

Julius Ratzersdorfer

Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken

Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken

Von

Prof. Dr. Ing. **Julius Ratzersdorfer**

Mit 151 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Wien GmbH 1936

ISBN 978-3-662-24075-5 ISBN 978-3-662-26187-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-26187-3

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten

Copyright 1936 by Springer-Verlag Wien

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Vienna 1936.

Vorwort.

Das fundamentale Problem der elastischen Stabilität ist die Bestimmung der Knickfestigkeit des geraden Stabes mit konstantem Querschnitt. Die Lösung dieser Aufgabe wurde schon im Jahre 1744, lange bevor es eine vollständige Elastizitätstheorie gab, durch EULER geleistet, der den kritischen Wert der Last feststellte und auch das Verhalten des Stabes bei Überschreiten dieser Last untersuchte. Die technische Literatur übernahm, in Einklang mit dem praktischen Bedürfnis, hiervon nur die Stabilitätsgrenze, die als EULERSche Knickformel bezeichnet wurde. Zur Klarlegung des Problems sind aber genauere Berechnungen unerläßlich, und ich habe mich im ersten Abschnitt mit diesen Fragen ausführlich beschäftigt. Auch auf Knickversuche mußte hier eingegangen werden. Im Bereich der Gültigkeit des HOOKESchen Gesetzes dient das Experiment als eine wertvolle Kontrolle; außerhalb dieses Gebietes wird eine theoretische Formel nur unter gewissen Annahmen mit Hilfe der Arbeitslinie des Materials gewonnen und Versuche sind eine wesentliche Grundlage der praktischen Berechnung.

Im zweiten Abschnitt untersuche ich axial gedrückte Stäbe mit gleichzeitiger Biegebeanspruchung, d. h. vom Standpunkt der Analysis aus gesehen, Belastungsfälle, die ein nichthomogenes Randwertproblem bilden. Bei vollständiger Elastizität liegen Spannungsaufgaben vor, aber mit wenigen Einschränkungen lassen sich hier wieder die maßgebenden Knicklasten in einfacher Weise auffinden. Für Stäbe aus einem Material, das nicht unbeschränkt dem HOOKESchen Gesetz folgt, wird die Verformung und die kritische Traglast auf Grund einer für Axialkräfte modifizierten Biegetheorie unter Heranziehen der Arbeitslinie des Baustoffes bestimmt.

Der dritte Abschnitt behandelt die Knickfestigkeit von Stäben mit stetig veränderlichem Querschnitt und stetig veränderlicher Kraftwirkung. Die exakten Knicklasten sind durch Lösung der Differentialgleichung der elastischen Linie hergeleitet; angenäherte Resultate werden mit sukzessiven Approximationen oder mit einem Verfahren aus der Integralgleichung des Problems ermittelt.

Bei der Berechnung der Knicklast von kontinuierlich gelagerten Stäben wird im vierten Abschnitt von der in der Literatur üblichen Annahme ausgegangen, daß zwischen Bettungsdruck und Ausbiegung ein linearer Zusammenhang besteht. Ferner wird der Weg gezeigt, wie man auch einer strengeren Formulierung näherungsweise entsprechen kann.

Der umfangreiche fünfte Abschnitt enthält Untersuchungen über die Knickfestigkeit von idealen Fachwerken, von Fachwerkträgerträgern mit biegesteifen Gurten und von Rahmentragwerken. Auch der Gleichgewichtszustand eines Fachwerkes mit reibungslosen Gelenken kann instabil werden, und zwar unter besonders leicht realisierbaren und in der Technik oft realisierten Umständen. Dieser reinen Fachwerkknickung, bei der nur Längenänderungen der Stäbe in Betracht gezogen werden, ist die reine Rahmenknickung gegenübergestellt, bei der die einzelnen Stäbe biegesteif, aber keiner Dehnung fähig sind. Die Zusammenfassung beider Ansätze ergibt eine vollständige Theorie der Stabwerkknickung, die für jedes ebene Stabwerk mit steifen oder gelenkigen Knoten anwendbar ist. Nach einem Absatz über räumliche Systeme werden noch einige weitere Fragen der Stabilitätstheorie erörtert, die mit unseren Problemen in Verbindung stehen.

Der sechste Abschnitt behandelt die Knickfestigkeit durchlaufender gerader Stäbe und das Problem der Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken. Diese Aufgaben, die im allgemeinen nach der Theorie der reinen Rahmenknickung vom fünften Abschnitt zu berechnen sind, habe ich wegen der vielseitigen Verwendung gesondert untersucht.

Im letzten Abschnitt wird anhangsweise die Knickbedingung von Bogenträgern mit Kreis- und Parabelform bei unveränderlichem Querschnitt bestimmt. Die ausführliche Behandlung hätte die verschiedenartigen Fragen der früheren Abschnitte nochmals neu anzuschneiden.

Hiermit sind Stabilitätsprobleme dargestellt, die in der praktischen Baustatik eine wichtige Rolle spielen. Eine Vollständigkeit ließ sich natürlich nicht in dem Sinne erreichen, daß die angeführten Beispiele jedem möglichen Fall unmittelbar gerecht werden. Die gegebenen Unterlagen gestatten jedoch, alle bei Stäben und Stabwerken auftretenden Knickprobleme ohne grundsätzliche Schwierigkeit zwangsläufig zu erledigen.

Mein verehrter Freund, Herr Professor Dr. Dr. h. c. R. von MISES in Istanbul hat durch sein andauerndes Interesse meine Arbeit weitgehend gefördert. Für die freundliche Unterstützung danke ich ihm auch an dieser Stelle aufs beste.

Wien, im Juni 1936.

J. Ratzersdorfer.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt.

Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit konstantem Querschnitt.

§ 1. Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab: Der EULERSche Grundfall	1
1. Bestimmung des kritischen Wertes der Last	1
2. Eine zweite Näherung. Die Ausbiegung des Stabendes	3
3. Die genauere Behandlung des Problems. Aufstellen der Gleichungen	5
4. Der Zusammenhang zwischen Druckkraft und Ausbiegung des Stabendes. Die Form der Elastica	8
5. Berücksichtigen der Zusammendrückung des Stabes	12
6. Die Stabilität der Gleichgewichtslagen	14
§ 2. Der gerade Stab bei verschiedenen Randbedingungen	22
7. Die weiteren EULERSchen Knickfälle	22
8. Der elastisch gestützte Stab	26
9. Der in Schneiden gelagerte Stab	28
§ 3. Der gerade Stab unter verschiedenen Belastungen.....	31
10. Das Knicken unter Temperaturspannungen	31
11. Der durch zwei zentrische Kräfte beanspruchte Stab	33
12. Der durch eine zentrische Kraft und ein Drillingsmoment be- anspruchte Stab	34
§ 4. Weitere Untersuchungen	37
13. Überlegungen zur BERNOULLI-EULERSchen Biegegleichung..	37
14. Vorläufige Bemerkungen zum KIRCHHOFFSchen Satz über die „Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtes“	39
§ 5. Der Stab aus einem Material, das nicht unbeschränkt dem HOOKE- schen Gesetz folgt	40
15. Aufstellen der Biegetheorie	40
16. Bestimmung des kritischen Wertes der Last. Der Knickmodul	44
17. Die Ausbiegung des freien Endes für den an einem Ende ein- gespannten Stab	48
§ 6. Versuche und empirische Formeln. Empirische Bestimmung des Knickmoduls. Der Sicherheitsgrad	52
18. Versuche und empirische Formeln	52
19. Empirische Bestimmung des Knickmoduls. Folgerungen.....	58
20. Der Sicherheitsgrad	60

Zweiter Abschnitt.

Seite

Axial gedrückte Stäbe bei gleichzeitiger Biegebeanspruchung.

§ 7. Der exzentrisch gedrückte, an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab	62
21. Die Näherungstheorie	62
22. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung des Stabendes.....	63
23. Die genauere Berechnung für die Ausbiegung des Stabendes.	65
§ 8. Der axial belastete, gelenkig gelagerte Stab mit einer Einzellast in der Mitte senkrecht zur Stabachse.....	66
24. Die Näherungstheorie	66
25. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung der Stabmitte.....	69
26. Die genauere Berechnung der Ausbiegung in der Stabmitte...	71
§ 9. Der exzentrisch gedrückte, sehr schwach gebogene Stab mit drehbar gelagerten Enden	74
27. Die Näherungstheorie	74
28. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung der Stabmitte. Versuche des Deutschen Stahlbauverbandes	76
§ 10. Über die Berechnung der Knicklast beim Stab mit Störungen....	78
29. Der querbelastete zentrisch gedrückte Stab.....	78
30. Der exzentrisch gedrückte Stab	81
§ 11. Der exzentrisch gedrückte gerade Stab, wenn das HOOKEsche Gesetz nicht unbeschränkt gilt.....	83
31. Die Ausbiegung des freien Endes für den exzentrisch gedrückten, an einem Ende eingespannten Stab.....	83
32. Rechnungsverfahren für Stäbe aus Konstruktionsstahl. Versuche	86

Dritter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit stetig veränderlichem Querschnitt und stetig veränderlicher Druckkraft.

§ 12. Berechnung aus der Differentialgleichung der elastischen Linie... 91	91
33. Die Querschnittsträgheitsmomente des Stabes ändern sich stetig nach gegebenen Gesetzen; die Druckkraft ist konstant.	91
34. Fortsetzung von Pkt. 33: Praktische Aufgaben.....	95
35. Ein weiteres Beispiel.....	100
36. Der günstigste Querschnittsverlauf	103
37. Die Druckkraft ändert sich nach einem Potenzgesetz; der Querschnitt ist konstant	107
38. Weitere Beispiele	109
39. Die Querschnittsträgheitsmomente und die Druckkraft ändern sich nach Potenzgesetzen	114
40. Schlußbetrachtung	117
§ 13. Eine Näherungsberechnung aus der Integralgleichung des Problems	120
41. Die Integralgleichung des Problems	120
42. Die Lösung nach dem Verfahren von RITZ-TIMOSHENKO	123
43. Beispiele	125

	Seite
§ 14. Das Verfahren der Näherungsfolgen	130
44. Grundlagen des Verfahrens	130
45. Beispiele	134

Vierter Abschnitt.

Die Stabilität des geraden Stabes bei kontinuierlicher Lagerung.

§ 15. Der an den Enden freie, auf Druck beanspruchte Stab mit konstantem Querschnitt	141
46. Die Differentialgleichung des Problems und ihr Integral.....	141
47. Die Knickgleichung für den an den Enden freien Stab mit konstantem Querschnitt	143
48. Diskussion der Knickgleichungen	145
§ 16. Der Stab mit konstantem Querschnitt unter anderen Randbedingungen	147
49. Die Enden des Stabes sind gelenkig festgehalten	147
50. Die Enden des Stabes sind eingespannt.....	150
51. Der teilweise elastisch gestützte Stab	152
§ 17. Ergänzende Untersuchungen	155
52. Stabquerschnitt und Längskraft sind stetig veränderlich....	155
53. Zur Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken.....	157
54. Über den Zusammenhang zwischen Pressung und Einsenkung.	160

Fünfter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit von Stabwerken.

§ 18. Die reine Fachwerkknickung	162
55. Die Knickgleichung bei ebenen oder räumlichen Fachwerken.	162
56. Begriff der Stabilität und Bedeutung der Knickgleichung...	165
57. Kriterien für die Stabilität.	168
58. Das einfachste ebene Fachwerk	169
59. Das einfachste räumliche Fachwerk.....	173
60. Ein statisch unbestimmtes ebenes System	176
61. Ein statisch bestimmter ebener Fachwerkträger.....	178
62. Der statisch bestimmte Fachwerkträger. Aufstellen der Gleichungen	182
63. Fortsetzung von Pkt. 62: Diskussion der Differenzgleichung.	184
§ 19. Die reine Rahmenknickung ebener Systeme	189
64. Die Hauptgleichungen des ebenen Problems	189
65. Die reine Rahmenknickung ebener Systeme. Allgemeiner Ansatz	191
66. Ein wichtiger Sonderfall: Der Polygonrahmen.....	194
67. Der regelmäßige Ring mit radialer Belastung.....	197
68. Der Rechtwinkelrahmen	199
69. Der Rahmenstab (Vierendeelträger, Stockwerkrahmen).....	201
§ 20. Die allgemeine Stabwerkknickung ebener Systeme.....	205
70. Allgemeine Ansätze	205
71. Bedeutung der Knickgleichung	206

	Seite
§ 21. Der Rahmenstab. Ein Beispiel zur allgemeinen Stabwerkknickung ebener Systeme	210
72. Der Rahmenstab. Aufstellen der Gleichungen.....	210
73. Fortsetzung von Pkt. 72: Diskussion der Differenzgleichung	214
74. Rechnungsvorgang und Versuche	218
75. Über den Querverband und seine Anschlüsse	223
§ 22. Statisch unbestimmte Gitterträger. Beispiele zur allgemeinen Stabwerkknickung ebener Systeme	226
76. Der Gitterträger mit biegesteifen Gurten und gelenkig eingehängten Diagonalstäben. Aufstellen der Gleichungen.....	226
77. Fortsetzung von Pkt. 76: Diskussion von Sonderfällen.....	230
78. Der Gitterträger mit biegesteifen Gurten und gelenkig eingehängten Diagonal- und Querstäben. Aufstellen der Gleichungen	235
79. Fortsetzung von Pkt. 78: Diskussion von Sonderfällen.....	239
80. Rechnungsvorgang. Schlußbemerkung	241
§ 23. Probleme der Stabwerkknickung räumlicher Systeme.....	243
81. Ansätze, wenn keine Torsionsbeanspruchung der Stäbe vorhanden ist	243
82. Beispiele zum räumlichen Ausknicken.....	246
83. Ein räumliches Tragwerk: Der Gittermast	248
§ 24. Weitere Fragen der Stabilitätstheorie	253
84. Exzentrische Belastung, Anfangsbiegung.....	253
85. Bemerkungen zum KIRCHHOFFSchen Eindeutigkeitssatz.....	256
86. Spannkraftermittlung bei Fachwerkträgern unter Berücksichtigung der Formänderung	260
87. Ein besonderer Fall mit Anfangsbiegung	262

Sechster Abschnitt.

Die Knickfestigkeit des durchlaufenden geraden Stabes und das Problem der Seitensteifigkeit.

§ 25. Der durchlaufende gerade Stab; die Längskräfte haben stets die Richtung der unverformten Stabachse	265
88. Formulierung des Problems. Grundlagen aus der Biegetheorie.	265
89. Die Knickgleichung für den durchlaufenden Stab. Die Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken	267
90. Ein Satz über die Knickdeterminante	271
§ 26. Der durchlaufende gerade Stab; die Längskräfte haben die Richtung der Tangente an die Biegelinie	273
91. Aufstellen der Knickgleichung.....	273
92. Eine Umformung der Gleichungen.....	275
§ 27. Anwendungen und weitere Untersuchungen	279
93. Der symmetrisch ausgebildete, gelenkig gelagerte Stab mit drei Feldern	279
94. Der Stab mit zwei Öffnungen und der symmetrische Stab mit drei Öffnungen bei festen Stützen.....	280

	Seite
95. Der Stab mit beliebig vielen einfelderigen Öffnungen auf festen Stützen	284
96. Der Stab von gleichen Öffnungen mit festen Enden, konstanter Druckkraft bei gleichartiger elastischer Stützung	287
97. Fortsetzung von Pkt. 96: Zur Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken. Ergänzende Untersuchungen	292
98. Die Seitensteifigkeit eines ebenen Polygonrahmens	295
99. Zusatz. Über die Ausbiegung der Querrahmen von Brücken	299
100. Ein abwechselnd in zwei verschiedenen Ebenen gestützter Stab	301

Siebenter Abschnitt.

Die Stabilität von Bogenträgern in ihrer Ebene.

§ 28. Die Stabilität des Kreisbogens unter gleichmäßigem äußeren Druck	305
101. Der gleichmäßige äußere Druck bleibt normal zur verzerrten Mittellinie. Die Differentialgleichung des Problems und ihre Lösung	305
102. Fortsetzung von Pkt. 101: Der Kreisbogen unter verschiedenen Randbedingungen	308
103. Zusatz. Der gleichmäßige äußere Druck ist stets zum Mittelpunkt des Kreisbogens gerichtet	311
§ 29. Die Stabilität des flachen Parabelbogens bei gleichmäßig verteilter Belastung	314
104. Der flache Parabelbogen bei gleichmäßig verteilter senkrechter Belastung. Die Differentialgleichung des Problems und ihre Lösung	314
105. Fortsetzung von Pkt. 104: Der Parabelbogen unter verschiedenen Randbedingungen	318

Anhang.

Tabelle	321
-------------------	-----

Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit konstantem Querschnitt.

§ 1. Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab: Der Eulersche Grundfall.

1. Bestimmung des kritischen Wertes der Last.

Ein gerader Stab, der in seiner Achsrichtung mit der Kraft P gedrückt wird, befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn jeder Punkt eine Zusammendrückung von der Größe $P:FE$ und die zugehörige Querdehnung $P:FEm$ erfahren hat. Hierbei sind F die Querschnittsfläche des Stabes, E der YOUNGSche Elastizitätsmodul des Stabmaterials und m der POISSONSche Koeffizient. Ist der Stab kurz und die Kraft nicht groß, so ist das Gleichgewicht sicher stabil, so wie das eines gezogenen Stabes. Aber die Erfahrung lehrt, daß dieser Gleichgewichtszustand bei großen Kräften oder sehr schlanken Stäben gar nicht zu verwirklichen ist. Wie bei einem auf die Spitze gestellten Ei sind dann die Gleichgewichtsbedingungen zwar erfüllt, der Zustand ist jedoch labil und läßt sich nicht herstellen.

Wir betrachten einen prismatischen vertikalen gewichtlos gedachten Stab von der Länge l , der an seinem unteren Ende eingespannt, an seinem oberen durch eine vertikale Last P gedrückt ist (Abb. 1).

Ein Gleichgewichtszustand ist bestimmt jener, bei dem alle Teilchen gleichförmig gepreßt sind. Es soll aber untersucht werden, ob nicht auch ein Gleichgewichtszustand mit Ausbiegung möglich ist, wie es die Abb. 1 andeutet. Wir setzen den Stab als dünn voraus, so daß die Ausbiegungen als maßgebend in Rechnung zu stellen sind. Man sieht ohne weiteres, daß ein Biegeproblem vorliegt. Das Biegemoment im Querschnitt mit der Entfernung u vom Einspannort ist

$$M = P(\delta - v), \quad (1)$$

wenn v die Ausbiegung im Querschnitt u und δ die des Stabendes bezeichnen. Man setzt nun, unter der Annahme, daß die übliche Elastizitätstheorie gilt, das biegende Moment der Krümmung der verformten Stabachse proportional, also

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (2)$$

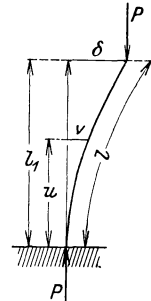


Abb. 1.

wobei ϱ der Krümmungsradius der Stabachse, I das Trägheitsmoment bezüglich der zur Biegeachse senkrechten Schwerachse des Querschnittes sind.¹ Schreiben wir für

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$

den Näherungswert v'' , was voraussetzt, daß v'^2 wegen seiner Kleinheit gegen Eins fortgelassen werden darf, so ist mit derselben Annäherung ein Bogenstück des Stabes gleich seiner Abszisse. Das Vorzeichen von ϱ , also auch von v'' , ist zunächst unbestimmt und muß so gewählt werden, daß es mit den schon getroffenen Festsetzungen in Einklang steht. Mit wachsendem u nimmt v' zu, da wir die u von der Einspannstelle an und die v in der Abbildung nach rechts positiv zählen, und es ist v'' positiv. Das Biegemoment vergrößert die Krümmung und ist durchwegs positiv, und somit ist v'' mit dem positiven Vorzeichen zu behalten. Die Verbindung der Gleichungen (1) und (2) ergibt daher

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} - P(\delta - v) = 0$$

und mit dem Parameter $\frac{P}{EI} = a^2$ lautet diese Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{du^2} - a^2(\delta - v) = 0. \quad (3)$$

Die Lösung

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au + \delta$$

stellt die *elastische Linie* oder *Elastica* dar, d. i. die Kurve, in die die Stabachse durch die Biegung übergeht. Da die Biegung in der Richtung eintritt, in der der Widerstand am kleinsten ist, bedeutet I das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes für irgendeine Biegeachse. Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 folgen aus den Randwerten, daß für $u=0$ sowohl $v=0$ als $v'=0$ sind. Diesen Bedingungen entsprechend ist $C_1=0$, $C_2=-\delta$, daher

$$v = \delta(1 - \cos au). \quad (4)$$

Für $u=l$ ist $v=\delta$, also

$$0 = \delta \cdot \cos \sqrt{\frac{P l^2}{EI}}. \quad (5)$$

Diese Gleichung sagt aus: Entweder ist $\delta=0$ für alle Werte von P , d. h. es besteht, da hiermit auch $v=0$ ist, ein Gleichgewicht ohne Ausbiegung, oder es ist $\cos \sqrt{\frac{P l^2}{EI}} = 0$ und

$$\sqrt{\frac{P l^2}{EI}} = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

¹ BERNOULLI-EULERSche Theorie. Siehe z. B. bei A. E. H. LOVE, deutsch von A. TIMPE: Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907, S. 447, oder bei A. FÖPPL: Vorlesungen über Technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, 8. Aufl., S. 120, 1920. — C. BACH: Elastizität und Festigkeit, 8. Aufl., S. 236, 1920.

d. h. wenn P einen der Werte

$$(2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}$$

erreicht, ist ein Gleichgewichtszustand mit Ausbiegung vorhanden.

Wie groß ist die Ausbiegung für diese besonderen Werte von P ? Aus der Gl. (5) erhalten wir für δ den Ausdruck $0:0$, die Ausbiegung ist sonach unbestimmt. Dieses eigenartige Resultat wollen wir uns graphisch veranschaulichen. Wir tragen in ein rechtwinkeliges Achsenkreuz als Abszissen die P -, als Ordinaten die δ -Werte auf. Für alle P , die kleiner als $P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}$

sind, ist $\delta = 0$; für $P = P_k$ ist δ unbestimmt, d. h. δ hat alle Werte zwischen Null und Unendlich. Unser Ergebnis wird somit in der zeichnerischen Darstellung durch die in der Abb. 2 stark ausgezogenen Linien gebildet, von denen die eine mit der Abszissenachse zusammenfällt, die andere hierzu senkrecht steht und ist zusammengefaßt: Solange die Belastung kleiner bleibt als der schon von EULER berechnete Wert

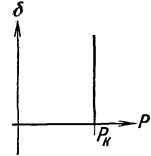


Abb. 2.

als der schon von EULER berechnete Wert

$$P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}, \quad (6)$$

wird der Stab keine Ausbiegung erleiden. Diesen kritischen Wert hat man die *Knicklast* oder EULERSche Last genannt.¹ (Eine genauere Definition geben wir in den folgenden Punkten.)

2. Eine zweite Näherung. Die Ausbiegung des Stabendes.

Bei Berechnung der Ausbiegung hat in Pkt. 1 der lineare Ansatz $\frac{1}{\varrho} = v''$ versagt, da er die Frage nach ihrer Größe ganz unbeantwortet läßt. Wir wollen daher diesen Ansatz aufgeben und auf elementarem Wege eine zweite Näherung ableiten.²

Wenn wir als unabhängige Variable nicht wie vorher die Abszisse u , sondern die Bogenlänge s einführen, so lautet der Ausdruck für die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{v''}{\sqrt{1 - v'^2}}$$

¹ L. EULER: De Curvis Elasticis. Additamentum I zum Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausanne und Genf, 1744. — Siehe OSTWALDS Klassiker der exacten Wissenschaften, Nr. 175. Leipzig, 1910. — J. L. LAGRANGE: Sur la figure des Colonnes. Miscellanea Taurinensia, Bd. 5. 1773. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials. Cambridge, 1886. Bd. 1, S. 62.

² R. v. MISES: Ausbiegung eines auf Knickung beanspruchten Stabes. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 4, S. 435/436. 1924. — FRANK-MISES-RIEMANN-WEBER: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 7. Aufl. 1925. S. 377.

mit $v' = \frac{dv}{ds}$. Daher ist die Differentialgleichung der *Biegelinie*

$$v'' - a^2(\delta - v) \cdot \sqrt{1 - v'^2} = 0, \quad a^2 = \frac{P}{EI}, \quad (1)$$

unter den Randbedingungen $v = 0, v' = 0$ für $s = 0$.

Vernachlässigt man v'^2 gegen Eins, so kommt man zum Ergebnis von Pkt. 1 zurück. Man erhält eine bessere Näherung, wenn man für die Wurzel $1 - \frac{1}{2}v'^2$ setzt. So entsteht die Gleichung

$$v'' - a^2(\delta - v) = -\frac{a^2}{2}(\delta - v)v'^2. \quad (2)$$

Auf der rechten Seite ist ein Glied von dritter Ordnung in v , und es wird daher genügen, wenn wir auf dieser Seite einen Näherungswert für v einführen. Ein solcher ist der lineare Ansatz von Pkt. 1

$$v = \delta(1 - \cos a_0 s), \quad a_0 = \frac{\pi}{2l}.$$

Eigentlich müßte $a_0 = a$, d. h. $P = P_k$ sein, damit unsere Differentialgleichung von Pkt. 1 erfüllt wird, während wir jetzt annehmen, daß a und a_0 voneinander etwas verschieden sind. Das Glied rechts in Gl. (2) wird also näherungsweise

$$-\delta^3 \frac{a_0^4}{2} \cdot \sin^2 a_0 s \cdot \cos a_0 s = -\delta^3 \frac{a_0^4}{8} \cdot (\cos a_0 s - \cos 3a_0 s)$$

und damit bekommt man die Differentialgleichung

$$v'' - a^2(\delta - v) = -\delta^3 \frac{a_0^4}{8} \cdot (\cos a_0 s - \cos 3a_0 s), \quad (3)$$

die sich durch den Ansatz

$$\delta - v = c \cdot \cos a_0 s + c_1 \cdot \cos 3a_0 s \quad (4)$$

integrieren läßt. Das Eingehen in Gl. (3) und das Gleichsetzen der Koeffizienten von $\cos a_0 s$ auf beiden Seiten gibt

$$\delta^3 \frac{a_0^4}{8} = c(a^2 - a_0^2),$$

womit schon im wesentlichen die Lösung unserer Aufgabe gewonnen ist, da sich c nur wenig von δ unterscheidet. Genauer wäre nach Gl. (4), wenn man $s = 0$ setzt, $\delta = c + c_1$. Man hat also die Gleichung

$$\delta^2 = \frac{8(a^2 - a_0^2)}{a_0^4} = 32 \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{P}{P_k} - 1 \right). \quad (5)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich von $\cos 3a_0 s$ folgt, wenn links noch $a^2 \sim a_0^2$ genommen wird,

$$c_1 = -\frac{a_0^2}{64} \delta^3 = -\frac{\delta}{8} \left(\frac{P}{P_k} - 1 \right), \quad (6)$$

d. h. c_1 ist von dritter Ordnung klein, wenn man δ als Größe erster Ordnung ansieht. Wir haben somit als hinreichende *Näherung für die Ausbiegung* die Gl. (5)

$$\delta = 1,800 l \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1}.$$

Die Kurve, die $\delta:l$ als Funktion von $P:P_k$ darstellt (Abb. 3), ist eine gemeine Parabel

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = 3,24 \left(\frac{P}{P_k} - 1\right),$$

die, wie vorauszusehen war, die Abszissenachse im Punkte $P:P_k = 1$ senkrecht schneidet. Mit dem Ansatz in Pkt. 1 wurde nämlich die Beziehung zwischen δ und P zu einer linearen gemacht und daher konnten wir dort nur die Tangente der Kurve an der Stelle $\delta = 0$, d. i. die Vertikale erhalten.

Das Anwachsen der Ausbiegung bei Überschreiten der Knicklast erfolgt außerordentlich rasch. Ist die Last nur um 1% größer als die EULERSche, so beträgt die Ausbiegung schon 18% der Stablänge, also fast ein Fünftel, was nur selten unter der Bruchgrenze liegen wird. Bei $P = 1,05 P_k$ ist δ rund $0,4 l$ usw. Dies erklärt, warum ein auf Druck beanspruchter Stab beinahe immer sofort bricht, wenn die Knickgrenze überschritten wird.

Die Gl. (6) zeigt auch in Verbindung mit der Gl. (4), in welchem Sinn der ausgebogene Stab von der reinen Sinusform abweicht. Das negative Vorzeichen von c_1 besagt, daß die Ausbiegung am Ende etwas geringer, gegen die Einspannstelle zu etwas stärker wird als bei der einfachen Sinuslinie. Die Abweichungen sind aber nur ganz klein. Bei $\delta = 0,4 l$ ist c_1 ungefähr $0,006 \delta$, d. h. die Amplitude des Zusatzgliedes erreicht nicht einmal 1% der gesamten Ausbiegung.

Mit dieser Untersuchung haben wir also die Unbestimmtheit der Ausbiegung nach Erreichen der EULERSchen Last beseitigt. Das ist für uns Grund genug, dem genaueren Ansatz für den Krümmungsradius den Vorrang zu geben. Auch kann man diese genauere Biegegleichung durch einen Grenzübergang für unendlich dünne Stäbe aus einer allgemeinen Beziehung der Elastizitätstheorie erhalten, ohne jede Einschränkung über die Größe der Verschiebungen.¹ In den nächsten Punkten wollen wir deshalb die Rechnung in dieser Weise exakt durchführen. Wir heben wieder hervor, daß sie nur innerhalb der Grenzen gültig ist, in denen eine Elastizitäts- und Proportionalitätsgrenze besteht.

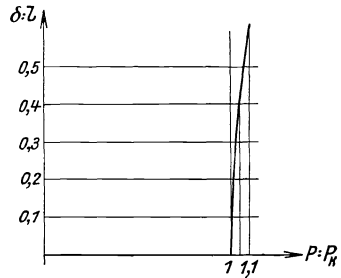


Abb. 3.

3. Die genauere Behandlung des Problems. Aufstellen der Gleichungen.

Wir wollen bei der genaueren Untersuchung unseres Problems wieder die axiale Zusammendrückung des Stabes außer acht lassen.²

¹ LOVE-TIMPE: A. a. O., S. 459f.

² L. EULER: A. a. O. — L. SAALSCHÜTZ: Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Leipzig, 1880. — F. GRASHOF: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. Berlin, 1878. S. 146f. — A. SCHNEIDER: Zur Theorie der Knickfestigkeit. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 53,

Die EULERSche Differentialgleichung der elastischen Linie für größere v lautet

$$EI \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} = P(\delta - v). \quad (1)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{P}{EI} = a^2, \quad v - \delta = y \quad (2)$$

nimmt sie die Form

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -a^2 y$$

an, und man erhält nach Multiplikation mit $y' \cdot du = dy$ und Integration

$$(1+y'^2)^{-1/2} = \frac{a^2 y^2}{2} + C.$$

Den Randwerten $u=0$, $v=0$, $v'=0$ entsprechen $y=-\delta$, $y'=0$; damit ergibt sich die Konstante C , und es wird

$$(1+y'^2)^{-1/2} = 1 - \frac{a^2}{2}(\delta^2 - y^2)$$

und weiter

$$a \cdot du = \frac{1 - \frac{a^2}{2}(\delta^2 - y^2)}{\sqrt{\delta^2 - y^2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}(\delta^2 - y^2)}} dy. \quad (3)$$

Setzt man

$$y^2 = \delta^2 \cdot \cos^2 \varphi, \quad \frac{a^2 \delta^2}{4} = \sin^2 \vartheta, \quad (4)$$

so geht Gl. (3) über in:

$$a \cdot du = \frac{1 - 2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Diese Gleichung integrieren wir, um den Ausdruck für die Abszisse u der elastischen Linie zu erhalten, zwischen $v=0$ und v , d. h. zwischen $\varphi = \varphi_0$ und φ , wobei φ_0 durch die Bedingung $\cos^2 \varphi_0 = 1$ gegeben ist. Somit bekommt man

$$au = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1 - 2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

und

$$au = 2 [E(\vartheta, \varphi) - E(\vartheta, \varphi_0)] - [F(\vartheta, \varphi) - F(\vartheta, \varphi_0)], \quad (5)$$

mit den elliptischen Normalintegralen

$$E(\vartheta, \omega) = \int_0^{\omega} \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi, \quad F(\vartheta, \omega) = \int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}}.$$

Die Ordinate v der elastischen Linie bestimmen wir in der folgenden Weise. Es ist $dv = dy = -\delta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$, daher in Verbindung mit Gl. (4)

$$a \cdot dv = -2 \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

S. 633—638 u. 649—653. 1901. — C. J. KRIEMLER: Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe. Karlsruhe, 1902. S. 30—46.

und zwischen φ_0 und φ integriert

$$a v = 2 \sin \vartheta \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi). \quad (6)$$

Die Koordinaten l_1 und δ für das freie Ende findet man, wenn man als obere Grenze der Integration $v = \delta$ nimmt, d. h. $\varphi = \varphi_1$ mit $\cos^2 \varphi_1 = 0$.

In diesen Gleichungen der Elastica ist der Modul $\sin \vartheta$ unbekannt. Um also u und v zu berechnen, braucht man noch eine Gleichung. Sie ergibt sich aus der Bedingung, daß die Stablänge l bei der Formänderung unverändert geblieben ist, (da eine axiale Verkürzung nicht berücksichtigt wurde). Aus

$$d s = d u \cdot \sqrt{1 + v'^2} = d u \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

folgt mit Gl. (3)

$$a \cdot d s = \frac{d y}{\sqrt{\delta^2 - y^2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4} (\delta^2 - y^2)}}; \quad (7)$$

bei Integration über die Stablänge l wird unter Beachten der Abkürzungen (4)

$$a l = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}},$$

und

$$a l = F(\vartheta, \varphi_1) - F(\vartheta, \varphi_0). \quad (8)$$

Somit sind alle für das Problem erforderlichen Gleichungen vorhanden. Um die Werte l_1 , δ und l zu bestimmen, setzen wir, zur Erfassung sämtlicher Lösungen, als Grenzen der Integrale

$$\varphi_0 = -n \cdot \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

Die Gleichungen der elastischen Linie lauten nach Einführen des Randwertes φ_0

$$\begin{aligned} a u &= 2 E(\vartheta, \varphi) - F(\vartheta, \varphi) + 2 n \left[2 E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ a v &= 2 \sin \vartheta \cdot [(-1)^n - \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (9)$$

Läßt man die Amplitude φ von $-n \cdot \pi$ bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so erhält man die Koordinaten beliebig vieler Punkte. Für $\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ werden

$$\begin{aligned} a l_1 &= (2 n + 1) \left[2 E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) \right], \\ a \delta &= \pm 2 \sin \vartheta, \\ a l &= (2 n + 1) \cdot F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Diese Ergebnisse werden wir im nächsten Pkt. 4 weiter untersuchen.

4. Der Zusammenhang zwischen Druckkraft und Ausbiegung des Stabendes. Die Form der Elastica.

Die vor hergeleitete Gleichung $al = (2n + 1) \cdot F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)$ genügt bereits, um den Zusammenhang zwischen der Druckkraft und der Ausbiegung des Stabendes anzugeben.

Im Grenzfall $\vartheta = 0$ ($\sin \vartheta = 0$) ist die Ausbiegung des Stabendes $\delta = 0$. Da ferner

$$E(\arcsin 0, \omega) = F(\arcsin 0, \omega) = \omega,$$

folgt mit den früheren Gleichungen, daß $l_1 = l$. Durch $\sin \vartheta = 0$ ist also die gerade Gleichgewichtsform gekennzeichnet, die bei jeder Belastung möglich bleibt, da dieses Resultat von der Last P unabhängig ist.

Bei der geraden Gleichgewichtslage für $\vartheta = 0$ nimmt $F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)$ seinen kleinsten Wert $\frac{\pi}{2}$ an. Man kommt somit für die Nullstellen von δ zur Gleichung

$$P = (2n + 1)^2 \cdot P_k, \quad (1)$$

wenn P_k für die EULERSche Last $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ gesetzt ist. Diese Beträge von P , bei denen der Stab sich eben auszubiegen beginnt, definieren wir als *Knicklasten*. Hierbei bezeichnen wir den Wert für $n = 0$ als die „erste Knicklast“ P_k , die Lasten für $n \geq 1$, die sich, wie wir noch zeigen werden, praktisch überhaupt nicht realisieren lassen, als die „höheren Knicklasten“, für $n = 1$ als die zweite Knicklast, für $n = 2$ als die dritte Knicklast usf.

Die Gleichungen für al und $a\delta$ von Pkt. 3 schreiben wir nun in der Form

$$\sqrt{\frac{P}{P_k}} = \frac{2(2n + 1)}{\pi} F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\delta}{l} = \frac{2}{2n + 1} \frac{\sin \vartheta}{F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2)$$

an und lösen sie in der folgenden Weise auf.¹ Für ein angenommenes ϑ berechnen wir (mit Hilfe von Tabellen über elliptische Normalintegrale) aus der ersten Gleichung für $n = 0, 1, 2, \dots$ den Wert $\sqrt{P:P_k}$ und hiernach aus der zweiten Gleichung den zugehörigen Wert $\delta:l$.²

In der Abb. 4 sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz zu den Abszissen $P:P_k$ die Ausbiegungen $\delta:l$ als Ordinaten aufgetragen. Man erhält eine Kurve, die aus der Abszissenachse und unendlich vielen getrennten Ästen besteht, von denen jeder einem bestimmten Wert n entspricht. Man kann auch aus dem Ast für $n = 0$ die höheren Äste ableiten, wenn man die Abszissen mit $(2n + 1)^2$ multipliziert, die Ordinaten durch $(2n + 1)$ dividiert. Es sind nämlich die $P:P_k$ der Zahl

¹ Vgl. L. MALKIN: Formänderung eines axial gedrückten dünnen Stabes. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 6, S. 73—76. 1926.

² Siehe z. B. E. JAHNKE u. F. EMDE: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig, 1909.

$(2n + 1)^2$ direkt proportional, während die $\delta:l$ der Zahl $(2n + 1)$ umgekehrt proportional sind. Alle Äste nähern sich asymptotisch langsam der Abszissenachse. Ein Schnitt zweier Äste kann nicht auftreten, da

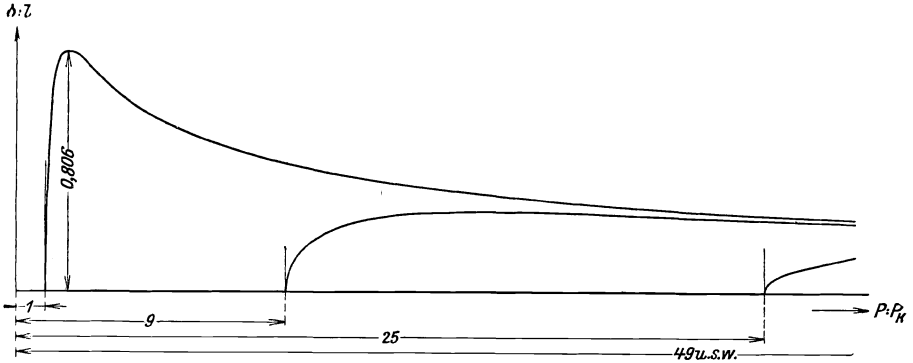


Abb. 4.

bei festem a und δ , also auch $\sin \vartheta$ die Funktion $F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)$ nur einen Wert besitzt. Beachtenswert ist noch, daß für jede Abszisse in Abb. 4 die Ordinate das größte im Stab vorhandene Biegemoment darstellt. In Abb. 5 ist die Linie für den ersten Ast genauer herausgezeichnet.

