $\varphi(x)$ также лежит в этом симплексе (внутри него или на границе). Таким образом, прямолинейный отрезок, соединяющий точки $f(x)$ и $\varphi(x)$, целиком принадлежит полиэдру $\tilde{L}$. Заставляя точку $f(x)$ при изменении параметра t от 0 до 1 равномерно перемещаться по этому отрезку в точку $\varphi(x)$, мы получим деформацию отображения f в отображение φ, что и доказывает их гомотопность.

(Иначе говоря, f_t следует определить как отображение, переводящее x в такую точку отрезка $[f(x), \varphi(x)]$, которая делит его в отношении $t:(1-t)$).

1:4. Ориентация. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ — два базиса n-мерного векторного пространства R^n и $\|a_{ij}\|$ — матрица перехода от первого базиса ко второму. Говорят, что базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ *одинаково ориентированы*, если определитель $|a_{ij}|$ положителен; в противном случае базисы *ориентированы противоположно*. Таким образом, все базисы пространства R^n разбиваются на два класса, причем матрица перехода от некоторого базиса к базису того же класса имеет положительный определитель, а матрица перехода к базису другого класса — отрицательный. Пространство R^n называется *ориентированным*, если базисам одного из этих классов приписан знак $+$, а базисам другого приписан знак $-$. Пространству R^n можно придать две возможные ориентации; они называются *противоположными*. Под ориентацией пространства R^n, *заданной базисом* $e_1, \ldots, e_n$, понимают такую его ориентацию, при которой этому базису соответствует знак $+$. Можно рассматривать ориентацию и в любой k-мерной плоскости пространства R^n.

Пусть R^{n-1} есть $(n-1)$-мерная плоскость ориентированного пространства R^n; R_1^n и R_2^n — полупространства, на которые R^{n-1} разбивает пространство R^n, и e — вектор, не лежащий в R^{n-1} и направленный в сторону полупространства R_1^n. Произвольному базису $e_1, \ldots, e_{n-1}$ плоскости R^{n-1} мы припишем тот же знак, какой имеет базис $e, e_1, \ldots, e_{n-1}$ в ориентированном пространстве R^n. Плоскость R^{n-1} получает некоторую ориентацию. Мы будем говорить, что эта ориентация *индуцирована** в R^{n-1} полупространством R_1^n ориентированного пространства R^n. Пусть плоскость R^{n-1} заранее как-то ориентирована. Обозначим через $[R_1^n : R^{n-1}]$ число, равное $+1$, если имеющаяся в R^{n-1} ориентация совпадает с ориентацией, индуцированной в R^{n-1} полупространством R_1^n, и равное -1, если эти ориентации противоположны; символ $[R_1^n : R^{n-1}]$ называется *коэффициентом инцидентности* ориентированного пространства R^{n-1} и ориентированного полупространства R_1^n. Нетрудно видеть, что

$$[R_1^n : R^{n-1}] = -[R_2^n : R^{n-1}], \tag{1.1}$$

т. е. что ориентации, индуцированные в R^{n-1} полупространствами R_1^n и R_2^n ориентированного пространства R^n, противоположны. Действительно, вектор $-e$ направлен в сторону полупространства R_2^n, и поэтому при рассмотрении ориентации, индуцированной в R^{n-1} полупространством R_2^n, мы должны базису $e_1, \ldots, e_{n-1}$ приписать тот

* Нетрудно доказать, что определенная таким образом индуцированная ориентация не зависит от произвола в выборе базиса $e_1, \ldots, e_{n-1}$ и вектора e.

же знак, какой имеет базис $-e, e_1, \ldots, e_{n-1}$ в ориентированном пространстве R_1^n. Но очевидно, что базисы $e, e_1, \ldots, e_{n-1}$ и $-e, e_1, \ldots, e_{n-1}$ принадлежат в R^n разным классам.

Симплекс T^r, $r>0$, называется *ориентированным*, если ориентирована его несущая плоскость. Для нульмерных симплексов ориентация не определяется. Если T^r и T^{r-1} — ориентированные симплексы комплекса K, то мы определим *коэффициент инцидентности* $[T^r : T^{r-1}]$. Именно, мы положим $[T^r : T^{r-1}] = 0$, если T^{r-1} не является гранью симплекса T^r; если же T^{r-1} есть грань симплекса T^r, то при $r>1$ положим: $[T^r : T^{r-1}] = [R_1^r : R^{r-1}]$, где R^r и R^{r-1} — соответственно ориентированные несущие плоскости симплексов T^r и T^{r-1}, а R_1^n — полупространство, в котором расположен симплекс T^r. Для одномерного симплекса $T^1 = [a_0, a_1]$, ориентация которого задается вектором $a_0 - a_1$, положим: $[T^1 : a_1] = +1$, $[T^1 : a_0] = -1$*.

Докажем важное свойство коэффициентов инцидентности. Именно:

$$\sum [T^r : T^{r-1}]\ [T^{r-1} : T^{r-2}] = 0, \tag{1.2}$$

где T^r и T^{r-2} — ориентированные симплексы комплекса K (при $r=2$ второй из этих симплексов не ориентируется), а суммирование распространено на все $(r-1)$-мерные симплексы T^{r-1} комплекса K, ориентированные произвольным образом. Действительно, если T^{r-2} не является гранью симплекса T^r, то каждое слагаемое в левой части формулы (1.2) равно нулю, и равенство (1.2) имеет место. Если же T^{r-2} является гранью симплекса T^r, то пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{r-2}$ — базис, задающий ориентацию несущей плоскости R^{r-2} симплекса T^{r-2}, $r>2$. Пусть, далее, $a_0, \ldots, a_{r-2}$ — вершины симплекса T^{r-2}, а b' и b'' — вершины симплекса T^r, не принадлежащие грани T^{r-2}. Обозначим через e' и e'' векторы $a_0 - b'$ и $a_0 - b''$. Тогда можно считать, что базис $e'', e', e_1, \ldots, e_{r-2}$ задает ориентацию симплекса T^r (в противном случае достаточно поменять ролями вершины b' и b''). В левой части формулы (1.2) имеется лишь два отличных от нуля слагаемых, а именно тех, для которых симплекс T^{r-1} совпадает с одним из симплексов

$$T'^{r-1} = [b', a_0, \ldots, a_{r-2}], \quad T''^{r-1} = [b'', a_0, \ldots, a_{r-2}].$$

От способа ориентации этих симплексов левая часть формулы (1.2) не зависит, ибо при перемене ориентации симплекса T^{r-1} каждый из коэффициентов инцидентности $[T^r : T^{r-1}]$, $[T^{r-1} : T^{r-2}]$ меняет знак, а их

---

* Если обозначить через $+(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ симплекс с вершинами $a_0, \ldots, a_r$, ориентированный в соответствии с базисом $a_0 - a_1, \ldots, a_0 - a_r$, то, как легко доказать, для симплексов $T^r = +(a_0, \ldots, a_r)$ и $T_i^{r-1} = +(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r)$ мы имеем: $[T^r : T_i^{r-1}] = (-1)^i$. Это соотношение можно использовать в качестве первоначального определения коэффициента инцидентности (см., например, [1], [2]).

произведение не меняется. Мы можем поэтому без ограничения общности предполагать, что ориентации симплексов T'^{r-1} и T''^{r-1} задаются базисами $e', e_1, \ldots, e_{r-2}$ и $e'', e_1, \ldots, e_{r-2}$. Тогда имеем

$$[T^r : T'^{r-1}] = +1, \quad [T'^{r-1} : T^{r-2}] = +1, \quad [T''^{r-1} : T^{r-2}] = +1.$$

Далее, базис $e'', e', e_1, \ldots, e_{r-2}$ пространства R^r, в котором лежит симплекс T^r, ориентирован противоположно базису $e', e'', e_1, \ldots, e_{r-2}$ и поэтому $[T^r : T''^{r-2}] = -1$. Формула (1.2), таким образом, справедлива. Для $r = 2$ доказательство аналогично.

1:5. Цепь, Δ-граница. Функция x^r, $r > 0$, заданная на множестве всех r-мерных ориентированных симплексов некоторого комплекса K и принимающая целочисленные значения, называется r-мерной *цепью* комплекса K, если она *кососимметрична*, т. е. меняет знак при перемене ориентации симплекса

$$x^r(-T^r) = -x^r(+T^r). \tag{1.3}$$

Нульмерной цепью x^0 называется любая целочисленная функция, заданная на множестве нульмерных симплексов комплекса K. Сумма значений цепи x^0, взятая по всем нульмерным симплексам комплекса K, называется *индексом* цепи x^0 и обозначается через $J(x^0)$. Совокупность всех r-мерных цепей комплекса K образует свободную абелеву группу по сложению, если сумму понимать в обычном смысле (как сумму функций). Пусть $T_1^r, \ldots, T_n^r$ — все r-мерные симплексы комплекса K, каким-либо образом ориентированные, $r > 0$. Цепь, принимающую нулевые значения на всех симплексах комплекса K, за исключением одного симплекса T_i^r, на котором она принимает значение 1 (и, значит, на симплексе $-T_i^r$ значение -1), условимся обозначать через T_i^r. Тогда любую цепь x^r можно записать в виде линейной комбинации цепей подобного вида

$$x^r = \alpha_1 T_1^r + \ldots + \alpha_n T_n^r, \tag{1.4}$$

т. е. как бы в виде линейной комбинации r-мерных ориентированных симплексов. Таким образом, цепи $T_1^r, \ldots, T_n^r$ составляют систему независимых образующих группы цепей. Аналогично, каждую нульмерную цепь можно представить в виде линейной комбинации вершин комплекса K.

Для любой r-мерной цепи x^r, $r > 0$, определим $(r-1)$-мерную цепь Δx^r, называемую *Δ-границей* цепи x^r

$$\Delta x^r(T^{r-1}) = \sum_i [T_i^r : T^{r-1}]\, x^r(T_i^r); \tag{1.5}$$

здесь суммирование проводится по всем r-мерным симплексам комплекса K, каждый из которых каким-либо образом ориентирован, или для цепи, записанной в виде линейной комбинации (1.4)

$$\Delta\left(\sum_i \alpha_i T_i^r\right) = \sum_{i,j} \alpha_i [T_i^r : T_j^{r-1}] T_j^{r-1}. \tag{1.5'}$$

Для любой нульмерной цепи x^0 положим $\Delta x^0 = 0$. Операция взятия Δ-границы аддитивна:

$$\Delta(x_1^r + x_2^r) = \Delta x_1^r + \Delta x_2^r,$$

так что Δ дает при $r > 0$ гомоморфизм группы всех r-мерных цепей в группу $(r-1)$-мерных цепей.

Из формул (1.5') и (1.2) непосредственно вытекает важное соотношение

$$\Delta\Delta x^r = 0, \tag{1.6}$$

справедливое для любого $r \geqslant 0$.

Пусть теперь f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L и x^r есть r-мерная цепь комплекса K. Мы определим r-мерную цепь $f_* x^r$ комплекса L, называемую *образом* цепи x^r при симплициальном отображении f. Рассмотрим сначала цепь $x^r = T_i^r$.

Если симплекс T_i^r вырождается при отображении f, то положим $f_* T_i^r = 0$. Если же симплекс T_i^r не вырождается, то ориентируем симплекс $f(T_i^r)$ так, чтобы симплекс T_i^r отображался на него с сохранением ориентации, и для так ориентированного симплекса $f(T_i^r)$ положим: $f_* T_i^r = f(T_i^r)$. Наконец, для произвольной цепи (1.4) положим

$$f_* \sum_i \alpha_i T_i^r = \sum_i \alpha_i f_* T_i^r.$$

Таким образом, симплициальное отображение f комплекса K в L порождает гомоморфизм f_* группы r-мерных цепей комплекса K в группу r-мерных цепей комплекса L.

Важным свойством гомоморфизмов f_* и Δ является их перестановочность. Это означает, что для любой цепи x^r комплекса K и симплициального отображения f комплекса K в L мы имеем

$$f_* \Delta x^r = \Delta f_* x^r. \tag{1.7}$$

Доказательство равенства (1.7) достаточно провести только для образующих группы r-мерных цепей комплекса K, т. е. для цепей $x^r = T_i^r$, $r > 0$. При доказательстве будем различать три случая:

а) Симплекс T_i^r не вырождается при отображении f. Ориентировав симплекс $f(T_i^r)$ так, чтобы симплекс T_i^r отображался на него с сохранением ориентации, мы получим, очевидно, $\Delta f_* T_i^r = f_* \Delta T_i^r$.

б) Симплекс T_i^r вырождается при отображении f, причем симплекс $f(T_i^r)$ имеет ровно r вершин. Иначе говоря, две вершины b' и b'' симплекса T_i^r переходят в одну вершину комплекса L, а остальные вершины $a_0, \ldots, a_{r-2}$ переходят в различные точки, т. е. вершины $f(b')$, $f(a_0), \ldots, f(a_{r-2})$ различны между собой. В этом случае правая часть формулы (1.7) обращается в нуль. При $r > 1$ для симплексов $T'^{r-1} = [b', a_0, \ldots, a_{r-2}]$, $T''^{r-1} = [b'', a_0, \ldots, a_{r-2}]$ и $T^{r-2} = [a_0, \ldots, a_{r-2}]$, ориентированных так, что $[T'^{r-1} : T^{r-2}] = [T''^{r-1} : T^{r-2}]$, мы имеем из (1.2) равенство $[T_i^r : T'^{r-1}] = -[T_i^r : T''^{r-1}]$, т. е. T'^{r-1} и T''^{r-1} входят в цепь ΔT_i^r с противоположными коэффициентами. Очевидно, далее, что $f_* T'^{r-1} = +f_* T''^{r-1}$ и что все $(r-1)$-мерные грани симплекса T_i^r, отличные от T'^{r-1} и T''^{r-1}, вырождаются при отображении f (ибо содержат обе вершины b', b''). Таким образом, $f_* \Delta T_i^r = 0$ и левая часть формулы (1.7) также равна нулю.

в) Число вершин симплекса $f(T_i^r)$ меньше r. В этом случае каждая $(r-1)$-мерная грань симплекса T_i^r вырождается при отображении f, и обе части равенства (1.7) обращаются в нуль.

1:6. Леммы Александера и Шпернера. Рассмотрим комплекс, состоящий из r-мерного симплекса T_*^r и всех его граней, и пусть E^r — произвольное подразделение этого комплекса. Тогда каждый $(r-1)$-мерный симплекс T^{r-1} комплекса E^r либо целиком принадлежит границе симплекса T_*^r, либо лежит внутри T_*^r (точнее, каждая внутренняя точка симплекса T^{r-1} является также внутренней точкой симплекса T_*^r). В первом случае мы будем называть симплекс T^{r-1} *граничным*, во втором — *внутренним*. К каждому граничному симплексу примыкает *один* r-мерный симплекс комплекса E^r, к каждому внутреннему — *два*. Ориентируем симплекс T_*^r произвольным образом, т. е. выберем ориентацию его несущей плоскости R^r. Тем самым ориентируется и каждый r-мерный симплекс комплекса E^r. Цепь, получающуюся, если все ориентированные таким образом симплексы комплекса E^r взять с коэффициентами $+1$, обозначим через x^r. Нетрудно видеть, что в границу Δx^r этой цепи каждый внутренний $(r-1)$-мерный симплекс комплекса E^r входит с коэффициентом нуль. Действительно, если T^{r-1} — внутренний симплекс комплекса E^r, R^{r-1} — его несущая плоскость, а T_1^r и T_2^r суть r-мерные симплексы комплекса E^r, имеющие T^{r-1} своей гранью, то T_1^r и T_2^r лежат в двух разных полупространствах, на которые R^{r-1} разбивает R^r, и, согласно (1.1) и (1.5), симплекс T^{r-1} входит в Δx^r с коэффициентом нуль.

Ориентируем теперь все $(r-1)$-мерные грани симплекса T_*^r так, чтобы их коэффициенты инцидентности с симплексом T_*^r были равны $+1$. Каждый граничный $(r-1)$-мерный симплекс T^{r-1} комплекса E^r мы ориентируем так же, как и содержащую его $(r-1)$-мерную грань симплекса T_*^r. Тогда, если T^r есть единственный r-мерный симплекс комплекса E^r, имеющий T^{r-1} своей гранью, то $[T^r : T^{r-1}] = +1$.

Отсюда ясно, что граница Δx^r цепи x^r состоит из всех указанным образом ориентированных граничных симплексов комплекса E^r, взятых с коэффициентами $+1$.

Лемма Александера. *Пусть f — симплициальное отображение комплекса E^r на T^r_*, переводящее каждую вершину a комплекса E^r в одну из вершин той грани наименьшей размерности симплекса T^r_*, которая содержит точку a.* (Этим условиям удовлетворяет, например, симплициальная аппроксимация тождественного отображения комплекса E^r в T^r_*.) *Тогда для определенной выше цепи x^r комплекса E^r имеем*

$$f_* x^r = +T^r_*. \tag{1.8}$$

Доказательство будем вести по индукции. Для случая $n=0$ (или даже $n=1$) доказываемое предложение очевидно. Предположим его доказанным для $(r-1)$-мерных симплексов. Тогда, если T^{r-1}_* есть грань симплекса T^r_*, ориентированная так, что $[T^r_* : T^{r-1}_*] = +1$, то, взяв все граничные симплексы комплекса E^r, принадлежащие грани T^{r-1}_* с указанными выше ориентациями и коэффициентами $+1$, мы получим цепь x^{r-1}, для которой лемма по предположению индукции справедлива, так что $f_* x^{r-1} = T^{r-1}_*$. Проведя это рассуждение для всех $(r-1)$-мерных граней симплекса T^r_*, ориентированных так, что их коэффициенты инцидентности с симплексом T^r_* равны $+1$, мы найдем, что $f_* \Delta x^r = \Delta T^r_*$ или, в силу (1.7), $\Delta f_* x^r = \Delta T^r_*$. Но очевидно, что $f_* x^r = c T^r_*$, где c — целое число. Поэтому из последней формулы мы имеем: $c \Delta T^r_* = \Delta T^r_*$, откуда $c=1$. Таким образом, $f_* x^r = T^r_*$.

Из доказанной леммы следует

Лемма Шпернера. *Пусть $T^r = [b_0, \ldots, b_r]$ есть r-мерный симплекс, а $F_0, \ldots, F_r$ — такие замкнутые подмножества симплекса T^r, составляющие в сумме весь этот симплекс, что каждая $(r-1)$-мерная грань $[b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r-1}}]$ симплекса T^r содержится в сумме*

$$F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_{r-1}}.$$

Тогда множества $F_0, \ldots, F_r$ имеют непустое пересечение.

Допустим, что пересечение множеств $F_0, \ldots, F_r$ пусто; пусть $\delta > 0$ — такое число, что никакое множество диаметра $< \delta$, лежащее в T^r, не пересекается со всеми множествами $F_0, \ldots, F_r$ (если бы такого δ не существовало, то нашлась бы точка, принадлежащая каждому из множеств $F_0, \ldots, F_r$). Пусть E^r — подразделение симплекса T^r, имеющее степень мелкости $< \delta$.

Пусть теперь a есть произвольная вершина комплекса E^r и $[b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}]$ — грань наименьшей размерности симплекса T^r, содержащая точку a. Из условия, наложенного в формулировке леммы на множества F_i, непосредственно следует, что симплекс $[b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}]$ содержится в сумме $F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_s}$; в частности,

$a \in F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_s}$. Поэтому существует такая вершина b_{i_j} симплекса $[b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}]$, что $a \in F_{i_j}$, и мы положим: $f(a) = b_{i_j}$. Продолжив это отображение вершин аффинно на каждый симплекс комплекса E^r, мы получаем симплициальное отображение f комплекса E^r в T^r, очевидно удовлетворяющее условиям леммы Александера. Далее, ясно, что каждый r-мерный симплекс комплекса E^r вырождается при отображении f, ибо он имеет диаметр $< \delta$, и потому его вершины принадлежат не более чем r множествам из $F_0, \ldots, F_r$. Таким образом, для симплициального отображения f мы имеем: $f_* x^r = 0$, что противоречит лемме Александера.

1:7. Инвариантность внутренних точек.

Теорема. *Пусть M—множество эвклидова пространства R^r, a — его внутренняя точка и f — гомеоморфное отображение множества M в R^r. Тогда точка $f(a)$ является внутренней точкой образа $f(M)$ множества M.*

Доказательство. Пусть $T^r = [b_0, b_1, \ldots, b_r]$ — такой r-мерный симплекс пространства R^r, который целиком содержится в M и для которого a является центром. Барицентрические звезды $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_r$ вершин симплекса T^r (рассматриваемые в комплексе, состоящем из симплекса T^r и всех его граней) дают в сумме весь симплекс T^r, причем единственной общей точкой этих $r+1$ множеств является точка a. Множества $f(\mathfrak{Z}_0), f(\mathfrak{Z}_1), \ldots, f(\mathfrak{Z}_r)$ также имеют единственную общую точку $f(a)$. Предположим, что $f(a)$ не является внутренней точкой множества $f(T^r)$, и пусть T_1^r — симплекс пространства R^r, содержащий $f(a)$ своей внутренней точкой и не пересекающийся с образом границы симплекса T^r при отображении f. Граница Σ^{r-1} симплекса T_1^r является $(r-1)$-мерным полиэдром. Расположенные в Σ^{r-1} замкнутые множества $F_0 = f(\mathfrak{Z}_0) \cap \Sigma^{r-1}, \ldots, F_r = f(\mathfrak{Z}_r) \cap \Sigma^{r-1}$ (может быть не покрывающие всего Σ^{r-1}) имеют пустое пересечение, т. е каждая точка $x \in \Sigma^{r-1}$ принадлежит не более чем r из этих множеств. Доказательством от противного легко установить существование такого числа $\delta > 0$, что если точка $x \in \Sigma^{r-1}$ находится на расстоянии $< \delta$ от некоторых из множеств F_i, то эти множества F_i пересекаются. Выбрав такое число δ, построим δ-покрытие $\{\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q\}$ полиэдра Σ^{r-1}, имеющее кратность r. Каждое из множеств $\mathfrak{z}_j$, пересекающееся хоть с одним из множеств F_i, мы присоединим к одному (любому) из множеств F_i, для которых $\mathfrak{z}_j \cap F_i \neq 0$. Все же множества $\mathfrak{z}_j$, не пересекающиеся ни с одним F_i, присоединим к F_0. Мы получим в результате этого присоединения новые множества $\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_r$, дающие в сумме весь полиэдр Σ^{r-1}, причем, как нетрудно видеть, каждая точка $x \in \Sigma^{r-1}$ принадлежит не более чем r из множеств $\widetilde{F}_i$. Действительно, если точка, принадлежащая хотя бы одному из множеств F_i, содержится в множествах $\widetilde{F}_{i_1}, \ldots, \widetilde{F}_{i_s}$, то она лежит от каждого из множеств $F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$ на расстоянии $< \delta$, и потому множества

$F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$ пересекаются, так что число их не больше r. Если же точка $x \in \Sigma^{r-1}$ не принадлежит ни одному из F_i, то она содержится не более чем в r из множеств $\mathfrak{z}_j$ и подавно не более чем в r множествах $\widetilde{F}_i$, ибо каждое $\mathfrak{z}_j$ присоединялось только к одному из F_i.

Пусть теперь c — внутренняя точка симплекса T_1^r, не принадлежащая множеству $f(T^r)$. Тогда пирамиды $c\widetilde{F}_0, \ldots, c\widetilde{F}_r$ с вершинами в c, построенные над $\widetilde{F}_0, \ldots, \widetilde{F}_r$, имеют единственную общую точку c. Поэтому множества

$$H_i = f(\mathfrak{Z}_i) \cap (R^r \setminus T_1^r) \cup \widetilde{F}_i \cap f(T^r), \qquad i = 0, 1, \ldots, r,$$

дающие в сумме все множество $f(T^r)$, имеют пустое пересечение. Прообразы $f^{-1}(H_i)$ этих множеств дают в сумме весь симплекс T^r, причем никакая точка $y \in T^r$ не принадлежит более чем r множествам $f^{-1}(H_i)$. Вблизи границы симплекса T^r эти множества совпадают со звездами $\mathfrak{Z}_i$ и потому удовлетворяют условиям леммы Шпернера. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 2. Клеточный комплекс

2 : 1. Клеточный комплекс. Пусть $\widetilde{P}$ — некоторый полиэдр. Разбиение P множества $\widetilde{P}$ на конечное число попарно не пересекающихся множеств τ_i, $i = 1, 2, \ldots$, называется *клеточным комплексом,* если выполнены следующие условия:

($К_1$). *Каждое из множеств τ_i гомеоморфно открытому шару некоторой размерности r.*

Под шаром нулевой размерности мы будем понимать точку. Множество τ_i называется *клеткой*, число r — ее *размерностью.* Заметим, что из теоремы об инвариантности внутренних точек легко вытекает, что шары двух различных размерностей негомеоморфны, так что размерность каждой клетки τ_i однозначно определена. Объединение $\widetilde{P}^r$ всех клеток размерности $\leqslant r$ назовем r-мерным *остовом* клеточного комплекса P.

($К_2$). *Если τ_i есть r-мерная клетка комплекса P, то ее граница $\dot{\tau}_i = \overline{\tau}_i \setminus \tau_i$ целиком расположена в $(r-1)$-мерном остове P^{r-1} комплекса P.*

($К_3$). *Существует такое симплициальное подразделение K полиэдра $\widetilde{P}$, что каждое из множеств $\overline{\tau}_i$ целиком составлено из симплексов комплекса K, т. е. является телом некоторого подкомплекса комплекса K.*

Так как $\dot{\tau}_r = (\widetilde{P}^r \setminus \tau^r) \cap \overline{\tau^r}$, то ясно, что множество $\dot{\tau}^r$ также целиком составлено из симплексов комплекса K.

Примером клеточного комплекса может служить любой симплициальный комплекс K, если клеткой называть множество внутренних точек каждого принадлежащего комплексу K симплекса.

Клеточный комплекс P_1 назовем *подразделением* клеточного комплекса P, если соответствующие полиэдры $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ совпадают и, кроме того, каждая клетка комплекса P_1 целиком расположена внутри одной клетки комплекса P. В частности, симплициальный комплекс K, указанный в условии (K_3), является (симплициальным) подразделением клеточного комплекса P.

Пусть P — клеточный комплекс, K — его симплициальное подразделение и τ^r есть r-мерная клетка комплекса P. Тогда для любого s-мерного $(s \leqslant r)$ симплекса T^s комплекса K могут иметь место два случая: либо все внутренние точки симплекса T^s принадлежат клетке τ^r, либо все они этой клетке не принадлежат. В первом из этих случаев мы будем называть симплекс T^s *внутренним* симплексом клетки τ^r. Внутренний r-мерный симплекс клетки τ^r мы будем называть просто r-мерным симплексом клетки τ^r.

(а). *Каждый внутренний $(r-1)$-мерный симплекс T^{r-1} клетки τ^r является гранью ровно двух r-мерных симплексов этой клетки.*

Действительно, пусть число таких r-мерных симплексов больше двух и пусть T_1^r, T_2^r, T_3^r — три таких симплекса. Пусть далее, f — гомеоморфное отображение множества τ^r на шар r-мерного эвклидова пространства R^r. Обозначим через a любую внутреннюю точку симплекса T^{r-1}. Тогда множество $T_1^r \cup T_2^r$ может быть вложено в пространство R^r, причем a будет его внутренней точкой. Поэтому, согласно п. 1:7, точка $f(a)$ будет внутренней точкой множества $f(T_1^r) \cup f(T_2^r)$, так что для образа $f(T_3^r)$ симплекса T_3^r нет места в пространстве R^r. Аналогично устанавливается, что число указанных r-мерных симплексов не может быть равно нулю или единице.

(б). *Клетка τ^r обладает свойством сильной связности, т. е. для каждых двух r-мерных симплексов T^r и T'^r r-мерной клетки τ^r существует такая цепочка $T^r, T_1^r, T_2^r, \ldots, T_q^r, T'^r$ r-мерных симплексов этой клетки, что каждые два соседних симплекса этой цепочки имеют общую $(r-1)$-мерную грань, являющуюся внутренним симплексом клетки τ^r.*

Объединение всех r-мерных симплексов клетки τ^r, соединимых с T^r цепочками указанного вида, обозначим через M; объединение всех остальных r-мерных симплексов клетки τ^r — через N. Множества $M \cap \tau^r$ и $N \cap \tau^r$ (напомним, что симплекс есть замкнутое множество, тогда как клетка τ^r при $r>0$ не замкнута) обозначим через M_1 и N_1. Мы должны доказать, что N (или N_1) пусто. Предположим, что это не так. Пересечение $M_1 \cap N_1$ содержится в $(r-2)$-мерном остове клетки τ^r (т. е. того ее подразделения, которое получается при рассмотрении комплекса K, входящего в условие (K_3)). Действительно, если бы точка $x \in M_1 \cap N_1$ была внутренней точкой $(r-1)$-мерного внутреннего симплекса T^{r-1} клетки τ^r, то оба примыкающих к T^{r-1} внутренних r-мерных симплекса клетки τ^r принадлежали бы одному и тому же из множеств M, N, что противоречит включению $x \in M_1 \cap N_1$. Пусть теперь φ — гомеоморфное отображение клетки τ^r на единичный шар U^r эвклидова r-мерного пространства. Так как множества M_1 и N_1 содержат внутренние точки, то, согласно п. 1:7, множества $\varphi(M_1)$ и $\varphi(N_1)$ также содержат внутренние точки. Пусть T_1^r — такой симплекс, расположенный в шаре U^r, вершиной b которого является внутренняя точка множества $\varphi(M_1)$, а противолежащая грань T_1^{r-1} состоит из внутренних точек множества $\varphi(N_1)$. Пересечение $T_1^r \cap \varphi(M_1 \cap N_1)$ не имеет общих точек с T_1^{r-1}, и для него при любом ε существует ε-покрытие кратности $r-1$ (ибо $M_1 \cap N_1$ принадлежит $(r-2)$-мерному остову комплекса K). Пусть $\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_r$ — барицентрические звезды вершин симплекса T_1^{r-1}. Тогда множества $\Phi_i = b\mathfrak{Z}_i \cap \varphi(N_1)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, дают в сумме $T_1^r \cap \varphi(N_1)$ (через $b\mathfrak{Z}_i$ обозначена пирамида над $\mathfrak{Z}_i$ с вершиной в b). Пусть теперь $\{\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q\}$ — покрытие множества $T_1^r \cap \varphi(M_1 \cap N_1)$, имеющее кратность $r-1$, а δ — такое число, что замыкания δ-окрестностей множеств $\mathfrak{z}_j$ также образуют систему $\{\overline{U(\mathfrak{z}_1)}, \ldots, \overline{U(\mathfrak{z}_q)}\}$ кратности $r-1$ („лебегово“ число, см. [2]). Каждое из множеств $\overline{U(\mathfrak{z}_j)}$ мы присоединим к *одному* из таких множеств Φ_i, с которыми оно пересекается. Полученные таким образом множества обозначим через F_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, а множество $(T_1^r \setminus \varphi(N_1)) \setminus (U(\mathfrak{z}_1) \cup \ldots \cup U(\mathfrak{z}_q))$ — через F_0. Если покрытие $\{\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q\}$ было выбрано достаточно мелким, то множества $F_0, F_1, \ldots, F_q$ удовлетворяют условиям леммы Шпернера. Однако их пересечение пусто, ибо каждая точка множества $T_1^r \cap \varphi(N_1)$ не принадлежит к F_0, а каждая точка множества $T_1^r \setminus \varphi(N_1)$ принадлежит не более чем $r-1$ из множеств $\overline{U(\mathfrak{z}_1)}, \ldots, \overline{U(\mathfrak{z}_q)}$, а потому не более чем $r-1$ из множеств $F_1, \ldots, F_r$ (каждое $\overline{U(\mathfrak{z}_j)}$ присоединялось только к одному из $F_i, i = 1, 2, \ldots, r$). Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

2:2. Клеточные отображения. Пусть P и Q—клеточные комплексы. Отображение f полиэдра $\tilde{P}$ в $\tilde{Q}$ называется *клеточным отображением* комплекса P в Q, если оно переводит r-мерный остов комплекса P в r-мерный остов комплекса Q, т. е. $f(P^r) \subset \tilde{Q}^r$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Мы докажем теорему, аналогичную приведенной в п. 1:3.

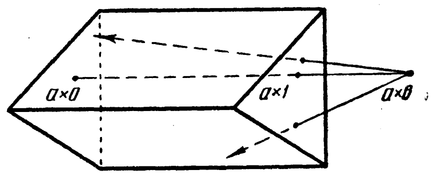
Теорема. *Пусть P и Q — клеточные комплексы и f_0 — непрерывное отображение полиэдра $\tilde{P}$ в $\tilde{Q}$, являющееся клеточным на подкомплексе P_1 комплекса P. Тогда существует деформация f_t относительно P_1, переводящая f_0 в клеточное отображение φ комплекса P в Q* (таким образом, φ совпадает с f_0 на P_1). Отображение φ называется *клеточной аппроксимацией* отображения f_0.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем две леммы, которые важны и сами по себе.

(а). Лемма. *Пусть f_0 — непрерывное отображение клеточного комплекса K в топологическое пространство Y и f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — де-*

формация этого отображения на подкомплексе L комплекса K. Тогда ее можно продолжить в деформацию отображения f_0, заданного на всем K, т. е. существует такая деформация отображения f_0, которая на L совпадает с заданной деформацией f_t.

Докажем сначала лемму для частного случая, когда K есть симплекс, а L — его граница. Рассмотрим топологическое произведение $K \times \bar{I}$ и пусть F — отображение множества $M = (K \times 0) \cup (L \times \bar{I}) \subset K \times \bar{I}$ в Y, совпадающее с f_0 на симплексе $K \times 0$ и с отображением f_t на множестве $L \times t$, $t \in \bar{I}$. Пусть φ — отображение произведения $K \times \bar{I}$ на M, являющееся на M тождественным (такое отображение легко получить, если K расположить в эвклидовом пространстве E, $\bar{I}$ — на прямой P, и затем в произведении $E \times P$, также являющемся эвклидовым пространством, спроектировать $K \times \bar{I}$ на M из точки $a \times b$, где a — внутренняя точка симплекса K, а b — точка прямой P, лежащая за концом 1 отрезка $\bar{I} = [0, 1] \in P$; черт. 2); тогда $F\varphi$ есть отображение произведения $K \times \bar{I}$ в Y, совпадающее на M с F, т. е. определяющее искомую деформацию.



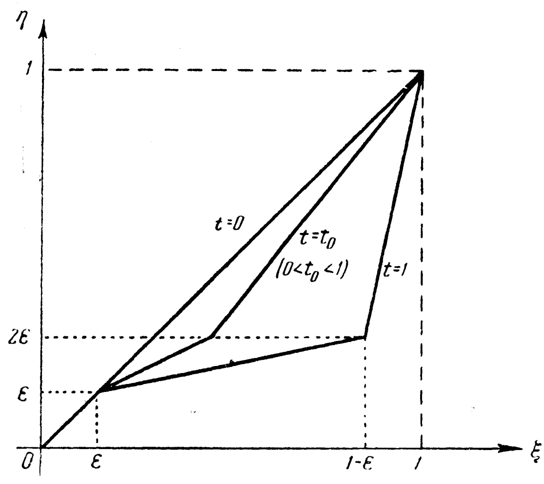
Черт. 2.

Перейдем к общему случаю. При этом мы можем предполагать, что комплекс K является симплициальным, ибо всякий клеточный комплекс обладает симплициальным подразделением. Для каждой вершины q комплекса K, не принадлежащей L, мы определим деформацию f_t соотношением $f_t(q) = f_0(q)$. Теперь f_t определена на подкомплексе $K^0 \cup L$, где K^0 — нульмерный остов комплекса K. Пусть деформация f_t определена уже на подкомплексе $K^s \cup L$; тогда ее можно продолжить на подкомплекс $K^{s+1} \cup L$. Действительно, пусть T^{s+1} — произвольный $(s+1)$-мерный симплекс комплекса K. Если $T^{s+1} \in L$, то деформация f_t уже определена на T^{s+1}; если же T^{s+1} не принадлежит подкомплексу L, то на нем определено отображение f_0, а на его границе задана деформация f_t, так что в силу сказанного выше деформацию f_t можно продолжить на симплекс T^{s+1}. Проводя это рассуждение для всех $(s+1)$-мерных симплексов и полагая последовательно $s = 0, 1, \ldots, r-1$, где r — размерность комплекса K, мы и получим требуемый результат.

(б). Лемма. *Пусть τ^r — клетка комплекса P, a — ее внутренняя точка и f_0 — такое отображение компакта M в $\bar{\tau}^r$, что $f_0(M)$ не содержит точки a. Тогда существует такая деформация f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ отображения f_0, являющаяся деформацией относительно $f_0^{-1}(\dot{\tau}^r)$, что $f_1(M) \subset \dot{\tau}^r$ и множество $f_t(M)$ не содержит точки a ни при каком t.*

Пусть φ — гомеоморфное отображение открытого единичного шара U^r

на клетку τ^r. Пусть, далее, ε — положительное число, меньшее $\frac{1}{3}$, и $[a, o]$ — радиус шара U^r. Обозначим через b, c и d такие точки отрезка $[a, o]$, что длины отрезков $[a, b]$, $[b, c]$ и $[d, o]$ равны ε. Построим деформацию e_t тождественного отображения e_0 радиуса $[a, o]$ на себя, в результате которой отрезок $[a, b]$ отображается на себя тождественно, отрезок $[b, d]$ переходит в $[b, c]$, а $[d, o]$ — в $[c, o]$. Обозначив через ξ расстояние любой точки x отрезка $[a, o]$ от точки a и через η — расстояние точки $e_t(x)$ от a, мы сможем задать деформацию e_t в виде зависимости η от ξ, график которой для различных t дан на черт. 3. Рассматривая деформацию e_t одновременно на всех радиусах шара U^r, мы получим деформацию e_t тождественного отображения e_0 шара U^r на себя в отображение e_1. Тогда $\varphi e_t \varphi^{-1}$ есть такая деформация тождественного отображения клетки τ^r на себя, которая тождественна вблизи границы $\dot{\tau}^r$ клетки τ^r, а образ множества $\tau^r \setminus U(a)$ при отображении $\varphi e_1 \varphi^{-1}$, где $U(a)$ — некоторая окрестность точки a, лежит в некоторой окрестности $V(\dot{\tau}^r)$ границы $\dot{\tau}^r$. Эту деформацию можно продолжить на все множество $\bar{\tau}^r$, считая, что на $\dot{\tau}^r$ она тождественна. Ввиду произвольной малости числа ε окрестности $U(a)$ и $V(\dot{\tau}^r)$ можно считать произвольно малыми, так что $U(a)$ не будет пересекаться с $f_0(M)$. Тогда $\tilde{f}_t = \varphi e_t \varphi^{-1} f_0$ есть такая деформация отображения f_0 относительно $\dot{\tau}^r$, при которой $\tilde{f}_t(M)$ не содержит точки a, причем $\tilde{f}_1(M)$ лежит в произвольно малой окрестности $V(\dot{\tau}^r)$ границы $\dot{\tau}^r$ клетки τ^r, если ε взять достаточно малым.



Черт. 3.

Пусть теперь K — симплициальное подразделение клеточного комплекса P. Выберем в предыдущем построении число ε меньшим, чем расстояние от центра тяжести любого внутренного симплекса клетки τ^r до ее границы $\dot{\tau}^r$. Пусть T^r — произвольный внутренний r-мерный симплекс клетки τ^r, имеющий общие точки с $\dot{\tau}^r$ (в противном случае T^r не содержит точек множества $\tilde{f}_1(M)$). При помощи проектирования части множества $\tilde{f}_1(M)$, лежащей внутри T^r, на границу симплекса T^r из его центра тяжести, мы сможем добиться того, что *внутри* T^r уже не будет точек этого множества. Проведя эту деформацию для всех r-мерных, затем для всех $(r-1)$-мерных, ..., наконец, для всех одномерных внутренних симплексов клетки τ^r, мы и получим искомую деформацию образа множества M в $\dot{\tau}^r$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы о клеточной аппроксимации. Для нульмерного комплекса P теорема очевидна. Предположим, что она уже доказана для p-мерных комплексов P, и пусть P — некоторый $(p+1)$-мерный комплекс, а f_0 — его непрерывное отображение в клеточный комплекс Q. В силу предположения индукции, для отображения f_0, рассматриваемого только на p-мерном остове P^p, существует деформация f_t относительно $P_1 \cap P^p$, переводящая f_0 в клеточное отображение f_1 остова P^p в комплекс Q. Мы можем определить деформацию f_t на подкомплексе $P^p \cup P_1$, считая, что $f_t = f_0$ на $(p+1)$-мерных клетках комплекса P_1. Определенную так деформацию f_t мы продолжим, согласно лемме (а), на весь комплекс P. Таким образом, отображение f_0 гомотопно относительно P_1 такому отображению f_1 комплекса P в Q, которое является клеточным на остове P^p. Пусть r — размерность комплекса Q. При $p+1 \geqslant r$ отображение f_1 уже является искомым. Пусть $p+1 < r$ и пусть τ^r есть r-мерная клетка комплекса Q, а T^r — ее внутренний r-мерный симплекс (в некотором симплициальном подразделении K комплекса P). Обозначим через $\tilde{f}_1$ симплициальную аппроксимацию отображения $f_1 = \tilde{f}_0$, построенную для достаточно мелкого симплициального подразделения L комплекса P. Тогда (см. теорему о симплициальной аппроксимации, п. 1:3) отображения $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_1$ гомотопны, причем гомотопия $\tilde{f}_t$ переводит множество $\tilde{f}_0^{-1}(\dot{T}^r)$ в $\dot{T}^r$, а отображение $\tilde{f}_1$ переводит множество $\tilde{f}_0^{-1}(T^r)$ в $\dot{T}^r$ (ибо размерность комплекса P меньше r). Обозначим через a произвольную внутреннюю точку симплекса T^r, а через χ_ε — подобное преобразование симплекса T^r с центром подобия a и коэффициентом подобия $1-\varepsilon$. Так как $\tilde{f}_t(\tilde{f}_0^{-1}(\dot{T}^r)) \subset \dot{T}^r$, то существует настолько малое положительное число α, что при $\varepsilon < \alpha$ и любом t множество $\tilde{f}_t(\tilde{f}_0^{-1}(\chi_\varepsilon(\dot{T}^r)))$ не содержит точки a. Определим отображение f^* множества $\tilde{f}_0^{-1}(T^r)$ в T^r как совпадающее на $\tilde{f}_0^{-1}(\chi_{t\alpha}(\dot{T}^r))$ с $\tilde{f}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а на $\tilde{f}_0^{-1}(\chi_\alpha(T^r))$ — с $\tilde{f}_1$. Тогда отображение f^* совпадает с $\tilde{f}_0$ на $\tilde{f}_0^{-1}(\dot{T}^r)$ и, кроме того, $f^*(\tilde{f}_0^{-1}(T^r))$ не содержит точки a. Поэтому, определив f^* на $\tilde{P} \setminus \tilde{f}_0^{-1}(T^r)$ как совпадающее с $\tilde{f}_0$, мы получим такое непрерывное отображение f^* полиэдра $\tilde{P}$ в $\tilde{Q}$, которое совпадает с $\tilde{f}_0$ на $\tilde{P}^{p+1}$ и для которого образ $f^*(\tilde{P})$ не содержит точки a. При этом отображения $\tilde{f}_0$ и f^* гомотопны относительно P_1. Действительно, на $\tilde{P} \setminus \tilde{f}_0^{-1}(T^r) \supset P_1$ эти отображения совпадают, а обе точки $\tilde{f}_0(x)$ и $f^*(x)$ для $x \in \tilde{f}_0^{-1}(T^r)$ лежат в T^r, так что заставляя $\tilde{f}_0(x)$ при изменении t от 0 до 1 равномерно и прямолинейно двигаться в положение $f^*(x)$, мы и получим гомотопию, соединяющую отображения $\tilde{f}_0 = f_1$ и f^*.

Так как $f^*(\tilde{P})$ не содержит точки a, то, в силу леммы (б), отображение f^* гомотопно относительно $f^{*-1}(Q^{p+1}) \supset P_1 \cup P^p$ такому отображению, которое переводит P в $Q\setminus\tau$. Проделав это построение для всех r-мерных клеток комплекса Q, мы получим отображение, совпадающее с f_1 на $P^p\cup P_1$ и переводящее $\widetilde{P}$ в Q^{r-1}. Аналогично мы сможем сдвинуть образ множества P в $Q^{r-2},\ldots$ и, наконец, в Q^{p+1}. Теорема доказана.

2:3. Ориентирующая цепь клетки. Пусть P — клеточный комплекс, K — его симплициальное подразделение, τ^r, $r\geqslant 1$ — некоторая r-мерная клетка комплекса P. Построим в этом пункте такую r-мерную цепь y^r комплекса K, лежащую в $\bar{\tau}^r$, значение которой на каждом r-мерном симплексе клетки τ^r равно ± 1 (в зависимости от ориентации симплекса) и граница Δy^r которой лежит в $\dot{\tau}^r$. Оказывается, что с точностью до знака цепь y^r определена этими свойствами однозначно. Мы будем называть цепи y^r и $-y^r$ *ориентирующими цепями* клетки τ^r и будем говорить, что клетка τ^r *ориентирована*, если выбрана одна из двух возможных ориентирующих цепей.

Приступим к построению ориентирующей цепи. Пусть T_1^r — внутренний r-мерный симплекс клетки τ^r и a — его внутренняя точка. Тождественное отображение e_0 границы $\dot{T}_1^r$ симплекса T_1^r в клетку τ^r можно, согласно лемме (б) п. 2:2, перевести при помощи деформации e_t в такое отображение e_1, что $e_1(\dot{T}_1^r)\subset\dot{\tau}^r$ и $e_t(\dot{T}_1^r)$ не содержит точки a ни при каком t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Мы можем при этом считать, что множество $e_t(\dot{T}_1^r)$ не содержит даже ни одной внутренней точки симплекса T_1^r: достаточно применять проектирование лежащей внутри T_1^r части множества $e_t(\dot{T}_1^r)$ из точки a на границу $\dot{T}_1^r$ симплекса T_1^r (для всех t).

Пусть теперь T^r — произвольный r-мерный симплекс и E^r — настолько мелкое его подразделение, что в E^r найдется r-мерный симплекс T_*^r, не имеющий общих точек с границей симплекса T^r. Обозначим через b центр симплекса T_*^r. Для каждой точки $x=(x)_0$ границы $\dot{T}_*^r$ симплекса T_*^r определим $(x)_1$ как проекцию точки x из центра b на границу симплекса T^r. Далее, обозначим через $(x)_t$ такую точку отрезка $[(x)_0, (x)_1]$, которая делит его в отношении $t:(1-t)$. Иначе говоря, при изменении t от 0 до 1 точка $(x)_t$ равномерно движется по лучу, проходящему через b и x, из положения x до границы симплекса T^r.

Определим отображение f симплекса T^r в клетку τ^r как аффинно отображающее симплекс T_*^r на T_1^r и для любой точки $x\in\dot{T}_*^r$ переводящее соответствующую точку $(x)_t$ в точку $e_t(f(x))$, где e_t — описанная выше деформация границы $\dot{T}_1^r$. Тогда отображение f переводит симплекс T_*^r аффинно на T_1^r, множество $T^r\setminus T_*^r$ — в $\bar{\tau}^r\setminus T_1^r$, а множество $\dot{T}^r$ в границу $\dot{\tau}^r$ клетки τ^r. Рассмотрим симплициальную аппроксимацию φ отображения f (построенную для достаточно мелкого подразделения E_1^r комплекса E^r). Тогда отображение φ попрежнему переводит $\dot{T}^r$ в $\dot{\tau}^r$, а $T^r\setminus T_*^r$ — в $\bar{\tau}^r\setminus T_1^r$. На симплексе же T_*^r (также подразделившемся при подразделении комплекса E^r) отображение f_1 удовлетворяет условиям леммы Александера.

Если x^r — цепь комплекса E_1^r, описанная в п. 1 : 6, то, в силу леммы Александера, цепь $y^r = \varphi_* x^r$ клетки τ^r имеет на симплексе T_1^r коэффициент ± 1 (в зависимости от ориентации). Кроме того, граница $\Delta\varphi_* x^r$ этой цепи лежит в комплексе $\dot{\tau}^r$. Действительно, $\Delta\varphi_* x^r = \varphi_* \Delta x^r$ и потому лежит в $\varphi(\dot{T}^r)$.

Покажем, что значение цепи y^r на любом внутреннем r-мерном симплексе клетки τ^r равно ± 1. Действительно, если T_2^r — внутренний r-мерный симплекс клетки τ^r, примыкающий к T_1^r по внутреннему $(r-1)$-мерному симплексу T^{r-1} клетки τ^r, а α — коэффициент цепи y^r на T_2^r, то значение цепи Δy^r на симплексе T^{r-1} равно

$$\pm 1 \cdot [T_1^r : T^{r-1}] + \alpha \cdot [T_2^r : T^{r-1}] = \pm 1 \pm \alpha,$$

и равно нулю, так как T^{r-1} (как внутренний симплекс клетки τ^r) должен входить в Δy^r с коэффициентом нуль. Таким образом, $\alpha = \pm 1$. Точно так же мы найдем, что коэффициент цепи y^r на симплексе T_3^r, примыкающем к T_2^r по внутреннему $(r-1)$-мерному симплексу, равен ± 1, и т. д. Продолжая таким образом, мы можем, согласно свойству (б) п. 2 : 1, подойти к любому внутреннему r-мерному симплексу клетки τ^r.

(а). *Любая r-мерная цепь клетки τ^r, обладающая тем свойством, что ее граница лежит в $\dot{\tau}^r$, имеет вид $k \cdot y^r$, где k — целое число.*

Для доказательства ориентируем все внутренние r-мерные симплексы клетки τ^r таким образом, чтобы они входили в y^r с коэффициентами $+1$. Пусть k — коэффициент рассматриваемой цепи на симплексе T_1^r. Тогда рассуждения, совершенно аналогичные выше приведенным, показывают, что все коэффициенты рассматриваемой цепи равны k, т. е. она имеет вид ky^r.

Ясно, что цепи y^r и $-y^r$ совершенно равноправны, и от нас зависит, какую из них мы примем за ориентирующую. Свойство (а) показывает, что этим лишь и ограничивается произвол в выборе ориентирующей цепи, т. е. что, исключая произвол в знаке, ориентирующая цепь определяется самой клеткой τ^r и не зависит от φ и E_1^r, использованных нами при построении.

(б). *Пусть x^r, $r > 0$ — такая r-мерная цепь комплекса K, которая расположена в P^r, а граница которой лежит в P^{r-1}. Тогда x^r является линейной комбинацией ориентирующих цепей r-мерных клеток комплекса P.*

Действительно, пусть τ^r — произвольная r-мерная клетка комплекса P. Тогда в силу соотношения

$$(\tilde{P}^r \setminus \tau^r) \cap \overline{\tau^r} = (\tilde{P}^r \setminus \tau^r) \cap (\tau^r \cup \dot{\tau}^r) = (\tilde{P}^r \setminus \tau^r) \cap \dot{\tau}^r \subset \dot{\tau}^r$$

часть цепи x^r, лежащая в τ^r, есть такая цепь клетки τ^r, граница которой лежит в $\dot{\tau}^r$. Поэтому она равна ky^r, где y^r — ориентирующая цепь клетки τ^r, а вся цепь x^r есть сумма цепей вида ky^r.

(в). Пусть, наконец, τ^r и τ^{r-1}, $r > 1$ — две ориентированные клетки комплекса P, имеющие размерности r и $r-1$; ориентирующие цепи этих клеток обозначим через y^r и y^{r-1}. Тогда цепь Δy^r имеет границу, лежащую в P^{r-1}, и потому, согласно (б), является линейной комбинацией ориентирующих цепей $(r-1)$-мерных клеток комплекса P. Коэффициент, с которым входит y^{r-1} в эту линейную комбинацию, мы назовем *коэффициентом инцидентности* ориентированных клеток τ^r и τ^{r-1} и обозначим через $[\tau^r : \tau^{r-1}]$. Ясно, что при перемене ориентации одной из клеток τ^r, τ^{r-1}, т. е. при перемене знака у одной из цепей y^r, y^{r-1}, коэффициент инцидентности меняет знак.

Коэффициент инцидентности $[\tau^1 : \tau^0]$ одномерной ориентированной клетки τ^1 и нульмерной клетки τ^0 определяется аналогично: он равен коэффициенту, с которым входит τ^0 в границу Δy^1 ориентирующей цепи y^1 клетки τ^1.

Нетрудно видеть, что справедливо аналогичное (1.2) соотношение

$$\sum [\tau^r : \tau^{r-1}] \cdot [\tau^{r-1} : \tau^{r-2}] = 0, \tag{2.1}$$

где τ^r и τ^{r-2} — ориентированные клетки комплекса P, а суммирование распространено на все $(r-1)$-мерные клетки τ^{r-1} комплекса P, ориентированные произвольным образом. Действительно, если y^r и y^{r-2} — ориентирующие цепи клеток τ^r и τ^{r-2}, то левая часть равенства (2.1) представляет собой коэффициент, с которым y^{r-2} входит в цепь $\Delta\Delta y^r$, и равна нулю в силу (1.6).

Заметим в заключение, что ориентация клетки и коэффициент инцидентности двух клеток, введенные в этом пункте, определены лишь при условии, что выбрано симплициальное подразделение K клеточного комплекса P. Инвариантный смысл этим понятиям будет придан ниже.

2:4. Произведение $P \times \bar{I}$. Символом I мы будем в дальнейшем обозначать единичный интервал $(0, 1)$ числовой прямой R^1. Если P — клеточный комплекс, то топологическое произведение $\tilde{P} \times \bar{I}$ представляется в виде суммы попарно не пересекающихся множеств вида $\tau \times I$, $\tau \times 0$, $\tau \times 1$, где τ — произвольная клетка комплекса P. Нетрудно установить, что это разбиение на попарно не пересекающиеся множества определяет клеточный комплекс, который мы будем обозначать через $P \times \bar{I}$. Действительно, условие (K_1) выполнено, так как множества $\tau \times I$, $\tau \times 0$, $\tau \times 1$ гомеоморфны открытым шарам размерностей соответственно $r+1$, r, r, где r — размерность клетки τ. Условие (K_2) вытекает из соотношения

$$\overline{A \times B} \setminus A \times B = (A \cup \dot{A}) \times (B \cup \dot{B}) \setminus A \times B \subset \dot{A} \times B \cup A \times \dot{B} \cup \dot{A} \times \dot{B}.$$

Условие (K_3) мы докажем по индукции. Предположим, что оно верно для комплексов P размерности $<r$ (для нульмерных P оно очевидно), и пусть P — некоторый r-мерный комплекс, а K — его симплициальное подразделение. Достаточно доказать, что $K\times\overline{I}$ является клеточным комплексом, ибо $K\times\overline{I}$ является подразделением для $P\times\overline{I}$. По предположению индукции, существует симплициальное подразделение $\hat{K}$ клеточного комплекса $K^{r-1}\times\overline{I}$. Если T^r — произвольный r-мерный симплекс комплекса K, то симплексы $T^r\times 0$ и $T^r\times 1$ имеют границы, принадлежащие к $K^{r-1}\times\overline{I}$, и мы можем подразделить эти симплексы как пирамиды над их границами. Наконец, множество $T^r\times\overline{I}$ является выпуклым телом (многогранником), граница которого уже симплициально подразделена, так что мы можем подразделить $T^r\times\overline{I}$ как пирамиду над его границей. Проделав это для всех r-мерных симплексов комплекса K, мы получим симплициальное подразделение комплекса $K\times\overline{I}$. Итак, $P\times\overline{I}$ является клеточным комплексом.

Два клеточных отображения f_0 и f_1 клеточного комплекса P в клеточный комплекс Q назовем *клеточно гомотопными* между собой, если существует такая соединяющая их гомотопия f_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, что f_t является для любого t клеточным отображением комплекса P в Q.

Лемма. *Пусть P и Q — клеточные комплексы, K и L — их симплициальные подразделения. Пусть, далее, f_0 и f_1 — симплициальные отображения комплекса K в L, являющиеся клеточными и клеточно гомотопными между собой отображениями комплекса P в Q. Если при этих условиях τ^r — произвольная клетка комплекса P, а y^r — ее ориентирующая цепь, то цепи $(f_0)_*y^r$ и $(f_1)_*y^r$ совпадают между собой и являются линейными комбинациями ориентирующих цепей r-мерных клеток комплекса Q.*

Для доказательства обозначим через ν_t отображение полиэдра $\tilde{P}$ в $\tilde{P}\times\overline{I}$, переводящее точку $x\in\tilde{P}$ в точку $x\times t$; через F обозначим отображение полиэдра $\tilde{P}\times\overline{I}$ в $\tilde{Q}$, переводящее точку $x\times t$ в точку $f_t(x)$. Отметим, что $F\nu_t=f_t$. Отображение F переводит подкомплекс $P^{r-1}\times\overline{I}$ комплекса $P\times\overline{I}$ в Q^{r-1}. Клеточный комплекс $K\times\overline{I}$ является подразделением комплекса $P\times\overline{I}$. Пусть $\hat{K}$ — настолько мелкое симплициальное подразделение комплекса $K\times\overline{I}$, что существует отображение $\hat{F}$ комплекса $\hat{K}$ в L, являющееся симплициальной аппроксимацией отображения F. Рассмотрим $(r+1)$-мерную клетку $\tau^r\times I$ комплекса $P\times\overline{I}$, и пусть y^{r+1} — ориентирующая цепь этой клетки. Цепи $(\nu_0)_*y^r$ и $(\nu_1)_*y^r$ являются ориентирующими цепями клеток $\tau^r\times 0$ и $\tau^r\times 1$, взятыми для подразделений $K\times 0$ и $K\times 1$.

Пусть T^r — произвольный симплекс комплекса $\hat{K}$, лежащий в $\tau^r\times 0$, а $T_1^r\times 0$ — содержащий его симплекс, являющийся элементом комплекса $K\times\overline{I}$. Мы ориентируем симплекс T^r одинаково с $T_1^r\times 0$ (т. е. одинаково ориентируем содержащие эти симплексы r-мерные эвклидовы пространства), и так ориентированному симплексу T^r

придадим то же значение, какое имеет цепь $(\nu_0)_* y^r$ на $T_1^r \times 0$. Проделав это для всех r-мерных симплексов клетки $\tau^r \times 0$, мы получим r-мерную цепь комплекса $\hat{K}$, которую обозначим через $\overset{*}{y}{}_0^r$. Аналогично мы построим цепь $\overset{*}{y}{}_1^r$, лежащую в $\tau^r \times 1$. Эти цепи являются, как нетрудно видеть, ориентирующими цепями клеток $\tau^r \times 0$ и $\tau^r \times 1$ при симплициальном подразделении $\hat{K}$. Действительно, рассмотрим симплициальное отображение φ комплекса $\hat{K} \cap (K \times 0)$ в комплекс $K \times 0$, переводящее любую вершину первого комплекса в любую вершину содержащего ее симплекса наименьшей размерности из $K \times 0$. Тогда, применяя к каждому симплексу комплекса $K \times 0$ лемму Александера, мы найдем, что $\varphi_* \overset{*}{y}{}_0^r = (\nu_1)_* y^r$. Отсюда следует, что $\varphi_* (\Delta \overset{*}{y}{}_0^r) = \Delta \varphi_* \overset{*}{y}{}_0^r = \Delta (\nu_0)_* y^r$ есть цепь, лежащая в границе клетки $\tau^r \times 0$. Поэтому и сама цепь $\Delta \overset{*}{y}{}_0^r$ лежит в границе этой клетки, так что y_0^r является ориентирующей цепью клетки $\tau^r \times 0$.

Нетрудно видеть, далее, что

$$[\tau^r \times I : \tau^r \times 0] = -[\tau^r \times I : \tau^r \times 1] = \pm 1, \tag{2.2}$$

где коэффициенты инцидентности определяются при помощи ориентирующих цепей y^{r+1}, $\overset{*}{y}{}_0^r$, $\overset{*}{y}{}_1^r$. В самом деле, пусть T_1^r — симплекс комплекса K; $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — векторы, задающие такую ориентацию симплекса $T_1^r \times 0$ (или $T_1^r \times 1$), при которой он входит в $(\nu_0)_* y^r$ (или $(\nu_1)_* y^r$) с коэффициентом $+1$, а e — вектор, идущий в произведении $K \times I$ параллельно отрезку I и направленный от 0 к 1. Тогда вектор e направлен от грани $T_1^r \times 0$ клетки $T_1^r \times I$ в сторону того полупространства, в котором эта клетка расположена; для грани же $T_1^r \times 1$ вектор e направлен в обратную сторону от того полупространства, в котором расположена клетка $T_1^r \times I$. Это и дает нам равенство (2.2). Мы будем считать, что в правой части равенства (2.2) стоит именно $+1$ (этого можно добиться, меняя, если нужно, знак цепи y^{r+1}), так что для границы цепи y^{r+1} мы имеем выражение

$$\Delta y^{r+1} = \overset{*}{y}{}_0^r - \overset{*}{y}{}_1^r + \ldots,$$

где многоточие означает взятые с некоторыми коэффициентами ориентирующие цепи клеток вида $\tau^{r-1} \times I$, $\tau^{r-1} \in P$. При симплициальном отображении $\hat{F}$ все эти клетки переходят в Q^{r-1}, так что их ориентирующие цепи вырождаются, и мы получаем

$$\hat{F}_* \overset{*}{y}{}_0^r - \hat{F}_* y_1^r = \hat{F}_* (\Delta y^{r+1}) = \Delta \hat{F}_* y^{r+1} = 0 \tag{2.3}$$

(ибо $\hat{F}(\tilde{P}^r \times \bar{I}) \subset \tilde{Q}^r$ и потому цепь y^{r+1} вырождается при $\hat{F}$, т. е. $\hat{F}_* y^{r+1} = 0$).

Наконец, заметим, что имеют место соотношения $\hat{F}_* \overset{*}{y}{}_0^r = (f_0)_* y^r$,

$\hat{F}_* y_1^r = (f_1)_* y^r$. Действительно, если симплекс $T^r \times 0$, где $T^r \in K$, вырождается при F, то вырождаются при $\hat{F}$ и все r-мерные симплексы комплекса $\hat{K}$, лежащие в $T^r \times 0$. Если же $T^r \times 0$ не вырождается при F, то, в силу леммы Александера, мы заключаем, что образ лежащей внутри $T^r \times 0$ части цепи $\overset{*}{y}{}_0^r$ при отображении $\hat{F}$ равен $+F_*(T^r \times 0)$. Таким образом, $\hat{F}_* \overset{*}{y}{}_0^r = F_*(\nu_0)_* y^r = (f_0)_* y^r$. Аналогично, $\hat{F}_* \overset{*}{y}{}_1^r = (f_1)_* y^r$. Из этих равенств и из (2.3) следует требуемое равенство $(f_0)_* y^r = (f_1)_* y^r$. Тот факт, что цепь $(f_0)_* y^r$ является линейной комбинацией ориентирующих цепей, следует из предложения (б) п. 2 : 3, ибо $\Delta (f_0)_* y^r = (f_0)_* \Delta y^r$ есть цепь, лежащая в $f_0(\dot{\tau}^r)$, т. е. в Q^{r-1}. Лемма доказана.

Замечание. Как видно из доказательства, для справедливости, леммы не обязательно требовать, чтобы отображение f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, было клеточным, т. е. удовлетворяло для всех $s \geqslant 0$ условию $f_t(\bar{P}^s) \subset \bar{Q}^s$; достаточно, чтобы это условие было выполнено для $s = r$ и $s = r+1$. Этим замечанием иногда удобно воспользоваться при применении доказанной леммы.

2:5. Ориентация клетки. Коэффициент инцидентности. Степень отображения. В настоящем пункте мы дадим инвариантное определение основных понятий, связанных с клеточным комплексом.

(а). *Пусть τ^r есть r-мерная клетка, K_1 и K_2 — ее симплициальные подразделения, а f — такое симплициальное отображение комплекса K_2 в K_1, которое клеточно гомотопно тождественному отображению e клетки τ^r на себя. Если при этих условиях y_1^r и y_2^r — ориентирующие цепи клетки τ^r при подразделениях K_1 и K_2, то имеем:*

$$f_* y_2^r = \pm y_1^r.$$

В самом деле, пусть K_3 — настолько мелкое подразделение комплекса K_1, что существует симплициальная аппроксимация φ тождественного отображения комплекса K_3 в K_2. Обозначим, далее, через ψ симплициальную аппроксимацию тождественного отображения комплекса K_3 в K_1. Тогда отображения φ и ψ клеточно гомотопны тождественному отображению клетки τ^r на себя (см. п. 1:3), так как соответствующие гомотопии двигают каждую точку по содержащему ее симплексу наименьшей размерности и поэтому граница $\dot{\tau}^r$ клетки τ^r движется по себе. Применяя к отображениям f, φ и ψ лемму п. 2:4, получим: $f_* y_2^r = k y_1^r$, $\varphi_* y_3^r = l y_2^r$, $\psi_* y_3^r = m y_1^r$, где y_3^r — ориентирующая цепь клетки τ^r при подразделении K_3, а k, l, m — целые числа. Из этих соотношений (учитывая, что отображения $f\varphi$ и ψ клеточно гомотопны) мы получаем $kl = m$. Но из леммы Александера следует, что число m равно ± 1. Поэтому каждое из чисел k, l также равно ± 1, так что $f_* y_2^r = \pm y_1^r$.

(б). *Пусть K_1 и K_2 — произвольные симплициальные подразделения клетки τ^r, а K' и K'' — настолько мелкие подразделения этой клетки,* *что существуют симплициальные аппроксимации* f_1', f_2', f_1'', f_2'' *тождественных отображений комплексов* K', K'' *в комплексы* K_1, K_2. *Пусть, далее,* y_1, y' *и* y'' — *такие ориентирующие цепи клетки* τ^r *при подразделениях* K_1, K' *и* K'', *что* $(f_1')_* y' = + y_1$ *и* $(f_1'')_* y'' = + y_1$. *Тогда имеем*

$$(f_2')_* y' = (f_2'')_* y''.$$

Пусть K — настолько мелкое симплициальное подразделение клетки τ^r, что существуют симплициальные аппроксимации f', f'' тождественных отображений комплекса K в комплексы K', K''. Обозначим через y, y_2 ориентирующие цепи клетки τ^r при подразделениях K, K_2, а через ε', ε'', ε_2', ε_2'' — такие числа (равные ± 1), что $f'_* y = \varepsilon' y'$, $f''_* y = \varepsilon'' y''$, $(f_2')_* y' = \varepsilon_2' y_2$, $(f_2'')_* y'' = \varepsilon_2'' y_2$. Тогда все рассмотренные симплициальные отображения клеточно гомотопны тождественному отображению клетки τ^r на себя, и потому из леммы п. 2 : 4 вытекает, что $(f_1' f')_* y = (f_1'' f'')_* y$, $(f_2' f')_* y = (f_2'' f'')_* y$, или $\varepsilon' \cdot 1 = \varepsilon'' \cdot 1$, $\varepsilon' \cdot \varepsilon_2' = \varepsilon'' \cdot \varepsilon_2''$. Таким образом, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2''$, т. е. имеем: $(f_2')_* y' = (f_2'')_* y''$. Лемма (б) доказана.

Пусть теперь K_1 и K_2 — симплициальные подразделения клетки τ^r, а y_1 и y_2 — ориентирующие цепи клетки τ^r, взятые для этих подразделений. Выберем настолько мелкое подразделение K' клетки τ^r, что существуют симплициальные аппроксимации f_1' и f_2' тождественного отображения комплекса K' в комплексы K_1 и K_2. Пусть, далее, y' — такая ориентирующая цепь клетки τ^r, взятая для подразделения K', что $(f_1')_* y' = + y_1$. Тогда $(f_2')_* y' = \varepsilon y_2$, где $\varepsilon = \pm 1$. Если $\varepsilon = + 1$, то мы скажем, что ориентирующие цепи y_1 и y_2 *эквивалентны*, в противном случае — что они *неэквивалентны*. Лемма (б) показывает, что понятие эквивалентности ориентирующих цепей не зависит от выбора подразделения K'. Симметричность и транзитивность введенного отношения эквивалентности очевидна, транзитивность следует из рассмотрения настолько мелкого симплициального разбиения K клетки τ^r, для которого существуют симплициальные аппроксимации тождественного отображения комплекса K во все три рассматриваемые разбиения.

При помощи введенного соотношения эквивалентности ориентирующие цепи всевозможных симплициальных подразделений клетки τ^r разбиваются на два класса попарно эквивалентных цепей. Каждый из этих классов называется *ориентацией* клетки τ^r. Клетка, в которой выбрана ориентация, называется *ориентированной*. Если как-либо ориентированная клетка обозначена через τ^r, то противоположно ориентированную клетку мы будем обозначать через $-\tau^r$. Для того чтобы задать ориентацию клетки, достаточно для некоторого ее симплициального подразделения выбрать одну из двух ориентирующих цепей (ср. предложение (в) п. 2 : 3).

Перейдем к рассмотрению коэффициентов инцидентности.

(в). *Коэффициент инцидентности* (см. приложение (в) п. 2:3) *двух ориентированных клеток* τ^r *и* τ^{r-1} *клеточного комплекса* P *не зависит от выбора симплициального подразделения комплекса* P, *которое взято для вычисления коэффициента инцидентности.*

Пусть сначала K_1 и K_2 — такие симплициальные подразделения клеточного комплекса P, что существует симплициальная аппроксимация f тождественного отображения комплекса K_2 в комплекс K_1. Обозначим через y_1^r и y_1^{r-1} ориентирующие цепи ориентированных клеток τ^r и τ^{r-1} при подразделении K_1, а через y_2^r и y_2^{r-1} — ориентирующие цепи этих клеток при подразделении K_2. Тогда имеем, согласно определению ориентации клеток,

$$f_* y_2^r = + y_1^r, \quad f_* y_2^{r-1} = y_1^{r-1}.$$

Обозначив коэффициенты инцидентности клеток τ^r и τ^{r-1} при подразделениях K_1, K_2 через α_1, α_2, получим, согласно определению коэффициента инцидентности:

$$\Delta y_2^r = \alpha_2 y_2^{r-1} + \ldots, \qquad \Delta y_1^r = \alpha_1 y_1^{r-1} + \ldots,$$

где многоточие означает линейную комбинацию ориентирующих цепей $(r-1)$-мерных клеток, отличных от τ^{r-1}. Применив к первому из этих равенств отображение f, получим $\Delta f_* y_2^r = \alpha_2 f_* y_2^{r-1} + \ldots$, или $\Delta y_1^r = \alpha_2 y_1^{r-1} + \ldots$ Таким образом, $\alpha_1 = \alpha_2$. Для произвольных же симплициальных подразделений K_1 и K_2 клеточного комплекса P совпадение коэффициентов инцидентности легко получить, рассматривая настолько мелкое симплициальное подразделение K комплекса P, для которого существуют симплициальные аппроксимации тождественных отображений комплекса K в комплексы K_1 и K_2.

(г). Пусть P_1 и P_2 — клеточные комплексы, K_1 и K_2 — их симплициальные подразделения, а f — такое симплициальное отображение комплекса K_2 в K_1, которое является клеточным отображением комплекса P_2 в P_1. Пусть, далее, τ_1^r и τ_2^r суть r-мерные ориентированные клетки комплексов P_1 и P_2 соответственно, а y_1^r и y_2^r — их ориентирующие цепи в подразделениях K_1 и K_2. Тогда цепь $f_* y_2^r$ комплекса K_1 лежит в P_1^r, а ее граница $\Delta f_* y_2^r = f_* \Delta y_2^r$ лежит в P_1^{r-1} (ибо Δy_2^r лежит $\dot{\tau}_2^r \subset P_2^{r-1}$). Согласно предложению (б) п. 2:3 цепь $f_* y_2^r$ является линейной комбинацией ориентирующих цепей r-мерных клеток комплекса P_1. Коэффициент, с которым входит в эту линейную комбинацию цепь y_1^r, мы назовем *степенью отображения* f клетки τ_2^r на клетке τ_1^r и обозначим через $[f\tau_2^r : \tau_1^r]$.

Пусть теперь φ — произвольное клеточное отображение комплекса P_2 в P_1. Рассмотрим такие симплициальные подразделения K_1 и K_2 комплексов P_1 и P_2, для которых существует симплициальная аппроксимация f отображения φ. Тогда отображение f является также клеточным отображением комплекса P_2 в P_1, так что, согласно сказанному выше, определена степень $[f\tau_2^r : \tau_1^r]$ отображения f клетки τ_2^r на клетке τ_1^r. Оказывается, что эта степень отображения не зависит ни от подразделений K_1, K_2, ни от выбранной симплициальной аппроксимации f, а, следовательно, однозначно определяется самим клеточным отображением φ. Эту степень отображения мы будем обозначать через $[\varphi\tau_2^r : \tau_1^r]$.

В самом деле, пусть K_1' и K_2' — другие подразделения клеточных комплексов P_1 и P_2, для которых существует симплициальная аппроксимация f' отображения φ. Выберем настолько мелкое симплициальное подразделение K_1^* комплекса P_1, для которого существует симплициальная аппроксимация тождественных отображений комплекса K_1^* в комплексы K_1 и K_1'. Выберем, далее, настолько мелкое симплициальное подразделение K_2^* комплекса P_2, что существуют симплициальные аппроксимации тождественных отображений комплекса K_2^* в комплексы K_2 и K_2', а также симплициальная аппроксимация $\bar{f}$ отображения φ комплекса K_2^* в K_1^*. Для доказательства высказанного предложения достаточно установить, что

$$[f\tau_2^r : \tau_1^r] = [\bar{f}\tau_2^r : \tau_1^r] \text{ и } [f'\tau_2^r : \tau_1^r] = [\bar{f}\tau_2^r : \tau_1^r].$$

Оба равенства доказываются аналогично; рассмотрим первое из них. Обозначим симплициальную аппроксимацию тождественного отображения комплекса K_1^* в K_1 через e_1, а симплициальную аппроксимацию тождественного отображения комплекса K_2^* в K_2 — через e_2. Ориентирующие цепи клетки τ_1^r при подразделениях K_1, K_1^* обозначим через y_1, y_1^*, а ориентирующие цепи клетки τ_2^r при подразделениях K_2, K_2^* — через y_2, y_2^*. Тогда

$$(e_1)_* y_1^* = y_1, \ (e_2)_* y_2^* = y_2.$$

Обозначая степени отображений $\bar{f}$, f клетки τ_2^r на клетке τ_1^r через α, α^*, будем иметь

$$f_* y_2 = \alpha y_1 + \ldots, \ \bar{f}_* y_2^* = \alpha^* y_1^* + \ldots$$

Так как, далее, отображения e_1 и e_2 клеточно гомотопны тождественным, а отображения f и $\bar{f}$ клеточно гомотопны отображению φ, то отображения fe_2 и $e_1\bar{f}$ клеточно гомотопны между собой. Следовательно, согласно лемме п. 2:4, получим $(fe_2)_* y_2^* = (e_1\bar{f})_* y_2^*$. Это соотношение дает нам $f_* y_2 = (e_1)_* (\alpha^* y_1^* + \ldots)$, или $\alpha y_1 + \ldots = \alpha^* y_1 + \ldots$ Таким образом, $\alpha = \alpha^*$, т. е.

$$[f\tau_2^r : \tau_1^r] = [\bar{f}\tau_2^r : \tau_1^r].$$

Замечание. При определении степени $[\varphi\tau_2^r : \tau_1^r]$ отображения φ не обязательно предполагать, что φ является клеточным; достаточно предполагать, что $\varphi(\widetilde{P}_2^r) \subset \widetilde{P}_1^r$ и $\varphi(\widetilde{P}_2^{r-1}) \subset \widetilde{P}_1^{r-1}$ (ср. замечание к лемме п. 2:4). Соответственно этому и доказываемые в этом пункте предложения справедливы не только для клеточных или клеточно гомотопных отображений, но и при очевидных более общих предположениях.

(д). *Если φ_1 и φ_2 — клеточные отображения комплекса P_2 в P_1, клеточно гомотопные между собой, то их степени равны, т. е. для любых клеток $\tau_1^r \in P_1$, $\tau_2^r \in P_2$ имеем*

$$[\varphi_1\tau_2^r : \tau_1^r] = [\varphi_2\tau_2^r : \tau_1^r].$$

Действительно, симплициальные аппроксимации отображений φ_1 и φ_2 будут также клеточно гомотопны между собой. Поэтому, согласно лемме п. 2:4, их степени одинаковы.

Наконец, докажем весьма важные формулы, связывающие между собой коэффициенты инцидентности и степени отображения.