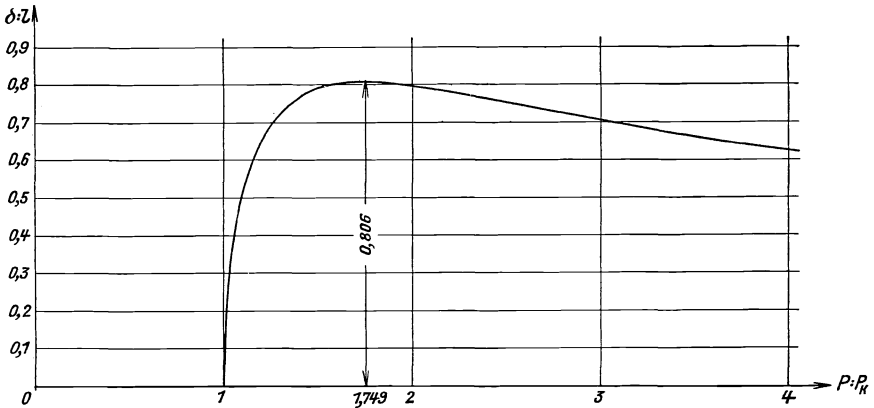


Abb. 5.

Man kann mit der Gleichung $al = (2n + 1) \cdot F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)$ auch graphisch zu den Abszissen a die Ordinaten δ bestimmen (Abb. 6). Zuerst konstruiert man die Linie I, eine Kurve mit den Abszissen $\frac{al}{2n + 1} \left[= F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) \right]$ und den Ordinaten $a \delta \left[= 2 \sin \vartheta \right]$. Auf der Abszissenachse trägt man vom Ursprung 0 die Strecken $0, a = 1$ und $0, b = \frac{l}{2n + 1}$ ab. Aus einem

Punkt 1 der Kurve mit den Projektionen 1' und 1'' auf die Abszissen- bzw. Ordinatenachse gewinnt man den Punkt p der gesuchten Kurve in der folgenden Weise. Man zieht die Linie 1, 0 und bringt sie mit einer durch b parallel zur Ordinatenachse gezogenen Geraden in 2 zum Schnitt. Dann ist, wie die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $(0, 1, 1')$ und $(0, 2, b)$ ergibt, die Strecke $2, b$ die gesuchte Ordinate δ . Zeichnet man die Gerade 1, b bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse in 3 und hiernach die Gerade 3, a , so erhält man im Schnitt mit einer durch 1 zur Abszissenachse parallelen Geraden den Punkt 4. Mit der Strecke 1'', 4 ist die Abszisse a gefunden, wie man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $(3, 0, a)$ und

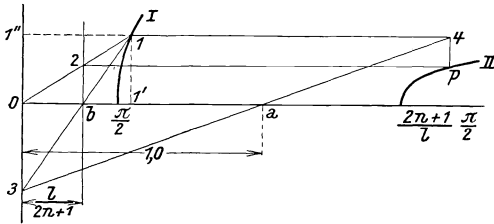


Abb. 6.

$(3, 1'', 4)$ erkennt. Wenn man also durch 2 eine Linie parallel zur Abszissenachse, durch 4 eine parallel zur Ordinatenachse zieht, so hat man im Schnitt den Punkt p der Kurve (a, δ) .

Um auch einen unmittelbaren analytischen Zusammenhang zwischen der Last und der Ausbiegung des

Stabendes zu bekommen, schreiben wir für F die Reihe an und haben damit die Gleichung

$$al = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \vartheta + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4 \vartheta + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sin^6 \vartheta + \dots \right]$$

nach $a^2 = \frac{P}{EI}$ aufzulösen. Durch Quadrieren entsteht die Potenzreihe

$$a^2 = (2n + 1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4l^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 a^2 + \frac{11}{32} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 a^4 + \frac{43}{256} \left(\frac{\delta}{2}\right)^6 a^6 + \dots \right], (\alpha)$$

die in die Form

$$a^2 = c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \dots, \quad k = (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \quad (\beta)$$

umzukehren ist. Bildet man mit Gl. (β) die Ausdrücke a^4, a^6 usf. und geht in die rechte Seite der Gl. (α) ein, so findet man durch den Koeffizientenvergleich der k

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2, \quad c_3 = \frac{19}{32} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4, \quad c_4 = \frac{29}{32} \left(\frac{\delta}{2}\right)^6, \dots$$

Somit wird aus Gl. (β)

$$P = (2n + 1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \delta}{4 l}\right)^2 (2n + 1)^2 + \frac{19}{32} \left(\frac{\pi \delta}{4 l}\right)^4 (2n + 1)^4 + \frac{29}{32} \left(\frac{\pi \delta}{4 l}\right)^6 (2n + 1)^6 + \dots \right]. \quad (3)$$

Wenn wir vom zweiten Glied ab alle Glieder vernachlässigen, erhalten wir für $n = 0$

$$P = P_k \cdot \left(1 + \frac{1}{32} \frac{\pi^2 \delta^2}{l^2} \right) \text{ oder } \delta^2 = 32 \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{P}{P_k} - 1 \right),$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Pkt. 2.

Wir wollen noch, in Ergänzung zu unserer früheren Gleichungsauflösung, die Last ermitteln, bei der die Ausbiegung des Stabes ein Maximum wird.¹ Wenn wir in die Beziehung $a \cdot \delta = \pm 2 \sin \vartheta$ für a seinen Wert einführen, so erhalten wir

$$\delta = \pm \frac{2l}{2n+1} \cdot \frac{\sin \vartheta}{F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Bildet man die erste Ableitung von δ nach $\sin \vartheta$ und setzt sie gleich Null, so wird die Bedingung für das Extremum

$$F - \sin \vartheta \cdot \frac{dF}{d \sin \vartheta} = 0.$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, liefert diese Gleichung ein analytisches Maximum. Mit der Definitionsgleichung für F folgern wir

$$\frac{dF}{d \sin \vartheta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}{(1 - \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi,$$

und weiter

$$\frac{dF}{d \sin \vartheta} = - \frac{1}{\sin \vartheta} \left(F - \frac{E}{1 - \sin^2 \vartheta} \right).$$

Die Minimumsgleichung geht damit über in:

$$2F \cdot \cos^2 \vartheta - E = 0.$$

Hieraus errechnet man versuchsweise $\vartheta = 56^\circ 52'$ und bekommt bei $n = 0$ für die größte Ausbiegung des Stabendes $\delta = 0,806 l$. Die Gleichung, siehe Pkt. 3, Gl. (10)

$$\frac{l_1}{l} = \frac{2E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)} - 1$$

ergibt die zugehörige Abszisse $l_1 = 0,195 l$ und die Belastung P , bei der diese weiteste Ausbiegung stattfindet, ist $1,749 P_k$.

Will man die elastische Linie konstruieren, so muß man nur in den früher angeschriebenen Gleichungen für u und v den Parameter φ von $-n \cdot \pi$ bis $\frac{\pi}{2}$ laufen lassen, um die Koordinaten beliebig vieler Punkte zu erhalten. Wie man aus der Gleichung für v in Verbindung mit der Gleichung $v'' = \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2$ entnehmen kann, hat die *Elastica n*

¹ L. SAALSCHÜTZ: A. a. O., S. 31.

Wendepunkte, d. h. im Fall der ersten Knicklast ist kein Wendepunkt vorhanden, bei der zweiten Knicklast einer usf. (Abb. 7). Da ferner die Normalintegrale E und F sowie $\cos \varphi$ einen in bezug auf die Punkte $\varphi = 0, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2} \dots$ symmetrischen Verlauf haben, besteht die elastische Linie aus $(2n + 1)$ kongruenten Teilen. Bei festen l und ϑ sind alle „Halbwellen“ bei verschiedenen Werten φ_0 bzw. n einander

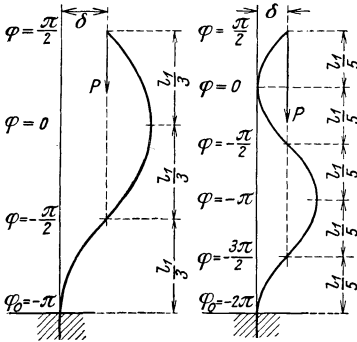


Abb. 7.

ähnlich, denn es ist $a \cdot l = (2n + 1) \cdot \text{Konst.}$ Die Welle ist durch die Gleichungen u und v für $n = 0$ bestimmt, wobei die Dimensionen der Zahl $(2n + 1)$ umgekehrt proportional, die Kräfte P der Zahl $(2n + 1)^2$ direkt proportional sind. Wir haben aber schon vorangemerkt, daß die Biegeformen der höheren Knicklasten, wie sie in der Abb. 4 für $n = 1$ und $n = 2$ eingezeichnet sind, in Wirklichkeit nicht zur Ausbildung gelangen.

Die Form der Elastica wird verdeutlicht durch die Kenntnis des Neigungswinkels Θ der Tangente an die

gebogene Stabachse gegen die vertikale u -Achse.¹ Aus der Beziehung

$$\cos \Theta = \frac{du}{ds}$$

wird mit den Gl. (3) und (7) von Pkt. 3

$$\cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi, \tag{4}$$

also

$$\sin \vartheta \cdot \sin \varphi = \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin \frac{\Theta}{2} = \sin \vartheta$, und damit haben wir auch eine geometrische Anschauung für den Modul $\sin \vartheta$ gefunden.

5. Berücksichtigen der Zusammendrückung des Stabes.

Wenn wir die axiale Zusammendrückung des Stabes berücksichtigen wollen, haben wir die EULER-BERNOULLISCHE Biegegleichung in der Form

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EI(1 - \varepsilon)}$$

anzuschreiben, wobei ε die spezifische Zusammendrückung der Stabachse ist. Nun gilt die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{P \cdot \cos \Theta}{EF},$$

da die Kraft in Richtung der elastischen Linie die Größe $P \cdot \cos \Theta$ hat, wenn Θ der Winkel zwischen der Tangente an die gebogene Stabachse

¹ L. SAALSCHÜTZ: A. a. O., S. 33.

und der vertikalen u -Achse ist. Die Verbindung dieser beiden Ansätze ergibt eine neue Differentialgleichung.¹

Die Integration stößt auf beträchtliche Schwierigkeiten und bleibt auch kompliziert, wenn man für $\cos \Theta$ angenähert den Wert für $\varepsilon = 0$ setzt, den wir in Pkt. 4 berechnet haben. Aber wir wollen hieraus kein großes Problem machen, denn wir können die kritische Last, auf die es ankommt, mit der Näherungstheorie von Pkt. 1 exakt bestimmen. Bezeichnet man die Zusammendrückung des geraden Stabes für $\cos \Theta = 1$ mit $\varepsilon_0 = \frac{P}{EF}$, so hat man, da bei der Knicklast die Ausbiegung erst beginnt, in den Gleichungen von Pkt. 1 statt l den Wert $l(1 - \varepsilon_0)$ und statt I den Wert $I(1 - \varepsilon_0)$ zu schreiben. Die kritische Last ergibt sich daher zu²

$$P_k' = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{(1 - \varepsilon_0) l^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{P_k'}{EF}.$$

Der Wert ε_0 ist sehr klein; z. B. bei einem Stab aus Flußstahl mit $\frac{P_k}{F} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ und $E = 2000 \text{ t/cm}^2$ ist $\varepsilon_0 = 0,001$. Man erkennt daraus, daß die Korrektur der EULERSchen Formel nur ganz geringfügig ist.

Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und im Sinne unserer Näherung von Pkt. 2 eine Beziehung zwischen Last und Ausbiegung bei Überschreiten der Knicklast angeben. Für $\varepsilon = 0$ hatten wir für die Ausbiegung des freien Endes die Gleichung

$$\delta = 1,800 l \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1}$$

aufgestellt, die also ein etwas zu großes Resultat liefert. Bei einer schwachen Verformung setzen wir für ε angenähert die zu große Zusammendrückung ε_0 und erhalten mit den gleichen Überlegungen wie vor den zu kleinen Wert

$$\delta' = 1,800 l (1 - \varepsilon_0) \sqrt{\frac{P}{P_k'} - 1}.$$

Die wirkliche Ausbiegung δ_ε liegt nun zwischen δ und δ' .

Aus diesen Überlegungen schließen wir zusammenfassend, daß die axiale Zusammendrückung bei der *Stabknickung* keine Rolle spielt und nicht berücksichtigt werden muß.

¹ Diese Ergänzung der BERNOULLI-EULERSchen Theorie stammt von E. LAMARLE: Mémoire sur la flexion du bois. Annales des Travaux publics de Belgique. 1846. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: A History of the Theory of Elasticity. Cambridge, 1886. Bd. 1, S. 679.

² F. GRASHOF: A. a. O., S. 171. — C. J. KRIEMLER: Stabile und labile Gleichgewichtsfiguren. Karlsruhe, 1902. S. 45–56. Vgl. auch die Untersuchungen von L. PILGRIM: Ztschr. Math. u. Physik, Bd. 46, S. 362–369.

1901. Das Resultat von J. KRIEMLER: A. gl. O., S. 355: $P_k = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{(1 - \varepsilon_0)^2 l^2}$, das durch eine „Summation der Effekte“ begründet wird, läßt sich nicht aufrecht halten. Ebenso bei E. ELWITZ: Die Lehre von der Knickfestigkeit. Hannover, 1918. S. 81.

6. Die Stabilität der Gleichgewichtslagen.

Wir haben vor gezeigt, daß bis zur kritischen oder EULERSchen Last nur die gerade Gleichgewichtsfigur auftreten kann. Überschreitet die Last diesen Wert, so gibt es zwei Gleichgewichtszustände: die gestreckte Form und eine Form mit Ausbiegung. In unserer Abb. 4, in der die Ausbiegung des Stabendes als Funktion der Last dargestellt ist, läuft die Kurve, die den zweiten Zustand veranschaulicht, von dem Punkt aus, der die kritische Last angibt. H. POINCARÉ bezeichnet einen solchen Punkt, bei dem in unendlicher Nachbarschaft zwei Gleichgewichtslagen bestehen, als einen „Verzweigungspunkt“ des Gleichgewichts.¹ Das Vorhandensein eines Verzweigungspunktes ist mit anderen Worten das Kriterium für die Knicklast.

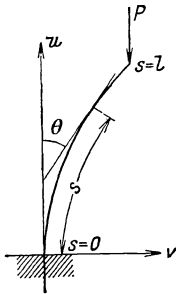


Abb. 8.

Wir beweisen für den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab die folgenden Sätze:

a) Die gestreckte Form ist stabil, wenn die Belastung unterhalb der ersten EULERSchen Grenze liegt, instabil, wenn sie darüber liegt.

b) Die „wendefreie“ Biegeform (d. h. die Linie ohne inneren Wendepunkt) ist immer stabil, wenn sie überhaupt als Gleichgewichtslinie existiert.

c) Alle nicht wendefreien Biegelinien sind instabil, zumindest dann, wenn die Tangentenwinkel gegen die Vertikale unterhalb einer Grenze von ungefähr 80° liegen.

Dieses Resultat wird aber natürlich auch für den (praktisch bedeutungslosen) Fall noch stärkerer Ausbiegungen gelten.

Um diese Sätze abzuleiten, untersuchen wir das Verhalten der Energie gegenüber kleinen Störungen und stellen fest, wann zum Übergang in eine Nachbarlage Arbeitsaufwand nötig ist und wann nicht.²

Bezeichnen wir die Bogenlänge mit s , den Tangentenwinkel der elastischen Linie gegen die Stabachse mit Θ (Abb. 8), den Krümmungshalbmesser der Elastica mit ρ , so ist $\frac{d\Theta}{ds} = \Theta' = \frac{1}{\rho}$ und die Höhe

¹ H. POINCARÉ: Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta Mathematica, Bd. 7, S. 259. 1885.

² Diese exakte Beweisführung rührt von R. v. MISES her. L. SAALSCHÜTZ findet, a. a. O., S. 133, daß die Form mit einem Wendepunkt stabil ist. SAALSCHÜTZ betrachtet nicht die Wirkung einer vorübergehenden kleinen Störung, sondern die einer kleinen, aber dauernden Änderung. H. BRYAN u. A. E. H. LOVE kommen zu dem gleichen Ergebnis, wie es hier auf Grund des Kriteriums von v. MISES entwickelt ist, aber der Beweis ist dort keineswegs ganz überzeugend (LOVE-TIMPE: A. a. O., S. 467 u. 472). Unter mehreren bei gleicher Belastung möglichen Gleichgewichtslagen wird nach BRYAN-LOVE diejenige als stabil angesehen, für welche die potentielle Energie der eingepprägten plus der elastischen Kräfte ein Minimum wird. Diese Schlußfolgerung beruht wohl auf der Analogie zu dem Gleichgewichtsproblem im Schwerfeld, wo die tiefste Lage immer die stabilste ist. Aber es kann doch auch vorkommen, daß höher gelegene Muldenpunkte existieren und daß gerade der tiefere Punkt ein Sattelpunkt ist.

des freien Lastpunktes von der Einspannstelle gleich $\int_0^l \cos \Theta \cdot ds$. Die elastische Energie infolge der Biegung beträgt

$$\frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 ds = \frac{EI}{2} \int_0^l \Theta'^2 \cdot ds,$$

und die Arbeit der äußeren Kraft P , die beim Herabsinken der Last verlorenght,

$$P \left(l - \int_0^l \cos \Theta \cdot ds \right).$$

Daher ist die Gesamtenergie (abgesehen von einem Faktor), mit Vernachlässigen der Zusammendrückung des Stabes

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \Theta'^2 \cdot ds + \frac{P}{EI} \int_0^l \cos \Theta \cdot ds - \frac{Pl}{EI}. \quad (1)$$

Eine Biegelinie wird durch $\Theta(s)$ definiert. Wir betrachten eine Variation der Biegelinie, indem wir

$$\Theta(s) = \Theta_0(s) + \varepsilon \cdot \eta(s)$$

setzen, wobei ε sehr klein ist. Die Variation δA der Energie entwickeln wir nach dem Wert ε . Das Nullsetzen der Glieder mit ε muß die Bedingung dafür geben, daß $\Theta_0(s)$ eine Gleichgewichtslage ist. Das Vorzeichen des Faktors von ε^2 entscheidet dann darüber, ob das Gleichgewicht stabil ist oder nicht. Ist der Faktor positiv, so heißt dies, daß der Übergang zu einer Nachbarlage einen Arbeitsaufwand erfordert, das Gleichgewicht war stabil; ist der Faktor negativ, so war das Gleichgewicht instabil.

Wir berechnen also die Variation des vor angeführten Energieausdruckes. Schreiben wir abgekürzt $\Theta = \Theta_0 + \varepsilon \cdot \eta$, so sind:

$$\Theta' = \Theta_0' + \varepsilon \cdot \eta', \quad \Theta'^2 = \Theta_0'^2 + 2\varepsilon \cdot \Theta_0' \eta' + \varepsilon^2 \eta'^2.$$

Ferner ist

$$\cos \Theta = \cos \Theta_0 \cdot \cos \varepsilon \eta - \sin \Theta_0 \cdot \sin \varepsilon \eta$$

und mit $\cos \varepsilon \eta = 1 - \frac{\varepsilon^2 \eta^2}{2}$, $\sin \varepsilon \eta = \varepsilon \eta$ wird bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\cos \Theta = \cos \Theta_0 - \varepsilon \eta \cdot \sin \Theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} \eta^2 \cdot \cos \Theta_0.$$

Daher ist

$$A + \delta A = \frac{1}{2} \int_0^l (\Theta_0'^2 + 2\varepsilon \Theta_0' \eta' + \varepsilon^2 \eta'^2) ds + \\ + \frac{P}{EI} \int_0^l \left(\cos \Theta_0 - \varepsilon \eta \sin \Theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} \eta^2 \cos \Theta_0 \right) ds - \frac{Pl}{EI} \quad (2)$$

und mit sinngemäßem Berücksichtigen der Gl. (1)

$$\delta A = \varepsilon \left[\int_0^l \Theta_0' \eta' ds - \frac{P}{EI} \int_0^l \eta \sin \Theta_0 \cdot ds \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\int_0^l \eta'^2 ds - \frac{P}{EI} \int_0^l \eta^2 \cos \Theta_0 \cdot ds \right]. \quad (3)$$

Das Nullsetzen der Glieder erster Ordnung von ε liefert nun die Gleichgewichtsbedingung; das Vorzeichen des Ausdruckes

$$J = \int_0^l \eta'^2 ds - \frac{P}{EI} \int_0^l \eta^2 \cos \Theta_0 \cdot ds \quad (4)$$

entscheidet über die Stabilität der Gleichgewichtslage.

Zunächst bestimmen wir zur Kontrolle unserer Rechnung die Gleichgewichtsbedingung. Aus Gl. (3) erhalten wir die Beziehung

$$\int_0^l \Theta_0' \eta' ds = \frac{P}{EI} \int_0^l \eta \sin \Theta_0 \cdot ds. \quad (5)$$

Nun ergibt die partielle Integration

$$\int_0^l \Theta_0' \eta' ds = [\Theta_0' \eta]_0^l - \int_0^l \Theta_0'' \eta ds.$$

Für die Einspannstelle des Stabes $s = 0$ muß $\eta = 0$ angenommen werden, da hier $\Theta = \Theta_0 = 0$ ist. Somit wird

$$\int_0^l \Theta_0' \eta' ds = \Theta_0'(l) \cdot \eta(l) - \int_0^l \Theta_0'' \eta ds$$

und Gl. (5) lautet

$$-\Theta_0'(l) \cdot \eta(l) + \int_0^l \left(\Theta_0'' + \frac{P}{EI} \sin \Theta_0 \right) \eta ds = 0.$$

Diese Gleichung soll für jede Wahl der Variation $\eta(s)$ bestehen, also muß $\Theta_0'(l) = 0$, d. h. am Ende des Stabes $\frac{1}{\varrho} = 0$ sein. Sonach ist

$$\Theta_0'' = -\frac{P}{EI} \sin \Theta_0$$

oder

$$\Theta_0' = -\frac{P}{EI} \int_0^s \sin \Theta_0 \cdot ds = -\frac{P}{EI} v_0(s) + \text{Konst.},$$

wobei $v_0(s) = \int_0^s \sin \Theta_0 \cdot ds$ die Ausbiegung an der Stelle s bedeutet. Die

Konstante ist durch die Bedingung bestimmt, daß $\Theta_0' = 0$ für $s = l$, und demnach wird

$$\Theta_0'(s) = \frac{1}{e_0}(s) = \frac{P}{EI} [v_0(l) - v_0(s)].$$

Diese Gleichung ist tatsächlich die exakte Gleichgewichtsbedingung der Biegelinie.

a) Wir beweisen zuerst den vor angegebenen Satz (a) über die *Stabilität der gestreckten Lage*, die sich für jeden P -Wert als eine Lösung der Gleichgewichtsbedingung herausgestellt hat. Zuzufolge $\Theta_0 = 0$, $\Theta_0' = 0$ lautet die Gl. (4) mit der Abkürzung $\frac{P}{EI} = a^2$

$$J = \int_0^l (\eta'^2 - a^2 \eta^2) ds. \quad 1$$

Wir haben nun zu prüfen, ob J größer oder kleiner als Null ist.

Für den Fall $a > \frac{\pi}{2l}$ wählen wir als spezielle Störung $\eta = \sin \frac{\pi}{2l} s$, also $\eta' = \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \frac{\pi}{2l} s$, und es gilt daher $\eta(0) = \eta'(l) = 0$. Eine partielle Integration ergibt

$$\int_0^l \eta'^2 ds = \int_0^l \eta' d\eta = [\eta' \eta]_0^l - \int_0^l \eta \eta'' ds,$$

und für unser η

$$\int_0^l \eta'^2 ds = - \int_0^l \eta \eta'' ds = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \int_0^l \eta^2 ds.$$

Somit ist

$$J = \left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - a^2 \right] \int_0^l \eta^2 ds < 0,$$

denn das Integral ist positiv, der Faktor vor dem Integral negativ.

Die gestreckte Lage ist bei $a > \frac{\pi}{2l}$ *instabil*.

Im Falle $a < \frac{\pi}{2l}$ können wir zeigen, daß mit der Einschränkung $\eta(0) = 0$ der Wert $J \geq 0$, wie immer auch $\eta(s)$ gewählt wird. Wenn s von 0 bis l läuft, bleibt $a(l-s)$ zwischen Null und einer oberen Grenze unterhalb $\frac{\pi}{2}$. Mithin ist $\operatorname{tga}(l-s)$ eine beschränkte Funktion, und wir dürfen die Größe

$$J_1 = \int_0^l [\eta' - a\eta \cdot \operatorname{tga}(l-s)]^2 ds$$

eingeführen, die sicher größer oder gleich Null ist, da unter dem Integral ein Quadrat steht. Nun ist

$$J - J_1 = \int_0^l [\eta'^2 - a^2 \eta^2 - \eta'^2 + 2a\eta\eta' \cdot \operatorname{tga}(l-s) - a^2 \eta^2 \cdot \operatorname{tga}^2(l-s)] ds,$$

oder

$$J - J_1 = \int_0^l \left[2a\eta\eta' \cdot \operatorname{tg} a(l-s) - \frac{a^2\eta^2}{\cos^2 a(l-s)} \right] ds = \\ = \int_0^l \frac{d}{ds} [a\eta^2 \cdot \operatorname{tg} a(l-s)] ds = 0,$$

(da $\eta^2 \cdot \operatorname{tg} a(l-s)$ an der oberen und unteren Grenze verschwindet).
Somit ist $J = J_1 \geq 0$, d. h. die *gestreckte* Lage ist bei $a < \frac{\pi}{2l}$ *stabil*, denn der Übergang zu jeder durch ein $\Theta = \varepsilon \cdot \eta(s)$ bestimmten Nachbarlage erfordert Arbeitsaufwand. — Das Ergebnis war vorauszusehen, denn diese Gleichgewichtsfigur ist die einzige, die bei der betreffenden Belastung möglich ist.

b) Wir beweisen jetzt den Satz (b), daß eine *Linie*, die Gleichgewichtsform ist und *keinen Wendepunkt* besitzt, immer *stabil* ist. Unter Wendepunkt verstehen wir einen Punkt, in dem Θ als Funktion von s vom Wachsen zum Abnehmen übergeht oder umgekehrt. Das Auftreten einer Stelle mit $\frac{d\Theta}{ds} = 0$ (z. B. am Ende des Stabes) stört hierbei nicht. Vorausgesetzt wird nur, daß Θ mit wachsendem s entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt. Es ist ausreichend, wenn wir den ersten Fall untersuchen.

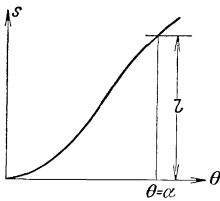


Abb. 9.

Eine „wendefreie“ Linie kann dadurch definiert werden, daß man eine Funktion $s(\Theta)$ angibt, die bei $\Theta = 0$ verschwindet und in einem genügend weiten Bereich monoton wächst. Der Teil der Linie zwischen $\Theta = 0$ und demjenigen Wert $\Theta = \alpha$, für den der Funktionswert gleich l ist, bestimmt die wendefreie Biegelinie (Abb. 9). Ist die Linie durch $s(\Theta)$ festgelegt, so gilt

$$s' = \frac{ds}{d\Theta} = \varrho \left(= \frac{1}{\Theta'} \right), \quad ds = s' \cdot d\Theta.$$

Geht man hiermit in den Energieausdruck der Gl. (1) ein, so erhält man

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{d\Theta}{s'} + a^2 \int_0^\alpha s' \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta - \frac{Pl}{EI}.$$

Wir betrachten wieder eine Ausgangslage $s_0(\Theta)$ und eine kleine Änderung $\varepsilon \cdot \sigma(\Theta)$, also $s = s_0 + \varepsilon \cdot \sigma$. Damit sind

$$s' = s_0' + \varepsilon \cdot \sigma'; \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \varepsilon \frac{\sigma'}{s_0'^2} + \varepsilon^2 \frac{\sigma'^2}{s_0'^3} \dots$$

Allein, wenn man den neuen Energiewert $A + \delta A$ haben will, genügt es nicht, unter dem Integralzeichen $s_0 + \varepsilon \cdot \sigma$ an Stelle von s_0 zu setzen. Man muß beachten, daß das neue Integral nicht bis α , sondern bis zu einem (größeren oder kleineren) Wert $\alpha + \delta \alpha$ zu erstrecken ist (Abb. 10). Nimmt man es nur bis α , so fehlt (bei positivem $\delta \alpha$) noch das Energie-

integral für das (in der Abb. 10 stark ausgezogene) Endstück des Stabes von $l + \varepsilon \cdot \sigma(l)$ bis l . Dabei ist $\sigma(l)$ immer negativ, wenn $\delta\alpha$ positiv ist. Der neue Energieausdruck ist, wenn wir für das Endstück die ursprüngliche Gl. (1) sinngemäß benutzen,

$$A + \delta A = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left[\frac{1}{s_0'} - \varepsilon \frac{\sigma'}{s_0'^2} + \varepsilon^2 \frac{\sigma'^2}{s_0'^3} \right] d\Theta + a^2 \int_0^\alpha (s_0' + \varepsilon \cdot \sigma') \cos \Theta \cdot d\Theta - \frac{Pl}{EI} + \int_{l-\lambda}^l \left(\frac{1}{2\varrho^2} + a^2 \cos \Theta \right) ds, \text{ mit } \lambda = -\varepsilon \cdot \sigma(l).$$

Das so hinzugefügte Integral hat ein positives Vorzeichen, wenn $\sigma(l) < 0$; bei $\sigma(l) > 0$ wäre $-\int_{l-\lambda}^l \dots$ zu setzen, da tatsächlich etwas abziehen ist, weil der neue α -Wert kleiner als der alte ist. Unsere Anschreibung gilt somit ganz allgemein.

Subtrahiert man von dieser Gleichung

$$A = \frac{Pl}{2} \int_0^\alpha \frac{d\Theta}{s_0'} + a^2 \int_0^\alpha s_0' \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta - \frac{Pl}{EI},$$

so bekommt man

$$\delta A = \varepsilon \int_0^\alpha \left[-\frac{\sigma'}{2s_0'^2} + a^2 \sigma' \cdot \cos \Theta \right] d\Theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\sigma'^2}{s_0'^3} d\Theta + \delta_1 A.$$

Der Zusatz $\delta_1 A = \int_{l-\lambda}^l \left(\frac{1}{2\varrho^2} + a^2 \cos \Theta \right) ds = \int_{l-\lambda}^l f(s) \cdot ds$ gibt mit der TAYLORSchen Formel nach Potenzen von λ entwickelt

$$\delta_1 A = \int_{l-\lambda}^l \left[f(l) + (s-l) \cdot f'(l) + \frac{1}{2} (s-l)^2 \cdot f''(l) + \dots \right] ds,$$

oder mit $s-l = x$ auch

$$\begin{aligned} \delta_1 A &= \int_{-\lambda}^0 \left[f(l) + x \cdot f'(l) + \frac{x^2}{2} f''(l) + \dots \right] dx = \lambda \cdot f(l) + \frac{\lambda^2}{2} f'(l) + \dots \\ &= -\varepsilon \cdot \sigma(l) \cdot f(l) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sigma^2(l) \cdot f'(l) - \dots \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ und bekanntlich im Gleichgewicht $\frac{1}{\varrho} = 0$ für $s = l$, also

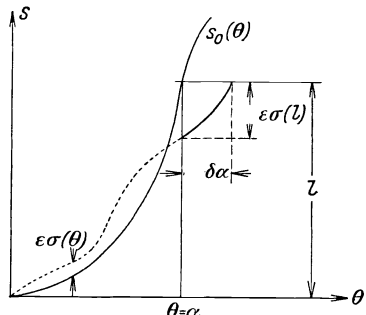


Abb. 10.

$$f(l) = \left[\frac{1}{2\varrho^2} + a^2 \cos \Theta \right]_{s=l} = a^2 \cos \alpha,$$

$$f'(l) = \left[-\frac{1}{\varrho^3} \frac{d\varrho}{ds} - a^2 \sin \Theta \cdot \frac{d\Theta}{ds} \right]_{s=l} = 0.$$

Mithin ist das Zusatzintegral, bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung

$$\delta_1 A = -\varepsilon \cdot \sigma(l) \cdot a^2 \cos \alpha = -a^2 \varepsilon \cdot \cos \alpha \cdot \int_0^\alpha \sigma' \cdot d\Theta.$$

Die gesamte Energievariation ist daher

$$\delta A = \varepsilon \int_0^\alpha \sigma' \left[-\frac{1}{2s_0'^2} + a^2 (\cos \Theta - \cos \alpha) \right] d\Theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\sigma'^2}{s_0'^3} d\Theta.$$

Zur Kontrolle kann man sich davon überzeugen, daß das Nullsetzen der Glieder erster Ordnung in ε wieder die richtige Gleichgewichtsbedingung liefert. Es ist $s_0' = \frac{ds_0}{d\Theta} = \varrho_0 = \frac{1}{\Theta'}$, weiter $\frac{1}{2\varrho_0^2} = a^2 (\cos \Theta - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \Theta'^2$ und nach s differenziert folgt

$$\Theta' \cdot \Theta'' = -a^2 \sin \Theta \cdot \frac{d\Theta}{ds} \quad \text{oder} \quad \Theta'' = -a^2 \sin \Theta,$$

d. i. die Gleichung, die vor zur Biegelinie geführt hat.

Wesentlich ist das Glied zweiter Ordnung im Ausdruck δA , nämlich

$$\int_0^\alpha \frac{\sigma'^2}{s_0'^3} d\Theta.$$

Da die Gleichgewichtsform wendefrei ist, ändert s_0' sein Vorzeichen nicht. Bei unserer Rechnung ist überdies vorausgesetzt, daß $s_0' \geq 0$ (da sonst α nicht positiv wäre); somit ist der Integrand positiv und δA positiv, d. h. die *wendefreie Gleichgewichtsform* ist immer *stabil*. ($s_0' < 0$ würde bedeuten, daß die Linie nach links gerichtet ist; man hätte dann das Koordinatensystem umzukehren, um dasselbe Ergebnis zu bekommen.) Auch dieses Resultat war eigentlich zu erwarten, denn es ist anzunehmen, daß sich der Stab nur aus einer Gleichgewichtslage entfernt, wenn er sich dabei einer anderen stabileren nähert. — Die ganze Überlegung versagt aber, wenn die Linie Wendestellen besitzt.

c) Wir haben noch die *Stabilität der höheren Gleichgewichtsformen*, d. h. der nicht wendefreien Biegelinien zu untersuchen.

Ist die zweite EULERSche Last überschritten, $a > \frac{3\pi}{2l} = a_2$,

so gibt es auch eine Gleichgewichtsform mit Wendestelle, Θ wächst zuerst mit s und nimmt dann ab (Abb. 11).

Zunächst beweisen wir: Ist die *zweite EULERSche Last* nur *wenig überschritten*, so ist die betrachtete Form sicher *instabil*. Bei einer kleinen

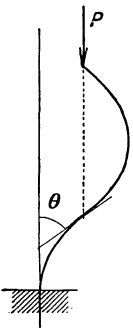


Abb. 11.

Überschreitung von a_2 sind alle Θ spitze Winkel, d. h. $\cos \Theta$ liegt zwischen Eins und einem sich unter Eins befindenden positiven Minimum $|\cos \Theta|_{\min}$. Die für die Stabilitätsfrage entscheidende Gl. (4) ist

$$J = \int_0^l \eta'^2 ds - a^2 \int_0^l \eta^2 \cos \Theta_0 \cdot ds \leq \int_0^l \eta'^2 ds - a^2 \int_0^l \eta^2 \cdot |\cos \Theta|_{\min} \cdot ds.$$

Setzt man $a^2 \cdot |\cos \Theta|_{\min} = k^2$, so erhält man

$$J \leq \int_0^l [\eta'^2 - k^2 \eta^2] ds,$$

also denselben Ausdruck, der bei (a) für die gestreckte Form bestand, nur mit k an Stelle von a . Dort haben wir gezeigt, daß für die spezielle

Störung $\eta = \sin \frac{\pi}{2l} s$ das Integral den Wert $\left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 - a^2 \right] \int_0^l \eta^2 ds$ hat,

daher ist jetzt

$$J \leq \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 - k^2 \right] \int_0^l \eta^2 ds.$$

Nun ist $a^2 > a_2^2 = 9 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2$. Wenn mithin $|\cos \Theta|_{\min} > \frac{1}{9}$ (wobei Θ -Werte bis über 80° zugelassen sind), so ist

$$k^2 = 9 \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cdot |\cos \Theta|_{\min} > \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2$$

und der Ausdruck rechts negativ; die betrachtete Gleichgewichtsform ist sicher *instabil*.

Der Schluß ist nicht anwendbar auf Linien mit kleinem Θ , die nach Überschreiten der ersten EULERSchen Last entstehen. Denn dort ist

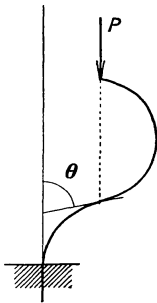


Abb. 12.

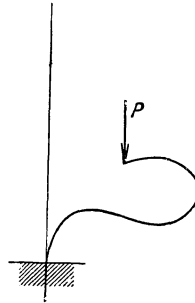


Abb. 13.

$k^2 = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cdot n$, mit n als einem echten Bruch, und unsere Überlegung besagt nur, daß J unterhalb einer positiven Schranke liegt. Hingegen gilt alles für die noch höheren Gleichgewichtsfiguren. Hier wird die

Grenze der Θ -Werte, für die Instabilität bewiesen ist, immer näher an 90° gerückt.

Praktisch kommen Biegelinien mit $\Theta > 80^\circ$ längst nicht mehr vor. Will man aber doch entscheiden, ob etwa die Figur der Abb. 12 eine stabile Lage bilden kann, so überlegt man so: Bei kleinen P -Werten ist die Form, wie gezeigt, instabil. Der Übergang zur Stabilität muß ein Verzweigungspunkt sein, d. h. ein P -Wert, in dessen Nähe es zwei verschiedene, nahe benachbarte Gleichgewichtsformen gibt. Beides müßten nun Linien mit je *einer* Wendestelle sein, da sie ja fast gleich sind. Man weiß aber, daß es zu jeder Zahl von Wendepunkten nur *eine* Gleichgewichtsfigur gibt, (die sich aus den ein für allemal gleichen, wendefreien Stücken zusammensetzt). Es kann also keine „Verzweigung“ der ausgebogenen Form, daher keinen Stabilitätswechsel geben, und daraus folgt, daß *alle Formen mit Wendepunkten instabil* sind, auch wenn Θ über 90° hinausgeht (Abb. 13).

§ 2. Der gerade Stab bei verschiedenen Randbedingungen.

7. Die weiteren Eulerschen Knickfälle.

Aus den voraufgehenden Untersuchungen haben wir eine wichtige Erkenntnis gewonnen. Zur grundsätzlichen Klärung der Deformationsverhältnisse war es wohl erforderlich, auf den genaueren Ansatz für die Gleichung der Elastica zurückzugreifen. Handelt es sich aber nur darum, die kritische Last zu bestimmen, und das ist die wichtigste Aufgabe, so können wir von der vereinfachten Differentialgleichung in Pkt. 1 ausgehen, wenn wir festhalten, daß dann das Unbestimmtwerden der Ausbiegung das Kriterium der Knicklast ist.

Wir betrachten in Ergänzung zum behandelten EULERSchen Grundfall die anderen „Eulerschen Knickfälle“; den beiderseits punktartig (in Spitzen oder Gelenken) gelagerten Stab, den beiderseits eingespannten Stab und den an einem Ende eingespannten und am anderen Ende gelenkig in der Achse geführten Stab.

a) Der beiderseits punktartig gestützte Stab (Abb. 14).

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} + P \cdot v = 0,$$

unter den Randbedingungen $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l_1 = l$. Ihre Lösung ist

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au, \quad a^2 = \frac{P}{EI},$$

und daraus wird mit den Randwerten die Konstante $C_2 = 0$ und weiter $C_1 \cdot \sin al = 0$. $C_1 = 0$ ist die triviale Lösung, bei der der Stab gerade bleibt, und $\sin al = 0$ ergibt die Gleichung

$$al = n \cdot \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Man erkennt, daß hierbei C_1 (also auch die Ausbiegung v) unbestimmt ist und $al = n \cdot \pi$ die Knickbedingung vorstellt. Für $n = 1$ bekommt man die kleinste kritische EULERSche Last

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Diese Gleichung kann man aus der Gleichung vom Grundfall erhalten, wenn man dort l für $2l$ setzt. Es entspricht auch der Anschauung, daß der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab eine Hälfte des jetzt untersuchten Stabes ist. Die Länge l in der EULERSchen Formel für den beiderseits punktartig (gelenkig) gelagerten Stab bezeichnen wir als die „freie Knicklänge“. Beim Grundfall ist also die freie Knicklänge gleich $2l$.

Um die Ausbiegung der Stabmitte zu finden, brauchen wir nur in die Gl. (5) von Pkt. 2 anstatt $2l$ die Länge l einzuführen. Damit gewinnen wir die Beziehung

$$v_m = \frac{\sqrt{8}}{\pi} l \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1} = 0,9 l \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1}.$$

Bei der Ausbiegung nähern sich die Endpunkte, und wir wollen für ihre gegenseitige Entfernung l_1 eine erste Näherung bestimmen. Die Gleichung für das Differential der Bogenlänge

$$ds = du \cdot \sqrt{1 + v'^2} \simeq du \cdot \left(1 + \frac{1}{2} v'^2\right)$$

und die Gleichung der elastischen Linie

$$v = v_m \cdot \sin \frac{\pi}{l} u, \text{ also } v' = v_m \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi}{l} u$$

ergeben in Verbindung

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2} v_m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} u\right) du.$$

Daher ist

$$l = \int_{u=0}^{l_1} ds = l_1 \left(1 + \frac{1}{4} v_m^2 \frac{\pi^2}{l^2}\right)$$

und mit dem ersten Näherungsausdruck für v_m erhält man

$$\frac{l}{l_1} = 2 \frac{P}{P_k} - 1.$$

Die genauere Rechnung in Pkt. 3 liefert aus den Gl. (10) für den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab die Gleichung

$$\frac{l}{l_1} = \frac{F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)}{2E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right)},$$

die auch hier gilt, da wir nur für l und l_1 die halben Werte setzen müssen.

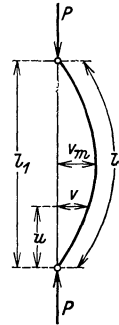


Abb. 14.

Führt man für E und F die Reihen mit den ersten zwei Gliedern ein, so wird

$$\frac{l}{l_1} = \frac{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta} \cong 1 + \sin^2 \vartheta = 1 + \frac{a^2 \delta^2}{4}.$$

Aus der Gl. (α) von Pkt. 4 folgt für $n = 0$

$$\frac{P}{P_k} = 1 + \frac{a^2 \delta^2}{8}, \quad \text{oder} \quad \frac{a^2 \delta^2}{4} = 2 \frac{P}{P_k} - 2$$

und somit ergibt sich für $\frac{l}{l_1}$ wieder die vor abgeleitete Gleichung.

In Pkt. 2 haben wir angemerkt, daß die Zerstörung des Stabes gleich nach Erreichen des kritischen Wertes erfolgt. Wir wollen das noch genauer formulieren und berechnen, welche Überschreitung der Knicklast möglich ist, bevor ein Zerstören durch Überwinden der Materialfestigkeit eintritt. Die maximale Ausbiegung des Stabes ist

$$v_m = \frac{\sqrt{8}}{\pi} l \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_k} - 1},$$

wobei $\sigma = P:F$ die durchschnittliche Druckspannung und $\sigma_k = P_k:F$ die Knickspannung bedeuten. Das größte Biegemoment ist $\sigma F \cdot v_m$, und wenn man mit dem Trägheitshalbmesser i das Widerstandsmoment des Stabquerschnittes F gleich $F \cdot i : k$ schreibt, ist die Gesamtspannung

$$\sigma_1 = \sigma \left[1 + k \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{l}{i} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_k} - 1} \right].$$

Daraus entsteht mit der EULERSchen Formel $\left(\frac{l}{i}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_k}$ die Gleichung dritten Grades

$$(\sigma_1 - \sigma)^2 = 8 k^2 E \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 (\sigma - \sigma_k),$$

aus der sich zu jedem bekannten σ_k und zur Bruchspannung σ_1 ein σ berechnen läßt. Nun ist $\sigma - \sigma_k$ klein gegen σ und $\sigma_1 - \sigma$ klein gegen E , und man kann daher auch annähernd

$$\sigma = \sigma_k + \frac{1}{8 k^2} \frac{(\sigma_1 - \sigma_k)^2}{E}$$

setzen. Hierbei ist für den Kreisquerschnitt $k = 2$, für den dünnen Kreisring $k = \sqrt{2}$ und für den Rechteckquerschnitt $k = \sqrt{3}$. Die Erhöhung der „Traglast“ $P = F \cdot \sigma$ über die Knicklast $P_k = F \cdot \sigma_k$ ist bei den üblichen Werten σ_1 ganz unmerklich.

Wir heben wieder hervor, daß diese Überlegungen nur zutreffen, wenn das HOOKESche Gesetz unbeschränkt gilt.

b) Der an beiden Enden eingespannte Stab (Abb. 15).

Das Biegemoment im Querschnitt mit dem Abstand u von der Einspannstelle ist

$$M_u = M + Q \cdot u + P \cdot v,$$

wenn M das Einspannmoment und Q die Querkraft bedeuten. Die Differentialgleichung der Elastica wird damit

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} + M + Q \cdot u + P \cdot v = 0,$$

unter den Randbedingungen $v = 0$, $v' = 0$ für $u = 0$ und $u = l$. Die Lösung lautet

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au - \frac{Q}{P} u - \frac{M}{P}, \quad a^2 = \frac{P}{EI}$$

und mithin ist

$$v' = a C_1 \cdot \cos au - a C_2 \cdot \sin au - \frac{Q}{P}.$$

Die beiden Randwerte für $u = 0$ liefern die Konstanten $C_1 = \frac{1}{a} \frac{Q}{P}$, $C_2 = \frac{M}{P}$ und daher sind

$$v = \frac{Q}{P} \left(\frac{\sin au}{a} - u \right) + \frac{M}{P} (\cos au - 1),$$

$$v' = \frac{Q}{P} (\cos au - 1) - \frac{M}{P} a \cdot \sin au.$$

Die Randbedingungen für $u = l$ ergeben die Beziehungen

$$0 = \frac{Q}{P} \left(\frac{\sin al}{a} - l \right) + \frac{M}{P} (\cos al - 1),$$

$$0 = \frac{Q}{P} (\cos al - 1) - \frac{M}{P} a \cdot \sin al.$$

Aus diesen zwei Gleichungen mit den Unbekannten Q und M eliminiert man z. B. $\frac{Q}{P}$ und erhält die Knickbedingung

$$0 = \frac{M}{P} \cdot \frac{\sin \frac{al}{2} \cdot \left(\sin \frac{al}{2} - \frac{al}{2} \cdot \cos \frac{al}{2} \right)}{(\sin al - al)(\cos al - 1)}.$$

$M = 0$ ist die gestreckte Form des Gleichgewichts; der gleich Null gesetzte Zähler des angeschriebenen Bruches ist die Gleichung, deren kleinste Wurzel die Knicklast ist.

Wir können von vornherein so schließen: Die beiden Gleichungen besitzen nur dann eine von Null verschiedene Lösung für Q und M , wenn ihre Determinante gleich Null ist. Das Nullsetzen der Koeffizientendeterminante liefert die Knickgleichung

$$0 = \sin \frac{al}{2} \cdot \left(\sin \frac{al}{2} - \frac{al}{2} \cdot \cos \frac{al}{2} \right)$$

uns aus dem Faktor $\sin \frac{al}{2} = 0$ folgt als kleinste EULERSche Knicklast

$$P_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Diesen Wert bekommt man aus der Formel für den beiderseits punktartig gelagerten Stab bei einer freien Knicklänge von der Größe $\frac{l}{2}$.

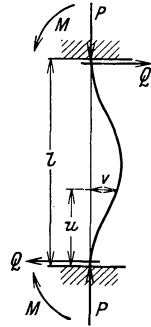
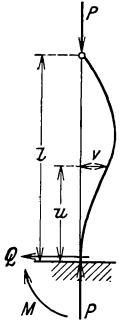


Abb. 15.

- c) Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende gelenkig in der Achse geführte Stab (Abb. 16).

Die Differentialgleichung der Biegelinie hat für diese Aufgabe dieselbe Form wie bei b, und die Randwerte sind nun $u = 0, v = 0, v' = 0$ und $u = l, v = 0$. Hierzu kommt noch der Zusammenhang $M = -Q \cdot l$.



Mit Hilfe der zwei Bedingungen für $u = 0$ erhalten wir nach früherem die Gleichung

$$v = \frac{Q}{P} \left(\frac{\sin au}{a} - u \right) + \frac{M}{P} (\cos au - 1), \quad a^2 = \frac{P}{EI}$$

und die zwei anderen Bedingungen ergeben daraus die Knickgleichung

$$0 = \frac{Q}{Pa} (\sin al - al \cdot \cos al) \text{ oder } \operatorname{tg} al = al.$$

Ihre kleinste von Null verschiedene Lösung ist $al \cong 4,4934$, und damit wird die erste EULERSche Knicklast

$$P_k = 20,19 \frac{EI}{l^2} \cong 2\pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Abb. 16.

Die freie Knicklänge ist jetzt $l: \sqrt{2} \cong 0,7l$.

8. Der elastisch gestützte Stab.

- a) Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende elastisch gestützte Stab (Abb. 17).

Der durch die Kraft P zentrisch gedrückte Stab von der Länge l ist an einem Ende eingespannt, am anderen Ende elastisch in einer Spitze gelagert. An der Spitze wirkt eine Auflagerkraft, die wir gleich $A \cdot \delta$ setzen, wobei δ die Ausbiegung des Stabendes ist und A einen Beiwert vorstellt, der durch die Stützkonstruktion gegeben wird.

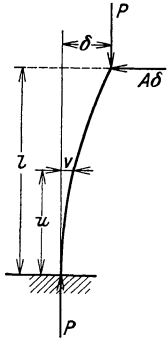


Abb. 17.

Im Querschnitt u, v ist das Biegemoment

$$M = -A \delta (l - u) + P (\delta - v);$$

somit lautet die Differentialgleichung der Elastica

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} + A \delta (l - u) - P (\delta - v) = 0$$

und ihre Lösung

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au + \delta - \delta \frac{A}{P} (l - u), \quad a^2 = \frac{P}{EI}.$$

Die Randbedingungen $u = 0, v = 0, v' = 0$ bestimmen die Konstanten C_1 und C_2 , und man erhält

$$v = \delta \cdot \left[-\frac{A}{Pa} \sin au - \left(1 - \frac{Al}{P} \right) \cos au + \left(1 - \frac{Al}{P} + \frac{Au}{P} \right) \right].$$

Mit dem Randwert $u = l, v = \delta$ findet man die Knickgleichung

$$0 = \delta \cdot \left[\frac{A}{Pa} \sin al + \left(1 - \frac{Al}{P} \right) \cos al \right].$$

Sie wird erfüllt für $\delta = 0$ bei Gleichgewicht ohne Ausbiegung oder bei der Bedingung

$$\operatorname{tg} a l = a l \cdot \left(1 - \frac{a^2 E I}{A l} \right),$$

aus der bei einem bekannten Beiwert A die Knicklast berechnet werden kann.

Für den am Ort der elastischen Spitzenlagerung freien Stab ist $A = 0$ und $\operatorname{tg} a l = \infty$; für den dort fest gestützten Stab ist $A = \infty$ und $\operatorname{tg} a l = a l$.

b) Der am eingespannten Ende elastisch gestützte, am anderen Ende festgehaltene Stab. (Vgl. Abb. 16.)

Wir untersuchen den durch die Kraft P zentrisch gedrückten Stab von der Länge l , der an einem Ende eingespannt, am anderen Ende in einer Spitze festgehalten ist. Die Stützung an der Einspannstelle sei elastisch, d. h. derart, daß ein Gleiten erfolgen kann. Man kann sich das etwa so verwirklicht denken: Ein eiserner vertikal stehender Stab wäre mit Winkeleisen an einen waagrechten Stab eingespannt angeschlossen. Die Anschlußnieten im waagrechten Schenkel der Winkeleisen geben nach und die Einspannstelle verschiebt sich. Die Aufgabe ist unter diesen Annahmen analog der bei a) behandelten.

Die beim Gleiten entstehende Verschiebung Δ setzen wir gleich $Q : A$, wobei Q die Querkraft (Auflagerkraft) ist und der Beiwert A die Kraft vorstellt, die die Verschiebung „Eins“ hervorruft. Nun ist das Einspannmoment $M = -Q \cdot l$, also $\Delta = -\frac{M}{A l}$. Setzen wir weiter $\frac{\Delta}{l}$ gleich dem Wert v' an der Einspannstelle, so ist

$$v' = k \cdot M \quad \text{mit} \quad k = -\frac{1}{A l^2}.$$

Die Tangente des Neigungswinkels der Elastica an der Einspannstelle ist proportional dem Biegemoment.

Die Gleichung der elastischen Linie ist mit $M = -Q \cdot l$ (vgl. Pkt. 7, b)

$$v = C_1 \cdot \sin a u + C_2 \cdot \cos a u + \frac{M}{P} \frac{u}{l} - \frac{M}{P}, \quad a^2 = \frac{P}{E I}$$

unter den Randwerten $u = 0, v = 0, v' = k \cdot M$ und $u = l, v = 0$. Die zwei Bedingungen für $u = 0$ ergeben die Konstanten C_1 und C_2 , und es entsteht die Gleichung

$$v = \frac{M}{P} \left[(k P l - 1) \frac{\sin a u}{a l} + \cos a u + \frac{u}{l} - 1 \right]$$

und für $u = l$ erhält man die Knickbedingung

$$0 = \frac{M}{P} \left[(k P l - 1) \frac{\sin a l}{a l} + \cos a l \right].$$

$M = 0$ bedeutet das Gleichgewicht ohne Ausbiegung, und aus dem gleich Null gesetzten Klammersausdruck

$$\operatorname{tg} a l \cdot \left(1 + \frac{a^2 E I}{A l} \right) = a l$$

läßt sich bei einem gegebenen Wert von A die Knicklast berechnen.

Bei dem vollständig eingespannten Stab ist $A = \infty$ ($v' = 0$) und $\operatorname{tg} al = al$; für ein Gelenk an Stelle der Einspannung sind $M = 0$, $A = 0$ (damit wird v' unbestimmt) und $\sin al = 0$ in Übereinstimmung mit den früheren Herleitungen.

Analoge Rechnungen lassen sich für andere Lagerungsfälle bei einer elastischen Einspannung durchführen.

9. Der in Schneiden gelagerte Stab.

a) Wir betrachten den Stab unter der Randbedingung, daß das Ende um eine die Stabachse senkrecht schneidende Linie, eine „Schneide“, frei beweglich ist. In der Ebene, die durch die Stabachse und diese Linie bestimmt ist, kann man das Stabende als eingespannt ansehen. Hat die Schneide die Richtung einer Trägheitshauptachse des Querschnittes, so läßt sich die Knicklast gewöhnlich nach den bereits vor angegebenen

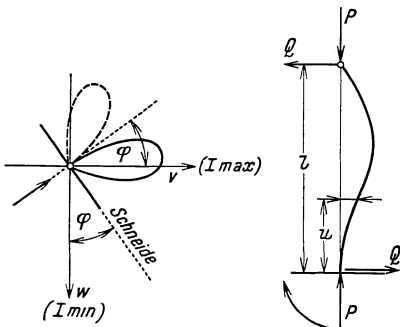


Abb. 18.

Formeln beurteilen. Wir wollen jetzt aber den allgemeinen Fall untersuchen, bei dem die Schneide nicht in die Richtung einer Hauptachse fällt.¹ — In der Praxis des Stahlbaues wird die hier vorausgesetzte Schneide durch das Annieten von Winkeleisenstäben an Knotenbleche realisiert.

Gegeben sei ein Stab von der Länge l , bei dem ein Ende in einer Schneide, das andere in einer Spitze gelagert ist (Abb. 18).

Für unsere Rechnung nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem u, v, w an, bei dem der Ursprung in einem Stabende liegt, die u -Achse mit der Stabachse und die v - und w -Achse mit den Hauptachsen der Querschnitte im unverformten Zustand zusammenfallen. Die Komponenten der Ausbiegung sind v bzw. w . Die Schneide liege in der v - w -Ebene und schließe mit der w -Achse (I_{\min} -Achse) den Winkel φ ein.

Bei der Ausbiegung muß das der Schneide benachbarte Stabelement in der zur Schneide senkrecht stehenden Ebene bleiben. Von da an kann sich die elastische Linie in einer rechts oder links gewundenen Kurve der Spitze in $u = l$ nähern. Im Sinne des Pfeiles betrachtet, ist in der Abb. 18 für die stark ausgezogene Biegelinie das System der äußeren Kräfte dargestellt, mit denen sich der Stab im Gleichgewicht befindet: die axiale Kraft P , das Einspannmoment an der Schneide in der Ein-

¹ P. FILLINGER: Über die EULERSCHEN Knickbedingungen für Stäbe mit Schneidenlagerung. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 6, S. 294—308. 1926. — Näherungsrechnungen finden sich bei E. ELWITZ: Die Lehre von der Knickfestigkeit. Hannover, 1918. S. 192f. — Siehe auch unsere Entwicklungen in Pkt. 82.

spannebene und das Kräftepaar $Q \cdot l$, das dem Einspannmoment das Gleichgewicht hält. Ein Drillingsmoment tritt nicht auf; es müßte über den Stab konstant sein und verschwindet an der Schneide, da dort der Verdrehungswinkel gleich Null ist.

Die Komponenten des Biegemomentes im Querschnitt u sind in der v - u - und w - u -Ebene

$$M = P \cdot v + Q \cdot \sin \varphi \cdot (l - u), \quad N = P \cdot w + Q \cdot \cos \varphi \cdot (l - u).$$

Zufolge $I_w = I_{\min}$, $I_v = I_{\max}$ lauten die Differentialgleichungen der Elastica

$$E I_{\min} \cdot \frac{d^2 v}{d u^2} + P \cdot v + Q \cdot \sin \varphi \cdot (l - u) = 0,$$

$$E I_{\max} \cdot \frac{d^2 w}{d u^2} + P \cdot w + Q \cdot \cos \varphi \cdot (l - u) = 0,$$

unter den Randbedingungen $v = 0$, $w = 0$ für $u = 0$ und $u = l$ und der Schneidenbedingung $u = 0$, $v' \cdot \sin \varphi + w' \cdot \cos \varphi = 0$. Bei einer Ausbiegung nach der im Grundriß gestrichelten Kurve wäre statt $+Q$ der Wert $-Q$ zu setzen, wenn man ein Einspannmoment mit entgegengesetztem Vorzeichen annimmt. Wir behalten aber jetzt das positive Zeichen bei.

Mit den Abkürzungen

$$\frac{P}{E I_{\max}} = \alpha^2, \quad \frac{P}{E I_{\min}} = \beta^2$$

sind die Integrale dieser Gleichungen

$$v = C_1 \cdot \sin \beta u + C_2 \cdot \cos \beta u - \frac{Q}{P} (l - u) \cdot \sin \varphi,$$

$$w = C_3 \cdot \sin \alpha u + C_4 \cdot \cos \alpha u - \frac{Q}{P} (l - u) \cdot \cos \varphi.$$

Geht man mit den Randbedingungen ein, so erhält man fünf Gleichungen für die vier Konstanten C und den Wert $Q:P$ und ihre gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante ist die Knickbedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} . & 1 & . & . & -l \sin \varphi \\ . & . & . & 1 & -l \cos \varphi \\ \sin \beta l & \cos \beta l & . & . & . \\ . & . & \sin \alpha l & \cos \alpha l & . \\ \beta \sin \varphi & . & \alpha \cos \varphi & . & 1 \end{vmatrix}$$

und ausgerechnet

$$\sin \alpha l \cdot \sin \beta l - \alpha l \cdot \cos \alpha l \cdot \sin \beta l \cdot \cos^2 \varphi - \beta l \cdot \sin \alpha l \cdot \cos \beta l \cdot \sin^2 \varphi = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = - \frac{\sin \beta l \cdot (\alpha l \cdot \cos \alpha l - \sin \alpha l)}{\sin \alpha l \cdot (\beta l \cdot \cos \beta l - \sin \beta l)}.$$

Das Vorzeichen von Q ist auf das Ergebnis ohne Einfluß geblieben, da bei $-Q$ an Stelle von $+Q$ nur die letzte Spalte der Determinante mit -1 multipliziert wäre. Aus der angeschriebenen Gleichung kann man

die Knicklast bestimmen, sobald das Verhältnis $I_{\max}:I_{\min} = \beta^2:\alpha^2$ und der Schneidenwinkel φ gegeben sind.

Die *Elastica* ist im allgemeinen eine Raumkurve. Unter Zuhilfenahme der Randbedingungen erhält man

$$v = C \cdot \sin \varphi \cdot \left(\frac{\sin \beta (l-u)}{\sin \beta l} - \frac{l-u}{l} \right),$$

$$w = C \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{\sin \alpha (l-u)}{\sin \alpha l} - \frac{l-u}{l} \right),$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. (Infolge der vereinfachten Ansätze für die Biegelinie mußte diese Unbestimmtheit zurückbleiben.)

Für $\varphi = 0$, d. h. wenn die Schneide die Richtung der Hauptträgheitsachse I_{\min} hat, ist die Knickgleichung

$$\sin \beta l \cdot (\alpha l \cdot \cos \alpha l - \sin \alpha l) = 0$$

und die kleinste Knicklast wird, wie vorauszusehen,

$$P_k = \pi^2 \frac{E I_{\min}}{l^2}.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d. h. bei einer Schneide in Richtung der Hauptträgheitsachse I_{\max} , ist die Knickbedingung

$$\sin \alpha l \cdot (\beta l \cdot \cos \beta l - \sin \beta l) = 0$$

und die Knicklasten werden

$$P_k = \pi^2 \frac{E I_{\max}}{l^2} \quad \text{bzw.} \quad 20,19 \frac{E I_{\min}}{l^2}.$$

Bestimmt man für diese Fälle die Gestalt der elastischen Linie aus den Gleichgewichtsgruppen, in welche die fünf Randbedingungen zerfallen, so findet man: Liegt die Schneide in der Richtung einer Hauptträgheitsachse, so ist die *Elastica* im allgemeinen eine ebene Kurve in der Hauptträgheitsebene, für die die größere Knickgefahr besteht. Bei besonderen Werten des Verhältnisses $\alpha:\beta$ ist aber die Ausbildung einer räumlichen elastischen Linie möglich, wobei die Ausbiegungen in den Richtungen v und w voneinander nicht abhängig sind. Ein solcher Fall tritt ein, wenn z. B. für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die beiden angeschriebenen Knickwerte gleich sind.

Die Knickbedingung ist vom Winkel φ unabhängig, wenn

$$\alpha l \cdot \cos \alpha l \cdot \sin \beta l = \beta l \cdot \sin \alpha l \cdot \cos \beta l$$

und lautet dann

$$\sin \alpha l \cdot \sin \beta l - \alpha l \cdot \cos \alpha l \cdot \sin \beta l = 0.$$

Im Fall der *Axialsymmetrie* ist die Knickgleichung somit

$$\sin \alpha l \cdot (\alpha l \cdot \cos \alpha l - \sin \alpha l) = 0.$$

Die Biegelinien sind ebene Kurven, und zwar liegt die Linie, die zur Bedingung $\sin \alpha l = 0$ gehört, in der Ebene senkrecht zur Schneide, die der Bedingung $\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$ entspricht, in der Ebene der Schneide.

b) Sind *beide Stabenden in Schneiden gelagert*, wobei die Winkel zwischen den Schneiden und der w -Achse (I_{\min} -Achse) mit φ_1 bzw. φ_2 bezeichnet sind, so lautet die in analoger Weise hergeleitete Knickgleichung mit den früheren Parametern α und β

$$\begin{aligned} & \alpha l \cdot \sin \beta l \cdot \cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2 \cdot (2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \cdot \sin \alpha l) \\ & + \beta l \cdot \sin \alpha l \cdot \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2 \cdot (2 - 2 \cos \beta l - \beta l \cdot \sin \beta l) \\ & + (\sin^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2) \cdot (\sin \alpha l - \alpha l \cdot \cos \alpha l) \cdot (\sin \beta l - \beta l \cdot \cos \beta l) \\ & - 2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot (\alpha l - \sin \alpha l) \cdot (\beta l - \sin \beta l) = 0. \end{aligned}$$

Bei einem gleichschenkeligen Winkelleisen von der Länge l , mit $I_{\max}:I_{\min} = 3,8$, von dem beide Schneiden parallel zu einem Schenkel sind, ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, und die Knicklast wird

$$P_k = 0,87 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Hierbei ist I das Trägheitsmoment bezüglich der zu einem Schenkel parallelen Schwerachse. — Sind die beiden Schneiden zu den Schenkeln parallel, aber zueinander senkrecht, so daß $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \mp \frac{\pi}{4}$, so ergibt sich die erste Knicklast zu

$$P_k = 1,38 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Bei einem ungleichschenkeligen Winkelleisen vom Schenkelverhältnis 2:3 mit $I_{\max}:I_{\min} = 5,60$, mit Schneiden, die parallel mit den breiten Schenkeln laufen, ist $\varphi_1 = \varphi_2 = 67^\circ 44'$, und die Knicklast beträgt

$$P_k = 0,90 \cdot \pi^2 \frac{EI_b}{l^2}.$$

Sind die Schneiden parallel zu den schmalen Schenkeln, so ist $\varphi_1 = \varphi_2 = 23^\circ 16'$, und die kritische Last wird

$$P_k = 0,73 \cdot \pi^2 \frac{EI_a}{l^2}.$$

I_b und I_a sind die Trägheitsmomente, bezogen auf die zum breiten bzw. auf die zum schmalen Schenkel parallele Schwerachse.¹

§ 3. Der gerade Stab unter verschiedenen Belastungen.

10. Das Knicken unter Temperaturspannungen.

Der beiderseits gelenkig gelagerte Stab von der Länge l und der Querschnittsfläche F dehne sich bei einer Erwärmung um ϑ^0 spannungsfrei auf die Länge $l(1 + k \cdot \vartheta)$ aus, wenn k der Temperatúrausdehnungskoeffizient des Stabmaterials ist. Nimmt der ausgebogene Stab hierbei die Länge s an, so muß eine Druckkraft P vorhanden sein, die sich aus der Gleichung $\frac{l(1 + k \cdot \vartheta) - s}{l} = \frac{P}{EF}$ bestimmt. Setzt man für EF den Wert aus

¹ P. FILLUNGER: A. a. O., S. 299f. — Siehe auch Pkt. 82.

der EULERSCHEN Formel $P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 EF \left(\frac{i}{l}\right)^2$ ein, i ist der Trägheitshalbmesser der Querschnittsfläche F und $l:i$ die sog. „Schlankheit“ des Stabes, so erhält man die Gleichung

$$\frac{s}{l} + \frac{P}{P_k} \pi^2 \left(\frac{i}{l}\right)^2 = 1 + k \vartheta. \quad (a)$$

In einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit den Abszissen $P:P_k$ und den Ordinaten $s:l$ ist Gl. (a) eine gerade Linie, die auf der Ordinatenachse den Wert $1 + k \vartheta$ abschneidet und die eine von der Schlankheit abhängige Neigung $\pi^2 \left(\frac{i}{l}\right)^2$ besitzt (Abb. 19).

Eine zweite Beziehung zwischen $P:P_k$ und $s:l$ folgt aus der Knicktheorie, da es zu jedem $P:P_k > 1$ eine ganz bestimmte Biegelinie gibt.

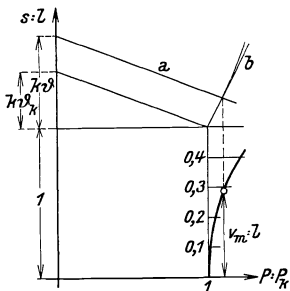


Abb. 19.

Diese zweite Kurve (b) beginnt in der Abb. 19 im Punkt 1, 1 und steigt wie gezeichnet an. Projiziert man ihren Schnittpunkt mit der Geraden (a) auf die Linie, die $v_m:l$ als Funktion von $P:P_k$ darstellt, so erhält man die Größe der Ausbiegung v_m der Stabmitte. In erster Näherung wird dieser Zusammenhang nach Pkt. 7 sinngemäß durch die lineare Gleichung

$$\frac{s}{l} - 2 \frac{P}{P_k} = -1 \quad (b)$$

ausgedrückt. In der Abb. 19 ist (b) eine gerade Linie mit der festen Neigung 2, sie ist zugleich die Anfangstangente für die richtige Linie. Aus (a) und (b) entsteht

$$\frac{P}{P_k} \left(2 + \pi^2 \frac{i^2}{l^2}\right) = 2 + k \vartheta.$$

Nun gilt nach Pkt. 7 für die Ausbiegung v_m die Gleichung $v_m = \sqrt{8} \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1}$, wobei wir s mit l identifizieren; somit ist jetzt

$$v_m = \sqrt{8} \frac{l}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 + k \vartheta}{2 + \pi^2 \frac{i^2}{l^2}} - 1}$$

und daher

$$\vartheta_k = \frac{\pi^2}{k} \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2$$

die *kritische Temperatur*, bei der das Ausknicken beginnt. In der Abbildung schneidet die durch den Anfangspunkt 1, 1 gehende Parallele zu (a) auf der Ordinatenachse den Wert $1 + k \vartheta_k$ ab.

Der Ausdruck für die Ausbiegung kann noch etwas vereinfacht werden.¹ Es ist

¹ Die Gleichung findet sich auch bei F. GRASHOF: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. Berlin, 1878. S. 189. Die hier mitgeteilte Ableitung rührt von R. v. MISES her.

$$v_m = \sqrt{8} \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{k(\vartheta - \vartheta_k)}{2 + k\vartheta_k}} \approx \frac{2l}{\pi} \sqrt{k(\vartheta - \vartheta_k)}.$$

Wir haben bei unserer Ableitung eine gelenkige Lagerung der Stabenden vorausgesetzt; bei anderen EULERSCHEN Fällen hat man für l die freie Knicklänge einzuführen (vgl. Pkt. 7).

Man kann diese Aufgabe auch erweitern und eine ungleichmäßige, z. B. linear verteilte Erwärmung über den Stabquerschnitt annehmen. Dann verbiegt sich der Stab von Beginn an, und man kommt zu Problemen, die wir im zweiten Abschnitt behandeln. Wir werden aber auf diese Frage nicht weiter eingehen, da wir uns bei diesen Biegefällen im wesentlichen mit der grundsätzlichen Erledigung begnügen.

11. Der durch zwei zentrische Kräfte beanspruchte Stab.

Wir untersuchen den an einem Ende eingespannten Stab vom Querschnittsträgheitsmoment I und nehmen an, daß am freien Ende $u = l$ die zentrische Druckkraft P_1 und im Abstand $u = l_2$ von der Einspannstelle die zentrische Kraft P_2 wirkt (Abb. 20).

Die elastische Linie besteht aus zwei Ästen oder Feldern mit den Längen l_1 und l_2 , die stetig ineinander übergehen. Bei der Integration der Differentialgleichung der *Elastica* erhält man für jedes Feld zwei Konstante; wir haben also zwei Konstante mehr als im früheren Fall mit einer Endlast, aber der stetige Übergang der Biegelinie im Lastpunkt von P_2 liefert wieder zwei neue Gleichungen.

Wir bezeichnen die Ausbiegung im Endpunkt $u = l_1 + l_2 = l$ mit δ , die Ausbiegung an der Laststelle $u = l_2$ mit δ_1 . Damit wird die Differentialgleichung der elastischen Linie für das Feld l_2

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} - P_1(\delta - v) - P_2(\delta_1 - v) = 0$$

und ihr Integral ist

$$v = C_1 \cdot \sin bu + C_2 \cdot \cos bu + \frac{P_1 \delta + P_2 \delta_1}{P_1 + P_2}, \quad b^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI}.$$

Für das Feld l_1 sind die entsprechenden Gleichungen

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} - P_1(\delta - v) = 0$$

und

$$v = C_3 \cdot \sin au + C_4 \cdot \cos au + \delta, \quad a^2 = \frac{P_1}{EI}.$$

Die Randwerte $u = 0, v = 0, v' = 0$ liefern die Konstanten $C_1 = 0, C_2 = -\frac{P_1 \delta + P_2 \delta_1}{P_1 + P_2}$. Im Lastpunkt von P_2 werden nun die Ausbiegung δ_1 und die Neigung der *Elastica* aus den Gleichungen vom Feld l_2

$$\delta_1 = P_1 \cdot \delta \frac{1 - \cos bl_2}{P_1 + P_2 \cdot \cos bl_2}, \quad v' = P_1 \cdot \delta \frac{b \cdot \sin bl_2}{P_1 + P_2 \cdot \cos bl_2}$$

und aus der elastischen Linie vom Feld l_1

$$\delta_1 = C_3 \cdot \sin al_2 + C_4 \cdot \cos al_2 + \delta, \quad v' = C_3 a \cdot \cos al_2 - C_4 a \cdot \sin al_2.$$

Ratzersdorfer, Knickfestigkeit.

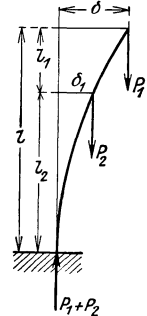


Abb. 20.

Mit Gleichsetzen erhält man

$$C_3 = \frac{\delta}{P_1 + P_2 \cdot \cos bl_2} \left[-(P_1 + P_2) \cdot \cos bl_2 \cdot \sin al_2 + P_1 \frac{b}{a} \cdot \sin bl_2 \cdot \cos al_2 \right],$$

$$C_4 = \frac{\delta}{P_1 + P_2 \cdot \cos bl_2} \left[-(P_1 + P_2) \cdot \cos bl_2 \cdot \cos al_2 - P_1 \frac{b}{a} \cdot \sin bl_2 \cdot \sin al_2 \right].$$

Aus der Biegelinie für das Feld l_1 gewinnt man jetzt mit dem Randwert $u = l$, $v = \delta$ die Beziehung

$$0 = \frac{\delta}{P_1 + P_2 \cdot \cos bl_2} \left[-(P_1 + P_2) \cdot \cos bl_2 \cdot \cos al_1 + P_1 \frac{b}{a} \cdot \sin bl_2 \cdot \sin al_1 \right].$$

Entweder ist $\delta = 0$, also das Gleichgewicht ohne Ausbiegung vorhanden, oder es besteht die Knickbedingung

$$\operatorname{tg} al_1 \cdot \operatorname{tg} bl_2 = \frac{b}{a}.$$

Bei einem bekannten Verhältnis von P_1 und P_2 läßt sich daraus die Knicklast bestimmen.¹

Für $P_2 = 0$ sind $a = b$ und die Knickgleichung wird $\frac{\cos al}{\cos al_1 \cdot \cos al_2} = 0$, $al = \frac{\pi}{2}$ und $P_{1,k} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$; bei $P_1 = 0$ ist $P_{2,k} = \frac{\pi^2 EI}{4 l_2^2}$.

Das Aufsuchen der Knicklast bietet auch keine grundsätzliche Schwierigkeit, wenn der Stab durch mehr als zwei Kräfte beansprucht ist. Jeder neuen Last und damit neuem Feld entsprechen zwei zusätzliche Integrationskonstanten und infolge der Stetigkeit der Biegelinie wieder zwei Gleichungen. Bei anderen Lagerbedingungen, die wir früher besprochen haben, wäre die Rechnung in der gleichen Weise zu behandeln. Im sechsten Abschnitt werden wir auf solche Probleme zurückkommen und sie dort allgemein erledigen.

12. Der durch eine zentrische Kraft und ein Drillungsmoment beanspruchte Stab.

Der an beiden Enden gelenkig gelagerte kreiszylindrische Stab sei durch die zentrische Druckkraft P belastet und außerdem durch ein drillendes Kräftepaar M beansprucht, dessen Achse (Vektor) mit der Stabachse zusammenfällt (Abb. 21).

Wir nehmen ein rechtwinkeliges Achsensystem u , v , w an, dessen u -Achse die unverformte Stabachse ist und dessen Koordinatenanfangspunkt in einem Stabende liegt. Die Komponenten des in einem beliebigen Querschnitt auftretenden Biegemomentes um die w - und v -Achse sind

$$\pm EI \frac{d^2 v}{du^2}, \quad \pm EI \frac{d^2 w}{du^2}.$$

Hierbei gilt das positive Vorzeichen, wenn dieser Ausdruck mit wachsen-

¹ Zur gleichen Formel gelangt F. WITTENBAUER: Die Verallgemeinerung der EULERSchen Knicklast. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 47, S. 245—247. 1903.

dem u zunimmt. — Um das Gleichgewicht des von dem betrachteten Querschnitt und einem Stabende begrenzten Stabstückes auszudrücken, schreiben wir die Momentengleichungen für die zwei Achsen an, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes hindurchgehen und zur w - bzw. v -Achse parallel sind. Da wir nur eine kleine Verformung aus der geraden Gleichgewichtslage voraussetzen, können wir den Momentenvektor M im Schnittquerschnitt tangentiell an die Stabachse wirkend annehmen. Die Biegemomente der Kraft P bezüglich der Achsen w und v sind $P \cdot v$ und $P \cdot w$. Die Komponenten von M sind mit dem festgelegten Drehsinn dann $\pm M \frac{dw}{du}$ und $\mp M \frac{dv}{du}$, wenn $\frac{dw}{du}$ und $\frac{dv}{du}$ für die „Richtungskosinusse“ eines Stabelements gesetzt werden. Somit lauten die Differentialgleichungen der Biegelinie

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} - M \frac{dw}{du} + P \cdot v = 0,$$

$$EI \frac{d^2 w}{du^2} + M \frac{dv}{du} + P \cdot w = 0,$$

unter den Randbedingungen $v = 0, w = 0$ für $u = 0$ und $u = l$. (Die Umkehrung der Vorzeichen bei M bedeutet nur eine Vertauschung von v und w .)