(е). *Пусть f — клеточное отображение комплекса P в Q; пусть, далее, τ^r — ориентированная r-мерная клетка комплекса P, а τ^{r-1} — ориентированная $(r-1)$-мерная клетка комплекса Q. Тогда имеем*

$$\sum_i [f\tau^r : \tau_i^r]\cdot[\tau_i^r : \tau^{r-1}] = \sum_j [\tau^r : \tau_j^{r-1}]\cdot[f\tau_j^{r-1} : \tau^{r-1}], \tag{2.4}$$

где i означает суммирование по всем как-то ориентированным r-мерным клеткам комплекса Q, а j — суммирование по как-то ориентированным $(r-1)$-мерным клеткам комплекса P.

Будем обозначать ориентирующие цепи клеток τ^r, τ_j^{r-1}, τ_i^r, τ^{r-1} через y^r, y_j^{r-1}, y_i^r, y^{r-1}. Тогда имеем

$$\Delta y^r = \sum_j [\tau^r : \tau_j^{r-1}]\cdot y_j^{r-1};\quad f_* y^r = \sum_i [f\tau^r : \tau_i^r]\cdot y_i^r$$

и потому цепь y^{r-1} входит в $\Delta f_* y^r$ с коэффициентом, равным левой части равенства (2.4), а в цепь $f_*\Delta y^r$ — с коэффициентом, равным правой части этого равенства. Поэтому доказываемое равенство следует из (1.7).

(ж). *Пусть f — клеточное отображение комплекса P_1 в P_2, а φ — клеточное отображение комплекса P_2 в P_3; пусть, далее, τ_1^r и τ_3^r — ориентированные r-мерные клетки кмоплексов P_1 и P_3 соответственно. Тогда имеет место соотношение*

$$[\varphi f\tau_1^r : \tau_3^r] = \sum [f\tau_1^r : \tau_2^r]\cdot[\varphi\tau_2^r : \tau_3^r], \tag{2.5}$$

где суммирование производится по всем как-либо ориентированным r-мерным клеткам τ_2^r комплекса P_2.

Действительно, если y_1^r и y_3^r — ориентирующие цепи клеток τ_1^r и τ_3^r, то и левая и правая части соотношения (2.5) представляют собой коэффициент, с которым y_3^r входит в цепь $\varphi_* f_* y_1^r$.

§ 3. Группы гомологий

3:1. Группы гомологий клеточного комплекса. Пусть P — клеточный комплекс, G — абелева группа, называемая *областью коэффициентов* определяемых ниже групп гомологий. Функцию x^r, относящую каждой r-мерной ориентированной клетке комплекса P элемент группы G, будем называть *цепью*, если она при $r>0$ кососимметрична, т. е. меняет знак при перемене ориентации клетки: $x^r(-\tau^r) = -x^r(\tau^r)$, $r>0$. Цепи можно также условиться записывать в виде линейных комбинаций ориентированных клеток (ср. п. 1:5): $x^r = \sum\limits_i g_i \tau_i^r$. Для r-мерной цепи x^r будем называть $(r-1)$-мерную цепь

$$\Delta x^r = \sum_{i,j} [\tau_i^r : \tau_j^{r-1}] \cdot x^r(\tau_i^r) \cdot \tau_j^{r-1}, \quad r>0 \tag{3.1}$$

ее *Δ-границей*, а $(r+1)$-мерную цепь

$$\nabla x^r = \sum_{i,j} [\tau_j^{r+1} : \tau_i^r] \cdot x^r(\tau_i^r) \cdot \tau_j^{r+1}, \quad r \geqslant 0 \tag{3.2}$$

ее *∇-границей* (суммирование ведется по всем как-либо ориентированным клеткам размерностей r и $r-1$ в (3.1) и размерностей r и $r+1$ в (3.2); нульмерные клетки, как всегда, рассматриваются без ориентации). Граница Δx^0 нульмерной цепи x^0 полагается по определению равной нулю.

Непосредственный подсчет показывает [ср. (2.1)], что для любой цепи x^r имеем

$$\Delta\Delta x^r = 0, \quad \nabla\nabla x^r = 0. \tag{3.3}$$

Цепь, удовлетворяющая соотношению $\Delta x^r = 0$, называется *Δ-циклом*, а цепь, удовлетворяющая соотношению $\nabla x^r = 0$, — *∇-циклом*. Как следует из (3.3), всякая цепь вида Δx^r является Δ-циклом, а цепь вида ∇x^r является ∇-циклом; эти циклы называются *гомологичными нулю*.

Если x^r и y^r — произвольные r-мерные цепи клеточного комплекса P по области коэффициентов G, то функция $x^r + y^r$ также кососимметрична $r>0$, т. е. является цепью. Таким образом, во множестве $L^r(P, G)$ всех r-мерных цепей определено сложение, в результате чего это множество превращается в абелеву группу. Множество $Z_\Delta^r(P, G)$ всех r-мерных Δ-циклов является подгруппой группы $L^r(P, G)$, так же как и множество $Z_\nabla^r(P, G)$ всех r-мерных

∇-циклов; это следует из очевидных соотношений $\Delta(x^r + y^r) = \Delta x^r + \Delta y^r$; $\nabla(x^r + y^r) = \nabla x^r + \nabla y^r$. Из этих же соотношений и из (3.3) следует, что множество $H^r_\Delta(P, G)$ всех r-мерных Δ-циклов, гомологичных нулю, является подгруппой группы $Z^r_\Delta(P, G)$, а множество $H^r_\nabla(P, G)$ всех гомологичных нулю r-мерных ∇-циклов — подгруппой группы $Z^r_\nabla(P, G)$. Таким образом, определены факторгруппы

$$\Delta^r(P, G) = Z^r_\Delta(P, G) / H^r_\Delta(P, G), \qquad \nabla^r(P, G) = Z^r_\nabla(P, G) / H^r_\nabla(P, G),$$

называемые r-мерными *группами* Δ- и ∇-*гомологий* комплекса P по области коэффициентов G. Элементы групп $\Delta^r(P, G)$ и $\nabla^r(P, G)$ называются *классами гомологий*. О циклах, принадлежащих одному классу гомологий, говорят, что они *гомологичны* между собой. Гомологичность Δ-циклов z и z' выражают записью $z \underset{\Delta}{\sim} z'$, а гомологичность ∇-циклов z_1 и z'_1 — записью $z_1 \underset{\nabla}{\sim} z'_1$. Циклы, принадлежащие нулевому элементу группы гомологий, называются *гомологичными нулю*. В этом случае мы пишем $z \underset{\Delta}{\sim} 0$ или, соответственно, $z_1 \underset{\nabla}{\sim} 0$. Группы гомологий являются важным средством исследования ряда топологических свойств полиэдров.

Пусть теперь f — клеточное отображение комплекса P в клеточный комплекс Q. Если x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса P, а y^r — произвольная r-мерная цепь комплекса Q, то определим цепи $f_* x^r$, $f^* y^r$, положив

$$f_* x^r = \sum_{i,j} [f\tau^r_i : \tau^r_j] \cdot x^r(\tau^r_i) \cdot \tau^r_j; \qquad f^* y^r = \sum_{i,j} [f\tau^r_i : \tau^r_j] \cdot y^r(\tau^r_j) \cdot \tau^r_i$$

(суммирование ведется по всем r-мерным клеткам комплексов P и Q, каждая из которых при $r > 0$ как-то оретирована). Цепи $f_* x^r$ и $f^* y^r$ лежат в комплексах Q и P соответственно. Из формул (3.1), (3.2) и (2.4) непосредственно вытекают соотношения

$$f_* \Delta x^r = \Delta f_* x^r, \quad \nabla f^* y^r = f^* \nabla y^r, \tag{3.4}$$

обобщающие (1.7). Кроме того, очевидно, что $f_*(x^r_1 + x^r_2) = f_*(x^r_1) + f_*(x^r_2)$, $f^*(y^r_1 + y^r_2) = f^*(y^r_1) + f^*(y^r_2)$. Эти соотношения показывают, что f_* является гомоморфизмом группы $L^r(P, G)$ в группу $L^r(Q, G)$; согласно (3.4), группа $Z^r_\Delta(P, G)$ отображается при помощи f_* в $Z^r_\Delta(Q, G)$, а группа $H^r_\Delta(P, G)$ — в $H^r_\Delta(Q, G)$. Таким образом, f_* порождает гомоморфизм группы $\Delta^r(P, G)$ в группу $\Delta^r(Q, G)$; этот гомоморфизм мы также будем обозначать через f_*. Аналогично, гомоморфизм f^* группы $L^r(Q, G)$ в группу $L^r(P, G)$ порождает гомоморфизм f^* группы $\nabla^r(Q, G)$ в $\nabla^r(P, G)$.

Если f — клеточное отображение комплекса P в Q, а g — клеточное отображение комплекса Q в R, то отображение gf является клеточным отображением комплекса P в R. Оно порождает поэтому гомоморфизм $(gf)_*$ группы $\Delta^r(P,G)$ в $\Delta^r(R,G)$, а также гомоморфизм $(gf)^*$ группы $\nabla^r(R,G)$ в $\nabla^r(P,G)$, причем (ср. (2.5))

$$(gf)_* = g_* f_*, \quad (gf)^* = f^* g^*. \tag{3.5}$$

Так как симплициальные комплексы являются частным случаем клеточных, то для них также определяются группы гомологий. Так как, далее, всякое симплициальное отображение f является клеточным, то оно порождает гомоморфизмы f_* и f^* групп Δ- и ∇-гомологий.

3:2. Инвариантность групп гомологий. (а). Пусть P — клеточный комплекс, τ^r — ориентированная клетка этого комплекса. Клеткам $\tau^r \times 0$ и $\tau^r \times 1$ клеточного комлекса $P \times \overline{I}$ условимся придавать такую ориентацию, что для отображений ν_0 и ν_1, переводящих точку $x \in \widetilde{P}$ в $x \times 0$ и $x \times 1$ соответственно, имеем

$$[\nu_0\tau^r : \tau^r \times 0] = +1, \qquad [\nu_1\tau^r : \tau^r \times 1] = +1; \tag{3.6}$$

клетке же $\tau^r \times I$ условимся придавать такую ориентацию, что

$$[\tau^r \times I : \tau^r \times 0] = +1. \tag{3.7}$$

Если, далее, x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса P, то через $x^r \times 0$ и $x^r \times 1$ мы будем обозначать цепи $(\nu_0)_* x^r$ и $(\nu_1)_* x^r$, а через $x^r \times I$ — такую $(r+1)$-мерную цепь комплекса $P \times \overline{I}$, которая на клетке $\tau^r \times I$ имеет такое же значение, какое имеет цепь x^r на клетке τ^r. Тогда в комплексе $P \times \overline{I}$ имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{gathered}\Delta(x^r \times I) = x^r \times 0 - x^r \times 1 - (\Delta x^r) \times I,\\ \Delta(x^r \times 0) = (\Delta x^r) \times 0, \ \Delta(x^r \times 1) = (\Delta x^r) \times 1,\\ \nabla(x^r \times I) = -(\nabla x^r) \times I,\\ \nabla(x^r \times 0) = (\nabla x^r) \times 0 + x^r \times I, \nabla(x^r \times 1) = (\nabla x^r) \times 1 - x^r \times I.\end{gathered}\right\} \tag{3.8}$$

Доказательства всех этих формул непосредственно получаются из (3.6), (3.7) и соотношений

$$[\tau^r \times I : \tau^r \times 1] = -1, \ [\tau^r \times I : \tau^{r-1} \times I] = -[\tau^r \times 0 : \tau^{r-1} \times 0]. \tag{3.9}$$

Первое из соотношений (3.9) непосредственно следует из (2.2). Для доказательства второго из них применим формулу (2.1) к клеткам $\tau^r \times I$ и $\tau^{r-1} \times 0$. Тогда получим

$$\begin{gathered}[\tau^r \times I : \tau^r \times 0][\tau^r \times 0 : \tau^{r-1} \times 0] + [\tau^r \times I : \tau^r \times 1][\tau^r \times 1 : \tau^{r-1} \times 0] +\\ + \sum_i [\tau^r \times I : \tau_i^{r-1} \times I][\tau_i^{r-1} \times I : \tau^{r-1} \times 0] = 0,\end{gathered}$$

где суммирование распространено на все как-либо ориентированные $(r-1)$-мерные клетки комплекса P. В этой сумме отличны от нуля только два слагаемых, и мы имеем

$$[\tau^r \times 0 : \tau^{r-1} \times 0] + [\tau^r \times I : \tau^{r-1} \times I] = 0.$$

(б). *Если f_0 и f_1 — два гомотопных между собой клеточных отображения клеточного комплекса P в Q, то гомоморфизмы $(f_0)_*$ и $(f_1)_*$ групп Δ-гомологий совпадают между собой, так же как и гомоморфизмы f_0^* и f_1^* групп ∇-гомологий.*

Пусть F — отображение клеточного комплекса $P\times\bar{I}$ в Q, совпадающее с $f_0\nu_0^{-1}$ на $P\times 0$ и с $f_1\nu_1^{-1}$ на $P\times 1$. Существование такого отображения следует из гомотопности отображений f_0 и f_1. В силу теоремы о клеточной аппроксимации (п. 2 : 2) мы можем считать отображение F клеточным отображением комплекса $P\times\bar{I}$ в Q. Пусть теперь Z^r — произвольный элемент группы $\Delta^r(P, G)$, а z^r — цикл, принадлежащий классу гомологий Z^r. Тогда в силу первой из формул (3.8), учитывая, что $\Delta z^r = 0$, получим

$$\Delta F_*(z^r\times I) = F_*\Delta(z^r\times I) = F_*(z^r\times 0 - z^r\times 1) =$$
$$= F_*(z^r\times 0) - F_*(z^r\times 1) = (F\nu_0)_* z^r - (F\nu_1)_* z^r = (f_0)_* z^r - (f_1)_* z^r.$$

Таким образом, цикл $(f_0)_* z^r - (f_1)_* z^r$ гомологичен нулю, т. е. $(f_0)_* Z^r = (f_1)_* Z^r$. Мы видим, что гомоморфизмы $(f_0)_*$ и $(f_1)_*$ совпадают. Пусть, наконец, Z_1^r — произвольный элемент группы $\nabla^r(Q, G)$, а z_1^r — цикл, принадлежащий классу гомологий Z_1^r. Тогда цикл $F^* z_1^r$ имеет вид $(f_0^* z_1^r)\times 0 + (f_1^* z^r)\times 1 + x^{r-1}\times I$, где x^{r-1} — некоторая $(r-1)$-мерная цепь комплекса P. Взяв ∇-границу, получаем в силу (3.8):

$$(f_0^* z_1^r)\times I - (f_1^* z_1^r)\times I - (\nabla x^{r-1})\times I = 0,$$

откуда

$$f_0^* z_1^r - f_1^* z_1^r = \nabla x^{r-1}.$$

Таким образом, цикл $f_0^* z_1^r - f_1^* z_1^r$ гомологичен нулю, и потому

$$f_0^* Z_1^r = f_1^* Z_1^r.$$

Теорема об инвариантности групп гомологий. *Пусть P и Q — два клеточных комплекса, для которых соответствующие полиэдры $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ гомеоморфны. Тогда группы Δ- и ∇-гомологий комплексов P и Q соответственно изоморфны, причем этот изоморфизм однозначно определяется, если задано гомеоморфное отображение пространства $\tilde{P}$ на $\tilde{Q}$.*

Доказательство. Пусть f — гомеоморфное отображение полиэдра $\tilde{P}$ на $\tilde{Q}$. Пусть, далее, f_0 — клеточная аппроксимация отображения f комплекса P в Q, а g_0 — клеточная аппроксимация отображения $g = f^{-1}$ комплекса Q в P. Так как отображения f_0 и g_0 соответственно гомотопны отображениям f и f^{-1}, то отображения $f_0 g_0$ и $g_0 f_0$ соответственно комплексов Q и P в себя гомотопны тождественным отображениям этих комплексов. Поэтому, в силу (б), отображение $(f_0 g_0)_*$ группы $\Delta^r(Q, G)$ в себя является *изоморфизмом на*, так что $(g_0)_*$ есть изоморфизм, а $(f_0)_*$ — отображение группы $\Delta^r(P, G)$ на всю группу

$\Delta^r(Q, G)$. Точно так же $(g_0 f_0)_*$ является изоморфизмом на, так что $(f_0)_*$ есть изоморфизм, а $(g_0)_*$ — отображение на всю группу $\Delta^r(P, G)$. Таким образом, $(f_0)_*$ и $(g_0)_*$ являются взаимно обратными изоморфизмами. Аналогично обстоит дело для групп ∇-гомологий. Теорема доказана*.

(в). Пусть f — произвольное непрерывное отображение полиэдра $\widetilde{P}$ в $\widetilde{Q}$, а f_0 — клеточная аппроксимация отображения f комплекса P в Q. Тогда будут определены гомоморфизмы $(f_0)_*$ и f_0^* групп Δ- и ∇-гомологий. Так как всякие две клеточные аппроксимации отображения f гомотопны f и, следовательно, гомотопны между собой, то в силу (б), гомоморфизмы $(f_0)_*$ и f_0^* не зависят от выбора клеточной аппроксимации отображения f. Эти гомоморфизмы мы будем обозначать через f_*, f^*. Ясно, в силу того же предложения (б), что гомотопные между собой отображения комплекса P в Q порождают одинаковые гомоморфизмы групп гомологий. Если, наконец, P и Q — два различных клеточных разбиения одного и того же полиэдра, то тождественное отображение комплекса P в Q, являющееся гомеоморфизмом, порождает, в силу теоремы об инвариантности групп гомологий, изоморфизм групп гомологий комплексов P и Q. Эти изоморфизмы мы будем называть *естественными*.

(г). Пусть P_1 и P_2 — два клеточных разбиения одного и того же полиэдра $\widetilde{P}$. Условимся называть эквивалентными такие элементы групп $\Delta^n(P_1, G)$ и $\Delta^n(P_2, G)$, которые соответствуют друг другу при естественном изоморфизме этих групп. Введенное соотношение эквивалентности, очевидно, является рефлексивным, симметричным и транзитивным, так что определяются классы эквивалентности элементов групп $\Delta^n(P, G)$, где P — произвольное клеточное разбиение рассматриваемого полиэдра $\widetilde{P}$. Каждый класс эквивалентности имеет в группе $\Delta^n(P, G)$ единственного представителя. Условимся складывать полученные классы эквивалентности по их представителям в каждой из групп $\Delta^n(P, G)$. Тогда множество всех классов эквивалентности превратится в группу, изоморфную каждой из групп $\Delta^n(P, Q)$. Эту группу мы обозначим через $\Delta^n(\widetilde{P}, G)$ и назовем *n-мерной группой Δ-гомоло-*

* Из приведенного доказательства ясно, что справедлива следующая более общая теорема. Назовем отображение f полиэдра $\widetilde{P}$ в $\widetilde{Q}$ *гомотопической эквивалентностью*, если существует такое отображение g полиэдра $\widetilde{Q}$ в $\widetilde{P}$, что fg и gf гомотопны тождественным отображениям полиэдров Q и P в себя; полиэдры P и Q называются полиэдрами одного *гомотопического типа*, если существует отображение одного из них в другой, являющееся гомотопической эквивалентностью. Тогда справедлива следующая теорема: *полиэдры одного и того же гомотопического типа имеют изоморфные группы гомологий, причем изоморфизм этих групп однозначно определяется, если задана гомотопическая эквивалентность рассматриваемых полиэдров*. Так как, например, очевидно, что симплекс любой размерности и точка имеют один и тот же гомотопический тип, то отсюда вытекает, что (для $r > 0$) *r-мерные группы гомологий любого симплекса* (или гомеоморфного ему множества) *тривиальны*.

гий полиэдра $\tilde{P}$. Если мы каждому классу эквивалентности поставим в соответствие содержащийся в нем элемент группы $\Delta^n(P, G)$, то получим изоморфное отображение группы $\Delta^n(\tilde{P}, G)$ на $\Delta^n(P, G)$. Этот изоморфизм мы также будем называть *естественным*. Если f — непрерывное отображение полиэдра $\tilde{P}$ в полиэдр $\tilde{Q}$, то оно порождает (по представителям) гомоморфизм f_* группы $\Delta^n(\tilde{P}, G)$ в $\Delta^n(\tilde{Q}, G)$. Гомотопные между собой отображения порождают один и тот же гомоморфизм этих групп. Аналогично определяются ∇-группы $\nabla^n(\tilde{P}, G)$ полиэдра $\tilde{P}$ и гомоморфизм f^* для этих групп.

3:3. Непрерывные группы гомологий*. Пусть X — топологическое пространство. Мы будем рассматривать тройки (P, x^n, f), где P — некоторый клеточный комплекс, x^n — его n-мерная цепь по области коэффициентов G, а f — непрерывное отображение полиэдра $\tilde{P}$ в X. Если φ — клеточное отображение комплекса Q в клеточный комплекс P, то тройки $(Q, y^n, f\varphi)$ и $(P, \varphi_* y^n, f)$ мы будем называть *сходными*. Условимся, далее, называть две тройки эквивалентными, если они являются начальным и конечным элементами такой конечной последовательности троек, в которой каждые две соседние тройки являются сходными. Это отношение эквивалентности, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, и множество всех троек, рассматриваемых для заданного пространства X, распадается на классы эквивалентности. Каждый из этих классов эквивалентности назовем n-мерной *непрерывной цепью* пространства X по области коэффициентов G. Непрерывную цепь, определяемую тройкой (P, x^n, f), мы будем обозначать через $\{P, x^n, f\}$ или $f(x^n)$. Определим во множестве $L^n(X, G)$ всех n-мерных непрерывных цепей пространства X по области коэффициентов G операцию сложения, в результате которой оно станет абелевой группой. Именно, пусть $\{P_1, x_1^n, f_1\}$ и $\{P_2, x_2^n, f_2\}$ — две непрерывные цепи. Будем предполагать, что полиэдры $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ не пересекаются и положим $P = P_1 \cup P_2$, $x^n = x_1^n + x_2^n$, а отображение f полиэдра $\tilde{P}$ в X определим как совпадающее с f_1 на $\tilde{P}_1$ и с f_2 на $\tilde{P}_2$. Соответствующую цепь $\{P, x^n, f\}$ мы и будем называть *суммой* цепей $\{P_1, x_1^n, f_1\}$ и $\{P_2, x_2^n, f_2\}$. Для законности этого определения нужно еще установить, что при замене троек (P_1, x_1^n, f_1) и (P_2, x_2^n, f_2) эквивалентными им тройками тройка (P, x^n, f) тоже заменяется эквивалентной. Достаточно рассмотреть случай, когда одна из этих троек заменяется сходной, а другая не меняется, но в этом случае, очевидно, тройка (P, x^n, f) тоже заменяется сходной.

* Здесь приведено довольно простое построение теории непрерывных Δ-гомологий. Аналогично может быть построена теория ∇-гомологий. Существует целый ряд других определений групп гомологий; все они эквивалентны между собой для более или менее широкого класса пространств. Отметим особо *сингулярную теорию гомологий* (см., например, [17]), часто используемую в гомотопической теории, а также теорию *сингулярных кубических гомологий Серра* [18].

Все тройки вида $(P, 0, f)$ эквивалентны между собой. Действительно, если P_1, P_2, P и f_1, f_2, f имеют тот же смысл, что и выше, при определении суммы цепей, то в последовательности $(P_1, 0, f_1)$, $(P, 0, f)$, $(P_2, 0, f_2)$ каждые две соседние тройки сходны; это следует из рассмотрения тождественных отображений комплексов P_1 и P_2 в комплекс P. Цепь, определяемую тройками $(P, 0, f)$, назовем *нулевой*; она является нулем группы $L^n(X, G)$ относительно определенной выше операции сложения. Обратной для цепи $\{P, x^n, f\}$ является цепь $\{P, -x^n, f\}$. В самом деле, пусть P_1 и P_2 — два непересекающихся экземпляра комплекса P, а e_1 и e_2 — тождественные отображения соответственно комплексов P_1 и P_2 в P. Пусть, далее, $\bar{P}$ — объединение комплексов P_1 и P_2, а $\bar{e}$ — отображение комплекса $\bar{P}$ в P, совпадающее с e_1 на P_1 и с e_2 на P_2. Тогда тройки $(P_i, (e_i^{-1})_* x^n, fe_i)$ и (P, x^n, f) сходны, $i=1, 2$, и потому тройка $(\bar{P}, (e_1^{-1})_* x^n - (e_2^{-1})_* x^n, f\bar{e})$ принадлежит цепи $\{P, x^n, f\} + \{P, -x^n, f\}$. Но эта тройка сходна тройке $(P, (\bar{e}e_1^{-1})_* x^n - (\bar{e}e_2^{-1})_* x^n, f)$, и, так как $(\bar{e}e_1^{-1})_* x^n - (\bar{e}e_2^{-1})_* x^n = 0$, то $\{P, x^n, f\} + \{P, -x^n, f\} = 0$. Итак, $L^n(X, G)$ является группой.

Если тройки (P_1, x_1^n, f_1) и (P_2, x_2^n, f_2) эквивалентны, то эквивалентны между собой и тройки $(P_1, \Delta x_1^n, f_1)$ и $(P_2, \Delta x_2^n, f_2)$. Соответствующая цепь $\{P_1, \Delta x_1^n, f_1\}$ называется Δ-границей цепи $\{P_1, x_1^n, f_1\}$. Очевидно, что граница суммы цепей равна сумме их границ. Таким образом, операция Δ взятия границы определяет гомоморфное отображение группы $L^n(X, G)$ в $L^{n-1}(X, G)$. Ядро этого гомоморфизма, состоящее из цепей, граница которых равна нулю, обозначается через $Z_\Delta^n(X, G)$. Цепи, входящие в группу $Z_\Delta^n(X, G)$, называются ***непрерывными циклами***. Образ гомоморфизма Δ, состоящий из цепей, являющихся границами непрерывных цепей, обозначается через $H_\Delta^{n-1}(X, G)$. Все цепи группы $H_\Delta^{n-1}(X, G)$ являются циклами (иначе говоря, $H_\Delta^{n-1}(X, G) \subset Z_\Delta^{n-1}(X, G)$) и называются *гомологичными нулю*. Факторгруппа

$$\Delta^n(X, G) = Z_\Delta^n(X, G)/H_\Delta^n(X, G)$$

называется ***n-мерной группой непрерывных гомологий*** пространства X по области коэффициентов G.

Если отображения f_0 и f_1 полиэдра P в X гомотопны между собой, то циклы $\{P, z^n, f_0\}$ и $\{P, z^n, f_1\}$, как нетрудно видеть, гомологичны. В самом деле, пусть e_0 и e_1 — такие отображения клеточного комплекса P в произведение $P \times \bar{I}$, которые переводят каждую точку $a \in P$ соответственно в $a \times 0$ и $a \times 1$, а F — такое отображение полиэдра $\tilde{P} \times \bar{I}$ в X, которое соответствует деформации отображения f_0 в отображение f_1. Тогда циклы $\{P, z^n, f_0\}$ и $\{P, z^n, f_1\}$ совпадают соответственно с циклами $\{P \times \bar{I}, (e_0)_*(z^n), F\}$ и $\{P \times \bar{I}, (e_1)_*(z^n), F\}$, а эти последние гомологичны между собой, ибо, в силу формулы (3.8), мы имеем

$$\Delta(z^n \times I) = z^n \times 0 - z^n \times 1 = (e_0)_* z^n - (e_1)_* z^n.$$

Пусть теперь ψ — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, а $\{P, x^n, f\}$ — непрерывная цепь пространства X. Положим $\psi_*\{P, x^n, f\} = \{P, x^n, \psi f\}$. Тогда ψ_* есть гомоморфное отображение группы $L^n(X, G)$ в $L^n(Y, G)$. Очевидно, что при этом отображении образы групп $Z^n_\Delta(X, G)$ и $H^n_\Delta(X, G)$ лежат соответственно в группах $Z^n_\Delta(Y, G)$ и $H^n_\Delta(Y, G)$. Таким образом, отображение ψ порождает гомоморфизм ψ_* группы $\Delta^n(X, G)$ в $\Delta^n(Y, G)$. Гомотопные между собой отображения пространства X в Y порождают один и тот же гомоморфизм группы $\Delta^n(X, G)$ в $\Delta^n(Y, G)$.

Покажем, наконец, что если пространство X является полиэдром, то группа непрерывных гомологий изоморфна его группе гомологий, определенной в п. 2:3.

Действительно, пусть Q — произвольное клеточное разбиение полиэдра X, а e — тождественное отображение этого полиэдра на себя. Пусть, далее, x^n есть n-мерная цепь клеточного комплекса Q по области коэффициентов G. Положим $\hat{e}(x^n) = \{Q, x^n, e\}$. Тогда $\hat{e}$ есть гомоморфное отображение группы $L^n(Q, G)$ в группу $L^n(X, G)$, причем, очевидно, $\Delta\hat{e}(x^n) = \hat{e}(\Delta x^n)$. Поэтому отображение $\hat{e}$ порождает гомоморфизм группы $\Delta^n(Q, G)$ в $\Delta^n(X, G)$; этот гомоморфизм мы также обозначим через $\hat{e}$. Пусть $\{P, z^n, f\}$ — непрерывный цикл полиэдра X, а f_1 — клеточное отображение комплекса P в Q, гомотопное f. Тогда тройки $\{P, z^n, f_1\}$ и $\{Q, (f_1)_* z^n, e\}$ сходны, так что

$$\hat{e}((f_1)_* z^n) = \{Q, (f_1)_* z^n, e\} = \{P, z^n, f_1\}.$$

В силу гомотопности отображений f и f_1 отсюда следует, что циклы $\hat{e}((f_1) z^n)$ и $\{P, z^n, f\}$ гомологичны.

Таким образом, $\hat{e}$ есть отображение группы $\Delta^n(Q, G)$ на всю группу $\Delta^n(X, G)$.

Далее, пусть $\{P_1, z^n_1, f_1\}$ и $\{P_2, z^n_2, f_2\}$ — эквивалентные тройки, а f'_i, $i = 1, 2$ — клеточное отображение комплекса P_i в Q, гомотопное отображению f_i. Покажем, что циклы $(f'_1)_* z^n_1$ и $(f'_2)_* z^n_2$ комплекса Q гомологичны между собой. Достаточно рассмотреть случай, когда тройки сходны. Итак, пусть $f_1 = f_2\varphi$, где φ — такое клеточное отображение комплекса P_1 в P_2, что $\varphi_* z^n_1 = z^n_2$. Тогда $f'_2\varphi$ есть клеточное отображение комплекса P_1 в Q, гомотопное отображению f'_1, так что циклы $(f'_1)_* z^n_1$ и $(f'_2\varphi)_* z^n_1 = (f'_2)_* z^n_2$ гомологичны.

Теперь нам нетрудно установить, что отображение $\hat{e}$ изоморфно. Действительно, предположим, что непрерывный цикл $\hat{e}(z^n)$ гомологичен нулю, и покажем, что в этом случае и цикл z^n гомологичен нулю в комплексе Q. Гомологичность нулю цикла $\hat{e}(z^n)$ означает, что тройка $\{Q, z^n, e\}$ эквивалентна тройке вида $\{P, \Delta x^{n+1}, f\}$. Обозначим через f_1 клеточное отображение комплекса P в Q, гомотопное отображению f. Тогда в силу сказанного выше, циклы $(f_1)_*(\Delta x^{n+1})$ и $e_* z^n = z^n$ гомологичны, т. е. $z^n \underset{\Delta}{\sim} 0$.

Итак, группа непрерывных гомологий полиэдра $X = \widetilde{Q}$ изоморфна группе $\Delta^n(Q, G)$.

§ 4. Гомологические свойства многообразий

4:1. Комбинаторное многообразие. Ориентируемость. Связное топологическое пространство X со счетной базой называется n-мерным *многообразием*, если каждая точка $x \in X$ имеет в X окрестность, гомеоморфную открытому множеству n-мерного эвклидова пространства. В настоящей статье мы будем рассматривать только компактные многообразия (их называют также замкнутыми многообразиями). Многообразие, являющееся полиэдром, иначе говоря триангулируемое*, назовем *комбинаторным*. Если $\widetilde{M}$ есть n-мерное комбинаторное многообразие, а M — его триангуляция, то комплекс M обладает тремя следующими важными свойствами.

(а) Свойство неразветвленности. *Каждый $(n-1)$-мерный симплекс комплекса M является гранью ровно двух n-мерных симплексов этого комплекса.*

Доказательство этого можно провести совершенно аналогично доказательству предложения (а) п. 2 : 1.

(б) Свойство сильной связности. *Для каждых двух n-мерных симплексов T^n и T'^n комплекса M существует такая цепочка $T^n, T_1^n, T_2^n, \ldots, T_q^n, T'^n$ n-мерных симплексов этого комплекса, что каждые два соседних симплекса этой цепочки имеют общую $(n-1)$-мерную грань.*

Доказательство аналогично доказательству предложения (б) п. 2 : 1.

(в) Свойство размерной однородности. *Каждый m-мерный симплекс $(m < n)$ комплекса M является гранью по крайней мере одного n-мерного симплекса.*

Доказательство легко получить из того, что шары различных размерностей негомеоморфны (ср. условие $(К_1)$ п. 2 : 1).

Всякий n-мерный комплекс M, удовлетворяющий условиям (а), (б), (в), так же как и соответствующий полиэдр $\widetilde{M}$, называют n-мерным *псевдомногообразием* **. Таким образом, всякое комбинаторное многообразие является псевдомногообразием. Простые примеры показывают, что псевдомногообразие, вообще говоря, не является многообразием (черт. 4 — так называемый «перетянутый тор»).

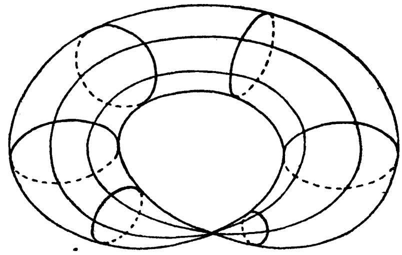
---

* До сих пор не известно, всякое ли компактное многообразие является полиэдром.

** Можно доказать, что если одна триангуляция полиэдра удовлетворяет условиям (а), (б), (в), то и любая его триангуляция удовлетворяет этим условиям (см., например, [2], п. 5 : 2).

Пусть M есть n-мерное псевдомногообразие, а J_2 — группа порядка 2; элементы этой группы обозначим через 0 и 1. Цепь z^n, принимающая на каждом n-мерном симплексе комплекса M значение 1 (ориентация симплекса несущественна, так как элемент 1 группы J_2 имеет порядок 2), является, в силу свойства неразветвленности, n-мерным Δ-циклом. Рассуждения, совершенно аналогичные проведенным при доказательстве предложения (б) п. 2 : 3, покажут, что всякий n-мерный цикл комплекса M по области коэффициентов J_2 либо равен нулю, либо совпадает с z^n. При этом, цикл z^n не гомологичен нулю в M, ибо в M нет $(n+1)$-мерных симплексов. Таким образом, группа $\Delta^n(M, J_2)$ имеет порядок 2.

Пусть теперь J_0 — свободная циклическая группа, например аддитивная группа целых чисел. Если в M существует отличный от нуля n-мерный цикл ζ^n по области коэффициентов J_0, то псевдомногообразие M называется *ориентируемым*. Если k — коэффициент цикла ζ^n на некотором n-мерном симплексе комплекса M, то (ср. п. 2 : 3) все коэффициенты цикла ζ^n равны k, т. е. цикл ζ^n имеет вид $k \cdot z_*^n$, где z_*^n — некоторая цепь комплекса M (причем все коэффициенты цепи z_*^n равны ± 1). Так как $\Delta\zeta^n = 0$, то $k \cdot \Delta z_*^n = 0$ или $\Delta z_*^n = 0$, т. е. цепь z_*^n является Δ-циклом. Каждый n-мерный цикл комплекса M по области коэффициентов J_0 имеет вид $j \cdot z_*^n$, где j — целое число. Таким образом, *группа $\Delta^n(M, J_0)$ является в случае ориентируемого n-мерного псевдомногообразия свободной циклической*. Образующие элементы этой группы определяются циклами z_*^n и $-z_*^n$, каждый из которых мы будем называть *ориентирующим циклом* псевдомногообразия M. Псевдомногообразие M называется *ориентированным*, если выбран один из двух образующих элементов группы $\Delta^n(M, J_0)$, т. е. если выбран один из двух ориентирующих циклов. Два симплекса комплекса M называются *когерентно ориентированными*, если они входят в ориентирующий цикл с одинаковыми коэффициентами. В n-мерном ориентируемом псевдомногообразии можно так ориентировать все n-мерные симплексы, что каждые два из них будут когерентно ориентированы.



Черт. 4.

Если в n-мерном псевдомногообразии нет отличных от нуля n-мерных циклов по области коэффициентов J_0, т. е. если группа $\Delta^n(M, J_0)$ тривиальна, то псевдомногообразие называется *неориентируемым*.

Пусть f — непрерывное отображение n-мерного псевдомногообразия $\tilde{M}_1$ в n-мерное псевдомногообразие $\tilde{M}_2$. Если псевдомногообразия

$\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ ориентируемы и ориентированы, т. е. выбраны образующие элементы Z_1^n и Z_2^n групп $\Delta^n(\widetilde{M}_1, J_0)$ и $\Delta^n(\widetilde{M}_2, J_0)$, то мы имеем $f_* Z_1^n = kZ_2^n$, где k—целое число. Это число называется *степенью* отображения f. Степени гомотопных между собой отображений совпадают (см. п. 3:2). При перемене ориентации одного из псевдомногообразий M_1, $\widetilde{M}_2$ степень отображения меняет знак. Для отображений неориентируемых псевдомногообразий определена степень отображения по модулю 2.

Простейшим примером n-мерного многообразия является n-мерная сфера S^n. Она является комбинаторным многообразием, ибо гомеоморфна границе $(n+1)$-мерного симплекса, которая, очевидно, является полиэдром. Для вычисления групп $\Delta^r(S^n, G)$ удобно представить S^n как тело клеточного комплекса, состоящего из двух клеток: нульмерной клетки $\tau^0 \in S^n$ и n-мерной клетки $\tau^n = S^n \setminus \tau^0$. Из рассмотрения этого клеточного комплекса ясно, что имеет место следующее предложение:

Теорема. *Группы $\Delta^0(S^n, G)$ и $\Delta^n(S^n, G)$ изоморфны группе G, а Δ-группы остальных размерностей тривиальны. В частности, группа $\Delta^n(S^n, J_0)$ является свободной циклической, и потому сфера S^n является ориентируемым многообразием.*

4:2. Комбинаторное объединение комплексов. Симплициальные комплексы K и K_1 называются *изоморфными*, если существует такое симплициальное отображение комплекса K на K_1, которое осуществляет гомеоморфизм полиэдров $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}_1$. Обозначим через $[T^r]$ комплекс, состоящий из симплекса T^r и всех его граней. Нетрудно видеть, что всякий симплициальный комплекс K изоморфен некоторому подкомплексу комплекса $[T^r]$, если r достаточно велико. В самом деле, пусть $a_0, a_1, \ldots, a_r$ — все вершины комплекса K, так что их число равно $r+1$. Пусть, далее, $T^r = [b_0, b_1, \ldots, b_r]$ — произвольный r-мерный симплекс. Положим $f(a_i) = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, r$ и продолжим это отображение вершин аффинно на каждый симплекс комплекса K. Полученное симплициальное отображение переводит K в некоторый подкомплекс K_1 комплекса $[T^r]$ и является гомеоморфным, так как никакие две различные вершины из K не переходят в результате отображения f в одну и ту же вершину комплекса $[T^r]$. Таким образом, комплекс K изоморфен подкомплексу K_1 комплекса $[T^r]$.

Пусть K_1 и K_2 — произвольные симплициальные комплексы. Пусть, далее, K — симплициальный комплекс, в котором существуют такие непересекающиеся подкомплексы K_1^* и K_2^*, соответственно изоморфные K_1 и K_2, что для каждых двух симплексов

$$T^p = [a_0, \ldots, a^p] \in K_1^* \text{ и } T^q = [b_0, \ldots, b_q] \in K_2^*$$

в K содержится комплекс $T^p T^q = [a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q]$. В качестве K можно выбрать комплекс $[T^r]$, где r настолько велико, что в $[T^r]$

найдутся непересекающиеся подкомплексы, соответственно изоморфные комплексам K_1 и K_2. Совокупность всех симплексов вида $T^p T^q$, где $T^p \in K_1^*$ и $T^q \in K_2^*$, образует вместе со всеми симплексами из K_1^* и из K_2^* некоторый подкомплекс $K_1 K_2$ комплекса K. Комплекс K_1K_2 мы назовем **комбинаторным объединением** комплексов K_1 и K_2. Он определен, с точностью до изоморфизма, комплексами K_1 и K_2, а от выбора вспомогательного комплекса K, участвовавшего в нашем построении, не зависит. Иногда, не оговаривая этого особо, мы будем в проведенном выше построении отождествлять заданные комплексы K_1 и K_2 соответственно с K_1^* и K_2^*. В этом случае комплексы K_1 и K_2 содержатся в их комбинаторном объединении K_1K_2. Если комплекс K_1 состоит из единственной вершины a, то комбинаторное объединение $K_1K_2 = aK_2$ совпадает с пирамидой над комплексом K_2. В том случае, если K_1 является нульмерной сферой, т. е. состоит из двух точек a и b, комплекс K_1K_2 представляет собой объединение пирамид aK_2 и bK_2 над комплексом K_2 и называется в этом случае *надстройкой* над K_2; a и b называются *вершинами* надстройки. Надстройку над комплексом K мы будем обозначать символом EK.

Рассмотрим ряд свойств комбинаторных объединений.

(а) *Тело $\widetilde{K}$ комплекса $K = K_1K_2$ является объединением всех отрезков $[x, y]$, где $x \in \widetilde{K}_1$, $y \in \widetilde{K}_2$, причем никакие два различные из этих отрезков не имеют общих внутренних точек.*

Действительно, каждый такой отрезок, очевидно, содержится в $\widetilde{K}$. Обратно, пусть c — произвольная точка полиэдра $\widetilde{K}$, не лежащая ни в $\widetilde{K}_1$ ни в $\widetilde{K}_2$, а T — симплекс комплекса K, содержащий c своей внутренней точкой. Симплекс T имеет вид $[a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q]$, где $T^p = [a_0, \ldots, a_p]$ — некоторый симплекс из K_1, а $T^q = [b_0, \ldots, b_q]$ — некоторый симплекс из K_2. Пусть $\lambda^0, \ldots, \lambda^p$, $\mu^0, \ldots, \mu^q$ — барицентрические координаты точки c в симплексе T, причем $\lambda^0, \ldots, \lambda^p$ соответствуют вершинам $a_0, \ldots, a_p$, а $\mu^0, \ldots, \mu^q$ — вершинам $b_0, \ldots, b_q$. Так как точка c — внутренняя, то все числа $\lambda^0, \ldots, \lambda^p$, $\mu^0, \ldots, \mu^q$ положительны. Положим $\lambda = \lambda^0 + \ldots + \lambda^p$, $\mu = \mu^0 + \ldots + \mu^q$. Обозначим через a точку симплекса T^p, имеющую барицентрические координаты $\frac{\lambda_0}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda^p}{\lambda}$, а через $b \in T^q$ — точку с координатами $\frac{\mu^0}{\mu}, \ldots, \frac{\mu^q}{\mu}$. Тогда $c = \lambda a + \mu b$, причем $\lambda + \mu = 1$, т. е. c лежит на отрезке $[a, b]$.

Остается показать, что не существует другого отрезка указанного вида, содержащего точку c. Пусть $c \in [x, y]$, $x \in \widetilde{K}_1$, $y \in \widetilde{K}_2$, и пусть $T_1 \in K_1$ и $T_2 \in K_2$ — такие симплексы, которые содержат x и y своими внутренними точками. Тогда симплекс T_1T_2 содержит c своей внутренней точкой, так что $T_1T_2 = T$, и потому $T_1 = T^p$, $T_2 = T^q$. Если $\xi^0, \ldots, \xi^p$ — барицентрические координаты точки x в T^p, $\eta^0, \ldots, \eta^q$ —

барицентрические координаты точки y в T^q, а ξ и η — такие числа, что $c = \xi x + \eta y$, то барицентрические координаты точки c в симплексе T имеют значения $\xi\xi^0 = \lambda^0, \ldots, \xi\xi^p = \lambda^p$, $\eta\eta^0 = \mu^0, \ldots, \eta\eta^q = \mu^q$. Таким образом, $\xi(\xi^0 + \ldots + \xi^p) = \lambda^0 + \ldots + \lambda^p$ или $\xi = \lambda$; аналогично, $\eta = \mu$. Итак, $\xi^i = \frac{\lambda^i}{\lambda}$, $i = 0, \ldots, p$, и $\eta^j = \frac{\mu^j}{\mu}$, $j = 0, \ldots, q$, т. е. $x = a$, $y = b$.

(б). *Пусть K_1, K_2, K_1^* и K_2^* — такие симплициальные комплексы, что полиэдры $\widetilde{K}_1$ и $\widetilde{K}_2$ соответственно гомеоморфны полиэдрам $\widetilde{K}_1^*$ и $\widetilde{K}_2^*$. Положим $K = K_1K_2$, $K^* = K_1^* K_2^*$. Тогда полиэдры $\widetilde{K}$ и $\widetilde{K}^*$ гомеоморфны.*

Действительно, пусть φ_i — гомеоморфное отображение полиэдра $\widetilde{K}_i$ на $\widetilde{K}_i^*$, $i = 1, 2$. Если $a_1 \in \widetilde{K}_1$, $a_2 \in \widetilde{K}_2$, то отобразим отрезок $[a_1, a_2]$ аффинно на отрезок $[\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2)]$. Построив такие отображения для всех отрезков $[a_1, a_2]$, $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$, мы и получим гомеоморфное отображение полиэдра $\widetilde{K}$ на $\widetilde{K}^*$.

(в). *Пусть K_1, K_2, K_3 — произвольные симплициальные комплексы, $K_{12} = K_1K_2$, $K_{23} = K_2K_3$. Тогда комбинаторные объединения $K_{12}K_3$ и K_1K_{23} совпадают.*

Для доказательства будем предполагать, что K_1, K_2 и K_3 являются тремя непересекающимися подкомплексами комплекса $[T^r]$. Тогда комплексы $K_{12}K_3$ и K_1K_{23} состоят из всех симплексов вида $[a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q, c_0, \ldots c_s]$, где $[a_0, \ldots, a_p] \in K_1$, $[b_0, \ldots, b_q] \in K_2$, $[c_0, \ldots, c_s] \in K_3$, и из всех граней этих симплексов. Таким образом, эти комплексы совпадают.

(г). *Надстройка над r-мерной сферой есть $(r+1)$-мерная сфера.*

В самом деле, пусть K — комплекс, тело которого гомеоморфно r-мерной сфере, EK — надстройка над ним, а a и b — вершины надстройки. Пусть, далее, S^{r+1} есть $(r+1)$-мерная сфера, S^r — ее большая r-мерная сфера, a' и b' — полюсы сферы S^r, т. е. концы диаметра, перпендикулярного плоскости сферы S^r. Если φ — гомеоморфное отображение полиэдра $\widetilde{K}$ на S^r, то мы отобразим каждый из отрезков $[a, x]$, $[b, x]$, $x \in \widetilde{K}$ линейно (в смысле длины дуги) соответственно на дуги $[a', \varphi(x)]$, $[b', \varphi(x)]$ больших окружностей сферы S^{r+1}. В результате мы получим гомеоморфное отображение полиэдра $E\widetilde{K}$ на сферу S^{r+1}.

(д). Пусть K — симплициальный комплекс, aK — пирамида над ним. Если T^r — произвольный симплекс комплекса K, ориентированный при $r > 0$, то симплексу aT^r мы условимся придавать такую ориентацию, что $[aT^r : T^r] = +1$. Тогда, если T^r и T^{r-1} — соответственно r-мерный и $(r-1)$-мерный симплексы комплекса K, то, согласно формуле (2.1), мы имеем

$$[aT^r : T^r]\,[T^r : T^{r-1}] + [aT^r : aT^{r-1}]\,[aT^{r-1} : T^{r-1}] = 0,$$

откуда

$$[aT^r : aT^{r-1}] = -[T^r : T^{r-1}]. \tag{4.1}$$

Если, далее, T^0 — нульмерный симплекс комплекса K, то имеем

$$[aT^0 : a] = -1. \tag{4.2}$$

Пусть теперь x^r есть r-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов G. Обозначим через ax^r такую $(r+1)$-мерную цепь комплекса aK, которая на симплексе aT^r принимает то же значение, какое принимает цепь x^r на симплексе T^r. Из формул (4.1) и (4.2) вытекают следующие важные соотношения:

$$\Delta\, ax^r = x^r - a\Delta x^r, \quad r > 0, \tag{4.3}$$

$$\Delta\, ax^0 = x^0 - J(x^0)\cdot a. \tag{4.4}$$

В самом деле, мы имеем при $r > 0$

$$\begin{aligned}\Delta\, ax^r &= \Delta \sum_i x^r(T_i^r)\cdot aT_i^r = \\ &= \sum_i x^r(T_i^r)\Big([aT_i^r : T_i^r]\,T_i^r + \sum_j [aT_i^r : aT_j^{r-1}]\,aT_j^{r-1}\Big) = \\ &= \sum_i x^r(T_i^r)\,T_i^r - \sum_{i,j} x^r(T_i^r)\,[T_i^r : T_j^{r-1}]\,aT_j^{r-1} = \\ &= x^r - a\Big(\sum_{i,j} x^r(T_i^r)\,[T_i^r : T_j^{r-1}]\,T_j^{r-1}\Big) = x^r - a\Delta x^r.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Delta a x^0 &= \Delta \sum_i x^0(T_i^0)\,aT_i^0 = \sum_i x^0(T_i^0)\,(T_i^0 - a) = \\ &= \sum_i x^0(T_i^0)\,T_i^0 - \Big(\sum_i x^0(T_i^0)\Big)\,a = x^0 - J(x^0)\,a.\end{aligned}$$

(e). *При $r > 0$ группы $\Delta^r(K, G)$ и $\Delta^{r+1}(EK, G)$ изоморфны*.*

В самом деле, пусть z^r — произвольный r-мерный Δ-цикл комплекса K, $r > 0$. Обозначим через Ez^r цепь $az^r - bz^r$, где a и b — вершины надстройки EK. В силу формулы (4.3) цепь Ez^r является Δ-циклом. Если циклы z_1^r и z_2^r гомологичны в K, т. е. $z_1^r - z_2^r = \Delta x^{r+1}$, где x^{r+1} есть $(r+1)$-мерная цепь комплекса K, то в силу (4.3) мы имеем

$$\Delta(bx^{r+1} - ax^{r+1}) = a\Delta x^{r+1} - b\Delta x^{r+1} = Ez_1^r - Ez_2^r,$$

т. е. циклы Ez_1^r и Ez_2^r также гомологичны. Таким образом, соответствие $z^r \to Ez^r$ переводит гомологичные циклы в гомологичные и тем

* Группа $\Delta^0(K, G)$ изоморфна прямой сумме групп $\Delta^1(EK, G)$ и G,

самым порождает отображение E группы $\Delta^r(K, G)$ в $\Delta^{r+1}(EK, G)$. Это отображение, очевидно, гомоморфно. Если z^{r+1} есть произвольный $(r+1)$-мерный цикл комплекса EK, то он имеет вид $ax_1^r + bx_2^r + x^{r+1}$, где x_1^r, x_2^r и x^{r+1} — цепи комплекса K. Взяв Δ-границу, получим

$$x_1^r - a\Delta x_1^r + x_2^r - b\Delta x_2^r + \Delta x^{r+1} = 0,$$

откуда

$$\Delta x_2^r = 0 \text{ и } \Delta x^{r+1} + x_1^r + x_2^r = 0.$$

Таким образом, цикл

$$z_1^{r+1} = z^{r+1} - \Delta a x^{r+1} = a(x_1^r + \Delta x^{r+1}) + bx_2^r = -ax_2^r + bx_2^r = E(-x_2^r)$$

гомологичен циклу z^{r+1} и имеет вид Ez^r, где $z^r = -x_2^r$.

Мы видим, что в каждом классе гомологий $Z^{r+1} \in \Delta^{r+1}(EK, G)$ содержатся циклы вида Ez^r, т. е. что E есть отображение группы $\Delta^r(K, G)$ на всю группу $\Delta^{r+1}(EK, G)$. Наконец, если цикл Ez^r гомологичен нулю в EK, т. е.

$$Ez^r = \Delta(ax_1^{r+1} + bx_2^{r+1} + x^{r+2}),$$

где x_1^{r+1}, x_2^{r+1} и x^{r+2} — цепи комплекса K, то

$$az^r - bz^r = x_1^{r+1} - a\Delta x_1^{r+1} + x_2^{r+1} - b\Delta x_2^{r+1} + \Delta x^{r+2}.$$

Из этого соотношения вытекает, в частности, что $z^r = \Delta x_2^{r+1}$, т. е. что цикл z^r гомологичен нулю. Итак, ядро гомоморфизма E состоит только из нуля, так что группы $\Delta^r(K, G)$ и $\Delta^{r+1}(EK, G)$ изоморфны.

(ж). *При $r \geqslant 0$ группы $\nabla^r(K, G)$ и $\nabla^{r+1}(EK, G)$ изоморфны.*

Для цепей комплекса K мы будем обозначать ∇-границу в K символом ∇, а ∇-границу в EK — символом ∇_E. Из соотношения (4.1) непосредственно следуют формулы

$$\nabla_E(ax^r) = -a\nabla x^r,\quad \nabla_E(bx^r) = -b\nabla x^r,\quad \nabla_E x^r = \nabla x^r + ax^r + bx^r, \tag{4.5}$$

где x^r — цепь комплекса K. Пусть теперь z^r — произвольный r-мерный ∇-цикл комплекса K. В силу формулы (4.5) цепь az^r является ∇-циклом. Если ∇-циклы z_1^r и z_2^r гомологичны в K, т. е. $z_1^r - z_2^r = \nabla x^{r-1}$, где x^{r-1} есть $(r-1)$-мерная цепь комплекса K, то

$$az_1^r - az_2^r = -\nabla_E(ax^{r-1})$$

[см. (4.5)], т. е. циклы az_1^r и az_2^r также гомологичны. Таким образом, соответствие $z^r \to az^r$ порождает гомоморфизм a группы $\nabla^r(K, G)$ в $\nabla^{r+1}(EK, G)$. Произвольный $(r+1)$-мерный ∇-цикл z^{r+1} комплекса EK имеет вид $ax_1^r + bx_2^r + x^{r+1}$. Взяв ∇-границу в EK, получим

$$-a\nabla x_1^r - b\nabla x_2^r + \nabla x^{r+1} + ax^{r+1} + bx^{r+1} = 0,$$

откуда

$$x^{r+1} = \nabla x_1^r = \nabla x_2^r.$$

Таким образом, цикл z^{r+1} гомологичен циклу

$$z^{r+1} - \nabla_E x_2^r = (ax_1^r + bx_2^r + x^{r+1}) - (\nabla x_2^r + ax_2^r + bx_2^r) = a(x_1^r - x_2^r),$$

и отображение a переводит $\nabla^r(K, G)$ на всю группу $\nabla^{r+1}(EK, G)$. Если цикл az^r гомологичен нулю в EK, т. е.

$$\begin{aligned} az^r &= \nabla_E(ax_1^{r-1} + bx_2^{r-1} + x^r) = \\ &= -a\nabla x_1^{r-1} - b\nabla x_2^{r-1} + \nabla x^r + ax^r + bx^r, \end{aligned}$$

то $z^r = -\nabla x_1^{r-1} + x^r$ и $-\nabla x_2^{r-1} + x^r = 0$, откуда

$$z^r = \nabla(x_2^{r-1} - x_1^{r-1}),$$

т. е. цикл z^r гомологичен нулю в K, и отображение a изоморфно.

Из доказанных предложений (б), (в), (г), (е) непосредственно вытекает следующее важное для нас предложение.

(з). *Пусть K — произвольный симплициальный комплекс, а Σ — комплекс, тело которого гомеоморфно n-мерной сфере. Тогда при $r > 0$ группы $\Delta^r(K, G)$ и $\Delta^{r+n+1}(\Sigma K, G)$ изоморфны.*

Действительно, при $n = 0$ это предложение совпадает с (е). Предположив, что доказываемое предложение установлено для $n < m$ и что Σ — комплекс, тело которого гомеоморфно $(m-1)$-мерной сфере, мы получим

$$\Delta^r(K, G) \approx \Delta^{r+m}(\Sigma K, G) \approx \Delta^{r+m+1}(E(\Sigma K), G) \approx \Delta^{r+m+1}((E\Sigma)K, G).$$

Но полиэдр $E\Sigma$, в силу (г), гомеоморфен m-мерной сфере. Поэтому из (б) и теоремы об инвариантности групп гомологий (п. 3:2) вытекает справедливость доказываемого предложения при $n = m$.

(и). *Пусть K и K^* — комплексы размерностей соответственно $r > 0$ и $s > 0$. Если комплекс KK^* является псевдомногообразием (размерности $r + s + 1$), то каждый из комплексов K и K^* также является псевдомногообразием.*

Обратно, *если K и K^* суть псевдомногообразия, то и комплекс KK^* является псевдомногообразием.*

В самом деле, предположим, что KK^* является псевдомногообразием, и пусть $T_1, \ldots, T_k$ — такая цепочка $(r+s+1)$-мерных симплексов комплекса KK^*, каждые два соседних симплекса в которой имеют общую $(r+s)$-мерную грань. Симплекс T_i, $i = 1, \ldots, k$, имеет вид $T_i^r T_i^s$, где $T_i^r \in K$, $T_i^s \in K^*$. Покажем, что каждые два соседние симплекса последовательности $T_1^r, T_2^r, \ldots, T_k^r$ либо совпадают, либо имеют общую $(r-1)$-мерную грань. Действительно, так как все, кроме одной, вершины симплекса T_i принадлежат симплексу T_{i+1}, то либо $T_i^r = T_{i+1}^r$, либо $T_i^s = T_{i+1}^s$. Если имеет место второй случай, то общая грань симплексов T_i и T_{i+1} имеет вид $T^{r-1}T_i^s$, где T^{r-1} есть $(r-1)$-мерный симплекс комплекса K^*, являющийся, очевидно, гранью обоих симплексов T_i^r и T_{i+1}^r.

Если теперь T^r и T'^r — r-мерные симплексы комплекса K, а T^s — s-мерный симплекс комплекса K^*, то, построив в KK^* цепочку симплексов, соединяющую T^rT^s и T'^rT^s, и взяв r-мерные грани этих симплексов, принадлежащие комплексу K, мы получим в K цепочку симплексов, соединяющую T^r и T'^r. Таким образом, комплекс K удовлетворяет условию (б) п. 4:1. Условия (а) и (в) очевидным образом переносятся с комплекса KK^* на K и K^*.

Обратное предложение доказывается аналогично.

4:3. Звезды в симплициальном комплексе. Пусть K — симплициальный комплекс, T — симплекс этого комплекса. Совокупность всех симплексов из K, имеющих T своей гранью, и всех граней этих симплексов является подкомплексом комплекса K, называемым *звездой* симплекса T. Звезду симплекса T мы будем обозначать через $\mathfrak{Z}(T)$. Подкомплекс $P(T)$ комплекса K, состоящий из всех входящих в $\mathfrak{Z}(T)$ симплексов, не имеющих с T общих вершин, называется *представителем* звезды $\mathfrak{Z}(T)$. Подкомплекс комплекса K, состоящий из всех входящих в $\mathfrak{Z}(T)$ симплексов, имеющих с T не более r общих вершин, где r — размерность симплекса T, называется *краем* звезды $\mathfrak{Z}(T)$; мы обозначим его через $B(T)$.

(а). *Пусть a — внутренняя точка симплекса $T \in K$. Тогда тело звезды $\mathfrak{Z}(T)$ содержит некоторую окрестность точки a в $\widetilde{K}$.*

В самом деле, пусть K_1 — подкомплекс комплекса K, состоящий из всех симплексов, не пересекающихся с T. Множество K_1 замкнуто, и потому $\widetilde{K} \setminus \widetilde{K}_1 \subset \mathfrak{Z}(T)$ есть искомая окрестность точки a.

(б). *Пусть K — комплекс, тело которого является n-мерным многообразием, а T^{n-r} — его $(n-r)$-мерный симплекс. Тогда представитель $P(T^{n-r})$ звезды $\mathfrak{Z}(T^{n-r})$ этого симплекса является ориентируемым $(r-1)$-мерным псевдомногообразием, у которого группы Δ-гомологий размерностей* $1, 2, \ldots, r-2$ *тривиальны.*

Для доказательства рассмотрим край $B(T^{n-r})$ звезды $\mathfrak{Z}(T^{n-r})$. Он состоит из всех симплексов вида T_1T_2, где $T_1 \in P(T^{n-r})$, а T_2 — собственная грань симплекса T^{n-r}, и всех граней этих симплексов. Иначе говоря, комплекс $B(T^{n-r})$ является комбинаторным объединением комплексов $P(T^{n-r})$ и Σ, где Σ состоит из всех собственных граней симплекса T^{n-r}. Поэтому, если мы докажем, это $B(T^{n-r})$ является $(n-1)$-мерным псевдомногообразием, то из предложения (з) п. 4:2 будет следовать, что и $P(T^{n-r})$ является $(r-1)$-мерным псевдомногообразием.

Так как в силу предложения (ж) п. 4:2 группы $\Delta^{r-1}(P(T^{n-r}), J_0)$ и $\Delta^{n-1}(B(T^{n-r}), J_0)$ изоморфны, то для доказательства ориентируемости псевдомногообразия $P(T^{n-r})$ достаточно установить, что $B(T^{n-r})$ есть ориентируемое псевдомногообразие. Наконец, так как при $s = 1, 2, \ldots, r-2$ группы $\Delta^s(P(T^{n-r}), G)$ и $\Delta^{s+(n-r)}(B(T^{n-r}), G)$ изоморфны, то нам нужно, кроме того, установить, что при $q = n - r + 1, \ldots \ldots, n-2$ группы $\Delta^q(B(T^{n-r}), G)$ тривиальны. Таким образом, доказываемое предложение следует из приводимых ниже предложений (в) и (г).

(в). *Пусть K — комплекс, тело которого является n-мерным многообразием, а T — его симплекс. Тогда край $B(T)$ звезды $\mathfrak{Z}(T)$ является $(n-1)$-мерным псевдомногообразием.*

Пусть сначала $T = a$ — нульмерный симплекс комплекса K. Если симплекс $T^{n-2} \in B(T)$ является гранью симплекса $T^{n-1} \in B(T)$, то aT^{n-2} является гранью симплекса aT^{n-1} и обратно. Поэтому из справедливости условия (а) п. 4:1 для K следует справедливость его для $(n-1)$-мерного комплекса $B(T)$. Условие (в) п. 4:1 очевидно.

Для доказательства условия (б) п. 4:1 выберем произвольный $(n-1)$-мерный симплекс T^{n-1} комплекса $B(T)$ и обозначим через M объединение всех $(n-1)$-мерных симплексов комплекса $B(T)$, соединимых с T^{n-1} цепочками такого вида, в которых каждые два соседних симплекса имеют общую $(n-2)$-мерную грань. Через N обозначим объединение всех остальных $(n-1)$-мерных симплексов комплекса $B(T)$. Мы должны показать, что множество N пусто. Допустим противное. Тогда пересечение $M \cap N$ является $(n-3)$-мерным полиэдром и, следовательно, пересечение $(aM) \cap (aN)$ является $(n-2)$-мерным полиэдром. Так как $\tilde{K}$ — многообразие, то, в силу (а), существует содержащаяся в $\mathfrak{Z}(T)$ окрестность точки a, гомеоморфная n-мерному открытому шару. Дальнейшие рассуждения проводятся совершенно аналогично доказательству предложения (б) п. 2:1.

Если симплекс T имеет размерность >0, то обозначим через a произвольную его внутреннюю точку и построим пирамиду $aB(T)$ над краем $B(T)$ звезды $\mathfrak{Z}(T)$. Эта пирамида является подразделением комплекса $\mathfrak{Z}(T)$. Добавив к комплексу $aB(T)$ все не входящие в $\mathfrak{Z}(T)$ симплексы комплекса K, получим подразделение комплекса K. Звездой вершины a в этом подразделении является $aB(T)$, а край этой звезды совпадает с краем $B(T)$ звезды $\mathfrak{Z}(T)$. Поэтому, в силу разобранного выше случая, комплекс $B(T)$ является псевдомногообразием.

(г). *Пусть K — комплекс, тело которого является n-мерным многообразием, а T — его симплекс. Тогда край $B(T)$ звезды $\mathfrak{Z}(T)$ имеет такие же группы гомологий, как и $(n-1)$-мерная сфера.*

Как и при доказательстве предложения (в), достаточно рассмотреть случай, когда $T = a$ является вершиной комплекса K. Пусть E — содержащееся в $\mathfrak{Z}(a)$ множество, гомеоморфное n-мерному замкнутому шару и содержащее a своей внутренней точкой, а Σ — граница этого множества; она гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере. Всякое множество $M \subset E$, не содержащее точки a, может быть „спроектировано“ на сферу Σ, причем так, что точки, уже лежавшие в Σ, перейдут в себя. Это проектирование (вообще говоря, криволинейное, ибо множество E не есть шар, а только гомеоморфно ему) мы обозначим через ρ_1, а деформацию, переводящую тождественное отображение ρ_0 множества M в отображение ρ_1, — через ρ_t. Далее, так как $\mathfrak{Z}(a)$ есть пирамида над $B(a)$, то прямолинейным проектированием из точки a можно всякое множество N, лежащее в $\mathfrak{Z}(a)$ и не содержащее точки a, перевести в $B(a)$, причем точки, уже лежавшие в $B(a)$, перейдут в себя. Это проектирование мы обозначим через π_1, а деформацию, переводящую тождественное отображение π_0 множества N в отображение π_1, — через π_t. Пусть ε — настолько малое положительное число, что подобное преобразование χ_1 с центром a и коэффициентом ε переводит всю звезду $\mathfrak{Z}(a)$ внутрь шара E. Наконец, обозначим через χ_t подобное преобразование звезды $\mathfrak{Z}(a)$ с центром a и коэффициентом $1-t(1-\varepsilon)$. Мы рассмотрим отображение π_1 сферы Σ в $B(a)$ и отображение $\rho_1\chi_1$ края $B(a)$ в сферу Σ.

Покажем прежде всего, что псевдомногообразие $B(a)$ ориентируемо. Для этого рассмотрим деформацию φ_t тождественного отображения φ_0 сферы Σ в шар E, которая переводит φ_0 в такое отображение φ_1, что $\varphi_1(\Sigma) \subset \chi_1(\mathfrak{Z}(a))$. Далее, применив к множеству $\varphi_1(\Sigma)$ деформацию $\chi_1\pi_t$, мы получим отображение $\chi_1\pi_1\varphi_1$ сферы Σ в $\chi_1(B(a))$. Наконец, применив к $\chi_1(B(a))$ деформацию ρ_t, мы получим отображение $\rho_1\chi_1\pi_1\varphi_1$ сферы Σ в себя. Так как результирующая деформация сферы Σ в шаре E не затрагивает точки a, то при помощи проектирования ρ_1 след этой деформации можно сдвинуть в Σ, откуда мы заключаем, что отображение $\rho_1\chi_1\pi_1\varphi_1$ сферы Σ в себя гомотопно тождественному. Пусть Z — образующий элемент группы $\Delta^{n-1}(\Sigma, J_0)$. Тогда $\rho_1\chi_1\pi_1\varphi_1 Z = Z$. Если бы псевдомногообразие $B(a)$ было неориентируемым, то мы бы имели $\pi_1\varphi_1 Z = 0$ и $\rho_1\chi_1\pi_1\varphi_1 Z = 0$, что противоречит только что доказанному равенству.

Далее, отображение $\pi_1(\rho_1\chi_1)$ полиэдра $B(a)$ в себя гомотопно тождественному. Действительно, это отображение может быть получено при помощи деформации χ_t тождественного отображения χ_0 с последующим применением деформации ρ_t множества $\chi_1(B(a))$ в Σ и деформации π_t множества Σ обратно в $B(a)$. След результирующей деформации при помощи π_1 может быть сдвинут в $B(a)$, откуда следует, что отображение $\pi_1(\rho_1\chi_1)$ гомотопно тождественному. Из этого, наконец, следует, что каждое из отображений π_1 и $\rho_1\chi_1$ имеет одну и ту же степень, равную ± 1, так что отображение $(\rho_1\chi_1)\pi_1$ сферы Σ в себя имеет степень $+1$ и потому (см. ниже, п. 7 : 6) гомотопно тождественному. Так как оба отображения $\pi_1(\rho_1\chi_1)$ и $(\rho_1\chi_1)\pi_1$ гомотопны тождественным, то из п. 3:2 (см. сноску на стр. 40) следует, что группы гомологий полиэдров Σ и $B(a)$ совпадают.

Заметим, что фактически мы доказали не только совпадение групп гомологий полиэдров Σ и $B(a)$, но и гомотопическую эквивалентность этих полиэдров (см. сноску на стр. 40).

4:4. Барицентрические звезды. Пусть K' — барицентрическое подразделение симплициального комплекса K. Каждая вершина a комплекса K' является внутренней точкой (центром тяжести) некоторого симплекса комплекса K. Этот симплекс T, однозначно определяемый точкой a, мы назовем *носителем* вершины a. Размерность симплекса T назовем *порядком* вершины a. Нетрудно видеть, что никакой симплекс комплекса K' не может содержать двух вершин одного и того же порядка. Действительно, предположим это предложение доказанным для $(n-1)$-мерных комплексов (для нульмерных комплексов оно очевидно), и пусть K — некоторый n-мерный комплекс. Тогда каждый симплекс комплекса K' либо лежит в $\widetilde{K}^{n-1}$ — и тогда по предположению индукции он не содержит двух вершин одного и того же порядка,— либо является пирамидой над некоторым симплексом, лежащим в $\widetilde{K}^{n-1}$, причем вершина пирамиды является внутренней точкой n-мерного симплекса, т. е. имеет порядок n; таким образом, и в этом случае рассматриваемый симплекс комплекса K' не содержит двух вершин одного порядка.

Пусть $T^r=[a_0, \ldots, a_r]$ — произвольный симплекс комплекса K', причем вершины $a_0, \ldots, a_r$ расположены по возрастанию их порядков, а $T_0, \ldots, T_r$ — носители этих вершин в комплексе K. Покажем, что при $i<j$ симплекс T_i является гранью симплекса T_j.

Действительно, пусть s — порядок вершины a_r. Тогда вершина a_r является центром тяжести s-мерного симплекса T_r, а сам симплекс T^r лежит в $\widetilde{K}^s$, т. е. является пирамидой с вершиной a_r над симплексом $T^{r-1}=[a_0, \ldots, a_{r-1}]$, лежащим в $\widetilde{K}^{s-1}$, а значит, лежащим в границе $\dot{T}_r$ симплекса T_r. Поэтому носители всех вершин $a_0, \ldots, a^{r-1}$ являются гранями симплекса T_r. Рассматривая симплекс T^{r-1}, мы аналогично убедимся, что носители всех вершин $a_0, \ldots, a_{r-2}$ являются гранями симплекса T_{r-1}, и т. п.

Обратно, если $T_0, \ldots, T_r$ — такая последовательность симплексов комплекса K, что каждый из них является гранью всех последующих, а $a_0, \ldots, a_r$ — центры тяжести этих симплексов, то в комплексе K' имеется симплекс $[a_0, \ldots, a_r]$.

Действительно, предположим это предложение доказанным для $(r-1)$-мерных симплексов. Тогда симплекс $T^{r-1}=[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ принадлежит комплексу K', и симплекс $[a_0, \ldots, a_r]$, являющийся пирамидой над ним с вершиной в a_r, также принадлежит K', ибо T^{r-1} лежит в $T_{r-1} \subset \dot{T}_r$. В соответствии со сказанным, мы можем каждый

r-мерный симплекс комплекса K' записывать в виде $[T_0, \ldots, T_r]$, где T_i является гранью симплекса T_j при $i<j$, причем любая такая последовательность симплексов комплекса K определяет некоторый симплекс комплекса K'. Для того чтобы симплекс $T^s = [T'_0, \ldots, T'_s]$ комплекса K' являлся гранью симплекса $T^r = [T_0, \ldots, T_r]$, необходимо и достаточно, чтобы все вершины симплекса T^s принадлежали симплексу T^r, т. е. чтобы все симплексы последовательности $T'_0, \ldots, T'_s$ содержались в последовательности $T_0, \ldots, T_r$.

Если $T^r = [T_0, \ldots, T_r]$ — произвольный симплекс комплекса K', то первый симплекс T_0 последовательности $T_0, \ldots, T_r$ и симплекс T^r называются *сопряженными* друг другу. Если T — произвольный симплекс комплекса K', то совокупность всех симплексов комплекса K', сопряженных симплексу T, и всех граней этих симплексов является подкомплексом комплекса K', называемым *барицентрической звездой* симплекса T. Обозначим барицентрическую звезду симплекса T через $Б(T)$. Подкомплекс комплекса $Б(T)$, состоящий из всех симплексов, не пересекающихся с T, т. е. не имеющих центр тяжести симплекса T своей вершиной, называется *представителем* барицентрической звезды $Б(T)$ и обозначается через $\Pi(T)$. Нетрудно видеть, что комплекс $\Pi(T)$ состоит из всех таких симплексов $[T_0, \ldots, T_r]$ комплекса K', для которых симплекс T_0 имеет T своей собственной гранью. Если a — центр тяжести симплекса $T \in K$, то комплекс $Б(T)$ является пирамидой над комплексом $\Pi(T)$ с вершиной a. Мы будем называть точку *a центром* звезды $Б(T)$.

(а). *Пусть K — симплициальный комплекс, T — его симплекс, $З(T)$ — звезда симплекса T, а $P(T)$ — ее представитель. Тогда барицентрическое подразделение P' комплекса $P(T)$ изоморфно представителю $\Pi(T)$ барицентрической звезды $Б(T)$ симплекса T.*

Действительно, пусть T_0 — симплекс комплекса K, имеющий T своей собственной гранью. Обозначим через T'_0 такую грань симплекса T_0, что $T_0 = TT'_0$, а через a_0 и a'_0 — центры тяжести симплексов T_0 и T'_0. Положим $a'_0 = \varphi(a_0)$; определенное таким образом отображение φ переводит каждую вершину комплекса $\Pi(T)$ в некоторую вершину комплекса P'. Нетрудно видеть, что это отображение вершин можно продолжить в симплициальное отображение комплекса $\Pi(T)$ в P'.

В самом деле, если $[T_0, \ldots, T_r]$ — симплекс комплекса $\Pi(T)$, то каждый из симплексов $T_0, \ldots, T_r$ имеет T своей собственной гранью. Обозначим через T'_i такую грань симплекса T_i, что $T_i = TT'_i$, $i = 0, \ldots, r$, а через a_i и a'_i — центры тяжести симплексов T_i и T'_i. Тогда в последовательности $T'_0, \ldots, T'_r$ каждый симплекс является гранью всех предыдущих, так что в P' существует симплекс $[T'_0 \ldots, T'_r]$. Так как, кроме того, $a'_i = \varphi(a_i)$, то отображение φ

вершин $a_0, \ldots, a_r$ соответственно в $a'_0, \ldots, a'_r$ можно продолжить в аффинное отображение симплекса $[T_0, \ldots, T_r] = [a_0, \ldots, a_r]$ в симплекс $[T'_0 \ldots, T'_r] = [a'_0, \ldots, a'_r]$.

Наконец, покажем, что построенное таким образом симплициальное отображение φ комплекса $\Pi(T)$ в P' является изоморфизмом. Действительно, если $[T'_0, \ldots, T'_r]$ — симплекс комплекса P', то в последовательности $TT'_0, \ldots, TT'_r$ каждый симплекс является гранью всех последующих симплексов, и потому в комплексе $\Pi(T)$ имеется симплекс $[TT'_0, \ldots, TT'_r]$, который отображением φ переводится, очевидно, в симплекс $[T_0, \ldots, T_r]$. Таким образом, φ есть отображение комплекса $\Pi(T)$ на весь комплекс P'. Так как, кроме того, в каждую вершину комплекса P' переходит, очевидно, только одна вершина комплекса $\Pi(T)$, то φ есть изоморфизм.

(б). Из доказанного предложения (а) и из предложения (б) п. 4 : 3 непосредственно вытекает следующее предложение.

Если тело комплекса K является n-мерным многообразием, а T^{n-r} — произвольный симплекс этого комплекса, то представитель $\Pi(T^{n-r})$ барицентрической звезды $Б(T^{n-r})$ симплекса T^{r-n} является $(r-1)$-мерным ориентируемым псевдомногообразием, у которого группы Δ-гомологий размерностей $1, 2, \ldots, r-2$ тривиальны.

(Легко показывается, что если комплекс K удовлетворяет условиям (а), (б), (в) п. 4 : 1, то и его барицентрическое подразделение удовлетворяет этим условиям; см. также сноску на стр. 44).