Diese beiden Gleichungen lassen sich auf zwei gleichartige lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung zurückführen. Berechnen wir z. B. aus der ersten Gleichung $\frac{dw}{du}$

und setzen in die nach u differenzierte zweite Gleichung ein, so entsteht

$$\frac{d^4 v}{du^4} + \left[\frac{2P}{EI} + \left(\frac{M}{EI} \right)^2 \right] \frac{d^2 v}{du^2} + \left(\frac{P}{EI} \right)^2 v = 0.$$

In analoger Weise erhält man eine zweite Differentialgleichung, in der v durch w ersetzt ist. — Die charakteristische Gleichung kann nun in der Form

$$\left((i r)^2 - \frac{M}{EI} (i r) - \frac{P}{EI} \right) \left((i r)^2 + \frac{M}{EI} (i r) - \frac{P}{EI} \right) = 0$$

angeschrieben werden, und die Lösung der quadratischen Gleichungen ergibt

$$i \cdot r_{1,2} = + \frac{M}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{2EI} \right)^2 + \frac{P}{EI}} = \alpha_{1,2},$$

$$i \cdot r_{3,4} = - \frac{M}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{2EI} \right)^2 + \frac{P}{EI}} = \alpha_{3,4},$$

also $\alpha_1 = -\alpha_4, \alpha_2 = -\alpha_3$. Die Gleichungen der Biegelinie sind daher (unter Berücksichtigen der ursprünglichen Differentialgleichungen)

$$v = C_1 \cdot \sin \alpha_1 u + C_2 \cdot \cos \alpha_1 u + C_3 \cdot \sin \alpha_2 u + C_4 \cdot \cos \alpha_2 u,$$

$$w = C_1 \cdot \cos \alpha_1 u - C_2 \cdot \sin \alpha_1 u + C_3 \cdot \cos \alpha_2 u - C_4 \cdot \sin \alpha_2 u.$$

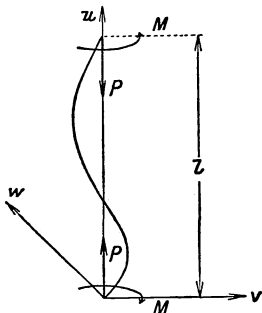


Abb. 21.

Die Randbedingungen ergeben die Konstantengleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= C_2 + C_4, \quad 0 = C_1 + C_3, \\ 0 &= C_1 \cdot \sin \alpha_1 l + C_2 \cdot \cos \alpha_1 l + C_3 \cdot \sin \alpha_2 l + C_4 \cdot \cos \alpha_2 l, \\ 0 &= C_1 \cdot \cos \alpha_1 l - C_2 \cdot \sin \alpha_1 l + C_3 \cdot \cos \alpha_2 l - C_4 \cdot \sin \alpha_2 l, \end{aligned}$$

und ihre gleich Null gesetzte Determinante ist die Stabilitätsbedingung. Schreibt man die Koeffizientendeterminante der C_1 bis C_4 an und subtrahiert man die dritte Spalte von der ersten, die vierte von der zweiten, so wird nach Ausrechnen

$$(\sin \alpha_1 l - \sin \alpha_2 l)^2 + (\cos \alpha_1 l - \cos \alpha_2 l)^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{l}{2} = 0.$$

Mit dem kleinsten von Null verschiedenen Wert $\alpha_1 - \alpha_2 = 2 \frac{\pi}{l}$ und den Gleichungen für α erhält man für die kritischen Werte von M und P den Zusammenhang

$$\left(\frac{M}{2EI} \right)^2 + \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Der dem Druck P und dem Drillungsmoment M unterworfenen Stab ist instabil, wenn die linke Seite dieser Gleichung größer ist als $\frac{\pi^2}{l^2}$.

Für $M = 0$ ergibt sich die EULERSche Knickformel. Mit $P = 0$ folgt

$$M_k = 2 \frac{\pi}{l} EI,$$

das noch mit einer geraden Gleichgewichtsfigur des Stabes verträgliche Drillungsmoment. Wirkt auf den Stab eine Zugkraft, so ist P mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Der Stab ist bei diesem Angriff gegen Torsion widerstandsfähiger, und auch bei einem drillenden Moment, das größer als M_k ist, kann die geradlinige Form noch stabil sein.

Um uns schließlich ein Bild von der Biegelinie zu machen, quadrieren und addieren wir die Gleichungen für v und w und bekommen

$$v^2 + w^2 = 4 (C_1^2 + C_2^2) \cdot \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{u}{2}$$

und mit Berücksichtigen des kritischen Wertes von $(\alpha_1 - \alpha_2)$

$$v^2 + w^2 = 4 C^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{l} u, \quad C^2 = (C_1^2 + C_2^2).$$

Die Ausbiegung erfolgt nach einer Schraubenlinie auf einem Kreiszyylinder mit dem (zufolge der verwendeten Näherungstheorie) unbestimmten Radius C .¹

¹ Das Problem wurde erstmals (im Jahre 1883) von A. G. GREENHILL behandelt; LOVE-TIMPE: Lehrbuch der Elastizität, S. 481. — Vgl. auch die Untersuchungen für beliebige Stabquerschnitte bei R. GRAMMEL: Das kritische Drillungsmoment von Wellen. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 262—271. 1923. Ingenieur-Archiv, Bd. 1, S. 243. 1930.

§ 4. Weitere Untersuchungen.

13. Überlegungen zur Bernoulli-Eulerschen Biegegleichung.

a) Die vereinfachte Differentialgleichung der elastischen Linie wird öfters in der Form

$$\pm EI \frac{d^2 v}{du^2} = M + k \frac{EI}{GF} \frac{dR}{du}$$

angegeben, um die *Schubkräfte bei der Biegung* zu berücksichtigen.¹ Hierbei ist R die Querkraft an der Stelle u , d. h. die Summe der Kräfte einerseits des Schnittes normal zur Achse des gebogenen Stabes. G ist der Schubmodul und k bedeutet eine von der Querschnittsform abhängige Zahl, die die ungleichmäßige Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt F zum Ausdruck bringt. Für rechteckige Querschnitte wird $k = 1,10$, für kreisförmige wird $k = 1,33$ angenommen.

Die Überlegung, die zu diesem Ansatz führt, ist etwa die. Bezeichnet Θ den Neigungswinkel zwischen der Tangente an die gebogene Stabachse mit der u -Achse, die mit der ursprünglichen Stabachse zusammenfällt, dann gilt bei dem Biegemoment M die Gleichung $\frac{d\Theta_1}{du} = \frac{M}{EI}$ und zufolge der Querkraft R (mit dem Erfahrungsfaktor k) $\Theta_2 = \frac{k \cdot R}{GF}$, also $\frac{d\Theta_2}{du} = \frac{k}{GF} \frac{dR}{du}$. Da $d\Theta = d\Theta_1 + d\Theta_2$, ist

$$\frac{d\Theta}{du} = \frac{M}{EI} + \frac{k}{GF} \frac{dR}{du}$$

und mit $\frac{d\Theta}{du} = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 v}{du^2}$ entsteht die zuerst angeführte Gleichung.

Wir betrachten den EULERSchen Fall des beiderseits gelenkig (punktartig) gelagerten Stabes, den wir ohne Beachten der Schubkräfte in Pkt. 7 untersucht haben. Mit den gleichen Bezeichnungen wie dort sind

$$M = P \cdot v, \quad R = -\frac{dM}{du}, \quad \text{somit} \quad \frac{dR}{du} = -P \frac{d^2 v}{du^2}$$

und die Differentialgleichung der *Elastica* wird

$$EI \left(1 - \frac{k}{GF} P \right) \frac{d^2 v}{du^2} + P \cdot v = 0.$$

Die Knickbedingung ist wie früher $al = \pi$, wobei für a^2 jetzt $\frac{P}{EI \left(1 - \frac{k}{GF} P \right)}$ zu setzen ist. Berechnet man aus dieser Gleichung P , so erhält man die Knicklast

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{l^2} k \frac{EI}{GF}}$$

¹ F. ENGESSER: Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Ztrbl. d. Bauverwaltung, Bd. 11, S. 483—486. 1891. — C. KRIEMLER: Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren. Karlsruhe, 1902. S. 47. — Ebenso F. NUSSBAUM: Die genaue Säulenknicklast. Ztschr. Math. u. Physik, Bd. 55, S. 134—138. 1907.

Für einen Stab aus *Baustahl* mit Doppel-T-Querschnitt und $k = 2$ ergibt sich z. B. bei $l:i = 100$, $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$ eine Abminderung des EULER-schen Wertes um weniger als 0,5%. (Bei kurzen Stäben wird der Faktor von $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$ kleiner, aber für E ist dann, wie wir später zeigen, entsprechend der kleineren Knickspannung $P_k:F$ ein höherer Wert zu setzen und der Einfluß der Schubkräfte bleibt gleichfalls unbedeutend).

Wir haben bereits in Pkt. 2 vermerkt, daß man die Biegegleichung ohne Heranziehen der Schubspannungen bei dünnen Stäben aus einem allgemeinen Ansatz der Elastizitätstheorie erhalten kann. Dieser Korrektur läßt sich also nur eine Berechtigung zusprechen, wenn man mit ihr dem Verhalten des breiten Stabes näher kommt und eine bessere Übereinstimmung der rechnungsmäßigen Werte mit dem Experiment erreicht. Bei der Stabknickung ist diese Verbesserung aber keineswegs erforderlich.

Zum Interesse sei erwähnt, daß lange *Schraubenfedern* auch unter der Annahme berechnet werden, daß der Knickvorgang dem eines Stabes ähnlich ist. Mit dem Korrekturglied der Schubelastizität kommt man hierbei zu Ergebnissen, die durch Versuche bestätigt werden.¹

b) E. TREFFTZ entwickelt eine allgemeine Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichtes für „endliche“ Deformationen.² Entscheidend für die Stabilität ist in der energetischen Formulierung das Vorzeichen vom Ausdruck der zweiten Variation der inneren Energie, und die Stabilitätsgrenze ist erreicht, wenn dieser Ausdruck gleich Null ist. Die Anwendung des Verfahrens von TREFFTZ auf den gedrückten Stab führt zu dem folgenden Ergebnis.³

Ein Stab von der Länge l mit kreisförmigem Querschnitt sei an den Enden eingespannt. Die kritische Last ist abhängig vom Schubmodul G des Materials und von der mittleren Pressung $\sigma_k = P_k:F$. Mit den Spannungen $\sigma_k = 800 \text{ kg/cm}^2$ bzw. 1600 kg/cm^2 , die bei Flußstahl innerhalb des HOOKESchen Bereiches liegen, und dem Modul $G = 800 \text{ t/cm}^2$ ergeben sich die Knicklasten

$$P_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \cdot 0,9988 \quad \text{bzw.} \quad P_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \cdot 0,9973,$$

¹ G. B. BIEZENO u. J. J. KOCH: Knickung von Schraubenfedern. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 5, S. 279/280. 1925. — Ferner Untersuchungen ohne Berücksichtigen der Schubkräfte bei R. GRAMMEL: A. gl. O., Bd. 4, S. 384—389. 1924. Proc. of the first Internat. Congr. for Applied Mechanics. Delft, 1924. S. 276—281.

² E. TREFFTZ: Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Theorie endlicher Deformationen. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik. Stockholm, 1930. Teil III, S. 44. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 160—165. 1933.

³ K. KREUTZER: Die Stabilität des gedrückten Stabes. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 12, S. 351—368. 1932.

Werte, die praktisch voll übereinstimmen mit dem aus der BERNOULLI-EULERSchen Biegegleichung entspringenden Resultat.

14. Vorläufige Bemerkungen zum Kirchhoffschen Satz über die „Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtes“.

G. KIRCHHOFF hat im Jahre 1859 einen allgemeinen Satz aufgestellt, der in allen Darstellungen der Elastizitätstheorie Eingang gefunden hat und den er selbst so formuliert: „Das Gleichgewichtsproblem (des elastischen Körpers) hat nur eine Lösung.“

Hiermit ist gemeint, daß unter der Voraussetzung sog. kleiner Formänderungen ein einfach zusammenhängender elastischer Körper sich nur in einem bestimmten Spannungs- und Zerrungszustand im Gleichgewicht befinden kann. Weder KIRCHHOFF noch seinen Nachfolgern war es unbekannt, daß im Fall des auf Druck beanspruchten Stabes bei genügender Größe der Last zwei verschiedene Gleichgewichtszustände nebeneinander bestehen, die gestreckte Form und eine Form mit Ausbiegung. Um den Widerspruch zu beseitigen, pflegt man zwei Erklärungen zu geben. Zunächst wird gesagt, daß der zweite Gleichgewichtszustand des Stabes „endliche“ Verschiebungen aufweise, während die Elastizitätstheorie nur „unendlich kleine“ voraussetze. Wenn jedoch die Last des Stabes die kritische EULERSche Last eben erst überschreitet, so liegt ja der ausgebogene Zustand beliebig nahe dem bloß gedrückten; die Verrückungen in diesem Zustand sind aber gerade die, mit denen man in der Elastizitätstheorie zu rechnen hat. Dann wird angeführt, daß der von EULER betrachtete schlanke Stab nach beiden Dimensionen seines Querschnittes „verschwindend kleine“ Abmessungen besitze, während sich der KIRCHHOFFSche Satz nur auf Körper beziehe, deren Abmessungen nach allen Richtungen von gleicher Größenordnung seien. Es ist jedoch nicht ganz einzusehen, wie eine so präzise Behauptung — die Lösung ist eindeutig — von den stetig veränderlichen Abmessungsverhältnissen abhängen soll.

Wir können nach unseren voraufgehenden Untersuchungen jetzt nur das Folgende aussagen: Bis zu einer bestimmten Belastung des Stabes gibt es nur eine eindeutige stabile Gleichgewichtslage: nach Überschreiten dieser Last besitzt das Gleichgewichtsproblem — bei der üblichen Elastizitätstheorie mit der unbeschränkten Gültigkeit des HOOKESchen Gesetzes — mehrere Lösungen, von denen nur eine stabil ist.

Wenn man sich daran erinnert, daß nach Erreichen der kritischen Last beinahe sofort die Zerstörung des Stabes eintritt, so glaubt man zu erkennen, wieso der Eindeutigkeitssatz durchwegs als zutreffend angenommen wurde. Wir geben in Pkt. 85 noch eine vervollständigte Formulierung des KIRCHHOFFSchen Satzes, mit der wir zwar auch nicht irgendwelche praktische Ergebnisse erzielen, aber eine begriffliche Klärstellung dieser Frage herbeiführen.

¹ G. KIRCHHOFF: Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 3. Aufl. 1883. S. 388. — Siehe R. v. MISES: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 418f. 1923.

§ 5. Der Stab aus einem Material, das nicht unbeschränkt dem Hookeschen Gesetz folgt.

15. Aufstellen der Biegetheorie.

Bei unseren Untersuchungen war bis jetzt sogenannte „vollständige Elastizität“, d. h. ein konstanter Elastizitätsmodul vorausgesetzt. Die kritischen Werte, die z. B. aus der Gleichung $P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ bei den EULERSchen Knickfällen mit der freien Knicklänge l berechnet werden, sind somit nur richtig, wenn die Proportionalitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird.¹ Schreibt man diese Gleichung in der Form $P_k = \pi^2 \frac{EF}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$, wobei i der Trägheitshalbmesser der Querschnittsfläche F

und $l:i$ die Schlankheit des Stabes sind, so sieht man, daß die Knickspannung $\sigma_k = P_k:F$ kleiner oder gleich der Proportionalitätsgrenze σ_P bleibt, wenn die Schlankheit der Bedingung

$$\frac{l}{i} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}$$

genügt. Für Flußstahl mit etwa $E = 2000 \text{ t/cm}^2$ und $\sigma_P = 2000 \text{ kg/cm}^2$ ist dieser Schlankheitsgrad z. B. bei zirka 100 erreicht. Nur bei relativ sehr langen oder schlanken Stäben werden unsere früheren Rechnungen weitgehend zutreffen. Bei kürzeren Stahlstäben (jedoch mit $l:i > 100$) gilt die EULERSche Formel, aber bald nach dem Ausbiegen wird die Randspannung die Proportionalitätsgrenze überschreiten. Hingegen ist bei kurzen gedrunghenen Stäben die mittlere Spannung schon beim Eintreten des Knickzustandes größer als die Proportionalitätsgrenze, und dieser Fall wird in der Literatur gewöhnlich als „*unelastische Knickung*“ bezeichnet.

Bei vollkommen elastischem Material war in der Biegetheorie vorausgesetzt, daß bei einer Ausbiegung ursprünglich ebene Querschnitte wieder eben bleiben. Wir müssen nun fragen, ob das auch bei einem nicht linearen Formänderungsgesetz zutrifft. Ist der Stab gestreckt oder im Beginne sich auszubiegen, so kann man die Schubspannungen längs der Stabachse gleich Null setzen und dann ergibt die sog. mathematische Elastizitätstheorie, daß die Dehnungen (Verkürzungen) in Richtung der Stabachse einem linearen Gesetz folgen.² Wir können also sagen: Bei einem geraden achsrecht belasteten Stab bleiben im Augenblick der Ausbiegung ebene Querschnitte eben, wie auch das Formänderungsgesetz beschaffen ist. Sind die Ausbiegungen klein, so wird diese Annahme

¹ Darauf hatte als erster E. LAMARLE hingewiesen, Annales des Travaux publics de Belgique, 1846. Diese Tatsache blieb bis zu den viel späteren Versuchen von BAUSCHINGER und von TETMAJER ganz unbeachtet, vgl. Pkt. 18.

² M. GRÜNING: Spannungszustand und Formänderung eines exzentrisch gedrückten geraden Stabes bei Geltung eines nicht linearen Formänderungsgesetzes. Ztrbl. d. Bauverwaltung, 35. Jahrg., S. 109—112. 1915.

in Annäherung gelten. Das wurde durch Versuche bestätigt, bei denen EUGEN MEYER Stahlstäbe durch Kräfte senkrecht zur Stabachse auf Biegung beanspruchte.¹ Obwohl die Schubspannungen hier von Einfluß sind, waren auch im „unelastischen Bereich“ die für eben bleibende Querschnitte berechneten Formänderungen mit den gemessenen in ausreichender Übereinstimmung. Damit ist eine Grundlage für jede Theorie sichergestellt.

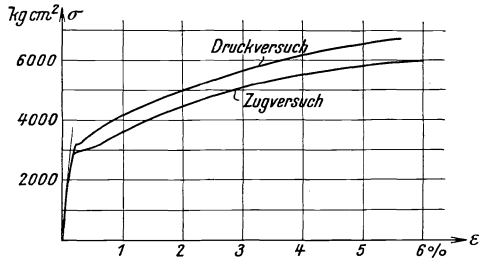


Abb. 22.

Wir setzen weiter voraus, daß bei einer schwachen Biegung eines geraden Stabes den Dehnungen und Verkürzungen der einzelnen Fasern dieselben Spannungen entsprechen wie bei einer gewöhnlichen Zug- bzw. Druckbeanspruchung.

Die Diagramme der Abb. 22 zeigen für Martinstahl den Zusammenhang zwischen Spannung und Verkürzung bzw. Dehnung.²⁾ Als Abszissen sind im Druck-Stauchungs-Diagramm die Stauchungen (d. h. Verkürzungen dividiert durch die ursprüngliche Stablänge) in ‰, im Zug-Dehnungs-Diagramm die Dehnungen (Verlängerungen dividiert durch die ursprüngliche Stablänge) in ‰ aufgetragen; die Ordinaten sind beidemal die Spannungen in kg/cm².

Wir betrachten einen Stab von rechteckigem Querschnitt mit der Fläche F (Breite b , Höhe h), der durch die Kraft $P = F \cdot \sigma_m$ gleichmäßig gedrückt ist und sich etwas ausbiegt. In jedem Querschnitt entsteht auf der Druckseite eine Spannungserhöhung, auf der Zugseite eine Spannungsverminderung gegenüber der mittleren Spannung σ_m . Die Erhöhung auf der Druckseite folge dem Druck-Stauchungs-Diagramm, ebenso die Abminderung bis zur Spannung Null; die Spannungsverteilung auf der Zugseite gehorche dem Zug-Dehnungs-Diagramm (Abb. 23). Ist σ die Spannung in einer Querschnittsfaser, so lautet eine Gleichgewichtsbedingung $P = \int \sigma \cdot dF$.

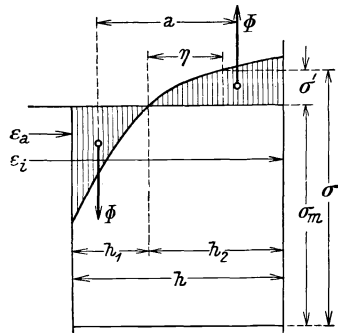


Abb. 23.

Schreibt man $\sigma = \sigma' + \sigma_m$, so wird, da $P = F \cdot \sigma_m$,

¹ E. MEYER: Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem HOOKEschen Gesetz nicht folgt. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 52, S. 167—173. 1908. Vgl. auch C. BACH: Elastizität und Festigkeit. Berlin 1889—1890, S. 85 (8. Aufl., 1920).

² Spannungsdiagramme, sog. Arbeits- oder Dehnungslinien von verschiedenen Baustoffen, siehe bei C. BACH: A. a. O.

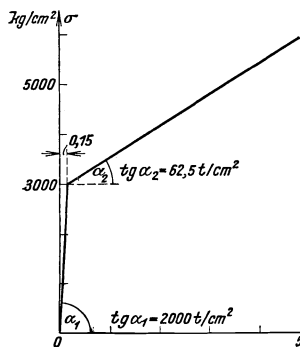


Abb. 24.

$$\int_F \sigma' \cdot dF = 0, \tag{a}$$

d. h. die in der Abb. 23 schraffierten Flächen der zu σ_m überlagerten Spannung σ' besitzen die gleiche Größe Φ . — Eine zweite Gleichgewichtsbedingung verlangt, daß das Moment der inneren Kräfte $\int_F (\sigma' + \sigma_m) \cdot dF$ bezüglich der Schwerachse gleich ist dem Moment der äußeren Kraft $P \cdot y$, wobei y der Hebelarm der Kraft im untersuchten Querschnitt ist. Nun ist das Moment der $\sigma_m \cdot dF$ gleich Null, die $\sigma' \cdot dF$ bilden das Kräftepaar mit dem Moment $\Phi \cdot a$, und es ergibt sich die Beziehung

$$\Phi \cdot a = \sigma_m b h^2 \cdot \frac{y}{h}. \tag{b}$$

Sind ferner die Dehnungen in den äußersten Fasern ε_i und ε_a , so ist der Krümmungshalbmesser ρ der Biegelinie durch die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} \tag{c}$$

ausgedrückt. — Bei einer gegebenen mittleren Spannung σ_m läßt sich mit Hilfe der Gl. (a) zu einem angenommenen ε_i (also Φ und a) der zugehörige Wert ε_a , aus Gl. (b) der Wert $\frac{y}{h}$ und aus Gl. (c) schließlich $\frac{\rho}{h}$ bestimmen. Damit ist ein Zusammenhang zwischen Krümmungshalbmesser und Ausbiegung hergeleitet.

Die hiermit für Axialbeanspruchung modifizierte Biegetheorie wurde von TH. v. KÁRMÁN in der folgenden Weise erweitert.¹ Ist die mittlere Spannung größer als die Proportionalitätsgrenze, sind also die Querschnittsfasern vor der Zugbeanspruchung unelastisch gestauch, so werden auf der entlasteten Querschnitts-

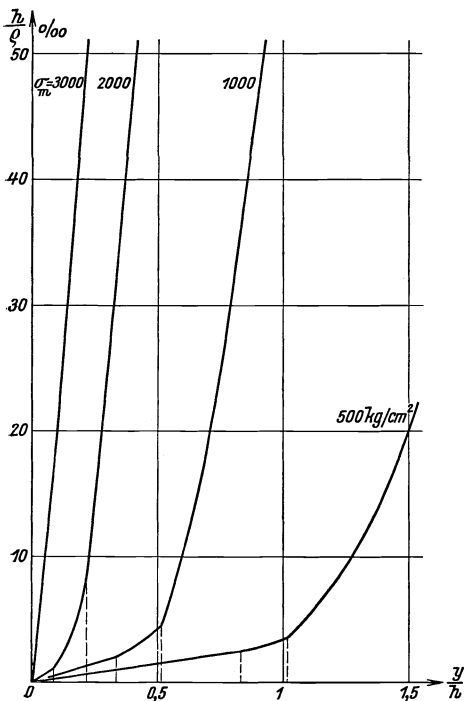


Abb. 25.

¹ TH. v. KÁRMÁN: Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, H. 81. Berlin, 1910.

seite nur die elastischen Formänderungen rückgängig und es besteht dort das einfache Proportionalitätsgesetz. Durch diese Hypothese der Entlastung, nach der bei jeder unelastischen Stauchung auf der entlasteten Seite dieselbe Beziehung zwischen Spannung und Dehnung gilt, wird gegenüber dem früheren präzisen Elastizitätsgesetz der begriffliche Vorgang wesentlich komplizierter.

Wir nehmen als Beispiel an, daß die Arbeitslinien für Druck bzw. Zug durch das ideale Diagramm der Abb. 24 gegeben seien, das aus zwei geraden Linien besteht. Die Proportionalitätsgrenze liege bei 3000 kg/cm^2 . Jeder Verkürzung bzw. Dehnung ist eindeutig eine Spannung zugeordnet. In dem rechtwinkligen Achsenkreuz der Abb. 25 sind auf Grund der vorstehenden Überlegungen für einige mittlere Spannungen zu den Abszissen $\frac{y}{h}$ die Ordinaten $\frac{h}{\rho}$ aufgetragen.

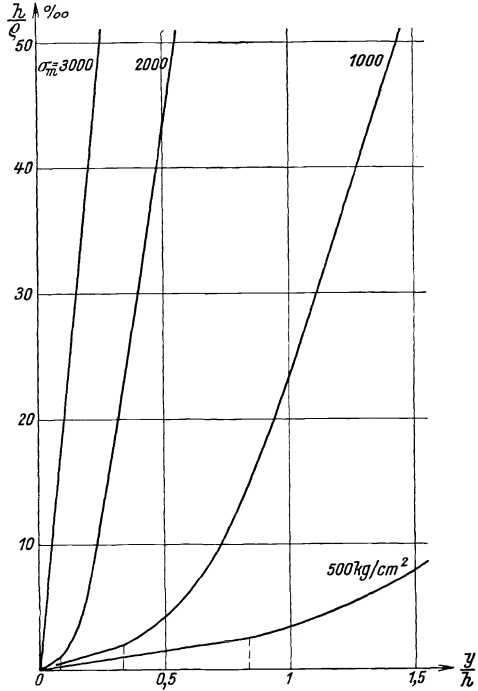


Abb. 26.

Die Abb. 26 ist analog für den Fall konstruiert, daß die Arbeitslinie für Druck wieder das Diagramm der Abb. 24 ist, während die Arbeitslinie für Zug eine Gerade ist, welche die erste Linie der Druckfigur überdeckt. (Diese Annahme ist nicht mit der KÁRMÁNSchen identisch, ihr hingegen in unserem Beispiel für Spannungen $\sigma_m < 3000 \text{ kg/cm}^2$ gleichwertig.)

Bei einem beliebig gegebenen Formänderungsgesetz können wir auch den Modul E als veränderlich ansehen und z. B. einen Wert E' , den „Formänderungsmodul“ bestimmen, für den die Biegleichung der vollen Elastizität erfüllt wird. Aus der Gleichung $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E' I}$ folgt beim rechteckigen Querschnitt mit $M = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y$

$$E' = 12 \sigma_m \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{\rho}.$$

Im Augenblick der Ausbiegung, beim Knicken, hat E' einen nur von der Spannung abhängigen Wert, den wir „Knickmodul“ nennen.

Die Abb. 27 zeigt unter den Voraussetzungen der Abb. 26 den Formänderungsmodul als Funktion der Spannung σ_m und der Ausbiegungs-

größe $\frac{y}{h}$. Bei einer Arbeitslinie nach Abb. 22 schneiden die einzelnen σ_m -Kurven für mittlere Spannungen, die größer als die Proportionalitätsgrenze sind, die Ordinatenachse in Punkten, die den jeweiligen Knickmodulwert angeben.¹

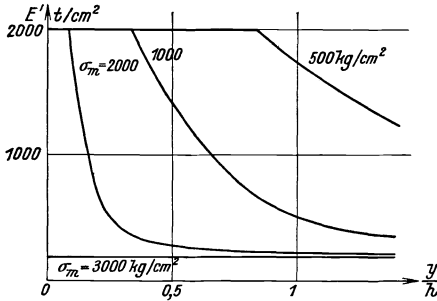


Abb. 27.

Um uns ein Bild von der Entlastungsannahme zu machen, denken wir uns einen Stab aus *Baustahl* unter dem Kraftangriff einer sehr kleinen Exzentrizität. Die Biegespannungen sind zunächst äußerst klein und wachsen erst nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze in Nähe der Knickspannung stark an. Die Abb. 28 gibt in der Linie $m-m_1$ den Spannungsverlauf

bei der mittleren Spannung σ_m , und in $n-n_1$ bei einer Spannungserhöhung um $\Delta\sigma_m$, wobei alle Spannungen oberhalb der Proportionalitätsgrenze liegen mögen. Als Entlastungsbereich käme eigentlich nur der Teil z des Querschnittes in Frage. Je kleiner die Exzentrizität der Kraft ist, um so mehr kann die Entlastungshypothese berechtigt sein, während bei größeren Exzentrizitätswerten die Rechnung mit der Arbeitslinie im Zugbereich zutreffend erscheint.

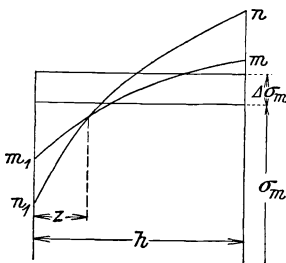


Abb. 28.

Erwähnenswert wäre noch, daß hier die Entlastung den sog. BAUSCHINGER-Effekt nicht zu berücksichtigen hat. Wenn bei einer Entlastung die Druckspannung, die im unelastischen Bereich liegt, in eine Zugspannung übergeht, so wird nach BAUSCHINGER die Proportionalitätsgrenze für Zug auf Null heruntorgeworfen, d. h. es besteht kein lineares Gesetz mehr. Nun ist bei sehr kleinen Hebelarmen im Augenblick des „Knickens“ die äußere Randspannung immer noch eine Druckspannung, und bei größeren Exzentrizitäten überschreitet die äußere Randspannung überhaupt nicht die Proportionalitätsgrenze für Druck.²

16. Bestimmung des kritischen Wertes der Last. Der Knickmodul.

Um die kritische Last eines zentrisch belasteten Stabes zu finden, bei dem die Spannung die Proportionalitätsgrenze überschreitet, haben

¹ Vgl. die analytischen Untersuchungen bei M. GRÜNING: Knickung vollwandiger Druckstäbe. *Ztschr. f. Architektur u. Ingenieurwesen*, Bd. 63, S. 83—99. 1917. — R. KROHN: Knickfestigkeit. *Die Bautechnik*, 1. Jahrg., S. 230—250. 1923.

² Vgl. F. HARTMANN: Der einseitige (exzentrische) Druck bei Stäben aus Baustahl. *Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver.*, 85. Jahrg., S. 65—68. 1933.

wir nach dem Vorhergehenden in die bei voller Elastizität zutreffende Gleichung an Stelle des YOUNG'schen Moduls E seinen „augenblicklichen Wert“, den der Spannung zugeordneten Knickmodul T einzuführen.

Zuerst untersuchen wir beim *entlastungsfreien* Formänderungsgesetz den Spannungszustand bei Beginn der Verformung. Wir entwickeln die Spannung σ (bei der zugehörigen Stauchung ε) in Nähe der Knickspannung σ_k in eine Reihe nach Potenzen von $\Delta\varepsilon$. Auf das erste Glied beschränkt ist

$$\sigma = \sigma_k + \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} \cdot \Delta\varepsilon$$

und für den Knickmodul ist daher

$$T = \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$$

zu setzen. σ_k und ε_k sind die zusammengehörigen Werte der Druck-Stauchungs-Linie bei der infinitesimalen Ausbiegung des Stabes, und T bedeutet die trigonometrische Tangente der Stauchungskurve. — Diese Beziehung ergibt sich ebenso aus der früheren Gleichung

$$E' = 12\sigma_m \frac{y}{h} : \frac{h}{\rho} \quad \text{oder} \quad E' = \frac{12}{b h^2} \frac{\Phi a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a}$$

für den Grenzfall einer unendlich kleinen Ausbiegung. Dann ist

$$T = \frac{12}{b h^2} \left. \frac{d(\Phi a)}{d(\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \right|_{\phi \rightarrow 0} = \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}.$$

Bei einem prismatischen, sehr schwach ausgebogenen Stab unter der mittleren Druckspannung in Größe der Knickspannung σ_k gibt es im Querschnitt eine Gerade senkrecht zur Biegeebene, in der die unmittelbar vor dem Ausbiegen vorhandene mittlere Spannung unverändert geblieben ist (vgl. die frühere Abb. 23). Nach dem *Entlastungsgesetz* wird auf der Seite dieser Geraden, bei der infolge der Biegung die Spannungserhöhung auftritt, mit dem Modul $\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$ gerechnet, der wegen der unendlich kleinen Ausbiegung als konstant anzusehen ist; auf der entlasteten Seite wird der YOUNG'sche Modul eingeführt. — Der Gleichgewichtszustand erfordert nun: Die Summe der im Querschnitt durch die Biegung hervorgerufenen zu $\sigma_m = \sigma_k$ zusätzlichen Spannungen σ' ist gleich Null

$$\int_{\bar{F}} \sigma' \cdot dF = 0;$$

die Spannungen σ' ergeben ein Kräftepaar, dessen Moment gleich ist dem äußeren Moment M

$$\int_{\bar{F}} \sigma' \eta \cdot dF = M,$$

wobei η die Abstände von der Geraden der mittleren Spannung bedeuten. Die Spannungen σ' sind nach der BERNOULLISCHEN Theorie, mit dem

46 Material, das nicht unbeschränkt dem HOOKESchen Gesetz folgt.

Krümmungshalbmesser ϱ der Biegelinie $E \frac{\eta}{\varrho}$ bzw. $-\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} \frac{\eta}{\varrho}$ und die beiden Gleichgewichtsbedingungen erhalten die Form

$$E \int_{F_1} \frac{\eta}{\varrho} dF - \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} \int_{F_2} \frac{\eta}{\varrho} dF = 0, \quad E \int_{F_1} \frac{\eta^2}{\varrho} dF + \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} \int_{F_2} \frac{\eta^2}{\varrho} dF = M$$

oder

$$E S_1 = \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} S_2, \quad \frac{1}{\varrho} \left(E I_1 + \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} I_2 \right) = M.$$

Hierbei sind S_1 und S_2 die statischen Momente, I_1 und I_2 die Trägheitsmomente der Teilquerschnitte F_1 und F_2 beiderseits der Geraden der mittleren Spannung in bezug auf diese Gerade. Mit Hilfe der ersten Gleichung kann man die Flächen F_1 , F_2 bestimmen; aus der zweiten Gleichung ergibt sich der Knickmodul

$$T = \frac{E I_1 + \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} I_2}{I}.$$

Der Knickmodul ist somit von der Querschnittsform abhängig, jedoch ist dieser Einfluß bei den üblichen Querschnitten nur gering.

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Höhe h und der Breite b gilt bei den Abständen h_1 und h_2 der Geraden der mittleren Spannung von den Rändern

$$E h_1^2 = \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} h_2^2, \quad \text{wobei } h_1 + h_2 = h.$$

Aus diesen zwei Gleichungen berechnet man h_1 und h_2 und bekommt mit den Trägheitsmomenten $I_1 = b \frac{h_1^3}{3}$, $I_2 = b \frac{h_2^3}{3}$, $I = b \frac{h^3}{12}$ für den Knickmodul die Formel

$$T = \frac{4 E \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}} \right)^2}.$$

Auch diese Gleichung kann man aus der vor angeschriebenen Beziehung für E' mit einem Grenzübergang erhalten. Hat nun $\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$ die Werte $0,5 E$ bzw. $0,1 E$, so ist $T = 0,68 E$ bzw. $0,23 E$.

Bei einem Doppel-T-Querschnitt findet man in ähnlicher Weise mit $\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k} = 0,5 E$ und $0,1 E$ die Werte $T = 0,66 E$ bzw. $0,18 E$.

Unter Zugrundelegung des Spannungsdiagrammes der Abb. 22 führt diese Knickformel bei einem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von rechteckigem Querschnitt zu dem in Abb. 29 gezeichneten Zusammenhang zwischen Knickspannung und Schlankheit. Die strichlierte Linie gilt bei dem ideellen Diagramm der Abb. 24. Die Knickspannung von 3000 kg/cm^2 ist hierbei innerhalb der Schlankheiten $\frac{l}{i} = 24,4$ und $81,1$ konstant, entsprechend der Tatsache, daß die Kurve der E' in Abb. 27

für $\sigma_m = 3000 \text{ kg/cm}^2$ einen mit der Ordinatenachse zusammenfallenden Ast besitzt (bzw. daß für $\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$ aus dem Spannungsdiagramm zwei Grenzwerte bestimmt werden). Der Knickmodul ist für $\frac{l}{i} \leq 24,3$ gleich $180,5 \text{ t/cm}^2$, für $\frac{l}{i} \geq 81,1$ gleich $E = 2000 \text{ t/cm}^2$ und folgt im Zwischenbereich der Gleichung $T = \frac{\sigma}{\pi^2} \left(\frac{l}{i}\right)^2$, wobei $\sigma = 3000 \text{ kg/cm}^2$.

Wenn wir diese Herleitungen überblicken, erkennen wir, daß jede Theorie der unelastischen Knickung zur Voraussetzung hat, daß die Beziehung zwischen Spannung und Verkürzung bzw. Dehnung gegeben ist. Nun erscheint es wohl unsicher, daß man in einem praktischen Fall die komplizierten Vorgänge bei Beanspruchungen weit oberhalb der Proportionalitätsgrenze mit einem Spannungsdiagramm wirklich erfassen kann. Das Experiment ist von der Maschine und der Art der Ausführung abhängig, d. h. vom Aufbringen der Last und der Belastungsgeschwindigkeit, und schließlich wird überhaupt nur ein lokaler Teil des Stabes untersucht. Das Diagramm sieht anders aus, wenn man für die Berechnung der spezifischen Formänderungen den Gesamtstab mit der ursprünglichen Querschnittsfläche zugrunde legt, oder die Längenänderungen des lokal veränderten Teiles mit der veränderten Querschnittsfläche. Auch das Aufsuchen der Tangente $\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$ im Diagramm ist mit Fehlern behaftet. Daher liegt es nahe, den Knickmodul für praktische Zwecke unmittelbar aus dem Experiment zu bestimmen, also für die Ermittlung des kritischen Wertes der Last von Stäben mit konstantem Querschnitt die Erfahrungswerte aus Knickversuchen zu verwenden. In Pkt. 19 werden wir darauf zurückkommen.

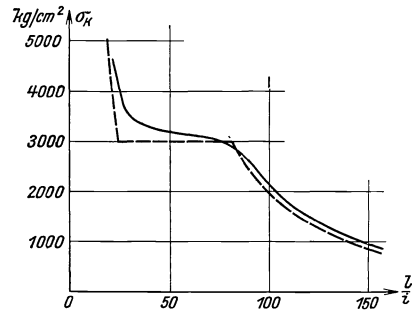


Abb. 29.

Ungeachtet der erwähnten Unsicherheiten, werden wir aber bei Stäben aus einem Material, das nicht unbeschränkt der HOOKESchen Beziehung folgt, zur Bestimmung der Verformung und bei exzentrischer Druckwirkung auf die Arbeitslinien als Grundlage der Berechnung zurückgreifen müssen. Eine Klarstellung des Tragverhaltens exzentrisch gedrückter Stäbe ist dann nur mit Annahme eines Elastizitätsgesetzes theoretisch möglich und ließe sich rein versuchstechnisch überhaupt nicht erzielen.¹

¹ Das Problem der unelastischen Knickung wurde zuerst von F. ENGESSER in Angriff genommen und in der EULERSchen Formel der YOUNGSche Modul E durch den Knickmodul $d\sigma_k : d\varepsilon_k$ ersetzt. F. JASINSKI machte darauf aufmerksam, daß bei Entlastung nur der elastische Teil der Dehnung zurückgeht, und

so daß der Verlauf von y'^2 als Funktion von y durch Summenbildung gewonnen werden kann. Über die Integrationskonstante wird verfügt, indem man mit Berücksichtigen der Einspannung für $y' = 0$ die Ausbiegung $y = y_0$ gleich δ setzt. Von dieser vorgegebenen Abszisse δ steigt die y'^2 -Linie gegen den Ursprung mit $y = 0$ an. Eine zweite Quadratur liefert aus

$$\frac{u}{h} = \int_0^{y:h} \frac{1}{y'} \cdot d\left(\frac{y}{h}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{u}{h} = \int_{y'}^{y''} \frac{d y'}{h \cdot y''}$$

die Linie der ausgebogenen Schwerachse des Stabes und der für $u = l$, $y = \delta$ bestimmte Endwert $\frac{l}{h}$ ist die zur Ausbiegung $\frac{\delta}{h}$ zugeordnete Stablängengröße.¹

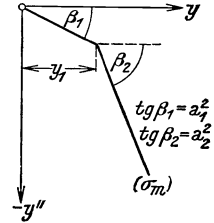


Abb. 31.

Wir legen einem Beispiel ein Druckdiagramm nach Abb. 24 zugrunde und als Zugdiagramm eine sich mit der ersten Linie der Druckfigur überdeckende Linie. Unter diesen Annahmen erhielten wir die Abb. 26, in der bei dem rechteckigen Stabquerschnitt zu den Abszissen $\frac{y}{h}$ die Ordinaten $\frac{h}{\sigma}$ für einige mittlere Spannungen zur Darstellung gebracht sind. Da die Größe der kritischen Last bekannt ist, genügt uns die grundsätzliche Kenntnis des Biegeverhaltens und wir ersetzen jede Kurve der Abb. 26 durch zwei gerade Linien, wobei wir einen weiteren Biegebereich in Betracht ziehen. Die trigonometrischen Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die y -Achse seien a_1^2 und a_2^2 , wo a_1^2 dem vollständig elastischen Verhalten entspricht; der Ausbiegungswert im Schnittpunkt beider Linien sei y_1 . Die Querschnittshöhe ist hierbei gleich „Eins“ angenommen; die damit gefundenen Beziehungen gelten bei der Höhe h zwischen $\frac{y}{h}$ und $\frac{u}{h}$ (Abb. 31).

Wenn die maximale Ausbiegung δ des Stabes kleiner als y_1 ist, besteht die Gleichung

$$y'' + a_1^2 y = 0,$$

unter den Randbedingungen $u = 0$, $y = 0$ und $u = l$, $y' = 0$, sofern wir die Abszissen vom freien Ende aus rechnen (Abb. 32). Sie hat dieselbe Form wie die Gl. (3) von Pkt. 1 und wir kommen jetzt sinngemäß zum Ergebnis: Die Form ohne Ausbiegung ist für jede Länge eine Gleichgewichtslage. Bei der kritischen Länge $l = \frac{\pi}{2 a_1}$ ist die Ausbiegung unbestimmt und besitzt den Höchstwert y_1 .

Ist die Ausbiegung δ größer als y_1 , so hat der Stab zwei Felder l_1

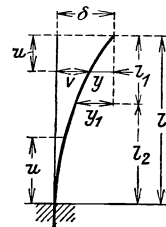


Abb. 32.

¹ TH. V. KÁRMÁN: A. a. O. — Ferner E. CHWALLA: Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Bd. 137, S. 469—512. 1928. Der Stahlbau (Die Bautechnik), 7. Jahrg. 1934.

und l_2 mit verschiedenem elastischen Verhalten. Für das vom freien Ende ausgehende Feld von der Länge l_1 mit der Differentialgleichung

$$y'' + a_1^2 y = 0$$

lautet die Gleichung der Elastica

$$y = C_1 \cdot \sin a_1 u + C_2 \cdot \cos a_1 u. \quad (\text{a})$$

Für das die Einspannstelle enthaltende Feld von der Länge l_2 mit der Differentialgleichung

$$y'' + a_2^2 y - y_1 \cdot (a_2^2 - a_1^2) = 0$$

ist die Biegelinie

$$y = y_1 \cdot \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2} + C_3 \cdot \sin a_2 u + C_4 \cdot \cos a_2 u. \quad (\text{b})$$

Die Aufgabe ist ähnlich wie die von Pkt. 11; die Feldlängen sind aber zunächst unbekannt und die Ausbiegung y_1 an ihrer Trennungsstelle bei einer festen mittleren Spannung gegeben. Für das freie Ende $u = 0$, $y = 0$ folgt aus Gl. (a) die Konstante $C_2 = 0$. Rechnet man im Teil l_2 die Abszissen u von der Einspannstelle an, so wird für $u = 0$, $y' = 0$ die Konstante $C_3 = 0$. An der Trennungsstelle der zwei Felder setzt man Ausbiegung und Neigungswinkel der elastischen Linie von (a) und (b) aus gleich und erhält

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \sin a_1 l_1 - C_4 \cdot \cos a_2 l_2 &= y_1 \cdot \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2}, \\ C_1 a_1 \cdot \cos a_1 l_1 - C_4 a_2 \cdot \sin a_2 l_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Aus Gl. (a) ergibt sich für $u = l_1$ die Ausbiegung $y = y_1 = C_1 \cdot \sin a_1 l_1$ und damit aus der ersten Gl. (c): $C_4 \cdot \cos a_2 l_2 = y_1 \cdot \frac{a_1^2}{a_2^2}$. Die zweite Gl. (c) liefert dann die Bedingung für die Felderteilung

$$\operatorname{tg} a_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} a_2 l_2 = \frac{a_2}{a_1}. \quad (1)$$

Die Ausbiegung δ des freien Endes wird aus Gl. (b) mit $u = 0$

$$\delta = y_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} + \frac{a_1^2}{a_2^2 \cdot \cos a_2 l_2} \right). \quad (2)$$

Zu einem bestimmten σ_m , d. h. zu bekannten Werten a_1 , a_2 und y_1 , berechnen wir aus Gl. (1) zusammengehörige Längen l_1 , l_2 und weiter aus Gl. (2) die Ausbiegung δ für die Stablänge $l = l_1 + l_2$. Die Bogenlängen sind hier den Abszissen u gleichgesetzt.

In der Abb. 33 ist für einige mittlere Spannungen der Verlauf der Ausbiegungen $\frac{\delta}{h}$ als Funktion der Stablängen $\frac{l}{h}$ aufgezeichnet. Bei jedem σ_m gibt es eine größte Länge, unter der eine Ausbiegung stattfindet, und eine kleinste Länge, bei der sie mit einem unbegrenzten Diagrammverlauf ins Unendliche anwächst. Das Resultat läßt sich auch so umformen, daß man für eine feste Schlankheit $\frac{l}{i} = \frac{l}{h} \sqrt{12}$ die Beziehung zwischen Ausbiegung und Spannung darstellt. Die Abb. 34

zeigt diese Linie für die Schlankheit 60 und führt zu einem Ergebnis, das von dem bei vollständiger Elastizität grundsätzlich abweicht. Die kritische Last ist ein Höchstwert; für kleinere Lasten sind zwei Gleichgewichtslagen vorhanden, die gerade und die ausgebogene, und für größere Lasten ist nur die gerade Form möglich. Hierbei haben wir uns auf die erste Gleichgewichtslage, die wendefreie Biegeform, beschränkt.

Wir können nun die Schlußfolgerung ziehen: Bei dem Stab aus elastisch-plastischem Material, z. B. bei einem Stab aus *Baustahl*, gibt es unterhalb der kritischen Last einen Bereich, in dem

nur der gerade Gleichgewichtszustand besteht, da sich die Ausbiegungslinie infolge der begrenzten Materialfestigkeit nicht unbeschränkt fortsetzt, und einen Teil, in welchem zwei Gleichgewichtslagen vorhanden sind. Sehr schlanke Stäbe werden nach der kritischen EULERSchen Last zuerst eine stabile Verformung bei wachsenden Lasten erfahren und dann rückläufig die Zunahme der Ausbiegungen bei sinkenden Kräften. Das Gleichgewicht der gebogenen Form, für das die Vergrößerung der Ausbiegung den Zustand einleitet, unter dem der innere Widerstand ständig dem äußeren Angriff unterlegen ist, haben wir als instabil anzusehen. Das stimmt auch mit der Theorie des Verzweigungsgleichgewichtes überein; da unter der gleichen Kraftwirkung in unendlicher Nachbarschaft der kritischen Last zwei Gleichgewichtslagen bestehen, ist die eine stabil, die andere instabil. — Einen exakten Nachweis, der nicht mehr einfach zu erbringen ist, glauben wir sparen zu dürfen.

Der KIRCHHOFFSche Satz von der Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtes ist auch hier in seiner ursprünglichen Fassung nicht aufrecht zu halten. Da der Stab bald nach Erreichen der kritischen Last zusammenbricht, bzw. unmittelbar, wenn man den Bruch mit dem Absinken der Last identifiziert, so konnte der Eindeutigkeitssatz in praktischen Fällen allerdings als richtig hingestellt werden.

Zusatz. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung des freien Stabendes läßt sich in unserem Beispiel nur auf Umwegen gewinnen. Der an einem Ende eingespannte Stab von der Länge l_2 und der Steifigkeit $E I$, bei dem am freien Ende unter der Exzentrizität $y_1 \frac{a_1^2}{a_2^2}$ die axiale Kraft $E I \cdot a_2^2$ wirkt, hat eine größte Ausbiegung, die man mit Gl. (2) in Einklang bringen kann. Für den so belasteten Stab ist die zweite Näherung der Ausbiegung auf ähnlichem Wege wie später in Pkt. 22 berechenbar. Man gelangt zu dem Resultat: Bei kleinen Verformungen

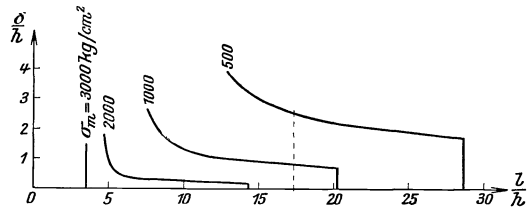


Abb. 33.

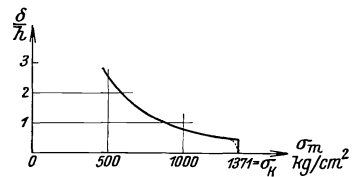


Abb. 34.

stimmt die zweite Näherung mit der ersten überein; bei größeren Ausbiegungen, für die aber auch die zweite Näherung nur mehr qualitativ zutreffend ist, zeigt sich wieder ein Ansteigen der Last unter wachsenden Ausbiegungen. Für alle praktischen Fälle, d. h. im Bereich der Materialfestigkeit, liefert die erste Näherung vollständig gültige Ergebnisse.

§ 6. Versuche und empirische Formeln. Empirische Bestimmung des Knickmoduls. Der Sicherheitsgrad.

18. Versuche und empirische Formeln.

Ceux qui, les premiers, ont signalé
ces nouveaux instruments, n'existeront
plus et seront complètement oubliés.
Eh! qu'importe, d'ailleurs, si la science
a marché. LAMÉ.

Die ersten Knickversuche wurden von P. VAN MUSSCHENBROECK ausgeführt, der feststellte, daß die Knicklasten von Stäben bei sonst gleichen Verhältnissen sich umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Länge verhalten, ein Resultat, das bereits der EULERSchen Theorie vorgriff.¹ Größere Versuchsreihen mit Stäben aus Schmiedeeisen veröffentlichte A. DULEAU, der die EULERSche Knickformel bis auf zirka 12% bestätigt fand, und diese Abweichung zum Teil mit der Reibung des verwendeten Hebels erklärte.² Verschiedene französische und englische Ingenieure (AUBRY, GIRARD, LAMANDÉ, RONDELET, RENNIE, REYNOLDS) bestimmten um diese Zeit und etwas später experimentell die Knicklasten von Holzstäben und Gußeisenstäben, den wichtigsten Baustoffen der damaligen Technik.³ Für praktische Zwecke wurden von E. HODGKINSON sehr umfangreiche Versuche vorgenommen, insbesondere an gußeisernen Säulen mit abgerundeten und flachen Enden, d. s. Randbedingungen, die allerdings den EULERSchen Knickfällen nicht entsprechen.⁴ Die Untersuchungen von HODGKINSON und seinen Nachfolgern veranlaßten die Aufstellung von empirischen Formeln, die in einer ähnlichen Art in England noch heute sehr verbreitet sind. Die Knickspannung beträgt für drehbar gelagerte Stäbe nach der RANKINESchen Formel⁵

¹ P. VAN MUSSCHENBROECK: *Physicae experimentales et geometricae Dissertationes*. Lugduni, 1729. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: *A History of the Theory of Elasticity*. Cambridge, 1886. Bd. 1, S. 16.

² A. DULEAU: *Essai théorique et experimental sur la résistance du fer forgé*. Paris, 1812.

³ Siehe z. B. NAVIER: *Mechanik der Baukunst*, übersetzt von G. WESTPHAL. Hannover, 1851. S. 195 f.

⁴ E. HODGKINSON: *Experimental Researches of the Strength of Pillars of Cast Iron*, *Phil. Trans. London*, 1840. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: *A. a. O.*, Bd. 1, S. 523 f. oder M. RÜHLMANN: *Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik und Theoretischen Maschinenlehre*. Leipzig, 1885. S. 432.

⁵ W. J. M. RANKINE: *A manual of applied mechanics*. London, 1858 (8. Aufl., S. 362. 1908). RANKINE schreibt diese Gleichung GORDON zu, der die Koeffizienten aus Versuchen von HODGKINSON berechnete. In der

$$\sigma_k = \frac{\sigma_d}{1 + \alpha \left(\frac{l}{i}\right)^2},$$

wobei σ_d die beim reinen Druckversuch ermittelte Grenzspannung (Bruchgrenze) und α eine Materialkonstante bedeutet. Für weichen Flußstahl z. B. sind $\sigma_d = 3000 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 0,000077$.

Versuche von J. BAUSCHINGER und L. v. TETMAJER¹ knüpfen an die Ergebnisse von LAMARLE wieder an, der erkannte, daß die EULERSche Theorie nur für Beanspruchungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze gültig ist (vgl. Pkt. 15). Die Untersuchungen wurden an Stäben mit Spitzenlagerung durchgeführt, also mit Randbedingungen, die den theoretischen Voraussetzungen schon weit entgegenkommen. Im elastischen Bereich gibt demnach die EULERSche Formel die Knicklast mit großer Genauigkeit an. Für den unelastischen Bereich ist die Knickspannung nach TETMAJER

$$\sigma_k = a + b \frac{l}{i} + c \left(\frac{l}{i}\right)^2,$$

wobei a, b und c experimentell bestimmte Materialkonstanten und l die freie Knicklänge sind. Bei allen Baustoffen bis auf Gußeisen kommt man mit den zwei Konstanten a und b aus.² Diese empirischen Formeln, die auf dem europäischen Kontinent am meisten angewendet werden, lauten für

Bauholz $\frac{l}{i} < 100, \quad \sigma_k = 0,293 - 0,00194 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2,$

$E = \text{zirka } 100 \text{ t/cm}^2$

Schweißeisen $\frac{l}{i} < 112, \quad \sigma_k = 3,03 - 0,0129 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2,$

Flußeisen $\frac{l}{i} < 105, \quad \sigma_k = 3,10 - 0,0114 \frac{l}{i} \text{ ,,}$

Zugfestigkeit zirka $3,8 \text{ t/cm}^2,$

$E = \text{zirka } 2150 \text{ t/cm}^2$

älteren deutschen Literatur wird sie oft als Formel von SCHWARZ angegeben, mitunter jedoch auch als NAVIERSche Gleichung bezeichnet. H. SCHEFFLER stellt sie als empirische Formel hin (Theorie der Festigkeit gegen Zerknicken, Braunschweig, 1858), aber man findet auch theoretische Erklärungen, siehe etwa FR. LAISSE u. AD. SCHÜBLER: Der Bau der Brückenträger, 4. Aufl., 1876.

¹ J. BAUSCHINGER: Zerknickungs-Versuche. Mitteilungen aus dem Mech.-Techn. Laboratorium der Techn. Hochschule in München, 15. H., S. 11—57. 1887. — L. v. TETMAJER: Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. Wien, 1903.

² Ein „Geradliniengesetz“ verwenden auch MERRIMAN (1882) und T. H. JOHNSON (1886), siehe G. F. SWAIN: Festigkeitslehre. Berlin, 1928. S. 495. Ähnliche Formeln wurden auch von J. B. JOHNSON u. H. DU BOIS vorgeschlagen. — Vgl. F. v. EMPERGER: Die Knickfestigkeit in Theorie, Versuch und Praxis. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 49, S. 661f. 1897. — E. BRK versuchte das empirische Geradliniengesetz theoretisch zu begründen und als die „NAVIERSche Spannungsgleichung für zusammengesetzte Druckfestigkeit“ zu deuten; Der Eisenbau, 2. Jahrg., S. 328—333. 1911. Österr. Wehschr. f. d. öffentl. Baudienst, Jahrg. 12, S. 121—127. 1906.

Flußeisen $\frac{l}{i} < 105$, $\sigma_k = 3,21 - 0,0116 \frac{l}{i}$ t/cm²,

Zugfestigkeit zirka 3,8 t/cm²,

$E =$ zirka 2240 t/cm²

Gußeisen $\frac{l}{i} < 80$, $\sigma_k = 7,76 - 0,12 \frac{l}{i} + 0,00053 \left(\frac{l}{i}\right)^2$ t/cm².

$E =$ zirka 1000 t/cm²

Ein Einfluß auf die Tragfähigkeit eiserner Stäbe infolge einer Verschwächung des Querschnittes durch Nieten wurde von TETMAJER nicht festgestellt, wenn die Verschwächung weniger als 12% des Vollquerschnittes beträgt. Daher ist es üblich, I und F für den vollen Querschnitt zu berechnen. — Die Abb. 35 zeigt die Ergebnisse der TETMAJERSCHEN Versuche für weiches Flußeisen. In einem rechtwinkligen Achsenkreuz sind

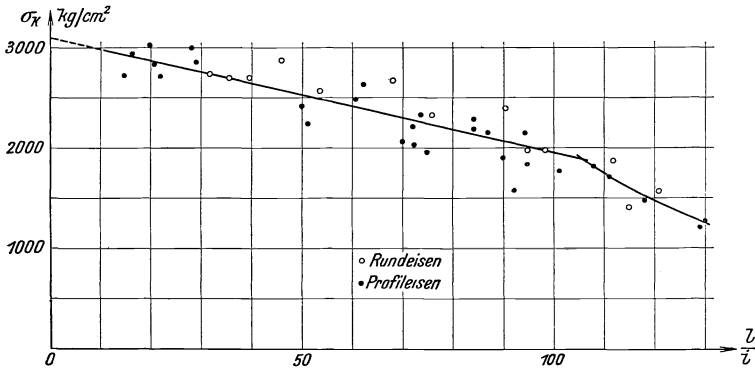


Abb. 35.

zu den Schlankheiten als Abszissen die Knickspannungen als Ordinaten aufgetragen. Bei der Schlankheit 105 wird die EULERSCHE Gleichung, die hier durch eine Hyperbel dritten Grades dargestellt ist, von der TETMAJERSCHEN Geraden geschnitten, die im unelastischen Bereich zwischen die Versuchswerte eingelegt ist. Als Mangel dieser Ausgleichsline wäre anzusehen, daß sie mit $\frac{l}{i} = 0$ nicht zur Druckfestigkeit und bei $\frac{l}{i} = 105$ nicht zur richtigen Proportionalitätsgrenze des Materials führt.

Eine größere Genauigkeit konnte bei Knickversuchen dadurch erzielt werden, daß man die Lagerung der Stabenden einstellbar konstruierte, um die Wirkungslinie der Kraft mit der Stabachse möglichst zusammenfallen zu lassen.¹ TH. V. KÁRMÁN führte in dieser Weise Versuche mit Stäben aus Siemens-Martin-Stahl durch, wobei Schneiden an Stelle der Spitzenlagerung benützt wurden.² Bei diesen Stäben mit

¹ A. CONSIDÈRE: Résistance des pièces comprimées. Congrès internat. des procédés de construction. Paris, 1891. S. 371—397.

² TH. V. KÁRMÁN: A. a. O.

Längen von 125 bis 159 cm und der rechteckigen Querschnittsfläche von 548 bis 1000 mm² war die Zugfestigkeit 6,8 t/cm², die Elastizitätsgrenze 2,6 t/cm², der YOUNGSche Modul 2170 t/cm². In der Abb. 36 sind die Resultate der KÁRMÁNSchen Versuche zu sehen, und zwar sind wieder zu den Schlankheiten als Abszissen die Knickspannungen als Ordinaten aufgetragen. Die gezeichneten Linien stellen im elastischen Gebiet, d. i. hier für $\frac{l}{i} \geq 90$ die EULERSche Formel, im unelastischen für $\frac{l}{i} < 90$ die ENGESSER-KÁRMÁNSche Gleichung dar. Im elastischen Intervall stimmt die gemessene Knicklast mit weniger als 1% Fehler mit dem EULERSchen Wert überein. Bei kurzen Stäben „ist hauptsächlich das

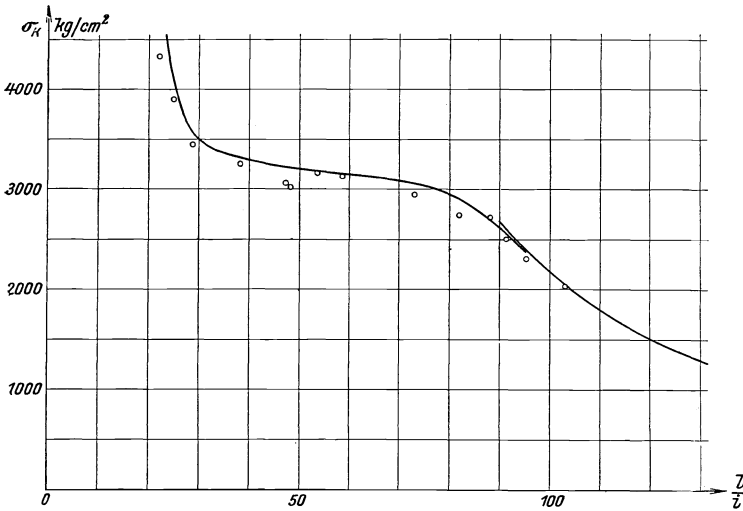


Abb. 36.

Verhalten in der Nähe der Fließgrenze von Bedeutung. Diese bildet eigentlich stets einen Anlaß zur Labilität, da $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ außerordentlich klein wird. Die Labilität ist jedoch nur vorübergehend“ und der Stab wird bald wieder fähig, größere Lasten zu tragen.¹

Vom *Deutschen Stahlbauverband* wurden an der Materialprüfungsanstalt in Berlin-Dahlem Knickversuche mit prismatischen Stahlstäben vorgenommen, wobei sorgfältig konstruierte Schneidenlager Verwendung fanden. Das Versuchsmaterial war Flußstahl St 37 (in der früheren Bezeichnung Flußeisen), hochwertiger Baustahl St 48 und Siliziumstahl St 52. Die Abb. 37 zeigt die Ergebnisse für St 37 und die Ausgleichslinien der Deutschen Vorschriften.² Wir vermerken, daß die Experimente

¹ Siehe ebensolche Versuche mit Walzprofilen bei W. GEHLER: Verhandl. d. 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik, Zürich, 1926. S. 364—367.

² W. REIN: Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Ber. d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau, H. 4. 1930.

an Stäben mit sehr schwacher Anfangskrümmung unter einem Lastangriff mit sehr kleiner Exzentrizität durchgeführt wurden. In § 9 kommen wir auf diese Verhältnisse noch zurück.

Die *Amtlichen Deutschen Bestimmungen*, die ihre Grundlage im wesentlichen in den Dahlemer Versuchen haben, geben für die einzelnen Eisen- und Stahlsorten die folgenden Knickspannungen im unelastischen Bereich an:¹

Schweißisen und Flußeisen (vor 1895 eingebaut, $E = 2000 \text{ t/cm}^2$)

$$\begin{aligned} \frac{l}{i} \leq 60, & \quad \sigma_k = 2,20 \text{ t/cm}^2, \\ 60 \leq \frac{l}{i} \leq 100, & \quad \sigma_k = 2,539 - 0,00565 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

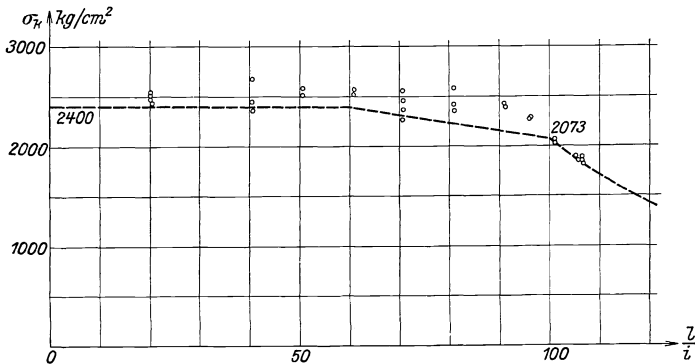


Abb. 37.

St 37 (Flußeisen von Normalgüte, Mindestzugfestigkeit 3700 kg/cm^2 , $E = 2100 \text{ t/cm}^2$)

$$\begin{aligned} \frac{l}{i} \leq 60, & \quad \sigma_k = 2,40 \text{ t/cm}^2, \\ 60 \leq \frac{l}{i} \leq 100, & \quad \sigma_k = 2,8905 - 0,008175 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

St 48 (Kohlenstoffstahl mit etwas höherem Kohlenstoffgehalt, Mindestzugfestigkeit 4800 kg/cm^2 , $E = 2100 \text{ t/cm}^2$)

$$\begin{aligned} \frac{l}{i} \leq 60, & \quad \sigma_k = 3,12 \text{ t/cm}^2, \\ 60 \leq \frac{l}{i} \leq 100, & \quad \sigma_k = 4,6905 - 0,026175 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

¹ Vorschriften für Eisenbauwerke, Berechnungsgrundlagen für eiserne Eisenbahnbrücken, Deutsche Reichsbahn-Gesellschaft 1926. Berechnungsgrundlagen für stählerne Straßenbrücken, DIN 1073, Ausg. 1931. Stahl im Hochbau, DIN 1050, Ausg. 1934. — Ein Ausgleich der Versuchsergebnisse von BAUSCHINGER u. a. auch mit zwei geraden Linien im unelastischen Gebiet findet sich bei F. ENGESSER: Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., 45. Jahrg., S. 507. 1893.

St 52 (Siliziumstahl mit rund 1% Si-Gehalt, Mindestzugfestigkeit 5200 kg/cm², $E = 2100$ t/cm²)

$$\frac{l}{i} \leq 60, \quad \sigma_k = 3,60 \text{ t/cm}^2,$$

$$60 \leq \frac{l}{i} \leq 100, \quad \sigma_k = 5,8905 - 0,038175 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2.$$

Im elastischen Gebiet bei der Schlankheit $\frac{l}{i} > 100$ gilt die EULERSche Formel.

Endlich wiederholen wir, daß bei den vor angeführten Gleichungen für Stäbe mit Spitzen- bzw. Schneidenlagerung die Länge l die freie Knicklänge ist (vgl. Pkt. 7). Bei anderen EULERSchen Randbedingungen wäre anstatt l zu setzen: Bei dem an einem Ende eingespannten und am anderen Ende freien Stab $2l$, beim beiderseits eingespannten Stab $\frac{l}{2}$, bei dem an einem Ende eingespannten und am anderen Ende in der Achse geführten Stab $\sim 0,7l$.

Das Verhältnis zwischen den Knicklasten dieser Lagerungsfälle ist im unelastischen Bereich nicht das gleiche wie bei voller Elastizität. Für einen beiderseits eingespannten Stab liefert z. B. die EULERSche Theorie für die Knickspannung den vierfachen Wert vom beiderseits gelenkig gelagerten Stab. Ist σ_k größer als die Proportionalitätsgrenze, so ist E durch den Knickmodul T zu ersetzen. Nun stehen T und σ_k in einer solchen funktionalen Beziehung, daß σ_k nicht auf das Vierfache erhöht wird. Betrachten wir z. B. einen Stab auf Flußeisen (St 37) von der Schlankheit 60. Mit Zugrundelegung der TETMAJERSchen Formel ist die Knicklast bei beiderseitiger Einspannung

$$P_k = F \cdot (3,10 - 0,0114 \cdot 30) = F \cdot 2,758$$

und bei beiderseitigen Gelenken

$$P_k = F \cdot (3,10 - 0,0114 \cdot 60) = F \cdot 2,416.$$

Die Verhältniszahl k ist $2,758:2,416 = 1,14$. Man erhält ebenso für $l:i = 150$, $k = 2,40$; $l:i = 100$, $k = 1,29$; $l:i = 50$, $k = 1,11$. Da sich eine Einspannung schwer verwirklichen läßt, sind bei Versuchen die Lastvielfachen noch etwas kleiner.¹ Durch die Einspannung der Stabenden wird also die Knickfestigkeit — außer bei sehr schlanken Stäben — nicht wesentlich erhöht.

Aus unseren Darlegungen erkennt man, daß im elastischen Bereich eine nahezu volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vorhanden ist. Versuche, die hier für besondere Fälle noch vorgenommen werden, können nur den Zweck haben, eine Theorie zu kontrollieren. Versuche bei Knickspannungen, die die Proportionalitätsgrenze überschreiten, sind hingegen erforderlich, um die Größe der kritischen Last und die notwendigen Materialdaten zu bestimmen. Hierbei müssen

¹ Vgl. z. B. die Versuche von L. BAUSCHINGER: A. a. O.

Stäbe mit möglichst einfachen Querschnittsformen verwendet werden, da sonst schwer zu fassende Größen das Resultat beeinflussen.¹

19. Empirische Bestimmung des Knickmoduls. Folgerungen.

Die Versuchsergebnisse der unelastischen Stabknickung wollen wir zur Bestimmung des Knickmoduls benützen (vgl. Pkt. 16). Die Einführung des Knickmoduls bietet uns den rechnungsmäßigen Vorteil, die Resultate der elastischen Knickung von Stäben und Stabwerken ohne weiteres auf das unelastische Intervall übertragen zu dürfen.

Aus der EULERSchen Formel für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab, in der wir T anstatt E schreiben, ergibt sich $T = \frac{\sigma_k}{\pi^2} \left(\frac{l}{i}\right)^2$. Berechnet man die Schlankheit aus der linearen Gleichung $\sigma_k = a - b \frac{l}{i}$, mit den Materialkonstanten a und b , und setzt ein, so gewinnt man die Beziehung

$$T = \frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}, \quad (a)$$

die den Zusammenhang zwischen Modul und Spannung angibt. In einem gegebenen Fall ist der Knickmodul mit einer solchen Größe einzuführen, daß er der als Resultat erscheinenden Knickspannung zugeordnet ist. — Eliminiert man hingegen nicht die Schlankheit, sondern die Spannung, so bekommt man

$$T = \frac{1}{\pi^2} \left(a - b \frac{l}{i}\right) \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2, \quad (b)$$

eine Gleichung zwischen dem Modul und der Schlankheit. Bei dieser Form muß der angenommene Knickmodul der Schlankheit entsprechen, die aus der resultierenden Knickspannung hervorgeht.

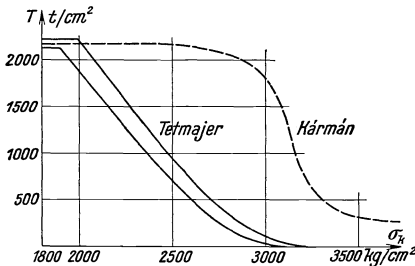


Abb. 38.

Die Abb. 38 zeigt die Abhängigkeit von T mit σ_k für Flußeisen und Flußstahl nach den TETMAJERSchen Formeln und zum Vergleich für Siemens-Martin-Stahl nach der ENGESSER-KÁRMÁNSchen Gleichung.

Die versuchsmäßige Annahme des Knickmoduls läßt sich manchmal umgehen und wir wollen den einschlagenden Rechnungsweg an einem Beispiel klarlegen. Die Knickspannung eines Stabes oder Stabwerkes sei bei vollständiger Elastizität durch die Gleichung

$$\sigma_k = K \cdot E + K_1$$

bestimmt, wobei K und K_1 Koeffizienten sind, die nur von den Abmessungen und der Stützung herrühren. Ersetzt man bei der unelastischen

¹ Eine ausführliche Zusammenstellung der Unterlagen für Knickversuche geben FISCHMANN u. WEIRICH: Die Frage der Knickung und ihre planmäßige Lösung durch den Versuch. Der Eisenbau, 7. Jahrg., S. 255—286. 1916.

Knickung den YOUNG'schen Modul E durch den Knickmodul nach Gl. (a), so folgt die Gleichung dritten Grades

$$\sigma_k^3 - 2a\sigma_k^2 + \left(a^2 - \frac{\pi^2 b^2}{K}\right)\sigma_k + \frac{K_1}{K}\pi^2 b^2 = 0 \quad (\text{a}')$$

aus der σ_k berechnet werden kann. — Verwendet man für den Knickmodul die Gl. (b), so wird zunächst

$$\sigma_k = \frac{K}{\pi^2} \left(a - b \frac{l}{i}\right) \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2 + K_1.$$

Diese Gleichung ist aber noch nicht das Resultat. Wären z. B. K und der Faktor von K , d. i. der Knickmodul konstant, so wäre σ_k mit K_1 veränderlich. Ein verändertes σ_k bedingt aber einen wechselnden und keinen konstanten Knickmodul. Während man bei Verwendung von Gl. (a) die „kritische Spannung“ berechnet hat, muß man bei Heranziehen der Gl. (b) die „kritische Schlankheit“ aufsuchen. Schreibt man links $a - b \frac{l}{i}$ statt σ_k , so entsteht

$$\left(\frac{l}{i}\right)^3 - \frac{a}{b} \left(\frac{l}{i}\right)^2 - \frac{\pi^2}{K} \left(\frac{l}{i}\right) + (a - K_1) \frac{\pi^2}{bK} = 0, \quad (\text{b}')$$

eine Gleichung dritten Grades in $\frac{l}{i}$. Mit $\sigma_k = a - b \frac{l}{i}$ erhält man den gleichen Wert wie vor.

Die Rechnung wird in dem wichtigen Fall $K_1 = 0$ sehr vereinfacht. Dann lautet die Gl. (a')

$$\sigma_k^2 - 2a\sigma_k + a^2 - \frac{\pi^2 b^2}{K} = 0$$

und daraus wird

$$\sigma_k = a - b \cdot \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

Die Gl. (b) liefert ebenso $\frac{l}{i} = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, ein Resultat, das den gegenübergestellten Gleichungen $\sigma_k = a - b \frac{l}{i}$ und $\sigma_k = K \cdot T = \frac{K}{\pi^2} \left(a - b \frac{l}{i}\right) \cdot \left(\frac{l}{i}\right)^2$ auch unmittelbar abzulesen ist. Den Ausdruck $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, der aus einer für volle Elastizität gültigen Rechnung hervorgeht, bezeichnen wir als die *kritische* oder *reduzierte Schlankheit*. Aus der Größe der reduzierten Schlankheit ist zu erkennen, ob eine elastische oder unelastische Knickung vorliegt. Für Flußeisen z. B. ist nach den TETMAJERSCHEN Formeln der maßgebende Grenzwert gleich 105. Im unelastischen Fall ist nun in die empirische lineare Gleichung für die Knickspannung an Stelle der Schlankheit die reduzierte Schlankheit einzusetzen. — Die Anwendung dieses Rechenverfahrens wird später folgen.

Wir heben noch hervor, daß es nicht unbedingt erforderlich wäre, die Versuchsergebnisse in eine mathematische Form zu bringen. Man könnte eine mittlere Ausgleichslinie der Versuche annehmen und zeichnerisch oder in Tabellen den Zusammenhang zwischen σ_k und $\frac{l}{i}$ für ein

bestimmtes Material darstellen. In Fällen, bei denen die Anwendung des Knickmoduls geboten ist, würde man die Knicklast dann allerdings nur durch wiederholtes Zurückrechnen auffinden.

20. Der Sicherheitsgrad.

In unseren früheren Untersuchungen haben wir erkannt, daß die Tragfähigkeit eines auf Druck beanspruchten Stabes erschöpft ist, wenn die Last die Größe der Knicklast erreicht. Für die Sicherheit des Stabes ist daher — mit der üblichen Bedeutung dieses Wortes — der Betrag maßgebend, um den seine Belastung unter dem kritischen Wert bleibt.¹

Wir bezeichnen als *Sicherheitsgrad* oder kurz als *Sicherheit* jene Zahl, mit der man die Last, die den Stab beansprucht, multiplizieren muß, um die Knicklast zu erhalten. Dieser willkürliche Faktor wird nach der Wichtigkeit des Organs und entsprechend dem Charakter des betreffenden Bauwerkes auf Grund der Erfahrung gewählt. Mit dieser Festsetzung ist man unabhängig von der Lagerung, Länge und Ausbildung des Stabes und vom Verlauf der angreifenden Kräfte, und tatsächlich haben alle Bauvorschriften sich diese klare Definition mehr oder weniger geschickt zu eigen gemacht. Wenn man also die Knicklast eines Stabes oder Stabwerkes durch den Sicherheitsgrad s dividiert, bekommt man den größten zulässigen Wert P der „Gebrauchslast“

$$P = \frac{P_k}{s}.$$

Im allgemeinen kann bei Stahlstäben $s = 2,5$ bis 3 , bei Holzstäben $s =$ zirka 8 bis 10 angenommen werden.

Zum Interesse führen wir noch andere Erklärungen an, die für den Sicherheitsgrad eines Druckgliedes versucht wurden. — Bei einem elastischen Stab, soweit wir ihn bisher behandelt haben, verlaufen Knicklast und Querschnittsträgheitsmoment proportional; diese Beziehung besteht aber nicht mehr im unelastischen Gebiet. (Beim kontinuierlich gelagerten Stab gilt auch im elastischen Intervall die Proportionalität nicht, vgl. vierter Abschnitt.) Betrachten wir etwa das folgende Beispiel. Für einen gelenkig gelagerten Stab aus Flußeisen von der Schlankheit 60 und der quadratischen Querschnittsfläche F ist die Knicklast nach der TETMAJERSchen Formel

$$P_k = F \cdot (3,10 - 0,0114 \cdot 60) = F \cdot 2,416 \text{ t.}$$

Bei einer Vergrößerung der Fläche auf den doppelten und des Trägheitsmomentes auf den vierfachen Wert ist

$$P_k = 2F \cdot \left(3,10 - 0,0114 \cdot \frac{60}{\sqrt{2}} \right) = F \cdot 5,233 \text{ t.}$$

Bezieht man den Sicherheitsgrad nicht auf die Lasten, sondern, wie es z. B. empfohlen wurde, auf die Trägheitsmomente, so zeigt sich als

¹ Siehe auch H. ZIMMERMANN: Über den Sicherheitsgrad der Baukonstruktionen, insbesondere der auf Knicken beanspruchten Körper. Berlin, 1886.

Ergebnis:¹ Der Stab mit dem vervierfachen Trägheitsmoment hat unter der Gebrauchslast $F \cdot 2,416$ t eine vierfache Sicherheit, obwohl hinsichtlich der Lasten nur eine $5,233:2,416 = 2,17$ fache Sicherheit vorhanden wäre. Maßgebend für die Größe der Last, die dem Stab zugemutet werden darf, kann aber nur der Grenzwert der kritischen Last sein, und so tritt bei dieser Definition der wahre Sachverhalt nicht offen in Erscheinung. Dasselbe gilt für das Verfahren, unter der Annahme vollständiger Elastizität, den Sicherheitsgrad als den Quotienten aus der „virtuellen Biegearbeit“ und der „virtuellen Druckarbeit“ der Last bei einer kleinen Ausbiegung zu definieren.²

Bei Stäben mit EULERSchen Randbedingungen geht man häufig derart vor, daß man die Gebrauchslast mit einem erst zu ermittelnden Faktor multipliziert und mit dieser vervielfachten Last wie mit einer ideellen Zugkraft oder reinen Druckkraft rechnet. Wird dieser Faktor mit ω bezeichnet, so ist bei der zulässigen Beanspruchung σ_{zul} des Materials

$$\sigma_{zul} = \frac{P \omega}{F}$$

und mit $P = \frac{F \cdot \sigma_k}{s}$ daher $\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} s$. Bei einem festen Sicherheitsgrad und bekannten Spannungswerten σ_k und σ_{zul} läßt sich ω finden und in Tabellen in Abhängigkeit von der Schlankheit darstellen. Dieser Rechnungsweg hat in der deutschen Literatur den Namen „ ω -Verfahren“ erhalten.