(в). *Пусть K — произвольный симплициальный комплекс, T — его r-мерный симплекс. Тогда представитель $\Pi(T)$ барицентрической звезды $Б(T)$ симплекса T является объединением барицентрических звезд всех тех $(r+1)$-мерных симплексов комплекса K, которые имеют T своей гранью.*

Действительно, если $T^s = [T_0, \ldots, T_s] \in \Pi(T)$, то симплекс T_0 имеет T своей собственной гранью. Пусть T' — такая $(r+1)$-мерная грань симплекса T_0, которая имеет T своей гранью. Тогда, очевидно, симплекс T^s принадлежит звезде $Б(T')$. Обратно, всякий симплекс $[T_0, \ldots, T_q] \in Б(T_0)$, где T_0 есть $(r+1)$-мерный симплекс, имеющий T своей гранью, принадлежит, очевидно, комплексу $\Pi(T)$.

4:5. Звездные гомологии. Мы будем предполагать в этом пункте, что тело комплекса K является n-мерным многообразием. Барицентрические звезды, сопряженные $(n-r)$-мерным симплексам комплекса K, мы будем для краткости называть *r-мерными* барицентрическими звездами. Подкомплекс комплекса K', являющийся объединением всех r-мерных барицентрических звезд, назовем *r-мерным звездным остовом*. Пусть T^{n-r} есть $(n-r)$-мерный симплекс комплекса K, $Б(T^{n-r})$ — сопряженная ему r-мерная барицентрическая звезда, a — ее центр, а $\Pi(T^{n-r})$ — ее представитель. Пусть, далее, z^{r-1} — произвольный $(r-1)$-мерный Δ-цикл псевдомногообразия $\Pi(T^{n-r})$ по области коэффициентов G, удовлетворяющий, если $r=1$, условию $J(z^{r-1})=0$. Тогда пирамида az^{r-1} над цепью z^{r-1} является r-мерной цепью комплекса $Б(T^{n-r})$; мы будем ее называть *основной цепью* звезды $Б(T^{n-r})$. Всякую цепь комплекса K', являющуюся суммой основных цепей r-мерных барицентрических звезд, мы будем называть *r-мерной звездной цепью* комплекса K'.

(a). *r-Мерная цепь комплекса K' тогда и только тогда является звездной, когда она лежит в r-мерном звездном остове, а ее граница — в $(r-1)$-мерном звездном остове; в частности, граница всякой звездной цепи есть звездная цепь.*

Действительно, пусть $Б(T^{n-r})$ есть r-мерная барицентрическая звезда, а $x^r = az^{r-1}$ — ее основная цепь, где z^{r-1} является $(r-1)$-мерным циклом комплекса $\Pi(T^{n-r})$. Согласно формуле (4.3), при $r>1$ имеем $\Delta x^r = z^{r-1}$, т. е. граница цепи x^r лежит в $\Pi(T^{n-r})$ и, в силу предложения (в) п. 4 : 4, — в $(r-1)$-мерном звездном остове. При $r=1$ то же следует из формулы (4.4). Поэтому граница любой r-мерной звездной цепи лежит в $(r-1)$-мерном звездном остове. Обратно, если x^r есть r-мерная цепь комплекса K', лежащая в r-мерном звездном остове, граница которой лежит в $(r-1)$-мерном звездном остове, а $Б_1, \ldots, Б_p$ — все r-мерные барицентрические звезды комплекса K, то цепь x^r можно представить в виде $x^r = x_1^r + \ldots + x_p^r$, где x_i^r — цепь комплекса $Б_i$. Это представление однозначно, ибо никакие две r-мерные барицентрические звезды не имеют общих r-мерных симплексов.

Далее, граница цепи x_i^r, расположенной в звезде $Б_i$, лежит в представителе Π_i этой звезды. Действительно, комплекс $Б_1 \cup \ldots \cup Б_{i-1} \cup Б_{i+1} \cup \ldots \ldots \cup Б_p$ пересекается с $Б_i$ только по представителю Π_i, и потому граница цепи $x_i^r = x^r - x_1^r - \ldots - x_{i-1}^r - x_{i+1}^r - \ldots - x_p^r$ лежит в $(r-1)$-мерном звездном остове и, следовательно, в представителе Π_i. Цепь x_i^r имеет вид $x_i^r = az_i^{r-1}$, где z_i^{r-1} есть $(r-1)$-мерная цепь комплекса Π_i. Беря Δ-границу, имеем при $r>1$

$$\Delta x_i^r = z_i^{r-1} - a\Delta z_i^{r-1},$$

а при $r=1$:

$$\Delta x_i^1 = z_i^0 - a \cdot J(z_i^0).$$

Так как Δx_i^r лежит в Π_i, то $\Delta z_i^{r-1}=0$, причем при $r=1$ имеем, кроме того, $J(z_i^0)=0$. Таким образом, x_i^r является основной цепью звезды $Б_i$, а x^r — r-мерной звездной цепью.

(б). *Пусть x^r — такая r-мерная цепь комплекса K', граница Δx^r которой является $(r-1)$-мерной звездной цепью. Тогда в K' суще-*

ствует такая r-мерная звездная цепь y^r, что $\Delta x^r = \Delta y^r$ и разность $x^r - y^r$ является гомологичным нулю Δ-циклом.

Для доказательства предположим дополнительно, что цепь x^r лежит в s-мерном звездном остове комплекса K' (всякая цепь комплекса K' лежит в его n-мерном звездном остове) и проведем индукцию по $s - r$. При $s - r = 0$ цепь x^r лежит в r-мерном звездном остове, а ее граница лежит в $(r-1)$-мерном звездном остове, так что в силу предложения (а) цепь x^r является звездной, и доказываемое предложение справедливо. Предположим, что утверждение (б) доказано для $s - r < k$, $k > 0$ и x^r — такая r-мерная цепь комплекса K', лежащая в $(r + k)$-мерном звезном остове, что ее граница является $(r - 1)$-мерной звездной цепью. Пусть $Б_1, \dots, Б_p$ — все $(r + k)$-мерные барицентрические звезды комплекса K, $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ — их представители, а $a_1, a_2, \dots, a_p$ — их центры. Тогда цепь x^r можно представить в виде $x^r = x_0^r + a_1 z_1^{r-1} + \dots + a_p z_p^{r-1}$, где z_i^{r-1} есть $(r-1)$-мерная цепь комплекса Π_i. Цепь $\Delta(a_i z_i^{r-1}) = \Delta x_0^r - \Delta(a_1 z_1^{r-1}) - \dots - \Delta(a_p z_p^{r-1})$ лежит в Π_i [см. доказательство предложения (а)], откуда следует, что $\Delta z_i^{r-1} = 0$, а при $r = 1$, кроме того, $J(z_i^0) = 0$. Так как размерность $r - 1$ цикла z_i^{r-1} меньше, чем $r + k - 1$, то, в силу предложения (б) п. 4:4, этот цикл при $r > 1$ гомологичен нулю в Π_i; при $r = 1$ это также верно, ибо $J(z_i^0) = 0$, а комплекс Π_i связен. Пусть y_i^r — такая цепь комплекса Π_i, что $\Delta y_i^r = z_i^{r-1}$. Тогда имеем $\Delta(a_i y_i^r) = y_i^r - a z_i^{r-1}$. Положим

$$y_*^r = x^r + \Delta(a_1 y_1^r + \dots + a_p y_p^r) = x_0^r + y_1^r + \dots + y_p^r.$$

Очевидно, что $\Delta y_*^r = \Delta x^r$ и $y_*^r - x^r \underset{\Delta}{\sim} 0$. Так как цепь y_*^r лежит в $(r+k-1)$-мерном звездном остове, то, по предположению индукции, существует такая звездная цепь y^r, что $\Delta y^r = \Delta y_*^r$ и $y^r - y_*^r \underset{\Delta}{\sim} 0$. Таким образом, $\Delta y^r = \Delta x^r$ и $y^r - x^r \underset{\Delta}{\sim} 0$, так что цепь y^r — искомая.

(в). Пусть x^r есть r-мерная цепь комплекса L. Замкнутое множество $|x^r|$, являющееся объединением всех тех r-мерных симплексов комплекса L, на которых цепь x^r принимает отличные от нуля значения, называется *телом* цепи x^r. В частности, телом нулевой цепи является пустое множество. Далее, если $A \subset \tilde{L}$, то замкнутое множество, являющееся объединением тел барицентрических звезд (может быть — разных размерностей) и содержащее A, назовем *звездным носителем* множества A. Наименьший из звездных носителей множества A является пересечением всех его звездных носителей. Нетрудно видеть, что доказанное предложение (б) можно несколько уточнить. Именно, можно утверждать, что *искомую звездную цепь y^r, так же как и цепь, осуществляющую гомологию $x^r - y^r \underset{\Delta}{\sim} 0$, можно найти уже в наименьшем звездном носителе множества $|x^r|$.*

В самом деле, цепь y_*^r, построенная в (б) при проведении индукции по $s - r$, и цепь, осуществляющая гомологию $x^r \underset{\Delta}{\sim} y_*^r$, очевидно, содержатся в звездном (наименьшем) носителе множества $|x^r|$. Поэтому, по индукции, мы заключаем, что искомую цепь y^r можно выбрать в этом же звездном носителе.

(г). *Пусть x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса K', M — ее наименьший звездный носитель, а N — наименьший звездный носитель цепи Δx^r. Существует такая r-мерная звездная цепь y^r комплекса K', лежащая в M, граница которой расположена в N, что выполнено соотношение $\Delta v^{r+1} = y^r - x^r - u^r$. Здесь v^{r+1} и u^r — цепи, лежащие соответственно в M и N.*

Действительно, граница цепи Δx^r равна нулю, т. е. является звездной цепью. Поэтому, согласно (б) и (в), можно найти в N такой звездный цикл z^{r-1} и такую r-мерную цепь u^r, что $z^{r-1} - \Delta x^r = \Delta u^r$. Далее, так как граница цепи $x^r + u^r$, равная, очевидно, z^{r-1}, является звездной цепью, то в звездном носителе M этой цепи (заметим, что $N \subset M$) можно найти такую звездную цепь y^r и такую $(r+1)$-мерную цепь v^{r+1}, что $\Delta v^{r+1} = y^r - (x^r + u^r)$. Взяв Δ-границу, получим

$$\Delta y^r = \Delta x^r + z^{r-1} - \Delta x^r = z^{r-1},$$

т. е. Δy^r лежит в N.

(д). Звездную цепь комплекса K', являющуюся Δ-циклом, называют *звездным* циклом. Звездные циклы z_1^r и z_2^r называются *звездно гомологичными* между собой, если существует такая звездная цепь x^{r+1}, что $\Delta x^{r+1} = z_1^r - z_2^r$. Факторгруппа группы всех r-мерных звездных циклов по ее подгруппе, состоящей из всех звездных циклов, звездно гомологичных нулю, называется *группой звездных гомологий* комплекса K' (по рассматриваемой области коэффициентов).

(е). *Группа звездных гомологий комплекса K' изоморфна его обычной группе Δ-гомологий.*

Действительно, согласно (б), всякий цикл комплекса K' гомологичен звездному циклу, т. е. в каждом классе гомологий $Z^r \in \Delta^r(K', G)$ содержатся звездные циклы. Далее, звездные циклы звездно гомологичны между собой тогда и только тогда, когда они гомологичны между собой в обычном смысле в комплексе K' [см. (б)]. Таким образом, соответствие между классами звездных гомологий комплекса K' и элементами группы $\Delta^r(K', G)$ взаимно однозначно.

4:6. Закон двойственности Пуанкаре — Колмогорова. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, K' — его барицентрическое подразделение, а x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов G. Если T^r есть r-мерный симплекс комплекса K и b — его центр, то мы возьмем точку b с коэффициентом, равным $x^r(T^r)$, и так полученную нульмерную цепь обозначим через $\eta^0_{x^r}(T^r)$. При перемене ориентации симплекса T^r цепь $\eta^0_{x^r}(T^r)$ меняет знак. Предположив, что цепи $\eta^k_{x^r}(T^{r+k})$ уже построены для $k < m$, обозначим через $\eta^m_{x^r}(T^{r+m})$ пирамиду с вершиной в центре симплекса T^{r+m}

над цепью $\sum [T^{r+m} : T^{r+m-1}]\, \eta^{m-1}_{x^r}(T^{r+m-1})$, где суммирование распространено на все как-либо ориентированные грани симплекса T^{r+m}. Нетрудно видеть, что

$$\eta^k_{x^r}(-T^{r+k}) = -\eta^k_{x^r}(T^{r+k}). \tag{4.6}$$

Систему цепей $\{\eta^k_{x^r}(T^{r+k})\}$ мы будем называть *барицентрически двойственной системой* для цепи x^r. Границы цепей барицентрически двойственной системы даются формулой

$$\Delta\eta^k_{x^r}(T^{r+k}) = \sum [T^{r+k} : T^{r+k-1}]\, \eta^{k-1}_{x^r}(T^{r+k-1}) + (-1)^k \cdot \eta^{k-1}_{\nabla x^r}(T^{r+k}), \tag{4.7}$$

где суммирование распространено на все как-либо ориентированные $(r+k-1)$-мерные грани симплекса T^{r+k}, а $\eta^{k-1}_{\nabla x^r}(T^{r+k})$ — цепь из барицентрически двойственной системы для ∇x^r. Доказательство формулы (4.7) при $k=1$ следует из (4.4) и определения ∇-границы; в общем случае эта формула устанавливается индукцией по k [следует также учесть соотношения (4.3) и (2.1)].

Пусть теперь K — такой симплициальный комплекс, тело которого является n-мерным ориентируемым многообразием. Предположим, далее, что многообразие $\tilde{K}$ ориентировано, т. е. выбрана когерентная ориентация всех n-мерных симплексов комплекса K. Если x^r — произвольная r-мерная цепь комплекса K, то $(n-r)$-мерную цепь

$$d(x^r) = \sum \eta^{n-r}_{x^r}(T^n),$$

где суммирование распространено на все указанным образом ориентированные n-мерные симплексы комплекса K, мы назовем *двойственной* к x^r. Используя (4.7), мы без труда получаем

$$\Delta d(x^r) = (-1)^{n-r}\, d(\nabla x^r). \tag{4.8}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta d(x^r) &= \Delta \sum \eta^{n-r}_{x^r}(T^n) = \\ &= \sum\sum [T^n : T^{n-1}]\, \eta^{n-r-1}_{x^r}(T^{n-1}) + (-1)^{n-r} \sum \eta^{n-r-1}_{\nabla x^r}(T^n) = \\ &= (-1)^{n-r} \sum \eta^{n-r-1}_{\nabla x^r}(T^n) = (-1)^{n-r} d(\nabla x^r);\end{aligned}$$

двойная сумма (суммирование по всем n-мерным и $(n-1)$-мерным симплексам комплекса K) пропадает, ибо к каждому $(n-1)$-мерному симплексу T^{n-1} примыкают ровно два n-мерных симплекса T^n_1 и T^n_2, причем

$$[T^n_1 : T^{n-1}] = -[T^n_2 : T^{n-1}].$$

(а). *Всякая цепь вида $d(x^r)$ является $(n-r)$-мерной звездной цепью и наоборот.*

Действительно, из способа построения цепей барицентрически двойственной системы и из определения цепи $d(x^r)$ ясно, что $d(x^r)$ лежит в $(n-r)$-мерном звездном остове. Граница же ее, согласно

(4 : 8), лежит в $(n-r-1)$-мерном звездном остове. Таким образом, цепь $d(x^r)$ является звездной (см. предложение (а) п. 4 : 5).

Для доказательства обратного утверждения достаточно установить, что произвольная основная цепь звезды $Б(T^r)$ имеет вид $d(gT^r)$, где g — некоторый элемент области коэффициентов G. Действительно, $(n-r)$-мерная цепь $d(gT^r)$ расположена в звезде $Б(T^r)$ и потому имеет вид ax^{n-r-1}, где a — центр симплекса T^r, а x^{n-r-1} — цепь комплекса Π (T^r). Взяв Δ-границу, имеем

$$\Delta d(gT^r) = x^{n-r-1} - a\Delta x^{n-r-1}, \quad r < n-1,$$
$$\Delta d(gT^{n-1}) = x^0 - a\cdot J(x^0).$$

Так как, согласно (4 : 8), цепь $\Delta d(gT^r)$ лежит в $(n-r-1)$-мерном звездном остове, т. е. в $\Pi(T^r)$, то x^{n-r-1} является Δ-циклом, имеющим при $r=n-1$ индекс нуль. Так как, далее, все коэффициенты цепи $d(gT^r)$, расположенной в $Б(T^r)$, равны $\pm g$, то и все коэффициенты цикла x^{n-r-1}, расположенного в псевдомногообразии $\Pi(T^r)$, равны $\pm g$. В силу произвольности элемента $g \in G$ отсюда следует, что x^{n-r-1} есть произвольный $(n-r-1)$-мерный цикл в $\Pi(T^r)$, а $d(gT^r)$ — произвольная основная цепь звезды $Б(T^r)$.

(б). Соответствие d между r-мерными цепями комплекса K и $(n-r)$-мерными звездными цепями, как нетрудно видеть, взаимно однозначно и, следовательно, изоморфно. Из (4.8) следует, что это отображение переводит ∇-циклы в звездные Δ-циклы, а ∇-циклы, гомологичные нулю, — в Δ-циклы, звездно гомологичные нулю (и обратно). Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

З а к о н д в о й с т в е н н о с т и П у а н к а р е — К о л м о г о р о в а. *Пусть K — симплициальный комплекс, тело которого является n-мерным ориентируемым многообразием. Отображение d, ставящее в соответствие каждой цепи комплекса K двойственную ей звездную цепь, порождает изоморфизм группы $\nabla^r(K, G)$ и группы $(n-r)$-мерных звездных гомологий комплекса K по области коэффициентов G. Таким образом, группы $\nabla^r(K, G)$ и $\Delta^{n-r}(K, G)$ изоморфны* (см. предложение (е) п. 4 : 5).

§ 5. Индекс пересечения

5 : 1. Скалярное произведение. Пусть G, H и C — абелевы группы, и для каждых двух элементов $g \in G$, $h \in H$ определен элемент $c \in C$, называемый *произведением* элементов g и h и обозначаемый через gh или hg. Предположим, кроме того, что это произведение обладает следующими свойствами линейности:

$$(g' + g'')\,h = g'h + g''h, \quad g\,(h' + h'') = gh' + gh''. \tag{5.1}$$

В этом случае мы скажем, что *для пары групп G и H определено произведение в группе C.*

Пусть x^r и y^r — r-мерные цепи комплекса K по областям коэффициентов G и H соответственно. Пусть $T_1, \ldots, T_p$ — все r-мерные симплексы комплекса K, произвольным образом ориентированные. Элемент группы C, определяемый формулой

$$\sum_{i=1}^{p} x^r(T_i) \cdot y^r(T_i),$$

называется *скалярным произведением* цепей x^r и y^r и обозначается через (x^r, y^r). Скалярное произведение не зависит от выбора ориентаций r-мерных симплексов комплекса K, ибо при перемене ориентации симплекса T_i оба элемента $x^r(T_i^r)$ и $y^r(T_i^r)$ одновременно меняют знак, а их произведение не меняется.

(а). *Пусть f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L, x^r есть r-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов G, а y^r есть r-мерная цепь комплекса L по области коэффициентов H. Тогда*

$$(x^r, f^* y^r) = (f_* x^r, y^r). \tag{5.2}$$

В самом деле, пусть $T_1, \ldots, T_p$ — все как-либо ориентированные r-мерные симплексы комплекса K, а $T'_1, \ldots, T'_q$ — все как-либо ориентированные симплексы комплекса L. Тогда, учитывая определение гомоморфизмов f_* и f^*, а также формулы (5.1), мы найдем, что и правая и левая части в (5.2) имеют значение

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} [fT_i : T'_j] \cdot x^r(T_i) \cdot y^r(T'_j).$$

(б). *Если x^r есть r-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов G, а y^{r+1} есть $(r+1)$-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов H, то имеем*

$$(x^r, \Delta y^{r+1}) = (\nabla x^r, y^{r+1}). \tag{5.3}$$

В самом деле, пусть $T_1^r, \ldots, T_p^r$ — все как-либо ориентированные r-мерные симплексы комплекса K, а $T_1^{r+1}, \ldots, T_q^{r+1}$ — все его как-либо ориентированные $(r+1)$-мерные симплексы. Тогда и правая и левая части равенства (5.3) имеют, как нетрудно сосчитать, значения

$$\sum_{i,j} [T_j^{r+1} : T_i^r]\, x^r(T_i^r)\, y^{r+1}(T_j^{r+1}).$$

(в). Отметим еще следующие свойства скалярного произведения, непосредственно вытекающие из свойств произведения элементов групп G и H:

$$(x^r,\ y^r) = (y^r,\ x^r),$$
$$(x_1^r + x_2^r, y^r) = (x_1^r,\ y^r) + (x_2^r,\ y^r),$$
$$(x^r,\ y_1^r + y_2^r) = (x^r,\ y_1^r) + (x^r, y_2^r).$$

5:2. Индекс пересечения. Пусть K — симплициальный комплекс, тело которого является n-мерным ориентированным многообразием, y^r — его r-мерная цепь по области коэффициентов G, а ξ^{n-r} — $(n-r)$-мерная звездная цепь комплекса K' по области коэффициентов H. Скалярное произведение $(d^{-1}(\xi^{n-r}), y^r)$ называется *индексом пересечения* цепей ξ^{n-r} и y^r; мы будем обозначать его через $\chi(\xi^{n-r}, y^r)$. Из предложения (б) п. 5:1 и формулы (4.8) вытекает, что для $(r+1)$-мерной цепи y^{r+1} комплекса K по области коэффициентов G и $(n-r)$-мерной звездной цепи ξ^{n-r} комплекса K по области коэффициентов H имеет место соотношение

$$\chi(\xi^{n-r}, \Delta y^{r+1}) = (-1)^{n-r} \chi(\Delta \xi^{n-r}, y^{r+1}). \tag{5.4}$$

В самом деле,

$$\chi(\xi^{n-r}, \Delta y^{r+1}) = (d^{-1}(\xi^{n-r}), \Delta y^{r+1}) = (\nabla d^{-1}(\xi^{n-r}), y^{r+1}) = \\ = \chi((-1)^{n-r}\Delta\xi^{n-r}, y^{r+1}).$$

Далее, соотношения, указанные в предложении (в) п. 5:1, дают нам

$$\left.\begin{aligned} \chi(\xi_1^{n-r} + \xi_2^{n-r}, y^r) &= \chi(\xi_1^{n-r}, y^r) + \chi(\xi_2^{n-r}, y^r), \\ \chi(\xi^{n-r}, y_1^r + y_2^r) &= \chi(\xi^{n-r}, y_1^r) + \chi(\xi^{n-r}, y_2^r). \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

(а). *Пусть K и L — триангуляции n-мерных ориентированных многообразий, а f — такое, имеющее степень γ отображение многообразия $\tilde{K}$ в $\tilde{L}$, которое является симплициальным отображением комплекса K в L. Отображение f не является, вообще говоря, симплициальным отображением комплекса K' в L'. Существует такая симплициальная аппроксимация f' отображения f комплекса K' в L', что для любой r-мерной цепи x^r комплекса L по области коэффициентов H имеем*

$$f'_* d f^* x^r = \gamma d x^r.$$

Кроме того, для любой r-мерной цепи y^r комплекса K по области коэффициентов G мы имеем

$$\gamma \cdot \chi(d f^* x^r, y^r) = \chi(f'_* d f^* x^r, f_* y^r).$$

В самом деле, пусть T — симплекс комплекса K, а p и q — центры тяжести симплексов T и $f(T)$. Положим $f'(p) = q$. Отображение f', заданное для вершин комплекса K', можно, как нетрудно видеть, продолжить в симплициальное отображение f' комплекса K' в L'. Действительно, если $[T_0, \ldots, T_r]$ — симплекс комплекса K', то в последовательности $f(T_0), \ldots, f(T_r)$ каждый симплекс является собственной или несобственной гранью предыдущего, и, выбрасывая из этой последовательности повторяющиеся симплексы, мы получим последовательность, определяющую симплекс комплекса L'.

Условимся симплекс $[T_0, \ldots, T_r]$ комплекса K' называть *звездным*, если в последовательности $T_0, \ldots, T_r$ каждый симплекс имеет на одну единицу бо́льшую размерность, чем предыдущий, а размерность симплекса T_r равна n. Всякая $(n-r)$-мерная звездная цепь комплекса K' имеет отличные от нуля значения только на $(n-r)$-мерных звездных симплексах.

Покажем, что если n-мерный симплекс $T^n \in K$ вырождается при отображении f, то цепь $\eta^{n-r}_{f^*x^r}(T^n)$ вырождается при отображении f'. Действительно, если $T^{n-r} = [T_0, \ldots, T_r]$ — произвольный $(n-r)$-мерный звездный симплекс, лежащий в T^n (т. е. $T_r = T^n$), то либо r-мерный симплекс T_0 вырождается при отображении f — и тогда $f^*x^r(T_0)$ и, значит, коэффициент цепи $\eta^{n-r}_{f^*x^r}(T^n)$ на симплексе T^{n-r} равен нулю, — либо симплекс T_0 не вырождается. В последнем случае среди симплексов $f(T_0), \ldots, f(T_r)$ имеется не более r различных (так как $f(T_0)$ есть r-мерный симплекс, а размерность симплекса $f(T_r)$ меньше n), и потому симплекс T^{n-r} вырождается при отображении f.

Остается рассмотреть n-мерные симплексы $T^n \in K$, не вырождающиеся при отображении f. Пусть T^n_* — произвольный симплекс комплекса L, $T^n_1, \ldots, T^n_p$ — все симплексы комплекса K, оретированные в соответствии с ориентацией многообразия $\tilde{K}$ и отображающиеся на T^n_* при помощи f со степенью $+1$, а $T'^n_1, \ldots, T'^n_q$ — все симплексы, отображающиеся на T^n_* со степенью -1. Тогда, очевидно, цепи

$$\eta^{n-r}_{f^*x^r}(T^n_1), \ldots, \eta^{n-r}_{f^*x^r}(T^n_p), \ \eta^{n-r}_{f^*x^r}(-T'^n_1), \ldots, \eta^{n-r}_{f^*x^r}(-T'^n_q)$$

переходят при отображении f'_* в цепь $\eta^{n-r}_{x^r}(T^n_*)$. Так как $p-q=\gamma$, то, суммируя по всем симплексам комплекса L, получим

$$\gamma \sum_i \eta^{n-r}_{x^r}(T^n_i) = f'_*\Big(\sum_j \eta^{n-r}_{f^*x^r}(T^n_j)\Big); \qquad T^n_i \in L, \ T^n_j \in K,$$

или

$$\gamma d(x^r) = f'_* df^*(x^r).$$

Далее, имеем

$$\chi(f'_* df^* x^r, f_* y^r) = \gamma\chi(dx^r, f_* y^r) =$$
$$= \gamma(x^r, f_* y^r) = \gamma(f^* x^r, y^r) = \gamma\chi(df^* x^r, y^r).$$

(б). Тройку вида (P, x^n, f), где x^n есть n-мерная цепь комплекса P, а f — отображение полиэдра $\tilde{P}$ в пространство X (ср. п. 3:3), мы будем называть теперь *отображенной цепью*. Вместо обозначения (P, x^n, f) мы будем применять также более краткую запись $f(x^n)$. *Телом* отображенной цепи $f(x^n)$ назовем множество $f(|x^n|)$, где $|x^n|$ —

объединение замыканий всех тех n-мерных клеток, на которых цепь x^n принимает отличные от нуля значения (ср. (в), п. 4:5). Отображенные цепи $f(x^n)$ и $g(y^m)$ назовем *непересекающимися*, если не пересекаются их тела. Мы будем писать

$$f(x^n) \pm f(y^n) = f(x^n \pm y^n),$$

если x^n и y^n суть цепи одного и того же комплекса P, а f — отображение этого комплекса в X. Наконец, будем писать

$$f(x^n) = \Delta g(x^{n+1}),$$

или, подробнее,

$$(P, x^n, f) = \Delta(Q, x^{n+1}, g),$$

если P есть подкомплекс комплекса Q, $\Delta x^{n+1} = x^n$, а отображение g совпадает с f на подкомплексе P комплекса Q.

Пусть теперь P и Q — клеточные комплексы, x^r и y^{n-r} — цепи этих комплексов по областям коэффициентов G и H соответственно, а f и g — такие непрерывные отображения полиэдров $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в n-мерное ориентированное многообразие $\tilde{M}$, что каждая из цепей $f(x^r)$, $g(y^{n-r})$ не пересекается с границей другой. При этих условиях мы определим *индекс пересечения* $\chi(f(x^r), g(y^{n-r}))$ отображенных цепей $f(x^r)$ и $g(y^{n-r})$. Множества $f(|x^r|)$, $f(|\Delta x^r|)$, $g(|y^{n-r}|)$, $g(|\Delta y^{n-r}|)$ будем обозначать для краткости через F, F_Δ, G, G_Δ. Пусть ρ — наименьшее из чисел $\rho(F, G_\Delta)$ и $\rho(F_\Delta, G)$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{12}\rho$. Пусть K — симплициальное разбиение многообразия $\tilde{M}$, имеющее степень мелкости, меньшую чем ε, а K' — его барицентрическое подразделение. Будем обозначать δ-окрестность (в $\tilde{M}$) множества $A \subset \tilde{M}$ через $U(A, \delta)$. Оказывается, что существуют такие деформации f_t, g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отображений $f_0 = f$ и $g_0 = g$, что отображения f_1 и g_1 комплексов P и Q соответственно в K' и K клеточны и, кроме того,

$$\begin{aligned} f_t(|x^r|) &\subset U(F, 6\varepsilon), & f_t(|\Delta x^r|) &\subset U(F_\Delta, 6\varepsilon), \\ g_t(|y^{n-r}|) &\subset U(G, 2\varepsilon), & g_t(|\Delta y^{n-r}|) &\subset U(G_\Delta, 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Оказывается, далее, что в $U(F_\Delta, 6\varepsilon)$ существует такая цепь u^r комплекса K', а в $U(F, 6\varepsilon)$ — такая звездная цепь ξ^r, что $\xi^r - (f_1)_* x^r - u^r \underset{\Delta}{\sim} 0$, причем гомология имеет место в $U(F, 6\varepsilon)$, т. е. цепь комплекса K', осуществляющая эту гомологию, лежит в $U(F, 6\varepsilon)$. Оказывается, наконец, что индекс пересечения $\chi(\xi^r, (g_1)_* y^{n-r})$ не зависит от случайных элементов построения, а определяется самими цепями $f(x^r)$ и $g(y^{n-r})$. Мы положим поэтому

$$\chi(f(x^r), g(y^{n-r})) = \chi(\xi^r, (g_1)_* y^{n-r}).$$

Перейдем к доказательству всех высказанных утверждений. Существование указанных деформаций f_t, g_t непосредственно следует из теоремы о клеточной аппроксимации (причем даже будем иметь $f_t(|x^r|) \subset U(F, \varepsilon)$ и т. д.). Существование цепей u^r и ξ^r следует из предложения (в) п. 4:5 (заметим, что звездный носитель множества $A \subset \tilde{M}$ расположен в $U(A, 2\varepsilon)$). Остается показать независимость индекса пересечения от выбора произвольных элементов построения.

Пусть сначала элементы K и g_1 нашего построения фиксированы, а f_1', u'^r и ξ'^r — другие элементы, аналогичные f_1, u^r и ξ^r. Тогда отображения f_1 и f_1' гомотопны между собой, причем соединяющая их деформация переводит множество $|x^r|$ в $U(F, 6\varepsilon)$, а множество $|\Delta x^r|$ — в $U(F_\Delta, 6\varepsilon)$. Из этого следует существование такой цепи v^r, лежащей в $U(F_\Delta, 7\varepsilon)$, что

$$(f_1)_* x^r - (f_1')_* x^r - v^r \underset{\Delta}{\sim} 0 \text{ в } U(F, 7\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\xi^r - \xi'^r - (u^r + v^r - u'^r) \underset{\Delta}{\sim} 0 \text{ в } U(F, 7\varepsilon).$$

Так как граница цепи $u^r + v^r - u'^r$, лежащей в $U(F_\Delta, 7\varepsilon)$, является звездной цепью, то, в силу предложения (в) п. 4:5, существует такая звездная цепь η^r, лежащая в $U(F_\Delta, 9\varepsilon)$, что

$$\eta^r - (u^r + v^r - u'^r) \underset{\Delta}{\sim} 0 \text{ в } U(F_\Delta, 9\varepsilon),$$

так что

$$\xi^r - \xi'^r - \eta^r \underset{\Delta}{\sim} 0 \text{ в } U(F, 9\varepsilon).$$

Если ξ^{r+1} — звездная цепь, осуществляющая последнюю гомологию, то мы имеем, в силу (5.4),

$$\chi(\xi^r - \xi'^r - \eta^r, (g_1)_* y^{n-r}) = (-1)^r \cdot \chi(\xi^{r+1}, (g_1)_* \Delta y^{n-r}).$$

Но этот индекс пересечения равен нулю, ибо множества $|\xi^{r+1}|$ и $|(g_1)_* \Delta y^{n-r}|$, лежащие соответственно в $U(F, 9\varepsilon)$ и $U(G_\Delta, 2\varepsilon)$, не пересекаются. По той же причине равен нулю индекс пересечения $\chi(\eta^r, (g_1)_* y^{n-r})$, так что мы имеем

$$\chi(\xi^r - \xi'^r, (g_1)_* y^{n-r}) = 0,$$

или

$$\chi(\xi^r, (g_1)_* y^{n-r}) = \chi(\xi'^r, (g_1)_* y^{n-r}).$$

Таким образом, произвол в выборе элементов f, u^r и ξ^r нашего построения не влияет на значение рассматриваемого индекса пересечения. Аналогично устанавливается независимость индекса пересечения от выбора элемента g_1.

Покажем, наконец, независимость индекса пересечения от выбора подразделения K. Пусть K_1 и K_2 — произвольные симплициальные подразделения многообразия $\tilde{M}$, имеющие степени мелкости, меньшие чем ε. Мы выберем элементы f_{1i}, g_{1i} и ξ_i^r, нужные для вычисления индекса пересечения в подразделении K_i, $i = 1, 2$, некоторым специальным образом, и покажем, что при таком выборе этих элементов индексы пересечения

$$\chi(\xi^r_i, \quad (g_{1i})_* y^{n-r}), \qquad i=1,2$$

равны между собой. Тем самым независимость индекса пересечения от выбора триангуляции многообразия $\tilde{M}$ будет доказана.

Пусть K — настолько мелкое подразделение многообразия $\tilde{M}$, что существуют симплициальные аппроксимации φ_i тождественного отображения комплекса K в K_i, $i=1,2$. Обозначим через g_1 клеточную аппроксимацию отображения g комплекса Q в K. Тогда

$$g_1(|y^{n-r}|) \subset U(G, \varepsilon), \quad g_1(|\Delta y^{n-r}|) \subset U(G_\Delta, \varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\varphi_i g_1(|y^{n-r}|) \subset U(G, 2\varepsilon), \quad \varphi_i g_1(|\Delta y^{n-r}|) \subset U(G_\Delta, 2\varepsilon).$$

Таким образом, мы можем положить $g_{1i} = \varphi_i g_1$. Пусть f_1 — клеточная аппроксимация отображения f комплекса P в K'. Тогда

$$f_1(|x^r|) \subset U(F, \varepsilon), \quad f_1(|\Delta x^r|) \subset U(F_\Delta, \varepsilon).$$

Обозначим через φ'_i симплициальную аппроксимацию отображения φ_i комплекса K' в K'_i, построенную так, как это указано в предложении (а). Тогда

$$\varphi'_i f_1(|x^r|) \subset U(F, 2\varepsilon), \quad \varphi'_i f_1(|\Delta x^r|) \subset U(F_\Delta, 2\varepsilon),$$

и мы можем положить $f_{1i} = \varphi'_i f_1$, $i=1,2$. Пусть ξ^r_i — такая звездная цепь комплекса K'_i, что (см. предложение (в) п. 4:5) имеем $\xi^r_i - (f_{1i})_* x^r - u^r_i \underset{\Delta}{\sim} 0$ в $U(F, 4\varepsilon)$, причем $|u^r| \subset U(F_\Delta, 4\varepsilon)$. Тогда, применяя предложение (а) к цепям $x = d^{-1}\xi^r_i$ и $y = (g_1)_* y^{n-r}$, получим

$$(\varphi'_i)_* d\varphi^*_i d^{-1}\xi^r_i = \xi^r_i$$

и, кроме того,

$$\chi(\xi^r_i, (g_{1i})_* y^{n-r}) = \chi((\varphi'_i)_* d\varphi^*_i d^{-1}\xi^r_i, (\varphi_i)_*(g_1)_* y^{n-r}) = \chi(d\varphi^*_i d^{-1}\xi^r_i, (g_1)_* y^{n-r}))$$

(здесь $\gamma = 1$, так как отображение φ_i гомотопно тождественному). Иными словами, полагая $\overset{*}{\xi}{}^r_i = d\varphi^*_i d^{-1}\xi^r_i$, мы получим

$$(\varphi'_i)_* \overset{*}{\xi}{}^r_i = \xi^r_i, \quad \chi(\xi^r_i, (g_{1i})_* y^{n-r}) = \chi(\overset{*}{\xi}{}^r_i, (g_1)_* y^{n-r}).$$

Если мы покажем, что элементы f_1, $\overset{*}{\xi}{}^r_i$, g_1 могут быть использованы для вычисления индекса пересечения в K, то тем самым будет доказано, в силу сказанного выше, равенство

$$\chi(\overset{*}{\xi}{}^r_1, (g_1)_* y^{n-r}) = \chi(\overset{*}{\xi}{}^r_2, (g_1)_* y^{n-r}),$$

а следовательно, и равенство

$$\chi(\xi_1^r, (g_{11})_* y^{n-r}) = \chi(\xi_2^r, (g_{12})_* y^{n-r}).$$

Итак, нам нужно показать, что в $U(F_\Delta, 6\varepsilon)$ существует такая цепь $\overset{*}{u}{}_i^r$ комплекса K', что $\overset{*}{\xi}{}_i^r - (f_{1i})_* x^r - \overset{*}{u}{}_i^r \underset{\Delta}{\sim} 0$ в $U(F, 6\varepsilon)$. Пусть ψ_i — клеточная аппроксимация тождественного отображения комплекса K_i' в K'. Так как $\psi_i\varphi_i'$ есть такое, гомотопное тождественному клеточное отображение комплекса K' в себя, что $\rho(x, \psi_i\varphi_i'(x)) < 2\varepsilon$, $x \in \tilde{M}$, то существуют такие r-мерные цепи v_i^r и w_i^r комплекса K', лежащие соответственно в $U(|\Delta\overset{*}{\xi}{}_i^r|, 2\varepsilon)$ и $U(|\Delta(f_1)_* x^r|, 2\varepsilon)$, т. е. лежащие в $U(F_\Delta, 6\varepsilon)$, что в $U(F, 6\varepsilon)$ имеют место гомологии

$$\overset{*}{\xi}{}_i^r - (\psi_i\varphi_i')_* \overset{*}{\xi}{}_i^r - v_i^r \underset{\Delta}{\sim} 0,$$
$$(f_1)_* x^r - (\psi_i\varphi_i')_* (f_1)_* x^r - w_i^r \underset{\Delta}{\sim} 0.$$

Далее, применяя соотношение $\xi_i^r - (f_{1i})_* x^r - u_i^r \underset{\Delta}{\sim} 0$, имеющее место в $U(F, 4\varepsilon)$, получим

$$(\psi_i\varphi_i')_* \overset{*}{\xi}{}_i^r = (\psi_i)_* \xi_i^r \underset{\Delta}{\sim} (\psi_i)_* (f_{1i})_* x^r + (\psi_i)_* u_i^r = (\psi_i\varphi_i')_* (f_1)_* x^r + (\psi_i)_* u_i^r$$

в $U(F, 5\varepsilon)$. Вместе с двумя предыдущими соотношениями это дает нам

$$\overset{*}{\xi}{}_i^r - (f_1)_* x^r - (v_i^r + (\psi_i)_* u_i^r - w_i^r) \underset{\Delta}{\sim} 0 \text{ в } U(F, 6\varepsilon),$$

причем цепь $\overset{*}{u}{}_i^r = v_i^r + (\psi_i)_* u_i^r - w_i^r$ расположена в $U(F_\Delta, 6\varepsilon)$.

Итак, независимость индекса пересечения $\chi(f(x^r), g(y^{n-r}))$ от всех произвольных элементов построения доказана. Заметим, что хотя мы при доказательстве предполагали многообразие $\tilde{M}$ метризованным, величина индекса пересечения не меняется при изменении метрики в $\tilde{M}$. Таким образом, индекс пересечения отображенных цепей $f(x^r)$ и $g(y^{n-r})$ многообразия $\tilde{M}$ топологически инвариантен.

(в). Из сказанного в начале этого пункта непосредственно следует такое предложение.

Для индекса пересечения отображенных цепей имеет место соотношение

$$\chi(f(x^r), g(\Delta y^{n-r+1})) = (-1)^r \chi(f(\Delta x^r), g(y^{n-r})).$$

(г). *Пусть P и Q — клеточные комплексы, x^r и y^{n-r} — цепи этих комплексов по областям коэффициентов G и H соответственно. Пусть, далее, f_t и g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — такие непрерывно зависящие от t отображения полиэдров $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в n-мерное ориентированное комбинаторное многообразие $\tilde{M}$, что для любого t множества $f_t(|x^r|) \cap g_t(|\Delta y^{n-r}|)$ и $f_t(|\Delta x^r|) \cap g_t(|y^{n-r}|)$ пусты. При этих условиях мы имеем*

$$\chi(f_0(x^r), g_0(y^{n-r})) = \chi(f_1(x^r), g_1(y^{n-r})).$$

В самом деле, пусть ε — настолько малое положительное число, что при $|t-t'|<\varepsilon$ множества $f_t(|x^r|) \cap g_{t'}(|\Delta y^{n-r}|)$ и $f_t(|\Delta x^r|) \cap \cap g_{t'}(|y^{n-r}|)$ пусты. Тогда доказываемое предложение следует непосредственно из соотношения

$$\chi(f_{t'}(x^r), g_{t'}(y^{n-r})) = \chi(f_t(x^r), g_t(y^{n-r})) \text{ при } |t-t'|<\varepsilon,$$

справедливость которого, в свою очередь, вытекает из равенств

$$\chi(f_{t'}(x^r), g_{t'}(y^{n-r})) = \chi(f_{t'}(x^r), g_t(y^{n-r})),$$
$$\chi(f_{t'}(x^r), g_t(y^{n-r})) = \chi(f_t(x^r), g_t(y^{n-r})).$$

Докажем, например, второе из этих равенств. Положим $F(a,\tau) = f_{t\tau+t'(1-\tau)}(a)$; $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $a \in \widetilde{P}$. Тогда F есть отображение полиэдра $P \times I$ в $\widetilde{M}$, и для цепи $x^r \times I$ мы имеем

$$\chi(F(\Delta(x^r \times I)), g_t(y^{n-r})) = (-1)^r \chi(F(x^r \times I), g_t(\Delta y^{n-r})) = 0,$$

ибо $f_\vartheta(|x^r|) \cap g_t(|\Delta y^{n-r}|) = 0$ при $t \leqslant \vartheta \leqslant t'$. Учитывая соотношение (3.8), получаем

$$\chi(f_t(x^r) - f_{t'}(x^r) - F((\Delta x^r) \times I), g_t(y^{n-r})) = 0.$$

Так как $\chi(F((\Delta x^r) \times I), g_t(y^{n-r})) = 0$, то мы и получаем отсюда

$$\chi(f_t(x^r), g_t(y^{n-r})) = \chi(f_{t'}(x^r), g_t(y^{n-r})).$$

(д). *Пусть $f(z^r)$ и $g(z^{n-r})$ — отображенные циклы многообразия $\widetilde{M}$ по областям коэффициентов G и H соответственно. Тогда для них определен индекс пересечения $\chi(f(z^r), g(z^{n-r}))$. Если этот индекс пересечения отличен от нуля, то каждый из циклов $f(z^r), g(z^{n-r})$ негомологичен нулю.*

В самом деле, если бы один из этих циклов был гомологичен нулю, то в силу (в) индекс пересечения был бы равен нулю.

(е). *Пусть $f(z^r)$ и $g(z^{n-r})$ — отображенные циклы сферы S^n по областям коэффициентов G и H соответственно. Тогда при $0<r<n$ мы имеем*

$$\chi(f(z^r), g(z^{n-r})) = 0.$$

Действительно, каждый из рассматриваемых циклов гомологичен нулю в S^n, и высказанное утверждение вытекает из (д).

Так как n-мерное эвклидово пространство, будучи дополнено одной точкой, превращается в n-мерную сферу, то для отображенных циклов ориентированного эвклидова пространства определен индекс пересечения. Доказанное предложение (е) справедливо и для отображенных циклов эвклидова пространства при $0<r<n$.

5:3. Приведение цепей в общее положение. Пусть R^n — эвклидово пространство размерности n, а T^r и T^s — расположенные в нем симплексы размерностей r и s. Если при $r+s<n$ эти симплексы не пересекаются, то мы скажем, что они находятся *в общем положении.* При $r+s=n$ мы будем говорить, что T^r и T^s находятся в общем положении, если они либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из единственной точки, являющейся внутренней точкой для каждого из них.

(а). Пусть R^n — ориентированное n-мерное эвклидово пространство, а T^r и T^s, $r+s=n$ — такие ориентированные симплексы в R^n, что они имеют единственную общую точку o и находятся в общем положении. Пусть, далее, x^r есть r-мерная цепь комплекса $[T^r]$, принимающая на T^r значение $g \in G$, y^s есть s-мерная цепь комплекса $[T^s]$, принимающая на T^s значение $h \in H$, а e — тождественное отображение комплексов $[T^r]$ и $[T^s]$ в R^n. При этих условиях определен индекс пересечения $\chi(e(x^r), e(y^s))$. Пусть, наконец, $e_1, \ldots, e_r$ — векторы, исходящие из точки o и задающие ориентацию симплекса T^r, а $f_1, \ldots, f_s$ — векторы, исходящие из o и задающие ориентацию симплекса T^s. Тогда *индекс пересечения* $\chi(e(x^r), e(y^s))$ *равен* gh, *если базис* $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s$ *соответствует ориентации пространства* R^n, *и равен* $-gh$ *в противном случае. Из этого следует, в частности, что*

$$\chi(e(x^r), e(y^s)) = (-1)^{rs}\chi(e(y^s), e(x^r)). \tag{5.6}$$

В случае $r=0$ или $s=0$ высказанные предложения также справедливы; соответствующий нульмерный симплекс рассматривается как всегда, без ориентации.

Для доказательства проведем индукцию по r. При $r=0$ доказываемое предложение устанавливается без труда. Допустим, что оно доказано для размерностей, меньших r, и пусть T^r и T^s — симплексы, о которых говорится в доказываемом предложении (а). Пусть, далее, a — некоторая внутренняя точка грани T^{r-1} симплекса T^r, а b — точка прямой $\overline{oa}$, лежащая за концом a отрезка $[o, a]$. Тогда симплекс $T^{s+1} = bT^s$ находится в общем положении с симплексом T^{r-1} и имеет с ним общую точку a. Пусть $e_1, \ldots, e_{r-1}$ — векторы, задающие такую ориентацию симплекса T^{r-1}, что $[T^r : T^{r-1}] = 1$, $f_1, \ldots, f_s$ — векторы, задающие ориентацию симплекса T^s, а e — вектор, идущий из точки a в точку o. Тогда базис $e, e_1, \ldots, e_{r-1}$ задает ориентацию симплекса T^r, а базис $-e, f_1, \ldots, f_s$ — такую ориентацию симплекса T^{s+1}, что $[T^{s+1} : T^s] = 1$. Если x^{r-1} и y^{s+1} — цепи, аналогичные цепям x^r и y^s, то, в силу предложения (в) п. 5:2, имеем

$$\begin{aligned}\chi(e(x^r), e(y^s)) &= \chi(e(x^r), e(\Delta y^{s+1})) = \\ &= (-1)^r \chi(e(\Delta x^r), e(y^{s+1})) = (-1)^r \chi(e(x^{r-1}), e(y^{s+1})).\end{aligned}$$

Последний же индекс пересечения равен $gh\varepsilon$, где ε равен $+1$, если базис $e_1, \ldots, e_{r-1}, -e, f_1, \ldots, f_s$ соответствует ориентации пространства R^n, и равен -1 в противном случае. Так как базис $e, e_1, \ldots, e_{r-1}, f_1, \ldots, f_s$ определяет ориентацию, отличающуюся от ориентации, определенной базисом $e_1, \ldots, e_{r-1}, -e, f_1, \ldots, f_s$, множителем $(-1)^r$, то доказываемое предложение справедливо для размерности r.

(б). Пусть K — симплициальный комплекс, тело которого является n-мерным многообразием, а $f(x^r)$ и $g(y^s)$, $r+s=n$,— его отображенные цепи. Мы скажем, что цепи $f(x^r)$ и $g(y^s)$ находятся *в общем положении*, если f переводит каждый r-мерный симплекс из $|x^r|$ аффинно и невырожденно внутрь некоторого симплекса комплекса K, аналогичными свойствами обладает отображение g, и каждые два имплекса $f(T^r)$, $g(T^s)$; $T^r \in |x^r|$, $T^s \in |y^s|$ либо не пересекаются, либо находятся в общем положении в несущей плоскости некоторого n-мерного симплекса комплекса K.

Для цепей, находящихся в общем положении, индекс пересечения можно определять непосредственно, без перехода к звездным аппроксимациям на основе предложения (а). При этом

$$\chi(f(x^r),\ g(y^s)) = (-1)^{rs}\chi(g(y^s),\ f(x^r)), \qquad r+s=n$$

для любых цепей, находящихся в общем положении.

(в). Мы опишем способ приведения цепей в общее положение, основанный на рассмотрении барицентрических подразделений особого вида — так называемых *т-подразделений* [3]. Пусть K — симплициальный комплекс, $a_1, \ldots, a_q$ — все его вершины, а $m_1, \ldots, m_q$ — положительные числа, совокупность которых мы будем называть *распределением масс*. Построим барицентрическое подразделение комплекса K, взяв для этого в каждом симплексе $T=[a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}]$ внутреннюю точку, барицентрические координаты которой в симплексе T равны величинам

$$\frac{m_{i_0}}{m_T};\ \frac{m_{i_1}}{m_T};\ \ldots;\ \frac{m_{i_r}}{m_T},\ \text{где } m_T = m_{i_0}+m_{i_1}+\ldots+m_{i_r}.$$

Построенное барицентрическое подразделение комплекса K называется *т-подразделением*, соответствующим выбранному распределению масс $m_1, \ldots, m_q$. При $m_1=m_2=\ldots=m_q$ мы получаем собственное барицентрическое подразделение.

Пусть K' есть m-подразделение комплекса K и пусть $T^r = [T_0, T_1, \ldots, T_r] \in K'$ — такой симплекс, что в последовательности $T_0, \ldots, T_r$ каждый симплекс имеет на одну единицу бо́льшую размерность, чем предыдущий. Расположим вершины симплекса T_r в такую последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что каждому симплексу T_k

принадлежат первые вершины этой последовательности, т. е. $T_k = [a_0, a_1, \dots a_{n-r+k}]$. Пусть $m_0, m_1, \dots, m_n$ — массы, соответствующие вершинам $a_0, \dots, a_n$ при построении m-подразделения K'. Барицентрические координаты точек симплекса T^r удовлетворяют условиям

$$\frac{\lambda^0}{m_0} = \frac{\lambda^1}{m_1} = \dots = \frac{\lambda^{n-r}}{m_{n-r}} \geqslant \frac{\lambda^{n-r+1}}{m_{n-r+1}} \geqslant \dots \geqslant \frac{\lambda^n}{m_n}, \tag{5.7}$$

и обратно, каждая точка, барицентрические координаты которой удовлетворяют соотношениям (5.7), принадлежит симплексу T^r. Для внутренних точек симплекса T^r в этих соотношениях имеют место строгие знаки неравенства, для граничных — одно или более из этих неравенств заменяются равенствами.

Действительно, обозначим вершину комплекса K', лежащую внутри симплекса T_i, через b_i, $0 \leqslant i \leqslant r$, а барицентрические координаты точки b_i в симплексе T_r — через $\mu_i^0, \mu_i^1, \dots, \mu_i^n$. Тогда

$$\frac{\mu_i^0}{m_0} = \frac{\mu_i^1}{m_1} = \dots = \frac{\mu_i^{n-r+i}}{m_{n-r+i}} \quad \text{и} \quad \mu_i^{n-r+i+1} = \dots = \mu_i^n = 0.$$

Если теперь x — точка симплекса T^r, а $\nu^0, \dots, \nu^r$ — ее барицентрические координаты, соответствующие вершинам $b_0, \dots, b_r$, то барицентрические координаты точки x в симплексе T_r имеют значения

$$\lambda^j = \nu^0\mu_0^j + \nu^1\mu_1^j + \dots + \nu^r\mu_r^j, \quad j = 0, \dots, n. \tag{5.8}$$

Из этого без труда следуют соотношения (5.7). Точно так же ясно, что при обращении одного из чисел ν^i в нуль один из знаков неравенства в (5.7) заменяется равенством, а при условии, что все ν^i положительны, все знаки неравенства — строгие. Обратно, если числа λ^j удовлетворяют условиям (5.7), то в системе (5.8) с неизвестными ν^i, $i = 0, \dots, r$ первые $n - r + 1$ уравнений пропорциональны, так что достаточно рассмотреть систему, состоящую из последних $r + 1$ уравнений (5.8). В определителе этой системы элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю, а элементы, стоящие на главной диагонали, отличны от нуля. Таким образом, система (5.8) имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что числа, составляющие это решение, должны быть неотрицательными, так как иначе хотя бы один из знаков неравенства в (5.7) будет иметь обратное направление. Таким образом, соответствующая точка $\lambda^0 a_0 + \dots + \lambda^n a_n = \nu^0 b_0 + \dots + \nu^r b_r$ принадлежит симплексу T^r.

(г). *Пусть K' — собственное барицентрическое подразделение комплекса K, тело которого является n-мерным многообразием, а $K'_{(m)}$ — такое m-подразделение комплекса K, что в соответствующем распределении масс все массы $m_1, m_2, \dots$ различны. Пусть, далее, T^r и T^s — звездные симплексы соответственно* *комплексов K' и $K'_{(m)}$, $r+s \leqslant n$. Тогда симплексы T^r и T^s находятся в общем положении в K.*

Достаточно рассмотреть случай, когда T^r и T^s расположены в одном и том же n-мерном симплексе комплекса K. Если $s < n-r$, то каждая точка симплекса T^s имеет по крайней мере $n-s+1$ барицентрических координат, пропорциональных числам m_i [см. (5.7)], т. е. различных между собой. Каждая же точка симплекса T^r имеет, по аналогичным соображениям, не менее $n-r+1$ равных между собой барицентрических координат. Так как эти условия несовместимы, то симплексы T^r и T^s не пересекаются. Пусть теперь $r+s=n$. Нам нужно показать, что если симплексы T^r и T^s имеют общую точку, то эта точка не является граничной ни для одного из этих симплексов. Действительно, для граничной точки, например симплекса T^r, имеется $n-r+1$ равных барицентрических координат в силу (5.7) и еще по крайней мере две равные между собой координаты, так как для граничной точки в (5.7) хотя бы один из знаков неравенства заменяется равенством. Таким образом, граничная точка симплекса T^r имеет не более чем $(n+1)-(n-r)-1=r$ различных значений барицентрических координат. В силу этого она не может принадлежать симплексу T^s, ибо каждая точка симплекса T^s имеет не менее чем $n-s+1=r+1$ различных значений барицентрических координат.

(д). *Для любых двух отображенных цепей $f(x^r)$ и $g(y^{n-r})$ комбинаторного многообразия M^n, для которых определен индекс пересечения, имеем*

$$\chi(f(x^r),\ g(y^{n-r})) = (-1)^{r(n-r)}\chi(g(y^{n-r}),\ f(x^r)).$$

Действительно, пусть K — достаточно мелкое симплициальное подразделение многообразия M^n, а K' и $K'_{(m)}$ — подразделения комплекса K, о которых говорится в (г). Тогда (ср. предложение (г) п. 5:2) можно, не меняя значений индексов пересечения, считать, что $f(x^r)$ является цепью комплекса K', а $g(y^{n-r})$ — цепью комплекса $K'_{(m)}$. Рассматриваемые цепи будут, согласно (г), находиться в общем положении, и доказываемое предложение непосредственно вытекает из (б).

5:4. Коэффициент зацепления. Пусть $f(z^{r-1})$ и $g(z^{n-r})$ — не пересекающиеся между собой отображенные циклы n-мерной ориентированной сферы S^n или n-мерного ориентированного эвклидова пространства R^n, $1 < r \leqslant n$. Тогда цикл $f(z^{r-1})$ гомологичен нулю в S^n или соответственно в R^n. Пусть отображение f комплекса $|z^{r-1}|$ распространено в отображение такого комплекса, в котором z^{r-1} гомологичен нулю (таким комплексом является, например, пирамида над $|z^{r-1}|$), т. е. $f(z^{r-1}) = \Delta f(x^r)$. Тогда можно определить индекс пересечения $\chi(f(x^r),\ g(z^{n-r}))$, который называется *коэффициентом зацепления* циклов $f(z^{r-1})$ и $g(z^{n-r})$; он обозначается через $\mathfrak{v}(f(z^{r-1}),\ g(z^{n-r}))$. Для законности введенного определения следует установить независимость этого индекса пересечения от выбора цепи $f(x^r)$. Пусть $f(z^{r-1}) = \Delta f(y^r)$. Тогда цепь $f(x^r) - f(y^r)$ является Δ-циклом, и, в силу предложения (е) п. 5:2, мы имеем $\chi(f(x^r) - f(y^r), g(z^{n-r})) = 0$, т. е.

$$\chi(f(x^r), g(z^{n-r})) = \chi(f(y^r), g(z^{n-r})).$$

Если $g(z^{n-r}) = \Delta g(x^{n-r+1})$, то мы имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(f(z^{r-1}), \quad g(y^{n-r})) &= \chi(f(x^r), \quad \Delta g(x^{n-r+1})) = \\ &= (-1)^r \chi(f(z^{r-1}), \quad g(x^{n-r+1}));\end{aligned}$$

это дает возможность вычислять коэффициент зацепления при помощи цепи, граница которой совпадает не с первым, а со вторым из данных циклов. Далее, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(f(z^{r-1}), \quad g(z^{n-r})) &= (-1)^r \chi(f(z^{r-1}), \quad g(x^{n-r+1})) = \\ &= (-1)^{r+(r-1)(n-r+1)} \chi(g(x^{n-r+1}), \ f(z^{r-1})) = \\ &= (-1)^{(r-1)(n-r)+1} \mathfrak{v}(g(z^{n-r}), \quad f(z^{r-1})).\end{aligned}$$

В частности, при $r-1 = n-r = 1$, т. е. для коэффициента зацепления одномерных циклов в трехмерной сфере или в трехмерном эвклидовом пространстве мы имеем

$$\mathfrak{v}(f(z^1), \quad g(z_1^1)) = \mathfrak{v}(g(z_1^1), \quad f(z^1)). \tag{5.9}$$

(То же, очевидно, справедливо при условии, что $r-1 = n-r$ есть любое нечетное число; при условии же $r-1 = n-r =$ четному числу, коэффициент зацепления равен нулю.)

В заключение отметим следующее предложение, непосредственно вытекающее из предложения (г) п. 5:2. Пусть $f_t(z^{r-1})$ и $g_t(z^{n-r})$ — такие, непрерывно деформирующиеся циклы многообразия S^n или R^n, что для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ циклы $f_t(z^{r-1})$ и $g_t(z^{n-r})$ не пересекаются. Тогда имеем

$$\mathfrak{v}(f_0(z^{r-1}), \quad g_0(z^{n-r})) = \mathfrak{v}(f_1(z^{r-1}), \quad g_1(z^{n-r})). \tag{5.10}$$

§ 6. Произведения ∇-циклов

6:1. Произведение Колмогорова—Александера. Пусть K — некоторый симплициальный комплекс, K' — его барицентрическое подразделение, а z^r — произвольный r-мерный ∇-цикл комплекса K по области коэффициентов G. Система $\{\eta^k_{z^r}(T^{r+k})\}$, барицентрически двойственная циклу z^r, обладает следующими свойствами (см. п. 4:6):

1) цепь $\eta^k_{z^r}(T^{r+k})$ является отображенной цепью симплекса T^{r+k}, $k \geqslant 0$;

2) $\Delta\eta^k_{z^r}(T^{r+k}) = \sum [T^{r+k} : T^{r+k-1}]\, \eta^{k-1}_{z^r}(T^{r+k-1})$;

3) индекс нульмерной цепи $\eta^0_{z^r}(T^r)$ равен $z^r(T^r)$.

Всякую систему $\{\eta^k_{z^r}(T^{r+k})\}$ отображенных цепей (не обязательно являющихся цепями комплекса K'), удовлетворяющую этим условиям, назовем системой, *двойственной* циклу z^r.

(а). Пусть f — непрерывное отображение полиэдра $\widetilde{P}$ в метрическое пространство X. Отображение f' того же полиэдра в X называется *ε-сдвигом* отображения f, если для любой точки p полиэдра P имеем $\rho(f(p), f'(p)) < \varepsilon$. Пусть теперь $f(x^r)$ и $g(y^r)$ — две отображенные цепи эвклидова пространства R^n, причем $r+s<n$. Тогда *сколь угодно малым сдвигом отображений f и g можно добиться того, чтобы множества $f(|x^r|)$ и $g(|y^s|)$ не пересекались.*

Для доказательства рассмотрим какую-либо декартову систему координат $x^1, \ldots, x^n$ в R^n и рассмотрим разбиение пространства R^n на кубы плоскостями $x^i = k\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; ε — произвольное положительное число. Все кубы, которые пересекаются с $f(|x^r|)$, и все грани этих кубов составляют клеточный комплекс. Поэтому, применяя теорему о клеточной аппроксимации (п. 2:2), мы легко убедимся в том, что сдвигом отображения f можно перевести множество $f(|x^r|)$ в r-мерный остов построенного комплекса кубов. Рассмотрим, кроме того, разбиение пространства R^n на кубы плоскостями $x^i = \left(k + \frac{1}{2}\right)\varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Сдвигом отображения g можно перевести множество $g(|y^s|)$ в s-мерный остов этого нового комплекса кубов. Но r-мерный и s-мерный остовы этих двух комплексов кубов, как легко видеть, не пересекаются. Величина же переменного сдвига отображений f и g не превосходит диаметра куба, т. е. $\varepsilon\sqrt{n}$.

Эта же лемма справедлива, очевидно, и для отображенных цепей n-мерного симплекса: нужно сдвигом перевести цепи внутрь симплекса и затем применить описанное построение.

(б). Пусть теперь z^r и z^s — два ∇-цикла симплициального комплекса K, рассматриваемые по областям коэффициентов G и H соответственно, а $\{\eta^k_{z^r}(T^{r+k})\}$ и $\{\eta^k_{z^s}(T^{s+k})\}$ — системы цепей, двойственные этим циклам. Мы скажем, что эти системы правильно расположены, если при $p<r+s$ цепи $\eta^{p-r}_{z^r}(T^p)$ и $\eta^{p-s}_{z^s}(T^p)$ не пересекаются. Нетрудно видеть, что *сколь угодно малым сдвигом рассматриваемых систем можно привести их в правильное расположение.*

Действительно, если, например, $r \geqslant s$, то прежде всего мы малым сдвигом добьемся того, чтобы для любого r-мерного симплекса T^r цепь $\eta^0_{z^r}(T^r)$ была расположена внутри T^r. Тогда граница цепи $\eta^{r-s}_{z^s}(T^r)$ не пересекается с $\eta^0_{z^r}(T^r)$. Применяя предложение (а), мы можем добиться того, чтобы эти цепи и сами не пересекались, причем нетрудно нужный сдвиг осуществить так, чтобы граница цепи $\eta^{r-s}_{z^s}(T^r)$ не двигалась. Этот сдвиг можно осуществить в виде деформации (например, передвигая точки прямолинейно, ср. п. 1:3) и потому продолжить его (см. лемму (а) п. 2:2) на цепи больших размерностей. После этого границы цепей $\eta^1_{z^r}(T^{r+1})$ и $\eta^{r-s+1}_{z^s}(T^{r+1})$ не будут пересекаться, и мы сможем раздвинуть и эти цепи, оставив их границы неподвижными. Продолжая этот процесс, мы приведем рассматриваемые системы в правильное расположение.

Заметим, что если двойственные системы цепей уже расположены правильно, то достаточно малый сдвиг не нарушит этого правильного расположения. Пользуясь этим, можно привести в попарно правильное расположение двойственные системы цепей для трех и более циклов. В дальнейшем мы будем предполагать, что всюду, где это нужно, приведение систем в правильное расположение произведено.

(в). При правильном расположении систем $\{\eta^{p-r}_{z^r}(T^p)\}$ и $\{\eta^{p-s}_{z^s}(T^p)\}$ каждая из двух цепей $\eta^s_{z^r}(T^{r+s})$ и $\eta^r_{z^s}(T^{r+s})$ не пересекается с границей другой, так что определен их индекс пересечения

$$z^{r+s}(T^{r+s}) = \chi(\eta^s_{z^r}(T^{r+s}),\quad \eta^r_{z^s}(T^{r+s})).$$

Так как при перемене ориентации симплекса T^{r+s} обе цепи $\eta^s_{z^r}(T^{r+s})$ и $\eta^r_{z^s}(T^{r+s})$ меняют знак, то их индекс пересечения (в симплексе $-T^{r+s}$) также изменит знак, т. е.

$$z^{r+s}(-T^{r+s}) = -z^{r+s}(T^{r+s}).$$

Таким образом, z^{r+s} есть цепь комплекса K; мы назовем ее *произведением* циклов z^r и z^s. Построение произведения зависит от выбора правильно расположенных систем цепей, двойственных циклам z^r и z^s. Рассмотрим ряд свойств произведения.

(г). *Произведение z^{r+s} циклов z^r и z^s является ∇-циклом комплекса K.*

Действительно, пусть T^{r+s+1} — произвольный $(r+s+1)$-мерный симплекс комплекса K, а Σ^{r+s} — его граница. Симплексы $T^{r+s} \in \Sigma^{r+s}$ ориентируем таким образом, чтобы было $[T^{r+s+1}:T^{r+s}] = +1$. Тогда сфера Σ^{r+s} будет ориентирована, а значение цепи ∇z^{r+s} на симплексе T^{r+s+1} будет равно сумме значений цепи z^{r+s} по всем симплексам $T^{r+s} \in \Sigma^{r+s}$. Иначе говоря, значение цепи ∇z^{r+s} на T^{r+s+1} равно индексу пересечения цепей $\sum \eta^s_{z^r}(T^{r+s})$ и $\sum \eta^r_{z^s}(T^{r+s})$ (суммирование по всем граням симплекса T^{r+s+1}). Так как эти цепи являются циклами (см. условие 2)], то их индекс пересечения равен нулю в силу предложения (е) п. 5:2. Таким образом, $\nabla z^{r+s} = 0$.

(д). Лемма. *Пусть R^n — ориентированное эвклидово пространство, R^{n-1} — его ориентированная плоскость, R^n_1 — то из двух полупространств, для которого $[R^n_1:R^{n-1}] = +1$. Пусть, далее, x^s и y^{n-s-1} — непрерывные цепи плоскости R^{n-1}, для которых определен индекс пересечения, a — произвольная точка полупространства R^n_1.*

Обозначим через ψ *подобное преобразование пространства* R^n *с центром подобия в точке* a *и положительным коэффициентом, меньшим единицы. Тогда*

$$\chi(x^s,\ y^{n-s-1}) = (-1)^s \chi(\psi(x^s),\ ay^{n-s-1}),$$

где слева индекс пересечения берется в R^{n-1}, *а справа — в* R^n.

Без ограничения общности можно предполагать, что цепи x^s и y^{n-s-1} находятся в общем положении в плоскости R^{n-1}. Пусть T^s и T^{n-s-1} — симплексы, имеющие общую точку b и входящие в x^s и y^{n-s-1} соответственно с коэффициентами g и h. Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_s$ и $f_1, \ldots, f_{n-s-1}$ — базисы, задающие ориентации этих симплексов. Мы можем предположить, что базис $e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_{n-s-1}$ соответствует ориентации плоскости R^{n-1} (в противном случае достаточно изменить ориентацию у одного из симплексов T^s или T^{n-s-1}). Обозначим, наконец, через r вектор, идущий из точки b в точку a. Тогда симплекс aT^{n-s-1} входит в ay^{n-s-1} также с коэффициентом h, а его ориентация определяется базисом $r, f_1, \ldots, f_{n-s-1}$. Симплексы $\psi(T^s)$ и aT^{n-s-1} имеют единственную общую точку $\psi(b)$ и находятся в общем положении в пространстве R^n. Так как базис $r, e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_{n-s-1}$, или, что эквивалентно, базис $r, \psi(e_1), \ldots, \psi(e_s)$ $f_1, \ldots, f_{n-s-1}$, соответствует ориентации пространства R^n, то базис $\psi(e_1), \ldots, \psi(e_s),\ r, f_1, \ldots, f_{n-s-1}$ определяет ориентацию, отличающуюся от ориентации пространства R^n множителем $(-1)^s$. Таким образом, $\chi(\psi(T^s),\ aT^{n-s-1}) = (-1)^s$, откуда непосредственно вытекает доказываемая формула.

(e). *При замене систем двойственных цепей другими аналогичными системами произведение* z^{r+s} *остается в том же классе гомологий.*

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда система цепей, двойственная циклу z^r, меняется, а система цепей, двойственная z^s, не меняется. Итак, пусть $\{\xi^k_{z^r}(T^{r+k})\}$ — другая система цепей, двойственная z^r. Тогда система цепей $\{\xi^k_{z^r}(T^{r+k}) - \eta^k_{z^r}(T^{r+k})\}$ удовлетворяет условиям 1) и 2), а ее индексы [условие 3)] равны нулю. Поэтому существует для каждого r-мерного симплекса $T^r \in K$ такая отображенная одномерная цепь $x^1(T^r)$, что

$$\Delta x^1(T^r) = \xi^0_{z^r}(T^r) - \eta^0_{z^r}(T^r).$$

Так как при перемене ориентации симплекса T^r цепи $\eta^0_{z^r}(T^r)$ и $\xi^0_{z^r}(T^r)$ меняют знак, то и цепь $x^1(T^r)$ обладает этим свойством. Цепь $\sum[T^{r+1} : T^r]\, x^1(T^r) - \xi^1_{z^r}(T^{r+1}) + \eta^1_{z^r}(T^{r+1})$ является Δ-циклом симплекса (T^{r+1}), так что в этом симплексе существует цепь $x^2(T^{r+1})$, имеющая ее своей границей. Продолжая таким образом, мы построим систему цепей $\{x^{k+1}(T^{r+k})\}$, обладающую тем свойством, что

$$\Delta x^{k+1}(T^{r+k})=\sum[T^{r+k}:T^{r+k-1}]\,x^k(T^{r+k-1})-\xi^k_{z^r}(T^{r+k})+\eta^k_{z^r}(T^{r+k}).$$

Мы можем, при этом вести построение таким образом, чтобы цепи $x^{p-r+1}(T^p)$ и $\eta^{p-s}_{z^s}(T^p)$ не пересекались при $p<r+s-1$ (ибо при этом условии сумма размерностей рассматриваемых цепей меньше p). Тогда будет определен индекс пересечения $\chi(x^s(T^{r+s-1}), \eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1}))$, который мы обозначим через $y^{r+s-1}(T^{r+s-1})$. Покажем, что цепь y^{r+s-1} и осуществляет гомологию между произведениями z^{r+s}, построенными при помощи рассмотренных систем двойственных цепей. Для этого достаточно установить, что

$$(-1)^s\nabla y^{r+s-1}(T^{r+s})=\chi(\eta^s_{z^r}(T^{r+s}), \eta^r_{z^s}(T^{r+s}))-\chi(\xi^s_{z^r}(T^{r+s}), \eta^r_{z^s}(T^{r+s})). \quad (6.1)$$

Пусть T^{r+s-1} — грань симплекса T^{r+s}, ориентированная таким образом, что $[T^{r+s}:T^{r+s-1}]=+1$, а a — внутренняя точка симплекса T^{r+s}. Обозначим через ψ_ε подобное преобразование симплекса T^{r+s} с центром a и коэффициентом $1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$. Тогда, согласно лемме (д), мы имеем

$$\begin{aligned} y^{r+s-1}(T^{r+s-1}) &= \chi(x^s(T^{r+s-1}), \eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1}))= \\ &= (-1)^s\chi(\psi_\varepsilon(x^s(T^{r+s-1})), a\eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1})). \end{aligned}$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$(-1)^s y^{r+s-1}(T^{r+s-1})=\chi(\psi_\varepsilon(x^s(T^{r+s-1})), \sum a\eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1})), \quad (6.2)$$

где суммирование распространено на $(r+s-1)$-мерные грани симплекса T^{r+s}, ориентированные так, что их коэффициенты инцидентности с T^{r+s} равны $+1$. Цепь $(\sum a\eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1}))-\eta^r_{z^s}(T^{r+s})$ является Δ-циклом (см. условие 2 в начале этого пункта), имеющим с цепью $x^s(T^{r+s-1})$ в носителе симплекса T^{r+s} индекс пересечения нуль (ибо последняя цепь может быть произвольно малым сдвигом «вынута» из симплекса T^{r+s}, где расположен указанный Δ-цикл). Поэтому при достаточно малом ε индекс пересечения этого Δ-цикла с цепью $\psi_\varepsilon(x^s(T^{r+s-1}))$ также равен нулю, т. е.

$$\chi(\psi_\varepsilon(x^s(T^{r+s-1})), \sum a\eta^{r-1}_{z^s}(T^{r+s-1}))=\chi(\psi_\varepsilon(x^s(T^{r+s-1}), \eta^r_{z^s}(T^{r+s})). \quad (6.3)$$

Таким образом, при достаточно малом ε мы имеем, учитывая (6.2) и (6.3):

$$(-1)^s\nabla y^{r+s-1}(T^{r+s})=\chi(\psi_\varepsilon(\sum x^s(T^{r+s-1})), \eta^r_{z^s}(T^{r+s})). \quad (6.4)$$

Далее, так как цепь $\psi_\varepsilon(\sum x^s(T^{r+s-1})-\xi^s_{z^r}(T^{r+s})+\eta^s_{z^r}(T^{r+s}))$ является Δ-циклом, расположенным внутри симплекса T^{r+s} и, следовательно, гомологичным нулю внутри этого симплекса, а граница цепи $\eta^r_{z^s}(T^{r+s})$

расположена в границе симплекса T^{r+s}, то, в силу предложения (в) п. 5 : 2, мы имеем

$$\chi(\psi_\varepsilon(\sum x^s(T^{r+s-1})) - \xi^s_{z^r}(T^{r+s}) + \eta^s_{z^r}(T^{r+s}),\ \eta^r_{z^s}(T^{r+s})) = 0.$$

Из этой формулы и из (6.4) мы и получаем (6.1). Таким образом, независимость класса гомологий произведения от выбора систем двойственных цепей доказана.

(ж). *При замене ∇-циклов z^r и z^s гомологичными им ∇-циклами класс гомологий произведения не меняется.*

В самом деле, достаточно предположить, что один лишь из этих циклов меняется, скажем цикл z^r заменяется циклом $z^r + \nabla x^{r-1}$. Пусть $\{\eta^k_{z^r}(T^{r+k})\}$ и $\{\xi^k_{\nabla x^{r-1}}(T^{r+k})\}$ — системы цепей, двойственные соответственно циклам z^r и ∇x^{r-1}. Тогда система $\{\eta^k_{z^r}(T^{r+k}) + \xi^k_{\nabla x^{r-1}}(T^{r+k})\}$ двойственна циклу $z^r + \nabla x^{r-1}$. Поэтому, в силу аддитивности индекса пересечения, нам достаточно установить, что произведение циклов ∇x^{r-1} и z^s гомологично нулю. Точно так же ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда цепь x^{r-1} имеет отличное от нуля значение только на одном симплексе T^{r-1} комплекса K. Пусть a — внутренняя точка симплекса T^{r-1}, а $\{\eta^l_{z^s}(T^{l+s})\}$ — такая система, двойственная циклу z^s, что никакая цепь этой системы не содержит точки a. Пусть, далее, U — окрестность точки a в $\widetilde{K}$, также не пересекающаяся ни с одной из цепей этой системы. Будем строить систему цепей, двойственную циклу ∇x^{r-1} при помощи пирамид, как это указано в начале этого пункта, причем вершины пирамид будем каждый раз брать настолько близко к a, чтобы все получающиеся цепи лежали в U. Тогда мы построим систему $\{\xi^k_{\nabla x^{r-1}}(T^{r+k})\}$, лежащую в U и потому не пересекающуюся с системой $\{\eta^l_{z^s}(T^{l+s})\}$. Таким образом, при таком построении двойственных систем цепей произведение циклов ∇x^{r-1} и z^s просто окажется равным нулю. При любом же другом выборе двойственных систем цепей оно будет в силу (е) гомологично нулю.