Setzt man beispielsweise für Flußeisen (St 37) entsprechend der von TETMAJER bestimmten mittleren Druckfestigkeit $\sigma_{zul} \cdot s = 3,8$ t/cm², so gelten unter Verwendung der TETMAJERSchen Formel im unelastischen Intervall für die Koeffizienten ω die Gleichungen

$$\text{für } \frac{l}{i} < 105 \quad \omega = \frac{3,8}{3,1 - 0,0114 \frac{l}{i}}; \quad \text{für } \frac{l}{i} \geq 105 \quad \omega = \frac{3,8}{21\,220 \left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Der Sicherheitsgrad kommt hierbei in der Wahl von σ_{zul} zum Ausdruck.³

Von verschiedener Seite wurde vorgeschlagen, da es „in der Praxis nicht einmal annähernd möglich ist, Druckrichtung und Stabachse zur Deckung zu bringen“, von vornherein mit einer Exzentrizität der Kraft-

¹ J. DONDORFF: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt. Dissertation. Aachen, 1907.

² H. KAYSER: Knickwiderstand von Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt. Der Eisenbau, Bd. 1, S. 452—457. 1910.

³ In den Deutschen Vorschriften (siehe die Gleichungen für die Knickspannungen in Pkt. 18) ist der Sicherheitsgrad von der Schlankheit des Stabes abhängig und bei der elastischen Knickung, die sich theoretisch genau verfolgen läßt, höher vorgeschrieben als bei der unelastischen. Die geforderte Sicherheit für das Knicken eines Stabes ist nach verschiedenen Richtungen somit verschieden! Bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt (vgl. dritter Abschnitt) bleibt dann im wesentlichen nichts anderes übrig, als eine mittlere Sicherheit einzuführen.

wirkung zu rechnen und die größte auftretende Spannung zu bestimmen.¹ Jene Last wird z. B. bei einem Eisenstab als gefährlich angesehen, bei der diese Spannung gleich der Stauch- (Streck-) Grenze ist. Den Hebelarm soll man bei der Rechnung möglichst ungünstig wählen, aber damit wird die Rechnung gewöhnlich ganz willkürlich. Die Sicherheit ist nicht erhöht und der wirkliche Vorgang in der Regel nicht richtig erfaßt. Das hier angedeutete Problem werden wir im nächsten Abschnitt näher untersuchen.

Zweiter Abschnitt.

Axial gedrückte Stäbe bei gleichzeitiger Biegebeanspruchung.

§ 7. Der exzentrisch gedrückte, an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab.

21. Die Näherungstheorie.

Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie Stab ist durch die axiale Kraft P gedrückt, bei der die Angriffslinie um die Exzentrizität e gegen die Stabachse verschoben ist. Hierbei stellt e die Länge eines steifen Armes vor, der mit dem Stabende verbunden gedacht ist.

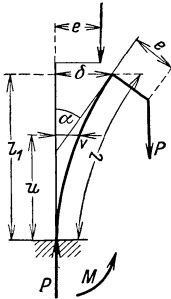


Abb. 39.

Mit dieser Belastung hat man einen Fall der reinen Biegung, da an jedem Stabende ein Biegemoment von der Größe $P \cdot e$ wirkt. Setzen wir den Stab als sehr dünn voraus, so müssen wir auch die Ausbiegungen v berücksichtigen, und wir erhalten mit den Bezeichnungen der Abb. 39 das Biegemoment im Abstand u von der Einspannstelle

$$M = P(e \cdot \cos \alpha + \delta - v).$$

wobei α der Neigungswinkel der Endtangente des Stabes ist. In der üblichen Näherungstheorie darf man $\cos \alpha = 1$ schreiben, und die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$\frac{d^2 v}{du^2} = a^2(e + \delta - v), \quad a^2 = \frac{P}{EI},$$

unter den Randbedingungen $u = 0, v = 0, v' = 0$. Das Integral dieser Gleichung ist

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au + e + \delta$$

und bei Berücksichtigen der Randwerte wird

$$v = (e + \delta)(1 - \cos au).$$

¹ H. MÜLLER-BRESLAU: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 5. Aufl. 1924. S. 374. — A. OSTENFELD: Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 42, S. 1462—1470. 1898.

Mit $u = l$, $v = \delta$ bekommt man die Ausbiegung des Stabendes

$$\delta = e \left(\frac{1}{\cos al} - 1 \right).$$

Für $P = 0$ ist $\delta = 0$, für kleine P bleibt $\cos al$ nahe Eins und δ wächst langsam an, bei $al = \frac{\pi}{2}$, d. i. bei der EULERSchen Last $P_k = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$ wird δ unendlich, welchen Wert e auch hatte. In der Abb. 40 haben wir in einem rechtwinkligen Achsenkreuz den Verlauf der Ausbiegungen $\delta : l$ als Funktion von $P : P_k$ für die Werte $e : l = 0,01$, $0,05$ und $0,1$ aufgezeichnet. Bei einer sehr kleinen Exzentrizität weicht diese Linie zunächst wenig von der Abszissenachse ab, um erst in der Nähe der Knicklast stärker anzusteigen.

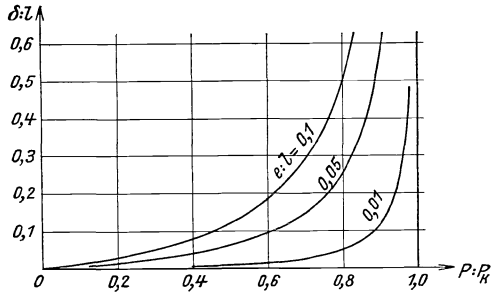


Abb. 40.

Im ersten Abschnitt, beim zentrisch belasteten Stabergab die Näherungsrechnung für die Ausbiegung unter der kritischen Last den Wert $0:0$, und wir mußten zur Klarstellung eine genauere Untersuchung durchführen. Auch hier werden wir bei größeren Verformungen den linearen Ansatz für die Biegelinie auflassen und für den Krümmungsradius den richtigen Ausdruck verwenden. Aber wir nehmen wieder die unbeschränkte Gültigkeit der HOOKESchen Beziehung an.

22. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung des Stabendes.

Eine zweite Näherung für die Ausbiegung des freien Stabendes läßt sich mit Hilfe der im ersten Abschnitt hergeleiteten Formeln für zentrische Belastung auf elementarem Wege berechnen.

Wenn die Last P nicht am Stabende angreift, sondern mit einem steifen Normalenstück von der Größe e mit dem Stabende verbunden ist, so bleibt doch die frühere elastische Linie ungeändert. Wir bezeichnen wie vor die Stablänge mit l , die Ausbiegung des freien Endes mit δ ; die Länge eines fiktiven zentrisch belasteten Stabes mit l' und seine Ausbiegung mit δ' (Abb. 41). Vorausgesetzt werden nur schwache Ausbiegungen, so daß die Bogenlängen gleich den Abszissen angenommen werden dürfen. Die Gleichung der ersten Näherung für den zentrisch belasteten Stab,

Pkt. 1, $v = \delta' \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l'} u \right)$ ergibt für $u = l$

$$\delta = \delta' \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{l}{l'} \right)$$

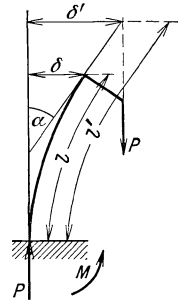


Abb. 41.

und zufolge $\delta' = \delta + e$ wird daraus

$$\frac{\delta}{l} = \frac{e}{l} \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi l}{2 l'}} - 1 \right). \quad (1)$$

Nun gilt nach Pkt. 2 für die Ausbiegung δ' die Gleichung

$$\delta + e = 1,800 l' \sqrt{\frac{4 P l'^2}{\pi^2 E I} - 1};$$

wenn man hier die Knicklast P_k mit dem Ausdruck $\frac{\pi^2 E I}{4 l'^2}$ einführt und Gl. (1) berücksichtigt, erhält man

$$\frac{e}{l} = 1,8 \frac{l'}{l} \cdot \cos \frac{\pi l}{2 l'} \cdot \sqrt{\frac{P}{P_k} \left(\frac{l'}{l} \right)^2 - 1}. \quad (2)$$

Aus den Gl. (1) und (2) ist bei festen $\frac{e}{l}$ und $\frac{P}{P_k}$ der „Hilfswert“ $\delta:l$ und dann $\delta:l$ zu berechnen. Die Abb. 42 zeigt für die Exzentrizitäten $e:l = 0,01, 0,05$ und $0,1$ die Ausbiegungsgröße $\delta:l$ als Funktion von $P:P_k$. Die Linie für $e = 0$ wurde aus Abb. 3 übernommen.

Wir können als Ergebnis zusammenfassen: Bei der exzentrischen Kraftwirkung liegt ein Spannungsproblem vor, d. h. man hat zur gegebenen Last die auftretenden Spannungen und Formänderungen zu be-

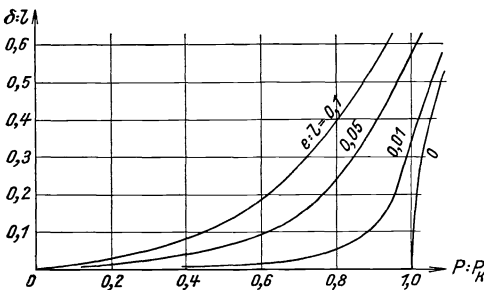


Abb. 42.

stimmen. Wird der Stab einer langsam wachsenden Drucklast P unterworfen, so tritt von $P=0$ an eine Ausbiegung ein, die, wenn P sich der EULERSchen Last P_k nähert, sehr stark wächst, so daß in der Regel die Bruchgrenze überschritten sein wird, ehe P den Wert P_k erreicht hat. Die zweite Näherung liefert eine wohlbestimmte Ausbiegung und Spannung für jedes P unterhalb P_k ,

für $P = P_k$ und auch für solche P , die nicht weit oberhalb P_k liegen. Diese Werte sind, wie wir noch zeigen, auch quantitativ zutreffend, wenn die Exzentrizität nicht allzu groß ist. Die übliche angenäherte Biegetheorie, die nur für kleine Ausbiegungen gilt, gibt natürlich die Verhältnisse in der Nähe von $P = P_k$ nicht richtig wieder und läßt den Biegepfel bei $P = P_k$ unendlich groß erscheinen. Das war die Folge der Vernachlässigung der höheren Potenzen der Ausbiegung, und dem Unendlichwerden kommt keine Bedeutung zu. Auf keinen Fall hat man hier ein Stabilitätsproblem. Ein solches entsteht beim zentrisch belasteten Stab nur dadurch, daß bei jeder Last die biegefreie Deformation eine Gleichgewichtslage ist; diese biegefreie Form, zu der ein Analogon beim exzentrisch gedrückten Stab überhaupt nicht vorhanden ist, wird dort bei der kritischen Last P_k instabil und zugleich wird eine Gleichgewichtsform mit Biegung möglich.

23. Die genauere Berechnung für die Ausbiegung des Stabendes.

Um eine Berechnung mit dem richtigen Ausdruck für die Krümmung durchzuführen, müssen wir unsere Entwicklungen vom zentrisch belasteten Stab im ersten Abschnitt nur etwas ergänzen. Die Untersuchung wird uns auch instand setzen, die vor abgeleitete zweite Näherung zu kontrollieren.

Wir bezeichnen wie in Pkt. 22 die Stablänge mit l , die Ausbiegung des freien Endes mit δ , die Länge des fiktiven zentrisch belasteten Stabes mit l' und seine Ausbiegung mit δ' . Nach den Gl. (8) und (9) von Pkt. 3 sind mit $n = 0$, da wir nur die erste Biegeform betrachten,

$$al = F(\vartheta, \varphi_1) \quad (a)$$

und

$$a\delta = 2 \sin \vartheta \cdot (1 - \cos \varphi_1), \quad (b)$$

wobei φ_1 der Wert des Parameters φ am Stabende l ist. Der Parameter φ am Stabende l' ist gleich $\frac{\pi}{2}$ und mithin

$$a\delta' = 2 \sin \vartheta.$$

Die Gl. (4) von Pkt. 4 gibt eine Beziehung für den Neigungswinkel der Elastica an, also

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi_1.$$

Zwischen δ und δ' besteht nun die Verbindung $\delta' = \delta + e \cdot \cos \alpha$, und wenn man für δ' , δ und $\cos \alpha$ die angeschriebenen Werte einsetzt, bekommt man

$$ae = \frac{2 \sin \vartheta \cdot \cos \varphi_1}{1 - 2 \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi_1}. \quad (c)$$

Aus den drei Gl. (a), (b) und (c) sind ϑ , φ_1 und δ zu bestimmen.¹ Mit Einführen der EULERSCHEN Knicklast $P_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ können wir für $a = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ auch $\frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_k}}$ schreiben und die Auflösung bei einem festen $e:l$ z. B. in der folgenden Weise vornehmen. Mit einem angenommenen Wert $P:P_k$ berechnen wir aus den Gl. (a) und (c) die Größen ϑ und φ_1 und damit aus Gl. (b) die Ausbiegung $\delta:l$.

Für $e = 0$, d. i. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir aus (a) und (b) die Formeln (2) von Pkt. 4, wenn wir dort $n = 0$ setzen.

Ist $\sin \vartheta = k$ sehr klein, so gelten die Gleichungen

$$al = \varphi_1, \quad a\delta = 2k(1 - \cos \varphi_1), \quad ae = 2k \cdot \cos \varphi_1,$$

die sich auf das vorkritische Gebiet $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ beziehen, denn es bleibt $\cos \varphi_1$ willkürlich, so daß e und δ von gleicher Größenordnung sind. Die Unbestimmtheit von φ_1 sagt ferner, daß die Formänderung derart gering ist, daß sich die Stablänge l von der fiktiven l' und daher auch φ_1 von $\frac{\pi}{2}$ im

¹ J. MALKIN: Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 6, S. 73—76. 1926.

allgemeinen wesentlich unterscheiden. Durch Elimination von k und φ_1 ergibt sich die Gleichung der Näherungstheorie

$$\delta = e \left(\frac{1}{\cos al} - 1 \right), \quad 0 \leq al < \frac{\pi}{2}.$$

In der Abb. 43 ist für die Exzentrizitäten $e:l = 0, 0,01$ und $0,1$ die Linie $\delta:l$ als Funktion von $P:P_k$ aufgetragen. Man erkennt aus dem Ver-

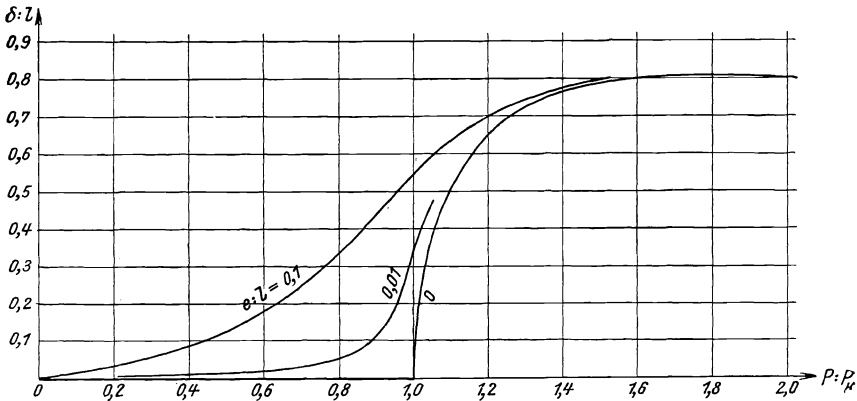


Abb. 43.

gleich mit der Abb. 42, daß bei einer bedeutenden Exzentrizität die zweite Näherung von Pkt. 23 nur ein qualitativ richtiges Resultat gibt. Unter einer kleinen, „unvermeidlichen“ Exzentrizität findet man mit ihr im Bereich der Knicklast voll das Auslangen. Das war auch vorauszusehen, da sich die Linie für eine sehr kleine Exzentrizität der Kurve $e = 0$ sehr anschmiegt und für diese die zweite Näherung zutreffend ist. Sogar bei einem für Knickversuche noch verhältnismäßig großen Wert von $e = 0,01$ besteht Übereinstimmung mit der genauen Berechnung. Das Ergebnis, daß bei kleinen „Fehlerhebeln“ die Berechnung nach unserer zweiten Näherung ausreicht, werden wir uns noch später zunutze machen.

§ 8. Der axial belastete gelenkig gelagerte Stab mit einer Einzellast in der Mitte senkrecht zur Stabachse.

24. Die Näherungstheorie.

Wir untersuchen einen an den Enden gelenkig gelagerten Stab von der Länge l , der durch die Kraft P zentrisch gedrückt und in der Quer- richtung, senkrecht zur Achse, in der Mitte durch eine Kraft von der Größe $2Q$ belastet ist (Abb. 44).

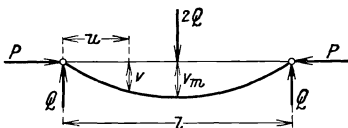


Abb. 44.

Die vertikalen Auflagerkräfte sind gleich Q , und man entnimmt der Anschauung, daß die Biegelinie aus zwei zur Mitte symmetrischen Teilen besteht und die größte Ausbiegung unter der

Querlast auftritt. Wir beziehen unsere Rechnung auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, dessen Ursprung in einem Stabende liegt, bei dem die u -Achse mit der unverformten Stabachse zusammenfällt und die Verbiegungen v nach abwärts positiv gezählt werden. Das Biegemoment im Querschnitt u, v ist dann

$$M = Q \cdot u + P \cdot v$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} = -Q \cdot u - P \cdot v,$$

unter den Randbedingungen $u = 0, v = 0$ und $u = \frac{l}{2}, v' = 0, (v = v_m)$.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au - \frac{Q}{P} u, \quad \frac{P}{EI} = a^2.$$

Die Bedingung $u = 0, v = 0$ ergibt die Konstante $C_2 = 0$; mit $u = \frac{l}{2}, v = v_m$ wird $C_1 \cdot \sin a \frac{l}{2} = v_m + \frac{Q}{P} \frac{l}{2}$, und daher ist die Ausbiegung im Querschnitt u, v

$$v = \left(v_m + \frac{Q}{P} \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{\sin au}{\sin a \frac{l}{2}} - \frac{Q}{P} u. \quad (a)$$

Bei $Q = 0$ folgt mit dem Randwert $u = \frac{l}{2}, v' = 0$ der Parameter $a = \frac{\pi}{l}$ und für P die EULERSche Knicklast. Geht man mit der Bedingung $u = \frac{l}{2}, v' = 0$ in Gl. (a) ein, so erhält man die Ausbiegung in der Stabmitte

$$v_m = \frac{Q}{Pa} \cdot \left(\operatorname{tg} a \frac{l}{2} - a \frac{l}{2} \right). \quad (b)$$

Wenn zwischen P und Q eine feste Beziehung besteht, so ist die Ausbiegung v_m für $P = 0$ gleich Null und sie steigt mit zunehmendem P allmählich an. Sie wird unendlich bei jedem Verhältnis von P und Q für $al = \frac{\pi}{2}$, d. h. unter der EULERSchen Last

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Daraus wird öfters geschlossen, „daß die Querbelastung eines Stabes ohne Einfluß auf seine Knickgrenze ist“.

Dieses Ergebnis und seine Formulierung wollen wir etwas näher betrachten. Die kritische Last hängt nur von den Abmessungen des Stabes und der Stützung ab, ist also eine dem Stab eigene Größe, und es ist von vornherein klar, daß sie von Querlasten unabhängig ist. Wird gemeint, daß man die Knicklast auch bei querwirkenden Lasten errechnen kann, so ist das bis auf gewisse Ausnahmen zutreffend; man hält als Kriterium fest, daß die Näherungstheorie eine unendliche Ausbiegung ergibt. Wir werden noch zeigen, daß allerdings auch eine Verteilung der Querlasten möglich wäre, bei der man mit dieser „Rechnungsregel“ nicht die richtige Knicklast auffindet. Unrichtig wäre es aber, das Resultat in dem Sinne

zu deuten, daß hier ein Fall der elastischen Stabilität vorliegt. Die Verformungen des Stabes beginnen zugleich mit der Belastung, und bei Verwenden des genaueren Ansatzes für die Krümmung erhält man auch unter der EULERSchen Last eine ganz bestimmte Ausbiegung, siehe die folgenden Punkte. Wir haben also jetzt die größte auftretende Spannung zu berechnen, die eine vom Material abhängige Grenze nicht überschreiten darf.¹ Das Biegemoment in der Stabmitte ist mit Gl. (b)

$$M = Q \cdot \frac{l}{2} + P \cdot v_m = \frac{Q}{a} \cdot \operatorname{tg} a \frac{l}{2}$$

und die maximale Spannung bestimmt sich, wenn F die Fläche und W das maßgebende Widerstandsmoment des Stabquerschnittes sind, aus der NAVIERSchen Gleichung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}.$$

An dieser Stelle können wir noch das *Knickproblem gekreuzter Stäbe* einschalten. Der Stab von der Länge l sei durch einen Stab von der Länge l_1 elastisch gestützt, wobei der Stützpunkt für jeden Stab in seiner Mitte liege. Wir betrachten zuerst den Stab l . Die querwirkende Kraft $2Q$ unserer vorstehenden Rechnung setzen wir proportional der Ausbiegung, also gleich $2A \cdot v_m$, und damit bekommen wir für die Ausbiegung im Kreuzungspunkt die Gleichung

$$v_m = \frac{A v_m}{P a} \cdot \left(\operatorname{tg} a \frac{l}{2} - a \frac{l}{2} \right), \quad a^2 = \frac{P}{EI}.$$

Für den Stab l_1 mit dem Querschnittsträgheitsmoment I_1 und der Druckkraft P_1 ist die Kraft $2Q$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen und die Ausbiegung ist dieselbe wie früher

$$v_m = - \frac{A v_m}{P_1 a_1} \cdot \left(\operatorname{tg} a_1 \frac{l_1}{2} - a_1 \frac{l_1}{2} \right), \quad a_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}.$$

Bei der Zusammenfassung der zwei Gleichungen fällt die Konstante A heraus und es ergibt sich

$$\operatorname{tg} a \frac{l}{2} - a \frac{l}{2} = - \left(\operatorname{tg} a_1 \frac{l_1}{2} - a_1 \frac{l_1}{2} \right) \cdot \frac{a^3}{a_1^3} \frac{I}{I_1}.$$

Sind die Abmessungen und die Belastung des „Nebenstabes“ l_1 bekannt, so läßt sich bei gegebenen Abmessungen des „Hauptstabes“ l der Wert a , also P berechnen.² Ist z. B. der Nebenstab auf Zug beansprucht, so ist P_1 mit einem negativen Vorzeichen zu versehen und man erhält

$$\operatorname{tg} a \frac{l}{2} - a \frac{l}{2} = \left(\operatorname{Tg} a_1 \frac{l_1}{2} - a_1 \frac{l_1}{2} \right) \cdot \frac{a^3}{a_1^3} \frac{I}{I_1}.$$

¹ Probleme der sog. „*Knickbiegung*“ siehe bei J. RATZERSDORFER: Berechnung axial- und gleichförmig querbelasteter Träger. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 71, H. 43—46. 1919. Durchgehende Balken mit beliebig vielen Öffnungen bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte. Der Eisenbau, Jahrg. 10. S. 93—109. 1919.

² Die Formel findet sich auch bei R. KROHN: Ztrbl. d. Bauverwaltung, Jahrg. 37, S. 442. 1917.

25. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung der Stabmitte.

Faßt man die Ausbiegung v als Funktion der Bogenlänge s auf, so ist die erste Ableitung v' gleich dem Sinus des Tangentenwinkels Θ , $v' = \sin \Theta$, daher die zweite Ableitung v'' gleich $\cos \Theta$ mal der Krümmung $\frac{d\Theta}{ds}$. Demnach lautet die genaue Biegegleichung mit der unabhängig Veränderlichen s

$$EIv'' = -(Q \cdot u + P \cdot v) \cdot \cos \Theta.$$

Setzt man $\cos \Theta \sim 1$, so folgt die Gleichung von Pkt. 24. Man bekommt eine zweite Näherung, wenn man dafür $1 - \frac{\Theta^2}{2}$ nimmt, wobei man für Θ auch $\sin \Theta = v'$ schreiben darf. Somit entsteht die Differentialgleichung

$$v'' = -a^2 \left(v + \frac{Q}{P} u \right) \left(1 - \frac{v'^2}{2} \right), \quad a^2 = \frac{P}{EI}$$

und mit der Abkürzung

$$v + \frac{Q}{P} u = z$$

gewinnt sie die Form

$$z'' + a^2 z = \frac{a^2}{2} z \left(z' - \frac{Q}{P} \right)^2.$$

Die Randbedingungen sind $u = 0$, $z = 0$ und $u = \frac{l}{2}$, $z' = \frac{Q}{P}$, wenn man hier u mit s identifiziert.

Auf der rechten Gleichungsseite führen wir, ähnlich wie in Pkt. 2, für z und z' die Ausdrücke der ersten Näherung ein, wobei wir den Wert von a mit a_0 bezeichnen. Nun ist nach Pkt. 24

$$z = \left(v_m + \frac{Q}{P} \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{\sin a_0 u}{\sin a_0 \frac{l}{2}},$$

oder anders ausgedrückt

$$z = \delta \cdot \frac{\sin a_0 u}{\sin a_0 \frac{l}{2}}, \quad \text{wenn } \delta = v_m + \frac{Q}{P} \frac{l}{2} = \frac{Q}{Pa_0} \cdot \operatorname{tg} a_0 \frac{l}{2}.$$

Die Differentialgleichung wird daher

$$z'' + a^2 z = \frac{a_0^4}{2} \delta^3 \cdot \frac{\sin a_0 u}{\sin^3 a_0 \frac{l}{2}} \cdot \left(\cos a_0 u - \cos a_0 \frac{l}{2} \right)^2$$

und zufolge $\sin a_0 u \cdot \cos^2 a_0 u = \frac{1}{4} (\sin a_0 u + \sin 3a_0 u)$ erhält sie die Gestalt

$$z'' + a^2 z = \frac{a_0^4}{8} \frac{\delta^3}{\sin^3 a_0 \frac{l}{2}} \cdot \left[\sin a_0 u \cdot \left(1 + 4 \cos^2 a_0 \frac{l}{2} \right) - 4 \sin 2a_0 u \cdot \cos a_0 \frac{l}{2} + \sin 3a_0 u \right].$$

Diese Gleichung läßt sich durch den Ansatz

$$z = c_1 \cdot \sin a_0 u + c_2 \cdot \sin 2a_0 u + c_3 \cdot \sin 3a_0 u$$

integrieren und das Gleichsetzen der Koeffizienten von $\sin a_0 u$, $\sin 2a_0 u$, $\sin 3a_0 u$ auf beiden Seiten ergibt der Reihe nach

$$c_1 = \delta^3 \cdot \frac{a_0^4}{8(a^2 - a_0^2)} \frac{1 + 4 \cos^2 a_0 \frac{l}{2}}{\sin^3 a_0 \frac{l}{2}},$$

$$c_2 = -\delta^3 \cdot \frac{a_0^4}{8(a^2 - 4a_0^2)} \frac{4 \cos a_0 \frac{l}{2}}{\sin^3 a_0 \frac{l}{2}},$$

$$c_3 = \delta^3 \cdot \frac{a_0^4}{8(a^2 - 9a_0^2)} \frac{1}{\sin^3 a_0 \frac{l}{2}}.$$

Für $u = \frac{l}{2}$, $z = \delta$ bekommt man

$$\delta = c_1 \cdot \sin a_0 \frac{l}{2} + c_2 \cdot \sin a_0 l + c_3 \cdot \sin 3a_0 \frac{l}{2}$$

und mit den Werten c eine Gleichung in δ , also für den Wert a_0 . Berücksichtigt man nur das Glied mit c_1 und schreibt man $a^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{P}{P_k}$, wenn P_k die EULERSche Knicklast für den an den Enden gelenkig gelagerten Stab von der Länge l ist, so wird die Bestimmungsgleichung für a_0

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{2}}{a_0 \frac{l}{2}} \cdot \frac{\cos a_0 \frac{l}{2}}{\sqrt{1 + 4 \cos^2 a_0 \frac{l}{2}}} \cdot \sqrt{\pi^2 \frac{P}{P_k} - 4 \left(a_0 \frac{l}{2}\right)^2}.$$

Die Ausbiegung der Stabmitte ist dann aus der Formel

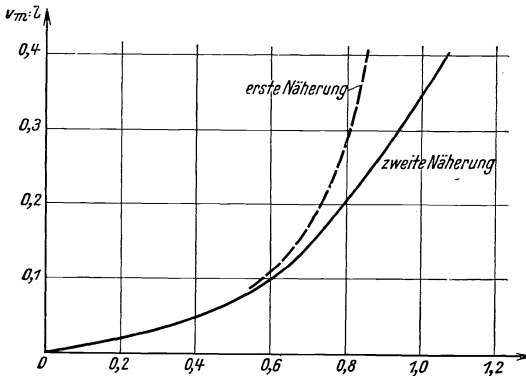


Abb. 45.

$$\frac{v_m}{l} = \frac{Q}{2P} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} a_0 \frac{l}{2}}{a_0 \frac{l}{2}} - 1 \right)$$

zu berechnen, wobei man bei $\frac{Q}{P}$ auch ausreichend genau $\sqrt{1 + 4 \cos^2 a_0 \frac{l}{2}}$ gleich Eins setzen darf.

Bei der Querlast $Q = 0$ ist $a_0 = \frac{\pi}{l}$ und man erhält die in Pkt. 7 angegebene Gleichung

$$v_m = 0,9 l \sqrt{\frac{P}{P_k} - 1}.$$

Als Beispiel wurde für das Verhältnis $Q:P = 0,176$ der Verlauf der Ausbiegungsgröße $v_m:l$ bei den Lastwerten $P:P_k$ bestimmt und in einem rechtwinkligen Achsenkreuz dargestellt (Abb. 45). Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse der ersten Näherung eingetragen, und man erkennt, daß ihre Resultate nur bei einer kleinen Verformung zutreffen. Das Unendlichwerden der Ausbiegung unter der EULERSchen Last war eine Folge der üblichen Näherungstheorie.¹

26. Die genauere Berechnung der Ausbiegung in der Stabmitte.

Wir vernachlässigen die axiale Zusammendrückung des Stabes und schreiben die Differentialgleichung der Elastica in der Form an:²

$$EI \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} = -Q \cdot u - P \cdot v.$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{P}{EI} = a^2, \quad \frac{Q}{P} = h, \quad v + h \cdot u = z$$

geht sie in die Gleichung

$$\frac{z''}{(1+h^2-2hz'+z'^2)^{3/2}} = -a^2z$$

über, und wenn man mit $z' \cdot du = dz$ multipliziert, ergibt die Integration

$$\frac{1-hz'+h^2}{\sqrt{1+h^2-2hz'+z'^2}} = a^2 \frac{z^2}{2} + C.$$

Die Konstante C findet man aus der Randbedingung $u = l_1, v' = 0$, d. h. $z = v_m + h \cdot l_1 \equiv \delta$, $\frac{dz}{du} = h$ und dann wird

$$\frac{1-h\left(\frac{dz}{du}-h\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{du}-h\right)^2}} = 1 + \frac{a^2}{2}(z^2-\delta^2).$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Ausrechnen von $\frac{dz}{du}$ mit einfachen Überlegungen

$$\frac{du}{dz} = \frac{1 - \frac{a^2}{2}(\delta^2 - z^2)}{(1+h^2)\sqrt{1+h^2 - \left[1 - \frac{a^2}{2}(\delta^2 - z^2)\right]^2}} + \frac{h}{1+h^2}.$$

Um auf die Normalform der elliptischen Integrale zu kommen, führen wir die Substitutionen

¹ Vgl. eine andere zweite Näherung bei E. TREFFTZ: Zur Frage der Holmfestigkeit. Ztschr. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, Jahrg. 9, S. 100—102. 1919.

² Vgl. L. SAALSCHÜTZ: Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Leipzig, 1880.

$$\cos^2 \varphi = \frac{a^2 z^2}{2\sqrt{1+h^2-2+a^2\delta^2}}, \quad \sin^2 \vartheta = \frac{2\sqrt{1+h^2-2+a^2\delta^2}}{4\sqrt{1+h^2}}$$

ein, und es entsteht

$$a \cdot du = -\frac{1}{(1+h^2)^{3/4}} \frac{1-2\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}} d\varphi + \frac{h}{1+h^2} a \cdot dz. \quad (a)$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich, indem man sie mit den angegebenen Abkürzungen auf die vorhergehende Ausdrucksform zurückbringt. — Zufolge der Beziehung $v = z - h \cdot u$ ist nun

$$a \cdot dv = a \cdot dz - h a \cdot du. \quad (b)$$

Bei Berechnung der maximalen Ausbiegung v_m in der Stabmitte erstreckt sich die Integration von $u = 0$ ($v = 0$) bis $u = l_1$ ($v = v_m$), d. h. von $z = 0$ bis δ oder von $\varphi = \varphi_0$ bis $\varphi = \varphi_1$, wobei

$$\cos^2 \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{a^2 \delta^2}{2\sqrt{1+h^2-2+a^2\delta^2}} \quad \text{oder} \quad \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \vartheta = \frac{\sqrt{1+h^2}-1}{2\sqrt{1+h^2}}.$$

Mit der Bezeichnung

$$h = \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} 2\xi$$

lautet die Bedingung für die Grenze φ_1

$$\sin \vartheta \cdot \sin \varphi_1 = \sin \xi. \quad (1)$$

Man erhält somit aus (b) und (a) die Gleichung

$$a v_m = a \delta - \frac{h}{(1+h^2)^{3/4}} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}} d\varphi - \frac{h^2}{1+h^2} a \delta$$

und mit den Beziehungen

$$a \delta = \frac{2 \sin \vartheta \cdot \cos \varphi_1}{\sqrt{\cos 2\xi}}, \quad \frac{1}{1+h^2} = (\cos 2\xi)^2,$$

(wobei die erste aus dem Ansatz für $\cos^2 \varphi_1$ hervorgeht), ergibt sich

$$a v_m = 2 (\cos 2\xi)^{3/2} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi_1 - \sin 2\xi \cdot \sqrt{\cos 2\xi} \left[2E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) - 2E(\vartheta, \varphi_1) - F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) + F(\vartheta, \varphi_1) \right]. \quad (2)$$

In dieser Gleichung sind rechts ϑ und φ_1 unbekannt und wir haben zwischen diesen beiden Größen nur den Zusammenhang (1). Die noch fehlende Gleichung ermitteln wir, wie beim nur axial belasteten Stab in Pkt. 3 aus der Bedingung, daß die Bogenlänge der elastischen Linie gleich der Stablänge l ist.

Mit dem Ansatz

$$ds = du \cdot \sqrt{1+v'^2} = du \cdot \sqrt{1+(z'-h)^2}$$

gewinnt man

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{1+h^2 - \left[1 - \frac{a^2}{2}(\delta^2 - z^2)\right]^2}},$$

oder

$$a \cdot ds = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}},$$

wie man durch Zurückrechnen leicht nachweisen kann. Daher wird zwischen $\frac{\pi}{2}$ und φ_1 integriert

$$a \frac{l}{2} = \sqrt{\cos 2\xi} \cdot \left[F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) - F(\vartheta, \varphi_1) \right]. \quad (3)$$

Die Berechnung der Abszisse l_1 für die Stabmitte und die Kenntnis der gegenseitigen Annäherung der Endpunkte ist für uns jetzt ohne besonderes Interesse.

Die Gl. (1), (2) und (3) leisten die Lösung unserer Aufgabe. Wir bezeichnen noch mit P_k die EULERSche Knicklast $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$ des Stabes und schreiben an Stelle von a den Ausdruck $\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P}{P_k}}$. Bei einem gegebenen Verhältnis von P und Q , also bekanntem ξ nehmen wir einen Modul $\sin\vartheta$ an, bestimmen aus (1) den Parameterwert φ_1 , dann aus (3) den Wert $\sqrt{\frac{P}{P_k}}$ und schließlich aus (2) die zugehörige Ausbiegungsgröße der Stabmitte $v_m:l$.

Bei alleiniger Wirkung der Druckkraft P , d. h. mit $h=0$, gelten die Gleichungen

$$\frac{v_m}{l} \sqrt{\frac{P}{P_k}} = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\vartheta, \quad \sqrt{\frac{P}{P_k}} = \frac{2}{\pi} \cdot F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right),$$

bzw. für Gleichgewicht ohne Ausbiegung $\sin\vartheta=0$, in sinnemäßer Übereinstimmung mit den Gl. (2) von Pkt. 4 für den EULERSchen Grundfall.

Ist ϑ sehr klein, also auch ξ sehr klein, während φ_1 willkürlich bleibt, so sind mit Vernachlässigen der zweiten und höheren Potenzen von ϑ

$$E\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\vartheta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad E(\vartheta, \varphi_1) = F(\vartheta, \varphi_1) = \varphi_1$$

und unser Gleichungssystem wird

$$\vartheta \cdot \sin\varphi_1 = \xi, \quad av_m = 2\vartheta \cdot \cos\varphi_1 - 2\xi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right), \quad a \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1.$$

Für die Ausbiegung v_m ergibt sich, da $2\xi = h = \frac{Q}{P}$

$$v_m = \frac{Q}{Pa} \cdot \left(\operatorname{tg} a \frac{l}{2} - a \frac{l}{2} \right),$$

d. i. die in Pkt. 24 ermittelte Gleichung der Näherungstheorie.

Wir haben wie in Pkt. 25 als Beispiel $h = \operatorname{tg} 2\xi = Q:P = 0,176$ angenommen, d. h. $\xi = 5^\circ$. In der Abb. 46 sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu den Abszissen $P:P_k$ die Ausbiegungen $v_m:l$ als

Ordinaten aufgetragen. Wie wir schon aus der zweiten Näherungsrechnung erkannten, bildet das Erreichen der EULERSchen Last durch die Kraft P keinen bemerkenswerten Punkt der Biegelinie.¹

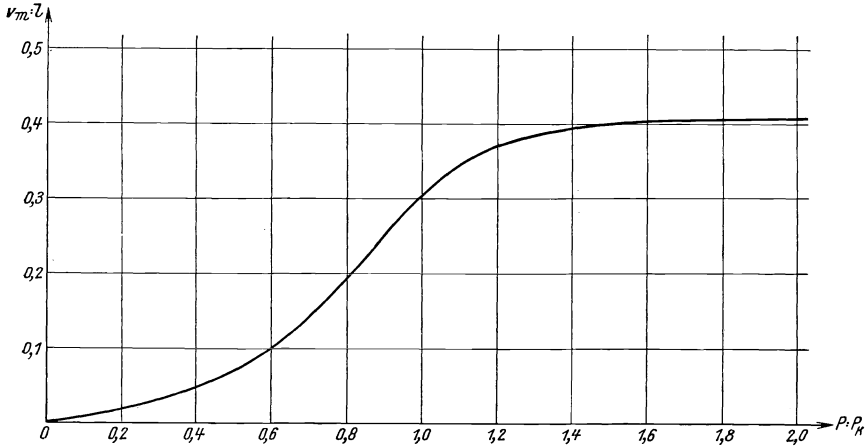


Abb. 46.

§ 9. Der exzentrisch gedrückte, sehr schwach gebogene Stab mit drehbar gelagerten Enden.

27. Die Näherungstheorie.

Bei dem sehr schwach gekrümmten Stab von der Länge l mit drehbar gelagerten Enden greifen die axialen Druckkräfte P an einem mit den Enden verbundenen steifen Arm von der Größe e an. Die Krümmung des Stabes sei so schwach, daß wir die Berechnung nach der Theorie des geraden Stabes durchführen können. Diesem Problem kommt einige Bedeutung zu, da sich der Idealfall — die zentrische Last beim geraden Stab — selbst bei Knickversuchen nur angenähert verwirklichen läßt.

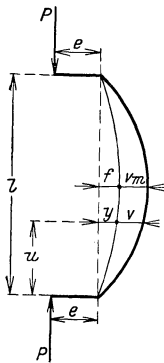


Abb. 47.

Wenn die ursprüngliche Mittellinie des Stabes mit dem Bogenpfeil f in der Stabmitte durch die Gleichung

$$y = f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u$$

gegeben ist, so ist das Biegemoment im Abstand u vom Gelenk (Abb. 47)

$$M = P(e + y + v).$$

¹ Vgl. die graphische Bestimmung der Biegelinie für einen axial gedrückten, gleichmäßig querbelasteten Stab bei H. REISSNER: Die Biegelinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft und Querbelastung in der Nähe der Knicklast. Ztschr. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, Jahrg. 9, S. 125—131. 1918.

Die Differentialgleichung der *Elastica* lautet

$$\frac{d^2 v}{du^2} = -a^2 \left(e + f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + v \right), \quad a^2 = \frac{P}{EI}$$

und man erhält die Lösung

$$v = C_1 \cdot \sin a u + C_2 \cdot \cos a u - e + \frac{a^2 f}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - a^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} u.$$

Die Randbedingungen $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l$ ergeben $C_1 = e \cdot \frac{1 - \cos a l}{\sin a l}$, $C_2 = e$, und somit ist die zu y zusätzliche Ausbiegung

$$v = e \left(\frac{\cos a \left(\frac{l}{2} - u \right)}{\cos a \frac{l}{2}} - 1 \right) + \frac{a^2 f}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - a^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} u.$$

Die größte Ausbiegung in der Stabmitte wird mit $u = \frac{l}{2}$, wenn wir für die EULERSche Last $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$ die Bezeichnung P_k einführen

$$v_m = e \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_k}}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_k}}} + f \frac{1}{\frac{P_k}{P} - 1}. \quad (1)$$

Der erste Summand ist die Ausbiegung eines geraden Stabes bei einer exzentrischen Kraftwirkung, der zweite ist die Ausbiegung infolge einer zentrischen Last P bei der leicht gekrümmten Stabachse. Man erkennt, daß für $P = P_k$ die Ausbiegung ins Unendliche anwächst.¹

Ist die Exzentrizität so gerichtet, daß sie die Anfangskrümmung zu vergrößern sucht, wie sie hier in der Rechnung angenommen war, so steigt die Ausbiegung stetig mit der Belastung. Verringert hingegen die Exzentrizität der Kraft die Ausbiegung, d. h. liegt die Kraft auf der ausgebogenen Seite, so ist der Wert e in Gl. (1) mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Die Ausbiegung v_m kann jetzt bei zunehmender Last ihr Vorzeichen ändern und schließlich kann sich auch die Richtung des Biegepfils umkehren. Dieses Ändern der Biegerichtung wurde bei den Versuchen des Deutschen Stahlbauverbandes nachgewiesen. Auch BAUSCHINGER hatte bei seinen Versuchen, da die Stäbe ungenau zentriert und sicher von vornherein ausgebogen waren, die Erscheinung beobachten können, daß sich bei höheren Lasten die Verbiegungen verkleinern und dann nach der anderen Seite ausschlagen.²

¹ Vgl. H. ZIMMERMANN: *Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage*. Berlin, 1930. S. 45.

² Vgl. Pkt. 18: L. BAUSCHINGER: *A. a. O.* — TH. v. KÁRMÁN: *A. a. O.* Versuch mit Stab Nr. 14a.

28. Eine zweite Näherung für die Ausbiegung der Stabmitte. Versuche des Deutschen Stahlbauverbandes.

Wir berechnen eine zweite Näherung für die Ausbiegung der Stabmitte, und zwar, im Sinne der Gl. (1) von Pkt. 27, getrennt für die Wirkungen des exzentrischen Lastangriffes und der schwachen Anfangskrümmung.

Bei der ersten Aufgabe können wir, wie in Pkt. 22, die Lösung nur implizite angeben. In entsprechender Änderung zu den Herleitungen, die dort für den einseitig eingespannten Stab durchgeführt sind, gelten mit dem Hilfswert l' die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{v_m}{l} + \frac{e}{l} &= 0,9 \frac{l'}{l} \sqrt{\frac{P}{P_k} \left(\frac{l'}{l}\right)^2 - 1}, \\ \frac{e}{l} \cdot \sec \frac{\pi l}{2 l'} &= 0,9 \frac{l'}{l} \sqrt{\frac{P}{P_k} \left(\frac{l'}{l}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ist $e:l$ bekannt, so läßt sich $v_m:l$ als Funktion von $P:P_k$ darstellen.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie für den schwach gekrümmten zentrisch belasteten Stab lautet

$$v'' = -a^2 \left(f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + v \right) \left(1 - \frac{1}{2} v'^2 \right),$$

oder

$$v'' + a^2 \left(f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + v \right) = \frac{a^2}{2} \left(f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + v \right) \cdot v'^2.$$

Die rechte Seite nimmt, wenn wir für v den Wert der ersten Näherung

$$v = c \cdot \sin \frac{\pi}{l} u, \quad c = \frac{a^2 f}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - a^2}$$

einsetzen, die Form an:

$$\frac{1}{2} c^3 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \sin \frac{\pi}{l} u \cdot \cos^2 \frac{\pi}{l} u = \frac{1}{8} c^3 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{l} u + \sin \frac{3\pi}{l} u \right).$$

Die Integration der so entstehenden Differentialgleichung

$$v'' + a^2 \left(f \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + v \right) = \frac{1}{8} c^3 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{l} u + \sin \frac{3\pi}{l} u \right)$$

gelingt mit dem Ansatz

$$v = c \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + c_1 \cdot \sin \frac{3\pi}{l} u$$

und der Koeffizientenvergleich von $\sin \frac{\pi}{l} u$ ergibt die Gleichung

$$c^3 - c \cdot \frac{8 l^2}{\pi^2} \left(a^2 \frac{l^2}{\pi^2} - 1 \right) - f \frac{8}{\pi^4} a^2 l^4 = 0,$$

womit man bereits die gesuchte Beziehung für v_m erhalten hat. Für $u = \frac{l}{2}$

ist nämlich $v_m = c - c_1$ und beim Koeffizientenvergleich von $\sin \frac{3\pi}{l} u$

wird $c_1 \cong -\frac{c^3}{64} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$, d. h. es ist c_1 von dritter Ordnung klein, wenn man

c als klein von erster Ordnung ansieht. Daher gilt mit ausreichender Genauigkeit die Gleichung

$$\left(\frac{v_m}{l}\right)^3 - \frac{v_m}{l} \cdot \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{P}{P_k} - 1\right) - \frac{f}{l} \frac{8}{\pi^2} \frac{P}{P_k} = 0, \quad (2)$$

aus der für $f = 0$ die in Pkt. 7 angeschriebene Formel hervorgeht.

Die gesamte Ausbiegung der Stabmitte ist gleich der Summe der aus den Gl. (1) und (2) berechneten v_m -Werte.

Als Beispiel berechnen wir — unter der Annahme einer vollständigen Elastizität — zwei von den Versuchen, die vom Deutschen Stahlbauverband an Stäben mit „Fehlerhebeln und Anfangskrümmung“ durchgeführt wurden; die Kraft greift exzentrisch auf Seite der Anfangsausbiegung an, siehe die folgende Tabelle.¹

l cm	e mm	f mm	F cm ²	I cm ⁴	W cm ³	l t	E t/cm ²	σ_s kg/cm ²	P_k t	$P_k \cdot F$ kg/cm ²	P t	$P \cdot F$ kg/cm ²	$P \cdot P_k$
75,17	2,358	3,00	9,94	5,08	4,10	105,1	2068,2	2598	18,32	1844	19,02	1913	1,038
75,11	4,954	6,31	9,91	5,04	4,08	105,3	2080,8	2546	18,35	1850	17,50	1766	0,954

An den Stabenden ergeben sich bei den zwei Versuchen unter der Bruchlast P , von denen die eine höher, die andere niedriger als die EULERsche Knicklast P_k ist, die Biegemomente und Biegespannungen

$$M = 19020 \cdot 0,2358 = 4485 \text{ kgcm}, \quad \sigma = 1094 \text{ kg/cm}^2, \text{ bzw.}$$

$$M = 17500 \cdot 0,4954 = 8670 \text{ kgcm}, \quad \sigma = 2125 \text{ kg/cm}^2$$

und die größten Gesamtspannungen

$$1913 + 1094 = 3010 \text{ kg/cm}^2, \text{ bzw. } 1766 + 2125 = 3890 \text{ kg/cm}^2.$$

Wir untersuchen nun den Querschnitt in der Stabmitte, in dem gegenüber den Enden die lokalen Einflüsse zurücktreten. Unter der Bruchlast P erhält man mit den Zahlenwerten des ersten Versuches aus den Gl. (1) und (2) die Ausbiegung $v_m = -161,287 + 161,906 = 0,619$ mm und die Exzentrizität der Last $f + v_m - e = 1,261$ mm. Für den zweiten Versuch sind analog $v_m = -92,013 + 92,832 = 0,819$ mm und $f + v_m - e = 2,175$ mm. Daher werden die Biegemomente M und bei den angegebenen Widerstandsmomenten W der Querschnitte die Biegespannungen σ

$$M = 19020 \cdot 0,1261 = 2400 \text{ kgcm}, \quad \sigma = 585 \text{ kg/cm}^2, \text{ bzw.}$$

$$M = 17500 \cdot 0,2175 = 3806 \text{ kgcm}, \quad \sigma = 933 \text{ kg/cm}^2$$

und die maximalen Gesamtspannungen

$$1913 + 585 = 2500 \text{ kg/cm}^2, \text{ bzw. } 1766 + 933 = 2700 \text{ kg/cm}^2,$$

die ungefähr die Größe der Stauchgrenze σ_s besitzen.

¹ W. REIN: Ber. d. Ausschusses f. Versuche im Stahlbau, H. 4. 1930, S. 28.

Bei dem Versuchsmaterial war das HOOKEsche Gesetz fast bis zur Stauchgrenze nahezu erfüllt. Unsere Rechnung ist somit ausreichend und der Bruch der Stäbe genug erklärt. Wir fassen zusammen: Beim gekrümmten Stab und dem Lastangriff mit Fehlerhebeln entstehen zugleich mit der Belastung die Ausbiegungen und Biegespannungen. Ist die Krümmung nach der entgegengesetzten Seite wie die Exzentrizität wirksam, so wird der Einfluß der Exzentrizität dadurch teilweise kompensiert. Die Zerstörung tritt ein, wenn die maßgebende Bruchspannung erreicht wird.

Beim geraden Stab haben wir früher gesehen, daß das Knicken und der Bruch beinahe gleichzeitig erfolgt, und wir erkennen jetzt wieder, daß man die Knicklast nur bei dem zentrisch belasteten geraden Stab experimentell finden kann. Zur Versuchstechnik der betrachteten Fälle wäre zu sagen, daß absichtlich eingestellte kleine Exzentrizitäten auch mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, so daß man diese Fehler ebenso bei einer zentrischen Belastung in Kauf nehmen dürfte. Für die Verwendung in der Baupraxis können die Ergebnisse von Versuchen mit sehr kleinen Fehlerhebeln und sehr schwach gekrümmten Stäben wohl genügen, da ideal zentrierte und ideal gerade Stäbe in der Ausführung ohnehin nicht zu verwirklichen sind und bei jeder praktischen Rechnung ein willkürlicher Sicherheitsgrad eingeführt wird.

§ 10. Über die Berechnung der Knicklast beim Stab mit Störungen.

29. Der querbelastete zentrisch gedrückte Stab.

Aus den Untersuchungen dieses Abschnittes konnten wir folgern: Auch bei „*Störungen*“, d. h. bei einer Exzentrizität der Kraft, beim von Haus aus gebogenen Stab und beim Stab mit Querlasten oder, vom Standpunkt der Analysis aus gesehen, bei einem Belastungsfall, der ein nichthomogenes Randwertproblem darstellt, kann man die Knicklast errechnen. Man verwendet die erste Näherung der Differentialgleichung der *Elastica* und bestimmt die Last, unter der die Ausbiegung unendlich wird. Jetzt wollen wir untersuchen, ob man mit jeder beliebigen Verteilung der Angriffskräfte auf diese Weise zur Knicklast kommt.¹

Als Beispiel betrachten wir den an seinen Enden gelenkig gelagerten Stab von der Länge l , der durch die Axialkraft P gedrückt und durch Kräfte Q querbelastet ist.

Das Biegemoment im Querschnitt mit dem Abstand u vom Gelenk ist

$$M = \mathfrak{M} + P \cdot v,$$

¹ Da die Knicklast häufig über den Umweg des exzentrisch axial belasteten oder des axial- und querbelasteten Stabes berechnet wird — vgl. z. B. das hierauf eingestellte Buch von H. ZIMMERMANN: *Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage*, Berlin, 1930 — erscheint es uns angebracht, die Grenzen einer solchen Methode anzugeben.

wenn \mathfrak{M} das Biegemoment infolge der Querlasten bedeutet. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet dann

$$\frac{d^2 v}{d u^2} + a^2 v + \frac{\mathfrak{M}}{EI} = 0, \quad a^2 \doteq \frac{P}{EI}, \quad (1)$$

mit den Randbedingungen $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l$.

Ist η die Lösung, die die Randbedingung $u = 0, v = 0$ erfüllt und bei der für $u = 0$ die Neigung der Elastica $\frac{dv}{du} = 1$ ist, so kann das allgemeine Integral von (1) in der Form

$$v = \eta + C \cdot \sin au \quad (2)$$

angeschrieben werden. Differenziert man nämlich die Gl. (2) zweimal, so ergibt sich

$$v'' - \eta'' + a^2 C \cdot \sin au = 0$$

und da η eine Lösung von (1) ist, gilt auch

$$\eta'' + a^2 \eta + \frac{\mathfrak{M}}{EI} = 0.$$

Aus der Summe dieser zwei Gleichungen folgt wieder die Gl. (1). Nun verlangt der Randwert $u = l, v = 0$ die Gleichung

$$0 = \eta_l + C \cdot \sin al,$$

aus der die Konstante C bestimmbar ist. Ein Knickfall ist in der Rechnung der Näherungstheorie vorhanden, wenn C gleich unendlich wird, und daher ist die Knickbedingung

$$\frac{\sin al}{\eta_l} = 0. \quad (3)$$

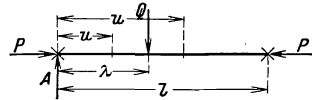


Abb. 48.

Wir wollen η_l für einen Lastenzug aufsuchen.

Zunächst betrachten wir einen Stab mit der Querlast Q im Abstand λ vom linken Auflager

(Abb. 48). Für $u \leq \lambda$ ist das Biegemoment $\mathfrak{M} = A \cdot u$, wenn A die Auflagerreaktion ist. Die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$v'' + a^2 v + \frac{A}{EI} u = 0$$

hat die Lösung

$$v = C_1 \cdot \sin au + C_2 \cdot \cos au - \frac{A}{P} u.$$

Die Integrationskonstanten ermitteln wir aus den Bedingungen $u = 0, v = 0, v' = 1$ zu $C_1 = \frac{P+A}{Pa}, C_2 = 0$, und daher sind an der Laststelle $u = \lambda$

$$\eta_\lambda = \frac{P+A}{Pa} \cdot \sin a\lambda - \frac{A}{P} \lambda, \quad \eta'_\lambda = \frac{P+A}{P} \cdot \cos a\lambda - \frac{A}{P}. \quad (a)$$

Für $u \geq \lambda$ ist das Biegemoment $\mathfrak{M} = A \cdot u - Q(u - \lambda)$, die Differentialgleichung der Elastica lautet

$$v'' + a^2 v + \frac{1}{EI} (A \cdot u - Q \cdot u + Q \cdot \lambda) = 0$$

und ihre Lösung ist

$$v = C_1' \cdot \sin au + C_2' \cdot \cos au - \frac{1}{P} (A \cdot u - Q \cdot u + Q \cdot \lambda).$$

Für $u = \lambda$ sind somit

$$\begin{aligned} v_\lambda &= C_1' \cdot \sin a\lambda + C_2' \cdot \cos a\lambda - \frac{A}{P} \lambda, \\ v_\lambda' &= C_1' a \cdot \cos a\lambda - C_2' a \cdot \sin a\lambda - \frac{A - Q}{P}. \end{aligned} \quad (b)$$

An der Laststelle haben Durchbiegung und Neigung der elastischen Linie aus beiden Stabteilen gerechnet dieselben Werte, und durch Gleichsetzen der entsprechenden Ausdrücke von (a) und (b) erhält man die Konstanten $C_1' = \frac{P+A}{Pa} - \frac{Q}{Pa} \cdot \cos a\lambda$, $C_2' = \frac{Q}{Pa} \cdot \sin a\lambda$. Somit ergibt sich als Ausbiegung η an der Stelle $u = l$

$$\eta_l = \frac{P+A}{Pa} \cdot \sin al - \frac{Q}{Pa} \cdot \sin a(l-\lambda). \quad (4)$$

Die Knickbedingung ist in Hinblick auf Gl. (3) mit Weglassen von Konstanten

$$\frac{\sin al}{Q \cdot \sin a(l-\lambda)} = 0 \quad (5)$$

und bei einem Lastenzug analog

$$\frac{\sin al}{\sum Q \cdot \sin a(l-\lambda)} = 0.$$

Hat der Stab in seiner Mitte eine Querlast, so ist mit $\lambda = \frac{l}{2}$ die Knickbedingung

$$\frac{\sin al}{\sin a \frac{l}{2}} = 0, \quad \text{oder} \quad \cos a \frac{l}{2} = 0$$

und $al = \pi, 3\pi, \dots$ Der kleinste Knickwert ist $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, die geraden Knicklasten, die zweite, vierte usw. konnten nicht errechnet werden. Diese Erscheinung zeigt sich auch bei der unmittelbaren Untersuchung dieser Aufgabe in Pkt. 24, wo die symmetrische Deformation von vornherein angenommen war.

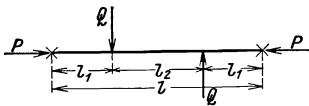


Abb. 49.

Interessanter ist eine Belastung, bei der wir den ersten kritischen Wert nicht bekommen, da in diesem Fall die Berechnungsmethode mit Querlasten versagt. Der Stab werde von zwei symmetrisch angreifenden Kräften $+Q$ und $-Q$ beansprucht, die vom linken bzw. rechten Auflager den Abstand l_1 und den gegenseitigen Abstand l_2 haben (Abb. 49). Jetzt wird

$$\sum Q \cdot \sin a(l-\lambda) = Q \cdot [-\sin al_1 + \sin a(l_1 + l_2)] = 2Q \cdot \sin a \frac{l_2}{2} \cdot \cos a \frac{l}{2}$$

und die Gl. (5) lautet

$$\frac{\sin al}{\cos a \frac{l}{2} \cdot \sin a \frac{l_2}{2}} = 0, \quad \text{oder} \quad \sin a \frac{l}{2} = 0,$$

also $al = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Der kleinste Knickwert wäre demnach $4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, die ungeraden Knicklasten, die erste, dritte usf. sind uns entgangen.

Bei dem an beiden Enden gelenkig gelagerten axial gedrückten Stab von der Länge l greifen in gleichen Entfernungen c insgesamt n Querlasten an, die abwechselnd die Größe $+Q$ und $-Q$ haben. Dann ist

$$\sum Q \cdot \sin a(l - \lambda) = Q \cdot (\sin ac - \sin 2ac + \sin 3ac - \dots \pm \sin nac).$$

Das letzte Glied ist bei ungeradem n positiv, bei geradem n negativ. Um die Summe zu bilden, geht man auf e -Potenzen über, addiert die entstehenden geometrischen Reihen und führt dann wieder Kreisfunktionen ein. Auf diese Weise findet man bei ungeradem n

$$\sum Q \cdot \sin a(l - \lambda) = Q \cdot \sin a \frac{l}{2} \cdot \frac{\cos na \frac{c}{2}}{\cos a \frac{c}{2}}$$

und damit die Knickbedingung $\cos a \frac{l}{2} = 0$. Der kleinste Knickwert ist $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, die geraden Werte sind herausgefallen. Bei geradem n wird

$$\sum Q \cdot \sin a(l - \lambda) = -Q \cdot \cos a \frac{l}{2} \cdot \frac{\sin na \frac{c}{2}}{\cos a \frac{c}{2}},$$

die Knickbedingung ist $\sin a \frac{l}{2} = 0$ und die kleinste Knicklast wäre $4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$. Die ungeraden Knicklasten sind nach dieser Rechnung nicht zu erhalten.

Die angegebenen Beispiele können wir ohne weiteres verallgemeinern und dem in Pkt. 24 vermerkten Resultat, daß sich die Knickgrenze auch beim Vorhandensein von Querlasten rechnermäßig bestimmen läßt, nunmehr ergänzend hinzufügen, daß die erste maßgebende Knicklast in der üblichen Rechnung nicht aufscheint, wenn die ungerade Biegeform durch die Querlasten verhindert wird.

30. Der exzentrisch gedrückte Stab.

Beim exzentrisch gedrückten Stab wird das Verfahren, die kritische Last aus der unendlich großen Ausbiegung in der Rechnung der Näherungstheorie herzuleiten, dann versagen, wenn eine Antisymmetrie der Druckkräfte vorliegt.

Wir untersuchen einen an den Enden gelenkig gelagerten Stab von der Länge l , bei dem die axialen Druckkräfte P an den Hebelarmen e bzw. e' angreifen (Abb. 50).

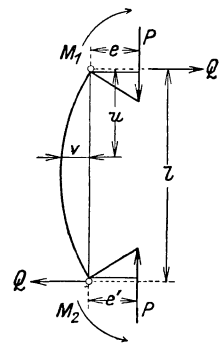


Abb. 50.

Das Biegemoment im Querschnitt u , v ist durch die Gleichung

$$M = M_1 + Q \cdot u + P \cdot v$$

gegeben; M_1 und M_2 sind die Belastungsmomente, Q ist die Querkraft $\frac{-M_1 + M_2}{l}$. Die Differentialgleichung der elastischen Linie ist daher in erster Näherung

$$\frac{d^2 v}{du^2} + a^2 v + \frac{a^2}{P} \left(M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} u \right) = 0, \quad a^2 = \frac{P}{EI},$$

unter den Randwerten $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l$, und ihr Integral lautet

$$v = C_1 \cdot \sin a u + C_2 \cdot \cos a u + \frac{M_1 - M_2}{Pl} u - \frac{M_1}{P}.$$

Die Knickbedingung kann wie in Pkt. 29 durch die Gleichung

$$\frac{\sin a l}{\eta_l} = 0$$

ausgedrückt werden. Hierbei ist η die Lösung der Differentialgleichung bei den Randwerten $u = 0$, $v = 0$, $v' = 1$ und η_l der Wert von η für $u = l$. Aus diesen Bedingungen folgen die Konstanten $C_1 = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{M_1 - M_2}{Pl} \right)$, $C_2 = \frac{M_1}{P}$ und somit ist die Ausbiegung η für $u = l$

$$\eta_l = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{M_1 - M_2}{Pl} \right) \cdot \sin a l + \frac{M_1}{P} \cdot \cos a l - \frac{M_2}{P}.$$

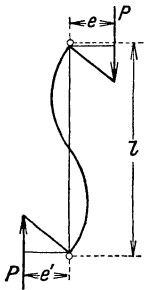


Abb. 51.

Die Knickbedingung lautet nun mit Fortlassen der konstanten Glieder

$$\frac{P \cdot \sin a l}{M_1 \cdot \cos a l - M_2} = 0.$$

Bei einer symmetrischen Belastung mit $M_1 = M_2 = P \cdot e$ wird

$$\frac{\sin a l}{e (\cos a l - 1)} = 0, \quad \text{oder} \quad \cos a \frac{l}{2} = 0,$$

d. h. $al = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$. Die kleinste Knicklast ist $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, die geraden kritischen Werte treten nicht in Erscheinung.

Ist die Belastung unsymmetrisch und $M_1 = -M_2 = P \cdot e$ (Abb. 51), so entsteht die Knickgleichung

$$\frac{\sin a l}{e (\cos a l + 1)} = 0, \quad \text{oder} \quad \sin a \frac{l}{2} = 0,$$

die für $al = 2\pi, 4\pi \dots$ erfüllt ist. Die ungeraden Knicklasten, also auch der maßgebende erste Wert, gehen bei der Rechnung verloren, da ihre Verformung sich durch die Wirkung der angreifenden Druckkräfte ausschließt.

§ 11. Der exzentrisch gedrückte gerade Stab, wenn das Hookesche Gesetz nicht unbeschränkt gilt.

31. Die Ausbiegung des freien Endes für den exzentrisch gedrückten, an einem Ende eingespannten Stab.

Wir betrachten den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l und der rechteckigen Querschnittsfläche $b \cdot h$, der durch eine axiale Druckkraft P im Abstand e von der Stabachse belastet ist. Wie verlaufen die Ausbiegungen des freien Stabendes bei wachsenden Lasten, wenn das HOOKESCHE Gesetz nicht unbeschränkt gilt und ein Material mit einem anderen Elastizitätsgesetz vorliegt?

In der Biegetheorie von Pkt. 15, die wir bei gegebenen Spannungs-Diagrammen für den zentrisch gedrückten Stab entwickelt haben, ist jetzt nur das Moment der äußeren Kraft geändert und $P(y + e)$ an Stelle von $P \cdot y$ zu schreiben. Die früheren Beziehungen zwischen $\frac{h}{\rho}$

und $\frac{y}{h}$ bei den verschiedenen mittleren Spannungen gelten nun zwischen $\frac{h}{\rho}$ und $\frac{y + e}{h}$. Hierzu merken wir an. Beim zentrisch gedrückten Stab konnten wir bei einer unelastischen Stauchung annehmen, daß bei der Verformung auf der entlasteten Seite des Querschnittes das einfache Proportionalitätsgesetz besteht. Ist der Stab exzentrisch auf Druck beansprucht, so sind hingegen die Ausbiegungen vom Beginn der Kraftwirkung an vorhanden, und daher setzen wir auf der Zugseite des Querschnittes keine Entlastung voraus und sehen das entlastungsfreie Gesetz als richtiger an.

Für eine gegebene mittlere Spannung besteht also die Differentialbeziehung $h \cdot y'' = f\left(\frac{y + e}{h}\right)$. Wenn wir nun nach dem in Pkt. 17 beschriebenen Verfahren die Deformationsfigur für den zentrischen Lastangriff $e = 0$ graphisch bestimmt haben, erhalten wir auch unmittelbar die Gleichgewichtsfigur für einen exzentrischen Angriff. Die Exzentrität e kommt im Ausdruck für $\frac{u}{h}$ nur als untere Grenze vor, und der zwischen den Abszissen $\frac{e}{h}$ und $\frac{\delta + e}{h}$ liegende Kurventeil der Abb. 30 ist die Gleichgewichtsform unter dem exzentrischen Kraftangriff. Hierbei gilt die frühere Annahme $\frac{\delta}{h}$ jetzt für $\frac{\delta + e}{h}$. Auf diese Weise ist ein Zusammenhang zwischen $\frac{e}{h}$, $\frac{\delta}{h}$ und $\frac{l}{h}$ hergestellt.

Zur grundsätzlichen Erfassung unserer Aufgabe ziehen wir die für das Diagramm der Abb. 24 bestimmte Differentialbeziehung von Abb. 25 heran. An Stelle der gezeichneten Linien des Biegegesetzes führen wir — bei kleineren Ausbiegungen — die Gleichung $a \cdot z + b \cdot z^3$ ein, mit $z = \frac{y + e}{h}$ und den positiven Konstantwerten a und b , die für eine bestimmte

mittlere Spannung bekannt sind. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet daher, mit Beachten des Vorzeichens

$$-h \frac{d^2 y}{d u^2} = a \frac{y + e}{h} + b \left(\frac{y + e}{h} \right)^3, \text{ bzw. } -\frac{d^2 z}{d \left(\frac{u}{h} \right)^2} = a z + b z^3$$

unter den Randwerten $u = 0, y' = 0, y = \delta$ an der Einspannstelle und $u = l, y = 0$ am freien Ende des Stabes. Multipliziert man beide Seiten mit $z' \cdot du : h = dz$ und integriert, so folgt

$$-z'^2 = a z^2 + \frac{b}{2} z^4 + C.$$

Mit der Bedingung für die Einspannstelle drückt man die Integrationskonstante C durch δ aus und erhält dann mit $\frac{\delta + e}{h} = z_0$

$$\left(\frac{dz}{d \left(\frac{u}{h} \right)} \right)^2 = a (z_0^2 - z^2) + \frac{b}{2} (z_0^4 - z^4)$$

oder

$$d \left(\frac{u}{h} \right) = \frac{-dz}{\sqrt{z_0^2 - z^2} \sqrt{a + \frac{b}{2} (z_0^2 + z^2)}}.$$

Hier ist das negative Vorzeichen maßgebend, da mit wachsendem u die Ausbiegung y abnimmt. Mit der Abkürzung $z = z_0 \cdot \cos \varphi$ entsteht die Gleichung

$$\sqrt{a + b z_0^2} \cdot d \left(\frac{u}{h} \right) = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \varphi}}, \quad k^2 = \frac{b z_0^2}{2(a + b z_0^2)}$$

und die Integration zwischen den Grenzen $u = 0$ ($\varphi = 0$) und u (φ) ergibt

$$\frac{u}{h} \sqrt{a + b z_0^2} = F(k, \varphi).$$

$F(k, \varphi)$ ist das elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul k . Für die gebogene Stabachse bestimmt sich die Gleichung

$$z = z_0 \cdot \cos \operatorname{am} \frac{u}{h} \sqrt{a + b z_0^2}$$

und für $u = l$, d. h. $\varphi = \varphi_1 = \arccos \frac{e}{e + \delta}$ wird

$$\frac{l}{h} \cdot \sqrt{a + b z_0^2} = F(k, \varphi_1).$$

Ist die Exzentrizität $e = 0$, so ist die Gleichung der verformten Stabachse

$$y = \delta \cdot \cos \operatorname{am} \frac{u}{h} \sqrt{a + b \left(\frac{\delta}{h} \right)^2}$$

und für $u = l$ ist $y = 0$, also

$$0 = \delta \cdot \cos \operatorname{am} \frac{l}{h} \sqrt{a + b \left(\frac{\delta}{h} \right)^2}.$$

Hierbei bedeutet $\delta = 0$ das Gleichgewicht ohne Ausbiegung für jeden Wert von l und $\frac{l}{h} \sqrt{a + b \left(\frac{\delta}{h}\right)^2} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ ein Gleichgewicht mit Ausbiegung. Für $\delta = 0$ sind $k = 0$, $F = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{a}{h^2} = \frac{\pi^2}{4l^2}$ entspricht dem kritischen Lastwert, wenn die Ersatzlinie die richtige Anfangstangente besitzt.

Die Abb. 52 zeigt für die mittlere Spannung $\sigma_m = 1000 \text{ kg/cm}^2$ bei den Exzentrizitätswerten $\frac{e}{h} = 0,10$ und $0,25$ die Ausbiegung $\frac{\delta}{h}$ als

Funktion der Länge $\frac{l}{h}$. Hierbei sind im Bereich $z = 0$ bis $z \cong 0,5$ die Konstanten $a = 0,006$, $b = 0,01$ eingeführt. Die Ausbiegungen nehmen zuerst bei wachsenden Längen allmählich zu, nach Erreichen einer Größtlänge steigen sie bei wieder abnehmenden Längen rasch an. Man erhält also aus der Figur den größten Schlankheitsgrad, den der Stab besitzen darf, wenn er unter der

gegebenen exzentrischen Drucklast noch einen Gleichgewichtszustand bilden soll. Betrachten wir z. B., um uns das Resultat anschaulich zu machen, den Fall $\frac{e}{h} = 0,1$ mit $\frac{l}{h} = 15$. Hat der Stab die Ausbiegung von der Größe 1,2, so wird er bei einer sehr geringen Vergrößerung der Ausbiegung versuchen, in die ursprüngliche Lage zurück-

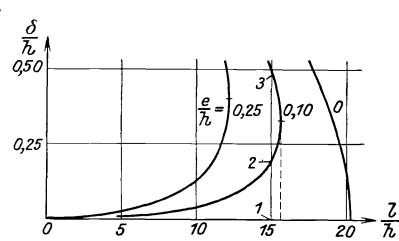


Abb. 52.

zukehren. Der neuen Lage entspricht nämlich ein höherer Längenwert als 15, und der untersuchte Stab wäre zu wenig schlank, um in der neuen Lage zu bleiben. Ähnliche Überlegungen darf man bei einer sehr schwachen Verkleinerung der Ausbiegung 1,2 anstellen, und wir bezeichnen daher das Gleichgewicht als *stabil*. Erreicht der Stab die Ausbiegung 1,3 so würde er sich bei einer geringen Vergrößerung der Ausbiegung noch weiter verformen, denn der Vergrößerung ist ein $\frac{l}{h} < 15$ zugeordnet, und der Stab wäre zu schlank, um die ge-

gebene Belastung tragen zu können. Diese Gleichgewichtsfigur ist daher als *instabil* anzusehen. Wird der Längenwert (oder die Schlankheit des Stabes) größer, so rücken die beiden vorhandenen Gleichgewichtslagen, die stabile und die instabile, näher aneinander, und im Falle $\frac{l}{h} = 15,6$

liegen beide Figuren unendlich benachbart, so daß dieser Zustand das Labilwerden bedingt. Ist die Schlankheit noch größer als der beschriebene kritische Grenzwert, so existiert unter der Belastung $P = 1000 \cdot b \cdot h$, $e = 0,1 \cdot h$ überhaupt kein Gleichgewicht, und nach Aufbringen der Last biegt sich der Stab immer mehr aus. Zu bekannten Werten von Schlankheit und Exzentrizität besteht also eine mittlere Spannung, bei der die Schlankheit eine kritische ist. Wir bezeichnen sie als *kritische mittlere Spannung* $\sigma_{m,x}$ und den zugehörigen P -Wert als *kritische Trag-*

last. Diese ist kleiner als die zentrische Knicklast des Stabes und bildet eine obere Grenze des Tragvermögens.¹

Das Ergebnis läßt sich auch anders darstellen. Zeichnet man wie in Abb. 33 Linien für verschiedene mittlere Spannungen, so kann daraus bei einer gegebenen Länge graphisch der Verlauf der $\frac{\delta}{h}$ als Funktion von σ_m abgeleitet werden. Bei dem Stab von fester Länge wachsen die

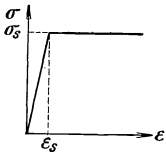


Abb. 53.

Ausbiegungen zugleich mit der Belastung, die Last besitzt unter einer noch verhältnismäßig kleinen Ausbiegung den Größtwert $\sigma_{m,k} \cdot b \cdot h$, dann steigen die Ausbiegungen im instabilen Bereich stark an bei kleiner werdenden Lasten.

Bei Baustahlstäben, für die wir im nächsten Punkt Resultate anführen, liegt die kritische Traglast oberhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials; sie kann aber auch schon vor dem Eintritt der Stauchgrenze erreicht werden.

Zusatz. Für ein Material mit „ideal plastischem“ Verhalten, d. h. bei einem Baustoff mit dem Spannungsdiagramm nach Abb. 53, gelingt es, das Problem bei Stäben mit Rechteckquerschnitt auch analytisch zu erledigen.² Hierbei werde z. B. angenommen, daß für Druck und Zug das gleiche Formänderungsgesetz gelte, also Stauch- und Streckgrenze von gleicher Größe sind. Die

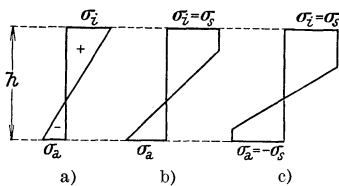


Abb. 54.

Abb. 54 zeigt in a) den Spannungszustand vor Erreichen der Stauch- bzw. Streckgrenze, in b) den Zustand mit Eintritt der Streckgrenze am Außenrand und in c) den Zustand nach Erreichen der Stauch- bzw. Streckgrenze an beiden Stabseiten. Für diese drei das Problem beherrschenden Fälle kann die Differentialgleichung der Elastica aufgestellt und elementar integriert werden.

Die Biegelinie setzt sich aus einzelnen Ästen zusammen, die je nach Größe der Exzentrizität bei a) oder b) oder erst bei c) beginnen. Die Ausbiegung, die zur kritischen Spannung $\sigma_{m,k}$ gehört, ist rechnerisch auffindbar, und als Resultat läßt sich für verschiedene Exzentrizitätswerte die Spannung $\sigma_{m,k}$ mit der Schlankheit des Stabes in Verbindung bringen.

32. Rechnungsverfahren für Stäbe aus Konstruktionsstahl. Versuche.

Für Stäbe mit bekannter Querschnittsform wäre bei einem gegebenen Werkstoff die Rechnung in der folgenden Art vorzunehmen. Nach Aufstellen der Biegetheorie wird für verschiedene mittlere Spannungen z. B. mit graphischen Integrationen der Zusammenhang zwischen Ausbiegung, Schlankheit $\frac{l}{i}$ und Exzentrizität e bestimmt. Hiernach wird für die

¹ Die kritische Traglast wird mitunter auch exzentrische Knicklast genannt; vgl. z. B. R. KROHN: Die Bautechnik, Jahrg. 1, S. 230—250. 1923.

² K. JEŽEK: Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Bd. 143, S. 339—366. 1934.

einzelnen Schlankheitsgrade die Ausbiegung als Funktion der mittleren Spannung und der Exzentrizitätswerte dargestellt. Daraus gewinnt man als Gesamtergebnis die mittleren Spannungen der kritischen Traglast als Funktion von $\frac{l}{i}$ und e .

Zunächst erinnern wir aber nochmals an die Grundlagen der Berechnung. Vorausgesetzt ist das Ebenbleiben der Querschnitte bei der Verformung und ferner die Möglichkeit, das Verhalten des Stabes mit einer Arbeitslinie vollständig wahrzunehmen. Nur der günstige Ausfall von Versuchen kann bei starken Deformationen und hohen Spannungen diese Annahmen nachträglich rechtfertigen.