(з). Проведенные рассмотрения дают повод следующему определению. Пусть Z^r и Z^s — классы гомологий комплекса K по областям коэффициентов G и H соответственно. Пусть, далее, z^r и z^s — циклы, взятые из этих классов гомологий, z^{r+s} — их произведение (построенное при помощи выбора некоторых двойственных систем цепей), а Z^{r+s} — его класс гомологий (по области коэффициентов G). В силу предложений (е) и (ж) класс гомологий Z^{r+s} не зависит от случайностей выбора циклов z^r и z^s в их классах гомологий и от случайностей выбора двойственных систем цепей, а однозначно определяется классами гомологий Z^r и Z^s. Мы будем выражать этот факт записью

$$Z^{r+s} = Z^r \smile Z^s.$$

Определенная таким образом однозначная операция $\smile$ называется *произведением Колмогорова—Александера.* Соотношения

$$\left.\begin{aligned} (Z_1^r + Z_2^r) \smile Z^s &= Z_1^r \smile Z^s + Z_2^r \smile Z^s, \\ Z^r \smile (Z_1^s + Z_2^s) &= Z^r \smile Z_1^s + Z^r \smile Z_2^s, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$Z^r \smile Z^s = (-1)^{rs} \cdot Z^s \smile Z^r \tag{6.6}$$

с очевидностью следуют: первые из аддитивности индекса пересечения, последнее — из предложения (д) п. 5 :3.

(и). *Пусть z^m и z^n — два ∇-цикла ориентированного многообразия M^{m+n} по областям коэффициентов G и H соответственно, Z^m и Z^n — их классы гомологий, а z^{m+n} — цикл класса гомологий $Z^m \cup Z^n$. Тогда индекс цикла z^{m+n}, т. е. $J(d(z^{m+n}))$ равен индексу пересечения $\chi(d(z^m),\ d(z^n))$.*

Действительно (суммирование ведется по всем когерентно ориентированным $(m+n)$-мерным симплексам многообразия M^{m+n}):

$$\begin{aligned} J(d(z^{m+n})) &= \sum J(\overset{0}{\eta}_{z^{m+n}}(T^{m+n})) = \sum z^{m+n}(T^{m+n}) = \\ &= \sum \chi(\overset{n}{\eta}_{z^m}(T^{m+n}),\ \overset{m}{\eta}_{z^n}(T^{m+n})) = \\ &= \chi(\sum \overset{n}{\eta}_{z^m}(T^{m+n}),\ \sum \overset{m}{\eta}_{z^n}(T^{m+n})) = \chi(d(z^m),\ d(z^n)). \end{aligned}$$

(к). Заметим, что все рассмотрения этого пункта, в частности определение двойственных систем цепей и определение произведения, непосредственно обобщаются на случай такого клеточного комплекса, у которого замыкание каждой клетки гомеоморфно замкнутому шару соответствующей размерности. Например, это имеет место для комплекса $K \times \bar{I}$, где K — симплициальный комплекс (или для произвольного комплекса многогранников; впрочем можно было бы определить произведение и для произвольного клеточного комплекса, что нам, однако, не понадобится).

(л). *Произведение Колмогорова—Александера топологически инвариантно.*

Более полно: *если K и L — два подразделения одного и того же полиэдра, а e^* — естественное изоморфное отображение группы $\nabla^r(K, A)$ на $\nabla^r(L, A)$, то для любых классов гомологий $Z^m \in \nabla^m(K, G)$, $Z^n \in \nabla^n(K, H)$ имеем*

$$(e^* Z^m) \smile (e^* Z^n) = e^*(Z^m \smile Z^n).$$

Соотношение это будет ниже доказано (см. п. 6 :4, (г)) для симплициальных разбиений K, L. Поэтому нам достаточно показать сейчас, что это соотношение верно для клеточного комплекса K, рассматриваемого в (к), и его симплициального подразделения L.

Итак, пусть K — клеточный комплекс, у которого замыкание каждой клетки гомеоморфно замкнутому шару соответствующей размерности, а L — симплициальное подразделение комплекса K. Обозначим через e клеточную аппроксимацию тождественного отображения комплекса L в K. Тогда e^* есть естественный изоморфизм групп $\nabla^r(K, A)$ и $\nabla^r(L, A)$. Если τ^r — произвольная ориентированная r-мерная клетка комплекса K, а $T_1^r, \ldots, T_p^r$ — все r-мерные симплексы комплекса L, являющиеся внутренними для τ^r и ориентированные когерентно с τ^r, то каждый симплекс T_i^r переводится отображением e в τ^r, а его граница — в $\dot{\tau}^r$. Поэтому определена степень $[eT_i^r : \tau^r]$. Нетрудно видеть, что имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{p} [eT_i^r : \tau^r] = 1. \tag{6.7}$$

В самом деле, пусть e_0 — тождественное отображение комплекса K в L. Тогда, полагая $y^r = \sum_{i=1}^{p} T_i^r$, мы имеем: $(e_0)_* y^r = y^r$, и так как y^r есть ориентирующая цепь клетки τ^r, то $[e_0\tau^r : T_i^r[= 1$. Учитывая (2.5), имеем

$$[(ee_0)\tau^r : \tau^r] = \sum_{i=1}^{p} [e_0\tau^r : T_i^r][eT_i^r : \tau^r] = \sum_{i=1}^{p} [eT_i^r : \tau^r],$$

а так как отображение ee_0 комплекса K в себя клеточно гомотопно тождественному, то $[(ee_0)\tau^r : \tau^r] = 1$, что и дает нам требуемое соотношение.

Пусть теперь z^m — цикл комплекса K, принадлежащий классу гомологий Z^m; тогда цикл e^*z^m комплекса L принадлежит классу гомологий e^*Z^m. Пусть $\{\eta^k_{e^*z^m}(T^{m+k})\}$ — двойственная система цепей для цикла e^*z^m, построенная в комплексе L. Если τ^{m+k} — произвольная ориентированная $(m+k)$-мерная клетка комплекса K, а $T_1^{m+k}, \ldots$ $\ldots, T_p^{m+k}$ — все ее когерентно ориентированные $(m+k)$-мерные симплексы (взятые в подразделении L), то положим

$$\eta^k_{z^m}(\tau^{m+k}) = \sum_{i=1}^{p} \eta^k_{e^*z^m}(T_i^{m+k}).$$

Покажем, что для так определенной системы цепей $\{\eta^k_{z^m}(\tau^{m+k})\}$ выполнены условия 1) — 3), сформулированные в начале этого пункта. Действительно, имеем

$$\Delta\eta^k_{z^m}(\tau^{m+k}) = \sum_i \Delta\eta^k_{e^*z^m}(T_i^{m+k}) =$$
$$= \sum_{i,j} [T_i^{m+k} : T_j^{m+k-1}] \cdot \eta^{k-1}_{e^*z^m}(T_j^{m+k-1}),$$

где суммирование по j распространено на все внутренние и граничные симплексы T_j^{m+k-1} клетки τ^{m+k}, ориентированные произвольным образом. Так как к каждому внутреннему симплексу T_j^{m+k-1} примыкают в τ^{m+k} два $(m+k)$-мерных симплекса, то соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются. Поэтому суммирование по j достаточно производить по всем граничным $(m+k-1)$-мерным симплексам клетки τ^{m+n}. Это дает нам цепь

$$\sum [\tau^{m+k} : \tau^{m+k-1}] \cdot \eta^{k-1}_{z^m} \quad (\tau^{m+k-1}),$$

так что условие 2) выполнено. Далее, если $T_1^m, \ldots, T_p^m$ — все когерентно ориентированные m-мерные симплексы m-мерной ориентированной клетки $\tau^m \in K$, то имеем в силу (6.7):

$$J(\eta^0_{z^m}(\tau^m)) = \sum_i J(\eta^0_{e^*z^m}(T_i^m)) = \sum_i e^*z^m(T_i^m) =$$
$$= \sum_i [eT_i^m : \tau^m]\, z^m(\tau^m) = z^m(\tau^m) \sum_i [eT_i^m : \tau^m] = z^m(\tau^m).$$

Таким образом, выполнено и условие 3).

Построим точно таким же образом двойственную систему $\{\eta^l_{z^n}(\tau^{n+l})\}$ для цикла $z^n \in Z^n$, причем предположим ее правильно расположенной с системой $\{\eta^k_{z^m}(\tau^{m+k})\}$; для этого достаточно взять системы $\{\eta^k_{e^*z^m}(T^{m+k})\}$ и $\{\eta^l_{e^*z^n}(T^{n+l})\}$, двойственные к e^*z^m и e^*z^n в L, находящиеся в правильном расположении. Обозначим через z^{m+n} произведение ∇-циклов z^m и z^n, построенное при помощи систем $\{\eta^k_{z^m}(\tau^{m+k})\}$ и $\{\eta^l_{z^n}(\tau^{n+l})\}$, а через $\overset{*}{z}{}^{m+n}$ — произведение ∇-циклов e^*z^m и e^*z^n, построенное при помощи систем $\{\eta^k_{e^*z^m}(T^{m+k})\}$ и $\{\eta^l_{e^*z^n}(T^{n+l})\}$.

Нам остается показать, что циклы e^*z^{m+n} и $\overset{*}{z}{}^{m+n}$ комплекса L гомологичны между собой. Если τ^{m+n} — произвольная ориентированная $m+n)$-мерная клетка комплекса K, а $T_1^{m+n}, \ldots, T_p^{m+n}$ — все ее когерентно ориентированные симплексы, то имеем, очевидно

$$z^{m+n}(\tau^{m+n}) = \sum_{i=1}^{p} \overset{*}{z}{}^{m+n}(T_i^{m+n}).$$

Далее, согласно (6.7), получаем

$$\sum_{i=1}^{p} e^*z^{m+n}(T_i^{m+n}) = \sum_{i=1}^{p} [eT_i^{m+n} : \tau^{m+n}]\, z^{m+n}(\tau^{m+n}) =$$
$$= z^{m+n}(\tau^{m+n}) \sum_{i=1}^{p} [eT_i^{m+n} : \tau^{m+n}] = z^{m+n}(\tau^{m+n}).$$

Таким образом,

$$\sum_i \overset{*}{z}{}^{m+n}(T_i^{n+n}) = \sum_i e^*z^{m+n}(T_i^{n+n}),$$

и, обозначая через ζ^{m+n} цикл $\overset{*}{z}{}^{m+n} - e^*z^{m+n}$, мы имеем

$$\sum_i \zeta^{m+n}(T_i^{m+n}) = 0.$$

Отсюда без труда следует (см. п. 2 : 1, (б)), что внутри клетки τ^{m+n}, подразделенной в соответствии с комплексом L, существует такая $(m+n-1)$-мерная цепь, ∇-граница которой, взятая в клетке τ^{m+n}, совпадает с частью ∇-цикла ζ^{m+n}, лежащей в этой клетке. Построив такие цепи для всех $(m+n)$-мерных клеток комплекса K и вычитая из ζ^{m+n} сумму их ∇-границ (взятых во всем комплексе L), мы получим такой ∇-цикл ζ_1^{m+n}, который имеет нулевые значения на всех $(m+n)$-мерных симплексах комплекса L, содержащихся в $(m+n)$-мерном остове K^{m+n} комплекса K.

Если теперь τ^{m+n+1} — произвольная $(m+n+1)$-мерная клетка комплекса K, подразделенная в соответствии с комплексом L, то часть $\zeta_1^{m+n}(\tau^{m+n+1})$ цикла ζ_1^{m+1}, лежащая в τ^{m+n+1}, есть такой ∇-цикл этой клетки, значения которого на ее граничных симплексах равны нулю. Мы имеем

$$\zeta_1^{m+n}(\tau^{m+n+1}) = \nabla(x^{m+n-1} + y^{m+n-1}),$$

где x^{m+n-1} — цепь клетки τ^{m+n+1}, лежащая в ее границе, а y^{m+n-1} — внутри, причем ∇-граница берется в τ^{m+n+1}. Отсюда следует, что x^{m+n-1} является ∇-циклом в $\dot{\tau}^{m+n+1}$, так что $x^{m+n-1} = \nabla x^{m+n-2}$, где ∇-граница берется в $\dot{\tau}^{m+n+1}$. Но тогда (∇-границы в τ^{m+n+1}):

$$\zeta_1^{m+n}(\tau^{m+n+1}) = \nabla(x^{m+n-1} + y^{m+n-1} - \nabla x^{m+n-2}),$$

причем цепь $\xi^{m+n-1} = x^{m+n-1} + y^{m+n-1} - \nabla x^{m+n-2}$ лежит *внутри* клетки τ^{m+n+1}. Строя такие цепи ξ^{m+n-1} для всех $(m+n+1)$-мерных клеток τ^{m+n+1} комплекса K и вычитая из ζ_1^{m+n} сумму их ∇-границ (взятых во всем L), мы получим такой ∇-цикл ζ_2^{m+n}, который имеет нулевые значения на всех $(m+n)$-мерных симплексах комплекса L, содержащихся в $(m+n+1)$-мерном остове K^{m+n+1} комплекса K.

Продолжая таким образом, мы найдем, что $\zeta^{m+n} \underset{\nabla}{\sim} 0$ в L, т. е. $\overset{*}{z}{}^{m+n} \underset{\nabla}{\sim} e^* z^{m+n}$.

6 : 2. Второе определение произведения. В этом пункте дается другое определение произведения Колмогорова — Александера, которое обычно (см., например, [4]) принимается за первоначальное.

(а). Пусть T^{r+s} — ориентированный $(r+s)$-мерный симплекс, T^r—его ориентированная грань. Пусть, далее, T' — барицентрическое подразделение комплекса $[T^{r+s}]$, а $T^{(s)}$ — симплекс комплекса T', сопряженный T^r. Нетрудно убедиться (индукцией по s), что несущие плоскости R^r и $R^{(s)}$ симплексов T^r и $T^{(s)}$ находятся в общем положении в несущей плоскости R^{r+s} симплекса T^{r+s}. Ориентируем плоскости R^r и R^{r+s} в соответствии с симплексами T^r и T^{r+s}, а $R^{(s)}$ и $T^{(s)}$ ориентируем так, чтобы было $\chi(R^r, R^{(s)}) = +1$. Пусть, наконец, G — абелева группа, а g — ее элемент. Тогда *симплекс* $T^{(s)}$ *входит в цепь* $\eta^s_{gT^r}(T^{r+s})$ *с коэффициентом* $(-1)^{rs} g$.

Действительно, симплекс $T^{(s)}$ имеет вид $[T_0, \ldots, T_s]$, где $T_0^s = T^r$ и в последовательности $T_0, \ldots, T_s$ каждый симплекс имеет на одну единицу бо́льшую размерность, чем предыдущий. Обозначим центр симплекса T_i, $i = 0, \ldots, s$ через a_i, а вектор $a_i - a_0$ — через f_i. Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_r$ — базис, задающий ориентацию симплекса T^r. Изменив, если нужно, ориентацию обоих симплексов T^{r+s}, $T^{(s)}$ (что не изменит значения цепи $\eta^s_{gT^r}(T^{r+s})$ на симплексе $T^{(s)}$), мы можем считать, что ориентация симплекса $T^{(s)}$ задается базисом $f_1, \ldots, f_s$ и, следовательно, ориентация симплекса T^{r+s} — базисом $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_s$ (ибо $\chi(R^r, R^{(s)}) = +1$). Ориентируем каждый симплекс T_i, $i = 0, \ldots, s$ в соответствии с базисом $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_i$. Тогда $[T_{i+1} : T_i] = (-1)^{r+i}$. Наконец, обозначим через T^i симплекс $[a_0, \ldots, a_i]$, и ориентируем его в соответствии с базисом $f_1, \ldots, f_i$. Нетрудно видеть, что симплекс T^i входит в цепь $\eta^i_{gT^r}(T_i)$ с коэффициентом $(-1)^{ri}g$, что и даст нам, при $i = s$, искомое соотношение. Действительно, пусть это показано для некоторого значения i (при $i = 0$ утверждаемый факт очевиден). Тогда в цепь

$$\eta^{i+1}_{gT^r}(T_{i+1}) = a_{i+1}([T_{i+1} : T_i]\,\eta^i_{gT^r}(T_i) + \ldots) = (-1)^{r+i} a_{i+1}\,\eta^i_{gT^r}(T_i) + \ldots$$

симплекс $a_{i+1}T^i$ входит с коэффициентом $(-1)^{r+i}(-1)^{ri}g$. Но симплекс $a_{i+1}T^i$ ориентирован в соответствии с базисом $f_{i+1}, f_1, \ldots, f_i$, а T^{i+1} — в соответствии с базисом $f_1, \ldots, f_i, f_{i+1}$. Поэтому T^{i+1} входит в $\eta^{i+1}_{gT^r}(T_{i+1})$ с коэффициентом $(-1)^{r(i+1)}g$.

(б). Пусть T^{r+s} — ориентированный $(r+s)$-мерный симплекс, T^r и T^s — его ориентированные грани, имеющие лишь одну общую вершину c. Пусть, далее, T' — некоторое m-подразделение комплекса $[T^{r+s}]$, а $T^{(s)}$ и $T^{(r)}$ — некоторые симплексы комплекса T', имеющие размерности соответственно s и r и сопряженные соответственно симплексам T^r и T^s. Обозначим, наконец, ориентированные несущие плоскости симплексов T^{r+s}, T^r, T^s через R^{r+s}, R^r, R^s и так ориентируем несущие плоскости $R^{(s)}$, $R^{(r)}$ симплексов $T^{(s)}$, $T^{(r)}$, чтобы было $\chi(R^r, R^{(s)}) = \chi(R^s, R^{(r)}) = +1$. При этих условиях *плоскости $R^{(s)}$ и $R^{(r)}$ находятся в общем положении в R^{r+s}, и мы имеем*

$$\chi(R^{(s)}, R^{(r)}) = \chi(R^r, R^s)$$

(все индексы пересечения берутся в пространстве R^{r+s}).

То, что плоскости $R^{(s)}$ и $R^{(r)}$ находятся в общем положении, вытекает из двух следующих соображений: 1) Эти плоскости пересекаются: они содержат центр симплекса T^{r+s} при рассматриваемом m-подразделении. 2) Линейная оболочка этих плоскостей совпадает с R^{r+s}. Действительно, плоскость $R^{(s)}$ содержит все вершины симплекса T^s, кроме c, а плоскость $R^{(r)}$ — все вершины симплекса T^r, кроме c.

Таким образом, линейная оболочка плоскостей $R^{(s)}$ и $R^{(r)}$ содержит всю грань симплекса T^{r+s}, противолежащую вершине c, и внутреннюю точку этого симплекса, т. е. весь симплекс T^{r+s}.

При вычислении индекса пересечения $\chi(R^{(s)}, R^{(r)})$ можно без ограничения общности предполагать, что $\chi(R^r, R^s) = +1$. Будем неограниченно увеличивать массу, соответствующую точке c. Вершины комплекса T' будут смещаться, но плоскости $R^{(s)}$ и $R^{(r)}$ будут все время в общем положении, так что индекс их пересечения не будет меняться. В пределе плоскость $R^{(s)}$ совпадет с R^s вместе с ориентацией, ибо $\chi(R^r, R^{(s)}) = \chi(R^r, R^s) = +1$, а $R^{(r)}$ — с R^r, причем ориентации этих плоскостей будут отличаться знаком $(-1)^{rs}$, ибо $\chi(R^s, R^{(r)}) = \chi(R^r, R^s) = (-1)^{rs}\chi(R^s, R^r)$. Таким образом,

$$\chi(R^{(s)}, R^{(r)}) = (-1)^{rs}\chi(R^s, R^r) = \chi(R^r, R^s).$$

Теорема. *Пусть K — симплициальный комплекс, z^m и z^n — его ∇-циклы по областям коэффициентов G и H соответственно, а Z^m и Z^n — их классы гомологий. Введем в комплексе K некоторый порядок вершин α, т. е. в некотором порядке занумеруем все вершины комплекса K в простую последовательность. Пусть T^{m+n} — произвольный $(m+n)$-мерный ориентированный симплекс комплекса K. Обозначим вершины симплекса T^{m+n}, расположенные в порядке α, через $a_1, \ldots, a_m$, c, $b_1, \ldots, b_n$ и ориентируем симплексы $T^m = [a_1, \ldots a_m, c]$ и $T^n = [c, b_1, \ldots, b_n]$ таким образом, чтобы было* $\chi(R^m, R^n) = +1$, где R^m и R^n — несущие плоскости соответственно симплексов T^m и T^n, а индекс пересечения рассматривается в несущей плоскости R^{m+n} симплекса T^{m+n}. Наконец, положим $z^{m+n}(T^{m+n}) = gh$, где $g = z^m(T^m)$, $h = z^n(T^n)$. Оказывается, что определенная таким образом $(m+n)$-мерная цепь z^{m+n} является ∇-циклом, принадлежащим классу гомологий $Z^m \smile Z^n$.*

Из этой формулировки, в частности, следует, что класс гомологий построенного цикла z^{m+n} не зависит от выбора порядка α вершин комплекса K.

Для доказательства рассмотрим m-подразделение $K'_{(m)}$ комплекса K, построенное при помощи возрастающего распределения масс, т. е. такого распределения масс, при котором с возрастанием номера вершины (в порядке α) соответствующая масса также увеличивается. Пусть, кроме того, K' — собственное барицентрическое подразделение комплекса K. Обозначим через $T_1^{(n)}$, $T_2^{(n)}, \ldots$ все n-мерные симплексы комплекса $K'_{(m)}$, расположенные в симплексе T^{m+n} и сопряженные его

* Если симплекс T^{m+n} ориентирован как $+(a_1, \ldots, a_m, c, b_1, \ldots, b_n)$ (см. сноску на стр. 14), то симплексы T^m и T^n можно ориентировать как $+(a_1, \ldots, a_m, c)$ и $+(c, b_1, \ldots, b_n)$.

m-мерным граням, а через $T_1^{(m)}, T_2^{(m)}, \ldots$ — все m-мерные симплексы комплекса K', расположенные в T^{m+n} и сопряженные его n-мерным граням. Тогда симплексы $T_i^{(m)}$ и $T_j^{(n)}$ находятся в общем положении для всех $i, j = 1, 2, \ldots$ (см. доказательство предложения (г) п. 5 : 3).

Найдем условия, при которых симплексы $T_i^{(m)}$ и $T_j^{(n)}$ могут иметь общую (внутреннюю) точку. Пусть $T_i^{(m)} = [T_0, \ldots, T_m]$; обозначим через $x_0, \ldots, x_n$ вершины симплекса T_0, а через x_{n+l} — вершину симплекса T_l, не принадлежащую симплексу T_{l-1}. Тогда, обозначая через λ^l барицентрическую координату, соответствующую вершине x_l, мы найдем, что координаты внутренних точек симплекса $T_i^{(m)}$ удовлетворяют условию [см. (5.4)]

$$\lambda^0 = \lambda^1 = \ldots = \lambda^n > \lambda^{n+1} > \ldots > \lambda^{m+n}. \tag{6.8}$$

Точно так же, положив $T_j^{(n)} = [T'_0, \ldots, T'_n]$ (заметим, что $T_m = T'_n = T^{m+n}$) и обозначив через $y_0, \ldots, y_m$ вершины симплекса T'_0, через y_{m+k} — вершину симплекса T'_k, не принадлежащую симплексу T'_{k-1}, через m_k — массу, а через μ^k — барицентрическую координату, соответствующие вершине y_k, мы найдем, что координаты внутренних точек симплекса $T_j^{(n)}$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\mu^0}{m_0} = \ldots = \frac{\mu^m}{m_m} > \frac{\mu^{m+1}}{m_{m+1}} > \ldots > \frac{\mu^{m+n}}{m_{m+n}}. \tag{6.9}$$

Для того чтобы симплексы $T_i^{(m)}$ и $T_j^{(n)}$ имели общую внутреннюю точку, необходимо и достаточно, чтобы числа $\lambda^0, \ldots, \lambda^{m+n}$ отличались от чисел $\mu^0, \ldots, \mu^{m+n}$ лишь порядком. Но из (6.9) следует, что все $m+1$ чисел $\mu^0, \ldots, \mu^m$ различны между собой, а из (6.8) — что среди чисел $\lambda^0, \ldots, \lambda^{m+n}$ имеется $n+1$ одинаковых. Поэтому мы должны положить: $\mu^{m+1} = \ldots = \mu^{m+n}$ и равно одному из чисел $\mu^0, \ldots, \mu^m$, скажем, $\mu^m = \mu^{m+1} = \ldots = \mu^{m+n}$ (числа $\mu^0, \ldots, \mu^m$ равноправны, ибо можно изменить нумерацию вершин симплекса T'_0). Изменив, если нужно, нумерацию вершин симплексов T_0 и T'_0, мы можем считать, что $\lambda^k = \mu^{(m+n)-k}$, т. е. что $x_k = y_{(m+n)-k}$. Теперь из соотношений (6.8) и (6.9) и равенств $\lambda^k = \mu^{(m+n)-k}$ мы без труда выводим, что

$$m_0 < m_1 < \ldots < m_m < m_{m+1} < \ldots < m_{m+n}.$$

Отсюда, наконец, следует, что $y_k = a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots m-1$, $y_m = c$, $y_{m+i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. что, в частности, $T'_0 = T^m$, $T_0 = T^n$. Итак, индекс пересечения $\chi(T_j^{(n)}, T_i^{(m)})$ отличен от нуля только для одной пары симплексов $T_j^{(n)}, T_i^{(m)}$, сопряженных соответственно симплексам T^m, T^n. Обозначим эти пересекающиеся симплексы просто через $T^{(n)}, T^{(m)}$.

Построим теперь систему $\{\eta^h_{z^m}(T^{m+h})\}$, барицентрически двойственную циклу z^m, в комплексе $K'_{(m)}$, а систему $\{\eta^l_{z^n}(T^{n+l})\}$, барицентрически двойственную циклу z^n, — в комплексе K' и будем вычислять произведение $\overset{*}{z}{}^{m+n}$ циклов z^m и z^n именно при помощи этих двойственных систем. Ориентируем, далее, симплексы $T^{(n)}$ и $T^{(m)}$ так, чтобы было

$$\chi(R^m,\ R^{(n)}) = \chi(R^n,\ R^{(m)}) = +1,$$

где R^m, R^n, $R^{(n)}$ и $R^{(m)}$ — несущие плоскости симплексов T^m, T^n, $T^{(n)}$ и $T^{(m)}$. Согласно (a), симплекс $T^{(n)}$ входит в цепь $\eta^n_{z^m}(T^{m+n})$ с коэффициентом $(-1)^{mn}g$, а симплекс $T^{(m)}$ входит в цепь $\eta^m_{z^n}(T^{m+n})$ с коэффициентом $(-1)^{nm}h$. Так как $T^{(m)}$ и $T^{(n)}$ — единственная имеющая непустое пересечение пара из всех пар вида $T^{(n)}_j$, $T^{(m)}_i$, то мы имеем

$$\begin{aligned}\overset{*}{z}{}^{m+n}(T^{m+n}) &= \chi(\eta^n_{z^m}(T^{m+n}),\ \eta^m_{z^n}(T^{m+n})) = \\ &= \chi((-1)^{mn}gT^{(n)},\ (-1)^{mn}hT^{(m)}) = gh\chi(T^{(n)},\ T^{(m)}).\end{aligned}$$

Но, согласно (б), мы имеем

$$\chi(T^{(n)},\ T^{(m)}) = \chi(R^m,\ R^n) = +1.$$

Таким образом, $\overset{*}{z}{}^{m+n}(T^{m+n}) = gh = z^{m+n}(T^{m+n})$, т. е. цепь z^{m+n} совпадает с произведением $\overset{*}{z}{}^{m+n}$ циклов z^m и z^n, построенным при помощи рассмотренных выше двойственных систем.

6:3. Стинродовский квадрат. Частный случай описываемой в этом пункте операции был построен Л. С. Понтрягиным [13]. Полное обобщение понтрягинской операции было дано американским математиком Стинродом [5].

(а). Пусть K — симплициальный комплекс. Если T_1 и T_2 — два произвольных симплекса комплекса K, то мы будем говорить, что эти симплексы *сравнимы*, если в K существует симплекс T, имеющий T_1 и T_2 своими гранями. Симплекс T наименьшей размерности, обладающий этим свойством, мы будем называть *оболочкой* сравнимых симплексов T_1 и T_2; обозначать оболочку мы будем символом $(T_1,\ T_2)$. Каждую общую вершину симплексов T_1 и T_2 будем называть *двойной* вершиной оболочки $(T_1,\ T_2)$, остальные вершины — одиночными.

Пусть теперь в комплексе K введен некоторый порядок вершин α. Пару симплексов T_1, T_2 комплекса K мы будем называть *i-регулярной* в порядке α, если выполнены следующие условия:

(*) *Симплексы T_1 и T_2 сравнимы и имеют ровно $i+1$ общих вершин.*

(**) *Если a — одиночная вершина симплекса $(T_1,\ T_2)$ и p — число двойных вершин этого симплекса, предшествующих* (в порядке α)

вершине a, *то при четном* p *вершина* a *принадлежит симплексу* T_1, *а при нечетном — симплексу* T_2.

(б). Пусть теперь определено для пары одинаковых групп G и G произведение в группе C, обладающее свойством

$$2g_1g_2 = 0. \tag{6.10}$$

Мы будем говорить в этом случае, что определен *квадрат группы* G *в группе* C. Пусть, далее,

$$x^r = \sum_k g_k T_k^r, \quad y^s = \sum_l g_l' T_l^s, \quad g_k \in G, \quad g_l' \in G$$

— две цепи комплекса K размерностей соответственно r и s. Положим

$$x^r \smile_i y^s = \sum_{k,\, l} (g_k g_l') (T_k^r,\ T_l^s),$$

где суммирование распространено на все такие пары k, l, для которых пары симплексов T_k^r, T_l^s являются i-регулярными. При этом симплексы $(T_k^r,\ T_l^s)$ рассматриваются неориентированными. Согласно условию (*), каждый симплекс $(T_k^r,\ T_l^s)$ имеет размерность $r+s-i$, т. е. $x^r \smile_i y^s$ есть $(r+s-i)$-мерная цепь. Ясно, что операция $\smile_i$ обладает следующими свойствами:

$$2(x^r \smile_i y^s) = 0, \tag{6.11}$$

$$(x_1^r + x_2^r) \smile_i y^s = x_1^r \smile_i y^s + x_2^r \smile_i y^s;$$

$$x^r \smile_i (y_1^s + y_2^s) = x^r \smile_i y_1^s + x^r \smile_i y_2^s. \tag{6.12}$$

(в). *Пусть* z^m *и* z^n — ∇*-циклы комплекса* K *по области коэффициентов* G, *а* Z^m *и* Z^n — *классы гомологий этих циклов. Тогда цепь* $z^m \smile_0 z^n$ *является* ∇*-циклом, принадлежащим классу гомологий* $Z^m \smile Z^n$.

Сохраним обозначения теоремы п. 6:2 и найдем коэффициент цепи $z^m \smile_0 z^n$ на симплексе T^{m+n}. Для того чтобы грани T_1^m и T_1^n симплекса T^{m+n} были 0-регулярны, необходимо и достаточно, чтобы они имели единственную общую вершину и чтобы все вершины симплекса T^{m+n}, предшествующие в порядке α этой общей вершине, принадлежали грани T_1^m, а все последующие — грани T_1^n. Иначе говоря, должно быть $T_1^m = T^m$, $T_1^n = T^n$, и потому значение $z^m \smile_0 z^n$ на симплексе T^{m+n} равно gh (ориентация симплексов T^m и T^n несущественна в силу (6.10)). Таким образом, $z^m \smile_0 z^n = z^{m+n} \in Z^m \smile Z^n$.

(г). Докажем следующую формулу Понтрягина — Стинрода для вычисления ∇-границы цепи $x^r \smile_i y^s$:

$$\nabla (x^r \smile_i y^s) = x^r \smile_{i-1} y^s + y^s \smile_{i-1} x^r + (\nabla x^r) \smile_i y^s + x^r \smile_i (\nabla y^s). \tag{6.13}$$

В силу формулы (6.12) и аддитивности оператора ∇, нам достаточно доказать соотношение (6.13) только для цепей, принимающих отличное от нуля значение только на одном симплексе комплекса K, т. е. для цепей вида $x^r = gT^r$, $x^s = g'T^s$, где g и g' — элементы группы G, причем, в силу (6.10), мы можем рассматривать симплексы неориентированными. Рассмотрим ряд частных случаев.

1) *Число общих вершин симплексов T^r и T^s меньше, чем i.* В этом случае левая часть формулы (6.13) и два первых члена правой части равны нулю в силу (*). Далее, каждый симплекс цепи $\nabla(gT^r)$ может иметь с симплексом T^s не более i общих вершин, так что третий член правой части равен нулю; то же верно для четвертого члена.

2) *Число общих вершин симплексов T^r и T^s равно i.* В этом случае левая часть (6.13) обращается в нуль. Рассмотрим правую часть. Ясно, что достаточно ограничиться случаем, когда T^r и T^s сравнимы. Два последних члена формулы (6.13) состоят из слагаемых вида $g(aT^r) \smile_i g'T^s$ и $gT^r \smile_i g'(bT^s)$, где aT^r и bT^s — симплексы, входящие соответственно в $\nabla(gT^r)$ и $\nabla(g'T^s)$. Ясно, что a и b должны быть одиночными вершинами симплекса (T^r, T^s), так как иначе не будет выполнено условие (*).

Предположим сначала, что у симплекса (T^r, T^s) имеются и одиночные вершины, для которых условие (**) выполнено, и одиночные вершины, для которых (**) не выполнено. Тогда пары T^r, T^s и T^s, T^r не являются $(i-1)$-регулярными, и в формуле (6.13) остаются только два последних члена. Пусть u — последняя одиночная вершина, для которой (**) выполнено. Тогда, если взять a или b предшествующими вершине u, то соответствующее слагаемое $g(aT^r) \smile_i g'T^s$ или $gT^r \smile_i g'(bT^s)$ будет равно нулю, ибо теперь перед u появилась еще одна двойная вершина и условие (**) для вершины u перестало быть выполненным. Таким образом, каждую из вершин a и b можно считать совпадающей с u или последующей за ней (в порядке α). Так как теперь для всех одиночных вершин, находящихся перед u, число предшествующих двойных вершин не изменилось, то для них условие (**) также должно быть выполнено — иначе соответствующие слагаемые $g(aT^r) \smile_i g'T^s$ или $gT^r \smile_i g'(bT^s)$ равны нулю.

Итак, остается рассмотреть случай, когда для всех одиночных вершин, находящихся перед u, условие (**) выполнено. Для всех же одиночных вершин, следующих за u (таковой является в этом случае любая одиночная вершина, для которой (**) не выполнено), оно не выполнено, ибо u была последней, удовлетворяющей (**). Следующую за u одиночную вершину обозначим через v. Ясно, что если a или b является вершиной, последующей за v, то соответствующее слагаемое равно нулю, ибо условие (**) для v остается невыполненным. Итак, a и b могут совпадать только с u или v. Это дает два ненулевых слагаемых, первым из которых является $g(uT^r) \smile_i g'T^s$ или

$gT^r \smile_i g'(uT^s)$ (в зависимости от того, принадлежит ли u симплексу T^s или T^r), а вторым — $g(vT^r)\smile_i g'T^s$ или $gT^r \smile_i g'(vT^s)$. Действительно, в этих случаях i-регулярность имеется, так как перед каждой одиночной вершиной, для которой (**) не было выполнено, появилась еще одна двойная вершина. Каждое из этих двух слагаемых равно симплексу (T^r, T^s), взятому с коэффициентом gg', и, в силу (6.10), они взаимно уничтожаются.

Пусть теперь в симплексе (T^r, T^s) имеются одиночные вершины, причем для каждой из них условие (**) выполнено. Тогда u будет последней одиночной вершиной симплекса (T^r, T^s), так что из двух рассмотренных выше нулевых слагаемых второе исчезает. Взамен этого, первый член правой части (6.13) даст симплекс (T^r, T^s) с коэффициентом gg' (ибо пара T^r, T^s является $(i-1)$-регулярной, а T^s, T^r — не является), и формула (6.13) остается справедливой.

В случае, когда имеются одиночные вершины и для каждой из них условие (**) не выполнено, v есть первая одиночная вершина симплекса (T^r, T^s). В этом случае исчезает первое из рассмотренных выше слагаемых, но, взамен этого, появляется ненулевой второй член $g'T^s\smile_{i-1}gT^r = gg'\ (T^r,\ T^s)$, ибо теперь пара T^s, T^r становится $(i-1)$-регулярной.

Наконец, если симплекс (T^r, T^s) совсем не имеет одиночных вершин, т. е. $T^r = T^s$, то два последних члена в (6.13) исчезают, а первый и второй члены правой части взаимно уничтожаются в силу (6.10).

3) *Число общих вершин симплексов T^r и T^s равно $i+1$.* Два первых члена в правой части (6.13) обращаются в нуль. При этом достаточно рассмотреть случай, когда пара T^r, T^s i-регулярна, так как иначе все члены обращаются в нуль. Два последних члена снова состоят из слагаемых вида $g(aT^r)\smile_i g'T^s$ и $gT^r\smile_i g'(aT^s)$, но теперь уже вершину a следует брать не принадлежащей симплексу (T^r, T^s), так как иначе условие (*) не будет выполнено. Для каждого симплекса $a(T^r, T^s)$, входящего в $\nabla(gT^r\smile_i g'T^s)$, найдется ровно один симплекс $g(aT^r)\smile_i g'T^s$ или $gT^r\smile_i g'(aT^s)$ в зависимости от того, будет ли в порядке α перед a четное или нечетное число двойных вершин симплекса (T^r, T^s). Таким образом, и в случае 3) формула (6.13) справедлива.

4) *Число общих вершин симплексов T^r и T^s больше $i+1$.* В этом случае все члены формулы (6.13) обращаются в нуль из-за невыполнения условия (*).

Итак, формула (6.13) полностью доказана.

(д). *Если z^r есть r-мерный ∇-цикл комплекса K по области коэффициентов G, то $z^r\smile_i z^r$ есть ∇-цикл комплекса K по области коэффициентов C.*

Действительно, в силу (6.13) и (6.10), имеем

$$\nabla (z^r \smile_i z^r) = z^r \smile_{i-1} z^r + z^r \smile_{i-1} z^r = 0.$$

(е). *Для любых r-мерных циклов z_1^r, z_2^r комплекса K по области коэффициентов G имеем*

$$(z_1^r + z_2^r) \smile_i (z_1^r + z_2^r) \underset{\nabla}{\sim} z_1^r \smile_i z_1^r + z_2^r \smile_i z_2^r.$$

Действительно,

$$(z_1^r + z_2^r) \smile_i (z_1^r + z_2^r) = (z_1^r \smile_i z_1^r + z_2^r \smile_i z_2^r) + (z_1^r \smile_i z_2^r + z_2^r \smile_i z_1^r).$$

Остается показать, что цикл $z_1^r \smile_i z_2^r + z_2^r \smile_i z_1^r$ гомологичен нулю. В силу (6.13) имеем

$$\nabla (z_1^r \smile_{i-1} z_2^r) = z_1^r \smile_i z_2^r + z_2^r \smile_i z_1^r.$$

(ж). *Если $z^r \underset{\nabla}{\sim} 0$, то также $z^r \smile_i z^r \underset{\nabla}{\sim} 0$.*

В самом деле, пусть x^{r-1} — такая $(r-1)$-мерная цепь, что $\nabla x^{r-1} = z^r$. Тогда, применяя (6.13) и (6.10), имеем

$$\begin{aligned}
&\nabla (\nabla x^{r-1} \smile_i x^{r-1} + x^{r-1} \smile_{i-1} x^{r-1}) = \\
&= \nabla x^{r-1} \smile_{i-1} x^{r-1} + x^{r-1} \smile_{i-1} \nabla x^{r-1} + \nabla x^{r-1} \smile_i \nabla x^{r-1} + x^{r-1} \smile_{i-2} x^{r-1} + \\
&+ x^{r-1} \smile_{i-2} x^{r-1} + \nabla x^{r-1} \smile_{i-1} x^{r-1} + x^{r-1} \smile_{i-1} \nabla x^{r-1} = \\
&= \nabla x^{r-1} \smile_i \nabla x^{r-1} = z^r \smile_i z^r.
\end{aligned}$$

(з). Предложения (д), (е), (ж) показывают, что после перехода к классам гомологий операция $\smile_i$ определяет гомоморфизм группы $\nabla^r(K, G)$ в $\nabla^{2r-i}(K, C)$. Действительно, пусть z^r — цикл класса гомологий $Z^r \in \nabla^r(K, G)$. Предположим еще, что в комплексе K введен некоторый порядок вершин. Тогда из (е) и (ж) следует, что класс гомологий цикла $z^r \smile_i z^r$ не зависит от выбора цикла z^r в его классе гомологий. Обозначим класс гомологий цикла $z^r \smile_i z^r$ через $Sq^{r-i} Z^r$ (число $r - i$ показывает, на сколько единиц увеличивается размерность элемента Z^r). Операция Sq^m однозначна и является, в силу (е) и (ж), гомоморфизмом группы $\nabla^r(K, G)$ в $\nabla^{r+m}(K, C)$. Ниже мы покажем, что операция Sq^m не только не зависит от введенного в K порядка вершин, но и топологически инвариантна.

6:4. Свойства операций $\smile$ и Sq^m. Пусть K и L — симплициальные комплексы, в которых введены порядки вершин, и f — симплициальное отображение комплекса K в L. Мы скажем, что f *сохраняет порядок*, если из того, что вершина a предшествует в K вершине b, следует, что либо $f(a) = f(b)$, либо $f(a)$ предшествует вершине $f(b)$. Если f — произвольное симплициальное отображение комплекса K в L, то, очевидно, можно ввести в K и L такие порядки вершин, что f будет отображением, сохраняющим порядок. Достаточно, введя в L

произвольный порядок вершин, расположить вершины комплекса K в такую последовательность, в которой сначала идут вершины, переходящие при отображении f в первую вершину комплекса L (если такие есть в K), затем — вершины, переходящие во вторую вершину комплекса L и т. д.

(а). *Пусть K и L — симплициальные комплексы, в которых введены некоторые порядки вершин, и f — симплициальное отображение комплекса K в L, сохраняющее порядок. Тогда для любого цикла z^r комплекса L по области коэффициентов G имеем*

$$f^*(z^r \smile_i z^r) = (f^*z^r) \smile_i (f^*z^r).$$

В самом деле, если $(2r-i)$-мерный симплекс T комплекса K не вырождается при отображении f, то значения обеих частей этого равенства на симплексе T, очевидно, совпадают. Если же симплекс T вырождается при отображении f, то пусть a и b — две его вершины, переходящие в одну и ту же вершину комплекса L; мы можем считать их *соседними* в порядке вершин комплекса K (ибо все вершины, находящиеся между a и b, должны отображаться в ту же вершину, что и a, b). Если T_1^r и T_2^r — грани симплекса T, образующие i-регулярную пару, то либо T_1, либо T_2 содержит обе вершины a и b (если ни одна из них не является двойной вершиной оболочки $T=(T_1^r, T_2^r)$, то обе они в силу условия (**) п. 6:3 принадлежат одному и тому же симплексу T_1^r или T_2^r, ибо между ними нет вершин симплекса T) и, следовательно, вырождается при отображении f. Отсюда ясно, что обе части равенства обращаются в нуль на вырождающемся симплексе T.

(б). *Гомоморфизм Sq^m группы $\nabla^r(K, G)$ в $\nabla^{r+m}(K, C)$ не зависит от выбора порядка вершин комплекса K.*

Прежде всего ясно, что один порядок вершин можно перевести в любой другой, последовательно применяя транспозиции двух соседних вершин. Поэтому достаточно рассмотреть порядки α^{ab} и α^{ba}, отличающиеся одной транспозицией двух соседних (в смысле этих порядков) вершин a и b комплекса K. Ясно, что если при этом a и b не являются концами одного и того же ребра (одномерного симплекса) комплекса K, то операции $\overset{ab}{\smile_i}$ и $\overset{ba}{\smile_i}$, построенные при помощи этих порядков, совпадают (ибо каждый симплекс комплекса K содержит в этом случае не более одной из этих вершин). Если же a и b являются концами одного и того же ребра комплекса K, то обозначим через c середину этого ребра, а через K_1 — такое подразделение комплекса K, которое получится, если каждый симплекс $[a, b, x_1, \ldots, x_k]$, содержащий обе вершины a и b, разбить на два симплекса $[a, c, x_1, \ldots, x_k]$ и $[c, b, x_1, \ldots, x_k]$. В комплексе K_1 мы рассмотрим порядки вершин α_1^{ab} и α_1^{ba}, получающиеся из α^{ab} и α^{ba}, если вершину c считать непосредственно предшествующей обеим вершинам a и b. Тогда операции

$\smile_i$, построенные в K_1 при помощи этих порядков, совпадают, ибо порядки α_1^{ab} и α_1^{ba} отличаются одной транспозицией соседних (в смысле этих порядков) вершин a и b, не являющихся концами одного ребра в K_1. Эту операцию в K_1 мы обозначим через $\smile_i$ (без индекса наверху). Обозначим, далее, через f_a и f_b симплициальные отображения комплекса K_1 в K, переводящие c соответственно в a и b и оставляющие остальные вершины на месте. Тогда для порядков α^{ab} и α_1^{ab} отображение f_a сохраняет порядок, а для порядков α^{ba} и α_1^{ba} сохраняет порядок отображение f_b. Поэтому для любого цикла z^r комплекса K мы имеем согласно (а):

$$f_a^*(z^r \smile_i^{ab} z^r) = (f_a^* z^r) \smile_i (f_a^* z^r), \quad f_b^*(z^r \smile_i^{ba} z^r) = (f_b^* z^r) \smile_i (f_b^* z^r).$$

Так как отображения f_a и f_b гомотопны (они являются симплициальными аппроксимациями тождественного отображения комплекса K_1 в K), то $f_a^* z^r \underset{\nabla}{\sim} f_b^* z^r$ и потому (см. предложения (е) и (ж) п. 6:3)

$$(f_a^* z^r) \smile_i (f_a^* z^r) \underset{\nabla}{\sim} (f_b^* z^r) \smile_i (f_b^* z^r)$$

или

$$f_a^*(z^r \smile_i^{ab} z^r) \underset{\nabla}{\sim} f_b^*(z^r \smile_i^{ba} z^r).$$

Отсюда, в силу гомотопности отображений f_a и f_b, следует, что

$$z^r \smile_i^{ab} z^r \underset{\nabla}{\sim} z^r \smile_i^{ba} z^r.$$

Итак, гомоморфизм Sq^{r-i} группы $\nabla^r(K, G)$ в $\nabla^{2r-i}(K, C)$ не зависит от выбора порядка вершин комплекса K.

(в). Пусть f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L. Тогда для любых классов гомологий $Z^r \in \nabla^r(L, G)$, $Z^m \in \nabla^m(L, G)$, $Z^n \in \nabla^n(L, H)$ имеем

$$f^* Sq^m Z^r = Sq^m f^* Z^r, \quad f^*(Z^m \smile Z^n) = (f^* Z^m) \smile (f^* Z^n).$$

Первое из этих соотношений следует из (а) и (б), второе доказывается аналогично на основании второго определения произведения Колмогорова—Александера (см. п. 6:2).

(г). *Операции* $\smile$ *и* Sq^m *топологически инварианты.*

Более полно: *если K и L — две триангуляции одного и того же полиэдра, а e^* — естественное отображение групп ∇-гомологий комплекса K на группы ∇-гомологий комплекса L, то имеем*

$$Sq^m e^* Z^r = e^* Sq^m Z^r$$

для любого элемента $Z^r \in \nabla^r(K, G)$ *и*

$$e^*(Z^m \smile Z^n) = (e^* Z^m) \smile (e^* Z^n)$$

для любых элементов $Z^m \in \nabla^m(K, G)$, $Z^n \in \nabla^n(K, H)$.

Таким образом, операции $\smile$ *и* Sq^m *однозначно определены для групп* ∇*-гомологий любого полиэдра* K [см. п. 3 : 2, (г)], *т. е. не зависят от выбора симплициального разбиения этого полиэдра. Соотношения предложения* (в) *справедливы для любого непрерывного отображеия* f *полиэдра* $\tilde{K}$ *в* $\tilde{L}$.

Для доказательства топологической инвариантности операций $\smile$ и Sq^m выберем настолько мелкое симплициальное разбиение P полиэдра $\tilde{K}$, для которого существуют симплициальные аппроксимации e_1 и e_2 тождественного отображения комплекса P в комплексы K и L соответственно. Тогда имеем, согласно определению естественных изоморфизмов [п. 3 : 2, (в)] $e^* = (\overset{*}{e}_2)^{-1}\overset{*}{e}_1$, и так как операции $\smile$ и Sq^m перестановочны с гомоморфизмами $\overset{*}{e}_1$ и $\overset{*}{e}_2$ [см. (в)], то они перестановочны и с гомоморфизмом $e^* = (\overset{*}{e}_2)^{-1}\overset{*}{e}_1$.

Вторая часть утверждения (г) очевидна.

(д). *Пусть* K — *произвольный комплекс,* EK — *надстройка над ним и* a — *изоморфизм группы* $\nabla^r(K, G)$ *на* $\nabla^{r+1}(EK, G)$, *построенный в предложении* (ж) п. 4 : 2. *Тогда для любых классов гомологий* Z^r, Z^m, Z^n *полиэдра* K (по соответствующим областям коэффициентов) *имеем*

$$Sq^m aZ^r = aSq^m Z^r, \tag{6.14}$$

$$(aZ^m) \smile (aZ^n) = 0. \tag{6.15}$$

Для доказательства будем считать K подкомплексом комплекса EK. Введем в K произвольный порядок вершин и дополним его до порядка вершин в EK, считая вершины a и b надстройки последними. Из условий (*), (**) п. 6 : 3 следует, что пара симплексов T_1^r, T_2^r комплекса K тогда и только тогда i-регулярна, когда $(i+1)$-регулярна пара aT_1^r, aT_2^r, причем $a(T_1^r, T_2^r) = (aT_1^r, aT_2^r)$. Таким образом, для любого цикла z^r комплекса K имеем (при указанных порядках вершин в K и EK):

$$a(z^r \smile z^r) = (az^r) \smile_{i+1} (az\ ),$$

откуда следует соотношение (6.14).

Для доказательства соотношения (6.15) достаточно применить к циклам z^m и z^n второе определение произведения Колмогорова—Александера (теорема п. 6 : 2). Действительно, произведение z^{m+n} циклов z^m и z^n, вычисленное на основании второго определения, равно нулю, ибо циклы az^m и az^n имеют отличные от нуля значения только на симплексах вида aT^m и aT^n, а любые два симплекса этого вида имеют общую вершину a, являющуюся последней вершиной симплексов aT^m и aT^n.

6 : 5. Произведение $\boldsymbol{P \times S^1}$. Пусть I и J — отрезки (криволинейные), имеющие общие концы p и q и не имеющие других общих точек.

Тело клеточного комплекса $S^1 = \{I, J, p, q\}$ гомеоморфно окружности. Если P — произвольный клеточный комплекс, то множества вида $\tau \times I$, $\tau \times J$, $\tau \times p$, $\tau \times q$, где $\tau \in P$, образуют клеточное разбиение произведения $\tilde{P} \times \tilde{S}^1$. Полученный клеточный комплекс мы будем обозначать через $P \times S^1$. Пусть π — отображение произведения $\tilde{P} \times \tilde{S}^1$ в $\tilde{P}$, переводящее точку $x \times s \in \tilde{P} \times \tilde{S}^1$ в точку $x \in \tilde{P}$. Отображение π комплекса $P \times S^1$ в P клеточно, и для него определен гомоморфизм π^* группы $\nabla^r(P, G)$ в $\nabla^r(P \times S^1, G)$. Условимся ориентировать клетки $\tau \times p$ и $\tau \times q$ так, чтобы было

$$[\pi(\tau \times p) : \tau] = [\pi(\tau \times q) : \tau] = +1,$$

а клетки $\tau \times I$ и $\tau \times J$ — так, чтобы было

$$[\tau \times I : \tau \times p] = [\tau \times J : \tau \times p] = +1$$

и, следовательно,

$$[\tau \times I : \tau \times q] = [\tau \times J : \tau \times q] = -1$$

(см. п. 3:2, (а)). Если x^r есть r-мерная цепь комплекса P, то цепь $\pi^* x^r$ имеет вид

$$\pi^* x^r = x^r \times p + x^r \times q, \tag{6.16}$$

где $x^r \times p$ и $x^r \times q$ — цепи, лежащие соответственно в подкомплексах $P \times p$ и $P \times q$ комплекса $P \times S^1$. Обозначим через $x^r \times I$ цепь комплекса $P \times S^1$, принимающую отличные от нуля значения только на клетках вида $\tau^r \times I$, а именно: $(x^r \times I)(\tau^r \times I) = x^r(\tau^r)$. Аналогично определим цепь $x^r \times J$. Тогда имеют место равенства [ср. доказательство формул (3.8)]:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(x^r \times p) = (\nabla x^r) \times p + x^r \times I + x^r \times J, \\ &\nabla(x^r \times q) = (\nabla x^r) \times q - x^r \times I - x^r \times J, \\ &\nabla(x^r \times I) = -(\nabla x^r) \times I, \nabla(x^r \times J) = -(\nabla x^r) \times J. \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

(а). *Соответствие $z^r \to z^r \times I$ переводит ∇-циклы комплекса P в ∇-циклы комплекса $P \times S^1$, а гомологичные ∇-циклы — в гомологичные. Тем самым порождается гомоморфизм группы $\nabla^r(P, G)$ в $\nabla^{r+1}(P \times S^1, G)$. Этот гомоморфизм мы будем обозначать через s.*

Действительно, из формул (6.17) следует, что если $\nabla z^r = 0$, то $\nabla(z^r \times I) = 0$, и если $z^r = \nabla x^{r-1}$, то $z^r \times I = \nabla(-x^{r-1} \times I)$.

(б). *Отображение s является изоморфизмом группы $\nabla^r(P, G)$ в группу $\nabla^{r+1}(P \times S^1, G)$.*

Действительно, если цикл $z^r \times I$ гомологичен нулю в $P \times S^1$, т. е.

$$z^r \times I = \nabla(x^r \times p + y^r \times q + x^{r-1} \times I + y^{r-1} \times J),$$

где x^r, y^r, x^{r-1} и y^{r-1} — цепи комплекса P, то имеем согласно (6.17)

$$z^r \times I = (\nabla x^r) \times p + x^r \times I + x^r \times J + (\nabla y^r) \times q - y^r \times I - y^r \times J - \\ -(\nabla x^{r-1}) \times I - (\nabla y^{r-1}) \times J.$$

Отсюда мы получаем, далее,

$$z^r = (x^r - y^r) - \nabla x^{r-1} \text{ и } x^r - y^r - \nabla y^{r-1} = 0,$$

так что

$$z^r = \nabla y^{r-1} - \nabla x^{r-1}.$$

Итак, из соотношения $z^r \times I \underset{\nabla}{\sim} 0$ следует $z^r \underset{\nabla}{\sim} 0$, и отображение s изоморфно.

(в). *При $r = n$, где n — размерность комплекса P, отображение s является изоморфизмом группы $\nabla^r(P,G)$ на всю группу $\nabla^{r+1}(P \times S^1, G)$.*

Действительно, всякий $(n+1)$-мерный цикл комплекса $P \times S^1$ имеет вид $x^n \times I + y^n \times J$, где x^n и y^n — цепи комплекса P. Но в силу (6.17) и равенства $\nabla y^n = 0$ мы имеем:

$$x^n \times I + y^n \times J \underset{\nabla}{\sim} x^n \times I + y^n \times J + \nabla(y^n \times q) = (x^n - y^n) \times I \in sZ^n,$$

где Z^n — класс гомологий ∇-цикла $x^n - y^n$ комплекса P.

(г). *Изоморфизм s топологически инвариантен, т. е. не зависит от выбора клеточного разбиения полиэдра $\tilde{P}$; из этого следует, что однозначно определен изоморфизм s группы $\nabla^r(\tilde{P}, G)$ в группу $\nabla^{r+1}(\tilde{P} \times \tilde{S}^1, G)$.*

Доказательство очевидно.

(д). *Для классов гомологий Z^r, Z^m, Z^n полиэдра $\tilde{P}$* (взятых по соответствующим областям коэффициентов) *имеем*

$$sSq^m Z^r = Sq^m sZ^r, \tag{6.18}$$

$$(sZ^m) \smile (sZ^n) = 0. \tag{6.19}$$

В самом деле, пусть K — симплициальное разбиение рассматриваемого полиэдра, EK — надстройка над ним, а L — комплекс, получающийся из EK отождествлением вершин a и b надстройки. Отождествляющее отображение — обозначим его через φ — является клеточным отображением комплекса EK на L, причем каждая клетка τ^r, $r > 1$ комплекса EK переводится отображением φ гомеоморфно и, следовательно, со степенью $+1$ на соответствующую клетку комплекса L. Поэтому отображение φ^* группы $\nabla^r(L, G)$ на $\nabla^r(EK, G)$ является при $r > 1$ изоморфизмом на.

Пусть теперь g — такое отображение полиэдра $\tilde{K} \times \tilde{S}^1$ на $\tilde{L}$, которое для каждой точки $x \in \tilde{K}$ переводит отрезки $x \times I$ и $x \times J$ соответственно в $\varphi([x, a])$ и $\varphi([x, b])$ (с сохранением длины). Подкомплекс $K \times p$ переводится отображением g изоморфно в некоторый подкомплекс комплекса L, клетки $\tau \times I$ и $\tau \times J$ отображаются соответственно в клетки $\varphi(a\tau)$ и $\varphi(b\tau)$, а подкомплекс $K \times q$ переводится отображением g в одну точку $\varphi(a) = \varphi(b)$. Нетрудно видеть, что степень отображения g клетки $\tau \times I$ на клетке $\varphi(a\tau)$ равна $+1$: достаточно применить формулу (2:4) к клеткам $\tau \times I$ и $\varphi(\tau)$. Степени же отображения остальных клеток на клетке $\varphi(a\tau)$ равны нулю. Из этого следует, что для любой цепи x^r комплекса K мы имеем $g^*(\varphi^*)^{-1}ax^r = x^r \times I$ (отображение $(\varphi^*)^{-1}$ для цепей размерности $\geqslant 1$ однозначно определено), и потому гомоморфизмы g^*, φ^*, a и s связаны соотношением $g^*(\varphi^*)^{-1}aZ^r = sZ^r$, где $Z^r \in \nabla^r(K, G)$, $r \geqslant 1$. Отсюда, учитывая перестановочность операции Sq^m с гомоморфизмами g^*, φ^* и a [см. формулу (6.14) и предложение (в) п. 6.4], получаем (6.18). Аналогично получается и (6.19) [см. формулу (6.15)].

(e). *Для любых классов гомологий Z^m и Z^n полиэдра $\widetilde{P}$ по областям коэффициентов G и H соответственно имеем*

$$(sZ^n) \smile (\pi^* Z^m) = s(Z^n \smile Z^m). \tag{6.20}$$

В самом деле, пусть K — симплициальное разбиение рассматриваемого полиэдра, а z^m и z^n — циклы комплекса K, принадлежащие классам гомологий Z^m и Z^n соответственно. Пусть, далее, $\{\eta^k_{z^m}(T^{m+k})\}$ и $\{\eta^l_{z^n}(T^{n+l})\}$ — двойственные системы для циклов z^m и z^n. Обозначим через c середину отрезка $\overline{I}$, и пусть ψ — отображение полиэдра $\widetilde{K}$ в $\widetilde{K} \times \widetilde{S}^1$, переводящее точку $x \in \widetilde{K}$ в точку $x \times c$. Считая, что двойственная система $\{\eta^k_{z^m}(T^{m+k})\}$ для цикла z^m состоит из цепей некоторого подразделения L комплекса K, определим двойственную систему для цикла $\pi^* z^m$, состоящую из цепей комплекса $L \times S^1$, соотношениями

$$\eta^k_{\pi^* z^m}(T^{m+k} \times p) = \eta^k_{z^m}(T^{m+k}) \times p; \quad \eta^k_{\pi^* z^m}(T^{m+k} \times q) = \eta^k_{z^m}(T^{m+k}) \times q;$$
$$\eta^k_{\pi^* z^m}(T^{m+k-1} \times I) = \eta^{k-1}_{z^m}(T^{m+k-1}) \times I;$$
$$\eta^k_{\pi^* z^m}(T^{m+k-1} \times J) = \eta^{k-1}_{z^m}(T^{m+k-1}) \times J.$$

Условия 1) — 3) п. 6 : 1 проверяются непосредственно [см. формулы (6.16) и (3.8)]. Систему, двойственную циклу $z^n \times I$, определим так, чтобы она была отлична от нуля только для клеток вида $T \times I$, а именно

$$\eta^l_{z^n \times I}(T^{n+l} \times I) = (-1)^l \psi(\eta^l_{z^n}(T^{n+l})).$$

Выполнение условий 1) — 3) п. 6 : 1 и здесь проверяется непосредственно. Легко видеть также, что индекс пересечения цепей $\eta^m_{z^n \times I}(\tau^{m+n+1})$ и $\eta^{n+1}_{\pi^* z^m}(\tau^{m+n+1})$ отличен от нуля только для таких клеток $\tau^{m+n+1} \in K \times S^1$, которые имеют вид $T^{m+n} \times I$, причем для таких клеток этот индекс пересечения равен индексу пересечения цепей $\eta^m_{z^n}(T^{m+n})$ и $\eta^n_{z^m}(T^{m+n})$ в симплексе T^{m+n}. Итак, $z^{m+n+1} = z^{m+n} \times I$, где z^{m+n} — произведение циклов z^n и z^m, вычисленное при помощи двойственных систем $\{\eta^l_{z^n}(T^{n+l})\}$ и $\{\eta^k_{z^m}(T^{m+k})\}$, а z^{m+n+1}—произведение ∇-циклов $z^n \times I$ и $\pi^* z^m$, вычисленное при помощи двойственных систем $\{\eta^l_{z^n \times I}(\tau^{n+l+1})\}$ и $\{\eta^k_{\pi^* z^m}(\tau^{m+k})\}$. Таким образом, соотношение (6.20) доказано.

II. ТЕОРИЯ ГОМОТОПИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 7. Гомотопические группы

7:1. Определение гомотопических групп. Пусть R^n — эвклидово n-мерное пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированный базис этого пространства, а K^n есть n-мерный куб, определенный в координатах $x^1, \ldots, x^n$, которые соответствуют этому базису, неравенствами

$$0 \leqslant x^i \leqslant 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Точки куба K^n, для которых выполнены неравенства

$$0 < x^i < 1, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

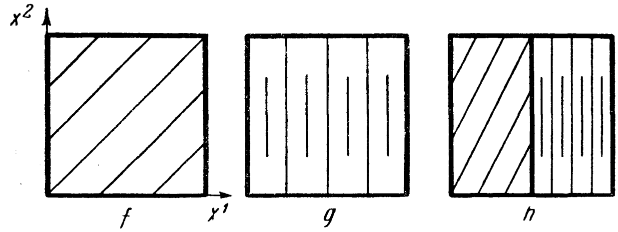
называются *внутренними*, остальные точки — *граничными*. Множество $\dot{K}^n$ всех граничных точек куба K^n называется *границей* куба K^n.

Пусть теперь X — произвольное топологическое пространство с выбранной в нем фиксированной точкой x. Непрерывное отображение f куба K^n в пространство X называется n-мерным *сфероидом* пространства X в точке x, если оно переводит всю границу $\dot{K}^n$ куба K^n в точку x. Сфероиды f_0 и f_1 назовем *эквивалентными*, если они гомотопны относительно $\dot{K}^n$, т. е. если существует такая деформация f_t, соединяющая отображения f_0 и f_1, что $f_t(\dot{K}^n) = x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Симметрия, транзитивность и рефлексивность введенного отношения эквивалентности очевидны, и множество всех сфероидов разбивается на классы эквивалентности, совокупность которых обозначается через $\pi^n(X, x)$.

В множестве $\pi^n(X, x)$ следующим образом вводится групповая операция. Пусть α и β — элементы этого множества, а f и g — сфероиды, принадлежащие классам α и β. Определим тогда сфероид h соотношением (черт. 5; на этом и следующих чертежах, относящихся к случаю $n = 2$, штриховкой разного вида отмечены разные отображения куба K^n и его частей в пространство X)

$$h(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f(2x^1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

Нетрудно видеть, что для $x^1 = \frac{1}{2}$ оба определения совпадают, так что мы получаем непрерывное отображение h. Класс сфероида h обозначим через γ и назовем его *произведением* классов α и β. Класс γ не



Черт. 5.

зависит от выбора сфероидов f и g из классов α и β. Действительно, если $f_0 \in \alpha$, $f_1 \in \alpha$, $g_0 \in \beta$, $g_1 \in \beta$ и f_t, g_t — деформации, соединяющие f_0 и g_0 соответственно с f_1 и g_1, то деформация h_t, определяемая равенством

$$h_t(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f_t(2x^1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g_t(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1, \end{cases}$$

соединяет сфероид h_0, построенный на основании (7.1) из f_0 и g_0, со сфероидом h_1, построенным из f_1 и g_1.

Покажем, что относительно определенной выше операции множество $\pi^n(X, x)$ является группой. Пусть α, β, γ — три произвольных элемента из $\pi^n(X, x)$, а f, g, h — сфероиды, принадлежащие этим классам. Тогда классам $(\alpha\beta)\gamma$ и $\alpha(\beta\gamma)$ будут принадлежать соответственно сфероиды k_1 и k_2, определяемые формулами (черт. 6)

$$k_1(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f(4x^1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{4}, \\ g(4x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{1}{4} \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ h(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1, \end{cases}$$

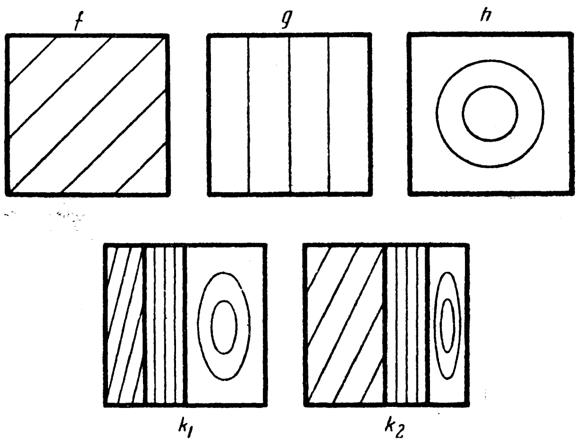
$$k_2(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f(2x^1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(4x^1 - 2, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant \frac{3}{4}, \\ h(4x^1 - 3, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } \frac{3}{4} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Для доказательства эквивалентности этих сфероидов рассмотрим отображение χ отрезка $[0, 1]$ на себя, аффинно переводящее отрезки $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ соответственно на отрезки $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

и $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Тогда $k_2(\chi(x^1), x^2, \ldots, x^n) = k_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и потому деформация

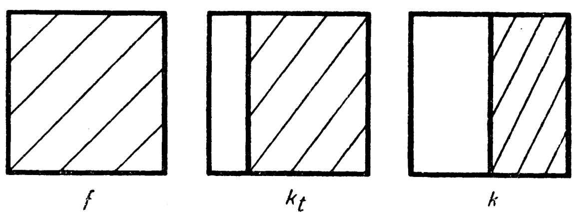
$$k_t = k_2(tx^1 + (1-t)\chi(x^1), x^2, \ldots, x^n), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

является деформацией относительно $\dot{K}^n$ и переводит сфероид k_1 в k_2. Таким образом, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, т. е. введенная операция ассоциативна.



Черт. 6.

Обозначим через e класс, который содержит сфероид, переводящий весь куб K^n в точку x. Тогда, если α — произвольный элемент множества $\pi^n(X, x)$, а f — сфероид класса α, то сфероид k, опреде-



Черт. 7.

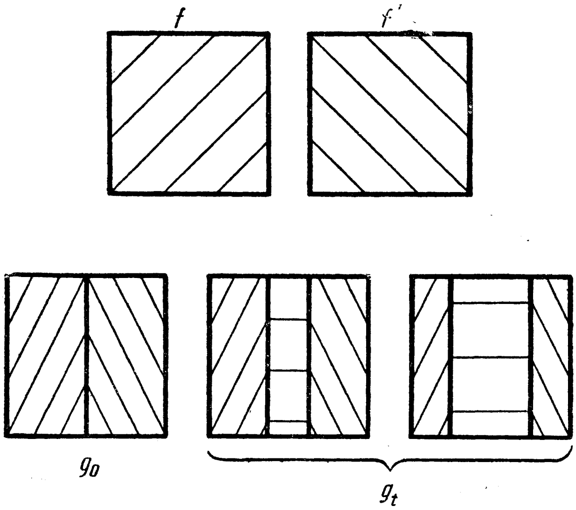
ляемый равенством (черт. 7; на нем оставлены незаштрихованными те части квадрата, которые отображаются в точку x)

$$k(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} x & \text{при } x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) & \text{при } x^1 \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

принадлежит классу $e\alpha$. Обозначим через χ_t отображение отрезка $[0, 1]$ на себя, переводящее отрезок $0, \left[\frac{1}{2}(1-t)\right]$ в точку 0, а отрезок $\left[\frac{1}{2}(1-t), 1\right]$ — аффинно на $[0, 1]$. Тогда $f(\chi_0(x^1), x^2, \ldots, x^n) =$

$= k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и потому деформация k_t, определяемая равенством $k_t(x^1, \ldots, x^n) = f(\chi_t(x^1), x^2, \ldots, x^n)$, соединяет сфероид k с f. Таким образом, $e\alpha = \alpha$. Аналогично доказывается равенство $\alpha e = \alpha$. Итак, в $\pi^n(X, x)$ существует единица e.

Наконец, пусть α — элемент множества $\pi^n(X, x)$, а f — сфероид класса α. Обозначим через α^{-1} такой элемент множества $\pi^n(X, x)$,



Черт. 8.

который содержит сфероид f', определяемый соотношением (черт. 8)

$$f'(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f(1 - x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Тогда классу $\alpha\alpha^{-1}$ будет принадлежать сфероид g_0, определенный равенствами

$$g_0(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f(2x^1, x^2, \ldots, x^n), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ f'(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n) = f(2 - 2x^1, x^2, \ldots, x^n), & \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Деформация g_t, определяемая равенствами

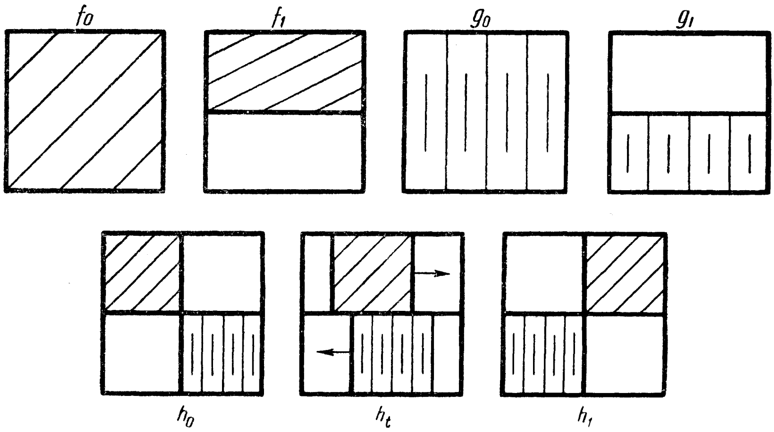
$$g_t(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \begin{cases} f(2x^1, x^2, \ldots, x^n), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}(1 - t), \\ f(1 - t, x^2, \ldots, x^n), & \frac{1}{2}(1 - t) \leqslant x^1 \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - t), \\ f(2 - 2x^1, x^2, \ldots, x^n), & 1 - \frac{1}{2}(1 - t) \leqslant x^1 \leqslant 1, \end{cases}$$

соединяет сфероид g_0 со сфероидом g_1, переводящим весь куб K^n в точку x. Таким образом, $\alpha\alpha^{-1} = e$, т. е. в $\pi^n(X, x)$ для каждого элемента α имеется обратный.

Итак, $\pi^n(X, x)$ является группой. Она называется n-мерной *гомотопической группой* пространства X в точке x. Одномерная гомотопическая группа $\pi^1(X, x)$ называется также *фундаментальной группой*. Мы сейчас покажем, что при $n \geqslant 2$ гомотопические группы коммутативны. В самом деле, если f_0 — произвольный сфероид класса α, то деформация

$$f_t(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{t}{2}, \\ f_0\left(x^1, \frac{2x^2 - t}{2 - t}, x^3, \ldots, x^n\right), & \frac{t}{2} \leqslant x^2 \leqslant 1, \end{cases}$$

определенная при $n \geqslant 2$, переводит f_0 в сфероид f_1, для которого $f_1(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x$ при $x^2 \leqslant \frac{1}{2}$ (черт. 9; не заштрихованы те части



Черт. 9.

квадратов, которые отображаются в точку x). Точно так же, если g_0 — сфероид класса $\beta \in \pi^n(X, x)$, то деформация

$$g_t(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n) = \begin{cases} g_0\left(x^1, \frac{2x^2}{2-t}, x^3, \ldots, x^n\right), & 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 - \frac{t}{2} \\ x, & 1 - \frac{t}{2} \leqslant x^2 \leqslant 1, \end{cases}$$

переводит g_0 в сфероид g_1, для которого $g_1(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x$ при $x^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда сфероиды h_0 и h_1, определенные равенствами

$$h_0(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \begin{cases} f_1(2x^1, x^2, \ldots, x^n), & x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g_1(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n), & x^1 \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$h_1(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \begin{cases} g_1(2x^1, x^2, \ldots, x^n), & x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ f_1(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n), & x^1 \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

принадлежат соответственно элементам $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ группы $\pi^n(X, x)$. Деформация (черт. 9)

$$h_t(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} f_1(2x^1-t, x^2, \ldots, x^n), & \frac{t}{2} \leqslant x^1 \leqslant \frac{t}{2}+\frac{1}{2},\ x^2 \geqslant \frac{1}{2}, \\ g_1(2x^1-(1-t), x^2, \ldots, x^n), & \frac{1-t}{2} \leqslant x^1 \leqslant \frac{2-t}{2},\ x^2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ x \text{ для остальных значений } x^1,\ x^2 \end{cases}$$

переводит сфероид h_0 в h_1. Таким образом, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

В силу сказанного мы будем пользоваться при $n \geqslant 2$ аддитивной записью операции в группе $\pi^n(X, x)$, в частности нейтральный элемент этой группы будет обозначаться символом 0. Фундаментальная группа $\pi^1(X, x)$, вообще говоря, некоммутативна, и для нее мы сохраним мультипликативные обозначения. Всякий сфероид, принадлежащий нулевому элементу гомотопической группы, называется *гомотопным нулю*.

7:2. Независимость группы $\pi^n(X, x)$ от выбора точки x. Произвольное отображение p отрезка $[0, 1]$ в пространство X называется *путем* пространства X. Точка $p(0)$ называется *началом* пути p, точка $p(1)$ — его концом. Говорят, что точки x и y *соединимы в* X *путем*, если существует такой путь p, что $p(0) = x$, $p(1) = y$. Если любые две точки пространства X соединимы в X путем, то пространство X называется *линейно связным*. В частности, любой связный полиэдр является линейно связным пространством. Мы будем предполагать в этом параграфе, что все рассматриваемые пространства линейно связны.

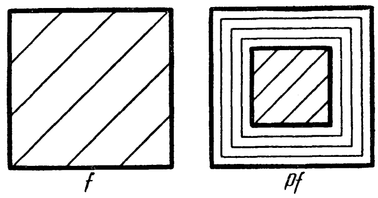
Если конец пути p совпадает с началом пути q, то определен путь r, являющийся таким отображением отрезка $0 \leqslant x^1 \leqslant 1$ в X, что $r(x^1) = p(2x^1)$ при $0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}$ и $r(x^1) = q(2x^1 - 1)$ при $\frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1$. Этот путь называется *произведением* путей p и q и обозначается через pq. Начало его совпадает с началом пути p, а конец — с концом пути q. Так как отрезок $[0, 1]$ совпадает с одномерным кубом K^1, то всякий замкнутый путь, т. е. путь, конец которого совпадает с его началом x, является одномерным сфероидом в точке x. В этом случае произведение путей согласуется с формулой (7.1), т. е. порождает то произведение гомотопических классов путей, которое определено в фундаментальной группе.

Пусть x и y — две точки пространства X, а p — путь, соединяющий эти точки: $p(0) = x$, $p(1) = y$. Мы покажем, что гомотопические группы $\pi^n(X, x)$ и $\pi^n(X, y)$ изоморфны, причем установим между этими группами вполне определенный изоморфизм, зависящий от пути p. Обозначим через m центр куба K^n, т. е. точку с координатами $x^i = \frac{1}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, а через χ_t — подобное преобразование куба K^n в себя с центром подобия m и коэффициентом подобия $\frac{2-t}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда χ_0 есть тождественное отображение куба K^n на себя, а χ_1 — подобное преобразование с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Если теперь f — произвольный сфероид пространства X в точке y, то мы определим сфероид pf пространства X в точке x, положив (черт. 10):

$$pf(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$

$$= \begin{cases} p(t) \text{ для точек } (x^1, \ldots, x^n) \in \chi_t(\dot{K}^n), 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ f\chi_1^{-1}(x^1, \ldots x^n) \text{ для точек } (x^1, \ldots, x^n) \in \chi_1(K^n). \end{cases}$$

Очевидно, что эквивалентные сфероиды f_0 и f_1 пространства X в точке y дают эквивалентные сфероиды pf_0 и pf_1 пространства X в точке x. Действительно, из гомотопии f_t, соединяющей f_0 и f_1, мы немедленно получаем гомотопию pf_t, соединяющую pf_0 и pf_1. Таким образом, мы получаем отображение группы $\pi^n(X, y)$ в группу $\pi^n(X, x)$; это отображение обозначается через $p^{\#}$.



Черт. 10.

Рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве ассоциативности умножения в гомотопических группах (ср. черт. 6), покажут нам, что справедливо следующее предложение.

Если p — путь, начинающийся в точке x и кончающийся в точке y, а q — путь, начинающийся в точке y и кончающийся в точке z, то для отображений $p^{\#}$, $q^{\#}$ и $(pq)^{\#}$, переводящих группы $\pi^n(X, y)$, $\pi^n(X, z)$, $\pi^n(X, z)$ соответственно в группы $\pi^n(X, x)$, $\pi^n(X, y)$, $\pi^n(X, x)$, имеет место соотношение

$$(pq)^{\#} = p^{\#}q^{\#}. \tag{7.2}$$

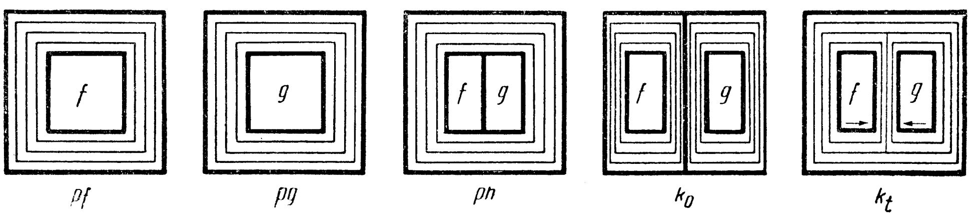
Пусть теперь пути p_0 и p_1 имеют общие концевые точки x и y, а p_t — такая деформация, соединяющая пути p_0 и p_1, при которой концевые точки путей не перемещаются. Тогда для любого сфероида f пространства X в точке y деформация $p_t f$ соединяет сфероиды $p_0 f$ и $p_1 f$. Таким образом, отображения $p_0^{\#}$ и $p_1^{\#}$ совпадают. Далее, если p — данный путь, соединяющий точки x и y, а p' — путь, определенный соотношением $p'(1-t) = p(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то путь pp' принадлежит единичному элементу фундаментальной группы $\pi^1(X, x)$ (ср. черт. 8 и относящиеся к нему рассуждения). Поэтому отображение $(pp')^{\#}$ группы $\pi^1(X, x)$ в себя совпадает с отображением $s^{\#}$, порождаемым таким путем s, который переводит весь отрезок $[0,1]$ в точку x. Но отображение $s^{\#}$, как легко видеть, является тождественным (ср. черт. 7 и относящиеся к нему рассуждения). Таким образом, отображение $(pp')^{\#} = p^{\#}p'^{\#}$ является тождественным, откуда следует, что $p'^{\#}$ есть взаимно однозначное отображение группы $\pi^n(X, x)$ в группу $\pi^n(X, y)$, а $p^{\#}$ есть отображение группы $\pi^n(X, y)$ на всю группу $\pi^n(X, x)$.

Аналогично устанавливается, что отображение $(p'p)^{\#} = p'^{\#}p^{\#}$ группы $\pi^n(X, y)$ в себя тождественно, так что, в частности, $p^{\#}$ есть взаимно однозначное отображение группы $\pi^n(X, y)$ в группу $\pi^n(X, x)$.

Итак, *отображение $p^{\#}$ взаимно однозначно переводит группу $\pi^n(X, y)$ на всю группу $\pi^n(X, x)$.*

Остается показать, что отображение $p^{\#}$ гомоморфно. Пусть f и q — сфероиды пространства X в точке y, а h — сфероид, определяемый равенством (7.1). Пусть, далее, p — путь пространства, X с началом в точке x и концом в точке y. Тогда определены сфероиды pf, pg, ph. Определим, далее, сфероид k_0 соотношением

$$k_0(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} pf(2x^1, x^2, \ldots, x^n), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ pg(2x^1 - 1, x^2, \ldots, x^n), & \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$



Черт. 11.

Для того чтобы доказать, что сфероиды k_0 и ph эквивалентны, достаточно рассмотреть деформацию (черт. 11)

$$k_t(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} k_0\left(\frac{x^1}{1+t}, x^2, \ldots, x^n\right), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1+t}{8}, \\ k_0\left(x^1 - \frac{t}{8}, x^2, \ldots, x^n\right), & \frac{1+t}{8} \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ k_0\left(x^1 + \frac{t}{8}, x^2, \ldots, x^n\right), & \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant \frac{7-t}{8}, \\ k_0\left(\frac{t + x^1}{1+t}, x^2, \ldots, x^n\right), & \frac{7-t}{8} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Итак отображение $p^{\#}$ гомоморфно. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Гомотопические группы линейно связного пространства X, определенные в его различных точках, изоморфны между собой.*

Группу, изоморфную любой из групп $\pi^n(X, x)$, мы будем обозначать через $\pi^n(X)$ и называть *гомотопической группой пространства X.*

В том случае, когда начало x пути p совпадает с его концом, т. е. когда путь p является одномерным сфероидом пространства X в точке x, отображение $p^{\#}$ является *автоморфизмом* группы $\pi^n(X, x)$.

При этом, в силу сказанного, эквивалентные одномерные сфероиды порождают одинаковые автоморфизмы группы $\pi^n(X, x)$. Таким образом, каждый элемент α фундаментальной группы $\pi^1(X, x)$ определяет некоторый автоморфизм $\alpha^\#$ группы $\pi^n(X, x)$. В силу (7.2) для этих автоморфизмов справедливо соотношение $(\alpha\beta)^\# = \alpha^\#\beta^\#$.

Таким образом, *фундаментальная группа* $\pi^1(X, x)$ *оказывается группой левых операторов группы* $\pi^n(X, x)$.

7 : 3. Группа $\pi^n(S^n)$. Куб K^n гомеоморфен n-мерному симплексу и потому является полиэдром. Удобно пользоваться следующим клеточным разбиением куба K^n на три клетки размерностей $n, n-1$ и 0

$$\tau^n = K^n \setminus \dot{K}^n, \quad \tau^{n-1} = \dot{K}^n \setminus \tau^0, \quad \tau^0 \in \dot{K}^n.$$

Пространство R^n мы ориентируем в соответствии с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, выбранным при построении куба K^n (п. 7 : 1); в результате куб K^n получит ориентацию, т. е. будет ориентирована клетка $\tau^n \in K^n$.

Пусть теперь S^n — ориентированная n-мерная сфера, a — ее точка. Сферу S^n мы разобьем на две клетки: $\tau_1^n = S^n \setminus a$ и $\tau_1^0 = a$. Если теперь f — произвольный сфероид пространства S^n в точке a, то f является клеточным отображением комплекса K^n в S^n (при рассмотренных клеточных разбиениях). Поэтому определена степень отображения f, т. е. $[f\tau^n : \tau_1^n]$.

Теорема Хопфа. *Сфероиды f и g пространства S^n в точке a эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда их степени равны.*

Доказательство. Если сфероиды f и g эквивалентны, т. е. гомотопны относительно $\dot{K}^n$, то отображения f и g клеточно гомотопны и потому их степени равны (см. лемму п. 2 : 4).

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим сфероид f, имеющий степень k. Мы можем без ограничения общности предполагать, что f является симплициальным отображением некоторого достаточно мелкого симплициального подразделения K куба K^n в некоторое симплициальное подразделение L сферы S^n (ибо всякое отображение гомотопно симплициальному, см. п. 1 : 3, а согласно сказанному выше, при замене сфероида гомотопным ему сфероидом степень не меняется).

Выберем в комплексе L некоторый n-мерный симплекс T_1^n, и пусть Σ^n есть n-мерный шар, целиком лежащий внутри T_1^n. Если симплекс T^n комплекса K отображается при помощи f на T_1^n, то полным прообразом шара Σ^n в симплексе T^n будет n-мерный эллипсоид (ибо отображение f аффинно на симплексе T^n). Полный же прообраз $W = f^{-1}(\Sigma^n)$ во всем комплексе K будет состоять из конечного числа таких эллипсоидов.

Ориентируем симплекс T_1^n в соответствии с ориентацией сферы S^n, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — n взаимно ортогональных векторов, являющихся радиусами шара Σ^n и образующих базис, который соответствует выбранной ориентации симплекса T_1^n. В каждом эллипсоиде, входящем в W, прообразами векторов $e_1, \ldots, e_n$ будут такие векторы $f_1, \ldots, f_n$, которые образуют систему сопряженных полудиаметров эллипсоида. Это означает, что в координатной системе, соответствующей базису $f_1, \ldots, f_n$, уравнение соответствующего эллипсоида имеет вид

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1.$$

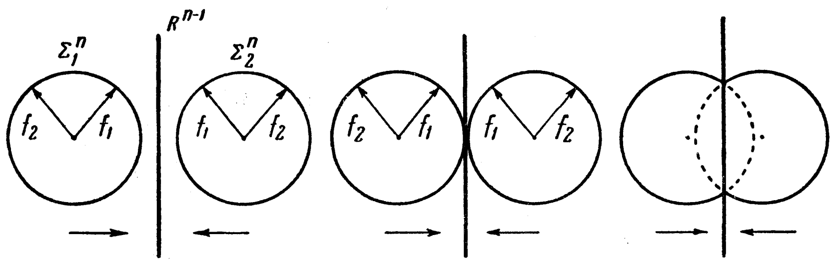
Ориентируем все n-мерные симплексы комплекса K в соответствии с ориентацией куба K^n, и обозначим через z^n ориентирующую цепь куба K^n, взятую в подразделении K. В цепь z^n все указанным образом ориентированные n-мерные симплексы будут входить с коэффициентами $+1$. Обозначим, далее, через ρ число n-мерных симплексов комплекса K, отображающихся при помощи f на T_1^n со степенью $+1$, а через ν — число симплексов, отображающихся на T_1^n со степенью -1. Тогда в цикл $f_* z^n$ симплекс T_1^n входит с коэффициентом $\rho - \nu$, откуда следует, что $\rho - \nu = k$ (ибо $f_* z^n = k \cdot z_1^n$, где z_1^n — ориентирующий цикл сферы S^n). Заметим, что базис $f_1, \ldots, f_n$, взятый в некотором эллипсоиде тела W, будет соответствовать ориентации куба K^n или не будет ей соответствовать в зависимости от того, будет ли соответствующий симплекс отображаться на T_1^n со степенью $+1$ или -1.

Построим теперь новое отображение φ куба K^n на S^n, гомотопное отображению f. Пусть ω_t — деформация тождественного отображения ω_0 сферы S^n на себя в такое отображение ω_1, которое стягивает $S^n \setminus \Sigma^n$ в одну точку q этой сферы. Рассмотрим тогда деформацию $\omega_t f$ отображения $\omega_0 f = f$ куба K^n на S^n в отображение $\omega_1 f$, которое мы и обозначим через φ. Отображение φ гомотопно f и обладает тем свойством, что все точки куба K^n, лежащие вне множества W или на его границе, переходят в результате отображения φ в точку $q \in S^n$ (ибо $f(K^n \setminus W) \subset S^n \setminus \Sigma^n$). Таким образом, на $S^n \setminus q$ отображается при помощи φ только внутренность множества W.

В результате этого построения мы получаем в ориентированном кубе K^n конечное число попарно не пересекающихся n-мерных эллипсоидов, в каждом из которых задана система $f_1, \ldots, f_n$ сопряженных полудиаметров. Отображение φ сначала переводит каждый из этих эллипсоидов аффинно на Σ^n (причем векторы $f_1, \ldots, f_n$ переходят в $e_1, \ldots, e_n$), а затем при помощи ω_1 шар Σ^n переводится в $S^n \setminus q$. Остальная же часть куба K^n переводится отображением $\varphi = \omega_1 f$ в точку q. Отсюда ясно, что отображение φ будет однозначно определено, если указать только центры всех эллипсоидов и системы их сопряженных полудиаметров (ибо этими данными определяются и сами эллипсоиды). Если мы начнем перемещать центры эллипсоидов, одновременно деформируя базисы $f_1, \ldots, f_n$ каждого из этих эллипсоидов, то отображение φ будет непрерывно деформироваться; при этом нужно только следить, чтобы каждый из базисов $f_1, \ldots, f_n$ не вырождался, а соответствующие эллипсоиды попарно не пересекались и лежали внутри K^n. При помощи деформации такого рода мы сможем добиться того, что все базисы $f_1, \ldots, f_n$ станут ортогональными базисами с векторами одной и той же длины r, т. е. эллипсоиды превратятся в шары одинакового радиуса r. Число этих шаров равно $\rho + \nu$, причем для ρ из этих шаров базисы $f_1, \ldots, f_n$ соответствуют ориентации куба K^n, а для ν — обратны этой ориентации.

Покажем, что если каждое из чисел ρ, ν отлично от нуля, то можно заменить отображение φ, построенное при помощи этой системы шаров, гомотопным ему отображением, для которого каждое из чисел ρ, ν станет меньше на единицу.

В самом деле, пусть Σ_1^n и Σ_2^n — два шара, для которых базисы $f_1, \ldots, f_n$ имеют противоположные ориентации. Передвигая шары в кубе, поместим Σ_1^n и Σ_2^n так, чтобы они были симметричны относительно некоторой $(n-1)$-мерной плоскости R^{n-1} пространства $R^n \supset K^n$ и чтобы векторы $f_1, \ldots, f_n$ для этих шаров были также симметричны относительно этой плоскости. Тогда соответствующее отображение φ переводит симметричные относительно R^{n-1} точки шаров Σ_1^n и Σ_2^n в одни и те же точки сферы S^n. Будем теперь сближать между собой шары Σ_1^n и Σ_2^n, оставляя их симметричными относительно плоскости R^{n-1}. В некоторый момент времени шары коснутся плоскости R^{n-1}, а затем, в следующие моменты времени, плоскость R^{n-1} отсечет от шаров по куску (случай $n = 2$ изображен на черт. 12). Тем не менее и в эти



Черт. 12.

моменты времени мы получим непрерывное отображение куба K^n на S^n, ибо симметричные точки остатков шаров попрежнему одинаково отображаются в S^n. При дальнейшем сближении плоскость R^{n-1} будет отсекать от шаров все большие части, и, наконец, оба шара пропадут В результате описанной деформации мы получаем отображение φ', для которого числа ρ и ν уменьшились на единицу.

Проведенное построение показывает, что всякий сфероид f, имеющий степень k, гомотопен такому сфероиду φ, который определяется $|k|$ шарами, причем базисы $f_1, \ldots, f_n$ ортогональны, а ориентации их совпадают с ориентацией пространства R^n при $k > 0$ и обратны ей при $k < 0$. Таким образом, любые два сфероида, имеющие степень k, гомотопны между собой. Теорема доказана.

В силу доказанной теоремы, все сфероиды некоторого класса $\alpha \in \pi^n(S^n)$ имеют одну и ту же степень k, которая, таким образом, полностью определяется элементом α группы $\pi^n(S^n)$. Положим $\gamma(\alpha) = k$ и покажем, что установленное таким образом соответствие γ между элементами группы $\pi^n(S^n)$ и целыми числами является изоморфным отображением группы $\pi^n(S^n)$ на аддитивную группу целых чисел, и, следовательно, *группа $\pi^n(S^n)$ является свободной циклической.*

Действительно, в силу той же теоремы Хопфа, отображение γ взаимно однозначно, и нужно лишь установить, что оно *гомоморфно* отображает группу $\pi^n(S^n)$ на *всю* группу J_0 целых чисел. Пусть α и β — два произвольных элемента группы $\pi^n(S^n)$, f и g — сфероиды классов α и β, а k и l — степени этих сфероидов. Для установления равенства $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma(\alpha) + \gamma(\beta)$ нужно показать, что сфероид h, определенный при помощи f и g соотношением (7.1), имеет степень $k + l$. Плоскость $x^1 = \frac{1}{2}$ пространства R^n разбивает куб K^n на две части, первая из которых при помощи h отображается на S^n со степенью k, а вторая — со степенью l. Таким образом, сфероид h имеет степень $k + l$, и гомоморфность отображения γ доказана. Остается установить, что γ есть отображение на всю группу J_0, т. е. что существует в $\pi^n(S^n)$ такой элемент α, что $\gamma(\alpha) = \pm 1$. Иначе говоря, нам нужно построить сфероид f пространства S^n в точке a, имеющий степень ± 1. Сфера S^n является замыканием клетки $\tau^n = S^n \setminus a$. Поэтому существование интересующего нас сфероида вытекает из предложения (а) следующего пункта.

7:4. Способы задания элементов группы $\pi^n(X)$. Докажем предварительно два простых предложения.

(а). *Пусть τ^n — ориентированная n-мерная клетка, $\dot{\tau}^n$ — ее граница. Существует такое непрерывное отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$, которое переводит $\dot{K}^n$ в $\dot{\tau}^n$ и имеет степень* $+1$.

Действительно, в п. 2:3 при построении ориентирующей цепи мы получили отображение f_1 симплекса T^n на $\bar{\tau}^n$, переводящее $\dot{T}^n$ в $\dot{\tau}^n$ и переводящее ориентирующую цепь симплекса T^n (как-то подразделенного) в ориентирующую цепь клетки τ^n, т. е. имеющее степень $+1$. Дословно так же получается и аналогичное отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$.

(б). *Пусть τ^n — ориентированная n-мерная клетка, а f — такое непрерывное отображение множества $\bar{\tau}^n$ в n-мерную ориентирован-*

ную сферу S^n, которое переводит $\dot{\tau}^n$ в точку $q \in S^n$ и отображает τ^n гомеоморфно на $S^n \setminus q$. Тогда степень $[f\tau^n : S^n]$ отображения f равна ± 1.

В самом деле, пусть K — настолько мелкое симплициальное подразделение клетки τ^n, что в нем найдется симплекс T^n, не пересекающийся с границей $\dot{\tau}^n$ клетки τ^n. Пусть, далее, φ — такое непрерывное отображение множества $\bar{\tau}^n$ на сферу S^n, которое переводит $\bar{\tau}^n \setminus T^n$ (а значит, и границу $\dot{T}^n$ симплекса T^n) в точку q, а как-либо ориентированный симплекс T^n отображает на S^n со степенью ± 1. Степень отображения φ, очевидно, равна ± 1. Определим, далее, отображение ψ сферы S^n на себя как совпадающее на множестве $f(T^n)$ с отображением φf^{-1} и переводящее множество $S^n \setminus f(T^n)$ в точку q. Тогда ясно, что отображения ψf и φ совпадают, и, следовательно, степень отображения ψf равна ± 1. Таким образом [см. (2.5)], степень каждого из отображений f, ψ также равна ± 1.

Вернемся к рассмотрению гомотопических групп. Пусть τ^n — ориентированная n-мерная клетка и f — непрерывное отображение множества $\bar{\tau}^n$ в пространство X, причем $f(\dot{\tau}^n) = x \in X$. Пусть, далее, g — отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$, переводящее $\dot{K}^n$ в $\dot{\tau}^n$ и имеющее степень $+1$. Тогда отображение fg является сфероидом пространства X в точке x. Нетрудно видеть, что класс сфероида fg не зависит от произвола в выборе отображения g и всецело определяется отображением f.

В самом деле, при помощи отождествления границы $\dot{\tau}^n$ клетки τ^n в одну точку a, мы превратим клетку τ^n в n-мерную сферу $\bar{S}^n$, причем отождествляющее отображение φ множества $\bar{\tau}^n$ на S^n переводит $\dot{\tau}^n$ в точку b и отображает τ^n гомеоморфно на $S^n \setminus a$. В силу (б), отображение φ имеет степень $+1$, если сферу S^n надлежащим образом ориентировать. Если мы каждой отличной от a точке b сферы S^n поставим в соответствие точку $\psi(b) = f\varphi^{-1}(b)$ пространства X, а точке a поставим в соответствие точку $\psi(a) = x$, то, как легко видеть, мы получим такое непрерывное отображение ψ сферы S^n в X, что $f = \psi\varphi$. Если теперь g_0 и g_1 — два отображения куба K^n на $\bar{\tau}^n$, переводящие $\dot{K}^n$ в $\dot{\tau}^n$ и имеющие степень $+1$, то отображения φg_0 и φg_1 куба K^n на сферу S^n имеют степени $+1$, и, в силу теоремы Хопфа, эти отображения гомотопны относительно $\dot{K}^n$. Таким образом, сфероиды $\psi\varphi g_0$ и $\psi\varphi g_1$, т. е. fg_0 и fg_1, эквивалентны.

Элемент группы $\pi^n(X, x)$, определяемый таким образом при помощи отображения f ориентированной клетки $\bar{\tau}^n$ в X, переводящего $\dot{\tau}^n$ в x, условимся обозначать через $\{f\}$. Из рассмотренного построения вытекает, в частности, что всякое отображение n-мерного ориентированного симплекса T^n в пространство X, переводящее границу симплекса T^n в точку $x \in X$, определяет некоторый элемент группы

$\pi^n(X, x)$. Далее, условимся называть n-мерной *поляризованной сферой* всякую n-мерную ориентированную сферу S^n, в которой фиксирована некоторая точка q, называемая *полюсом*. Сфера S^n является замыканием ориентированной клетки $\tau^n = S^n \setminus q$, и потому всякое непрерывное отображение f поляризованной сферы S^n в пространство X определяет некоторый элемент группы $\pi^n(X, x)$, где $x = f(q)$. Из определения эквивалентности сфероидов (п. 7 : 1) непосредственно вытекает, что отображения f_0 и f_1 поляризованной сферы S^n в X, переводящие полюс q в одну и ту же точку $x \in X$, тогда и только тогда определяют одинаковые элементы группы $\pi^n(X, x)$, когда они гомотопны относительно q.

(в). *Пусть E есть $(n+1)$-мерный шар, S^n — его граница, как-либо ориентированная, и q — точка сферы S^n. Пусть, далее, f_0 — отображение сферы S^n в пространство X и $x = f_0(q)$. Элемент $\{f_0\}$ группы $\pi^n(X, x)$ тогда и только тогда равен нулю, когда отображение f_0 можно распространить до непрерывного отображения всего шара E в X.*

В самом деле будем считать E единичным шаром эвклидова пространства размерности $n+1$ и обозначим через χ_t подобное преобразование сферы S^n с центром подобия q и коэффициентом подобия $1-t$. Если отображение f_0 можно продолжить до отображения F всего шара E в X, то обозначим через f_t отображение сферы S^n в X, совпадающее с $F\chi_t$. Тогда f_t есть деформация отображения f_0 относительно q, причем f_1 переводит всю сферу S^n в точку x. Таким образом, $\{f_0\} = \{f_1\} = 0$. Обратно, если $\{f_0\} = 0$ и f_t — такая деформация отображения f_0 относительно q, что $f_1(S^n) = x$, то f_0 можно распространить до непрерывного отображения F всего шара E в X: для этого достаточно определить F как совпадающее на множестве $\chi_t(S^n)$ с отображением $f_t\chi_t^{-1}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(г). *Пусть f_0 и f_1 — гомотопные между собой отображения поляризованной сферы S^n в пространство X, а f_t — соединяющая их гомотопия. Обозначим через p путь, описываемый при этой деформации полюсом q сферы S^n, т. е. $p(t) = f_t(q)$. Тогда $\{f_0\} = p^{\#}\{f_1\}$.*

Действительно, пусть φ — отображение куба K^n на S^n, переводящее $\dot{K}^n$ в q и имеющее степень $+1$. Тогда сфероид $f_t\varphi$ пространства X в точке $p(t)$ принадлежит классу $\{f_t\}$. Обозначим через χ_t подобное преобразование куба K^n с коэффициентом подобия $\frac{2-t}{2}$ (см. п. 7 : 2), и следующим образом определим сфероид g_t пространства X в точке $p(0)$

$$g_t(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} p(s) & \text{при } (x^1, \ldots, x^n) \in \chi_s(\dot{K}^n),\ 0 \leqslant s \leqslant t, \\ (f_t\varphi)\,\chi_t^{-1}(x^1, \ldots, x^n) & \text{при } (x^1, \ldots, x^n) \in \chi_t(K^n). \end{cases}$$

Тогда g_t есть деформация отображений куба K^n в X относительно $\dot{K}^n$, так что сфероиды g_0 и g_1 эквивалентны. Но g_0, очевидно, совпадает с $f_0\varphi$, т. е. принадлежит классу $\{f_0\}$, а g_1 есть сфероид $p(f_1\varphi)$, определенный при помощи пути p согласно п. 7:2, т. е. g_1 принадлежит классу $p^{\#}\{f_1\}$. Таким образом, $\{f_0\}=p^{\#}\{f_1\}$.

(д). Пусть h — отображение пространства X в пространство Y, x — точка пространства X и $y=h(x)$. Тогда каждому сфероиду f пространства X в точке x соответствует сфероид hf пространства Y в точке y. Очевидно, что из эквивалентности сфероидов f_0 и f_1 следует эквивалентность сфероидов hf_0 и hf_1, так что соответствие $f\to hf$ порождает отображение группы $\pi^n(X,x)$ в $\pi^n(Y,y)$. Это соответствие мы также обозначим через h; легко видеть, что оно гомоморфно [ср. формулу (7.1)]. Пусть теперь h_0 и h_1 — гомотопные между собой отображения пространства X в Y и h_t — гомотопия, соединяющая эти отображения. Обозначим через p путь, который описывает точка x при этой деформации, т. е. путь, определенный равенством $p(t)=h_t(x)$. Тогда *гомоморфизмы h_0 и h_1 гомотопических групп пространства X в гомотопические группы пространства Y связаны соотношением $h_0=p^{\#}h_1$.*

Действительно, пусть $\alpha\in\pi^n(X,x)$ и f — отображение поляризованной сферы S^n в X, переводящее полюс в точку x и определяющее элемент α:

$$\{f\}=\alpha.$$

Тогда, в силу предложения (г), мы имеем

$$\{h_0f\}=p^{\#}\{h_1f\},$$

т. е.

$$h_0(\alpha)=p^{\#}h_1\alpha.$$

7:5. Гомотопическая группа букета. Пусть $S_1,\ldots,S_k$ — такие полиэдры, каждый из которых гомеоморфен n-мерной сфере, что они все имеют общую точку a, причем эта точка является единственной общей точкой каждых двух полиэдров S_i и S_j, $i\neq j$. Полиэдр $B_k^n=S_1\cup\ldots\cup S_k$ называется n-мерным *букетом сфер* порядка k. Букет называется *ориентированным*, если как-то ориентирована каждая из сфер S_i. Удобно рассматривать клеточное разбиение полиэдра B_k^n, состоящее из клеток

$$\tau^0=a,\quad \tau_1^n=S_1\setminus a,\ldots,\tau_k^n=S_k\setminus a.$$

Если f — сфероид букета B_k^n в точке a, то определены степени $\gamma_i=[fK^n:\tau_i^n]$ отображения f куба K^n на клетке τ_i^n. Таким образом, каждому сфероиду f соответствует последовательность $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ целых чисел, которую мы будем называть *степенью* сфероида f. В силу леммы п. 2:4 степени эквивалентных сфероидов совпадают. Обратно, если степени сфероидов совпадают, то эти сфероиды эквивалентны. Это предложение доказывается совершенно аналогично теореме Хопфа (п. 7 : 3): рассматривается симплициальное отображение f подразделенного куба K^n в букет B_k^n; в каждой сфере S_i выбирается n-мерный шар Σ_i^n, тогда прообраз $f^{-1}(\Sigma_1^n \cup \ldots \cup \Sigma_k^n)$ состоит из конечного числа n-мерных эллипсоидов; далее, рассматривается такое, гомотопное тождественному, отображение букета B_k^n на себя, которое переводит множество $B_k^n \setminus (\Sigma_1^n \cup \ldots \cup \Sigma_k^n)$ в точку a; наконец, с эллипсоидами, расположенными в K^n, проводится такое же построение, как в п. 7 : 3.

Итак, каждой последовательности $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ целых чисел соответствует единственный элемент группы $\pi^n(B_k^n, a)$. Если f и g — сфероиды со степенями $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ и $(\gamma_1', \ldots, \gamma_k')$, то сфероид h, определенный формулой (7.1), имеет, очевидно, степень $(\gamma_1 + \gamma_1', \ldots, \gamma_k + \gamma_k')$ (ср. конец п. 7 : 3). Таким образом, при сложении элементов группы $\pi^n(B_k^n, a)$ степени соответствующих сфероидов складываются, так что группа $\pi^n(B_k^n, a)$ является свободной абелевой группой с k образующими. Более полно:

Теорема. *Пусть $B_k^n = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ — ориентированный n-мерной букет сфер порядка k, α_i — такой элемент группы $\pi^n(B_k^n, a)$, который определяется сфероидом, имеющим степень $+1$ на сфере S_i и степени 0 на остальных сферах. Тогда группа $\pi^n(B_k^n, a)$ является свободной абелевой группой с образующими $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Всякий сфероид f букета B_k^n в точке a, имеющий степень $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, принадлежит классу $\gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_k\alpha_k$.*

Докажем теперь следующее предложение, очень удобное во многих приложениях теории гомотопических групп.

Лемма. *Пусть f — непрерывное отображение ориентированной клетки $\bar{\tau}^n$ в n-мерный остов P^n клеточного комплекса P, переводящее $\dot{\tau}^n$ в остов P^{n-1}. Обозначим через $\tau_1^n, \ldots, \tau_k^n$ все как-либо ориентированные n-мерные клетки комплекса P, а через γ_i — степень $[f\tau^n : \tau_i^n]$ отображения f на клетке τ_i^n. Пусть, далее, g — непрерывное отображение полиэдра $\tilde{P}$ в пространство X, переводящее остов P^{n-1} в одну точку $b \in X$. Обозначим через β_i элемент группы $\pi^n(X, b)$, определяемый отображением g ориентированной клетки $\bar{\tau}_i^n$ в X. Тогда для элемента $\beta = \{gf\}$ группы $\pi^n(X, b)$, определенного отображением gf клетки $\bar{\tau}^n$ в X, имеет место формула*

$$\beta = \gamma_1\beta_1 + \ldots + \gamma_k\beta_k.$$

Для доказательства отождествим в одну точку a весь $(n-1)$-мерный остов P^{n-1} полиэдра $\tilde{P}^n$. Тогда отождествляющее отображение φ превращает каждую клетку $\bar{\tau}_i^n$ в n-мерную сферу S_i, а весь полиэдр $\tilde{P}^n$ — в n-мерный букет сфер $B_k^n = S_1 \cup \ldots \cup S_k$. Отображение φ переводит клетку $\bar{\tau}_i^n$ на сферу S_i со степенью $+1$ (при надлежаще выбранной ориентации сферы S^n, см. п. 7:4, (б)). Определим отображение ψ букета B_k^n в X как совпадающее с $g\varphi^{-1}$ на $B_k^n \setminus a$ и переводящее точку $a \in B_k^n$ в точку $b \in X$. Отображение ψ непрерывно, и мы имеем $g = \psi\varphi$ (ср. п. 7:4). Далее, в силу предложения (а) п. 7:4, клетку $\bar{\tau}^n$ можно считать n-мерным кубом. Тогда φf есть сфероид букета B_k^n в точке a, причем его степень равна, очевидно, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$. Поэтому сфероид φf принадлежит классу $\gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_k\alpha_k$, где элемент $\alpha_i \in \pi^n(B_k^n, a)$ определяется отображением φ клетки $\bar{\tau}_i^n$ в B_k^n. Применив гомоморфизм ψ группы $\pi^n(B_k^n, a)$ в $\pi^n(X, b)$, мы получим

$$\{\psi\varphi f\} = \gamma_1\psi(\alpha_1) + \ldots + \gamma_k\psi(\alpha_k).$$

Но элемент $\psi(\alpha_i)$ определяется отображением $\psi\varphi = g$ клетки $\bar{\tau}_i^n$ в X, т. е. $\psi(\alpha_i) = \beta_i$, а $\psi\varphi f = gf$. Таким образом,

$$\beta = \gamma_1\beta_1 + \ldots + \gamma_k\beta_k,$$

и лемма доказана.

7:6. Гомотопически простые пространства. Пространство X называется *гомотопически простым* в размерности n, если все автоморфизмы $\alpha^{\#}, \alpha \in \pi^1(X, x)$ группы $\pi^n(X, x)$ (см. п. 7:2) являются тождественными. Пространство с тривиальной фундаментальной группой называется *односвязным*. Очевидно, что односвязное пространство является гомотопически простым во всех размерностях. Пространство называется *асферичным* в размерности n, если его n-мерная гомотопическая группа тривиальна. Очевидно, что асферичное в размерности n пространство является гомотопически простым в этой размерности. Для пространства, гомотопически простого в размерности n, изоморфизм $p^{\#}$ не зависит от пути p, а определяется лишь начальной и конечной точками этого пути. Иначе, говоря, между группами $\pi^n(X, x)$ и $\pi^n(X, y)$ такого пространства устанавливается единственный вполне определенный изоморфизм $p^{\#}$. Условимся отождествлять между собой те элементы групп $\pi^n(X, x)$ и $\pi^n(X, y)$, которые переходят друг в друга при изоморфизме $p^{\#}$. Тогда, вместо семейства изоморфных между собой групп $\pi^n(X, x)$, $x \in X$, мы получим одну группу, которую обозначим через $\pi^n(X)$.

Нетрудно видеть, что при определении элементов группы $\pi^n(X)$ можно не фиксировать полюс отображаемой сферы, т. е. можно задавать элементы этой группы при помощи отображений n-мерной ориентированной (неполяризованной) сферы S^n в X.

В самом деле, пусть f — отображение ориентированной сферы S^n в X, q и q' — две точки сферы S^n, а φ_t — такая деформация тождественного отображения φ_0 сферы S^n на себя, что $\varphi_1(q) = q'$. Тогда $f\varphi_t$ есть деформация отображения $f\varphi_0 = f$ и, в силу (г), элементы $\{f\}$ и $\{f\varphi_1\}$ групп $\pi^n(X, f(q))$ и $\pi^n(X, f(q'))$ связаны соотношением

$\{f\} = p^{\#}\{f\varphi_1\}$, где p — путь, описываемый при деформации $f\varphi_t$ образом точки q. Иначе говоря, отображения f и $f\varphi_1$ сферы S^n с полюсом q определяют один и тот же элемент группы $\pi^n(X)$. Но отображение φ_1 гомотопно тождественному и потому имеет степень $+1$. Поэтому отображение $f\varphi_1$ определяет тот же элемент группы $\pi^n(X, f(q'))$, что и отображение f. Таким образом, и при выборе полюса сферы S^n в точке q, и при выборе полюса в точке q' отображение f определяет один и тот же элемент группы $\pi^n(X)$.

Заметим еще, что если f_0 и f_1 — два отображения n-мерной ориентированной (неполяризованной) сферы S^n в пространство X, гомотопически простое в размерности n, то эти отображения тогда и только тогда определяют один и тот же элемент группы $\pi^n(X)$, когда они гомотопны.

Из сказанного вытекает следующая теорема о классификации отображений n-мерной сферы в n-мерную сферу.

Теорема Хопфа. *Пусть S^n и Σ^n — две n-мерные ориентированные сферы. Отображения g_0 и g_1 сферы S^n в Σ^n гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же степень.*

Действительно, гомотопные между собой отображения имеют одну и ту же степень. Обратно, если отображения g_0 и g_1 сферы S^n в Σ^n имеют одну и ту же степень, то мы можем без ограничения общности считать, что они переводят некоторую точку a сферы S^n в одну и ту же точку Σ^n

$$g_0(a) = g_1(a).$$

Считая в лемме предыдущего пункта $\tau^n = S^n \setminus a$, $X = \Sigma^n$, а f — тождественным отображением сферы S^n на себя, мы получим, что отображения f_0 и f_1 определяют один и тот же элемент группы $\pi^n(\Sigma^n)$ и потому гомотопны между собой.

Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что всякое отображение сферы S^n на себя, имеющее степень $+1$, гомотопно тождественному отображению сферы S^n на себя [ибо тождественное отображение имеет степень $+1$; см. п. 7:4, (б)].

7:7. Относительные гомотопические группы. Пусть X — топологическое пространство, A — его замкнутое подмножество, $x \in A$ — фиксированная точка. Обозначим через K^{n-1} грань куба K^n, определенную уравнением $x^n = 0$, а через I^{n-1} — множество $\overline{\dot{K}^n \setminus K^{n-1}}$. Всякое отображение f куба K^n в X, переводящее K^{n-1} в A, а I^{n-1} — в точку x, назовем *относительным сфероидом*, или, более полно, сфероидом пространства X в точке x относительно A. Очевидно, что для всякого относительного сфероида f мы имеем: $f(\dot{K}^{n-1}) = x$. Относительные сфероиды f_0 и f_1, *эквивалентны*, если существует такая деформация f_t, соединяющая отображения f_0 и f_1, что

$$f_t(K^{n-1}) \subset A,\ f_t(I^{n-1}) = x,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Множество получающихся классов эквивалентности обозначается через $\pi^n(X, A, x)$. Очевидно, что

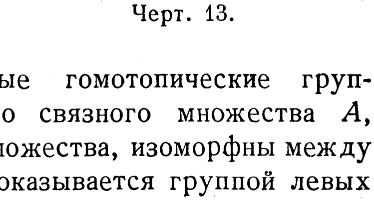
$$\pi^n(X, x, x) = \pi^n(X, x).$$

Групповая операция во множестве $\pi^n(X, A, x)$ вводится дословно так же, как и выше (см. черт. 5); так же проводится и проверка групповых аксиом (единицей служит элемент, определяемый таким сфероидом f, что $f(K^n) = x$). Построенная таким образом *относительная гомотопическая группа* будет коммутативна при $n \geqslant 3$ (доказательство остается тем же, ибо грань $x^2 = 0$ попрежнему отображается в точку x). Поэтому при $n \geqslant 3$ пользуются аддитивной записью операции в группе $\pi^n(X, A, x)$.

Пусть теперь x и y — две точки множества A, p — путь множества A, начинающийся в точке x и кончающийся в точке y, а f — сфероид пространства X в точке y относительно A. В этом случае мы определим сфероид pf пространства X в точке x относительно A формулами

$$pf(x^1, \ldots, x^n) = \begin{cases} p(t) & \text{для точек } (x^1, \ldots, x^n) \in \dot{\chi}_t(K^n),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ f\chi_1^{-1}(x^1, \ldots, x^n) & \text{для точек } (x^1, \ldots, x^n) \in \chi_1(K^n), \end{cases}$$

где χ_t — подобное преобразование куба с коэффициентом $\frac{2-t}{2}$ и с центром подобия *в центре грани* K^{n-1} (а не в центре куба K^n, как прежде; черт. 13; ср. с черт. 10). Соответствие $f \to pf$ порождает, как и прежде, гомоморфизм $p^\#$ группы $\pi^n(X, A, y)$ в группу $\pi^n(X, A, x)$. Соотношение (7.2) остается в силе; пути, гомотопные относительно концевых точек, порождают одинаковые гомоморфизмы. Наконец, отсюда мы находим, что $p^\#$ есть изоморфное отображение группы $\pi^n(X, A, y)$ на всю группу $\pi^n(X, A, x)$ (черт. 11 претерпевает очевидные изменения). Таким образом, относительные гомотопические группы пространства X относительно линейно связного множества A, определенные в различных точках этого множества, изоморфны между собой. Фундаментальная группа $\pi^1(A, x)$ оказывается группой левых операторов группы $\pi^n(X, A, x)$.



Черт. 13.

Если множество A односвязно, то изоморфизм $p^\#$ не зависит от пути p, а определяется лишь начальной и конечной точками этого пути. Иначе говоря, между группами $\pi^n(X, A, x)$ и $\pi^n(X, A, y)$ в этом случае устанавливается единственный вполне определенный изоморфизм $p^\#$. Условившись отождествлять между собой те элементы групп $\pi^n(X, A, x)$, определенных в различных точках множества A, которые переходят друг в друга при изоморфизме $p^{\#}$, мы получим, вместо семейства изоморфных групп $\pi^n(X, A, x)$, $x \in A$, одну группу, которую обозначим через $\pi^n(X, A)$.

(а). Пусть $E_1, \ldots, E_k$ — такие полиэдры, каждый из которых гомеоморфен n-мерному шару, что все они имеют общую точку a, причем эта точка a является единственной общей точкой каждых двух полиэдров E_i и E_j, $i \neq j$, и расположена на границе каждого из шаров E_i. Полиэдр $E_k^n = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ называется n-мерным *букетом шаров* порядка k. Обозначим через S_i границу шара E_i. Тогда множество $B_k^{n-1} = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ является $(n-1)$-мерным букетом сфер порядка k. Мы покажем, что *в случае* $X = E_k^n$, $A = B_k^{n-1}$ *группа* $\pi^n(X, A, a)$ *является свободной абелевой группой с* k *образующими.*

В самом деле ориентируем клетки $\tau_i^n = E_i \setminus S_i$ и $\tau_i^{n-1} = S_i \setminus a$ таким образом, чтобы было

$$[\tau_i^n : \tau_i^{n-1}] = +1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Если f — отображение ориентированного куба K^n в E_k^n, переводящее K^{n-1} в B_k^{n-1}, а I^{n-1} — в a, то определены степени $\gamma_i = [fK^n : \tau_i^n]$ отображения f куба K^n на клетке τ_i^n, $i = 1, \ldots, k$. Последовательность $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ мы назовем *степенью отображения* f. Ориентируем клетки $\tau^n = K^n \setminus \dot{K}^n$ и $\tau^{n-1} = K^{n-1} \setminus \dot{K}^{n-1}$ так, чтобы было $[\tau^n : \tau^{n-1}] = +1$. Тогда определена степень $[f\tau^{n-1} : \tau_i^{n-1}]$ отображения f клетки τ^{n-1} на клетке τ_i^{n-1}, причем в силу формулы (2.4) мы имеем: $[f\tau^{n-1} : \tau_i^{n-1}] = \gamma_i$. Таким образом, степень $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ отображения f куба K^n на E_k^n совпадает со степенью отображения f куба K^{n-1} (или сферы $\dot{K}^{n-1}$) на букет B_k^{n-1}. Если два отображения f_0 и f_1 куба K^n на E_k^n определяют один и тот же элемент группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$, то они клеточно гомотопны и потому имеют одинаковые степени. Поэтому каждому элементу группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$ соответствует (по представителям) вполне определенная степень $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$. При сложении элементов группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$ их степени соответственно складываются. Мы получаем гомоморфное отображение группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$ в абелеву группу J_0^k с k образующими, элементами которой являются последовательности $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ целых чисел. Обозначим этот гомоморфизм через ε.

Покажем, что ε есть гомоморфизм на всю группу J_0^k. Действительно, пусть $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ — заданная последовательность целых чисел, а f — такое отображение множества $\dot{K}^n$ в B_k^{n-1}, которое переводит I^{n-1} в точку a и имеет на букете B_k^{n-1} степень $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$; такое отображение существует в силу теоремы п. 7:5. Так как группа $\pi^n(E_k^n)$ тривиальна, то отображение f можно продолжить в отображение всего куба K^n в E_k^n [см. предложение (в) п. 7:4]. Полученное отображение f куба K^n в E_k^n определит, в силу сказанного выше, такой элемент группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$, который имеет степень $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$.

Покажем, наконец, что отображение ε изоморфно. Пусть f — отображение куба K^n в E_k^n, переводящее K^{n-1} в B_k^{n-1}, а I^{n-1} — в a и имеющее степень $(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда (см. теорему п. 7:5) отображение f сферы $\dot{K}^n$ в B_k^{n-1} гомотопно нулю в B_k^{n-1}, и мы можем без ограничения общности предполагать, что отображение f переводит $\dot{K}^n$ в точку a [см. лемму (а) п. 2:2]. Но тогда отображение f гомотопно нулю таким образом, что во время деформации множество $\dot{K}^n$ остается отображенным в a, ибо группа $\pi^n(E_k^n)$ тривиальна.

Итак, группы $\pi^n(E_k^n, B_k^{n-1}, a)$ и J_0^k изоморфны.

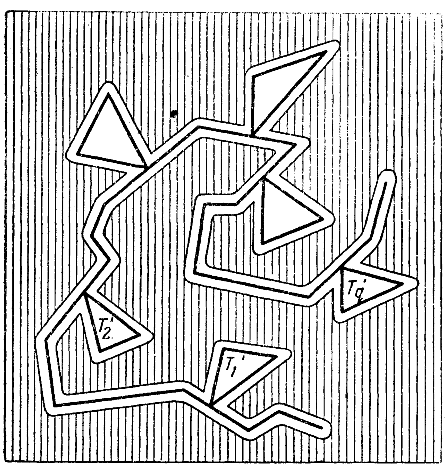
(б). *Пусть A — односвязное замкнутое подмножество пространства X,* а *f — отображение куба K^n в X, переводящее $\dot{K}^n$ в A. Тогда отображение f однозначно определяет некоторый элемент группы $\pi^n(X, A)$.*

Действительно, отображение f, очевидно, гомотопно такому отображению, которое переводит I^{n-1} в одну точку $x \in A$, и это определяет (причем, как легко видеть, однозначно) некоторый элемент группы $\pi^n(X, A, x)$.

(в). *Пусть A — односвязное замкнутое подмножество пространства X, P — клеточный комплекс, а φ — отображение полиэдра P в X, переводящее остов P^{n-1} в A. Пусть, далее, f — клеточное отображение ориентированного куба K^n в $\tilde{P}$, имеющее степень* 0 *на каждой n-мерной клетке комплекса P. Тогда элемент группы $\pi^n(X, A)$, определяемый отображением φf куба K^n в X, равен нулю.*

Так как группа $\pi^1(A)$ тривиальна, то без ограничения общности мы можем предполагать при доказательстве, что весь одномерный остов L^1 некоторого симплициального подразделения L комплекса P переводится отображением φ в одну точку $x \in A$. Так как $\varphi(\tilde{P}^0) = x$, то мы можем отождествить нульмерный остов комплекса P в одну точку, т. е. считать, что P имеет лишь одну вершину a. Пусть $\tau_1^n, \ldots, \tau_q^n$ — все n-мерные клетки комплекса P. Пусть, далее, $T_1, \ldots, T_q$ суть n-мерные симплексы подразделения L, выбранные по одному в каждой из клеток $\tau_1^n, \ldots, \tau_q^n$ и имеющие a своей общей вершиной. Мы можем предполагать, что других общих точек, кроме a, симплексы $T_1 \ldots, T_q$ попарно не имеют, так что $E_q^n = T_1 \cup \ldots \cup T_q$ есть n-мерный букет шаров.

Пусть e — клеточное отображение комплекса L в P, гомотопное тождественному и переводящее множество $\tilde{P} \setminus E_q^n$ в $\tilde{P}^{n-1}$ (см. лемму (б) п. 2:2). Мы можем без ограничения общности предполагать, что f является симплициальным отображением некоторого симплициального разбиения K куба K^n в L, причем все симплексы $T'_1, \ldots, T'_p$, отображающиеся без вырождения на один из симплексов $T_1, \ldots, T_q$, расположены строго внутри K^n и попарно не пересекаются. Назовем отмеченными те вершины симплексов $T'_1, \ldots, T'_p$, которые переходят в a при симплициальном отображении f. Мы можем предполагать K таким подразделением, что в остове K^1 существует простая незамкнутая ломаная Λ, проходящая через все отмеченные вершины симплексов $T'_1, \ldots, T'_p$ и не имеющая с этими симплексами других общих точек (черт. 14). Множество $T'_1 \cup \ldots \cup T'_p \cup \Lambda$ переводится отображением f в $E^n_q \cup L^1$, а его дополнение (в кубе K^n) — в $\overline{P \setminus E^n_q}$. Заменив отображение f гомотопным ему отображением f', мы можем считать, что некоторая окрестность U множества $T'_1 \cup \ldots \cup T'_p \cup \Lambda$ переводится отображением f' в $E^n_q \cup L^1$, а ее дополнение $K^n \setminus U$ — в $\overline{P \setminus E^n_q}$. При этом, окрестность U мы выберем так, чтобы $\overline{U}$ было гомеоморфно n-мерному шару.



Черт. 14.

Пусть Φ_t — деформация тождественного отображения Φ_0 куба K^n на себя, при которой U не двигается, а $\Phi_1(K^n) \subset \overline{U}$, причем $\Phi_t(K^n \setminus U) \subset K^n \setminus U$. Тогда отображение $\varphi e f' \Phi_1$ гомотопно φf относительно A, и потому эти отображения определяют один и тот же элемент группы $\pi^n(X, A)$. Но $f'\Phi_1(K^n) \subset E^n_q \cup L^1$, а $\varphi e(L^1) = x$. Поэтому, если g — произвольное отображение множества $E^n_q \cup L^1$ в E^n_q, тождественное на E^n_q и переводящее L^1 в $L^1 \cap E^n_q$, то

$$\varphi e f' \Phi_1 = (\varphi e) g f' \Phi_1.$$

Отображение $gf'\Phi_1$ переводит K^n в E^n_q и имеет, по предположению, степень $(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому оно гомотопно отображению куба K^n в B^{n-1}_q, где B^{n-1}_q — граница букета E^n_q [см. (а)], а отображение $\varphi e f' \Phi_1$ гомотопно относительно A отображению всего куба K^n в A.

(г). *Пусть A — односвязное замкнутое подмножество пространства X, а φ — отображение ориентированной клетки τ^n в X, пере-*

водящее $\dot{\tau}^n$ в A. Тогда отображение φ однозначно определяет некоторый элемент группы $\pi^n(X, A)$. Именно, если f — отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$ со степенью $+1$, то элемент группы $\pi^n(X, A)$, определяемый отображением φf, зависит только от φ.

Действительно, пусть $a \in \dot{\tau}^n$, а f и f' — два отображения куба K^n на $\bar{\tau}^n$ со степенью $+1$. Без ограничения общности можно считать (заменив, если нужно, отображения f и f' гомотопными им отображениями), что f и f' переводят I^{n-1} в точку a. Элементы группы $\pi^n(X, A)$, определяемые отображениями φf и $\varphi f'$, обозначим через α и α' соответственно. Пусть g — отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$, определяемое формулой

$$g(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f'(1 - x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Отображение g имеет степень -1, а отображение φg определяет элемент $-\alpha \in \pi^n(X, A)$. Пусть, далее, h — отображение куба K^n на $\bar{\tau}^n$, получаемое из f и g по формулам (7.1). Это отображение имеет степень 0, а отображение φh определяет элемент $\alpha - \alpha' \in \pi^n(X, A)$. Но в силу (в) отображение φh определяет нулевой элемент группы $\pi^n(X, A)$, т. е. $\alpha = \alpha'$.

(д). *Пусть A — односвязное замкнутое подмножество пространства X, P — клеточный комплекс, φ — отображение полиэдра $\tilde{P}$ в X, переводящее остов $\tilde{P}^{n-1}$ в A. Пусть $\tau_1^n, \ldots, \tau_q^n$ — все как-либо ориентированные n-мерные клетки комплекса P, а α_i — элемент группы $\pi^n(X, A)$, определяемый отображением φ клетки τ_i^n в X, $i = 1, \ldots, q$. Пусть, наконец, f — клеточное отображение куба K^n в P, а $\gamma_i = [fK^n : \tau_i^n]$ — степень этого отображения на клетке τ_i^n. Тогда элемент группы $\pi^n(X, A)$, определяемый отображением φf, равен $\gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_q\alpha_q$.*

Прежде всего заметим, что указанный элемент группы $\pi^n(X, A)$ однозначно определяется числами $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ — это доказывается так же, как и предложение (г). Поэтому мы обозначим этот элемент через $\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$. Далее, если f и g — отображения куба K^n в P, имеющие, соответственно, степени $(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ и $(\gamma_1', \ldots, \gamma_q')$ и удовлетворяющие условию $f(I^{n-1}) = g(I^{n-1}) = x \in \tilde{P}^{n-1}$ (что всегда можно предположить), то, определив отображение h формулой (7.1), мы найдем, что его степень равна $(\gamma_1 + \gamma_1', \ldots, \gamma_q + \gamma_q')$. Таким образом

$$\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_q) + \alpha(\gamma_1', \ldots, \gamma_q') = \alpha(\gamma_1 + \gamma_1', \ldots, \gamma_q + \gamma_q').$$

Остается рассмотреть отображение, у которого одна из степеней, скажем γ_i, равна $+1$, а остальные равны нулю. Из (г) ясно, что такое отображение определяет элемент α_i группы $\pi^n(X, A)$.

(е). *Пусть A — односвязное замкнутое подмножество пространства X, а f_0 — такое отображение куба K^n в X, которое переводит $\dot{K}^n$ в A и определяет нулевой элемент группы $\pi^n(X, A)$. Тогда существует такая деформация f_t отображения f_0 относительно $\dot{K}^n$, что $f_1(K^n) \subset A$.*

Действительно, пусть φ_t — такая деформация отображения $f_0 = \varphi_0$, что $\varphi_t(\dot{K}^n) \subset A$ и $\varphi_1(K^n) \subset A$, а Φ — соответствующее отображение произведения $K^n \times I$ в X. Отображение Φ переводит множество $\dot{K}^n \times I \cup K^n \times 1$ в A. Пусть g_t — деформация тождественного отображения g_0 множества $K^n \times I$ на себя, представляющая собой «вдавливание» этого многогранника со стороны грани $K^n \times 0$ на множество $\dot{K}^n \times I \cup K^n \times 1$ (ср. доказательство леммы (а) п. 2:2; черт. 2). Тогда Φg_t представляет собой искомую деформацию отображения $\Phi g_0 = f_0$.

(ж). *Пусть $\bar{\tau}^n$ есть n-мерный ориентированный многогранник, τ^{n-1} — его $(n-1)$-мерная грань, так что множество $E^{n-1} = \dot{\tau}^n \setminus \bar{\tau}^{n-1}$ гомеоморфно n-мерному шару. Пусть, далее, f_0 — отображение множества E^{n-1} в замкнутое односвязное подмножество A пространства X, а α — произвольный элемент группы $\pi^n(X, A)$. Тогда f_0 можно продолжить в такое отображение куба K^n в X, которое определит элемент α.*

Действительно, пусть f_t — такая деформация отображения f_0 множества E^{n-1} в A, что $f_t(E^{n-1}) \subset A$ и $f_1(E^{n-1}) = x \in A$. Пусть, далее, f_1 — произвольное отображение многогранника $\bar{\tau}^n$ в X, определяющее элемент $\alpha \in \pi^n(X, A)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $f_1(E^{n-1}) = x$. Рассматривая теперь деформацию f_t в обратном порядке и применяя лемму (а) п. 2:2, мы и получим, исходя из f_1, нужное нам отображение f_0 куба K^n в X.

§ 8. Теория препятствий

8:1. Определение и свойства препятствия. Пусть X — топологическое пространство, гомотопически простое в некоторой размерности n; при $n = 1$ предположим дополнительно, что группа $\pi^1(X)$ абелева. Пусть, далее, K — симплициальный комплекс, f — непрерывное отображение его n-мерного остова K^n в X. Тогда, если T^{n+1} — ориентированный $(n+1)$-мерный симплекс комплекса K, а Σ^n — его граница, ориентированная так, что $[T^{n+1} : \Sigma^n] = +1$, то отображение f сферы Σ^n в X определяет некоторый элемент группы $\pi^n(X)$, который мы поставим в соответствие симплексу T^{n+1} и обозначим через $z_f^{n+1}(T^{n+1})$. При перемене ориентации симплекса T^{n+1} меняется и ориентация его границы, так что

$$z_f^{n+1}(-T^{n+1}) = -z_f^{n+1}(T^{n+1}).$$

Следовательно, функция z_f^{n+1}, заданная на $(n+1)$-мерных ориентированных симплексах комплекса K, есть $(n+1)$-мерная цепь по области коэффициентов $\pi^n(X)$.

(а). *Для возможности распространения отображения f на $(n+1)$-мерный остов K^{n+1} комплекса K необходимо и достаточно, чтобы цепь z_f^{n+1} была равна нулю.*

Это свойство цепи z_f^{n+1} непосредственно следует из предложения (в) п. 7:4. На основании этого свойства цепь z_f^{n+1} называют *препятствием* к распространению отображения f на остов K^{n+1}.

(б). *При непрерывной деформации отображения f остова K^n в X цепь z_f^{n+1} не меняется.*

Это утверждение очевидно.

(в). *Препятствие z_f^{n+1} является ∇-циклом комплекса K.*

Действительно, пусть T^{n+2} — произвольный $(n+2)$-мерный ориентированный симплекс комплекса K; s-мерный остов этого симплекса мы будем обозначать через L^s. Тождественное отображение φ_0 остова L^{n-1} в L^{n+1} можно стянуть в точку, т. е. существует такое отображение Φ произведения $L^{n-1}\times \overline{I}$ в L^{n+1}, которое тождественно отображает множество $L^{n-1}\times 0$ на L^{n-1} и переводит множество $L^{n-1}\times 1$ в одну точку остова L^{n+1}. В силу теоремы о клеточной аппроксимации (п. 2 : 2) можно предполагать, что $\Phi(L^{n-1}\times \overline{I})\subset L^n$. Это дает нам такую деформацию φ_t тождественного отображения φ_0 остова L^{n-1}, что $\varphi_t(L^{n-1})\subset L^n$, а φ_1 переводит L^{n-1} в одну точку остова L^n. Так как отображение f задано на остове L^n, то $f\varphi_t$ есть деформация отображения $f\varphi_0 = f$ остова L^{n-1} в X. В силу леммы (а) п. 2:2 эту деформацию можно распространить в деформацию отображения f, заданного на всем остове L^n. В результате этой деформации мы получим такое отображение f' (заданное не на всем K^n, а только на L^n), которое на L^{n-1} совпадает с $f\varphi_1$, т. е. переводит L^{n-1} в одну точку пространства X. Поэтому для каждой n-мерной ориентированной грани T_i^n симплекса T^{n+2} отображение f' определяет некоторый элемент $x^n(T_i^n)$ группы $\pi^n(X)$.

Если T^{n+1} — ориентированная $(n+1)$-мерная грань симплекса T^{n+2}, а Σ^n — ее граница, ориентированная так, что $[T^{n+1}:\Sigma^n] = +1$, то тождественное отображение сферы Σ^n в T^{n+2} имеет на симплексе T_i^n степень $[T^{n+1}:T_i^n]$. Поэтому в силу леммы п. 7:5 коэффициент цепи $z_{f'}^{n+1}$ на симплексе T^{n+1}, определяемый отображением f' сферы Σ^n в X (а значит, и равный ему, в силу (а), коэффициент цепи z_f^{n+1} на этом симплексе), равен $\sum\limits_i [T^{n+1}:T_i^n]\cdot x^n(T_i^n)$, т. е. равен $\nabla x^n(T^{n+1})$. Таким образом, значение цепи ∇z_f^{n+1} на симплексе T^{n+2} равно $\nabla\nabla x^n(T^{n+2}) = 0$.

(г). *Пусть g — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L, а f — непрерывное отображение остова L^n в X. Тогда fg есть отображение остова K^n в X, и для этого отображения определено препятствие z_{fg}^{n+1}. Оказывается, что $z_{fg}^{n+1} = g^* z_f^{n+1}$.*

Действительно, если симплекс $T^{n+1} \in K$ не вырождается при отображении g, то отображение fg границы симплекса T^{n+1} в X определяет тот же элемент группы $\pi^n(X)$, что и отображение f границы симплекса $g(T^{n+1})$; если же T^{n+1} вырождается, то отображение fg определено на всем симплексе T^{n+1} и коэффициент препятствия z_{fg}^{n+1} на этом симплексе равен нулю.

(д). Единственным свойством симплициального комплекса, неприсущим произвольному клеточному комплексу, которым мы пользовались при определении и изучении свойств препятствия, является то, что *граница $(n+1)$-мерного симплекса гомеоморфна n-мерной сфере*. Поэтому все проведенные рассуждения пригодны для любого клеточного комплекса, обладающего тем свойством, что граница любой его s-мерной клетки гомеоморфна $(s-1)$-мерной сфере. Этим свойством обладает, например, топологическое произведение $K \times \bar{I}$ произвольного симплициального комплекса K на единичный отрезок $\bar{I}$. Мы можем поэтому все доказанные предложения применять для клеточного комплекса $K \times \bar{I}$*.

8:2. Различающая цепь. Пусть K — симплициальный комплекс. Обозначим через μ отображение произведения $\tilde{K} \times \bar{I}$ в $\tilde{K}$, переводящее каждую точку $(x, t) \in \tilde{K} \times \bar{I}$ в точку $x \in \tilde{K}$. Пусть, далее, f и g — два отображения остова K^n в X, совпадающие на K^{n-1}. Определим отображение F n-мерного остова произведения $K \times I$ в X соотношениями: $F = f\mu$ на $K^n \times 0$; $F = g\mu$ на $K^n \times 1$; $F = f\mu = g\mu$ на $K^{n-1} \times \bar{I}$. Тогда в комплексе $K \times \bar{I}$ определится $(n+1)$-мерное препятствие z_F^{n+1}. Так как на $K^n \times 0$ отображение F совпадает с $f\mu$, то на клетках вида $T^{n+1} \times 0$ цепь z_F^{n+1} совпадает с $z_f^{n+1} \times 0$. Точно так же, на клетках вида $T^{n+1} \times 0$ цепь z_F^{n+1} совпадает с $z_g^{n+1} \times 1$. Разность $z_F^{n+1} - z_f^{n+1} \times 0 - z_g^{n+1} \times 1$ имеет

*. То же справедливо для произвольного комплекса многогранников (см. [3]). Заметим, что можно дать определение препятствия, пригодное для любого клеточного комплекса P. Именно, если f — отображение остова P^n в X, а τ^{n+1} — ориентированная $(n+1)$-мерная клетка комплекса P, то определим отображение g симплекса T^{n+1} на τ^{n+1}, переводящее $\dot{T}^{n+1}$ в $\dot{\tau}^{n+1}$ и имеющее степень $+1$. Отображение fg границы этого симплекса в X определяет элемент группы $\pi^n(X)$, который мы и поставим в соответствие клетке τ^{n+1}. Определенное таким образом препятствие обладает всеми доказанными свойствами (а) — (г). Для свойства (в) доказательство сохраняется, для свойства (г) доказательство очевидно, для доказательства свойства (а) в этом случае можно, например, воспользоваться следующим предложением. Для всякой клетки τ^n существует отображение симплекса T^n на $\bar{\tau}^n$, переводящее $\dot{T}^n$ в $\dot{\tau}^n$ и гомеоморфно отображающее внутренность симплекса T^n на τ^n. Точно так же рассматриваемая ниже *различающая* цепь может быть определена для любого клеточного комплекса.

отличные от нуля значения только на клетках вида $T^n \times I$, т. е. эта разность имеет вид $d^n_{f,g} \times I$, где $d^n_{f,g}$ есть n-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов $\pi^n(X)$. Эта цепь $d^n_{f,g}$ называется n-мерной *различающей* цепью отображений f и g. Таким образом, мы имеем

$$z_F^{n+1} = z_f^{n+1} \times 0 + z_g^{n+1} \times 1 + d^n_{f,g} \times I.$$

Взяв ∇-границу и воспользовавшись предложением (в) п. 8:1 и соотношениями (3:8), мы получим: $\nabla d^n_{f,g} = z_f^{n+1} - z_g^{n+1}$. Таким образом, мы доказали следующее предложение:

(а). *Для произвольных совпадающих на K^{n-1} отображений f и g остова K^n в X имеем*:

$$\nabla d^n_{f,g} = z_f^{n+1} - z_g^{n+1}.$$

(б). *Если отображения f и g одновременно деформируются, оставаясь совпадающими на K^{n-1} в каждый момент деформации, то их различающая $d^n_{f,g}$ не меняется.*

Это предложение очевидно.

(в). *Если отображения f и g, заданные на R^n и совпадающие на K^{n-1}, таковы, что $d^n_{f,g} = 0$, то эти отображения гомотопны относительно K^{n-1}.*

Действительно, так как остов K^n не содержит $(n+1)$-мерных симплексов, то для построенного выше отображения F произведения $K^n \times I$ в X мы имеем

$$z_F^{n+1} = d^n_{f,g} \times I = 0.$$

Таким образом, отображение F можно продолжить, в силу предложения (а) п. 8:1, до отображения всего произведения $\widetilde{K}^n \times \bar{I}$ в X, а это и дает искомую деформацию.

(г). *Если f, g и h — отображения остова K^n в X, совпадающие на K^{n-1}, то*

$$d^n_{f,g} + d^n_{g,h} = d^n_{f,h}.$$

В самом деле, пусть T^n — ориентированный n-мерный симплекс комплекса K^n, Σ^{n-1} — его граница. Отображение f сферы Σ^{n-1} в X (совпадающее с g и h) гомотопно нулю, ибо оно уже продолжено на симплекс T^n [см. п. 7:4, (в)]. Выберем деформацию отображения f сферы Σ^{n-1}, переводящую f в отображение всей сферы Σ^{n-1} в одну точку, и продолжим (см. лемму (а) п. 2:2) эту деформацию в одновременную деформацию отображений g и h, заданных на T^n. В результате мы получим отображения f', g', h' симплекса T^n, переводящие Σ^{n-1} в одну и ту же точку пространства X, т. е. определяющие некоторые элементы α, β, γ группы $\pi^n(X)$. Граница клетки $T^n \times I$ переводится отображением μ на симплекс T^n, причем симплекс $T^n \times 0$

отображается на T^n со степенью $+1$, а симплекс $T^n\times 1$ — со степенью -1 [см. формулы (3.8)]. Поэтому в силу леммы п. 7:5 мы имеем

$$d^n_{f',g'}(T^n)=\alpha-\beta;\ d^n_{f',h'}(T^n)=\alpha-\gamma,\ d^n_{g',h'}(T^n)=\beta-\gamma,$$

откуда и следует доказываемое равенство [см. (б)].

(д). *Если f — произвольное отображение остова K^n в X и d^n — произвольная n-мерная цепь комплекса K по области коэффициентов $\pi^n(X)$, то существует такое отображение g остова K^n в X, совпадающее с f на K^{n-1}, что $d^n_{f,g}=d^n$.*

Построение такого отображения можно вести отдельно для каждого симплекса T^n комплекса K. Пусть f_t — деформация отображения $f_0=f$ симплекса T^n в отображение f_1 всего симплекса T^n в одну точку $a\in X$ и f_1' — отображение симплекса T^n в X, переводящее границу Σ^{n-1} симплекса T^n в a и определяющее элемент $-d^n(T^n)$ группы $\pi^n(X)$. Тогда различающая отображений f_1 и f_1' симплекса T^n равна [см. (г)]

$$0-[-d^n(T^n)]=d^n(T^n).$$

Рассмотрим теперь деформацию f_t в обратном порядке — как деформацию отображения f_1 в f_0, и пусть f_t' — такая деформация отображения f_1', что f_t и f_t' совпадают на Σ^{n-1} при любом t. Тогда различающая отображений f_t и f_t' равна $d^n(T^n)$ при любом t, и в результате деформации f_t' мы получаем такое отображение $g=f_0'$ симплекса T^n в X, совпадающее на Σ^{n-1} с f, что

$$d^n_{f,g}(T^n)=d^n(T^n).$$

(е). *Пусть f — отображение остова K^n в X и f_t — такая деформация отображения $f_0=f$, что на K^{n-2} отображение не меняется за все время деформации, а получившееся в результате этой деформации отображение $g=f_1$ совпадает с f на K^{n-1}. Тогда различающая $d^n_{f,g}$ является гомологичным нулю ∇-циклом.*

В самом деле, пусть F — отображение n-мерного остова произведения $K^n\times I$ в X, определенное равенствами $F=f\mu$ на $K^n\times 0$; $F=g\mu$ на $K^n\times 1$; $F=f\mu=g\mu$ на $K^{n-1}\times I$. Тогда

$$z^{n+1}_F=d^n_{f,g}\times I.$$

Пусть, далее, G — отображение произведения $K^n\times I$ в X, определенное соотношением $G=f_t\mu$ на $K^n\times t$, т. е. отображение, определяемое деформацией f_t. Тогда отображения F и G совпадают на множествах $K^n\times 0$, $K^n\times 1$ и $K^{n-2}\times I$. Поэтому определена различающая $d^n_{F,G}$, причем на симплексах вида $K^n\times 0$ и $K^n\times 1$ она обращается в нуль. Следовательно, $d^n_{F,G}=x^{n-1}\times I$, где x^{n-1} — некоторая $(n-1)$-мерная цепь комплекса K^n по области коэффициентов $\pi^n(X)$. В силу (а) мы имеем

$$\nabla d^n_{F,G} = z^{n+1}_F - z^{n+1}_G,$$

или, так как $z^{n+1}_G = 0$ (отображение G определено уже на всем произведении $K^n \times I$).

$$\nabla (x^{n-1} \times I) = d^n_{f,g} \times I.$$

Итак,

$$d^n_{f,\,g} = -\nabla x^{n-1}.$$

(ж). Обратно, *если f и g — такие отображения остова K^n в X, которые совпадают на K^{n-1} и для которых $d^n_{f,g}$ есть гомологичный нулю ∇-цикл, то f и g гомотопны относительно K^{n-2}.*

Действительно, пусть x^{n-1} — такая цепь, что $\nabla x^{n-1} = -d^n_{f,g}$. Рассмотрим отображение F произведения $\widetilde{K}^n \times \bar{I}$ в X, совпадающее на множествах $K^n \times 0$, $K^n \times 1$ и $K^{n-1} \times I$ с отображениями $f\mu$, $g\mu$ и $f\mu = g\mu$. В силу предложения (д), существует такое отображение G, определенное на n-мерном остове произведения $K^n \times \bar{I}$ и совпадающее с F на множествах $K^n \times 0$, $K^n \times 1$ и $K^{n-2} \times I$, что $d^n_{F,G} = x^{n-1} \times I$. В силу (а), имеем

$$z^{n+1}_G = z^{n+1}_F - \nabla d^n_{F,G} = d^n_{f,g} \times I + (\nabla x^{n-1}) \times I = 0.$$

Поэтому выбранное отображение G можно продолжить на все произведение $K^n \times I$, а это и дает искомую деформацию.

(з). *Пусть h — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L, а f и g — два непрерывных отображения остова L^n в X, совпадающие на L^{n-1}. Тогда отображения fh и gh остова K^{n-1} в X совпадают на K^{n-1} и различающая $d^n_{fh,\,gh}$ этих отображений равна $h^* d^n_{f,g}$* [см. п. 8:1, (г)].

(и). *Пусть f — отображение остова K^n в X, z^{n+1}_f — его препятствие, а z^{n+1} — ∇-цикл, гомологичный циклу z^{n+1}_f. Тогда существует отображение g, совпадающее с f на K^{n-1}, для которого $z^{n+1}_g = z^{n+1}$.*

Действительно, пусть d^n — такая цепь, что $\nabla d^n = z^{n+1}_f - z^{n+1}$. Построим [см. (г)] такое отображение g остова K^n в X, совпадающее с f на K^{n-1}, для которого $d^n_{f,g} = d^n$. Тогда, в силу (а), мы получим: $z^{n+1}_g = z^{n+1}$.

Замечание. Из приведенного доказательства ясно, что отображение g может быть выбрано таким образом, что оно отличается от f только на таких n-мерных симплексах комплекса K^n, на которых цепь d^n принимает отличные от нуля значения.

§ 9. Классификация отображений n-мерного комплекса в линейно связное пространство, асферичное во всех размерностях, меньших n

9:1. Классификационная теорема Уитнея. Пусть Y_n — линейно связное пространство, асферичное во всех размерностях, меньших n, т. е. пространство, для которого группы $\pi^1(Y_n), \ldots, \pi^{n-1}(Y_n)$ тривиальны. Установим прежде всего следующее предложение.

Лемма. *Всякое отображение f_0 комплекса P в Y_n гомотопно такому отображению f_1, которое переводит весь $(n-1)$-мерный остов P^{n-1} в одну точку $a \in Y_n$.*

Доказательство достаточно провести только для симплициальных комплексов. При $n = 1$ справедливость леммы следует из линейной связности пространства Y_n и леммы (а) п. 2:2. Предположим, что лемма справедлива для всех $n \leqslant m$ и пусть Y_{m+1} — пространство, асферичное во всех размерностях, меньших $m+1$. В силу леммы (а) п. 2:2 достаточно рассмотреть случай, когда комплекс K, который мы отображаем в Y_{m+1}, имеет размерность m. В силу предположения индукции мы можем считать, что рассматриваемое отображение f комплекса $K = K^m$ в Y_{m+1} уже переводит весь остов K^{m-1} в одну точку $a \in Y_{m+1}$. Если e — отображение всего комплекса K^m в точку a, то определена различающая $d^m_{f,e}$, равная нулю в силу тривиальности группы $\pi^m(Y_{m+1})$. Поэтому в силу предложения (в) п. 8:2 отображения f и e гомотопны.

Замечание. Из доказательства нетрудно усмотреть, что если подкомплекс $Q \subset P$ уже переводился отображением f_0 в точку a, то можно предполагать, что в течение всей деформации полиэдр $\tilde{Q}$ переводится в точку a.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия для того, чтобы два отображения f и g заданного n-мерного комплекса K^n в Y_n были гомотопны между собой. При этом, согласно доказанной лемме, мы можем ограничиться рассмотрением только таких отображений, которые переводят весь остов K^{n-1} в точку $a \in Y_n$. Такие отображения будем называть *нормальными*. Если f — нормальное отображение комплекса K^n в Y_n, а e — отображение всего комплекса K^n в точку a, то определена различающая $d^n_{f,e}$, которую мы будем обозначать в этом пункте через $d(f)$. Так как комплекс K^n не содержит $(n+1)$-мерных симплексов, то n-мерная цепь $d(f)$ является ∇-циклом комплекса K^n по области коэффициентов $\pi^n(Y_n)$.

(а). *Нормальные отображения f и g комплекса K^n в Y_n гомотопны между собой тогда и только тогда, когда ∇-циклы $d(f)$ и $d(g)$ гомологичны между собой.*

В самом деле, если $d(f) \underset{\nabla}{\sim} d(g)$ в K^n, то, в силу (г) п. 8:2, имеем

$$d^n_{f,g} = d(f) - d(g) \underset{\nabla}{\sim} 0,$$

и потому отображения f и g гомотопны [см. п. 8:2, (ж)]. Обратно, если нормальные отображения f и g гомотопны между собой, то существует такое отображение F произведения $K^n \times \bar{I}$ в Y_n, что $F = f\mu$ на $K^n \times 0$ и $F = g\mu$ на $K^n \times 1$ (μ — такое отображение произведения $\tilde{K}^n \times \bar{I}$ на $\tilde{K}^n$, которое переводит точку $(x, t) \in \tilde{K}^n \times \bar{I}$ в точку $x \in \tilde{K}^n$; см. п. 8:2). В силу доказанной выше леммы можно предполагать при этом, что отображение F переводит весь $(n-1)$-мерный остов произведения $K^n \times I$ в точку a. Иначе говоря, отображения f и g гомотопны относительно K^{n-2}. Из этого в силу п. 8:2, (е) вытекает, что $d^n_{f,g} \underset{\nabla}{\sim} 0$ или [см. п. 8:2, (г)] $d(f) \underset{\nabla}{\sim} d(g)$.

Доказанная лемма позволяет решить поставленный вопрос о классификации отображений комплекса K^n в пространство Y_n. Пусть f — произвольное отображение комплекса K^n в Y_n, а g — гомотопное ему нормальное отображение. Если g' — другое нормальное отображение, гомотопное f, то циклы $d(g)$ и $d(g')$ гомологичны в силу (а). Таким образом, класс гомологий цикла $d(g)$ однозначно определяется отображением f, и мы обозначим этот класс гомологий через $D(f)$. Предложение (а) показывает нам теперь, что для гомотопности двух произвольных отображений f и f' комплекса K^n в Y_n необходимо и достаточно, чтобы совпадали элементы $D(f)$ и $D(f')$ группы $\nabla^n(K^n, \pi^n(Y_n))$. Далее, из предложения (д) п. 8:2 вытекает, что для любого элемента D группы $\nabla^n(K^n, \pi^n(Y_n))$ существует такое отображение f, что $D(f) = D$. Тем самым доказано следующее предложение.

Теорема Уитнея. *Соответствие $f \to D(f)$ переводит гомотопные между собой отображения комплекса K^n в Y_n в один и тот же элемент группы $\nabla^n(K^n, \pi^n(Y_n))$, а негомотопные отображения — в различные элементы, причем для каждого класса гомологий $D \in \nabla^n(K^n, \pi^n(Y_n))$ существует такое отображение f, что $D(f) = D$.*

Иначе говоря, *указанное соотношение устанавливает взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений комплекса K^n в Y_n и элементами группы $\nabla^n(K^n, \pi^n(Y_n))$.*

9:2. Классификационная теорема Хопфа. Нетрудно видеть, что *n-мерная сфера S^n является пространством, асферичным во всех размерностях, меньших n.*

Действительно, пусть P — клеточное разбиение сферы S^n, состоящее из двух клеток τ^0 и $\tau^n = S^n \setminus \tau^0$. Тогда, в силу теоремы о клеточной аппроксимации, всякий m-мерный сфероид пространства S^n в точке τ^0 при $m<n$ гомотопен относительно $\dot{K}^n$ отображению куба K^n в точку $\tau^0 \in S^n$. Таким образом, группы $\pi^1(S^n), \ldots, \pi^{n-1}(S^n)$ тривиальны, и к сфере S^n применима теорема Уитнея. Так как группа $\pi^n(S^n)$ является свободной циклической (п. 7:3), то мы получаем следующую теорему.

Теорема Хопфа. *Гомотопические классы отображений n-мерного комплекса K^n в n-мерную сферу S^n находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\nabla^n(K, J_0)$.*

Замечание. Так как все предложения теории препятствий (§ 8) справедливы не только для симплициальных, но и для любых клеточных комплексов (см. сноску на стр. 124), то и доказанные выше теоремы Уитнея и Хопфа справедливы (вместе с приведенными их доказательствами) для произвольного клеточного комплекса.

§ 10. Некоторые теоремы о связи между гомотопическими и гомологическими группами

Теоремы этого параграфа справедливы не только для полиэдров, но и для произвольных линейно связных пространств, удовлетворяющих аналогичным условиям. При этом следует рассматривать *непрерывные* группы гомологий.

10:1. Теорема Гуревича. *Если $\widetilde{P}$ — связный полиэдр, асферичный во всех размерностях, меньших n, где $n \geqslant 2$, то группы $\pi^n(\widetilde{P})$ и $\Delta^n(\widetilde{P}, J_0)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть P — клеточное разбиение полиэдра $\widetilde{P}$ а e — такое отображение комплекса P в себя, гомотопное тождественному, которое переводит весь $(n-1)$-мерный остов P^{n-1} в одну вершину a комплекса P (см. лемму п. 9:1). Отображение e мы можем предполагать клеточным (см. п. 2:2). Обозначим все как-либо ориентированные n-мерные клетки комплекса P через $\tau_1^n, \ldots, \tau_q^n$. Тогда отображение e клетки τ_i^n в P определяет некоторый элемент группы $\pi^n(\widetilde{P})$, который мы обозначим через $\nu(\tau_i^n)$. Произвольной цепи $x^n = \sum_i a_i\tau_i^n$ комплекса P по области коэффициентов J_0 мы поставим в соответствие элемент $\nu(x^n) = \sum_i a_i\nu(\tau_i^n)$ группы $\pi^n(\widetilde{P})$. Тогда ν есть гомоморфизм группы $L^n(P, J_0)$ целочисленных цепей комплекса P в группу $\pi^n(\widetilde{P})$ В частности, ν гомоморфно отображает группу $Z_\Delta^n(P, J_0)$ в $\pi^n(\widetilde{P})$.

Покажем, что ν переводит группу $H_\Delta^n(P, J_0)$ в нулевой элемент группы $\pi^n(\widetilde{P})$. Действительно, если $z^n = \Delta\left(\sum_j b_j\tau_j^{n+1}\right)$, то $\nu(z^n) = \sum_j b_j\nu(\Delta\tau_j^{n+1})$, и нам достаточно показать, что $\nu(\Delta\tau_j^{n+1}) = 0$. Пусть T^{n+1} есть $(n+1)$-мерный симплекс, взятый в клеточном разбиении $\tau^0 \in \Sigma^n$, $\tau^n = \Sigma^n \diagdown \tau^0$, $\tau^{n+1} = T^{n+1} \diagdown \Sigma^n$, где Σ^n — граница симплекса T^{n+1}. Клетки τ^n и τ^{n+1} мы ориентируем так, что $[\tau^{n+1} : \tau^n] = +1$. Пусть, далее, f — клеточное отображение симплекса T^{n+1} на τ_j^{n+1}, имеющее степень $+1$. Тогда в силу предложения (е) п. 2:5 мы имеем: $[f\tau^n : \tau_i^n] = [\tau_j^{n+1} : \tau_i^n]$. Таким образом, согласно лемме п. 7:5, элемент группы $\pi^n(\widetilde{P})$, определяемый отображением f сферы Σ^n в $\widetilde{P}$, равен

$$\sum_i [f\tau^n : \tau_i^n]\,\nu(\tau_i^n) = \sum_i [\tau_j^{n+1} : \tau_i^n] \cdot \nu(\tau_i^n) = \nu(\Delta\tau_j^{n+1}) = 0,$$

ибо отображение f продолжено в отображение всего симплекса T^{n+1} [см. п. 7:4, (в)]. Итак, гомоморфизм ν переводит гомологичные между собой циклы в один и тот же элемент группы $\pi^n(\widetilde{P})$, т. е. порождает гомоморфизм — также обозначаемый через ν — группы $\Delta^n(P, J_0)$ в $\pi^n(\widetilde{P})$.

Пусть теперь α — произвольный элемент группы $\pi^n(\widetilde{P})$, а f — отображение n-мерной ориентированной сферы S^n в $\widetilde{P}$, определяющее элемент α.

Отображение f мы можем предполагать клеточным (сферу S^n будем, как всегда, рассматривать в клеточном разбиении $\tau^0 \in S^n$, $\tau^n = S^n \setminus \tau^0$). Если z^n — ориентирующий цикл сферы S^n, то $f_* z^n$ будет циклом комплекса P. Класс гомологий $\mu(\alpha)$ этого цикла не зависит от случайного выбора отображения f, и мы получаем отображение μ группы $\pi^n(\tilde{P})$ в $\Delta^n(\tilde{P}, J_0)$. Это отображение гомоморфно.

Действительно, пусть α_1 и α_2 — два элемента группы $\pi^n(\tilde{P})$, B_2^n— букет, состоящий из двух ориентированных n-мерных сфер S_1^n и S_2^n, а f — такое отображение букета B_2^n в $\tilde{P}$, что отображение f сферы S_i^n в $\tilde{P}$ определяет элемент α_i, $i = 1, 2$. Пусть, далее, g — такое отображение n-мерной ориентированной сферы S^n в букет B_2^n, которое имеет на каждой из сфер S_1^n, S_2^n степень $+1$, а z_1^n, z_2^n, z^n — ориентирующие циклы сфер S_1^n, S_2^n, S^n. Тогда, считая все отображения клеточными, имеем: $g_* z^n = z_1^n + z_2^n$ и, следовательно,

$$(fg)_* z^n = f_* z_1^n + f_* z_2^n.$$

Но, согласно лемме п. 7 : 5, отображение fg сферы S^n в $\tilde{P}$ определяет элемент $\alpha_1 + \alpha_2$, так что

$$\mu(\alpha_1 + \alpha_2) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$$

и гомоморфность отображения μ доказана.

Покажем, наконец, что ν и μ являются взаимно обратными изоморфизмами, т. е. что $\nu\mu$ и $\mu\nu$ суть тождественные автоморфизмы групп $\pi^n(\tilde{P})$ и $\Delta^n(P, J_0)$. Пусть f — клеточное отображение сферы S^n в $\tilde{P}$, определяющее элемент $\alpha \in \pi^n(\tilde{P})$. Отображение ef сферы S^n в $\tilde{P}$ также определяет элемент α, ибо e гомотопно тождественному отображению. Поэтому, согласно лемме п. 7 : 5, мы имеем

$$\alpha = \sum_i [f\tau^n : \tau_i^n]\, \nu(\tau_i^n) = \nu\Big(\sum_i [f\tau^n : \tau_i^n] \cdot \tau_i^n\Big) = \nu(f_* z^n) = \nu\mu(\alpha),$$

где $\tau^n = S^n \setminus \tau^0$ есть n-мерная клетка сферы S^n, а z^n — ориентирующий цикл этой сферы. Таким образом, отображение $\nu\mu$ тождественно.

Далее, пусть z_1^n — произвольный n-мерный цикл комплекса P. Тогда

$$\nu(z_1^n) = \nu\Big(\sum_i z_1^n(\tau_i^n)\, \tau_i^n\Big) = \sum_i z_1^n(\tau_i^n)\, \nu(\tau_i^n).$$

Применяя теперь отображение μ, найдем, что классу гомологий $\mu\nu(z_1^n)$ принадлежит цикл

$$\sum_i z_1^n(\tau_i^n) \sum_k [e\tau_i^n : \tau_k^n]\, \tau_k^n = e_* z_1^n.$$

Так как z_1^n и $e_* z_1^n$ принадлежат одному и тому же классу гомологий, то отображение $\mu\nu$ тождественно.

10 : 2. Теорема о фундаментальной группе. *Пусть $\widetilde{P}$ — произвольный связный полиэдр. Группа, получающаяся из фундаментальной группы полиэдра $\widetilde{P}$ ее коммутированием (т. е. факторгруппа группы $\pi^1(\widetilde{P})$ по ее коммутанту), изоморфна одномерной группе гомологий $\Delta^1(\widetilde{P}, J_0)$.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы Гуревича. Мы рассмотрим его вкратце. Обозначим через Γ группу, о которой идет речь в теореме, а через ε — естественное отображение группы $\pi^1(\widetilde{P})$ на группу Γ. Отображение e клетки τ_i^1 в P определяет некоторый элемент группы $\pi^1(\widetilde{P}, a)$; образ этого элемента при гомоморфизме ε мы обозначим через $\nu(\tau_i^1)$. Отображение ν, как и выше, продолжается гомоморфно на всю группу $L^1(\widetilde{P}, J_0)$. Лемма п. 7 : 5 имеет место и при $n = 1$, если, вместо сложения, иметь в виду умножение (в группе $\pi^1(\widetilde{P}, a)$), выполняемое в некотором порядке. В силу дальнейшего коммутирования группы $\pi^1(\widetilde{P}, a)$ порядок сомножителей не играет роли, и мы сохраним аддитивные обозначения. Так же, как и выше, мы покажем, что отображение ν порождает гомоморфизм ν группы $\Delta^1(P, J_0)$ в группу Γ. Гомоморфное отображение μ группы $\pi^1(\widetilde{P}, a)$ в $\Delta^1(P, J_0)$ определяется, как и выше. Нетрудно видеть, что из соотношения $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$, где α и β — элементы группы $\pi^1(\widetilde{P}, a)$, вытекает, что $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

Дальнейший ход доказательства совпадает с приведенным выше, только следует рассматривать, вместо гомоморфизма μ, однозначно определенный гомоморфизм $\mu\varepsilon^{-1}$ группы Γ в группу $\Delta^1(\widetilde{P}, J_0)$.

10 : 3. Теорема Л. С. Понтрягина. *Пусть L — связный односвязный комплекс произвольной размерности, $A = L^{n-1}$ — его $(n-1)$-мерный остов и $G = \pi^n(L, A)$. Для того чтобы отображение φ n-мерного полиэдра K в L было гомотопно отображению всего полиэдра $\widetilde{K}$ в A, необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм φ^* группы $\nabla^n(L, G)$ в $\nabla^n(K, G)$ был тривиален.*

В самом деле, если φ гомотопно такому отображению ψ, которое переводит K в A, то φ^* совпадает в силу п. 3 : 2, (в) с гомоморфизмом ψ^*, который, очевидно, тривиален. Таким образом, необходимость высказанного условия ясна.

Предположим теперь, что гомоморфизм φ^* тривиален. Мы можем без ограничения общности предположить, что φ есть клеточное отображение комплекса K в L. Пусть T^n — ориентированный n-мерный симплекс комплекса L. Тождественное отображение e симплекса T^n в $\widetilde{L}$ определяет некоторый элемент группы $G = \pi^n(L, A)$. Обозначив этот элемент через $z^n(T^n)$, мы получим n-мерную цепь комплекса L по области коэффициентов G. Обозначим все как-либо ориентированные n-мерные симплексы комплекса L через $T_1^n, \ldots, T_q^n$. Пусть f — клеточное отображение некоторого комплекса P в L, а τ^n — ориентированная n-мерная клетка комплекса P. Тогда коэффициент цепи f^*z^n на клетке τ^n равен, в силу предложения (д) п. 7 : 7, элементу группы G, определяемому отображением f клетки τ^n в X. В частности, если P — симплекс $T^{n+1} \in L$, представленный в клеточном разбиении

$$\tau^{n+1} = T^{n+1} \setminus \dot{T}^{n+1}, \quad \tau^n = \dot{T}^{n+1} \setminus \tau^0, \quad \tau^0 \in \dot{T}^{n+1},$$

то мы получаем, что элемент группы G, определяемый тождественным отображением e клетки τ^n в L, равен

$$e^* z^n = \sum [T^{n+1} : T_i^n] \, z^n (T_i^n) = \nabla z^n (T^{n+1}).$$

Но этот элемент равен нулю, так как отображение e продолжено на весь симплекс T^{n+1}. Итак, $\nabla z^n = 0$, т. е. z^n является ∇-циклом.

В силу предположенной тривиальности гомоморфизма φ^*, мы получаем отсюда, что $\varphi^* z^n \underset{\nabla}{\sim} 0$, т. е. $\varphi^* z^n = \nabla x^{n-1}$, где x^{n-1} — цепь комплекса K по области коэффициентов G. Обозначим через μ отображение произведения $\widetilde{K} \times \overline{I}$ в $\widetilde{K}$, переводящее каждую точку $(x, t) \in \widetilde{K} \times \overline{I}$ в точку $x \in \widetilde{K}$. Рассмотрим отображение F множества $\widetilde{K} \times 0 \cup \widetilde{K}^{n-2} \times \overline{I}$ в L, совпадающее с $\varphi\mu$. Если T^{n-1} — произвольный $(n-1)$-мерный ориентированный симплекс комплекса K, то отображение F, уже определенное на части границы клетки $T^{n-1} \times I$, можно [см. п. 7 : 7, (ж)] продолжить в такое отображение всей клетки $T^{n-1} \times \overline{I}$ в L, переводящее ее границу в A, которое определит элемент $x^{n-1}(T^{n-1}) \in G$. Проделав это для всех $(n-1)$-мерных симплексов комплекса K, мы получим отображение F множества $K \times 0 \cup K^{n-1} \times I$ в L.

Пусть ν — отображение всего произведения $K \times \overline{I}$ в $K^n \times 0 \cup K^{n-1} \times I$, получающееся «вдавливанием» $(n+1)$-мерных клеток этого произведения [см. лемму (а) п. 2 : 2]. Если T^n и T^{n-1} — произвольные ориентированные симплексы комплекса K, имеющие размерности соответственно n и $n-1$, то имеем

$$[\nu(T^n \times 1) : T^{n-1} \times I] = -[T^n : T^{n-1}], \quad [\nu(T^n \times 1) : T^n \times 0] = +1.$$

Поэтому, в силу предложения (д) п. 7 : 7, отображение $F\nu$ симплекса $T^n \times 1$ в X определяет элемент $\varphi^* z^n (T^n) - \nabla x^{n-1} (T^n)$ группы G, т. е. нулевой элемент этой группы. Таким образом, отображение $F\nu$ произведения $K \times \overline{I}$ в L осуществляет деформацию отображения φ в такое отображение ψ, для которого $\psi^* z^n = 0$.

Теперь из предложения (е) п. 7 : 7 непосредственно следует, что отображение ψ (а следовательно, и φ) гомотопно отображению всего полиэдра K в A. Теорема доказана.

Замечание. Анализ приведенного доказательства показывает, что теорема остается справедливой при замене полиэдра $\widetilde{L}$ любым линейно связным односвязным пространством X, а остова $\widetilde{L}^{n-1}$ — таким односвязным подмножеством A этого пространства, для которого группы $\pi^2(X, A), \ldots, \pi^{n-1}(X, A)$ тривиальны. Эта формулировка теоремы (так же как и изложенное выше доказательство) принадлежит М. М. Постникову [19].

§ 11. Гладкие многообразия

11 : 1. Основные определения и формулировки *. Пусть R^n есть n-мерное эвклидово пространство с фиксированной в нем декартовой системой координат. Тогда каждой точке $a \in R^n$ соответствует n чисел $x^1, \ldots, x^n$ — координаты этой точки. Если M^n есть n-мерное многообразие, а f — гомеоморфное отображение открытого множества $U \subset M^n$ в пространство R^n, то в U определяются действительные функции $x^1(b), \ldots, x^n(b)$, $b \in U$, равные координатам точки $f(b)$ в пространстве R^n. Эти функции мы будем называть *координатами* в U, а окрестность U, в которой введены координаты,— *координатной окрестностью.*

Если U и V — две координатные окрестности многообразия M^n, а x^i и y^i — введенные в них координаты, $i = 1, \ldots, n$, то в общей части $U \cap V$ этих окрестностей координаты y^i являются однозначными функциями координат x^i и наоборот. Иначе говоря, имеют место соотношения

$$y^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x^j = \psi^j(y^1, \ldots, y^n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где φ^i и ψ^j — однозначные непрерывные функции. Если эти функции имеют непрерывные производные до порядка m включительно, то говорят, что координатные системы, введенные в U и V, имеют согласованность порядка m. Заметим, что при $m \geqslant 1$ функциональные определители

$$\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}$$

отличны от нуля (в силу однозначности перехода от одних координат к другим). Конечное покрытие $\{U_1, \ldots, U_p\}$ многообразия M^n координатными окрестностями называется *координатной системой* порядка m, если координатные системы, введенные в U_i и U_j, имеют согласованность порядка m; $i, j = 1, \ldots, p$.

Две координатные системы $\{U_1, \ldots, U_p\}$ и $\{V_1, \ldots, V_q\}$, заданные в M^n, относятся к одному классу эквивалентности порядка m, если координатные системы, введенные в U_i и V_j, $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$, имеют согласованность порядка m. Это отношение эквивалентности порядка m рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что все координатные системы порядка m, которые можно ввести в M^n, разбиваются на классы эквивалентности.

Говорят, что M^n есть *дифференцируемое многообразие* порядка m, или, короче, *гладкое* многообразие, если отмечен некоторый класс

* В этом пункте дан лишь краткий обзор основных определений и первоначальных результатов теории гладких многообразий. Доказательства см. в цитируемых работах.

эквивалентности порядка m координатных систем этого многообразия. Координатные системы отмеченного класса называются *допустимыми*. Для задания в M^n дифференцируемости порядка m достаточно задать одну допустимую систему координат (порядка m).

Пусть M^r и N^s — дифференцируемые многообразия размерностей соответственно r и s, а $\{U_1, \ldots, U_p\}$ и $\{V_1, \ldots, V_q\}$ — допустимые координатные системы в них. Пусть, далее, φ — непрерывное отображение многообразия M^r в N^s. Если $x_i^1, \ldots, x_i^r$ и $y_j^1, \ldots, y_j^s$ — координаты, введенные соответственно в координатных окрестностях U_i и V_j, то для $a \in U_i \cap \varphi^{-1}(V_j)$ величины $y_j^1(\varphi(a)), \ldots, y_j^s(\varphi(a))$ непрерывно зависят от $x_i^1(a), \ldots, x_i^r(a)$. Если все эти функции m раз непрерывно дифференцируемы для всех $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$, то отображение φ называется *дифференцируемым* порядка m или, короче, *гладким* отображением. Если отображение φ гомеоморфно, причем φ и φ^{-1} являются гладкими отображениями, то φ называется *гладким гомеоморфизмом*. При $r < s$ гладкое отображение φ многообразия M^r в N^s называется *невырожденным*, если функциональная матрица переменных $y_j^1(\varphi(a)), \ldots, y_j^s(\varphi(a))$ по переменным $x_i^1(a), \ldots, x_i^r(a)$ имеет для всех $a \in U_i \cap \varphi^{-1}(V_j)$ и всех $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$ наибольший возможный ранг r.

Нетрудно видеть, что все эти понятия сохраняют смысл при замене допустимых систем координат $\{U_1, \ldots, U_p\}$ и $\{V_1, \ldots, V_q\}$ другими допустимыми системами.

Если M^r и N^s — гладкие многообразия, причем $M^r \subset N^s$, то мы назовем M^r *подмногообразием* многообразия N^s при условии, что тождественное отображение его в N^s является гладким невырожденным отображением.

Теорема. *Всякое гладкое r-мерное многообразие гладко гомеоморфно некоторому подмногообразию $(2r + 1)$-мерного эвклидова пространства.*

Доказательства этой теоремы мы здесь рассматривать не будем. Случай компактного многообразия рассмотрен в [20], общий случай см. в [21].

Пусть M^r — гладкое подмногообразие эвклидова n-мерного пространства R^n, a — некоторая его точка, а $x^1, \ldots, x^r$ — допустимые координаты, введенные в некоторой окрестности точки a. Мы можем без ограничения общности считать, что точка a служит началом этой координатной системы. *Касательной плоскостью* к многообразию M^r в точке a называется такая r-мерная плоскость R_a^r пространства R^n, что расстояние от точки $b \in M^r$ до плоскости R_a^r является величиной второго порядка малости относительно $\rho = \sqrt{(x^1(b))^2 + \ldots + (x^r(b))^2}$. В каждой точке $a \in M^r$ можно провести к M^r единственную касательную плоскость; положение ее не зависит от выбора допустимой системы координат. Каждый вектор пространства R^n, исходящий из точки

$a \in M^r$ и лежащий в касательной плоскости R_a^r, проведенной к M^r в точке a, называется *касательным вектором* к многообразию M^r в точке a. Вектор, исходящий из точки a и ортогональный к R_a^r, называется *нормальным* к подмногообразию M^r в точке a. Можно также дать чисто внутреннее определение касательных векторов, эквивалентное указанному.

Пусть T^s — симплекс эвклидова пространства R^s, в котором введены декартовы координаты $x^1, \ldots, x^s$, а φ — гомеоморфное отображение симплекса T^s в гладкое многообразие M^r, $s \leqslant r$. Отображение φ называется *гладким регулярным отображением*, если для любой (внутренней или граничной) точки $a \in T^s$ функциональная матрица координат точки $\varphi(a)$ (в некоторой допустимой системе координат) по координатам $x^1, \ldots, x^s$ точки a имеет максимальный возможный ранг s. Отображение φ симплициального комплекса K в гладкое многообразие M^r называется *гладким регулярным отображением*, если оно является гладким и регулярным на каждом симплексе $T \in K$.

Теорема. *Всякое гладкое компактное многообразие является полиэдром, т. е. допускает симплициальные подразделения.*

Доказательство этой теоремы, впервые полученной Кэрнсом [22], было упрощено Уайтхедом [23], который получил несколько более сильные результаты. Именно, если M^r есть гладкое компактное многообразие, то существует такое гладкое регулярное отображение φ некоторого симплициального комплекса K^r на M^r, которое осуществляет гомеоморфизм между полиэдром $\widetilde{K}^r$ и многообразием M^r. Если, далее, N^s — гладкое подмногообразие многообразия M^r, причем оба многообразия N^s и M^r имеют класс гладкости $m \geqslant 2$, то симплициальное разбиение многообразия M^r (т. е. гладкое регулярное гомеоморфное отображение комплекса K^r на M^r) можно выбрать таким, что N^s будет телом некоторого подкомплекса.

Пусть $\{U_1, \ldots, U_p\}$ — допустимая координатная система, заданная в гладком многообразии M^r, а $x_i^1, \ldots, x_i^r$ — координаты, введенные в окрестности U_i, $i = 1, \ldots, p$. Говорят, что окрестности U_i и U_j *ориентированы согласованно*, если функциональный определитель переменных $x_i^1(a), \ldots, x_i^r(a)$ по переменным $x_j^1(a), \ldots, x_j^r(a)$ положителен для всех точек $a \in U_i \cap U_j$. Если каждые две из окрестностей $U_1, \ldots, U_p$ ориентированы согласованно, то координатная система $\{U_1, \ldots, U_p\}$ называется *ориентирующей*. Две допустимые ориентирующие системы $\{U_1, \ldots, U_p\}$ и $\{V_1, \ldots, V_q\}$ многообразия M^r *эквивалентны*, если система $\{U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots, V_q\}$ является ориентирующей. Если на гладком многообразии M^r существуют ориентирующие допустимые координатные системы, то M^r называется *ориентируемым* гладким многообразием. Все ориентирующие допустимые координатные системы на ориентируемом гладком многообразии M^r распадаются, очевидным образом, на два класса эквивалентности, каждый из которых называется *ориентацией* многообразия M^r. Без труда доказывается, что гладкое многообразие M^r тогда и только тогда ориентируемо в этом смысле, когда комплекс, получающийся при помощи подразделения многообразия M^r, является ориентируемым многообразием в прежнем смысле (§ 4).

Соответствие между ориентациями, заданными в гладком многообразии M^r и его симплициальном подразделении, устанавливается следующим образом. Пусть $\{U_1, \ldots, U_p\}$ — ориентирующая координатная система, соответствующая ориентации гладкого многообразия M^r, T^r — ориентированный r-мерный симплекс, а φ — его гладкое регулярное отображение в M^r. Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_r$ — векторы, задающие ориентацию симплекса T^r и исходящие из точки $a \in T^r$. В результате отображения φ векторы $e_1, \ldots, e_r$ перейдут в гладкие кривые $L_1, \ldots$ $\ldots, L_r$ на M^r, исходящие из точки $\varphi(a)$. Считая, что кривая L_i задается (в одной из координатных окрестностей U_j) уравнениями

$$x^\alpha = \varphi_i^\alpha(t), \quad t > 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

мы скажем, что симплекс $\varphi(T^r)$ ориентирован согласованно с M^r, если определитель $\left|\frac{d\varphi_i^\alpha(0)}{dt}\right|$, $i, \alpha = 1, \ldots, r$ положителен. Наконец, если φ — гладкое регулярное гомеоморфное отображение комбинаторного ориентированного многообразия K^r на гладкое ориентированное многообразие M^r, то скажем, что отображение φ имеет степень $+1$, если каждый симплекс $\varphi(T^r)$, $T^r \in K^r$ ориентирован согласованно с M^r, и степень -1 в противном случае.

Для задания ориентации в гладком ориентируемом многообразии M^r достаточно знать одну какую-либо из ориентирующих координатных систем (выбранную из соответствующего класса эквивалентности) или, даже, одну из координатных окрестностей этой ориентирующей координатной системы. Если R_a^r — касательная плоскость к ориентированному гладкому многообразию M^r, проведенная в точке $a \in M^r$, то мы следующим образом определим в R_a^r ориентацию, соответствующую ориентации многообразия M^r. Пусть $x^1, \ldots, x^r$ — координаты с началом в a, введенные в окрестности точки a и соответствующие ориентации многообразия M^r, а L_i — исходящая из точки a гладкая кривая, определенная в координатах $x^1, \ldots, x^r$ параметрическими уравнениями

$$x^i = t, \quad x^j = 0, \quad j \neq i, \quad t > 0.$$

Обозначим через f_i касательный вектор (произвольной длины), проведенный к кривой L_i в точке a, $i = 1, \ldots, r$. Тогда векторы $f_1, \ldots$ $\ldots, f_r$ образуют базис плоскости R_a^r. Ориентацию плоскости R_a^r, определяемую этим базисом, мы и назовем ориентацией, *соответствующей* ориентации многообразия M^r. Обратно, задавая произвольно ориентацию касательной плоскости R_a^r к гладкому ориентируемому многообразию M^r, мы можем однозначно определить соответствующую ориентацию самого многообразия M^r.

Отметим, в заключение, следующее предложение, доказательство которого без труда следует из триангулируемости гладких многообразий.

Пусть T^k и T^l, $k+l=r$ — симплексы, а f и φ — такие гладкие регулярные отображения их в гладкое r-мерное многообразие M^r, что симплексы $f(T^k)$ и $\varphi(T^l)$ имеют единственную общую точку, являющуюся внутренней для каждого из них, а касательные плоскости к $f(T^k)$ и $\varphi(T^l)$ в этой общей точке находятся в общем положении в касательной плоскости к многообразию M^r. Пусть, далее, x^k и y^l — такие цепи соответственно комплексов $[T^k]$ и $[T^l]$, которые принимают на симплексах T^k и T^l значения $g \in G$ и $h \in H$ соответственно. Если при этих условиях многообразие M^r ориентировано, то индекс пересечения отображенных цепей $f(T^k)$ и $\varphi(T^l)$ равен $\pm gh$ (в зависимости от ориентаций симплексов T^k, T^l и многообразия M^r).

11 : 2. Штифелевское многообразие $V_{n,k}$. Элементами множества $V_{n,k}$ являются последовательности

$$v=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\} \tag{11.1}$$

единичных взаимно ортогональных векторов v_i, $i=1, \ldots, k$ эвклидова векторного пространства R^n, $k<n$. Топология в $V_{n,k}$ вводится естественным образом: элементы $v=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и $v'=\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_k\}$ множества $V_{n,k}$ близки, если близки векторы v_i и v'_i для каждого $i=1, 2, \ldots, k$.

(а). *$V_{n,k}$ является многообразием размерности $k\left(n-\frac{k+1}{2}\right)$. Мы введем в нем такую координатную систему, что $V_{n,k}$ станет гладким* (даже *аналитическим*) *многообразием.*

Действительно, пусть $v^0=\{v_1^0, v_2^0, \ldots, v_k^0\} \in V_{n,k}$; введем в R^n ортонормированный базис

$$v_1^0,\ v_2^0,\ \ldots,\ v_n^0, \tag{11.2}$$

первые k векторов которого совпадают с векторами последовательности v^0. Обозначим через $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ координаты вектора v_i из (11.1) в базисе (11.2). Между величинами $a_{i\alpha}$ существует $\frac{k(k+1)}{2}$ соотношений [нормированность и попарная ортогональность векторов системы (11.1)]

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}a_{j\alpha}-\delta_{ij}=0, \quad i\leqslant j. \tag{11.3}$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части равенства (11.3), через f_{ij}. Тогда

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_{l\alpha}}=\delta_{il}a_{j\alpha}+\delta_{jl}a_{i\alpha}. \tag{11.4}$$

Для элемента $v^0 \in V_{n,k}$ имеем: $a_{l\alpha} = \delta_{l\alpha}$, $l = 1, \ldots, k$, $\alpha = 1, \ldots, n$, так что из (11.4) получаем

$$\left. \frac{\partial f_{ij}}{\partial a_{l\alpha}} \right|_{v=v^0} = \delta_{il}\delta_{j\alpha} + \delta_{jl}\delta_{i\alpha}. \tag{11.5}$$

При $l = \alpha$ производная (11.5) отлична от нуля (и равна двум) тогда и только тогда, когда $i = j = l = \alpha$, т. е. когда верхние индексы i и j соответственно равны нижним индексам l и α. Если же $l < \alpha$, то, в силу того, что $i \leqslant j$, не может быть одновременно $i = \alpha$ и $j = l$, т. е. второй член правой части равенства (11.5) равен нулю. Поэтому при $l < \alpha$ производная (11.5) отлична от нуля (и равна единице) тогда и только тогда, когда $i = l$ и $j = \alpha$, т. е. опять при совпадении верхних и нижних индексов в (11.5).

Таким образом, в определителе, элементами которого являются производные (11.5) переменных f_{ij}, $i \leqslant j = 1, \ldots, k$ по переменным $a_{l\alpha}$, $l \leqslant \alpha = 1, \ldots, k$, отличны от нуля только члены, у которых индексы у f и a соответственно равны, т. е. только диагональные члены. Поэтому ранг функциональной матрицы переменных f_{ij} по переменным $a_{l\alpha}$ в точке $v = v^0$ (а значит, и в окрестности этой точки) имеет наибольшее возможное значение $\frac{k(k+1)}{2}$, т. е. соотношения (11.3) независимы. Следовательно, в окрестности значений $a_{l\alpha} = \delta_{l\alpha}$ переменные $a_{l\alpha}$, $l \leqslant \alpha$ являются, в силу (11.3), функциями остальных $nk - \frac{k(k+1)}{2}$ переменных, которые могут в этой окрестности принимать произвольные значения.

Итак, некоторая окрестность любой точки v^0 в $V_{n,k}$ гомеоморфна области $k\left(n - \frac{k+1}{2}\right)$-мерного эвклидова пространства. Многообразие $V_{n,k}$ дифференцируемо (и даже аналитично) в рассмотренных координатах. Действительно, левые части соотношений (11.3) аналитичны, так же как и соотношения, осуществляющие ортогональное преобразование координат от одного базиса к другому.

(б). Пусть f — непрерывное отображение множества M в $V_{n,k}$. Обозначим через $f^1(m)$ первый вектор последовательности $f(m) \in V_{n,k}$, $m \in M$. Тогда f^1 есть непрерывное отображение множества M в единичную сферу S^{n-1} пространства R^n.

Лемма. *Если f_0 — непрерывное отображение компакта M в $V_{n,k}$ и $(f^1)_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — деформация отображения f_0^1 компакта M в S^{n-1}, то ее можно продолжить в деформацию всего отображения f_0 множества M в $V_{n,k}$.*

Иначе говоря, *существует такая деформация f_t отображения f_0, что для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеем: $(f_t)^1 = (f^1)_t$.*

Действительно, в силу компактности множества M, существует такое число p, что при $|t' - t''| < \frac{1}{p}$ и любом m векторы $(f^1)_{t'}(m)$ и

$(f^1)_{t''}(m)$ составляют угол, меньший $\frac{\pi}{2}$. Предположим, что отображение f_t задано для всех t, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant \frac{i-1}{p}$, $i \leqslant p$ (для $i=1$ это верно). Так как при $\frac{i-1}{p} \leqslant t \leqslant \frac{i}{p}$ векторы $(f^1)_{\frac{i-1}{p}}(m)$ и $(f^1)_t(m)$ составляют угол, меньший $\frac{\pi}{2}$, то, заменив в $f_{\frac{i-1}{p}}(m)$ первый вектор $(f^1)_{\frac{i-1}{p}}(m)$ вектором $(f^1)_t(m)$, мы получим k линейно независимых векторов (для любого $m \in M$). Обозначим через $f_t(m)$ последовательность векторов, получающуюся из этих k векторов при помощи ортогонализации. Тогда мы определим отображение f_t для $\frac{i-1}{p} \leqslant t \leqslant \frac{i}{p}$.

При помощи этого приема, повторенного p раз, мы построим требуемую деформацию f_t.

Замечание. Если некоторое подмножество $O \subset M$ оставалось неподвижным при деформации $(f^1)_t$ отображения f_0^1, то оно остается неподвижным и при деформации f_t отображения f_0. Действительно, если вектор $f_0^1(m)$ не меняется в процессе деформации $(f^1)_t$, то примененный в доказательстве леммы процесс ортогонализации не меняет точки $f_0(m) \in V_{n,k}$ в течение всей деформации f_t.

(в). При рассмотрении многообразия $V_{n,k}$ мы будем пользоваться обозначением

$$r = n - k. \tag{11.6}$$

Выберем в R^n ортонормированный базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \tag{11.7}$$

и обозначим через R^{n-p} подпространство пространства R^n, состоящее из векторов, ортогональных ко всем векторам $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Если мы рассмотрим только те последовательности (11.1), в которых первые p векторов совпадают с $e_1, e_2, \ldots, e_p$, то остальные $k-p$ векторов (11.1) представляют ортонормированную последовательность пространства R^{n-p}, т. е. элемент многообразия $V_{n-p,k-p}$, $p \leqslant k-1$. Поэтому при фиксированном базисе (11.7) можно считать, что

$$V_{n,k} \supset V_{n-1,k-1} \supset \ldots \supset V_{n-p,k-p} \supset \ldots \supset V_{r+1,1}. \tag{11.8}$$

Последнее из этих многообразий $V_{r+1,1}$ является единичной сферой пространства R^{r+1} и будет обозначаться также через $S^r(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1})$.

(г). *Всякое отображение f_0 компакта M размерности $\leqslant r$ в $V_{n,k}$ гомотопно в $V_{n,k}$ отображению этого компакта в $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1})$.*

Действительно, отображению f_0 соответствует отображение f_0^1 компакта M в единичную сферу $S^{n-1} \subset R^n$, которое при $n-1 > r$ (т. е. при $k > 1$) гомотопно нулю в S^{n-1} и потому деформацией $(f^1)_t$ может быть переведено в отображение $(f^1)_1$ всего M в точку $e_1 \in S^{n-1}$.

Продолжим на основании леммы (б) эту деформацию в деформацию f_t всего отображения f_0 в $V_{n,k}$. Тогда мы получим такое отображение f_1, что первый вектор последовательности $f_1(m)$ для любой точки $m \in M$ совпадает с e_1, т. е. такое отображение, что $f_1(M) \subset V_{n-1,k-1}$. Если все еще $n-2>r$ (т. е. $k-1>1$), то, оставляя без внимания первый вектор e_1 каждой последовательности $f_1(m)$ и применяя лемму (б) к $V_{n-1,\,k-1}$, мы сможем перевести f_1 в отображение множества M в $V_{n-2,\,k-2}$. Продолжая таким образом, мы сможем сдвигать $f_0(M)$ постепенно из одного многообразия $V_{n-p,\,k-p}$ ряда (11.8) в следующее, пока мы не получим $k-p=1$, т. е. пока мы не получим отображение f (гомотопное f_0) компакта M в сферу $V_{r+1,\,1}=S^r(e_1,\dots,e_{k-1})$.

Замечание. Учитывая замечание к лемме (б), легко доказать, что если образ $f_0(O)$ некоторого множества $O \subset M$ уже лежит в $S^r(e_1,\dots,e_{k-1})$, то можно описанную в (г) деформацию выбрать таким образом, чтобы на O отображение не менялось в течение всей деформации.

11:3. Гомологические группы многообразий $V_{n,k}$. Образующий цикл сферы $S^r(e_1,\dots,e_{k-1})$ мы будем обозначать символом $z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$.

(а). Из предложения (г) п. 11:2 непосредственно следует, что всякий целочисленный цикл размерности $q \leqslant r$ многообразия $V_{n,k}$ гомологичен в $V_{n,k}$ циклу сферы $S^r(e_1,\dots,e_{k-1}) \subset V_{n,k}$, т. е. гомологичен нулю при $q<r$ и циклу $\lambda z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$ при $q=r$ (λ — целое число). Таким образом, группа $\Delta^q(V_{n,k}, J_0)$ тривиальна при $q<r$ и является циклической при $q=r$; образующий элемент этой циклической группы определяется циклом $z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$. Для полного вычисления циклической группы $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$ остается определить ее порядок.

Пусть он равен $\lambda>0$, т. е. λ — такое наименьшее натуральное число, что цикл $\lambda z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$ гомологичен нулю в $V_{n,k}$. Тогда в $V_{n,k}$ существует такая цепь x^{r+1}, что $\Delta x^{r+1}=\lambda z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$. Но согласно лемме (б) п. 11.2 цепь x^{r+1} может быть деформацией сдвинута в $V_{r+2,\,2} \subset V_{n,k}$, т. е. цикл $\lambda z^r(e_1,\dots,e_{k-1})$ гомологичен нулю уже в $V_{r+2,\,2}$. Итак, порядок группы $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$ при $k \geqslant 2$ равен порядку группы $\Delta^r(V_{r+2,\,2}, J_0)$.

Теорема. *Группы гомологий $\Delta^q(V_{n,k}, J_0)$ тривиальны при $q<r$. Группа $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$ является свободной циклической при $k=1$, а также при $k>1$ и четном r. При $k>1$ и нечетном r группа $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$ имеет порядок два.*

Доказательство. При $k=1$ многообразие $V_{n,k}$ является r-мерной сферой, так что в этом случае утверждение теоремы очевидно. При $k>1$ группа $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$ изоморфна группе $\Delta^r(V_{r+2,\,2}, J_0)$ и является циклической [см. (а)]. Остается найти порядок образующего элемента этой группы.

Элементами многообразия $V_{r+2,\,2}$ являются пары $\{v_1, v_2\}$ единичных взаимно ортогональных векторов эвклидова пространства R^{r+2}. Сфера $S^r(e_1)$ образована всеми парами $\{e_1, v_2\}$, где v_2 — вектор, ортогональный вектору e_1. Образующий цикл этой сферы мы обозначили выше через $z^r(e_1)$. Этот цикл определяет образующий элемент группы $\Delta^r(V_{r+2,2}, J_0)$.

Пусть f_1 и f_2 — два единичных взаимно ортогональных вектора пространства R^{r+2}. Если u — произвольный единичный вектор пространства R^{r+2}, то векторы

$$f_1 - 2u(u, f_1); \quad f_2 - 2u(u, f_2) \tag{11.9}$$

единичны и взаимно ортогональны (что проверяется непосредственно), т. е. представляют некоторую точку $\varphi(u) \in V_{r+2,2}$, и мы получаем непрерывное отображение φ единичной сферы S^{r+1} пространства R^{r+2} в $V_{r+2,2}$.

Единичные векторы, ортогональные к f_1, образуют сферу $S^r \subset S^{r+1}$, а векторы, ортогональные к обоим векторам f_1 и f_2,— сферу $S^{r-1} \subset S^r$. Из (11.9) ясно, что $\varphi(u) = \varphi(-u)$ для любого $u \in S^{r+1}$. Поэтому, обозначив через E^{r+1} любую из полусфер, на которые S^r разбивает сферу S^{r+1}, мы получим

$$\varphi(E^{r+1}) = \varphi(S^{r+1}).$$

Граница S^r элемента E^{r+1} отображается при помощи φ в множество пар вида $\{f_1, f_2 - 2u(u, f_2)\}$, т. е. в $S^r(f_1)$. При этом вся сфера S^{r-1} отображается в одну точку $\{f_1, f_2\} \in S^r(f_1)$, а внутренность каждого из элементов E_1^r и E_2^r, на которые разбивается S^r сферой S^{r-1}, отображается на $S^r(f_1) \setminus \{f_1, f_2\}$ гомеоморфно. Действительно, вектор u, ортогональный к f_1 и удовлетворяющий соотношению $f_2 - 2u(f_2, u) = v$, коллинеарен с $f_2 - v$ и потому с точностью до направления определяется однозначно при любом векторе $v \in S^r$, отличном от f_2.

Отображение φ элемента E_1^r на $S^r(f_1)$ совпадает с отображением $\varphi\psi$, где ψ — центральная симметрия, т. е. отображение $u \to -u$, переводящее E_1^r в E_2^r. Ориентируем теперь E_1^r и E_2^r когерентно (т. е. так, чтобы вместе они определяли ориентацию сферы S^r). Тогда при нечетном r симметрия ψ переводит элемент E_1^r на E_2^r с сохранением ориентации, так что отображение $\varphi = \varphi\psi$ переводит элементы E_1^r и E_2^r на $S^r(f_1)$ с одной и той же степенью, равной ± 1, а степень отображения φ всей сферы S^r на $S^r(f_1)$ равна ± 2. При четном же r степени отображения φ элементов E_1^r и E_2^r на $S^r(f_1)$ противоположны по знаку, и степень отображения φ сферы S^r на $S^r(f_1)$ равна нулю.

Рассматривая E^{r+1} в клеточном подразделении

$$\tau^{r+1} = E^{r+1} \setminus S^r, \quad \tau^r = S^r \setminus \tau^0, \quad \tau^0 \in S^r$$

и обозначая цепи, принимающие на клетках τ^{r+1} и τ^r значения $+1$, соответственно через x^{r+1} и x^r, мы получим $\Delta x^{r+1} = \pm x^r$, и потому

$$\Delta\varphi_*(x^{r+1}) = \varphi_*(\Delta x^{r+1}) = \varphi_*(\pm x^r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \text{ четном}, \\ \pm 2z^r(f_1) & \text{при } r \text{ нечетном}. \end{cases} \tag{11.10}$$

Таким образом, $\varphi_*(x^{r+1})$ есть $(r+1)$-мерный цикл в $V_{r+2,\,2}$ — целочисленный при четном r и цикл по модулю 2 при r нечетном. Положив в (11.10) $f_1 = e_1$, мы получаем, что при r нечетном $2z^r(e_1) \underset{\Delta}{\sim} 0$, т. е. что группа $\Delta^r(V_{r+2,\,2}, J_0)$, если только она нетривиальна, имеет порядок 2.

Покажем, наконец, что этими соотношениями и определяются группы $\Delta^r(V_{r+2,\,2}, J_0)$, т. е. что эти группы имеют порядок 2 при нечетном r и порядок ∞ при четном r. Так как размерность многообразия $V_{r+2,\,2}$ равна $2r+1$, то нам достаточно показать [см. п. 5 : 2, (д)], что при четном r цикл $z^r(e_1)$ имеет с некоторым $(r+1)$-мерным циклом индекс пересечения, отличный от нуля, а при нечетном r — что цикл $z^r(e_1)$ по модулю 2 имеет с некоторым циклом по модулю 2 индекс пересечения 1. Именно, мы покажем, что циклы $z^r(e_1)$ и $\varphi_*(x^{r+1})$, целочисленные при четном r и рассматриваемые по модулю 2 при r нечетном, имеют индекс пересечения 1.

Возьмем для построения цикла $\varphi_*(x^{r+1})$: $f_1 = -e_2$, $f_2 = -e_1$, т. е.

$$\varphi(u) = \{-e_2 + 2u(u, e_2);\ -e_1 + 2u(u, e_1)\}. \tag{11.11}$$

Тогда единственной общей точкой множеств $\varphi(E^{r+1})$ и $S^r(e_1)$ будет точка $\varphi\left(\pm\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right) = \{e_1, e_2\}$, так как решение уравнения $-e_2 + 2u(u, e_2) = e_1$ имеет вид $\pm\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$. Введем в окрестности этой точки допустимые координаты, именно: примем за координаты точки $\{v_1, v_2\}$, близкой к $\{e_1, e_2\}$, последние $r+1$ координат $x^1, \ldots, x^{r+1}$ вектора v_1 и последние r координат $y^1, \ldots, y^r$ вектора v_2 в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_{r+2}$ [см. п. 11 : 2, (а)]. Точка $\{v_1, v_2\}$ принадлежит к $S^r(e_1)$, если $v_1 = e_1$, т. е. если имеем $x^1 = \ldots = x^{r+1} = 0$. Таким образом, касательная плоскость к $S^r(e_1)$ в точке $\{e_1, e_2\}$ натянута на векторы $\eta_1, \ldots, \eta_r$, где η_j есть касательный вектор к кривой, заданной параметрическими уравнениями $y^j = t > 0$; $y^i = 0$, $i \neq j$; $x^k = 0$.

Покажем, что эта касательная плоскость имеет с касательной плоскостью к $\varphi(E^{r+1})$, проведенной в точке $\{e_1, e_2\}$, только одну общую точку $\{e_1, e_2\}$. Обозначим через ξ_j касательный вектор к кривой, определенной параметрическими уравнениями $x^i = t > 0$; $x^i = 0$, $i \neq j$; $y^k = 0$. Пусть $u(t)$ — гладкая кривая в E^{r+1}, исходящая из точки $\pm\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$. Мы можем написать: $u(t) = u_1(t)e_1 + \ldots + u_{r+2}(t)e_{r+2}$. Касательный вектор к кривой $u(t)$ в точке $\pm\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ равен $u_1'(0)e_1 + \ldots + u_{r+2}'(0)e_{r+2}$. Заметим, что, меняя кривую $u(t)$, мы сможем величинам $u_2'(0), \ldots, u_{r+2}'(0)$ придавать произвольные значения, в то время как $u_1'(0)$ будет от них зависеть (ибо вектор $u'(t)$ должен быть касательным к сфере S^{r+1}). Согласно (11.11), мы имеем

$$\varphi(u(t)) = \left\{-e_2 + 2\sum_{i=1}^{r+2} u_2(t)\,u_i(t)\,e_i, \quad -e_1 + 2\sum_{i=1}^{r+2} u_1(t)\,u_i(t)\,e_i\right\},$$

и потому вектор $\frac{d}{dt}\varphi(u(0))$, лежащий в касательной плоскости к $\varphi(E^{r+1})$, равен

$$2u_2(0)\,[2u_2'(0)\,\xi_1 + u_3'(0)\,\xi_2 + \ldots + u_{r+2}'(0)\,\xi_{r+1}] + \\ + 2u_1(0)\,[u_3'(0)\,\eta_1 + u_4'(0)\,\eta_2 + \ldots + u_{r+2}'(0)\,\eta_r].$$

Так как $2u_2(0) = \pm\sqrt{2} \neq 0$, а величины $u_2'(0), u_3'(0), \ldots, u_{r+2}'(0)$ можно выбирать произвольно, то проекция касательной плоскости к $\varphi(E^{r+1})$ параллельно плоскости векторов $\eta_1, \ldots, \eta_r$ на плоскость векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r+1}$ совпадает со всей линейной оболочкой векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{r+1}$. Отсюда следует, что линейная оболочка касательных плоскостей, проведенных в точке $\{e_1, e_2\}$ к $\varphi(E^{r+1})$ и $S^r(e_1)$ совпадает с $(2r+1)$-мерной плоскостью, касательной к $V_{r+2,\,2}$ в точке $\{e_1, e_2\}$. Таким образом, касательные плоскости, проведенные к $\varphi(E^{r+1})$ и $S^r(e_1)$ в точке $\{e_1, e_2\}$, находятся в общем положении, и потому

$$\chi(z^r(e_1), \varphi_*(x^{r+1})) = \pm 1$$

(см. конец п. 11 : 1).

11:4. Гомотопические свойства многообразий $V_{n,k}$.

(а). *Пусть H — связное топологическое пространство, в котором определено непрерывное умножение элементов, обладающее хотя бы одной единицей e. Тогда фундаментальная группа пространства H коммутативна, т. е. совпадает с* $\Delta^1(H, J_0)$ (ср. п. 10 : 2).

Действительно, пусть α и β — два элемента группы $\pi^1(H, e)$, а f и g — замкнутые пути, принадлежащие элементам α и β. Определим путь h_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ соотношениями

$$h_t(x^1) = \begin{cases} f(2x^1) & \text{при} \quad 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{t}{2}, \\ f(t)\,g(2x^1 - t) & \text{при} \quad \frac{t}{2} \leqslant x^1 \leqslant \frac{t+1}{2}, \\ f(2x^1 - 1) & \text{при} \quad \frac{t+1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда, учитывая, что $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = e$, мы найдем

$$h_0(x^1) = \begin{cases} g(2x^1), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x^1 - 1), & \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases} \qquad h_1(x^1) = \begin{cases} f(2x^1), & 0 \leqslant x^1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2x^1 - 1), & \frac{1}{2} \leqslant x^1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, пути h_0 и h_1 принадлежат соответственно элементам $\beta\alpha$ и $\alpha\beta$ группы $\pi^1(H, e)$. Так как эти пути связаны гомотопией h_t, то $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Теорема. *Многообразие $V_{n,k}$ асферично во всех размерностях, меньших r. Группа $\pi^r(V_{n,k})$ изоморфна группе $\Delta^r(V_{n,k}, J_0)$, т. е.* (см. теорему предыдущего пункта) *имеет порядок 2, если $k>1$, а r есть число нечетное, и является свободной циклической во всех остальных случаях.*

Доказательство. При $k=1$ многообразие $V_{n,k}$ гомеоморфно r-мерной сфере, и теорема в этом случае очевидна. Рассмотрим случай $k>1$. Выбирая начало путей лежащим в сфере $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1}) \subset V_{n,k}$, мы найдем [см. лемму (б) п. 11 : 2 и замечание к ней], что всякий замкнутый путь может быть деформацией сдвинут в сферу $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1})$. При $r>1$ отсюда следует, что группа $\pi^1(V_{n,k})$ тривиальна, откуда, в силу теорем п. 10 : 1 и 11 : 3, вытекает справедливость утверждения теоремы для случая $r>1$. Остается рассмотреть случай $r=1$, т. е. доказать, что группа $\pi^1(V_{n,\,n-1})$ имеет порядок 2.

Так как каждый путь в $V_{n,\,n-1}$ может быть сдвинут в окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$, то группа $\pi^1(V_{n,\,n-1})$ является циклической, образующий элемент которой определяется путем, один раз обегающим окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$ и возвращающимся в начальную точку. Предположим, что порядок этого образующего элемента равен $\lambda>0$, т. е. что путь, λ раз обегающий окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$, гомотопен нулю в $V_{n,\,n-1}$. Тогда, согласно лемме (б) п. 11 : 2, он гомотопен нулю уже в $V_{3,\,2} \subset V_{n,\,n-1}$, так что группы $\pi^1(V_{n,\,n-1})$ и $\pi^1(V_{3,\,2})$ изоморфны между собой. Многообразие $V_{3,\,2}$ состоит из пар $\{v_1, v_2\}$ единичных взаимно ортогональных векторов пространства R^3. Каждую такую пару можно однозначно дополнить вектором v_3 так, чтобы в R^3 репер v_1, v_2, v_3 был ортонормированным и имел положительную ориентацию при фиксированной ориентации пространства R^3.

Таким образом, $V_{3,\,2}$ гомеоморфно многообразию всех ортонормированных реперов положительной ориентации в R^3, или, что то же самое, многообразию H_3 всех ортогональных матриц третьего порядка с детерминантом $+1$. В многообразии H_3 определено непрерывное умножение, обладающее единицей (обычное умножение матриц), так что, согласно (а), группа $\pi^1(V_{3,\,2})$ коммутативна, т. е. изоморфна группе $\Delta^1(V_{3,\,2}, J_0)$, имеющей, согласно теореме предыдущего пункта, порядок 2.

Замечание. Образующий элемент группы $\pi^r(V_{n,\,k})$ определяется тождественным отображением сферы $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1})$ в $V_{n,\,k}$.

(б). *Множество $P = \varphi(E^{r+1}) = \varphi(S^{r+1})$, рассмотренное в теореме* п. 11 : 3, *можно разбить на три открытых шара*

$$\tau^{r+1} = P \setminus S^r(f_1), \quad \tau^r = S^r(f_1) \setminus \tau^0, \quad \tau^0 = \varphi(S^{r-1}) = \{f_1, f_2\}.$$

Это разбиение является клеточным комплексом.

Действительно, обозначим через T_α ориентированное $(r+1)$-мерное подпространство пространства R^{r+2}, проходящее через R^r и образующее с R^{r+1} угол α. Плоскость T_α пересекается с элементом E^{r+1} по r-мерному элементу $Ш^r_\alpha$. Когда угол α, отсчитываемый в некотором направлении, меняется от 0 до π, элемент $Ш^r_\alpha$ поворачивается из положения E^r_1 до E^r_2 (или наоборот). Внутренность каждого элемента $Ш^r_\alpha$ отображается при помощи φ в P гомеоморфно. При изменении α от 0 до π каждая внутренняя точка вращающегося элемента $Ш^r_\alpha$ описывает полуокружность с центром в плоскости R^r. Эти полуокружности попарно не пересекаются и заполняют множество $E^{r+1}\setminus S^{r-1}$. При отображении φ концы каждой полуокружности отождествляются, в силу условия $\varphi(u)=\varphi(-u)$, и получившиеся таким образом замкнутые кривые попарно не пересекаются и заполняют множество $P\setminus\tau^0$.

Разобьем каждую из этих замкнутых линий на два отрезка точками ее пересечения с элементами $S^r(f_1)\setminus\tau^0=\varphi(Ш^r_0)\setminus\tau^0$ и $\varphi(Ш^r{}_{\pi/2})\setminus\tau^0$. Отрезки, получившиеся на кривой, проходящей через точку $a\in S^r(f_1)\setminus\tau^0$, обозначим через $I_1(a)$ и $I_2(a)$. Если теперь K — произвольная триангуляция сферы $S^r(f_1)$, для которой τ^0 является вершиной, то, проведя отрезки $I_1(a)$ или $I_2(a)$ из всех точек некоторого симплекса T комплекса K, мы получим многогранники $I_1(T)$ и $I_2(T)$. Таким образом, P становится комплексом многогранников. Если внутри каждого многогранника, отличного от симплекса, добавить точку и построить конус над его границей (последовательно для многогранников размерностей $2, 3, \ldots, r+1$), то получим симплициальное подразделение для разбиения $\{\tau^{r+1}, \tau^r, \tau^0\}$. Таким образом, $\{\tau^{r+1}, \tau^r, \tau^0\}$ есть клеточный комплекс. Заметим, что, в силу (11.10), коэффициент инцидентности $[\tau^{r+1}:\tau^r]$ равен нулю при четном r и равен двум (при надлежащей ориентации клеток) при нечетном r.

(в). *При нечетном r всякое отображение $(r+1)$-мерной сферы S^{r+1} в P гомотопно в P ее отображению в $S^r(f_1)\subset P$.*

Действительно, пусть $\tau^{r+1}_1=S^{r+1}\setminus\tau^0_1$, $\tau^0_1\in S^{r+1}$ — клеточное разбиение сферы S^{r+1}. Если f — произвольное отображение сферы S^{r+1} в P, а γ — его степень, то, в силу соотношения (3:4), мы имеем $\gamma=0$. Отсюда следует, что гомоморфизм f^* группы $\nabla^{r+1}(P, G)$ в $\nabla^{r+1}(S^{r+1}, G)$ тривиален для любой области коэффициентов G, и доказываемое утверждение следует из теоремы Л. С. Понтрягина (п. 10:3; группа $\pi^1(P)$, как легко видеть, травиальна).

(г). *При нечетном r всякое отображение r-мерной сферы Σ^r в $S^r(f_1)\subset P$, имеющее четную степень, гомотопно нулю в P.*

В самом деле, отображение φ сферы S^r на сферу $S^r(f_1)$ имеет степень 2 и гомотопно нулю в P, так как оно продолжено в отображение φ элемента E^{r+1} в P [см. п. 7:4, (в)]. Всякое же отображение сферы Σ^r в $S^r(f_1)$, имеющее четную степень, гомотопно отображению вида $\varphi\psi$, где ψ — некоторое отображение сферы Σ^r на S^r.

11:5. Комплексная проективная плоскость. Комплексная проективная плоскость M^4 — это топологическое пространство, образованное отношениями троек не равных одновременно нулю комплексных чисел. Именно, если z_1, z_2, z_3 и z_1', z_2', z_3' — две тройки комплексных чисел, в каждой из которых хоть одно число отлично от нуля, то говорят, что эти тройки определяют одно и то же отношение $\xi = z_1 : z_2 : z_3 = z_1' : z_2' : z_3'$, если существует такое комплексное число α, что $z_i' = \alpha z_i$, $i = 1, 2, 3$. Если числа z_1, z_2, z_3 пробегают произвольные открытые множества U_1, U_2, U_3 комплексной плоскости, не обращаясь одновременно в нуль, то множество $G \subset M^4$ соответствующих отношений $z_1 : z_2 : z_3$ будем считать окрестностью любой из его точек. После этого M^4 становится, как легко видеть, топологическим пространством, которое и называется *комплексной проективной плоскостью*.

(а). *M^4 есть гладкое* (и даже *аналитическое*) *четырехмерное многообразие.*

Действительно, пусть $\xi = z_1 : z_2 : z_3$ — произвольный элемент из M^4. Будем считать для определенности, что $z_3 \neq 0$. Для построения окрестности G точки ξ в M^4 выберем окрестности U_1, U_2, U_3 комплексных чисел z_1, z_2, z_3, причем последнюю из них будем предполагать не содержащей нуля. Тогда G будет состоять из отношений

$$\xi' = z_1' : z_2' : z_3' = \frac{z_1'}{z_3'} : \frac{z_2'}{z_3'} : 1,$$

где $z_i' \in U_i$. Отношения $\frac{z_1'}{z_3'}$ и $\frac{z_2'}{z_3'}$ будут однозначно определены для каждого $\xi' \in G$ и будут пробегать открытые множества комплексной плоскости. Таким образом, G гомеоморфно топологическому произведению двух плоских открытых множеств, т. е. открытому множеству четырехмерного эвклидова пространства.

Множество всех отношений $z_1 : z_2 : z_3 \in M^4$, для которых $z_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, обозначим через V_i. Каждая точка открытого множества V_3 может быть однозначно представлена в виде $(x^1 + ix^2) : (x^3 + ix^4) : 1$, где x^1, x^2, x^3, x^4 — действительные числа, могущие принимать произвольные значения. Эти числа x^1, x^2, x^3, x^4 мы примем за координаты в V_3; аналогично вводятся координаты в окрестностях V_1 и V_2. Координатная система $\{V_1, V_2, V_3\}$ устанавливает в M^4 гладкость (и даже аналитичность), так как преобразование координат из одной окрестности V_1, V_2, V_3 в другую осуществляется в их общей части аналитическими функциями.

(б). *Подмножество S^2 многообразия M^4, состоящее из отношений $z_1 : z_2 : 0$, гомеоморфно двумерной сфере, а множество $M^4 \diagdown S^2$ — открытому четырехмерному шару.*

В самом деле, множество отношений $z_1 : z_2 : 0$, где хотя бы одно из чисел z_1, z_2 отлично от нуля, гомеоморфно комплексной сфере.

Множество же $V_3 = M^4 \setminus S^2$, в силу сказанного в (а), гомеоморфно четырехмерному эвклидову пространству и, следовательно, открытому четырехмерному шару.

(в). *Целочисленные* ∇- *и* Δ-*группы размерностей* 0, 2, 4 *многообразия* M^4 *являются свободными циклическими, а* ∇- *и* Δ-*группы размерностей* 1 *и* 2 *тривиальны.*

Действительно, из (б) и возможности триангулирования гладкого многообразия вытекает, что полиэдр M^4 является телом клеточного комплекса, состоящего из трех клеток

$$\tau^4 = M^4 \setminus S^2, \quad \tau^2 = S^2 \setminus \tau^0, \quad \tau^0 \in S^2.$$

Отсюда непосредственно вытекают высказанные утверждения о группах гомологий. Из того, что группа $\Delta^4(M^4, J_0)$ — свободная циклическая, вытекает ориентируемость многообразия M^4. *Естественной ориентацией* многообразия M^4 назовем такую ориентацию его, которая определяется координатной системой x^1, x^2, x^3, x^4, определенной в (а) для окрестности $V_3 \subset M^4$.

(г). *При естественной ориентации многообразия* M^4 *индекс самопересечения* $\chi(z^2, z^2)$ *цикла* z^2, *определяющего образующий элемент группы* $\Delta^2(M^4, J_0)$, *равен* $+1$.

В самом деле, рассмотрим в M^4 сферы S_0^2 и S_1^2, образованные, соответственно, отношениями $0 : z_2 : z_3$ и $z_1 : 0 : z_3$. В силу равноправия чисел z_1, z_2, z_3, каждая из этих сфер, будучи ориентирована, определяет (как и S^2) образующий элемент группы $\Delta^2(M^4, J_0)$. Сфера S_0^2 состоит из точки $\xi_0 = 0 : 1 : 0$ и открытого элемента $S_0^2 \setminus \xi_0$, определяемого в V_3 уравнениями $x^1 = x^2 = 0$; сфера же S_1^2 состоит из точки $\xi_1 = 1 : 0 : 0$ и элемента $S_1^2 \setminus \xi_1$, для которого $x^3 = x^4 = 0$. Таким образом, S_0^2 и S_1^2 имеют единственную общую точку $a = 0 : 0 : 1$; то же имеет место для касательных плоскостей, проведенных к этим сферам в точке a. Нам остается ориентировать эти сферы одинаковым образом (так, чтобы получившиеся циклы были гомологичны) и определить знак их индекса пересечения.

Каждое из множеств S_t^2, образованных отношениями $tz : (1 - t) z : z_3$, гомеоморфно комплексной сфере (ибо их точки определяются при фиксированном t отношениями $z : z_3$), и при изменении t от 0 до 1 мы получаем деформацию сферы S_0^2 в S_1^2, причем естественная ориентация S_0^2, как комплексной сферы, перейдет в естественную ориентацию комплексной сферы S_1^2. Сферы S_0^2 и S_1^2 образованы вблизи a соответственно отношениями

$$0 : z_2 : 1 = 0 : (x^3 + ix^4) : 1 \text{ и } z_1 : 0 : 1 = (x^1 + ix^2) : 0 : 1,$$

так что их естественные ориентации определяются координатами x^3, x^4 и x^1, x^2 соответственно. Таким образом, индекс пересечения циклов, получившихся при естественной ориентациии сфер S_0^2 и S_1^2, равен $+1$.

(д). *Пусть* Z^2 *и* Z^4 — *образующие элементы групп* $\nabla^2(M^4, J_0)$ *и* $\nabla^4(M^4, J_0)$, *причем* Z^4 *соответствует естественной ориентации многообразия* M^4. *Тогда*

$$Z^2 \smile Z^2 = Z^4.$$

Действительно, двойственным к циклу $z^2 \in Z^2$ является Δ-цикл, порождающий образующий элемент группы $\Delta^2(M^4, J_0)$, т. е. гомологичный циклу s^2, получающемуся при произвольной ориентации сферы S^2. Поэтому доказываемое предложение следует из (г) и предложения (и) п. 6:1.

(е). *Всякое отображение f сферы S^4 на многообразие M^4 имеет степень нуль.*

Действительно, пусть $\mathfrak{Z}^4$ — образующий элемент группы $\nabla^4(S^4, J_0)$ и γ — степень отображения f сферы S^4 на M^4. Тогда

$$\gamma\mathfrak{Z}^4 = f^*(Z^4) = f^*(Z^2 \smile Z^2) = (f^*Z^2) \smile (f^*Z^2) = 0,$$

так как $f^*Z^2 \in \nabla^2(S^4, J_0) = 0$. Таким образом, $\gamma = 0$.

11:6. Комплексы M^{n+2}. Рассмотрим такую триангуляцию полиэдра M^4, для которой S^2 является телом некоторого подкомплекса, и изучим свойства комплексов $M^5 = EM^4$; $M^6 = EM^5$; ..; $M^{n+2} = EM^{n+1}$;... Трехмерная сфера $S^3 = ES^2$ является подкомплексом комплекса M^5, и вообще n-мерная сфера $S^n = ES^{n-1}$ является подкомплексом комплекса $M^{n+2} = EM^{n+1}$. Мы будем обозначать одними и теми же символами M^{n+2}, S^n как полученные комплексы, так и соответствующие полиэдры.

(а). *Множество* $M^{n+2} \setminus S^n$ *гомеоморфно открытому* $(n+2)$-*мерному шару.*

При $n = 2$ это верно [см. п. 11:5, (б)]. Так как надстройка над открытым шаром становится открытым шаром на единицу большей размерности, если удалить из нее вершины обоих пирамид, то доказываемое предложение получается из случая $n = 2$ очевидной индукцией.

(б). *Группы* $\nabla^r(M^{n+2}, J_0)$ *являются свободными циклическими при* $r = 0$, $r = n$ и $r = n + 2$; *группы остальных размерностей тривиальны.*

Доказательство непосредственно следует из того, что M^{n+2} есть тело клеточного комплекса, состоящего из клеток

$$\tau^{n+2} = M^{n+2} \setminus S^n, \quad \tau^n = S^n \setminus \tau^0, \quad \tau^0 \in S^n.$$

(в). *Обозначим через G свободную циклическую группу, а через C — группу порядка 2 и определим произведение групп G и G в C, считая квадрат образующего элемента группы G равным образующему элементу группы C. Обозначим, далее, через Z^n и Z^{n+2} образующие элементы групп $\nabla^n(M^{n+2}, G)$ и $\nabla^{n+2}(M^{n+2}, C)$. Тогда*

$$Sq^2 Z^n = Z^{n+2}.$$

При $n=2$ это следует из предложений (д) п. 11:5 и (в) п. 6:3. Далее — очевидная индукция по n [см. предложения (д) п. 6:4 и (ж) п. 4:2].

(г). *Всякое отображение сферы* S^{n+2} на псевдомногообразие [см. предложение (и) п. 4:2] M^{n+2} *имеет четную степень*, $n \geqslant 3$.

Действительно, пусть f — отображение сферы S^{n+2} на M^{n+2}, γ — его степень. Тогда, обозначая через Z^n, Z^{n+2} и $\mathfrak{Z}^{n+2}$ образующие элементы групп $\nabla^n(M^{n+2}, G)$, $\nabla^{n+2}(M^{n+2}, C)$, $\nabla^{n+2}(S^{n+2}, C)$, имеем

$$\gamma\mathfrak{Z}^{n+2} = f^* Z^{n+2} = f^* Sq^2 Z^n = Sq^2 f^* Z^n = 0,$$

ибо группа $\nabla^n(S^{n+2}, G)$ тривиальна. Так как $\mathfrak{Z}^{n+2}$ есть элемент второго порядка, то γ четно.

§ 12. Векторные поля на многообразии

12:1. Параллелизующие системы. Пусть M^n — гладкое n-мерное подмногообразие эвклидова пространства R. Многообразие M^n мы будем предполагать замкнутым (компактным) и ориентированным. Если в каждой точке a некоторого множества $A \subset M^n$ задан единичный касательный вектор $v(a)$ многообразия M^n, непрерывно зависящий от $a \in A$, то говорят, что на A задано *векторное поле*. Если на A задано k векторных полей

$$v_1(a), \ldots, v_k(a), \tag{12.1}$$

которые в каждой точке $a \in A$ взаимно ортогональны, то скажем, что на A задано реперное поле порядка k; при $k=n$ требуется еще, чтобы репер (12.1) соответствовал ориентации многообразия M^n. Реперное поле порядка n будем также называть *параллелизующей системой*.

(а). *На всяком множестве* $A \subset M^n$, *гомеоморфном шару, можно задать параллелизующую систему.*

Действительно, пусть ε — настолько малое расстояние, что при $\rho(x, y) < \varepsilon$ никакой вектор, касательный к M^n в точке y, не ортогонален к касательной плоскости многообразия M^n, проведенной в точке x. Пусть, далее, f — гомеоморфное отображение единичного шара E на $A \subset M^n$, а p — настолько большое натуральное число, что при $\rho(a, b) < \frac{1}{p}$, $a \in E$, $b \in E$ имеем: $\rho(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Обозначим через S_i, $i = 0, \ldots, p$ сферу радиуса $\frac{i}{p}$, концентрическую с шаром E и имеющую на единицу меньшую размерность (S_0 есть центр, а S_p — граница шара E), через K_j, $j = 1, \ldots, p$ — кольцевую область, заключенную между сферами S_{j-1} и S_j, а через χ_j — центральную проекцию кольца

K_j на сферу S_{j-1} из центра шара E. Положим, далее, $E_0 = S_0$, $E_j = K_1 \cup \ldots \cup K_j$, $j = 1, \ldots, p$.

В точке $x = f(E_0)$ многообразия M^n выберем произвольно n взаимно ортогональных касательных векторов, образующих репер, который соответствует ориентации многообразия M^n. Предположим, что на множестве $f(E_{j-1})$ параллелизующая система уже задана, $1 \leqslant j \leqslant p$. В каждой точке $f(a)$, $a \in K_j$ построим n векторов, получающихся параллельным переносом из векторов, уже имеющихся в точке $f(\chi_j(a))$. Мы получим в каждой точке множества K_j n векторов, не лежащих, однако, в касательной плоскости. Спроектировав эти векторы на касательные плоскости к M^n, взятые в соответствующих точках, мы получим, согласно выбору числа ε, n линейно независимых векторов, непрерывно зависящих от точки $x \in f(K_j)$. Производя ортогонализацию этих векторов, мы получим на $f(K_j)$ параллелизующую систему, совпадающую на $f(S_{j-1})$ с имевшейся уже на $f(E_{j-1})$ системой, т. е. получим параллелизующую систему на всем множестве $f(E_{j-1} \cup K_j) = f(E_j)$. При $j = p$ мы получаем, по индукции, параллелизующую систему, заданную на $f(E_p) = f(E) = A$.

(б). Предположим, что векторы (12.1) непрерывно зависят от пары a, t, где $a \in A$ и $t \in [0, 1]$, так что при каждом фиксированном t (и меняющемся a) мы получаем некоторое реперное поле $[\mathfrak{S}_k]_t$ порядка k. Тогда мы скажем, что имеется *деформация* поля $[\mathfrak{S}_k]_0$ в поле $[\mathfrak{S}_k]_1$ и что эти последние *гомотопны* между собой.

Покажем, что *всякие две параллелизующие системы, заданные на симплексе T многообразия M^n, гомотопны.*

В самом деле, выберем на T фиксированную параллелизующую систему $\mathfrak{S}_n$. Тогда, разлагая векторы любой другой параллелизующей системы $\mathfrak{S}_n'$ по векторам системы $\mathfrak{S}_n$, мы получим для каждой точки $a \in T$ ортогональную матрицу $\chi(a)$ с детерминантом $+1$, т. е. непрерывное отображение симплекса T во множество H_n ортогональных матриц порядка n с детерминантом $+1$. Обратно, имея отображение симплекса T в H_n, мы можем построить единственную систему $\mathfrak{S}_n'$, соответствующую этому отображению. Деформации системы $\mathfrak{S}_n'$ на T соответствует деформация отображения симплекса T в H_n и наоборот. Поэтому нам достаточно доказать, что всякие два отображения χ_1, χ_2 симплекса T в H_n гомотопны между собой. Пусть φ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — деформация тождественного отображения симплекса T на себя в отображение его в одну точку. Тогда $\chi_i \varphi_t$, $i = 1, 2$ есть деформация отображения χ_i в отображение $\chi_i \varphi_1$ всего симплекса T в одну точку множества H_n. В силу связности множества H_n, отображения $\chi_1 \varphi_1$ и $\chi_2 \varphi_1$, а, значит, также χ_1 и χ_2 гомотопны между собой.

12:2. Препятствие. Пусть B^n — произвольная триангуляция многообразия M^n, B^s есть s-мерный остов этой триангуляции. Предположим, что на B^s, $0 \leqslant s < n$ задано реперное поле $\mathfrak{S}_k$ порядка k, и пусть T^{s+1} — ориентированный симплекс триангуляции B^n. Введем на T^{s+1} параллелизующую систему $\mathfrak{S}_n$. На границе Σ^s симплекса T^{s+1} поле $\mathfrak{S}_k$ задано. Пусть $a \in \Sigma^s$, и $\Pi(a)$ — такая последовательность (11:1), векторы которой в базисе (11.7) пространства R^n имеют те же координаты, что и векторы поля $\mathfrak{S}_k$, взятые в точке a, по базису $\mathfrak{S}_n$ (в a). Мы получаем непрерывное отображение Π границы Σ^s в $V_{n,k}$, и если Σ^s ориентировать так, чтобы было $[T^{s+1}:\Sigma^s] = +1$, то отображение Π определит некоторый элемент $\mathfrak{z}$ группы $\pi^s(V_{n,k})$. Этот элемент $\mathfrak{z}$ не зависит от выбора параллелизующей системы $\mathfrak{S}_n$.

Действительно, при деформации параллелизующей системы $\mathfrak{S}_n$ отображение Π также непрерывно деформируется (т. е. $\mathfrak{z}$ не меняется), а деформацией система $\mathfrak{S}_n$ может быть переведена в любую другую параллелизующую систему. Поставив в соответствие каждому симплексу $T^{s+1} \in B^n$ указанным образом элемент $\mathfrak{z}$ группы $\pi^s(V_{n,k})$, мы получим кососимметрическую функцию с значениями в $\pi^s(V_{n,k})$, заданную на $(s+1)$-мерных ориентированных симплексах комплекса B^n. Эта цепь, которую мы обозначим через $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$, называется *препятствием* для поля $\mathfrak{S}_k$. Свойства препятствия аналогичны рассмотренным выше свойствам препятствия для случая непрерывного отображения (§ 8). Мы рассмотрим их вкратце.

(а). *Для возможности распространения реперного поля $\mathfrak{S}_k$, заданного на B^s, на остов B^{s+1} необходимо и достаточно выполнение равенства* $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k) = 0$.

Действительно, пусть T^{s+1} — симплекс комплекса B^n. Введем на T^{s+1} параллелизующую систему. Тогда поле $\mathfrak{S}_k$ определяет отображение Π границы Σ^s симплекса T^{s+1} в $V_{n,k}$. Если поле $\mathfrak{S}_k$ можно продолжить на T^{s+1}, то и отображение Π можно продолжить на T^{s+1}, т. е. соответствующий элемент $\mathfrak{z}$ группы $\pi^s(V_{n,k})$ равен нулю.

Обратно, если $\mathfrak{z} = 0$, то отображение Π гомотопно нулю и может быть продолжено на T^{s+1}, а это дает возможность продолжения на T^{s+1} и поля $\mathfrak{S}_k$. Таким образом, для возможности продолжения поля $\mathfrak{S}_k$ на B^{s+1} необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты цепи $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$ были равны нулю.

(б). *При деформации поля $\mathfrak{S}_k$ на остове B^s препятствие не меняется.*

(в). *Препятствие $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$ является ∇-циклом комплекса B^n по области коэффициентов $\pi^s(V_{n,k})$.*

Действительно, пусть T^{s+2} — произвольный $(s+2)$-мерный симплекс комплекса B^n. Введем на T^{s+2} параллелизующую систему. Тогда определится отображение Π всего s-мерного остова L^s симплекса T^{s+2} в $V_{n,k}$ (на этом остове поле $\mathfrak{S}_k$ задано), причем отображение Π границы каждого симплекса T^{s+1}, являющегося гранью симплекса T^{s+2}, определяет элемент группы $\pi^s(V_{n,k})$, равный коэффиценту препятствия $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$ на симплекс T^{s+1}. Из сказанного в п. 8:1, (в) следует, что сумма этих коэффициентов по всем когерентно ориентированным граням симплекса T^{s+2} равна нулю, т. е. $\nabla\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)=0$.

12:3. Различающая. Пусть на B^s заданы два поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$, совпадающие на B^{s-1}. Если T^s — ориентированный s-мерный симплекс, то, введя на T^s параллелизующую систему, мы получим при помощи полей $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$ два отображения Π и Π' симплекса T^s в $V_{n,k}$, совпадающие на $\dot{T}^s$. Элемент $d^s_{\Pi,\Pi'}$ группы $\pi^s(V_{n,k})$ не зависит от выбора параллелизующей системы, выбранной на T^s (при деформации параллелизующей системы отображения Π и Π' одновременно деформируются, оставаясь совпадающими на границе симплекса T^s), и мы поставим этот элемент в соответствие симплексу T^s. Полученная таким образом цепь $\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)$ называется *различающей*; она обладает свойствами, аналогичными доказанным в п. 8:2. Действительно, доказательство этих свойств можно вести отдельно для каждого симплекса T комплекса B^n; введение же на T параллелизующей системы позволяет свести доказательство к разобранному в п. 8:2 случаю отображений в пространство $Y=V_{n,k}$. Ограничимся указанием формулировок.

(а). *Если поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$ одновременно деформируются, оставаясь все время совпадающими на B^{s-1}, то различающая $\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)$ не меняется.*

(б). *Если поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$, заданные на B^s и совпадающие на B^{s-1}, таковы, что $\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)=0$, то эти поля гомотопны, причем деформация одного поля в другое может быть выбрана так, что на B^{s-1} поле в течение деформации не меняется.*

(в). *Для трех заданных на B^s и совпадающих на B^{s-1} полей $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}'_k$, $\mathfrak{S}''_k$ имеем:*

$$\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)+\partial^s(\mathfrak{S}'_k,\mathfrak{S}''_k)=\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}''_k).$$

(г). *Если поле $\mathfrak{S}_k$ задано на B^s, а d^s есть произвольная s-мерная цепь комплекса B^n по области коэффициентов $\pi^s(V_{n,k})$, то на B^s существует такое поле $\mathfrak{S}'_k$, совпадающее с $\mathfrak{S}_k$ на B^{s-1}, что $\partial_s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)=d^s$.*

(д). *Если заданное на B^s поле $\mathfrak{S}_k$ деформируется так, что на B^{s-2} оно не меняется, а получившееся в результате этой деформации поле $\mathfrak{S}'_k$ совпадает с $\mathfrak{S}_k$ на B^{s-1}, то $\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)$ есть гомологичный нулю ∇-цикл.*

(е). Обратно, *если для двух заданных на B^s и совпадающих на B^{s-1} полей $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$ различающая $\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)$ является гомологичным нулю ∇-циклом, то $\mathfrak{S}_k$* и *$\mathfrak{S}'_k$ гомотопны, причем деформация одного поля в другое может быть выбрана так, что на B^{s-2} поле не меняется.*

(ж). *Если поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$, заданные на B^s, совпадают на B^{s-1}, то*

$$\nabla\partial^s(\mathfrak{S}_k,\mathfrak{S}'_k)=\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)-\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}'_k).$$

(з). *Если поле* $\mathfrak{S}_k$ *задано на* B^s *и* $\mathfrak{z}^{s+1}$ — *цикл*, ∇-*гомологичный препятствию* $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$ *поля* $\mathfrak{S}_k$, *то существует поле* $\mathfrak{S}'_k$ (совпадающее с $\mathfrak{S}_k$ на B^{s-1}), *для которого* $\mathfrak{z}^{s+1}(\mathfrak{S}'_k) = \mathfrak{z}^{s+1}$.

Добавим к этим предложениям еще следующее:

(и). *Если на подкомплексе* K *комплекса* B^n *задано поле* $[\mathfrak{S}_k]_0$ *и если* $[\mathfrak{S}_k]_t$ — *деформация этого поля на подкомплексе* $L \subset K$, *то ее можно продолжить в деформацию поля* $[\mathfrak{S}_k]_0$, *заданного на всем* K.

Доказательство, проведенное в случае отображений [см. лемму (а) п. 2 : 2], пригодно и здесь; нужно только на каждом рассматриваемом симплексе вводить параллелизующую систему.

12:4. Теорема Штифеля. (а). *На* r-*мерном остове* B^r *любого* n-*мерного гладкого многообразия* M^n *можно построить реперное поле* $\mathfrak{S}_k$ *порядка* $k = n - r$.

Действительно, зададим поле $\mathfrak{S}_k$ на B^0 (в вершинах триангуляции B^n) произвольно, и пусть T^1 — одномерный симплекс комплекса B^n. Введем на T^1 параллелизующую систему. Тогда определится отображение Π концов отрезка T^1 в $V_{n,k}$. В силу линейной связности многообразия $V_{n,k}$ это отображение Π можно распространить на весь симплекс T^1. Таким образом, оказывается возможным построить поле $\mathfrak{S}_k$ на B^1. Если $r = 1$, то тем самым наша цель достигнута; если же $r > 1$, то препятствие $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{S}_k)$ для поля $\mathfrak{S}_k$ равно нулю (в силу тривиальности $\pi^1(V_{n,k})$), так что поле $\mathfrak{S}_k$ можно продолжить на B^2. При $r = 2$ это поле является искомым; если же $r > 2$, то это поле можно распространить (в силу тривиальности препятствия) на остов B^3 и т. д.

(б). *Если поля* $\mathfrak{S}_k$ *и* $\mathfrak{S}'_k$ *заданы на остове* B^p, $p \geqslant r - 1$, *то любое из них гомотопно такому полю, которое совпадает с другим на* B^{r-1}.

В самом деле, поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$, рассматриваемые только на B^0, очевидно, гомотопны. Поэтому [п. 12 : 3, (и)] поле $\mathfrak{S}_k$ (рассматриваемое на всем B^p) может быть продеформировано в такое поле $\mathfrak{S}_k^{(0)}$, которое совпадает с $\mathfrak{S}'_k$ на B^0. Пусть поле $\mathfrak{S}_k$ продеформировано уже в такое поле $\mathfrak{S}_k^{(s-1)}$, которое совпадает с $\mathfrak{S}'_k$ на остове B^{s-1}, $0 < s < r$. Тогда для полей $\mathfrak{S}_k^{(s-1)}$ и $\mathfrak{S}'_k$ определена различающая $\partial^s(\mathfrak{S}_k^{(s-1)}, \mathfrak{S}'_k)$, которая равна нулю в силу тривиальности группы $\pi^s(V_{n,k})$. Поэтому [см. п. 12 : 3, (б)] поля $\mathfrak{S}_k^{(s-1)}$ и $\mathfrak{S}'_k$, рассматриваемые только на B^s, гомотопны, т. е. поле $\mathfrak{S}_k^{(s-1)}$ (а значит, и $\mathfrak{S}_k$) гомотопно [см. п. 12 : 3, (и)] такому полю $\mathfrak{S}_k^{(s)}$, которое совпадает с $\mathfrak{S}'_k$ на B^s. Полагая последовательно $s = 1, 2, \ldots, r - 1$, мы и докажем нашу лемму.

(в). Пусть теперь поле $\mathfrak{S}_k$ задано на B^r. Тогда препятствие $\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k)$ для этого поля является [см. п. 12 : 2, (в)] ∇-циклом комплекса B^n по области коэффициентов $\pi^r(V_{n,k})$; мы будем называть его ∇-*циклом Штифеля* или *первым препятствием* (ибо препятствия низших размерностей всегда равны нулю в силу тривиальности групп $\pi^s(V_{n,k})$ для $s < r$).

Теорема. *На r-мерном остове B^r гладкого замкнутого ориентируемого многообразия M^n всегда возможно построить реперное поле $\mathfrak{S}_k$ порядка k; для каждого такого поля определен цикл $\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k)$ по области коэффициентов $\pi^r(V_{n,k})$. Класс гомологий Y^{r+1} этого цикла не зависит от выбранного поля $\mathfrak{S}_k$ (т. е. всякие два первых препятствия гомологичны)*. Для возможности построения поля порядка k на остове B^{r+1} необходимо и достаточно, чтобы этот класс гомологий Y^{r+1} был нулевым классом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}'_k$ — два реперных поля порядка k, заданные на B^r, а $\mathfrak{S}''_k$ — такое поле, гомотопное полю $\mathfrak{S}_k$ и также заданное на B^r, что $\mathfrak{S}'_k$ и $\mathfrak{S}''_k$ совпадают на B^{r-1} [см. (б)]. Тогда [см. п. 12:2, (б)]

$$\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k) = \mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}''_k)$$

и [см. п. 12:3, (ж)]

$$\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}''_k) \underset{\nabla}{\sim} (\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}'_k),$$

т. е.

$$\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k) \underset{\nabla}{\sim} \mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}'_k).$$

Если на B^{r+1} возможно построить реперное поле порядка k, то это поле, рассматриваемое только на B^r, имеет препятствие, равное нулю [см. п. 12:2, (а)], т. е. $Y^{r+1}=0$. Обратно, если $Y^{r+1}=0$, то [см. п. 12:3, (з)] всякий цикл этого класса гомологий, т. е. гомологичный нулю, является первым препятствием для некоторого реперного поля порядка k. В частности, на B^r существует такое поле $\mathfrak{S}_k$, для которого $\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k)=0$, т. е. поле, которое можно продолжить на остов B^{r+1}.

§ 13. Классификация отображений $(n+1)$-мерной сферы на n-мерную

13:1. Хопфовское число отображения, $n=2$. В силу результатов § 7 (п. 7:4), задача классификации отображений трехмерной сферы на двумерную эквивалентна задаче вычисления группы $\pi^3(S^2)$. К решению этой задачи мы и приступаем. Пусть f — отображение куба R^3 на S^2, переводящее $\dot{K}^3$ в одну точку $q \in S^2$. Без ограничения общности можно предполагать, что f — симплициальное отображение как-либо триангулированного куба K^3 на триангулированную сферу S^2. Пусть T^2 — треугольник сферы S^2, Σ — круг, лежащий целиком внутри T^2, и p — центр круга Σ. Если $T^3=[a, b, c, d]$ — трехмерный симплекс комплекса K^3, переходящий при симплициальном отображении f на T^2, то две его

* Том доказал [24], что этот класс гомологий не зависит от способа триангулирования многообразия M^n и задания в нем гладкости, т. е. является его топологическим инвариантом. Полное вычисление штифелевского класса гомологий Y^{r+1} было дано Ву [25]; в его формулах используются стинродовские квадраты.

вершины, скажем a и b, переходят в одну и ту же вершину симплекса T^2, каждый отрезок тетраэдра T^3, параллельный ребру $[a, b]$, переходит в одну точку треугольника T^2, причем различные отрезки — в различные точки. Грани же $[a, c, d]$ и $[b, c, d]$ отображаются на T^2 без вырождения. В силу этого, полным прообразом $f^{-1}(\Sigma) \cap T^3$ круга Σ в симплексе T^3 будет эллиптический цилиндр, основаниями которого служат два эллипса — прообразы круга Σ в гранях $[a, c, d]$ и $[b, c, d]$ при отображении f. Центральная линия этого цилиндра переходит при отображении f в центр p круга Σ.

Полным прообразом $f^{-1}(\Sigma)$ круга Σ в комплексе K^3 будет тело W, составленное из ряда цилиндров описанного вида, причем эти цилиндры образуют одну или несколько замкнутых трубок (так как каждый эллипс, являющийся прообразом круга Σ в треугольнике $T \subset K^3$, отображающемся на T^2 без вырождения, является общим основанием ровно двух цилиндров указанного вида). В частности, центральная линия L этих трубок (прообраз точки p), так же как и прообраз любой точки $a \in \Sigma$, будет состоять из одной или нескольких простых замкнутых ломаных.

Мы придадим этим ломаным определенную ориентацию, предполагая K^3 и S^2 ориентированными. Именно, если T — любой треугольник куба K^3, отображающийся на T^2 без вырождения и с сохранением ориентации, а $z^1(a)$ — прообраз точки $a \in \Sigma$, то потребуем, чтобы индекс пересечения $\chi(z^1(a), T)$ был равен $+1$. При такой ориентации отрезков ломаной $z^1(a)$ она становится циклом. Коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(z^1(a), z^1(b))$ циклов $z^1(a), z^1(b)$, определенных для двух различных точек a и b из Σ, не зависит от выбора точек a и b из Σ. Это следует из того, что, перемещая точки a и b в круге Σ, можно эту пару точек перевести в любую другую пару c, d точек круга Σ (см. п. 5:3). Этот коэффициент зацепления называется *хопфовским числом* [26] отображения f; мы будем обозначать его через γ. В дальнейшем будет показано, что γ не зависит от выбора треугольника $T^2 \subset S^2$ и полностью определяется отображением f (и даже его гомотопическим классом).

13:2. Связь отображений с векторными полями. Построим теперь новое отображение φ куба K^3 на S^2, гомотопное отображению f. Будем представлять себе S^2 как единичную сферу трехмерного эвклидова пространства, точку p — северным полюсом этой сферы, а круг Σ — сферической «шапочкой» с центром p; южный полюс сферы S^2 обозначим через q. Пусть ω_t — деформация тождественного отображения ω_0 сферы S^2 на себя в такое отображение ω_1, которое стягивает $S^2 \setminus \Sigma$ в точку q, а внутренность круга Σ растягивает гомеоморфно на $S^2 \setminus q$*.

---

* Эту деформацию можно описать так. Если широта точки, лежащей на окружности круга Σ, равна δ, где $-90° < \delta < 90°$, то отображение ω_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ переводит

Рассмотрим тогда деформацию $\omega_t f$ отображения $\omega_0 f = f$ куба K^3 на S^2 в отображение $\omega_1 f$, которое мы и обозначим через φ. Отображение φ гомотопно f и обладает тем свойством, что все точки куба K^3, лежащие вне тела W или на его границе, переходят в результате отображения φ в точку $q \in S^2$, ибо $f(K^3 \setminus W) \subset S^2 \setminus \Sigma$. Таким образом, на $S^2 \setminus q$ отображается при помощи φ только внутренность тела W.

Разобьем теперь тело W некоторым образом на эллипсы. Именно, если $T^3 = [a, b, c, d]$ — симплекс комплекса K^3, отображающийся на T^2, а a и b — две его вершины, переходящие в одну точку треугольника T^2, то мы будем рассматривать треугольники $[c, d, x]$, где x — любая точка ребра $[a, b]$. Каждый из этих треугольников пересекает тело W по эллипсу, центр которого лежит на центральной линии L тела W. Через каждую точку $e \in L$ проходит единственный эллипс указанного вида; этот эллипс мы обозначим через $Э_e$. Мы получили разбиение тела W на непересекающиеся эллипсы $Э_e$, $e \in L$. Каждый из эллипсов $Э_e$ при помощи f отображается на круг Σ гомеоморфно и аффинно, а при помощи φ внутренность эллипса $Э_e$ гомеоморфно отображается на $S^2 \setminus q$.

Отображение φ связано с заданием на линии L двух векторных полей. Действительно, пусть r_1 и r_2 — два фиксированных вектора, являющихся взаимно ортогональными радиусами круга Σ (исходящими из центра p). При помощи отображения f^{-1} мы получим в каждом эллипсе $Э_e$, $e \in L$ два вектора $r_1(e)$ и $r_2(e)$, исходящие из точки $e \in L$ и являющиеся сопряженными полудиаметрами эллипса $Э_e$. Мы получаем на L два векторных поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$. Нетрудно видеть, что эти два векторных поля полностью определяют отображение φ. В самом деле, векторы $r_1(e)$ и $r_2(e)$ вполне определяют эллипс $Э_e$ как его сопряженные полудиаметры; отображение f эллипса $Э_e$ на Σ однозначно определяется тем требованием, чтобы оно переводило $r_1(e)$ и $r_2(e)$ соответственно в r_1 и r_2. Таким образом, определяется и отображение $\varphi = \omega_1 f$ каждого эллипса $Э_e$ и, следовательно, всего тела W. Вся же остальная часть куба K^3 отображается при помощи φ в точку $q \in S^2$.

Если теперь выбрать линию L и два векторных поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$ на ней произвольно, то для возможности построить для них только что описанным способом отображение φ нужно, чтобы выполнялись следующие условия: векторные поля должны быть непрерывны на L, векторы $r_1(e)$ и $r_2(e)$ должны быть независимы в каждой точке $e \in L$, а натянутые на них как на пары сопряженных полудиаметров эллипсы $Э_e$ должны быть попарно непересекающимися. При выполнении этих

точку $M \in S^2$, имеющую широту α, в точку, лежащую на том же меридиане и имеющую широту

$$\alpha - (90^\circ + \alpha)\,t, \qquad \text{если } \alpha \leqslant \delta$$

$$\alpha - \frac{90^\circ + \delta}{90^\circ - \delta}(90^\circ - \alpha)t, \text{ если } \alpha \geqslant \delta.$$

условий линия L с заданными на ней полями $r_1(e)$ и $r_2(e)$ однозначно определяет непрерывное отображение куба K^3 на сферу S^2. Из этого ясно, что если линия L будет вместе с имеющимися на ней полями $r_1(e)$ и $r_2(e)$ непрерывно деформироваться, так что при этом в каждый момент времени будут выполнены указанные условия, то и отображение φ будет определено в каждый момент времени и будет непрерывно деформироваться при изменении линии L и полей. Такую деформацию линии L и имеющихся на ней полей назовем *допустимой*.

Так как куб K^3 ориентирован, а линия L также является ориентированной, то каждый эллипс $Э_e$ мы можем ориентировать так, чтобы его индекс пересечения с L был равен $+1$. Тогда каждый эллипс $Э_e$ отображается на круг Σ с сохранением ориентации. Поэтому если пара векторов r_1, r_2 выбрана в круге Σ так, что она соответствует его ориентации, то пара векторов $r_1(e), r_2(e)$ соответствует выбранной ориентации эллипса $Э_e$. Если мы обозначим через $r(e)$ вектор, исходящий из точки $e \in L$ и указывающий направление ориентированной ломаной L в точке e, то, в силу равенства $\chi(L, Э_e) = +1$, мы можем заключить, что тройка векторов $r(e), r_1(e), r_2(e)$ положительно ориентирована, т. е. соответствует ориентации куба K^3.

Отметим еще следующий факт. Пусть z^1 — линия, описанная концами векторов $r_1(e)$, $e \in L$ и ориентированная так же, как и L. Эта линия является прообразом при отображении f точки круга Σ, лежащей в конце вектора r_1. Поэтому коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(L, z^1)$ равен γ. При допустимой деформации линии L и полей $r_1(e)$, $r_2(e)$ цикл z^1 также будет деформироваться, но в каждый момент времени он не будет пересекаться с деформируемой линией L. В силу этого, равенство $\mathfrak{v}(L, z^1) = \gamma$ будет сохраняться при допустимой деформации.

13 : 3. Деформация линии L и векторных полей. Пусть m — точка куба K^3, из которой ломаная L проектируется на грань K^2, определенную уравнением $x^3 = 0$, в виде ломаной, имеющей лишь конечное число точек самопересечения, причем не являющихся вершинами этой ломаной. Для выполнения этих условий достаточно (применив, если нужно подобное сжатие тела W, что, очевидно, не меняет гомотопического класса соответствующего отображения) выбрать точку m не лежащей ни в одной плоскости, проходящей через ребро и не принадлежащую ему вершину ломаной L, а также расположенной дальше от грани K^2, чем все точки ломаной L.

Мы опишем такую допустимую деформацию, в результате которой линия L становится дважды непрерывно дифференцируемой и проектирующейся из точки m на грань K^2 также в виде дважды непрерывно дифференцируемой кривой, имеющей лишь конечное число точек самопересечения. Пусть e' — вершина ломаной L, l_1 и l_2 — отрезки ломаной L, примыкающие к e', а $Э_{e'}$ — соответствующий точке e'

эллипс. Заменим часть ломаной l_1l_2, примыкающую к точке e', такой кривой, лежащей в плоскости отрезков l_1 и l_2, которая вместе с оставшимися частями этих отрезков составляет дважды непрерывно дифференцируемую кривую. Эта кривая будет проектироваться из точки m на грань K^2 также в виде дважды непрерывно дифференцируемой кривой. При этом мы потребуем, чтобы ни в какой точке построенной кривой касательная не была параллельна плоскости эллипса $Э_{e'}$. При помощи подобного сжатия к точке e' мы получим деформацию новой кривой в ломаную L, причем касательные к деформируемой кривой не параллельны плоскости эллипса $Э_{e'}$, а следовательно, не параллельны плоскостям эллипсов, близких к $Э_{e'}$. Поэтому, ограничиваясь лишь той частью деформации, которая происходит в достаточно малой окрестности точки e', мы получим такую деформацию ломаной l_1l_2 в дважды непрерывно дифференцируемую кривую, при которой в каждый момент деформируемая кривая пересекается с каждым из эллипсов $Э_e$ лишь в одной точке.

Заметим еще, что благодаря проведению описанной деформации лишь в сколь угодно малой окрестности точки e', мы можем при этом считать, что при проектировании из точки m на грань K^2 у новой кривой остались те же точки самопересечения, что и у ломаной L, и не добавилось новых. Производя описанную деформацию для каждой вершины ломаной L, получим деформацию, переводящую L в требуемую дважды непрерывно дифференцируемую кривую.

Опишем теперь соответствующую деформацию векторных полей $r_1(e)$ и $r_2(e)$. Пусть L_t — положение деформируемой кривой в момент t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (L_0 совпадает с L), e — произвольная точка кривой L, а $Э_e$ — соответствующий эллипс. Обозначим через e_t точку пересечения кривой L_t с эллипсом $Э_e$, и пусть m — точка пересечения луча $\overrightarrow{ee_t}$ с границей эллипса $Э_e$. Обозначим через k отношение $\overline{e_tm} : \overline{em}$, и пусть $r_1(e_t)$ и $r_2(e_t)$ — пара исходящих из точки e_t векторов, гомотетичная паре $r_1(e)$, $r_2(e)$ с коэффициентом k. Тогда эллипс, натянутый на $r_1(e_t)$ и $r_2(e_t)$, как на пару сопряженных полудиаметров, подобен $Э_e$ с центром подобия в точке m и потому целиком заключен внутри $Э_e$. Отсюда следует, что эллипсы, построенные для различных точек кривой L_t, попарно не пересекаются. Итак, на линии L_t определены два поля $r(e_t)$ и $r_2(e_t)$, непрерывно изменяющиеся вместе с L_t.

Мы получили допустимую деформацию линии L и полей $r_1(e)$, $r_2(e)$, в результате которой линия L становится дважды непрерывно дифференцируемой. Новые положения линии L и полей мы снова обозначим через L, $r_1(e)$, $r_2(e)$; эллипсы будем обозначать также через $Э_e$. Заметим, что линия L попрежнему ориентирована, и если обозначить через $r(e)$ касательный вектор к этой кривой, то тройка векторов $r(e)$, $r_1(e)$, $r_2(e)$ положительно ориентирована, как и прежде.

Теперь, не меняя положения кривой L, мы будем деформировать имеющиеся на ней векторные поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$. Прежде всего проведем следующее вспомогательное рассмотрение. Обозначим плоскость эллипса $Э_e$ через $P_0(e)$. Через r_0 мы обозначим настолько малое положительное число, что круги радиуса r_0 с центрами на кривой L, лежащие в плоскостях $P_0(e)$, заключаются целиком внутри соответствующих эллипсов $Э_e$ и, следовательно, попарно не пересекаются. Обозначим через $n_0(e)$ единичный вектор, нормальный к плоскости $P_0(e)$ и составляющий с $r_1(e)$, $r_2(e)$ положительную тройку, а через $n_1(e)$ — единичный вектор, касательный к кривой L в точке e; этот вектор также составляет с $r_1(e)$, $r_2(e)$ положительную тройку. Тогда векторы $n_0(e)$ и $n_1(e)$ образуют угол, меньший $\frac{\pi}{2}$. Далее, определим вектор $n_t(e)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ равенством

$$n_t(e) = n_0(e)(1-t) + n_1(e)t. \tag{13.1}$$

Так как векторы $n_0(t)$ и $n_1(t)$ являются единичными, а угол между ними меньше $\frac{\pi}{2}$, то для длины вектора $n_t(e)$ имеем оценку

$$|n_t(e)| \geqslant \sqrt{(1-t)^2+t^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{13.2}$$

Наконец, рассмотрим плоскость $P_t(e)$, проходящую через точку $e \in L$ и нормальную к вектору $n_t(e)$. Мы получаем непрерывную деформацию $P_t(e)$ семейства плоскостей $P_0(e)$ в семейство $P_1(e)$ нормальных плоскостей кривой L. Так как кривизна кривой L ограничена (в силу ее дважды непрерывной дифференцируемости), то существует такое число $r_1 > 0$, что круги радиуса r_1 с центрами на кривой L, лежащие в плоскостях $P_1(e)$, попарно не пересекаются.

Докажем теперь, что существует такое число $r' > 0$, что круги радиуса r' с центрами в точках $e \in L$, лежащие в плоскостях $P_t(e)$, в каждый момент t попарно не пересекаются. Предположим, что такого r' не существует. Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдутся две такие точки e_n и e'_n на кривой L, и такое значение t_n, $0 \leqslant t_n \leqslant 1$, что круги радиуса $\frac{1}{n}$ с центрами в точках e_n, e'_n, лежащие соответственно в плоскостях $P_{t_n}(e_n)$, $P_{t_n}(e'_n)$, пересекаются. Из этого, в частности, следует, что расстояние между точками e_n и e'_n меньше чем $\frac{2}{n}$.

Обозначим через ϑ минимум угла между касательной к кривой L и плоскостью $P_0(e)$, проведенной в этой же точке. При $t > 0$ плоскости $P_t(e)$ составляют с касательными к кривой L углы, подавно большие, чем ϑ. Выберем число n настолько большим, чтобы было

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{2}r, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} n \sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{2}{r\sqrt{3}}, \tag{13.3}$$

где r — наименьшее из чисел r_0, r_1, и чтобы хорда $e_n e_n'$ составляла с касательной к кривой L в точке e_n' угол, меньший $\frac{\vartheta}{2}$. Тогда при любом t хорда $e_n e_n'$ будет составлять с плоскостью $P_t(e_n')$ угол, больший $\frac{\vartheta}{2}$. Отсюда следует, что расстояние точки e_n от плоскости $P_t(e_n')$ не меньше, чем $d \sin\frac{\vartheta}{2}$, где d — длина хорды $e_n e_n'$. Так как, далее, расстояние от точки e_n до линии пересечения плоскостей $P_{t_n}(e_n)$ и $P_{t_n}(e_n')$ не больше, чем $\frac{1}{n}$ (ибо круги радиуса $\frac{1}{n}$, лежащие в этих плоскостях, пересекаются по предположению), то для угла ψ между плоскостями $P_{t_n}(e_n)$ и $P_{t_n}(e_n')$, т. е. между векторами $n_{t_n}(e_n)$ и $n_{t_n}(e_n')$, мы имеем

$$\sin\psi \geqslant \left(d\sin\frac{\vartheta}{2}\right) : \frac{1}{n} = nd\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Отсюда и из (13.2) имеем

$$|n_{t_n}(e_n) - n_{t_n}(e_n')| \geqslant |n_{t_n}(e_n)| \sin\psi \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} nd\sin\frac{\vartheta}{2}. \qquad (13.4)$$

С другой стороны, так как расстояние от точки e_n до плоскости $P_0(e_n')$ не больше d, а расстояние от e_n до линии пересечения плоскостей $P_0(e_n)$ и $P_0(e_n')$ больше r_0, и, следовательно, подавно больше r, то для угла φ между плоскостями $P_0(e_n)$ и $P_0(e_n')$, т. е. угла между векторами $n_0(e_n)$ и $n_0(e_n')$, мы получаем: $\sin\varphi \leqslant \frac{d}{r}$. Поэтому для вектора $n_0(e_n) - n_0(e_n')$, являющегося третьей стороной равнобедренного треугольника, двумя сторонами которого служат векторы $n_0(e_n)$ и $n_0(e_n')$, мы получаем [см. (13.3)]

$$|n_0(e_n) - n_0(e_n')| \leqslant |n_0(e_n)| \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{\frac{d}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}} =$$

$$= \frac{d}{\sqrt{r^2-d^2}} < \frac{d}{\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}} = \frac{2d}{r\sqrt{3}}.$$

Точно так же найдем, что

$$|n_1(e_n) - n_1(e_n')| < \frac{2d}{r\sqrt{3}}.$$

Из (13.1) мы теперь имеем

$$|n_{t_n}(e_n) - n_{t_n}(e_n')| = |(1-t_n)(n_0(e_n) - n_0(e_n')) + t_n(n_1(e_n) - n_1(e_n'))| \leqslant$$

$$\leqslant (1-t_n)\frac{2d}{r\sqrt{3}} + t_n\frac{2d}{r\sqrt{3}} = \frac{2d}{r\sqrt{3}},$$

что, однако, противоречит неравенствам (13.4) и (13.3). Тем самым существование числа r' доказано.

Вернемся теперь к полям $r_1(e)$ и $r_2(e)$. При помощи подобного сжатия векторов мы можем прежде всего добиться того, чтобы натянутые на них эллипсы целиком заключались внутри кругов радиуса r'. Применив теперь описанную деформацию $P_t(e)$, при которой каждый круг радиуса r' поворачивается вокруг одного из своих диаметров, мы получим вместе с тем дальнейшую деформацию векторных полей $r_1(e)$ и $r_2(e)$. При этом в каждый момент времени эллипсы будут расположены внутри кругов радиуса r', т. е. будут попарно не пересекающимися. В результате описанной деформации мы добьемся того, что поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$ станут ортогональными к линии L.

Далее, равномерно поворачивая векторы $r_2(e)$ в соответствующих нормальных плоскостях кривой L, мы можем добиться того, что поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$ станут ортогональными и между собой. При этом, если потребуется, мы снова подобно уменьшим длины всех векторов, чтобы эллипсы все время находились внутри кругов радиуса r', т. е. оставались попарно не пересекающимися. Наконец, обозначив через ρ минимум длин векторов полей $r_1(e)$, $r_2(e)$, мы сможем, равномерно уменьшая длины всех векторов полей $r_1(e)$ и $r_2(e)$, добиться того, чтобы все векторы полей $r_1(e)$ и $r_2(e)$ имели одинаковую длину ρ.

Итак, при помощи допустимой деформации мы смогли добиться того, что линия L стала дважды непрерывно дифференцируемой, а поля $r_1(e)$ и $r_2(e)$ — ортогональными между собой и к линии L; при этом все векторы полей $r_1(e)$ и $r_2(e)$ имеют одинаковую длину ρ. Эллипсы $Э_e$, натянутые на векторы $r_1(e)$ и $r_2(e)$ как на пары сопряженных полудиаметров, теперь все будут кругами радиуса ρ; они заполняют некоторую «трубку» W вокруг линии L. Соответствующее отображение φ куба K^3 в сферу S^2 заключается в том, что каждый круг $Э_e$ отображается на Σ^2 гомотетично, так, чтобы $r_1(e)$ и $r_2(e)$ перешли в радиусы r_1 и r_2 круга Σ^2; затем на это отображение накладывается отображение ω_1, описанное в п. 13:2. Вся же внешность трубки W отображается в точку $q \in S^2$. В дальнейшем такие отображения мы будем называть *трубчатыми*.

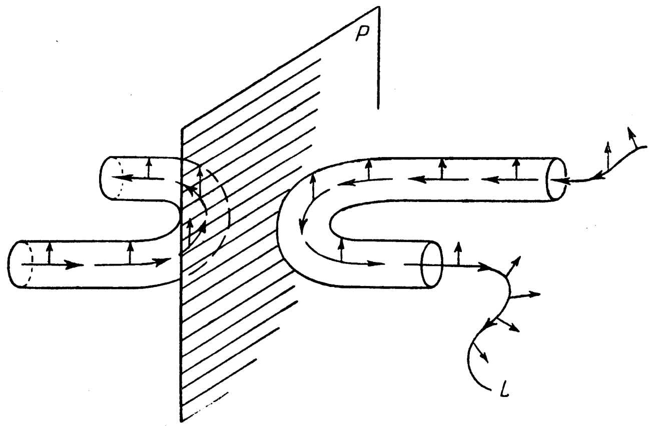
Заметим еще, что поле $r_2(e)$ однозначно определяется ориентированной линией L и полем $r_1(e)$, ибо векторы поля $r_2(e)$ лежат в нормальных плоскостях кривой L, ортогональны к векторам $r_1(e)$ и имеют такую же длину ρ, а их направление определяется так, что векторы $r(e)$ (касательные к L), $r_1(e)$ и $r_2(e)$ образуют положительную тройку. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на линии L только одно векторное поле $r_1(e)$. Наконец, отметим, что цикл z^1, получающийся, если линию, описанную концами векторов поля $r_1(e)$, ориентировать так же, как и L, имеет с L коэффициент зацепления, попрежнему равный γ. Этот коэффициент зацепления будем также называть *хопфовским числом* трубчатого отображения φ.

Лемма. *Если линия L будет непрерывно деформироваться, не пересекая самой себя и оставаясь дважды непрерывно дифференцируемой, то можно дополнить эту деформацию допустимой деформацией имеющегося на L поля $r_1(e)$.*

Действительно, пусть L_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — положение деформирующейся линии L в момент t (L_0 совпадает с L), e_t — положение точки $e \in L$ на линии L_t (в момент t). Существует такое $\vartheta > 0$, что при $|t' - t''| < \vartheta$ и для произвольной точки $e \in L$ векторы, касательные к кривым $L_{t'}$ и $L_{t''}$ в соответствующих точках $e_{t'}$, $e_{t''}$, составляют между собой угол, меньший $\frac{\pi}{2}$. Поэтому, перенося векторы $r_1(e)$ параллельно вслед за движущейся линией L_t, мы получим, что при $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ эти векторы будут составлять с касательными к L_t отличные от нуля углы. Следовательно, при помощи ортогонализации мы получим для $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ поля на всех кривых L_t. Для $\vartheta \leqslant t \leqslant 2\vartheta$ мы поступим так же, использовав поле $r_1(e_\vartheta)$, уже полученное на кривой L_ϑ, и т. д. Для того чтобы круги $Э_e$ попарно не пересекались в каждый момент t, нужно перед описанной деформацией сделать длину ρ векторов поля $r_1(e)$, заданного на L, достаточно малой.

13:4. Перестройка линии L. (а). Прежде всего мы опишем *особую деформацию* трубчатого отображения φ. Предположим, что некоторая часть линии L имеет форму двух параллельных отрезков, замкнутых полуокружностью, а поле $r_1(e)$ на этой части кривой L перпендикулярно к плоскости рассматриваемой полуокружности. Пусть, далее, P — плоскость, перпендикулярная к обоим параллельным отрезкам и расположенная так, что полуокружность обращена к ней своей выпуклостью. Предположим, что некоторая другая часть линии L и поле $r_1(e)$ на ней в точности симметричны относительно P первой части линии L, но ориентация этой второй части обратна той, которая получилась бы при симметрии (черт. 15). Тогда и поля $r_2(e)$, которые однозначно строятся, как указано выше, будут симметричны относительно плоскости P (если бы и поля $r_1(e)$, $r_2(e)$ и ориентации частей линии L были симметричны относительно P, то при симметрии положительная тройка векторов $r(e)$, $r_1(e)$, $r_2(e)$ перешла бы в отрицательную, что не допускается). Таким образом, каждые две симметричные относительно P точки трубок переводятся отображением φ в одну и ту же точку сферы S^2.

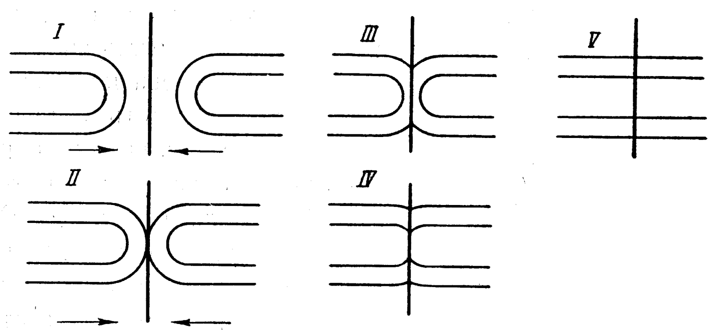
Будем теперь сближать между собой эти подковообразные трубки, оставляя их симметричными относительно плоскости P. В некоторый момент времени трубки коснутся плоскости P, а затем, в следующие моменты времени плоскость P отсечет от каждой из трубок по куску (на черт. 16 изображен разрез по плоскости, в которой расположены рассматриваемые части кривой L). Тем не менее и в эти моменты мы получим непрерывное отображение куба K^3 на S^2, ибо симметричные точки трубок попрежнему одинаково отображаются на S^2.



Черт. 15.

При дальнейшем сближении остатков трубок плоскость P будет отсекать от них все большие части и, наконец, мы получим две параллельные трубки.

Мы получили непрерывную деформацию трубчатого отображения φ, в результате которой структура линии L существенно меняется. В про-

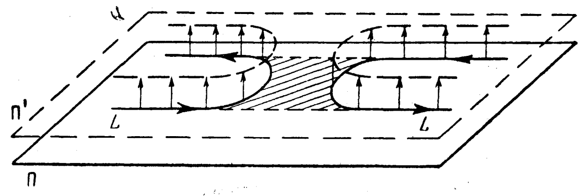


Черт 16.

межуточные моменты этой деформации отображение не является трубчатым, но в конечные моменты — является. Покажем, что *у вновь полученного трубчатого отображения хопфовское число имеет то же значение* γ.

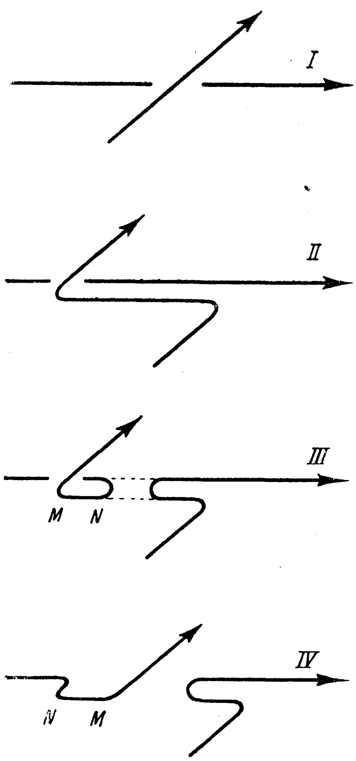
Действительно, линия L заменяется новой, причем гомология между старым и новым положениями линии L осуществляется цепью, лежащей в той же плоскости II, что и рассматриваемые куски линии L

(тело этой цепи заштриховано на черт. 17). Соответствующая часть цикла z^1, описанного концами векторов $r_1(e)$, расположена (как в новом, так и в старом положениях) в плоскости Π', параллельной Π. Цепь, осуществляющая гомологию, расположена в плоскости Π'. Таким образом, осуществляющие гомологии цепи не пересекаются с рассматриваемыми циклами, и потому коэффициент зацепления сохраняется.



Черт. 17.

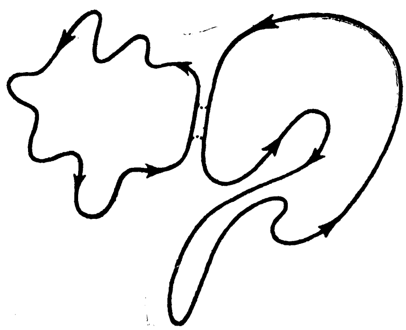
Если теперь имеются две параллельные, но обратно направленные части линии L, на которых поле $r_1(e)$ перпендикулярно к плоскости этих параллельных отрезков, то, проведя рассмотренную деформацию в обратном порядке, мы сможем заменить эту часть линии L двумя подковообразными частями. Хопфовское число при этом не меняется.



Черт. 18.

(б). Воспользовавшись описанной деформацией, мы превратим теперь линию L в окружность. Рассмотрим два участка кривой L, дающие после проектирования из точки m на грань K^2 пересечение. Мы можем так изогнуть эти отрезки (см. лемму предыдущего пункта), чтобы они имели параллельные и обратно направленные части (черт. 18). На этих частях можно так повернуть векторное поле $r_1(e)$, чтобы оно стало перпендикулярным к плоскости этих параллельных отрезков. Применяя особую деформацию, заменим кривую L новой. Повернув теперь образовавшуюся петлю MN (черт. 18), мы окончательно избавимся от точки самопересечения кривой, получающейся при проектировании. После конечного числа таких шагов новая кривая L будет проектироваться из точки m на грань K^2 без самопересечений, и мы сможем, равномерно двигая точки кривой L вдоль проектирующих лучей, уложить кривую L в грань K^2.

Если теперь окажется, что кривая L состоит из нескольких отдельных кусков, то, вынув их поочередно из грани K^2, мы сможем (подобно уменьшая их, если нужно) отодвинуть их вдаль друг от друга и затем, перевернув, если надо, уложить их в грань K^2 один вне другого так, чтобы все они были одинаково ориентированы на этой грани. Затем, придвигая их один к другому и применив особую деформацию (черт. 19), мы сможем добиться того, что L станет замкнутой плоской линией, состоящей из одного куска. Наконец, эту замкнутую линию можно, при помощи деформации, превратить в окружность. Так как описанный процесс использует деформацию кривой L (см. лемму предыдущего пункта) и ее перестройку на основе особой деформации, то хопфовское число γ при этом не меняется.



Черт. 19.

Итак, *всякое отображение куба K^3 на S^2 с хопфовским числом γ гомотопно трубчатому отображению, для которого линия L является окружностью, а хопфовское число также равно γ.*

(в). *Два отображения с одинаковыми хопфовскими числами гомотопны между собой.*

В силу (б), достаточно показать, что если на ориентированной окружности L заданы два ортогональных к ней поля $r_1(e)$ и $r'_1(e)$, обладающих тем свойством, что циклы z^1 и z'^1, описанные концами векторов этих полей, имеют с L одинаковый коэффициент зацепления γ, то эти поля гомотопны. Действительно, пусть K — круг, ограниченный окружностью L и ориентированный так, что L является его ориентированной границей. Тогда индексы пересечения циклов z^1 и z'^1 с кругом K равны γ. Мы можем считать длины векторов полей $r_1(e)$ и $r'_1(e)$ одинаковыми и равными, скажем, ρ. Границу O_e каждого круга $Э_e$, $e \in L$ мы ориентируем когерентно с $Э_e$. На окружности O_e мы имеем три точки x_e, z_e и z'_e, первая из которых лежит в круге K, а вторая и третья — соответственно на циклах z^1 и z'^1. Угловые величины дуг $\overrightarrow{x_e z_e}$ и $\overrightarrow{x_e z'_e}$ на ориентированной окружности O_e обозначим через $\chi(e)$ и $\chi'(e)$. Мы получаем непрерывные отображения χ и χ' ориентированной окружности L в единичную окружность Φ, на которой откладываются угловые величины дуг. Так как индекс пересечения каждого из циклов z^1 и z'^1 с кругом K равен γ, то степень каждого из отображений χ и χ' окружности L на Φ равна γ. Поэтому (см. теорему Хопфа, п. 7:6) отображения χ и χ', а вместе с тем и поля $r_1(e)$ и $r'_1(e)$ гомотопны между собой.

13:5. Группа $\pi^3(S^2)$. Перейдем к вычислению группы $\pi^3(S^2)$, т. е. к классификации отображений трехмерной сферы на двумерную.

(а). *Пусть f и g — два трубчатых отображения куба K^3 на S^2, имеющих соответственно хопфовские числа γ и δ, а α и β — элементы группы $\pi^3(S^2, q)$, определяемые этими сфероидами. Тогда всякое трубчатое отображение с хопфовским числом $\gamma+\delta$ принадлежит классу $\alpha+\beta$.*

Действительно, пусть h — сфероид, определенный при помощи f и g соотношением (7.1). Тогда хопфовское число сфероида h, принадлежащего классу $\alpha+\beta$, очевидно, равно $\gamma+\delta$. Всякое же другое трубчатое отображение с хопфовским числом $\gamma+\delta$ гомотопно h.

(б). *Группа $\pi^3(S^2)$ является циклической.*

Действительно, пусть λ — элемент группы $\pi^3(S^2)$, определяемый трубчатым отображением с хопфовским числом $+1$. Из (а) с помощью очевидной индукции следует, что отображение с хопфовским числом $\gamma>0$ принадлежит классу $\gamma\lambda\in\pi^3(S^2)$. Если φ — трубчатое отображение с хопфовским числом $-\gamma$, $\gamma\geqslant 0$, а ψ — отображение с хопфовским числом $\gamma+1$, то, обозначая через α элемент группы $\pi^3(S^2)$, определяемый сфероидом φ, мы получим $\alpha+(\gamma+1)\lambda=\lambda$ [см. (а)], откуда $\alpha=-\gamma\lambda$. Так как всякое отображение гомотопно трубчатому, то, следовательно, $\pi^3(S^2)$ является циклической группой с образующим элементом λ (или $-\lambda$). Более того, доказано, что отображение с хопфовским числом γ принадлежит классу $\gamma\lambda$.

Теорема. *Группа $\pi^3(S^2)$ является свободной циклической.* Иначе говоря, *отображения с неодинаковыми хопфовскими числами не гомотопны между собой.*

Допустим, напротив, что порядок циклической группы $\pi^3(S^2)$ равен $n>0$. Рассмотрим комплексную проективную плоскость M^4, являющуюся замыканием клетки $\tau^4=M^4\setminus S^2$ (см. п. 11 : 5). Пусть f — отображение ориентированного симплекса T^4 на $\bar{\tau}^4=M^4$, переводящее $\dot{T}^4$ в $\dot{\tau}^4=S^2$ и имеющее степень $+1$ (см. п. 2 : 3), а g — отображение симплекса T^4 на себя, переводящее $\dot{T}^4$ в $\dot{T}^4$ и имеющее степень n. Тогда отображение g сферы $\Sigma^3=\dot{T}^4$ на себя также имеет степень n [см. (2.4)]. Обозначим через α элемент группы $\pi^3(S^2)$, определяемый отображением f сферы Σ^3 в S^2; тогда элемент этой группы, определяемый отображением fg, равен (см. лемму п. 7 : 5) $n\alpha$, т. е. равен нулю, ибо, согласно предположению, порядок группы $\pi^3(S^2)$ равен n. Поэтому [см. п. 7 : 4, (в)] существует такое отображение ψ симплекса T^4 в S^2, которое совпадает на Σ^3 с fg. Определим теперь отображение F границы клетки $T^4\times\bar{I}$ на M^4, положив

$$\begin{aligned} &F(x\times 0)=fg(x), && x\in T^4,\\ &F(x\times 1)=\psi(x), && x\in T^4,\\ &F(x\times t)=\psi(x)=fg(x), && x\in\Sigma^3,\ t\in\bar{I}. \end{aligned}$$

Отображение F сферы $S^4=(T^4\times\bar{I})^{\cdot}$ на M^4 имеет степень $n\neq 0$ [см. (2.5)], что противоречит предложению (е), п. 11 : 5.

Замечание. Из предложения (в) вытекает, что для симплициального отображения куба K^3 на S^2 хопфовское число не зависит от выбора треугольника T^2 сферы S^2 (см. п. 13:1). Отсюда же следует, что любые две симплициальные аппроксимации одного и того же отображения имеют равные хопфовские числа. Поэтому имеет смысл говорить о хопфовском числе произвольного непрерывного отображения куба K^3 в S^2, переводящего $\dot{K}^3$ в q. Заметим также, что хопфовское число, т. е. коэффициент зацепления прообразов двух точек, определено также для симплициального (а потому и для любого непрерывного) отображения сферы S^3 на S^2.

13:6. Группа $\pi^{n+1}(S^n)$. При вычислении группы $\pi^{n+1}(S^n)$ в случае $n>2$ мы будем проводить рассуждения совершенно аналогично случаю $n=2$. Поэтому ограничимся лишь кратким эскизом доказательства, отмечая те изменения, которые здесь будут иметь место.

Пусть f — симплициальное отображение куба K^{n+1} на S^n. В комплексе S^n выберем симплекс T^n. Если симплекс $T^{n+1}\subset K^{n+1}$ отображается на T^n, то две его вершины, скажем a и b, переходят в одну вершину симплекса T^n, а отрезки, параллельные ребру $[a, b]$, переходят в одну точку симплекса T^n. Прообразом шара Σ^n, лежащего внутри T^n, будет в T^{n+1} цилиндр, образующие которого параллельны $[a, b]$, а основаниями служат n-мерные эллипсоиды, являющиеся прообразами шара Σ^n в гранях aT^{n-1} и bT^{n-1}, где T^{n-1} — грань симплекса T^{n+1}, противолежащая ребру $[a, b]$. Симплексы xT^{n-1}, где x — произвольная точка ребра $[a, b]$, разбивают рассмотренный цилиндр на попарно не пересекающиеся n-мерные эллипсоиды $Э_e$, где e — точка центральной линии цилиндра. Полным прообразом шара Σ^n в комплексе K^{n+1} является тело W, составленное из ряда цилиндров указанного вида, попарно примыкающих основаниями. Центральную линию тела W мы попрежнему обозначим через L. Тело W разбито на попарно не пересекающиеся n-мерные эллипсоиды $Э_e$, $e\in L$.

Если ω_1 — отображение сферы S^n на себя, переводящее внутренность шара $\Sigma^n\subset S^n$ на $S^n\setminus q$ со степенью $+1$, а всю остальную часть сферы S^n — в точку $q\in S^n$, то мы рассмотрим вместо f отображение $\omega_1 f=\varphi$, переводящее внутренность тела W на $S^n\setminus q$, а всю остальную часть куба K^{n+1} — в точку $q\in S^n$.

Если $r_1, \ldots, r_n$ суть n взаимно ортогональных радиусов шара Σ^n, определяющих его ориентацию, то при помощи отображения f^{-1} мы получим в каждом эллипсоиде $Э_e$, $e\in L$ векторы $r_1(e), \ldots, r_n(e)$, являющиеся его сопряженными полудиаметрами. Эллипсоиды $Э_e$ мы ориентируем так, чтобы они отображались на Σ^n при помощи f с сохранением ориентации; тогда система векторов $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ соответствует выбранной ориентации эллипсоида $Э_e$. Линию L ориентируем так, чтобы с каждым эллипсоидом $Э_e$ она имела индекс пересечения $+1$. Описанная в п. 13:3 допустимая деформация проводится дословно так же; в результате линия L становится дважды непрерывно дифференцируемой. Дословно так же производится одновременный поворот плоскостей $P_0(e)$ — в данном случае n-мерных плоскостей пространства $R^{n+1} \supset K^{n+1}$ — в семейство нормальных плоскостей кривой L. После этого поля $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ станут ортогональными к кривой L. Поворачивая, далее, векторы $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ в соответствующей нормальной плоскости, мы можем сделать поля ортогональными и между собой. Затем можно сделать длины векторов полей $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ одинаковыми.

Мы получим трубчатое отображение φ. Особая деформация трубчатого отображения строится так же, как и выше: рассматриваем две симметричные относительно n-мерной плоскости P, но противоположно ориентированные части линии L, поля $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ на которых также симметричны. В результате применения особой деформации мы сможем превратить L в плоскую окружность (заметим, что уложить линию L в двумерную плоскость можно теперь без применения особой деформации, ибо зацепления линий в пространстве, имеющем более трех измерений, не может быть; особая деформация нужна лишь для соединения отдельных компонент линии L в одну простую замкнутую кривую). Будем считать, что эта окружность расположена в двумерной плоскости, которая параллельна грани K^2, определяемой уравнениями $x^3 = x^4 = \ldots = x^{n+1} = 0$.

Введем на окружности L параллелизующую систему (см. п. 12 : 1), например возьмем векторы $u_1(e)$, идущие к центру окружности L, и векторы $u_2(e), \ldots, u_n(e)$, идущие вдоль осей $x^3, \ldots, x^{n+1}$; при этом будем предполагать, что вместе с касательными векторами $r(e)$ к окружности L векторы $r(e), u_1(e), \ldots, u_n(e)$ образуют положительный репер. Так как в каждой точке $e \in L$ заданы два положительных репера $u_1(e), \ldots, u_n(e)$ и $r_1(e), \ldots, r_n(e)$, лежащие в нормальной плоскости окружности L, то этим определяется для каждой точки $e \in L$ некоторый элемент многообразия $V_{n,n}$, т. е. ортогональная матрица порядка n с детерминантом $+1$. Мы получаем отображение ориентированной окружности L в $V_{n,n}$, что определяет некоторый элемент группы $\pi^1(V_{n,n})$. Так как эта группа имеет порядок 2 (см. п. 11 : 4), то существует лишь два класса негомотопных между собой систем полей $r_1(e), \ldots, r_n(e)$ на L. Иначе говоря, группа $\pi^{n+1}(S^n)$ содержит при $n > 2$ не более двух элементов.

Теорема. *При $n > 2$ группа $\pi^{n+1}(S^n)$ имеет порядок 2.* В силу сказанного выше, достаточно доказать, что существует хотя бы одно негомотопное нулю отображение сферы Σ^{n+1} на S^n. Пусть f — отображение $(n+2)$-мерного симплекса T^{n+2} в комплекс M^{n+2} (см. п. 11 : 6), переводящее границу $\Sigma^{n+1} = \dot{T}^{n+2}$ этого симплекса в $S^n \subset M^{n+2}$ и имеющее нечетную степень. Тогда отображение f сферы Σ^{n+1} на сферу S^n негомотопно нулю, что доказывается совершенно так же, как в теореме п. 13 : 5.

13:7. Две леммы. При вычислении группы $\pi^{n+1}(S^n)$, $n \geqslant 2$ мы существенно пользовались свойствами комплексов M^{n+2}, определенных в п. 11:5, 11:6. Здесь связь этих комплексов с группой $\pi^{n+1}(S^n)$ выясняется полнее.

(а). *Пусть* M^4 — *комплексная проективная плоскость, взятая в своей естественной ориентации* [см. п. 11:5, (в)], K^4 — *четырехмерный куб, а* $\Sigma^3 = \dot{K}^4$ — *его граница, ориентированная таким образом, что* $[K^4 : \Sigma^3] = +1$. *Пусть, далее,* λ — *элемент группы* $\pi^3(S^2)$, *определяемый отображением с хопфовским числом* $+1$. *Тогда, если* f — *отображение куба* K^4 *на* M^4, *переводящее* Σ^3 *в* $S^2 \subset M^4$ *и имеющее степень* γ, *то отображение* f *сферы* Σ^3 *на* S^2 *определяет элемент группы* $\pi^3(S^2)$, *равный* $\gamma\lambda$.

Действительно, пусть M^4 таким образом триангулирована, что S^2 является телом ее подкомплекса. Мы можем без ограничения общности предполагать, что отображение f переводит грань K^3 куба K^4 на S^2, множество $\Sigma^3 \setminus K^3$ — в одну точку $q \in S^2$ и что оно является симплициальным отображением как-то подразделенного куба K^4 в комплекс M^4.

Покажем, что в комплексе M^4 существует такой двумерный целочисленный ∇-цикл z^2, который имеет отличное от нуля и равное 1 значение только на одном треугольнике сферы $S^2 \subset M^4$. Пусть S^2_1 — двумерная сфера в M^4, отличная от S^2 и имеющая с S^2 индекс пересечения 1 [см. п. 11:5, (г)]. Пусть, далее, $\mathfrak{z}^2$ — звездный цикл, гомологичный сфере S^2_1; тогда попрежнему $\chi(\mathfrak{z}^2, S^2) = 1$. Поэтому сумма коэффициентов ∇-цикла $d^{-1}(\mathfrak{z}^2)$ по всем когерентно ориентированным треугольникам сферы S^2 равна $+1$. Отсюда следует существование такой одномерной цепи x^1, лежащей в подкомплексе S^2, что цикл $z^2 = d^{-1}(\mathfrak{z}^2) + \nabla x^1$ (∇-граница берется во всем комплексе M^4) обладает указанным свойством. Заметим, кроме того, что цикл z^2 определяет образующий элемент группы $\nabla^2(M^4, J_0)$, ибо $z^2 \underset{\nabla}{\sim} d^{-1}(\mathfrak{z}^2)$ (см. п. 4:6). Треугольник сферы S^2, на котором цикл z^2 имеет отличное от нуля значение, обозначим через T^2.

Пусть M' — барицентрическое подразделение комплекса M^4, а K' — такое барицентрическое подразделение комплекса K^4, что центр симплекса $T \in K^4$ переходит при отображении f в центр симплекса $f(T)$ [ср. п. 5:2, (а)]. Пусть, далее, $\{\eta^k_{z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\eta^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$ — барицентрически двойственные системы цепей для циклов z^2 и f^*z^2, построенные соответственно в подразделениях M' и K'. Тогда, если симплекс $T^4 \in K^4$ вырождается при отображении f, то цепь $f_*(\eta^2_{f^*z^2}(T^4))$ расположена в одномерном остове комплекса M' и потому вырождается также. Если же симплекс T^4 не вырождается при отображении f, т. е. $f(T^4) = T^4_1 \in M^4$, то

$$f_*(\eta^2_{f^*z^2}(T^4)) = \eta^2_{z^2}(T^4_1).$$

Пусть, далее, M_1' и K_1' — другие барицентрические подразделения комплексов M^4 и K^4, обладающие аналогичными свойствами, а $\{\xi^k_{z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\xi^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$ — двойственные системы цепей для z^2 и f^*z^2, построенные в этих новых барицентрических подразделениях.

Предположим подразделения M' и M_1' выбранными таким образом, что системы $\{\eta^k_{z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\xi^k_{z^2}(T^{k+2})\}$ правильно расположены [см. п. 6:1, (б)]. Тогда системы $\{\eta^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\xi^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$ также правильно расположены. Действительно, если симплекс T^4 вырождается при отображении f, то цепи $\eta^2_{f^*z^2}(T^4)$ и $\xi^2_{f^*z^2}(T^4)$ не могут пересекаться, ибо множества $f(|\eta^2_{f^*z^2}(T^4)|)$ и $f(|\xi^2_{f^*z^2}(T^4)|)$ расположены в одномерных остовах соответственно подразделений M' и M_1' и потому не имеют общих точек. Если же симплекс T^4 не вырождается при отображении f, то правильное расположение цепей $\eta^2_{f^*z^2}(T^4)$ и $\xi^2_{f^*z^2}(T^4)$ очевидно.

Обозначим через z^4 прозведение ∇-циклов z^2 и z^2, построенное при помощи систем $\{\eta^k_{z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\xi^k_{z^2}(T^{k+2})\}$, а через z^{*4} — произведение ∇-циклов f^*z^2 и f^*z^2, построенное при помощи систем $\{\eta^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$ и $\{\xi^k_{f^*z^2}(T^{k+2})\}$. Тогда индекс (т. е. сумма коэффициентов по всем когерентно ориентированным симплексам многообразия M^4) цикла z^4 равен $+1$ [см. п. 11 : 5, (д)]. Так как индекс пересечения

$$\chi(\eta^2_{f^*z^2}(T^4),\ \xi^2_{f^*z^2}(T^4))$$

равен

$$\chi(\eta^2_{z^2}(T^4_1),\ \xi^2_{z^2}(T^4_1)),$$

если $T^4_1 = f(T^4)$ есть четырехмерный симплекс (т. е. если T^4 не вырождается при отображении f), и равен нулю в противном случае, то индекс цикла z^{*4} равен γ, ибо степень отображения f равна γ [ср. п. 5 : 2, (а)]. Иначе говоря,

$$\chi(\eta^2, \xi^2) = \gamma,$$

где $\eta^2 = \sum \eta^2_{f^*z^2}(T^4)$, $\xi^2 = \sum \xi^2_{f^*z^2}(T^4)$ (суммирование по всем когерентно ориентированным четырехмерным симплексам комплекса K^4).

Положим

$$z^1_1 = \sum \eta^1_{f^*z^2}(T^3), \qquad z^1_2 = \sum \xi^1_{f^*z^2}(T^3),$$

где суммирование производится по всем когерентно ориентированным трехмерным симплексам сферы Σ^3. Тогда мы имеем

$$\Delta\eta^2 = z^1_1, \quad \Delta\xi^2 = z^1_2$$

(см. условие 2) п. 6 : 1). Таким образом, z^1_1 и z^1_2 являются одномерными циклами. Эти циклы расположены целиком в K^3, ибо $f(K^4 \setminus K^3) = q$. Покажем, что коэффициент зацепления этих циклов (в K^3) равен γ. Пусть a — центр куба K^4, а ψ — подобное преобразование куба K^4

с коэффициентом подобия $1-\varepsilon$ и центром a. Пусть, далее, x_i^2 — цепь куба K^3, для которой $\Delta x_i^2 = z_i^1$; $i=1, 2$. Тогда $\psi(\eta^2 - x_1^2)$ и $az_2^1 - x_2^2$ являются отображенными циклами куба K^4, так что их индекс пересечения равен нулю [см. п. 5:2, (е)], т. е.

$$\chi(\psi(\eta^2), az_2^1) = \chi(\psi(x_1^2), az_2^1).$$

Но, согласно лемме (д) п. 6:1, мы имеем

$$\chi(\psi(x_1^2), az_2^1) = \chi(x_1^2, z_2^1) = \mathfrak{v}(z_1^1, z_2^1),$$

так что

$$\chi(\eta^2, az_2^1) = \chi(\psi(\eta^2), az_2^1) = \mathfrak{v}(z_1^1, z_2^1).$$

Так как, далее, индекс пересечения отображенных циклов $\eta^2 - x_1^2$ и $\psi(az_2^1 - \xi^2)$ равен нулю, то

$$\chi(\eta^2, \psi(az_2^1)) = \chi(\eta^2, \psi(\xi^2)).$$

Но при достаточно малом ε мы имеем

$$\chi(\eta^2, \psi(az_2^1)) = \chi(\eta^2, az_2^1),$$
$$\chi(\eta^2, \psi(\xi^2)) = \chi(\eta^2, \xi^2),$$

так что

$$\mathfrak{v}(z_1^1, z_2^1) = \chi(\eta^2, \xi^2) = \gamma.$$

Теперь уже нетрудно видеть, что хопфовское число отображения f куба K^3 на сферу S^2 равно γ. Действительно, пусть b и c — центры симплекса T^2 (на котором цикл z^2 принимает значение 1) при подразделениях M' и M_1' соответственно. Если T^3 — симплекс комплекса K^3, отображающийся при помощи f на T^2, то две его вершины, скажем m и n, переходят в одну точку симплекса T^2, а прообразом точки b в симплексе T^3 при отображении f будет отрезок I, параллельный ребру $[m, n]$. Согласно построению, центр симплекса T^3 при подразделении K' лежит на этом отрезке I, так что цепь $\eta^1_{f*z^2}(T^3)$ состоит из отрезка I, подразделенного на две части и взятого с коэффициентом 1; направление этого отрезка совпадает с тем, которое было определено в п. 13:1. Таким образом, цикл z_1^1 представляет собой подразделение цикла $z^1(b)$, определенного в п. 13:1. Точно так же цикл z_2^1 является подразделением цикла $z^1(c)$. Поэтому

$$\mathfrak{v}(z^1(b), z^1(c)) = \mathfrak{v}(z_1^1, z_2^1) = \gamma.$$

Лемма 1. *Пусть λ — элемент группы $\pi^3(S^2)$, определяемый отображением с хопфовским числом $+1$, Σ^3 — ориентированная граница ориентированного куба K^4 (или гомеоморфного ему множества), а f — такое отображение сферы Σ^3 в $S^2 \subset M^4$, которое определяет элемент $\gamma\lambda \in \pi^3(S^2)$. Тогда отображение f может быть продолжено в отображение всего куба K^4 в M^4, причем при любом таком про-*

должении степень полученного отображения куба K^4 на M^4 равна γ.

Действительно, пусть g — отображение куба K^4 на M^4 со степенью γ, переводящее Σ^3 в S^2. Тогда, согласно предложению (а), отображения f и g сферы Σ^3 в S^2 гомотопны между собой. Пусть F — отображение множества $\Sigma^3 \times \overline{I}$ в S^2, соответствующее этой гомотопии; на множестве $K^4 \times 1 \subset K^4 \times \overline{I}$ отображение F определим, положив $F(x \times 1) = g(x)$, $x \in K^4$. Будем считать нижнее основание $K^4 \times 0$ произведения $K^4 \times \overline{I}$ совпадающим с кубом K^4, и пусть φ — отображение куба K^4 на множество $\Sigma^3 \times \overline{I} \cup K^4 \times 1$, представляющее собой «вдавливание» со стороны грани $K^4 \times 0$ [ср. лемму (а) п. 2:2]. Тогда $F\varphi$ есть отображение куба K^4 на M^4, совпадающее на Σ^3 с заданным отображением f. Степень этого отображения, так же как и степень отображения g, равна γ. Если бы существовало отображение Φ куба K^4 в M^4, совпадающее с f на Σ^3 и имеющее степень $\gamma' \neq \gamma$, то, определив отображение границы клетки $K^4 \times \overline{I}$ в M^4 соотношениями

$$\begin{aligned} &x \times 0 \to F\varphi(x), && x \in K^4 \\ &x \times 1 \to \Phi(x), && x \in K^4, \\ &x \times t \to f(x), && x \in \Sigma^3,\ t \in \overline{I}, \end{aligned}$$

мы получили бы отображение четырехмерной сферы $(K^4 \times \overline{I})^{\cdot}$ на M^4 со степенью $\gamma - \gamma' \neq 0$, что невозможно в силу предложения (е) п. 11:5. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Σ^{n+1} — граница куба* (или гомеоморфного ему множества) K^{n+2}, $n > 2$, *а f — отображение сферы Σ^{n+1} в $S^n \subset M^{n+2}$. Элемент группы $\pi^{n+1}(S^n)$, определяемый отображением f, обозначим через α. Тогда отображение f может быть продолжено в отображение всего куба K^{n+2} в M^{n+2}, причем при любом таком продолжении степень полученного отображения куба K^{n+2} на M^{n+2} будет иметь одну и ту же четность, а именно эта степень будет четной, если α есть нулевой элемент группы $\pi^{n+1}(S^n)$ и будет нечетной в противном случае.*

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству леммы 1 [см. предложение (г) п. 11:6 и теорему п. 13:6].

Замечание 1. Пусть E^4 — единичный шар четырехмерного эвклидова пространства R^4, определенный в координатах x^1, x^2, x^3, x^4 условием $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \leqslant 1$. Положим $z_1 = x^1 + ix^2$, $z_2 = x^3 + ix^4$. Определим отображение φ шара E^4 на M^4 соответствием

$$(z_1, z_2) \to z_1 : z_2 : (1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что степень этого отображения равна $+1$, так что отображение φ границы Σ^3 шара E^4 на S^2 имеет хопфовское число $+1$ (см. лемму 1). Это отображение сферы

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=|z_1|^2+|z_2|^2=1$$

на комплексную сферу S^2 описывается соответствием

$$(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=(z_1,\ z_2)\to z_1:z_2$$

и называется *хопфовским отображением* [26].

Замечание 2. Пусть $\tilde{K}_i$ — некоторый полиэдр, $E\tilde{K}_i$ — надстройка над ним, a_i и b_i — вершины надстройки, $i=1, 2$. Если f — отображение полиэдра $\tilde{K}_1$ в $\tilde{K}_2$, то обозначим через Ef такое отображение полиэдра $E\tilde{K}_1$ в $E\tilde{K}_2$, которое переводит ломаную a_1xb_1, $x\in\tilde{K}_1$ в ломаную $a_2f(x)b_2$ и является линейным на каждом отрезке $[a_1,\ x]$, $[b_1,\ x]$. Очевидно, что если отображения f_0 и f_1 полиэдра $\tilde{K}_1$ в $\tilde{K}_2$ гомотопны между собой, то и отображения Ef_0 и Ef_1 также гомотопны между собой. Если теперь мы поставим в соответствие каждому отображению f сферы S^n в S^k отображение Ef сферы $S^{n+1}=ES^n$ в сферу $S^{k+1}=ES^k$, то мы получим, в силу сказанного выше, отображение группы $\pi^n(S^k)$ в $\pi^{n+1}(S^{k+1})$. Легко видеть, что это отображение, обозначаемое через E и называемое *надстройкой*, является гомоморфизмом. Из лемм 1 и 2 без труда вытекает следующая теорема.

При $r\geqslant 2$ гомоморфизм E отображает группу $\pi^{r+1}(S^r)$ на всю группу $\pi^{r+2}(S^{r+1})$, а при $r>2$ он является изоморфизмом.

§ 14. Вычисление второго препятствия. Теорема классификации Понтрягина—Стинрода

14:1. Второе препятствие. Пусть Y_r — линейно связное пространство, обладающее тем свойством, что группы $\pi^1(Y_r)$, $\pi^2(Y_r), \ldots, \pi^{r-1}(Y_r)$ тривиальны, $r\geqslant 1$; при $r=1$ предполагается дополнительно, что группа $\pi^1(Y_r)$ коммутативна, а пространство Y_r гомотопически просто в размерности 2. Пусть f — отображение s-мерного остова K^s симплициального комплекса K в Y_r. Тогда определено препятствие z_f^{s+1}, являющееся ∇-циклом комплекса K по области коэффициентов $\pi^s(Y_r)$. В силу тривиальности этой группы при $s<r$, первое возможное нетривиальное препятствие мы получим при $s=r$. Это *первое препятствие* z_f^{r+1} всегда гомологично нулю. В самом деле, без ограничения общности можно предполагать отображение f остова K^r в Y_r таким, что оно переводит весь остов K^{r-1} в одну точку $a\in Y_r$ (см. лемму п. 9:1). Пусть e — отображение всего остова K^{r+1} в точку $a\in Y_r$. Тогда $z_e^{r+1}=0$, и мы имеем, согласно п. 8:2, (а)

$$z_f^{r+1}=z_f^{r+1}-z_e^{r+1}=\nabla d_{f,e}^r,$$

т. е. $z_f^{r+1}\underset{\nabla}{\sim}0$.

Второе препятствие, т. е. цикл z_f^{r+2}, определено для всякого отображения f остова K^{r+1} в Y_r; мы можем предполагать при этом, что

$f(K^{r-1})=a$. Теперь уже $z_f^{r+1}=0$, ибо отображение f определено на всем остове K^{r+1}, и мы имеем

$$\nabla d_{f,e}^r = z_f^{r+1} - z_e^{r+1} = 0,$$

т. е. $d_{f,e}^r$ есть ∇-цикл по области коэффициентов $G=\pi^r(Y_r)$. Если отображение f не переводит весь остов K^{r-1} в точку a, то для определения цикла $d_{f,e}^r$ нужно предварительно продеформировать f в отображение, переводящее K^{r-1} в a. Цикл $d_{f,e}^r$ будет, вообще говоря, зависеть от этой деформации, но, как мы сейчас покажем, класс гомологий $D^r(f)$ цикла $d_{f,e}^r$ однозначно определяется гомотопическим классом отображения f.

В самом деле, пусть f_0 и f_1 — два отображения, гомотопные f и переводящие остов K^{r-1} в точку a. Тогда [см. п. 8:2, (г)] $d_{f_0,e}^r = d_{f_0,f_1}^r + d_{f_1,e}^r$ и нам остается доказать, что ∇-цикл d_{f_0,f_1}^r гомологичен нулю, т. е. [см. п. 8:2, (е)], что f_0 может быть переведено в f_1 такой деформацией, при которой на K^{r-2} отображение не меняется в течение всей деформации. Пусть f_t — какая-нибудь деформация отображения f_0 в f_1, а F_0 — соответствующее отображение произведения $K^{r+1}\times \bar{I}$ в Y_r. Пусть F_t — деформация отображения F_0, рассматриваемого только на $\tilde{K}^{r-2}\times\bar{I}$, в отображение F_1 всего множества $\tilde{K}^{r-2}\times\bar{I}$ в точку a; при этом мы можем предполагать (см. замечание к лемме п. 9 : 1), что в течение всей деформации F_t множество $\tilde{K}^{r-2}\times 0 \cup \tilde{K}^{r-2}\times 1$ остается отображенным в a. Дополним F_t тождественной деформацией множества $\tilde{K}^{r+1}\times 0 \cup \tilde{K}^{r+1}\times 1$ (т. е. положим для точек этого множества $F_t=F_0$). Заданную таким образом на множестве $\tilde{K}^{r-2}\times\bar{I} \cup \tilde{K}^{r+1}\times 0 \cup \tilde{K}^{r+1}\times 1$ деформацию F_t можно продолжить на все произведение $\tilde{K}^{r+1}\times I$, и мы получим отображение F_1 этого произведения в Y_r. Это отображение F_1 и дает нам искомую деформацию отображения f_0 в f_1.

Итак, каждому отображению f остова $\tilde{K}^{r+1}$ в Y_r однозначно соответствует класс гомологий $D^r(f)\in\nabla^r(K, G)$.

Покажем теперь, что для двух отображений f и g остова K^{r+1} в Y_r, для которых $D(f)=D(g)$, вторые препятствия z_f^{r+2} и z_g^{r+2} гомологичны между собой. В самом деле, будем предполагать, что f и g переводят остов K^{r-1} в точку a. Тогда

$$d_{f,g}^r = d_{f,e}^r - d_{g,e}^r \underset{\nabla}{\sim} 0,$$

и потому отображения f и g, рассматриваемые только на K^r, гомотопны [см. п. 8 : 2, (ж)]. Иначе говоря, f гомотопно такому отображению f', которое совпадает с g на K^r. Для отображений f' и g определена различающая $d_{f',g}^{r+1}$, и мы имеем

$$\nabla d_{f',g}^{r+1} = z_{f'}^{r+2} - z_g^{r+2} = z_f^{r+2} - z_g^{r+2},$$

т. е. $z_f^{r+2} \underset{\nabla}{\sim} z_g^{r+2}$.

Итак, *класс гомологий* $Z^{r+2}(f)$ *второго препятствия* z_f^{r+2} *отображения* f *однозначно определяется классом гомологий* $D^r(f)$. В следующем пункте рассматривается вопрос о явном вычислении этой зависимости.

14:2. Вычисление второго препятствия. Рассмотрим сначала случай, когда за пространство Y_r принята сфера S^r.

(а). Определим произведение групп $\pi^r(S^r)$ и $\pi^r(S^r)$ в группе $\pi^{r+1}(S^r)$, считая квадрат образующего элемента α^r группы $\pi^r(S^r)$ равным образующему элементу β^{r+1} группы $\pi^{r+1}(S^r)$, причем при $r=2$ за β^3 примем элемент группы $\pi^3(S^2)$, определяемый отображением с хопфовским числом $+1$. Тогда для произвольного отображения f остова K^{r+1} в S^r мы имеем

$$Z^4(f) = D^2(f) \smile D^2(f), \tag{14.1}$$

$$Z^{r+2}(f) = Sq^2 D^r(f), \quad r > 2. \tag{14.2}$$

При доказательстве будем предполагать, что сфера S^r является подмножеством полиэдра M^{r+2}, рассматриваемого в клеточном разбиении

$$\tau^{r+2} = M^{r+2} \setminus S^r, \ \tau^r = S^r \setminus \tau^0, \ \tau^0 \in S^r.$$

Элементы групп $\nabla^r(M^{r+2}, \pi^r(S^r))$ и $\nabla^{r+2}(M^{r+2}, \pi^{r+1}(S^r))$, определяемые циклами $\alpha^r\tau^r$ и $\beta^{r+1}\tau^{r+2}$, обозначим соответственно через Z^r и Z_1^{r+2}. Тогда мы имеем [см. п. 11 : 5, (д), и п. 11 : 6, (в)]

$$Z^2 \smile Z^2 = Z_1^4 \tag{14.3}$$

$$Sq^2 Z^r = Z_1^{r+2}, \quad r > 2. \tag{14.4}$$

Мы можем считать, что отображение f переводит весь остов K^{r-1} в точку $\tau^0 \in S^r$. Если e — отображение всего остова K^{r+1} в точку τ^0, то определена различающая $d_{f,e}^r$. Значение этой различающей на симплексе T^r комплекса K равно $\gamma\alpha^r$, где γ — степень отображения f симплекса T^r на S^r. Таким образом, $d_{f,e}^r = f^*(\alpha^r\tau^r)$, или

$$D^r(f) = f^* Z^r.$$

Пусть, далее T^{r+2} — произвольный $(r+2)$-мѐрный симплекс комплекса K, а Σ^{r+1} — его граница, ориентированная при $r=2$ так, что $[T^4 : \Sigma^3] = +1$. Отображение f переводит Σ^{r+1} в S^r. Согласно леммам 1, 2 п. 13 : 7, отображение f можно продолжить в отображение симплекса T^{r+2} в M^{r+2}, причем, обозначив степень $[fT^{r+2} : \tau^{r+2}]$ отображения f через γ, мы найдем, что элемент группы $\pi^{r+1}(S^r)$, определяемый отображением f сферы Σ^{r+1} в S^r, равен $\gamma\beta^{r+1}$. Но этот элемент равен, по определению, $z_f^{r+2}(T^{r+2})$, т. е.

$$z_f^{r+2}(T^{r+2}) = [fT^{r+2} : \tau^{r+2}] \cdot \beta^{r+1}.$$

Поэтому, продолжив f на все $(r+2)$-мерные симплексы, мы найдем, что $z_f^{r+2} = f^*(\beta^{r+1}\tau^{r+2})$, или

$$Z^{r+2}(f) = f^* Z_1^{r+2}.$$

Наконец, из выведенных соотношений получаем (см. свойства операций Sq, § 6)

$$Z^{r+2}(f) = f^* Z_1^{r+2} = f^* Sq^2 Z^r = Sq^2 f^* Z^r = Sq^2 D^r(f).$$

Совершенно аналогично доказывается соотношение (14.1).

Заметим, что доказанные равенства справедливы только для классов гомологий. О циклах z_f^{r+2} и $d_{f,e}^r \smile_{r-2} d_{f,e}^r$ можно утверждать лишь, что они гомологичны, но, вообще говоря, не равны.

(б). Рассмотрим еще другой нужный нам случай, когда $Y_r = V_{n,k}$. В этом случае имеет место следующее предложение.

Пусть α — *образующий элемент группы* $\pi^r(V_{n,k})$, *а* β — *элемент группы* $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, *в которой переходит определенный в* (а) *элемент* $\beta^{r+1} \in \pi^{r+1}(S^r)$ *при тождественном отображении сферы* $S^r = S^r(e_1,.., e_{k-1})$ *в* $(V_{n,k})$. *Определим произведение групп* $\pi^r(V_{n,k})$ *и* $\pi^r(V_{n,k})$ *в* $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, *положив* $\alpha \cdot \alpha = \beta$. *Тогда для произвольного отображения* f *остова* K^{r+1} *в* $V_{n,k}$ *справедливы соотношения* (14.1), (14.2).

Действительно, мы можем без ограничения общности предполагать, что f отображает остов K^r в S^r [см. п. 11 : 2, (г)], а остов K^{r-1} — в точку $\tau^0 \in S^r$. Обозначим через e отображение всего остова K^{r+1} в точку τ^0. Тогда коэффициент цепи $d_{f,e}^r$ на симплексе $T^r \in K$ равен $\gamma\alpha$, где γ — степень отображения f симплекса T^r на S^r. Поэтому, если T^{r+1} — симплекс комплекса K, а Σ^r — его граница, то значение цепи $\nabla d_{f,e}^r$ на симплексе T^{r+1} равно $\gamma'\alpha$, где γ' — степень отображения f сферы Σ^r на S^r. Так как $d_{f,e}^r$ есть ∇-цикл, то $\gamma'\alpha = 0$, т. е. $\gamma' = 0$ при четном r, γ' четно при нечетном r (см. теорему п. 11 : 4). Следовательно, рассматриваемое только на K^r отображение f может быть продолжено в другое отображение f' остова K^{r+1} в $V_{n,k}$, причем при четном r можно считать, что $f'(K^{r+1}) \subset S^r$, а при нечетном — что $f'(K^{r+1}) \subset P$ (см. п. 11 : 4, (г)]. Так как на K^r отображения f и f' совпадают, то $d_{f,e}^r = d_{f',e}^r$, и потому (см. п. 14 : 1) $z_{f'}^{r+2} \underset{\nabla}{\sim} z_f^{r+2}$. Итак, мы можем с самого начала предполагать, что $f = f'$ переводит остов K^{r+1} в P при нечетном r и в S^r при четном r.

Присоединим к полиэдру P еще $(r+2)$-мерную клетку τ^{r+2}, составляющую вместе с S^r комплекс M^{r+2}. Тогда отображение f остова K^{r+1} в P может быть продолжено в отображение остова K^{r+2} в

$M^{r+2} \cup P$. При четном r это следует из лемм 1 и 2 п. 13:7, ибо в этом случае $f(K^{r+1}) \subset S^r$. При нечетном r это также верно.

Действительно, пусть T^{r+2} — произвольный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса K, а Σ^{r+1} — его граница. Тогда отображение f сферы Σ^{r+1} в P гомотопно отображению ее в $S^r \subset P$ [см. п. 11 : 4, (в)] и потому гомотопно нулю в $M^{r+2} \cup P$ (см. лемму 2 п. 13:7). Таким образом, f может быть продолжено в отображение симплекса T^{r+2} в $M^{r+2} \cup P$ [см. п. 7:4, (в)]. Препятствие z_f^{r+2} к продолжению отображения f в отображение остова K^{r+2} в $V_{n,k}$ равно, как нетрудно видеть, $f^*(\beta\tau^{r+2})$, откуда, так же как и в (а), мы выводим соотношения (14.1), (14.2), ибо присоединение к M^{r+2} полиэдра P размерности $r+1$ не нарушает справедливости соотношений (14.3), (14.4).

Замечание. При надлежащем определении произведения групп $\pi^r(Y_r)$ и $\pi^r(Y_r)$ в $\pi^{r+1}(Y_r)$ можно доказать аналогичное предложение и для произвольного пространства Y_r, асферичного в размерностях меньших r (теорема М. М. Постникова [14]). Здесь эта теорема в такой общей формулировке не используется.

14:3. Теорема классификации Понтрягина — Стинрода. В настоящем пункте решается вопрос о гомотопической классификации отображений $(r+1)$-мерного комплекса K^{r+1} в r-мерную сферу S^r. Для гомотопности отображений f_0 и f_1 комплекса K^{r+1} в S^r прежде всего необходимо, чтобы эти отображения, рассматриваемые только на остове K^r, были гомотопны. Условия для такой гомотопности даются теоремой Хопфа (см. п. 9:2). При рассмотрении вопроса о гомотопности отображений f_0 и f_1 комплекса K^{r+1} в S^r мы будем предполагать, что это необходимое условие выполнено; поэтому мы можем без ограничения общности считать, что отображения f_0 и f_1 совпадают на остове K^r и переводят остов K^{r-1} в $\tau^0 \in S^r$.

Теорема. *Пусть f_0 и f_1 — два отображения комплекса K^{r+1} в сферу S^r, совпадающие на K^r, d_{f_0,f_1}^{r+1} — их $(r+1)$-мерная различающая и $D^{r+1} \in \nabla^{r+1}(K^{r+1}, \pi^{r+1}(S^r))$ — ее класс гомологий. Определим произведение групп $\pi^r(S^r)$ и $\pi^r(S^r)$ в группе $\pi^{r+1}(S^r)$ так же, как в п. 14:2, (а). Оказывается, что для гомотопности отображений f_0 и f_1 необходимо и достаточно, чтобы в группе $\nabla^{r-1}(K^{r+1}, \pi^r(S^r))$ существовал такой элемент Λ^{r-1}, что*

$$D^{r+1} = Sq^2\Lambda^{r-1} \text{ при } r > 2 \tag{14.5}$$

и

$$D^3 = 2\Lambda^1 \smile f_0^* Z^2 \text{ при } r = 2. \tag{14.6}$$

Здесь Z^2 — образующий элемент группы $\nabla^2(S^2, \pi^2(S^2))$.

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, введенными в п. 6:5. Докажем необходимость приведенного условия. Так как отображения f_0 и f_1 гомотопны, то соответствует отображение F

произведения $K^{r+1} \times J$ в S^r, соответствующее деформации отображения f_0 в f_1, причем мы можем считать, что $F(K^{r-2} \times J) = \tau^0$. На множестве $K^r \times I \subset K^{r+1} \times S^1$ отображение F определим как совпадающее с $f_0\pi$ (и $f_1\pi$). Тогда отображение F будет определено на подкомплексе $K^{r+1} \times J \cup K^r \times I$ произведения $K^{r+1} \times S^1$. Препятствие z_F^{r+2} к продолжению этого отображения на все произведение $K^{r+1} \times S^1$ равно, очевидно, циклу $d_{f_0,f_1}^{r+1} \times I$ (на клетках вида $T^{r+1} \times J$, $T^{r+1} \in K^{r+1}$ это препятствие равно нулю). Следовательно, для класса гомологий Z_F^{r+2} этого препятствия z_F^{r+2} мы имеем

$$Z_F^{r+2} = sD^{r+1}. \tag{14.7}$$

Обозначим через z^r цикл, принимающий на клетке $\tau^r = S^r \setminus \tau^0$ значение α^r. Так как отображение F совпадает с $f_0\pi$ и с $f_1\pi$ на $K^r \times 0 \cup K^r \times 1$, то имеем

$$F^* z^r = \pi^* f_0^* z^r - \lambda^{r-1} \times J, \tag{14.8}$$

где λ^{r-1} — цепь комплекса K^{r+1}. Так как F^*z^r и $\pi^*f_0^*z^r$ являются ∇-циклами, то $\lambda^{r-1} \times J$, а значит, и λ^{r-1} тоже суть ∇-циклы. Класс гомологий цикла λ^{r-1} обозначим через Λ^{r-1}. Тогда, обозначая через Z^r класс гомологий цикла z^r и учитывая, что $-\lambda^{r-1} \times J = \lambda^{r-1} \times I + \nabla(\lambda^{r-1} \times q) \underset{\nabla}{\sim} \lambda^{r-1} \times I$, имеем из (14.8)

$$D^r(F) = F^* Z^r = \pi^* f_0^* Z^r + s\Lambda^{r-1}. \tag{14.9}$$

Из (14.1), (14.2), (14.7), (14.9) получаем, учитывая соотношения (6.18), (6.19) и (6.20),

$$\begin{gathered} sD^{r+1} = Sq^2(\pi^* f_0^* Z^r + s\Lambda^{r-1}) = Sq^2 \pi^* f_0^* Z^r + Sq^2 s\Lambda^{r-1} = \\ = \pi^* f_0^* Sq^2 Z^r + sSq^2\Lambda^{r-1} = sSq^2\Lambda^{r-1}, \ r > 2, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} sD^3 = (\pi^* f_0^* Z^2 + s\Lambda^1) \smile (\pi^* f_0^* Z^2 + s\Lambda^1) = \\ = (\pi^* f_0^* Z^2) \smile (\pi^* f_0^* Z^2) + (\pi^* f_0^* Z^2) \smile (s\Lambda^1) + (s\Lambda^1) \smile (\pi^* f_0^* Z^2) + (s\Lambda^1) \smile (s\Lambda^1) = \\ = \pi^* f_0^* (Z^2 \smile Z^2) + 2(s\Lambda^1) \smile (\pi^* f_0^* Z^2) = 2s(\Lambda^1 \smile f_0^* Z^2). \end{gathered}$$

В силу предложения (в) п. 6:5 из выведенных соотношений

$$sD^{r+1} = sSq^2\Lambda^{r-1}, \ r > 2; \qquad sD^3 = 2s(\Lambda^1 \smile f_0^* Z^2)$$

немедленно вытекают формулы (14.5) и (14.6).

Докажем достаточность условия теоремы. Предположим, что соотношения (14.5), (14.6) имеют место, и пусть λ^{r-1} — цикл класса гомологий Λ^{r-1}. Будем строить отображение F всего $(r+1)$-мерного остова произведения $K^{r+1} \times S^1$ в S^r. На $K^{r+1} \times 0 \cup K^r \times I$ отображение F будем считать совпадающим с $f_0\pi$, на $K^{r+1} \times 1$ — с отображением $f_1\pi$, а на $K^{r-2} \times J$ положим

$$F(K^{r-2} \times J) = \tau^0 \in S^r.$$

На клетках вида $T^{r-1} \times J$ отображение F определим таким образом, чтобы было выполнено соотношение (14.8). Тогда, обозначив через G отображение произведения $K^{r+1} \times S^1$ в S^r, совпадающее с $f_0\pi$, мы получим $d^r_{F,G} = -\lambda^{r-1} \times J$, $z_G^{r+1} = 0$, и потому

$$z_F^{r+1} = z_F^{r+1} - z_G^{r+1} = \nabla d^r_{F,G} = 0.$$

Отсюда следует, что отображение F можно продолжить на все клетки вида $T^r \times J$, т. е. на весь $(r+1)$-мерный остов произведения $K^{r+1} \times J$. Для так определенного отображения F препятствие z_F^{r+2} имеет вид

$$d^{r+1}_{f_0, f_1} \times I + x^{r+1} \times J,$$

где x^{r+1} — цепь комплекса K^{r+1}. Так как, далее, для отображения F имеет место соотношение (14.8) и, следовательно, (14.9), то, повторяя все вычисления, проведенные при доказательстве необходимости условия, в обратном порядке, мы найдем, что имеет место соотношение (14.7), т. е. что цикл

$$z_F^{r+2} = d^{r+1}_{f_0, f_1} \times I + x^{r+1} \times J$$

принадлежит классу гомологий sD^{r+1}. Из этого следует, что цикл $x^{r+1} \times J$ гомологичен нулю в комплексе $K^{r+1} \times S^1$, т е. (см. п. 6:5) что существует такая цепь x^r комплекса K^{r+1}, для которой $x^{r+1} \times J = \nabla (x^r \times J)$. Из замечания к предложению (и) п. 8:2 следует теперь, что, изменив отображение F только на внутренностях клеток вида $T^r \times J$, мы получим отображение F', которое можно будет распространить на все клетки вида $T^{r+1} \times J$, т. е. на все произведение $K^{r+1} \times J$ (ибо препятствие $z_{F'}^{r+2}$ будет равно нулю на клетках вида $T^{r+1} \times J$). Рассматриваемое только на $\widetilde{K}^{r+1} \times \overline{J}$ отображение F' и дает искомую гомотопию, соединяющую f_0 и f_1. Теорема доказана.

§ 15. Второе препятствие для векторных полей

15:1. Постановка задачи. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, для которого штифелевский инвариант Y^{r+1} равен нулю. Тогда на $(r+1)$-мерном остове B^{r+1} произвольной триангуляции B^n многообразия M можно построить реперное поле $\mathfrak{S}_k$ порядка k. В настоящем параграфе рассматривается вопрос о возможности построения реперного поля порядка k на остове B^{r+2}.

(а). *Всякие два реперных поля $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_k'$ порядка k, заданные на остове B^{r+1}, могут быть деформацией приведены к совпадению на остове B^{r-1}.*

Действительно, на остове B^0 любые два поля могут быть приведены к совпадению [см. п. 12 : 3, (и)]. Если поля уже приведены к совпадению на основе B^s, $0 \leqslant s < r-1$, то в силу тривиальности группы

$\pi^{s+1}(V_{n,k})$ и предложений п. 12:3, (б) и (и), они могут быть приведены к совпадению и на остове B^{s+1}.

(б). *Если гомотопные между собой поля* $[\mathfrak{S}_k]_0$ *и* $[\mathfrak{S}_k]_1$, *заданные на* B^{r+1}, *совпадают на* B^{r-1}, *то различающая* $\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k]_1)$ *есть гомологичный нулю* ∇-*цикл.*

При $r=1$ это следует из предложения (д) п. 12:3. Пусть $r>1$, и $[\mathfrak{S}_k]_t$ — деформация поля $[\mathfrak{S}_k]_0$ в $[\mathfrak{S}_k]_1$. Будем строить семейство полей $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$, зависящее от двух параметров t, τ, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Именно, предположим прежде всего, что на B^{r+1}

$$[\mathfrak{S}_k]_{t0} = [\mathfrak{S}_k]_t,\ [\mathfrak{S}_k]_{0\tau} = [\mathfrak{S}_k]_0,\ [\mathfrak{S}_k]_{1\tau} = [\mathfrak{S}_k]_1$$

и, кроме того, что на B^{r-2} имеем

$$[\mathfrak{S}_k]_{t1} = [\mathfrak{S}_k]_0 = [\mathfrak{S}_k]_1.$$

Пусть теперь T^0 — вершина комплекса B^n. Совокупность значений t, τ образует квадрат Q. Для значений t, τ на границе этого квадрата (т. е. при выполнении хотя бы одного из равенств $t=0$, $t=1$, $\tau=0$, $\tau=1$) поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на T^0 определено. Таким образом, выбрав на T^0 параллелизующую систему, мы получим отображение Π границы квадрата Q в $V_{n,k}$. В силу тривиальности группы $\pi^1(V_{n,k})$ при $r>1$ отображение Π можно продолжить на весь квадрат Q, т. е. можно определить поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на T^0 для всех значений t, τ. Предположим, что $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ определено уже на B^s для всех значений t, τ; $s<r-2$. Пусть T^{s+1} — произвольный $(s+1)$-мерный симплекс комплекса B^n. Тогда поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ задано уже на $\dot{T}^{s+1}$ для всех значений t, τ, и на всем симплексе T^{s+1} для значений t, τ на границе квадрата Q. Введем на T^{s+1} параллелизующую систему. Тогда поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ даст отображение Π границы Σ^{s+2} топологического произведения $T^{s+1} \times Q$ в $V_{n,k}$. Так как $s+2<r$, то отображение Π сферы Σ^{s+2} размерности $s+2$ в $V_{n,k}$ гомотопно нулю. Таким образом, мы можем продолжить Π на все произведение $T^{s+1} \times Q$, т. е. определить поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на T^{s+1} для всех значений t,τ. Продолжая таким образом, мы построим поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на B^{r-2}. Пусть T^{r-1} — произвольный $(r-1)$-мерный симплекс комплекса B^n. Введем на этом симплексе параллелизующую систему. Тогда определится отображение Π, заданное, однако, не на всей границе произведения $T^{r-1} \times Q$, так как на грани этой клетки, соответствующей значению $\tau=1$, поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ не задано. Это дает возможность [ср. лемму (а) п. 2:2] продолжить Π на всю клетку $T^{r-1} \times Q$, т. е. мы можем продолжить поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на весь остов B^{r-1}. Таким же способом мы продолжим поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ на остов B^r и затем на остов B^{r+1}. Рассмотрим теперь полученное поле $[\mathfrak{S}_k]_{t\tau}$ только для значений $\tau=1$. Мы получаем деформацию $[\mathfrak{S}_k]_{t1}$ поля $[\mathfrak{S}_k]_{01} = [\mathfrak{S}_k]_0$ в поле $[\mathfrak{S}_k]_{11} = [\mathfrak{S}_k]_1$, причем при этой деформации поле не меняется на остове

B^{r-2}, так как на остове B^{r-2} имеем: $[\mathfrak{S}_k]_{t_1} = [\mathfrak{S}_k]_0$. Отсюда следует [см. п. 12:3, (д)], что $\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k]_1) \underset{\nabla}{\sim} 0$.

(в). Пусть $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_k'$ — два поля, заданные на B^{r+1}. Согласно (а), можно при помощи деформации привести эти поля к совпадению на остове B^{r-1}, после чего для них будет определена различающая $\partial^r(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_k')$. Эта различающая является ∇-циклом, так как оба поля $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_k'$ заданы на всем остове B^{r+1} [см. п. 12:3, (ж)]. Сам цикл $\partial^r(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_k')$ зависит от выбора деформации, при помощи которой поля приведены к совпадению на остове B^{r-1}, но *класс гомологий $D^r(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_k')$ этого цикла однозначно определяется полями $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_k'$.*

В самом деле, пусть $[\mathfrak{S}_k]_0$ и $[\mathfrak{S}_k']_0$ — два совпадающие на B^{r-1} поля, получившиеся из $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_k'$ в результате одной деформации, а $[\mathfrak{S}_k]_1$ и $[\mathfrak{S}_k']_1$ — поля, получившиеся в результате другой деформации. Деформируя поля $[\mathfrak{S}_k]_0$ и $[\mathfrak{S}_k']_0$ одновременно, оставляя их совпадающими на B^{r-1} [при этом различающая $\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k']_0)$ меняться не будет], можно добиться того, что все четыре поля $[\mathfrak{S}_k]_0$, $[\mathfrak{S}_k']_0$, $[\mathfrak{S}_k]_1$, $[\mathfrak{S}_k']_1$ будут совпадать на B^{r-1}. Нам нужно доказать, что цикл

$$\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k']_0) - \partial^r([\mathfrak{S}_k]_1, [\mathfrak{S}_k']_1) = \{\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k']_0) + \partial^r([\mathfrak{S}_k']_0, [\mathfrak{S}_k]_1)\} - $$
$$- \{\partial^r([\mathfrak{S}_k']_0, [\mathfrak{S}_k]_1) + \partial^r([\mathfrak{S}_k]_1, [\mathfrak{S}_k']_1)\} = \partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k]_1) - \partial^r([\mathfrak{S}_k']_0, [\mathfrak{S}_k']_1)$$

гомологичен нулю. Но поля $[\mathfrak{S}_k]_0$ и $[\mathfrak{S}_k]_1$ гомотопны между собой (они получились из $\mathfrak{S}_k$ двумя разными деформациями) и совпадают на B^{r-1}, так что, в силу (б), мы имеем

$$\partial^r([\mathfrak{S}_k]_0, [\mathfrak{S}_k]_1) \underset{\nabla}{\sim} 0.$$

Точно так же

$$\partial^r([\mathfrak{S}_k']_0, [\mathfrak{S}_k']_1) \underset{\nabla}{\sim} 0.$$

(г). Для каждого реперного поля $\mathfrak{S}_k$ порядка k, заданного на B^{r+1}, определено препятствие $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$, которое мы будем называть *вторым препятствием*. Оказывается, что *если $\mathfrak{S}_k^0$, $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_k'$ — такие три поля, заданные на B^{r+1}, что $D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k')$, то*

$$\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k) \underset{\nabla}{\sim} \mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k').$$

При доказательстве мы можем предполагать, что все три поля $\mathfrak{S}_k^0$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_k'$ совпадают на остове B^{r-1} (этого можно добиться при помощи деформации). Тогда циклы $\partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k)$ и $\partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k')$, по условию, гомологичны между собой, так что

$$\partial^r(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{S}_k') = \partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k') - \partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k)$$

есть гомологичный нулю ∇-цикл. Отсюда следует [см. предложения (е) и (и) п. 12:3], что поля $\mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_k'$ могут быть деформацией приведены к совпадению на остове B^r, и потому их вторые препятствия гомологичны [см. п. 12:3, (ж)].

(д). *Пусть $\mathfrak{S}_k^0$ — реперное поле порядка k, заданное на B^{r+1}, а D^r — произвольный элемент группы $\nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$. Тогда существует такое поле $\mathfrak{S}_k$, заданное на B^{r+1}, что $D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = D^r$.*

Действительно, пусть d^r — цикл класса гомологий D^r, а $\mathfrak{S}_k$ — такое поле, заданное на B^r и совпадающее с $\mathfrak{S}_k^0$ на B^{r-1}, что $\partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = d^r$ [см. п. 12:3, (г)]. Тогда, в силу соотношений $\nabla d^r = 0$ и $\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k^0) = 0$, мы имеем

$$\mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k) = \mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k) - \mathfrak{z}^{r+1}(\mathfrak{S}_k^0) = -\nabla\partial^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = 0,$$

и потому поле $\mathfrak{S}_k$ может быть продолжено на остов B^{r+1}, что и дает нам искомое реперное поле.

(е). Выберем на остове B^{r+1} произвольное, но раз навсегда фиксированное реперное поле $\mathfrak{S}_k^0$ порядка k. Тогда из (г) следует, что класс гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ второго препятствия $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ произвольного поля $\mathfrak{S}_k$, заданного на B^{r+1}, однозначно определяется классом гомологий $D^r = D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k)$. Мы положим поэтому $\mathfrak{Z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k) = \mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, где $D^r = D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k)$. Из (д) следует, что символ $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$ определен для любого элемента (D^r) группы $\nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$. Далее, из предложения (з) п. 12:3 следует, что каждый цикл, принадлежащий классу гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, является вторым препятствием для некоторого реперного поля порядка k, заданного на B^{r+1}. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Вторые препятствия полей $\mathfrak{S}_k$, заданных на остове B^{r+1}, полностью заполняют один или несколько классов гомологий. Все эти классы гомологий имеют вид $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, где D^r пробегает всю группу $\nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$.

Для возможности построения поля $\mathfrak{S}_k$ на остове B^{r+2} необходимо и достаточно, чтобы среди классов гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, $D^r \in \nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$ содержался нулевой класс.

Вычисление символа $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$ в явном виде дано в следующих пунктах.

15:2. Параллелизующие системы с особенностями. (а). *Если на симплексе $T \in B^n$ задано реперное поле порядка k, то его можно дополнить $n-k$ векторными полями до параллелизующей системы, заданной на этом симплексе.*

Доказательство этого предложения совершенно аналогично доказательству предложения (а) п. 12:1.

(б). *Если на остове B^s задано реперное поле $\mathfrak{S}_l$ порядка l, то при $l < n-s$ его можно дополнить еще одним векторным полем до реперного поля порядка $l+1$ на B^s.*

Построение этого поля будем вести последовательно на остовах $B^0, B^1, \ldots, B^s$. Пусть $u_1(x), \ldots, u_l(x)$, $x \in B^s$ — векторные поля, образующие $\mathfrak{S}_l$. На остове B^0 можно дополнить эти поля полем $u_{l+1}(x)$ до реперного поля порядка $k+1$. Предположим, что поле $u_{l+1}(x)$, составляющее вместе с $u_1(x), \ldots, u_l(x)$ реперное поле порядка $l+1$, построено уже на остове B^m, $m < s$. Пусть T — произвольный $(m+1)$-мерный симплекс комплекса B^n, а $\mathfrak{S}_n$ — параллелизующая система на нем, у которой первые l векторов совпадают с $u_1(x), \ldots, u_l(x)$. Последние $n-l$ векторов системы $\mathfrak{S}_n$ обозначим через $v_1(x), \ldots, v_{n-l}(x)$. Пусть R^{n-l} — эвклидово $(n-l)$-мерное пространство, а $e_1, \ldots, e_{n-l}$ — его ортонормальный базис. Пусть

$$u_{l+1}(x) = a_1(x)\, v_1(x) + \ldots + a_{n-l}(x)\, v_{n-l}(x) \qquad (15.1)$$

— разложение вектора $u_{l+1}(x)$, $x \in \dot{T}$ по векторам системы $\mathfrak{S}_n$. Тогда, положив

$$\Pi(x) = a_1(x)\, e_1 + \ldots + a_{n-l}(x)\, e_{n-l}, \qquad (15.2)$$

мы получаем непрерывное отображение сферы $\dot{T}$ в единичную сферу S^{n-l-1} пространства R^{n-l}. Так как размерность сферы $\dot{T}$ меньше размерности сферы S^{n-l-1}, то это отображение может быть продолжено в отображение всего симплекса T в сферу S^{n-l-1}. Записав это отображение в виде (15 : 2), мы получим по формуле (15.1) искомое векторное поле $u_{l+1}(x)$ на симплексе T. Таким образом, поле $u_{l+1}(x)$ может быть построено на остове B^{m+1}.

(в). Мы скажем, что на подкомплексе $K \subset B^n$ задана *параллелизующая система с особенностями*, если на некоторых множествах $A_1, \ldots, A_n$ этого подкомплекса заданы векторные поля $u_1(x), \ldots, u_n(x)$, попарно ортогональные в каждой точке, где они заданы, и образующие в точках множества $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ реперы, соответствующие ориентации многообразия B^n. Множество $\widetilde{K} \setminus A_i$ назовем *множеством особенностей* поля $u_i(x)$.

Пусть T — симплекс комплекса B^n, a — его внутренняя точка, а $\mathfrak{S}_l = \{u_1(x), \ldots, u_l(x)\}$ — реперное поле (без особенностей) порядка l, заданное на T. Предположим, что на $\dot{T}$ поле $\mathfrak{S}_l$ дополнено полями $u_{l+1}(x), \ldots, u_n(x)$ с особенностями до параллелизующей системы, и пусть $C_{l+1}, \ldots, C_n$ — множества особенностей этих полей. Тогда поля $u_{l+1}(x), \ldots, u_n(x)$ можно продолжить на T так, чтобы получить на T параллелизующую систему $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ с особенностями. При этом множеством особенностей поля $u_i(x)$, $l+1 \leqslant i \leqslant n$ будет пирамида aC_i над C_i, если множество C_i не пусто, и точка a, если C_i пусто.

В самом деле, пусть $v_{l+1}(x), \ldots, v_n(x)$ — такие векторные поля на T, что $u_1(x), \ldots, u_l(x), v_{l+1}(x), \ldots, v_n(x)$ есть параллелизующая система без особенностей на T [см. (а)]. Пусть, далее, χ — центральная проекция множества $T \setminus a$ из точки a на $\dot{T}$ (ср. конец п. 1 : 1). За вектор $u_i(x)$, $x \in T$, $i \geqslant l+1$ примем такой вектор, который в базисе $v_{l+1}(x), \ldots, v_n(x)$ имеет такие же координаты, какие имеет вектор $u_i(\chi(x))$ в базисе $v_{l+1}(\chi(x)), \ldots, v_n(\chi(x))$. Непосредственно проверяется, что построенные таким образом поля $u_{l+1}(x), \ldots, u_n(x)$ являются искомыми.

(г). Рассмотрим снова фиксированное реперное поле $\mathfrak{S}_k^0$ порядка k, заданное на B^{r+1} [см. п. 15 : 1, (е)]. Повторным применением предложения (б) мы сможем построить на B^2 векторные поля (без особенностей) $u_{k+1}(x), \ldots, u_{n-2}(x)$, составляющие на B^2 вместе с полями $u_1(x), \ldots, u_k(x)$, образующими $\mathfrak{S}_k^0$, реперное поле порядка $n-2$. В силу того же предложения (б) построим на B^1 поле $u_{n-1}(x)$, составляющее с $u_1(x), \ldots$ $\ldots, u_{n-2}(x)$ реперное поле порядка $n-1$ на B^1. Поле $u_{n-1}(x)$ мы продолжим на B^2 так, чтобы его особенности находились только в центрах двумерных симплексов комплекса B^n и чтобы мы получили на B^2 реперное поле $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ с особенностями [см. (в)]. Применяя снова предложение (в), продолжим поля $u_{k+1}(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ в поля с особенностями, заданные постепенно на $B^3, \ldots, B^{r+1}$. Таким образом, мы получим на B^{r+1} реперное поле (с особенностями) порядка $n-1$. В тех точках остова B^{r+1}, в которых заданы все векторы $u_1(x), \ldots$ $\ldots, u_{n-1}(x)$, мы определим также вектор $u_n(x)$ так, чтобы репер $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, $u_n(x)$ был ортонормальным и соответствовал ориентации многообразия B^n. Вектор $u_n(x)$ определяется этими условиями однозначно, и мы получаем на B^{r+1} параллелизующую систему с особенностями. Пользуясь предложением (в), распространим эту параллелизующую систему и на остов B^{r+2}. Полученную параллелизующую систему обозначим через $\mathfrak{S}_n^0$. Первые k векторов системы $\mathfrak{S}_n^0$ совпадают на B^{r+1} с реперным полем $\mathfrak{S}_k^0$ и имеют особенности только в центрах $(r+2)$-мерных симплексов. Следующие $r-2$ полей, т. е. $u_{k+1}(x), \ldots$ $\ldots, u_{n-2}(x)$ имеют особенности, как легко видеть, только на $(r-1)$-мерном звездном остове комплекса $(B^{r+2})'$, т. е. на подкомплексе комплекса $(B^{r+2})'$, состоящем из всех его симплексов, сопряженных трехмерным симплексам комплекса B^{r+2}. Наконец, последние два поля $u_{n-1}(x)$ и $u_n(x)$ имеют особенности только в точках r-мерного звездного остова комплекса $(B^{r+2})'$. Будем обозначать через L^s s-мерный звездный остов комплекса $(B^{r+2})'$.

(д). Пусть T^2 — двумерный симплекс комплекса B^{r+2}. Введем на T^2 параллелизующую систему, первые $n-2$ векторов которой совпадают с $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x)$. Последние векторы параллелизующей системы обозначим через $v_{n-1}(x)$ и $v_n(x)$. Пусть

$$u_{n-1}(x) = \cos \alpha(x) \cdot v_{n-1}(x) + \sin \alpha(x) \cdot v_n(x)$$

— разложение вектора $u_{n-1}(x)$, $x \in \dot{T}^2$ [см. (г)] по векторам введенной на T^2 параллелизующей системы. Пусть R^n эвклидово n-мерное пространство, а $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормальный базис в нем. Тогда окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2}) \subset V_{n,n-1}$ [см. п. 11 : 2, (в)] образована последовательностями вида $e_1, \ldots, e_{n-2}$, w_{n-1}, где

$$w_{n-1} = e_{n-1} \cos \alpha + e_n \sin \alpha. \tag{15.3}$$

Положив

$$w_{n-1}(x) = \cos \alpha(x) \cdot e_{n-1} + \sin \alpha(x) \cdot e_n,$$

мы получаем непрерывное отображение окружности $\dot{T}^2$ в окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$. Окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$ мы ориентируем так, чтобы при возрастании угла α точка (15:3) пробегала ее в положительном направлении. Если, далее, симплекс T^2 ориентирован, то ориентируем $\dot{T}^2$ так, чтобы было $[T^2 : \dot{T}^2] = +1$. Степень отображения $x \to \{e_1, \ldots, e_{n-2}, w_{n-1}(x)\}$ ориентированной окружности $\dot{T}^2$ в ориентированную окружность $S^1(e_1, \ldots, e_{n-2})$ обозначим через $\tilde{y}^2(T^2)$. Мы получаем функцию $\tilde{y}^2(T^2)$, заданную на двумерных симплексах комплекса B^n. Эта функция, очевидно, кососимметрична, и мы получаем двумерную цепь $\tilde{y}^2$. Очевидно, что если мы обозначим через $y^2(T^2)$ нулевой элемент группы $\pi^1(V_{n,\, n-1})$, если число $\tilde{y}^2(T^2)$ четно, и ненулевой элемент этой группы (имеющей порядок два; см. теорему п. 11:4), если $\tilde{y}^2(T^2)$ нечетно, то мы получим первое препятствие $y^2 = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{S}_{n-1})$ (∇-цикл Штифеля) для поля $\mathfrak{S}_{n-1} = \{u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)\}$.

(е). Покажем, наконец, что при $r = 2$ цепь $\tilde{y}^2$ является целочисленным Δ-циклом и что класс гомологий этого цикла однозначно определяется полем $\mathfrak{S}_k^0 = \mathfrak{S}_{n-2}^0$; мы будем в дальнейшем обозначать этот класс гомологий через $\tilde{Y}^2$.

Действительно, вводя каждый раз на рассматриваемых симплексах параллелизующую систему, первые $n-2$ векторов которой совпадают с $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x)$ (это возможно для симплексов размерности 1, 2 и 3, так как поле $\mathfrak{S}_{n-2}^0$ задано на B^3), мы сможем, дословно так же, как в п. 12:2, 12:3, доказать следующие факты. Всякие два поля $u_{n-1}(x)$ и $u'_{n-1}(x)$, заданные на B^1 и ортогональные к полям $u_1(x), \ldots$ $\ldots, u_{n-2}(x)$, можно деформацией (оставляющей их ортогональными к этим полям) привести к совпадению на остове B^0. После этого для них будет определена одномерная цепь ∂^1 (различающая). Если $\tilde{y}^2$ и $\tilde{y}'^2$ — цепи, построенные для полей $u_{n-1}(x)$ и $u'_{n-1}(x)$ на основании построения, приведенного в (д), то $\nabla\partial^1 = \tilde{y}^2 - \tilde{y}'^2$. Каждая из цепей $\tilde{y}^2$, $\tilde{y}'^2$ является ∇-циклом, не меняющимся при деформации соответствующего поля $u_{n-1}(x)$, $u'_{n-1}(x)$, если в течение этой деформации поле остается ортогональным ко всем полям $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x)$. Таким образом, в силу сказанного выше, ∇-циклы $\tilde{y}^2$ и $\tilde{y}'^2$ гомологичны между собой. Итак, класс гомологий $\tilde{Y}^2$ однозначно определяется полем $\mathfrak{S}_{n-2}^0$. Заметим, что при замене поля $\mathfrak{S}_{n-2}^0$ этот класс гомологий, вообще говоря, меняется.

15 : 3. Основная теорема. Обозначим через Z^{r+2} класс гомологий второго препятствия $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k^0)$ фиксированного реперного поля $\mathfrak{S}_k^0$. Далее, определим произведение групп $\pi^1(V_{n,\, n-1})$ и $\pi^r(V_{n,\, k})$ в группе $\pi^{r+1}(V_{n,\, k})$, считая произведение образующих элементов двух первых групп равным такому элементу σ группы $\pi^{r+1}(V_{n,\, k})$, который определяется негомотопным нулю отображением сферы Σ^{r+1} на $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1}) \subset V_{n,\, k}$, $r > 2$. Тогда для любого элемента D^r группы $\Delta^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$ будет определено произведение $Y^2 \smile D^r$, где Y^2 — двумерный штифелевский инвариант. Далее, определим произведение групп $J_0 = \pi^1(S^1(e_1 \dots e_{n-2}))$ и $\pi^2(V_{n,n-2})$ в группе $\pi^3(V_{n,n-2})$, считая произведение образующих элементов этих групп равным элементу σ группы $\pi^3(V_{n,n-2})$. Тогда для любого элемента $D^2 \in \nabla^2(B^n, \pi(V_{n,n-2}))$ будет определено произведение $\widetilde{Y}^2 \smile D^2$, где $\widetilde{Y}^2$ — класс гомологий, определенный в п. 15:2, (е). Наконец, определим произведение групп $\pi^r(V_{n,k})$ и $\pi^r(V_{n,k})$ в группе $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, $r \geqslant 2$, считая квадрат образующего элемента первой группы равным элементу σ, определенному выше. Тогда для любого элемента $D^r \in \nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$ будет определено при $r = 2$ произведение $D^2 \smile D^2$, а при $r > 2$ — квадрат Sq^2D^r (ибо элемент σ, если он не тривиален, имеет порядок 2). При этих условиях имеет место следующее предложение.

Теорема. *Пусть B^n — произвольная триангуляция гладкого ориентируемого многообразия M, для которого штифелевский инвариант Y^{r+1} равен нулю. Тогда вторые препятствия реперных полей порядка k, заданных на остове B^{r+1}, полностью заполняют один или несколько классов гомологий группы $\Delta^{r+2}(B^n, \pi^{r+1}(V_{n,k}))$. Все эти (и только эти) классы гомологий даются формулой*

$$Z^4 + \widetilde{Y}^2 \smile D^2 + D^2 \smile D^2,$$
$$Z^{r+2} + Y^2 \smile D^r + Sq^2D^r,\ r > 2,$$

где D^r пробегает всю группу $\Delta^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$.

В силу п. 15:1, (е), для доказательства этой теоремы достаточно установить, что для класса гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$, определенного там, имеет место формула

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z}^4(D^2) &= Z^4 + \widetilde{Y}^2 \smile D^2 + D^2 \smile D^2, \\ \mathfrak{Z}^{r+2}(D^r) &= Z^{r+2} + Y^2 \smile D^r + Sq^2D^r,\ r > 2. \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Эту формулу мы и установим в следующих пунктах.

15 : 4. Построение специального реперного поля. Будем считать, что звездный остов L^s, $s = 0, \dots, r+2$ построен для собственного барицентрического подразделения комплекса B^{r+2} и пусть K^s есть s-мерный звездный остов такого m-подразделения комплекса B^{r+2}, которое построено на основе распределения масс с попарно различными массами. Тогда остовы L^r и K^2 имеют лишь изолированные точки пересечения — по одной внутри каждого $(r+2)$-мерного симплекса T^{r+2} комплекса B^{r+2}, а остовы L^{r-1} и K^2 совсем не пересекаются [см. п. 5:2, (г); доказанное там предложение применимо к каждому симплексу T^{r+2} комплекса B^{r+2}]. Пусть теперь ε — положительное число, выбранное настолько малым, чтобы были справедливы все последующие рассуждения. Если T^{r+i}, $i = 0, 1, 2$ — произвольный $(r+i)$-мерный симплекс комплекса B^{r+2}, а a — точка $(2-i)$-мерной барицентрической звезды $Б(T^{r+i}) \subset K^2$, то через T_a^{r+i} мы будем обозначать симплекс, получающийся из T^{r+i} подобным преобразованием χ_a с центром a и коэффициентом ε. Объединение U_ε всех симплексов T_a^{r+i}, $i=0, 1, 2$ является, как нетрудно видеть, замыканием некоторой окрестности остова K^2 в B^{r+2}. Объединение внутренностей всех симплексов T_a^{r+2} обозначим через V_ε.

При достаточно малом ε пересечение множеств U_ε и $\widetilde{L}^{r-1}$ пусто, а пересечение $U_\varepsilon \cap \widetilde{L}^r$ состоит из изолированных r-мерных симплексов, лежащих по одному внутри каждого $(r+2)$-мерного симплекса $T^{r+2} \in B^{r+2}$. Поэтому поля $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x)$ параллелизующей системы $\mathfrak{S}_n^0$, построенной выше, не имеют особенностей на U_ε, поля же $u_{n-1}(x)$ и $u_n(x)$ имеют особенности только в тех точках множества U_ε, которые принадлежат остову L^r, т. е. только на упоминаемых выше изолированных r-мерных симплексах, лежащих по одному в каждом симплексе $T^{r+2} \in B^{r+2}$.

Пусть R^n — эвклидово n-мерное пространство, а $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированный ортонормированный базис в нем. Обозначим через R_x^n касательное эвклидово векторное пространство к многообразию M в точке $x \in U_\varepsilon \setminus \widetilde{L}^r$ и пусть φ_x — такое линейное отображение пространства R^n на R_x^n, которое переводит базис $e_1, \ldots, e_n$ в репер $u_1(x), \ldots$ $\ldots, u_n(x)$. Будем считать, что многообразие $V_{n,k}$ построено при помощи векторов только что рассмотренного пространства R^n. Тогда каждому элементу $v \in V_{n,k}$ отображение φ_x относит некоторую последовательность, состоящую из k единичных взаимно ортогональных векторов пространства R_x^n; эту последовательность мы обозначим через $\varphi_x(v)$. Если теперь f — непрерывное отображение множества $A \subset U_\varepsilon \setminus L^r$ в $V_{n,k}$, то, положив $\mathfrak{S}_k(x) = \varphi_x f(x)$, $x \in A$, мы получим непрерывное реперное поле $\mathfrak{S}_k$ порядка k на A. Мы скажем, что это поле $\mathfrak{S}_k$ *индуцируется* отображением f множества A в $V_{n,k}$.

Пусть теперь d^r — цикл класса гомологий $D^r \in \nabla^r(B^n, \pi^r(V_{n,k}))$. Выберем такое отображение g остова B^r в $V_{n,k}$, которое переводит остов B^{r-1} в точку $\{e_1, \ldots, e_k\} \in V_{n,k}$ и обладает тем свойством, что элемент группы $\pi^r(V_{n,k})$, определяемый отображением g симплекса $T^r \in B^r$ в $V_{n,k}$, равен $-d^r(T^r)$. Сравнивая отображение g с отображением e, переводящим весь остов B^{r+1} в точку $\{e_1, \ldots, e_k\} \in V_{n,k}$, мы найдем [см. п. 12 : 3, (ж), и п. 12 : 2, (а)], что отображение g может быть продолжено в отображение всего остова B^{r+1} в $V_{n,k}$. Так продолженное отображение мы снова обозначим через g. Определим теперь отображение f множества $U_\varepsilon \setminus V_\varepsilon$ в $V_{n,k}$, положив: $f(x) = g\chi_a^{-1}(x)$, где $x \in T_a^{r+i}$, $i=0,1$. Отображение f переводит всю границу множества U_ε (т. е. множество $\overline{B^{r+2} \setminus U_\varepsilon} \cap U_\varepsilon$) в точку $\{e_1, \ldots, e_k\} \in V_{n,k}$. Отображение f, определенное, в частности, на множестве $U_\varepsilon \setminus (V_\varepsilon \cup L^s)$, индуцирует на этом множестве некоторое реперное поле порядка k, которое мы обозначим через $\mathfrak{S}_k$. На границе множества

U_ε реперное поле $\mathfrak{S}_k$ совпадает с фиксированным полем $\mathfrak{S}_k^0$. Поэтому, считая на $B^{r+2} \setminus U_\varepsilon$ поле $\mathfrak{S}_k$ совпадающим с $\mathfrak{S}_k^0$, мы получим непрерывное реперное поле $\mathfrak{S}_k$, заданное на части множества $\widetilde{B}^{r+2}$.

Поле $\mathfrak{S}_k$ имеет следующие особенности:

1) Оно не определено на множестве L^0, т. е. не определено в центре $T^{r+2} \cap L^0$ каждого $(r+2)$-мерного симплекса T^{r+2}.

2) Оно не определено на множестве V_ε, т. е. не определено на каждом $(r+2)$-мерном симплексе $T_a^{r+2} = T^{r+2} \cap V_\varepsilon$.

3) Оно не определено на множестве $U_\varepsilon \cap L^r$, состоящем из изолированных r-мерных симплексов, расположенных по одному в каждом симплексе $T^{r+2} \in B^{r+2}$. Заметим, что на границе каждого из указанных r-мерных симплексов поле $\mathfrak{S}_k$ определено (и совпадает с $\mathfrak{S}_k^0$).

На всей остальной части остова B^{r+2}, в частности на всем остове B^{r+1}, поле $\mathfrak{S}_k$ не имеет особенностей. Нетрудно видеть, что имеет место равенство $\partial^r (\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = d^r$. Поэтому второе препятствие $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ поля $\mathfrak{S}_k$ принадлежит классу гомологий $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$. Таким образом, нам остается установить, что класс гомологий второго препятствия поля $\mathfrak{S}_k$ определяется соотношением (15.4).

15 : 5. Вычисление символа $\mathfrak{Z}^{r+2}(D^r)$. Пусть T^{r+2} — произвольный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса B^{r+2}. Положим

$$M_1 = T^{r+2} \cap L^0, \quad M_2 = T^{r+2} \cap V_\varepsilon, \quad M_3 = T^{r+2} \cap U_\varepsilon \cap L^r.$$

На множестве $T^{r+2} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$ поле $\mathfrak{S}_k$ определено. Пусть $\mathfrak{S}_n$ — параллелизующая система, введенная на симплексе T^{r+2}. Тогда поле $\mathfrak{S}_k$, определенное на множестве $T^{r+2} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$, дает нам непрерывное отображение Π этого множества в $V_{n,k}$ (ср. п. 12 : 2). Если теперь f — непрерывное отображение ориентированной сферы Σ^{r+1} в $T^{r+2} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$, то отображение Πf определяет некоторый элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$. Если отображение f деформируется, так что множество $f(\Sigma^{r+1})$ не пересекается в процессе деформации с $M_1 \cup M_2 \cup M_3$, то указанный элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, очевидно, не меняется.

Пусть теперь f — такое гомеоморфное отображение ориентированной сферы Σ^{r+1} в T^{r+2}, что множество M_1 заключено внутри сферы $f(\Sigma^{r+1})$, а множества M_2 и M_3 — вне ее, причем коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(f(\Sigma^{r+1}), a)$ цикла $f(\Sigma^{r+1})$ с точкой $a \in M^1$ равен (в ориентированном симплексе T^{r+2}) $+1$. Соответствующий элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, определяемый отображением Πf, обозначим через $z_1(T^{r+2})$. Этот элемент не зависит от произвола в выборе отображения f, удовлетворяющего указанным условиям, а однозначно определяется полем $\mathfrak{S}_k$. Аналогично мы определим элементы $z_2(T^{r+2})$ и $z_3(T^{r+2})$, определяемые множествами M_2 и M_3, на которых поле $\mathfrak{S}_k$ не задано. Функции z_1, z_2, z_3, определенные для ориентированных $(r+2)$-мерных симплексов комплекса B^n, являются кососимметрическими. Мы хотим показать, что определенные таким образом цепи z_1, z_2, z_3 являются ∇-циклами, принадлежащими, соответственно, классам гомологий Z^4, $D^2 \smile D^2$, $\tilde{Y}^2 \smile D^2$ при $r=2$ и классам гомологий Z^{r+2}, $Sq^2 D^r$, $Y^2 \smile D^r$ при $r > 2$. Кроме того, мы покажем, что имеет место соотношение

$$\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k) = z_1 + z_2 + z_3.$$

Тем самым, соотношение (15.4) будет установлено.

(а). Установим прежде всего соотношение

$$\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k) = z_1 + z_2 + z_3.$$

Действительно, пусть

$$B_3^{r+2} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$(r+2)$-мерный букет шаров, обладающий тем свойством, что множество M_i расположено внутри шара E_i, $i = 1, 2, 3$, а S_i — граница шара E_i. Тождественное отображение множества $W = T^{r+2} \setminus B_3^{r+2}$ в себя обозначим через e_0, и пусть Π — отображение этого множества в $V_{n,k}$, определенное при помощи поля $\mathfrak{S}_k$ на основании некоторой параллелизующей системы $\mathfrak{S}_n$, введенной в симплексе T^{r+2}. Отображение e_0 сферы $\dot{T}^{r+2}$ в W гомотопно в W отображению e_1 этой сферы в $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, причем степень отображения e_1 сферы $\dot{T}^{r+2}$ на каждой из сфер S_i, $i = 1, 2, 3$ равна $+1$ (если эти сферы ориентированы надлежащим образом). Элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, равный коэффициенту цепи $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ на симплексе T^{r+2}, определяется отображением Πe_0, а значит, и Πe_1 сферы $\dot{T}^{r+2}$ в $V_{n,k}$. Согласно лемме п. 7 : 5, этот элемент равен $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, где α_i — элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, определяемый отображением Πe_1 сферы S_i в $V_{n,k}$. По определению, мы имеем $\alpha_i = z_i(T^{r+2})$, что и доказывает требуемое равенство.

(б). Покажем, что цепь z_1 является циклом, принадлежащим классу гомологий Z^{r+2}.

Действительно, отображение f сферы Σ^{r+1} в $T^{r+2} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$, нужное для определения элемента $z_1(T^{r+2})$, можно выбрать таким образом, чтобы множество $f(\Sigma^{r+1})$ было расположено вне U_ε, т. е. там, где поле $\mathfrak{S}_k$ совпадает с $\mathfrak{S}_k^0$. Поэтому мы можем вычислять соответствующий элемент $z_1(T^{r+2})$ для поля $\mathfrak{S}_k^0$. Деформируя отображение f, его можно перевести в такое, которое отображает сферу Σ^{r+1} на границу $\dot{T}^{r+2}$ симплекса T^{r+2} со степенью $+1$. Отсюда следует, что отображение Πf сферы Σ^{r+1} в $V_{n,k}$ определяет элемент группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, равный значению цепи $\mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k^0)$ на симплексе T^{r+2}. Иначе говоря, $z_1 = \mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k^0)$. Отсюда следует, что z_1 есть ∇-цикл и что этот цикл принадлежит классу гомологий Z^{r+2}.

(в). Покажем, далее, что цепь z_2 является ∇-циклом, принадлежащим классу гомологий $D^2 \smile D^2$ или, соответственно, $Sq^2 D^r$.

Пусть T^{r+2} — ориентированный $(r+2)$-мерный симплекс комплекса

B^n. Для определения элемента $z_2(T^{r+2})$ группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$ мы можем взять в качестве f отображение χ_a сферы $\dot{T}^{r+2}$ в T^{r+2}. За параллелизующую систему на множестве $\chi_a(T^{r+2})$ можно взять $\mathfrak{S}_n^0$, ибо система $\mathfrak{S}_n^0$ на $\chi_a(T^{r+2})$ не имеет особенностей. Тогда отображение II совпадет, по построению поля $\mathfrak{S}_k$, с отображением $g\chi_a^{-1}$, так что $\mathrm{II}f = \mathrm{II}\chi_a = g$. Итак, элемент $z_2(T^{r+2})$ определяется отображением g сферы $\dot{T}^{r+2}$ в $V_{n,k}$. Иначе говоря, цепь z_2 совпадает с препятствием z_g^{r+2} для отображения g остова B^{r+1} в $V_{n,k}$. Отсюда следует, что z_2 есть ∇-цикл. Далее, если e есть отображение всего остова B^{r+1} в точку $\{e_1, \ldots, e_k\} \in V_{n,k}$, то различающая $d^r_{g,e}$ равна $-d^r$. Поэтому (см. п. 14:2, (б)) цикл $z_2 = z_g^{r+2}$ принадлежит классу гомологий $(-D^2) \smile (-D^2) = D^2 \smile D^2$ при $r = 2$ и классу гомологий $Sq^2(-D^r) = Sq^2 D^r$ при $r > 2$.

(г). Нам остается вычислить класс гомологий цикла z_3 (эта цепь является циклом в силу равенства $z^3 = \mathfrak{z}^{r+2}(\mathfrak{S}_k) - z_1 - z_2$).

Построим барицентрически двойственные системы для цепей $\tilde{y}_2$ и $-d^r$ соответственно в подразделениях L^r и K^2. Пусть T^2 и T_1^r — такие грани симплекса T^{r+2}, что тела цепей $\eta^r_{\tilde{y}^2}(T^{r+2})$ и $\eta^2_{-d^r}(T^{r+2})$ имеют общую точку, совпадающую с $Б(T^2) \cap Б(T_1^r)$, где барицентрические звезды рассматриваются в соответствующих подразделениях. Этим условием грани T^2 и T_1^r определяются однозначно (см. доказательство теоремы п. 6:2). Коэффициент цепи $\tilde{y}^2$ на симплексе T^2 обозначим через $\tilde{\alpha}$, а через α обозначим при $r > 2$ вычет по модулю 2, равный нулю, если $\tilde{\alpha}$ четно, и единице в противном случае. Симплекс T_1^r ориентируем при $r = 2$ так, чтобы индекс пересечения несущих плоскостей симплексов T^2 и T_1^2 (в несущей плоскости симплекса T^4) был равен $+1$; при $r > 2$ ориентации несущественны.

Во всем предыдущем на отображение g было наложено лишь одно условие: отображение g каждого симплекса T^r в $V_{n,k}$ должно определять элемент $-d^r(T^r)$ группы $\pi^r(V_{n,k})$. Сейчас нам удобно считать, что отображение g переводит каждый симплекс $T^r \in B^{r+2}$ в сферу $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1})$. Через β обозначим степень отображения g симплекса T_1^r на сферу $S^r(e_1, \ldots, e_{k-1})$. При $r = 2$ для доказательства соотношения $z_3 \in \tilde{Y}^2 \smile D^2$ нам нужно установить, что элемент $z_3(T^4)$ группы $\pi^3(V_{n,n-2})$ равен $\tilde{\alpha}\beta\nu$, где ν — образующий элемент группы $\pi^2(V_{n,n-2})$, а умножение определено в соответствии с формулировкой теоремы п. 15:3. При $r > 2$ для доказательства соотношения $z_3 \in Y^2 \smile D^r$ нам нужно установить, что элемент $z_3(T^{r+2})$ группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$ равен $\alpha\beta\nu$, где ν — образующий элемент группы $\pi^r(V_{n,k})$. Иначе говоря, считая, что и при $r > 2$ произведение групп J_0 и $\pi^r(V_{n,k})$ в группе $\pi^{r+1}(V_{n,k})$ определено так, что произведение образующих элементов двух первых групп равно элементу σ, мы должны показать, что $z_3(T^{r+2}) = \tilde{\alpha}\beta\nu$, где ν — образующий элемент группы $\pi^r(V_{n,k})$, $r \geqslant 2$. Итак, перейдем к вычислению элемента $z_3(T^{r+2})$.

(д). Пусть Φ — такой круг, лежащий в барицентрической звезде $Б(T_1^r)$, что гомеоморфное $(r+2)$-мерному шару множество

$$Ш^{r+2} = \bigcup_{a \in \Phi} \chi_a(T_1^r) = \bigcup_{a \in \Phi} (T_1^r)_a$$

содержит M_3. Такой круг, очевидно, существует, если число ε достаточно мало. Если мы введем на $Ш^{r+2}$ параллелизующую систему $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x), v_{n-1}(x), v_n(x)$ (первые $n-2$ векторов которой совпадают с векторами системы $\mathfrak{S}_n^0$), то для каждой точки $x \in Ш^{r+2} \setminus M_3$ мы будем иметь

$$u_{n-1}(x) = v_{n-1}(x) \cos \alpha(x) + v_n(x) \sin \alpha(x).$$

Покажем, что на $Ш^{r+2}$ можно ввести такую параллелизующую систему $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x), v_{n-1}(x), v_n(x)$, что угол $\alpha(x)$ будет постоянным на каждом симплексе вида $\chi_a(T_1^r)$, $a \in \dot{\Phi}$.

Действительно, введем на $Ш^{r+2}$ какую-либо параллелизующую систему вида $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x), w_{n-1}(x), w_n(x)$. Обозначим, далее, через Φ_1 круг, образованный точками вида $\chi_a(b)$, $a \in \Phi$, где b — фиксированная точка симплекса T_1^r. Тогда множество

$$\left(\bigcup_{a \in \dot{\Phi}} \chi_a(T_1^r)\right) \cup \Phi_1 = N$$

можно стянуть по себе в одну точку; пусть e_t — соответствующая деформация тождественного отображения e_0 множества N на себя в отображение его в одну точку. Положим

$$v_{n-1}(x) = w_{n-1}(x), \quad v_n(x) = w_n(x), \quad x \in \Phi_1$$

и определим векторы $v_{n-1}(x)$ и $v_n(x)$ на множестве $\chi_a(T_1^r)$, $a \in \dot{\Phi}$, как такие векторы, которые имеют те же компоненты в базисе $u_{n-1}(x)$, $u_n(x)$, что и векторы $v_{n-1}(y)$ и $v_n(y)$ в базисе $u_{n-1}(y)$, $u_n(y)$, где $y = \chi_a(b)$. Мы можем положить

$$v_{n-1}(x) = w_{n-1}(x) \cos \varphi(x) + w_n(x) \sin \varphi(x), \tag{15.5}$$

так что определится отображение φ множества N в окружность S^1 на которой откладываются величины углов $\varphi(x)$. Так как отображение $\varphi = \varphi e_0$ гомотопно отображению φe_1 всего множества N в одну точку окружности S^1, то оно может быть продолжено на все множество N. Обозначая это продолженное отображение снова через φ, мы получим по формуле (15.5) искомую параллелизующую систему на $Ш^{r+2}$.

После введения на $Ш^{r+2}$ указанной параллелизующей системы мы можем определить угол $\alpha(a)$, $a \in \dot{\Phi}$, положив

$$\alpha(a) = \alpha(x), \quad x \in \chi_a(T_1^r), \quad a \in \dot{\Phi}.$$

Ориентируем Φ так, чтобы индекс пересечения его несущей плоскости с несущей плоскостью симплекса T_1^r был равен $+1$, а $\dot{\Phi}$ ориентируем как границу круга Φ. Легко видеть тогда, что отображение $a \to \alpha(a)$ ориентированной окружности $\dot{\Phi}$ на окружность S^1, на которой откладываются величины углов, имеет степень $\tilde{\alpha}$ [см. (г)]. Действительно, вместо указанного отображения окружности $\dot{\Phi}$ на S^1, можно рассмотреть отображение $x \to \alpha(x)$ границы круга Φ_1 на S^1. Окружность же $\dot{\Phi}_1$ может быть деформацией, происходящей в $T^{r+2} \setminus L^r$, переведена в границу $\dot{T}^2$ треугольника T^2.

(е). Построенная в (д) параллелизующая система вместе с полем $\mathfrak{S}_k$, имеющим особенность M_3, определяет отображение Π множества $Ш^{r+2} \setminus M_3$ и, в частности, границы элемента $Ш^{r+2}$ в многообразие $V_{n,k}$. Пусть $\overset{*}{S}{}^{r+1}$ — сфера размерности $r+1$, получающаяся из эвклидова $(r+1)$-мерного пространства $\overset{*}{R}{}^{r+1}$ присоединением одной точки $\overset{*}{q}$. Мы построим некоторое гомеоморфное отображение f сферы $\overset{*}{S}{}^{r+1}$ на границу элемента $Ш^{r+2}$, так что отображение Πf сферы $\overset{*}{S}{}^{r+1}$ (надлежащим образом ориентированной) в $V_{n,k}$ определит элемент $z_3(T^{r+2})$ группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$. Вместе с тем отображение Πf будет иметь весьма обозримый вид, так что вычисление элемента $z_3(T^{r+2})$ можно будет без труда провести.

Пусть $\overset{*}{R}{}^r$ — эвклидово r-мерное пространство с ортонормальным базисом $f_1, \ldots, f_r$, а $x^1, \ldots, x^r$ — координаты, соответствующие этому базису. Пусть, далее, $\overset{*}{S}{}^r$ — сфера, получающаяся из $\overset{*}{R}{}^r$ присоединением одной точки $\overset{*}{q}$, J — отрезок $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$, а $I \subset J$ — отрезок $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Пусть, наконец, ψ — такое гомеоморфное отображение пополненного пространства $\overset{*}{S}{}^r$ на границу топологического произведения $J \times T_1^r$, которое переводит некоторый симплекс $\overset{*}{T}{}^r$, лежащий в полупространстве $\overset{*}{R}{}^r_+$, определенном условием $x^r \geqslant 0$, аффинно на $1 \times T_1^r$ и обладает свойством симметрии. Именно, если

$$c = (x^1, \ldots, x^{r-1}, x^r) \text{ и } d = (x^1, \ldots, x^{r-1}, -x^r)$$

— симметричные относительно плоскости $x^r = 0$ точки пространства $\overset{*}{R}{}^r$, то для точек $\psi(c) = (t, a)$ и $\psi(d) = (t', a')$ должно быть $t + t' = 0$, $a = a'$. Отображение ψ, которое без труда может быть построено, переводит полупространство $x^r \geqslant 0$ на множество $1 \times T_1^r \cup I \times \dot{T}_1^r \subset \subset I \times T_1^r$, а плоскость $x^r = 0$, ограничивающую это полупространство,— в $0 \times \dot{T}_1^r$.

Введем в круге Φ полярные координаты ρ, ϑ, причем будем считать, что ρ изменяется от нуля до единицы, а возрастанию угла ϑ

соответствует обход окружности $\dot{\Phi}$ в положительном направлении. В соответствии с этим введем в элементе $Ш^{r+2}$ цилиндрические координаты ρ, ϑ, x, где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $x \in T_1^r$. Именно, точке $\chi_a(x)$, $a \in T_1^r$ отнесем координаты ρ, ϑ, x, где ρ и ϑ — полярные координаты точки $a \in \Phi$. Через ξ_α обозначим гомеоморфное отображение элемента $Ш^{r+2}$ на себя, переводящее точку с координатами ρ, ϑ, x в точку с координатами ρ, $\vartheta + \alpha$, x. Отрезок, образованный точками $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $\vartheta = 0$, будем считать совпадающим с I (см. выше). В силу координат ρ, ϑ, x, введенных в $Ш^{r+2}$, будем рассматривать этот элемент как топологическое произведение $\Phi \times T_1^r \supset I \times T_1^r$. Именно, точку $(\rho, \vartheta, x) \in Ш^{r+2}$ будем отождествлять с точкой $(a, x) \in \Phi \times T_1^r$, где $a = (\rho, \vartheta)$, $x \in T_1^r$.

Пусть $\overset{*}{R}{}^{r+1} \supset \overset{*}{R}{}^r$ — эвклидово $(r+1)$-мерное пространство с ортонормальным базисом $f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}$, а η_α — ортогональное преобразование этого пространства, определенное формулами

$$\eta_\alpha(f_i) = f_i, \quad i = 1, \ldots, r-1,$$
$$\eta_\alpha(f_r) = f_r \cos\alpha + f_{r+1} \sin\alpha,$$
$$\eta_\alpha(f_{r+1}) = -f_r \sin\alpha + f_{r+1} \cos\alpha.$$

Обозначим, наконец, через f отображение сферы $\overset{*}{S}{}^{r+1}$, получаемой из $\overset{*}{R}{}^{r+1}$ при помощи пополнения одной точкой $\overset{*}{q}$, на границу элемента $Ш^{r+2}$, совпадающее на полупространстве $\eta_\alpha(\overset{*}{R}{}^r_+)$ с отображением $\xi_\alpha \psi \eta_\alpha^{-1}$. Отображение f гомеоморфно. Оно переводит множество

$$\overset{*}{P}{}^{r+1} = \bigcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \eta_\alpha(\overset{*}{T}{}^r)$$

на $\dot{\Phi} \times T_1^r \subset Ш^{r+2}$, а $\overset{*}{R}{}^{r+1} \setminus \overset{*}{P}{}^{r+1}$ — на $\Phi \times \dot{T}_1^r$. Если элемент $Ш^{r+2}$ ориентирован так же, как симплекс T^{r+2}, то, для того чтобы отображение f имело степень $+1$, следует ориентировать пространство $\overset{*}{R}{}^{r+1}$ в соответствии с базисом $f_{r+1}, f_1, f_2, \ldots, f_r$, т. е. при $r = 2$ — в соответствии с базисом f_1, f_2, f_3; при $r > 2$ пространство $\overset{*}{R}{}^{r+1}$ можно рассматривать неориентированным.

Выясним теперь структуру отображения Πf. На симплексе $\chi_a(T_1^r)$, $a \in \dot{\Phi}$ система $u_1(x), \ldots, u_{n-2}(x)$, $v_{n-1}(x)$, $v_n(x)$ получается из $\mathfrak{S}_n^0$ поворотом двух последних векторов на угол $\alpha(a)$. Поэтому отображение Π на этом симплексе имеет вид $\varphi_{\alpha(a)}\, g \chi_a^{-1}$, где φ_α — поворот пространства R^n, в котором определено многообразие $V_{n,k}$, на угол α, определяемый формулами

$$\varphi_\alpha(e_i) = e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$\varphi_\alpha(e_{n-1}) = e_{n-1}\cos\alpha + e_n \sin\alpha,$$
$$\varphi_\alpha(e_n) = -e_{n-1}\sin\alpha + e_n\cos\alpha,$$

и тем же символом φ_α обозначено соответствующее повороту φ_α отображение многообразия $V_{n,k}$ на себя. Иначе говоря, если c — точка окружности Φ, имеющая координаты $\rho = 1$, $\vartheta = 0$, а $\rho = 1$, $\vartheta = \alpha$ — координаты точки $a \in \Phi$, то отображение Π на симплексе $\chi_a(T_1^r) = a \times T_1^r$ имеет вид $\varphi_{\alpha(a)}(g\chi_c^{-1})\xi_\alpha^{-1}$. Из этого следует, что отображение Πf имеет на симплексе $\eta_\alpha(\overset{*}{T}{}^r)$ вид $\varphi_{\alpha(a)}(g\chi_c^{-1})\psi\eta_\alpha^{-1}$, или, иначе, вид $\varphi_{\alpha(a)}g'\eta_\alpha^{-1}$, где $g' = g\chi_c^{-1}\psi$. Отображение g' переводит симплекс $\overset{*}{T}{}^r = \eta_0(\overset{*}{T}{}^r)$ на сферу $S^r = S^r(e_1, \ldots, e_{k-1}) \subset V_{n,k}$ и имеет степень $-d$.

Мы можем предположить без ограничения общности, что g' гомотетично отображает $|\beta|$ шаров $E_1, \ldots, E_{|\beta|}$, лежащих в $\overset{*}{T}{}^r$, на некоторый шар $\Sigma^r \subset S^r$ с центром в точке $q = \{e_1, \ldots, e_k\} \in S^r$ (так что поворот φ_α отображает шар Σ^r на себя), а множество $\overset{*}{T}{}^r \diagdown (E_1 \cup \ldots \cup E_{|\beta|})$ отображает в $S^r \diagdown \Sigma^r$. Тогда полным прообразом шара Σ^r при отображении Πf будут $|\beta|$ трубок

$$W_i = \bigcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \eta_\alpha(E_i), \qquad i = 1, \ldots, |\beta|,$$

а отображение $\omega_1(\Pi f)$ будет трубчатым, где ω_1 — отображение, определенное в п. 13:6. Окружности, являющиеся центральными линиями этих трубок (т. е. составляющие прообраз центра шара Σ^r), обозначим через $L_1, \ldots, L_{|\beta|}$. Если $r_1, \ldots, r_r$ — радиусы шара Σ^r, попарно ортогональные и задающие его (некоторую) ориентацию, то обозначим через $r_1(e), \ldots, r_r(e)$ векторные поля на линии $L = L_1 \cup \ldots \cup L_{|\beta|}$, соответствующие трубчатому отображению $\omega_1(\Pi f)$, а через $u_1(e), \ldots, u_r(e)$ — векторные поля на этой линии, соответствующие трубчатому отображению, имеющему на симплексе $\eta_\alpha(\overset{*}{T}{}^r)$ вид $q'\eta_\alpha^{-1}$ (эти поля не меняются при поворотах η_α и потому соответствующее трубчатое отображение гомотопно нулю). Тогда мы имеем (при надлежащем выборе векторов $r_1, \ldots, r_r$)

$$r_i(e) = u_i(e), \quad i = 1, \ldots, r-2,$$
$$r_{r-1}(e) = u_{r-1}(e)\cos\alpha(a) - u_r(e)\sin\alpha(a),$$
$$r_r(e) = u_{r-1}(e)\sin\alpha(a) + u_r(e)\cos\alpha(a).$$

Таким образом, матрица перехода от репера $u_1(e), \ldots, u_r(e)$ к реперу $r_1(e), \ldots, r_r(e)$; $e \in L_i$, $i = 1, \ldots, |\beta|$ имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc:cc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \cos\alpha(a) & -\sin\alpha(a) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \sin\alpha(a) & \cos\alpha(a) \end{array} \right\|$$

Иначе говоря, степень соответствующего отображения (см. п. 13:6) окружности L_i на $V_{2,2} \subset V_{r,r}$ равна $\pm\tilde{\alpha}$, в зависимости от знака числа β. Поэтому каждая трубка $W_1, \ldots, W_{|\beta|}$ определяет элемент $\pm\tilde{\alpha}(1\cdot\nu)$ группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$, а так как этих трубок имеется $|\beta|$ штук, то элемент $z_3(T^{r+2})$ группы $\pi^{r+1}(V_{n,k})$ равен $\pm\tilde{\alpha}\beta\nu$ (заметим, что при $r=2$ трубки $W_1, \ldots, W_{|\beta|}$ друг с другом не зацеплены). При $r>2$ это дает нам искомый результат. При $r=2$ следует еще убедиться, учитывая ориентации, что в установленной формуле $z_3(T^{r+2}) = \pm\tilde{\alpha}\beta\nu$ имеет место знак $-$.

Действительно, ограничиваясь случаем $\beta=1$ и ориентировав $\mathring{R}^3$ в соответствии с базисом f_1, f_2, f_3, а $\mathring{T}^2 \subset \mathring{R}^2_+$ — в соответствии с базисом f_1, f_2, мы найдем, что окружность L определяется уравнениями: $x^1 = \text{const}$, $x^2 = R\cos\alpha$, $x^3 = R\sin\alpha$ и что круг K^2, ограниченный этой окружностью, ориентирован в соответствии с базисом f_3, f_2. Вектор $r_1(e)$ поворачивается при обходе точкой e окружности L в положительном направлении на угол $2\pi\tilde{\alpha}$. Поэтому цикл z^1, описанный концом этого вектора, пересекает круг K^2 (в направлении, указываемом вектором f_1) $\tilde{\alpha}$ раз, т. е.

$$\chi(K^2, z^1) = \mathfrak{v}(L, z^1) = -\tilde{\alpha}.$$

Таким образом, хопфовское число отображения Πf сферы $\mathring{S}^3$ на S^2 равно в этом случае $-\tilde{\alpha}$.

Итак, учитывая соотношение $d^2(T^2) = -\beta$, мы заключаем, что формула $z_3 \in \tilde{Y}^2 \smile D^2$ справедлива. Таким образом, формула (15.4) и теорема п. 15:3 доказаны.

Замечание. Группа $\pi^{r+1}(V_{n,k})$ (вычисленная так же, как и $\pi^{r+2}(V_{n,k})$ в [27]) для некоторых значений n и k оказывается тривиальной. В этом случае второе препятствие равно нулю, т. е. поле порядка k возможно построить (при условии $Y^{r+1}=0$) на всем остове B^{r+2}. В частности, группа $\pi^2(V_{n,n-1})$ тривиальна для всех значений n. Таким образом, в случае $r=1$ (не рассмотренном выше) второе препятствие всегда тривиально. Иначе говоря, если параллелизующую систему можно построить на остове B^2, то ее можно построить и на B^3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
2. П. С. Александров. Комбинаторная топология, Гостехиздат, М., — Л., 1947.
3. М. Глезерман и Л. Понтрягин. Пересечения в многообразиях. Успехи матем. наук, 1947, **2**, № 1, 58—155.
4. Дж. Александер. Кольцо связности абстрактного пространства. Успехи матем. наук, 1947, **2**, № 1, 156—165.
5. N. Steenrod. Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. Math., 1947, **48**, N 2, 290—320.
6. L. Pontrjagin. Produncts in complexes. Матем. сборник, 1941, **9 (51)**, N 2, 321—330.
7. H. Hopf. Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre. Comm. Math. Helv., 1932, **5**.
8. H. Whithey. The maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J., 1937, **3**.
9. W. Hurewicz. Beiträge zur Topologie der Deformationen. Proc. Kön. Akad. Wet. Amsterdam, 1935—1936, **38**, 112 и 521; **39**, 117 и 215.
10. Л. С. Понтрягин. Об одной связи между гомологиями и гомотопиями. Изв. АН СССР, 1949, **13**, 193—200.
11. E. Stiefel. Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv., 1936, **8**, 305.
12. Л. С. Понтрягин. Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. 1. Докл. АН СССР, 1938, **19**, № 3, 147—149.
13. L. Pontrjagin. A. classification of mappings of the threedimensional complex into the two-dimensional sphere. Матем. сборник, 1941, **9 (51)**, № 2, 331—363.
14. М. М. Постников. Классификация непрерывных отображений $(n+1)$-мерного комплекса в связное топологическое пространство, асферическое в размерностях, меньших n. Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 6, 1027—1028.
15. В. Болтянский. Векторные поля на многообразии. Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 3, 305—307.
16. В. Болтянский. Секущие поверхности косых произведений. Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 1, 17—20.
17. S. Eilenberg, N. E. Steenrod. Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, 1952.
18. Serre J. P. Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. Math., 1951, **54** 425—505.
19. М. М. Постников. Об одной связи между гомологиями и гомотопиями. Успехи матем. наук, 1950, **5**, № 4, 140 (резюме доклада на Московском математич. общ-ве).
20. Л. С. Понтрягин. Метод гладких отображений в теории гомотопий. Труды математического института им. В. А. Стеклова, XLV, 1955.
21. H. Whitney. Differentiable manifolds. Ann. Math., 1936, **37**, 645—680.
22. S. S. Cairns. On the triangulation of regular loci. Ann. Math. 1934, **35**, № 3, 579—587.
23. J. H. C. Whitehead. On C^1-complexes. Ann. Math., 1940, **41**, N 4, 809—824.
24. R. Thom. Classes caractéristiques et i-carrés. C. R. Acad. Sci. Paris, 1950, **230**, N 5, 427—429.
25. Wu Wen-tsün. Classes caracteristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris, 1950, **230**, N 6, 508—511.
26. H. Hopt. Über die Abbildungen der drei-dimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 1931, **104**.
27. J. H. C. Whitehead. On the groups $\pi_r\,(V_{m,\,n})$ and sphere bundles, Proc. London Math. Soc., 1944, **48**, 243—291.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
7	6 св.	a	a_r
11	6 св.	имеющие	имеющее
14	2 св.	R_1^n	R^n
14	15 сн.	$a_0 - b'$ и $a_0 - b''$	$b' - a_0$ и $b'' - a_0$
20	9 св.	$\widetilde{F}_i$	с $\widetilde{F}_i$
26	1 св.	τ	τ^r
33	2 св.	приложение	предложение
36	5 сн.	$r > 0$	при $r > 0$
43	13 св.	$2:3$	$3:2$
43	20 сн.	$\{P, z^n, f_1\}$ и $\{Q, (f_1)_* z^n, e\}$	(P, z^n, f_1) и $(Q (f_1)_* z^n, e)$
43	17 сн.	(f_1)	$(f_1)_*$
46	3 сн.	a^p	a_p
52	16 сн.	не пересекающихся с	которые не содержат
55	13 сн.	a^{r-1}	a_{r-1}
55	12 сн.	T^{r-1}	T_{r-1}
76	20 сн.	переменного	примененного
81	10 св.	$\bigcup$	$\smile$
95	12 сн.	$a(z^r \smile z^r) = (az^r) \smile_{i+1} (az)$	$a(z^r \smile_i z^r) = (az^r) \smile_{i+1} (az^r)$
101	2 сн.	$0, \left[\frac{1}{2}\right.$	$\left[0, \frac{1}{2}\right.$
106	6 св.	q	g
129	6 сн.	K	K^n
159	9 сн.	$r(e_t)$	$r_1(e_t)$

В. Г. Болтянский