Das beschriebene Verfahren mit Hilfe von zwei graphischen Integrationen wurde erstmals von v. KÁRMÁN durchgeführt. KÁRMÁN hat jedoch

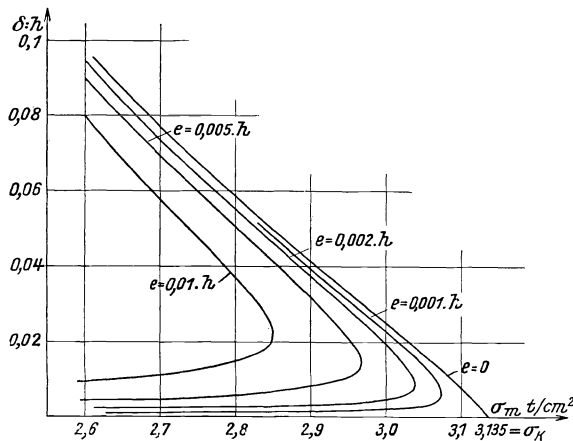


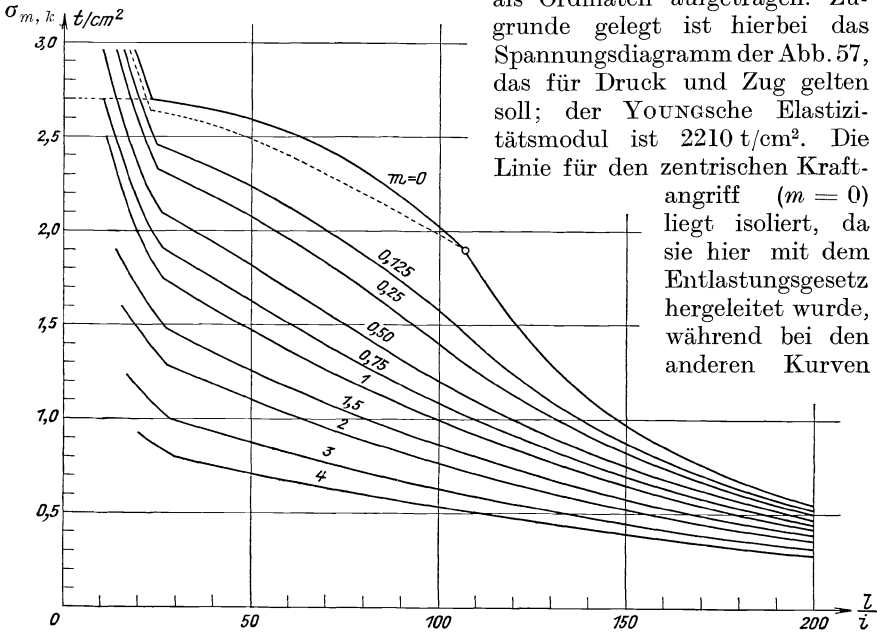
Abb. 55.

nur sehr kleine Exzentrizitäten in Betracht gezogen und daher ausschließlich die Entlastungshypothese benützt.¹ Die Abb. 55 bringt das Ergebnis für einen an den Enden gelenkig gelagerten Stab aus Martinstahl mit rechteckigem Querschnitt von der Schlankheit 60, wobei die (sehr kleinen) Ausbiegungen der Stabmitte zu der mittleren Spannung in Beziehung gestellt sind. (Siehe hierzu die Arbeitslinie Abb. 22.) Im Gegensatz zu dem vollständig elastischen Stab, bei dem diese Kurven asymptotisch derselben Höchstlast zustreben, wird die Tragfähigkeit bei gedrungenen Stäben aus elastisch-plastischem Material schon durch sehr geringe Exzentrizitäten erheblich vermindert, was in praktischer Hinsicht äußerst wichtig ist.

Die Abb. 56 zeigt ein in analoger Weise von E. CHWALLA ermitteltes Resultat für den an beiden Enden gelenkig gelagerten Baustahlstab

¹ TH. v. KÁRMÁN: A. a. O.

mit rechteckigem Querschnitt.¹ Zu den Abszissen $\frac{l}{i}$ sind für verschiedene größere Exzentrizitätsmaße $m = 6 \frac{e}{h}$ die kritischen mittleren Spannungen



als Ordinaten aufgetragen. Zugrunde gelegt ist hierbei das Spannungsdiagramm der Abb. 57, das für Druck und Zug gelten soll; der YOUNGSCHE Elastizitätsmodul ist $2210 t/cm^2$. Die Linie für den zentralen Kraftangriff ($m = 0$) liegt isoliert, da sie hier mit dem Entlastungsgesetz hergeleitet wurde, während bei den anderen Kurven

Abb. 56.

das entlastungsfreie Gesetz Verwendung fand. Die strichlierte Linie gibt zum Vergleich auch für $m = 0$ das Resultat ohne die Entlastung auf der Zugseite. Die Grenze des Untersuchungsbereiches liegt bei der Zugspannung $4000 kg/cm^2$; für die Formänderungskurve der Druckspannungen, die dann auf mehr als $5000 kg/cm^2$ ansteigen können, ist für Werte $\epsilon > 35\%$ eine geradlinige Ergänzung angenommen.

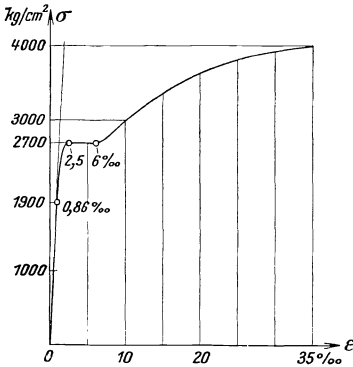


Abb. 57.

M. ROS und J. BRUNNER haben für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab von rechteckigem Querschnitt ein Verfahren entwickelt, das dem beschriebenen Vorgang mit einigen Annäherungen entgegenkommt.² Aus dem Diagramm der

¹ E. CHWALLA: Der Stahlbau (Die Bau-technik), 7. Jahrg., S. 181. 1934. Siehe die Versuche a. gl. O., S. 17—19.

² M. ROS u. J. BRUNNER: Die Knick-sicherheit von an beiden Enden gelenkig

Abb. 57 wurde der Verlauf der Momente der inneren Kräfte $\Phi \cdot a$ in Abhängigkeit von $\frac{h}{\rho}$ für verschiedene mittlere Spannungen bestimmt, vgl. Pkt. 15, und hierbei durchwegs die Entlastungshypothese zur Anwendung gebracht. Mit der Annahme, daß die Ausbiegung nach der Linie $v = \delta \cdot \cos \frac{\pi}{l} u$ erfolgt, ist der Krümmungsradius ρ der Biegelinie in der Stabmitte bei der Ausbiegung δ gleich $\rho = -\frac{1}{v''} = \frac{l^2}{\pi^2} \frac{1}{\delta}$, also $\delta = \frac{l^2}{\pi^2} \frac{1}{\rho}$ (Abb. 58). Dann

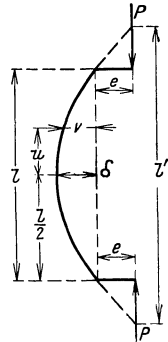


Abb. 58.

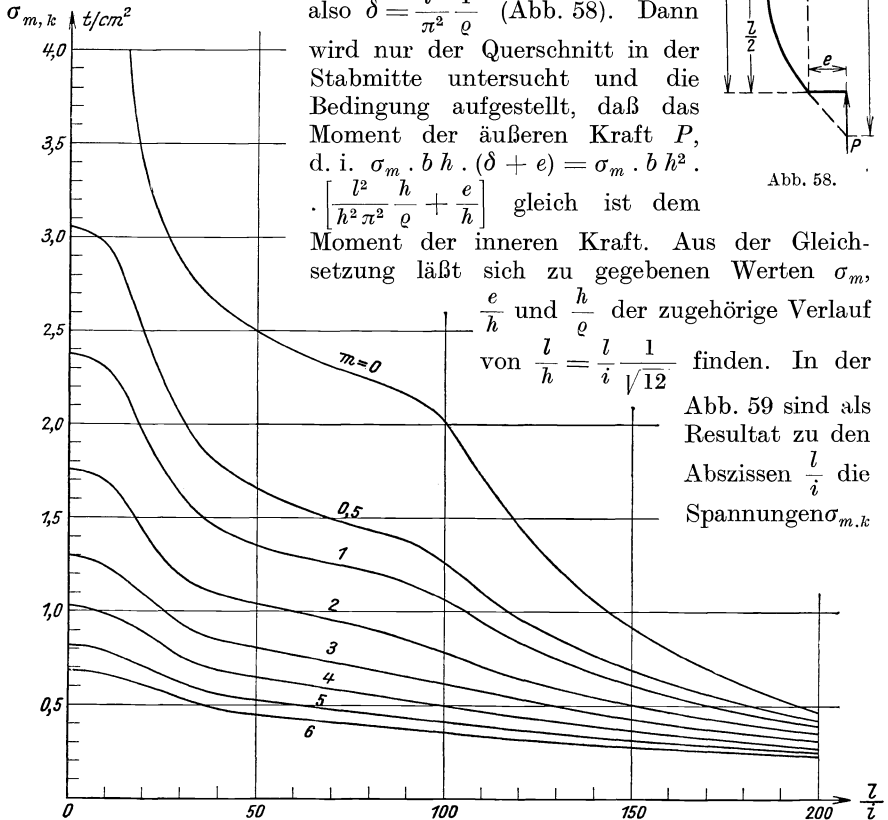


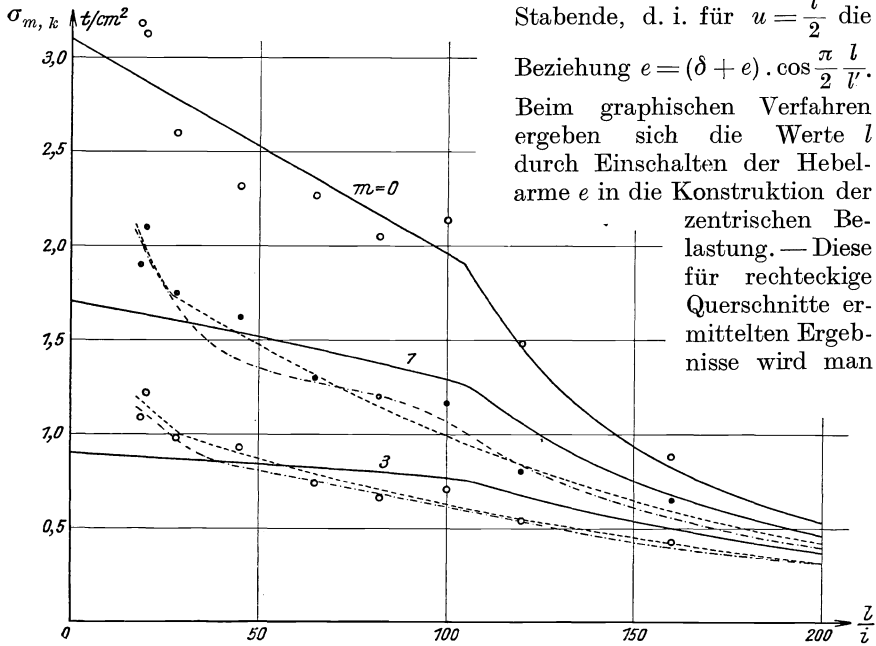
Abb. 59.

als Ordinaten wieder für einige Exzentrizitätswerte m aufgezeichnet.

F. HARTMANN nimmt auf der Biegezugseite keine Entlastung an

gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Ber. d. Techn. Kommission d. Verbandes Schweiz. Brücken- u. Eisenhochbaufabriken. Verhandl. d. 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. S. 368—378. Ber. über die 2. Internat. Tagung f. Brückenbau u. Hochbau. Wien, 1929. S. 282—303.

und setzt für die Ausbiegung die Linie $v + e = (\delta + e) \cdot \cos \frac{\pi}{l'} u$, wobei l' die ideelle Länge eines zentrisch belasteten Stabes bedeutet.¹ Dadurch wird das vorstehende Verfahren verbessert, da jetzt an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ das Biegemoment v'' nicht mehr den Wert Null hat. Der neuen Unbekannten entspricht eine neue Gleichung, nämlich für das



Stabende, d. i. für $u = \frac{l}{2}$ die Beziehung $e = (\delta + e) \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{l}{l'}$. Beim graphischen Verfahren ergeben sich die Werte l durch Einschalten der Hebelarme e in die Konstruktion der zentrischen Belastung. — Diese für rechteckige Querschnitte ermittelten Ergebnisse wird man

auch bei Doppel-T-Querschnitten u. dgl. anwenden dürfen.

Wir wollen diesen Resultaten noch die einfache *Rechnungsvorschrift* der *Amtlichen Deutschen und Österreichischen Bestimmungen* gegenüberstellen. Die dort angegebene Formel, die allerdings keine theoretische Begründung hat, lautet

$$\sigma_{zul} \leq \frac{P \omega}{F} + \frac{P \cdot e}{W}, \quad \omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} s,$$

d. h. die größte zulässige Spannung ist gleich der Summe aus der ideellen Spannung der zentrischen Knickberechnung, vgl. Pkt. 20, und der Biegespannung. (W ist das Widerstandsmoment.) Wenn wir die Gleichheitszeichen nehmen, erhalten wir daraus mit $F \cdot e : W = m$

$$\frac{P}{F} = \frac{\sigma_{zul}}{\frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} s + m} = \frac{\sigma_{m,k}}{s}.$$

¹ F. HARTMANN: Der einseitige (exzentrische) Druck bei Stäben aus Baustahl. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., 85. Jahrg., S. 65—68. 1933.

Um die Bruchlast zu bekommen, setzen wir den Sicherheitsgrad $s = 1$, und weiter z. B. anstatt σ_{zul} die Festigkeitszahl $3,8 \text{ t/cm}^2$, für σ_k im unelastischen Bereich die TETMAJERSche Formel für weichen Flußstahl (St 37), im elastischen Bereich die EULERSche Gleichung. — Die Abb. 60 gibt in den voll ausgezogenen Linien die kritische mittlere Spannung als Funktion von $\frac{l}{b}$ für die Werte $m = 0, 1$ und 3 ; bei $m = 0$ ist $\sigma_{m, k}$ gleich der Knickspannung σ_k . Die strichlierten Linien sind der Abb. 56, die strichpunktlierten der Abb. 59 entnommen.

An der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt in Zürich wurden Walzträger I NP 22 und I NP 32 aus Thomasstahl zentrisch mit dem Kraftangriff am Kernrand und in dreifacher Kernweite gedrückt ($m = 0, 1$ und 3). Die Schlankheitsgrade der Stäbe waren $18,6, 20, 28, 45, 65, 82, 100, 120, 160$. Die Lagerung erfolgte in abgerundeten Schneiden und das Ausbiegen wurde senkrecht zur Achse des kleinsten Querschnittsträgheitsmomentes bewirkt. Die Proportionalitätsgrenze des Materials war beim Zugversuch im Mittel $2,32 \text{ t/cm}^2$, die Streckgrenze $2,63 \text{ t/cm}^2$; beim Druckversuch waren die entsprechenden Werte $2,0 \text{ t/cm}^2$ und $2,67 \text{ t/cm}^2$. — Die Versuchswerte sind in die Abb. 60 eingetragen, und man erkennt, daß die beiden theoretischen Linien mit dem Experiment ziemlich gut übereinstimmen. In Hinblick auf die komplizierten Verhältnisse ist auch das Resultat der Formel der Vorschrift nicht ganz abwegig.

Dritter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit stetig veränderlichem Querschnitt und stetig veränderlicher Druckkraft.

§ 12. Berechnung aus der Differentialgleichung der elastischen Linie.

33. Die Querschnittsträgheitsmomente des Stabes ändern sich stetig nach gegebenen Gesetzen; die Druckkraft ist konstant.¹

A. Wir untersuchen den Grundfall, den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l , der durch die Last P zentrisch gedrückt ist, und nehmen an, daß sich die Trägheitsmomente der Querschnitte nach dem *Potenzgesetz*

$$I = I_0 \left(\frac{b-u}{b} \right)^m$$

¹ Das Problem der Bestimmung des kritischen Wertes der Last von Stäben mit stetig veränderlichem Querschnitt wurde von LAGRANGE angeschnitten, der Säulen in Form von Kegeln und Rotationsparaboloiden berechnete. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: A History of the Theory of Elasticity. Cambridge, 1881. Bd. 1, S. 64f.

verändern, wobei m eine positive Zahl ist (Abb. 61). I_0 ist das Trägheitsmoment im Einspannquerschnitt $u = 0$ und b ist der Abstand des Einspannquerschnittes von der Stelle $I = 0$. Das Trägheitsmoment am freien Stabende ist $I_1 = I_0 \left(\frac{b-l}{b}\right)^m$.

Die Differentialgleichung der *Elastica* lautet

$$E I_0 \left(\frac{b-u}{b}\right)^m \frac{d^2 v}{du^2} - P(\delta - v) = 0,$$

bei den Randbedingungen $u = 0, v = 0, v' = 0$ und $u = l, v = \delta$. Diese Gleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten erhält mit den Abkürzungen

$$\frac{P b^m}{E I_0} = a^2, \quad b - u = z, \quad \delta - v = y$$

die Ausdrucksform

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + a^2 \cdot z^{-m} \cdot y = 0,$$

unter den Randwerten $z = b, y = \delta, y' = 0$ und $z = b - l, y = 0$.

Die Integration läßt sich mit BESSELSchen Funktionen durchführen und die Theorie ergibt:

Mit der Bezeichnung $\nu = \frac{1}{2-m}$ ist das Integral

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot J_\nu \left(2 a \nu \cdot z^{1/\nu} \right) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot N_\nu \left(2 a \nu \cdot z^{1/\nu} \right).$$

Hierbei sind die J die BESSELSchen Funktionen erster Art, die N die BESSELSchen Funktionen zweiter Art, C_1 und C_2 die Integrationskonstanten. — Im Ausnahmefall $m = 2$ ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot \sin(k \lg z) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot \cos(k \lg z), \quad k^2 = a^2 - \frac{1}{4}.$$

Ist ν keine ganze Zahl, so ist (ohne Berücksichtigen des Vorzeichens) $N_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$. — Die J_ν werden einfache Ausdrücke, die nur trigonometrische Funktionen enthalten, wenn ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist.

Also für $\pm 2\nu = 1, 3, 5, \dots$, d. h. bei $m = 0, 4; \frac{4}{3}, \frac{8}{3}; \frac{8}{5}, \frac{12}{5}; \dots$ usf.

Wir schreiben für einige dieser m -Werte die Gleichung der Biegelinie an.¹ $m = 0$ ist der Stab mit konstantem Querschnittsträgheitsmoment.

$$m = 0 \dots y = C_1 \cdot \sin a z + C_2 \cdot \cos a z,$$

$$m = 4 \dots y = z \cdot \left(C_1 \cdot \sin \frac{a}{z} + C_2 \cdot \cos \frac{a}{z} \right),$$

$$m = \frac{4}{3} \dots y = C_1 \cdot z^{1/3} \cdot \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u \right) + C_2 \cdot z^{1/3} \cdot \left(\sin u + \frac{\cos u}{u} \right), \quad u = 3 a z^{1/3},$$

$$m = \frac{8}{3} \dots y = C_1 \cdot z^{2/3} \cdot \left(\frac{\sin u}{u} - \cos u \right) + C_2 \cdot z^{2/3} \cdot \left(\sin u + \frac{\cos u}{u} \right), \quad u = 3 a z^{-1/3}.$$

¹ E. JAHNKE u. F. EMDE: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig-Berlin, 1909. S. 91. Differentialformeln für BESSELSche Funktionen a. gl. O., S. 165.

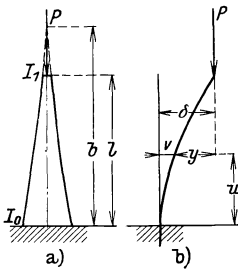


Abb. 61.

Die zwei Konstanten werden aus zwei Randbedingungen berechnet, und mit der dritten Bedingung erhält man eine Knickgleichung, deren kleinste Wurzel a die Knicklast ergibt. Bei Gleichungen, die auf BESSELsche Funktionen führen, ist die Bestimmung dieser Wurzeln oft sehr schwierig, da vorhandene Tafeln nicht immer ausreichen.¹

Zur Veranschaulichung wollen wir einige Fälle durchrechnen und dabei $b = l$ setzen, d. h. annehmen, daß der Stab in einer Spitze endet.

Für $m = \frac{1}{2}$ ist das Integral der Differentialgleichung der Elastica mit $\nu = \frac{2}{3}$

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot J_{2/3} \left(\frac{4}{3} a z^{3/4} \right) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot J_{-2/3} \left(\frac{4}{3} a z^{3/4} \right).$$

Für das freie Ende $z = 0$, $y = 0$ sind $J_{2/3} = 0$, $J_{-2/3} = \infty$ und folglich $C_2 = 0$. Aus der Bedingung $z = l$, $y = \delta$ findet man die Konstante C_1 , und es wird

$$y = \delta \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{l}} \frac{J_{2/3} \left(\frac{4}{3} a z^{3/4} \right)}{J_{2/3} \left(\frac{4}{3} a l^{3/4} \right)}.$$

Mit $z = l$, $y' = 0$ erhält man daraus die Knickbedingung

$$0 = \frac{d}{dz} \left[\sqrt{z} \cdot J_{2/3} \left(\frac{4}{3} a z^{3/4} \right) \right]_{z=l}.$$

Nun ist mit einem konstanten Faktor C

$$\begin{aligned} \sqrt{z} \cdot J_{2/3} \left(\frac{4}{3} a z^{3/4} \right) &= \\ &= C \cdot \left[z - \frac{4}{15} a^2 z^{5/2} + \frac{1}{45} a^4 z^4 - \frac{4}{4455} a^6 z^{11/2} + \frac{2}{93555} a^8 z^7 \dots \right] \end{aligned}$$

und die Knickgleichung wird die rasch konvergierende Reihe

$$0 = 1 - \frac{2}{3} (a^2 l^{3/2}) + \frac{4}{45} (a^2 l^{3/2})^2 - \frac{2}{405} (a^2 l^{3/2})^3 + \frac{2}{13365} (a^2 l^{3/2})^4 - \dots$$

Mit der Auflösung $a^2 l^{3/2} = \frac{P l^2}{E I_0} = 1,9594$ ist die Knicklast

$$P_k = 1,959 \frac{E I_0}{l^2}.$$

Im Fall $m = 1$ ist die Gleichung der Biegelinie mit $\nu = 1$

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot J_1 (2a\sqrt{z}) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot N_1 (2a\sqrt{z})$$

und daher

$$\frac{dy}{dz} = C_1 \cdot a J_0 (2a\sqrt{z}) + C_2 \cdot a N_0 (2a\sqrt{z}).$$

Die Randwerte $z = l$, $y = \delta$, $y' = 0$ bestimmen die Konstanten

$$C_1 = \delta a \pi \cdot N_0 (2a\sqrt{l}), \quad C_2 = -\delta a \pi \cdot J_0 (2a\sqrt{l}),$$

denn es gilt die Funktionalbeziehung $a \pi \sqrt{l} \cdot (N_0 \cdot J_1 - N_1 \cdot J_0) = 1$,

¹ Siehe das „Verzeichnis berechneter Funktionentafeln“, herausgegeben v. Institut f. angew. Math. a. d. Univ. Berlin, 1. Teil, 1928.

und die Gleichung der elastischen Linie wird

$$y = \delta a \pi \cdot \sqrt{z} [J_1 (2a \sqrt{z}) \cdot N_0 (2a \sqrt{l}) - N_1 (2a \sqrt{z}) \cdot J_0 (2a \sqrt{l})].$$

Für $z = 0$, $y = 0$ sind $J_1 = 0$, $N_1 = \infty$, und man gewinnt die Knickbedingung

$$J_0 (2a \sqrt{l}) = 0.$$

Die erste Nullstelle von J_0 führt auf $2a \sqrt{l} = 2,4048$ und somit zur Knicklast

$$P_k = 1,446 \frac{EI_0}{l^2}.$$

In analoger Weise erhält man für $m = 2$ die kritische Last $P_k = 0,25 \frac{EI_0}{l^2}$ und für $m = 3$ und $m = 4$ den Wert $P_k = 0$.

Mit den angegebenen Gleichungen sind auch Aufgaben mit Querschnittsgesetzen von der Form

$$I = I_0 \left[1 - (1 - k) \frac{u}{l} \right]^m \quad \text{oder} \quad I = I_0 \left[1 + k \cdot \frac{u}{l} \right]^m$$

zu lösen, bei denen die wählbare Konstante k den Verlauf der Trägheitsmomente verändert.

Besteht eine *hyperbolische Abhängigkeit* der Trägheitsmomente in der Form

$$I = \frac{I_0}{\left(1 - \frac{u}{b} \right)^m},$$

wobei m eine positive Zahl ist und sämtliche Bezeichnungen dieselbe Bedeutung wie vor haben, so gelten wieder die früheren allgemeinen Beziehungen. An Stelle von $+m$ ist jetzt $-m$ zu schreiben. In Pkt. 34 sind Ergebnisse mitgeteilt.

B. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab von der Länge l hat in seiner Mitte das Querschnittsträgheitsmoment I_0 und verjüngt sich nach beiden Enden entsprechend der Gleichung

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{mu}{l}};$$

m ist eine positive Zahl, die Abszissen u werden von der Stabmitte an gerechnet. An den Enden sind die Trägheitsmomente $I_1 = I_0 \cdot e^{-\frac{m}{2}}$

und wir können damit auch $I = I_0 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{\frac{2u}{l}}$ schreiben.

Die Differentialgleichung der Elastica lautet, vgl. Pkt. 7,

$$EI_0 \cdot e^{-\frac{mu}{l}} \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + P \cdot v = 0,$$

unter den Randbedingungen $u = \frac{l}{2}$, $v = 0$ und $u = 0$, $v' = 0$, wenn die Symmetrie der Ausbiegung berücksichtigt wird. Mit der Abkürzung

$$z = \frac{2l}{m} \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \cdot e^{\frac{m}{2} \frac{u}{l}}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{m^2}{4l^2} \left(z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} + z \frac{dv}{dz} \right)$$

ergibt sich die Gleichung $\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dv}{dz} + v = 0$,

die mit BESSELSchen Funktionen integriert werden kann. Die Lösung ist

$$v = C_1 \cdot J_0(z) + C_2 \cdot N_0(z)$$

mit den Konstanten C_1 und C_2 , und aus den Randwerten folgen die Gleichungen

$$0 = C_1 \cdot J_0\left(Z e^{\frac{m}{4}}\right) + C_2 \cdot N_0\left(Z e^{\frac{m}{4}}\right), \quad 0 = C_1 \cdot J_1(Z) + C_2 \cdot N_1(Z),$$

wobei $Z = \frac{2l}{m} \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$. Die gleich Null gesetzte Determinante ist die Knickgleichung und der kleinste Wurzelwert von Z bestimmt die Knicklast mit einem Koeffizienten α in der Form

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}.$$

Im Pkt. 34 sind diesbezügliche Resultate zusammengestellt.

34. Fortsetzung von Pkt. 33: Praktische Aufgaben.¹

A. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte, axial mit der Last P gedrückte Stab von der Länge l ist zur Mitte symmetrisch ausgebildet. Der mittlere Abschnitt von der Länge l_0 hat das Querschnittsträgheitsmoment I_0 , in den Endabschnitten von der Länge l_1 gehen die Trägheitsmomente dem Potenzgesetz

$$I = I_0 \left(\frac{b-u}{b}\right)^m,$$

mit der positiven Zahl m . Für die Endquerschnitte besteht

die Gleichung $I_1 = I_0 \left(\frac{b-l_1}{b}\right)^m$, so daß $\frac{l_1}{b} = 1 - \sqrt[m]{\frac{I_1}{I_0}}$ (Abb. 62).

Zufolge der Symmetrie ist es ausreichend, eine Stabhälfte zu betrachten. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet im mittleren Teil

$$EI_0 v'' + P \cdot v = 0$$

und im Endstück

$$EI_0 \left(\frac{b-u}{b}\right)^m \cdot v'' + P \cdot v = 0.$$

Den vier Integrationskonstanten stehen vier Randbedingungen gegenüber: Am Stabende ist die Ausbiegung $v = 0$, an der Trennungsstelle der beiden Stabteile müssen Ausbiegung v und Tangentenneigung v' der Biegelinie die gleichen Werte besitzen, wenn man sie vom einen oder anderen Stabteil rechnet, und dann ist wegen der Symmetrie die Neigung der Elastica in der Stabmitte $v' = 0$.

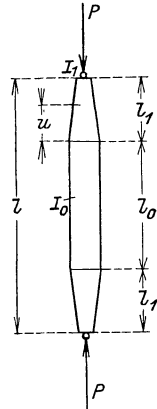


Abb. 62.

¹ A. N. DINNIK: Design of Columns of Varying Cross-Sections. Transact. of the American Society of Mech. Engineers. 1928. Die Knickfestigkeit der Stäbe, deren mittlerer Teil prismatisch ist und die sich nach beiden Seiten verengen. Westnik Ingenierow. 1929.

Ist der Stab an seinen Enden eingespannt, so ist dem zusätzlichen unbekanntem Einspannmoment der Randwert $v' = 0$ am Stabende zugeordnet (wobei aus Symmetriegründen die Querkraft an der Einspannstelle fortgelassen werden kann).

Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante der Konstantengleichungen ist die Knickbedingung, deren kleinste Wurzel den kritischen Wert ergibt. Die Knicklast kann in beiden Fällen durch die Formel

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}$$

ausgedrückt werden und die folgenden zwei Tabellen enthalten den Faktor α für einige Verhältnisse $l_0:l$ und $I_1:I_0$ für die Exponenten $m = 1, 2, 3$ und 4 . Bei $m = 2$ und $m = 4$ läßt sich, wie aus Pkt. 33 hervorgeht, die Rechnung mit Elementarfunktionen erledigen, bei $m = 1$ und $m = 3$ mit Hilfe von BESSELSchen Funktionen. Die Werte der ersten Tabelle gelten für den an den Enden gelenkig gelagerten Stab, die der zweiten Tabelle für den an den Enden eingespannten Stab. Beim prismatischen Stab $l_0:l = 1$ oder $I_1:I_0 = 1$ sind, wie bekannt, $\alpha = \pi^2$, bzw. $4\pi^2$.

Stab nach A, an den Enden gelenkig gelagert.

		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\frac{l_0}{l} = 0$	$\frac{I_1}{I_0} = 0,1$	6,48	5,40	5,01	4,81
	0,2	7,01	6,37	6,14	6,02
	0,4	7,87	7,61	7,52	7,48
	0,6	8,61	8,51	8,50	8,47
	0,8	9,27	9,24	9,23	9,23
0,2	0,1	7,58	6,67	6,32	6,11
	0,2	7,99	7,49	7,31	7,20
	0,4	8,50	8,42	8,39	8,33
	0,6	9,12	9,04	9,02	9,01
	0,8	9,54	9,50	9,50	9,49
0,4	0,1	8,68	8,08	7,84	7,68
	0,2	8,91	8,61	8,49	8,42
	0,4	9,19	9,15	9,11	9,10
	0,6	9,55	9,48	9,46	9,45
	0,8	9,68	9,70	9,69	9,69
0,6	0,1	9,46	9,24	9,14	9,01
	0,2	9,63	9,44	9,39	9,38
	0,4	9,70	9,63	9,62	9,62
	0,6	9,76	9,74	9,74	9,74
	0,8	9,83	9,82	9,81	9,81
0,8	0,1	9,82	9,79	9,77	9,77
	0,2	9,83	9,81	9,81	9,80
	0,4	9,84	9,84	9,84	9,84
	0,6	9,85	9,85	9,85	9,85
	0,8	9,86	9,86	9,86	9,86

Stab nach A, an den Enden eingespannt.

		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\frac{l_0}{l} = 0$	$\frac{I_1}{I_0} = 0,1$		14,39		13,30
	0,2	20,36	18,94	18,48	18,23
	0,4	26,16	25,54	25,32	25,23
	0,6	31,04	30,79	30,72	30,68
	0,8	35,40	35,35	33,32	35,33
0,2	0,1		16,85		15,96
	0,2	22,36	21,25	20,88	20,71
	0,4	27,80	27,35	27,20	27,13
	0,6	32,20	32,02	31,96	31,94
	0,8	36,00	35,97	35,96	35,96
0,4	0,1		18,84		18,18
	0,2	23,42	22,91	22,64	22,49
	0,4	28,96	28,52	28,40	28,33
	0,6	32,92	32,77	32,72	32,69
	0,8	36,36	36,34	36,32	36,32
0,6	0,1		20,29		19,60
	0,2	25,44	24,29	23,96	23,80
	0,4	30,20	29,69	29,52	29,46
	0,6	33,80	33,63	33,56	33,54
	0,8	36,84	36,80	36,80	36,78
0,8	0,1		23,41		22,39
	0,2	29,00	27,67	27,24	27,03
	0,4	33,08	32,59	32,44	32,35
	0,6	35,80	35,64	35,60	35,56
	0,8	37,84	37,81	37,80	37,80

Beispiel. Ein an den Enden gelenkig gelagerter Stab von der Länge l mit kreisförmigem Querschnitt besitze die Form eines Doppelkegels, d. h. der mittlere Teil l_0 habe die Länge Null. Die Querschnittsträgheitsmomente verlaufen vom Wert I_0 in der Mitte linear zum Wert I_1 an den Enden, und mit der Abkürzung $I_1:I_0 = k$ ist

$$I = I_0 \left[1 - 2(1 - k) \frac{u}{l} \right].$$

Sind die Kreisdurchmesser mit z bezeichnet, also $I = \frac{\pi z^4}{64}$, $I_0 = \frac{\pi z_0^4}{64}$, so gilt ebenso

$$z^2 = z_0^2 \left[1 - 2(1 - k) \frac{u}{l} \right]^{1/2}.$$

Aus der angeführten Tabelle ist für $m = 1$ der Koeffizient α der Gleichung für die kritische Last P_k zu entnehmen.

Wir stellen nun die Frage. Welche Materialersparnis ergibt bei einem Stab die Verwendung dieses veränderlichen Querschnittes gegenüber dem konstanten Querschnitt? Bei gleicher Knickfestigkeit in beiden Fällen ist

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2} = \pi^2 \frac{E I_a}{l^2},$$

wobei $I_a = \frac{\pi a^4}{64}$ und a der Durchmesser vom gleichförmigen Kreisquerschnitt. Damit wird $\pi \cdot a^2 = \sqrt{\alpha} \cdot z_0^2$. Das Volumen des Stabes mit veränderlichen Trägheitsmomenten ist

$$V_v = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\pi}{4} z^2 \cdot d u = \pi z_0^2 \frac{l}{6} \frac{1-k^{3/2}}{1-k}$$

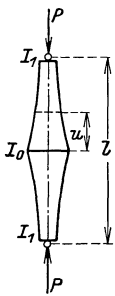
und das Volumen des prismatischen Stabes mit der gleichen Knicklast ist also

$$V_{gl} = \pi \frac{a^2}{4} l = z_0^2 \frac{l}{4} \sqrt{\alpha}.$$

Daraus folgt

$$V_v = \varrho \cdot V_{gl}, \quad \varrho = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \frac{1-k^{3/2}}{1-k}.$$

Unsere Frage können wir auch anders formulieren. Wie vergrößert sich der kritische Lastwert des Stabes, wenn bei der gleichen Materialmenge an Stelle des gleichmäßigen Querschnittes der veränderliche Querschnitt benützt wird? Aus der Gleichsetzung der beiden Volumina $\pi \frac{a^2}{4} l = \pi z_0^2 \frac{l}{6} \frac{1-k^{3/2}}{1-k}$ bestimmt sich der Kreisdurchmesser a und die Knicklast des prismatischen Stabes



$$P_{gl} = \pi^2 \frac{E}{l^2} \frac{\pi a^4}{64} = \pi^2 \frac{E I_0}{l^2} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{1-k^{3/2}}{1-k} \right)^2$$

und damit weiter

$$P_k = \frac{1}{\varrho^2} P_{gl}.$$

Wir schreiben für einige Werte k die Koeffizienten ϱ und $\frac{1}{\varrho^2}$ an, aus denen die Materialökonomie des Stabes mit dem veränderlichen Trägheitsmoment bei unserem Beispiel zu erkennen ist.

$k = 0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$
$\varrho = 0,89$	$0,90$	$0,93$	$0,96$	$0,98$
$\frac{1}{\varrho^2} = 1,28$	$1,23$	$1,16$	$1,10$	$1,05$

B. Der mit der Last P gedrückte Stab von der Länge l ist an beiden Enden gelenkig gelagert und der Verlauf der Querschnittsträgheitsmomente entspricht der Gleichung

$$I = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{u}{b}\right)^m}.$$

In der Stabmitte $u = 0$ ist $I = I_0$, an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ ist $I = I_1$,

so daß $\frac{l}{2b} = 1 - \sqrt[m]{\frac{I_0}{I_1}}$ (Abb. 63). Die nächste Tabelle gibt bei den

Exponenten $m = 1, 2, 3$ und 4 für einige Werte $I_1:I_0$ den Koeffizienten α der Gleichung für die Knicklast

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}.$$

Stab nach B, an den Enden gelenkig gelagert.

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$I_1:I_0 = 0,2$	4,43	5,01	5,22	5,34
0,4	6,79	7,06	7,16	7,20
0,6	8,23	8,32	8,35	8,38
0,8	9,19	9,20	9,21	9,21

C. Der axial mit der Last P gedrückte Stab von der Länge l ist zur Mitte symmetrisch geformt. Der mittlere Teil von der Länge l_0 hat konstanten Querschnitt mit dem Trägheitsmoment I_0 , in den Endteilen verändern sich die Trägheitsmomente der Querschnitte nach dem Gesetz

$$I = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{u}{b}\right)^2},$$

und für die Endquerschnitte gilt somit die Gleichung $I_1 = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{l_1}{b}\right)^2}$,

womit $\frac{l_1}{b} = 1 - \sqrt{\frac{I_0}{I_1}}$ (vgl. Abb. 62).

Die folgenden zwei Tabellen enthalten den Faktor α der Gleichung für die kritische Last

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}$$

bei gelenkiger Lagerung bzw. bei Einspannung der Enden des Stabes. Für $l_0:l = 1$ oder $I_1:I_0 = 1$ sind $\alpha = \pi^2$ bzw. $4\pi^2$.

Stab nach C, an den Enden gelenkig gelagert.

$l_0:l =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$I_1:I_0 = 0,2$	5,01	6,27	7,77	9,10	9,76
0,4	7,06	8,02	8,91	9,54	9,83
0,6	8,32	8,93	9,41	9,71	9,85
0,8	9,20	9,47	9,69	9,81	9,86

Stab nach C, an den Enden eingespannt.

$l_0:l =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$I_1:I_0 = 0,2$	16,14	19,18	21,53	22,76	25,68
0,4	24,43	26,64	28,01	28,91	31,87
0,6	30,40	31,82	32,02	33,32	35,46
0,8	35,32	35,98	36,36	36,75	37,79

D. Der axial mit der Last P gedrückte Stab von der Länge l ist zur Mitte symmetrisch. Im mittleren Teil von der Länge l_0 ist das Querschnittsträgheitsmoment gleich I_0 , in den Endabschnitten von je der Länge l_1 genügen die Trägheitsmomente der Gleichung

$$I = I_0 \left(\frac{I_1}{I_0} \right)^{\frac{u}{l_1}},$$

wenn I_1 die Werte der Endquerschnitte ($u = l_1$) sind (vgl. Abb. 62).

Die Knicklast kann auf die Form

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2}$$

gebracht werden, und die nachstehenden Tabellen geben den Koeffizienten α für einige Verhältnisse $l_0:l$ und $I_1:I_0$ für beiderseitige Gelenklagerung bzw. beiderseitige Einspannung des Stabes an. Mit $l_0:l = 1$ oder $I_1:I_0 = 1$ sind $\alpha = \pi^2$ bzw. $4\pi^2$.

Stab nach D, an den Enden gelenkig gelagert.

$l_0:l =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$I_1:I_0 = 0,01$	1,27	1,91	3,14	5,77	9,24
0,1	4,24	5,34	7,22	8,87	9,58
0,2	5,68	6,89	8,24	9,24	9,77
0,4	7,34	8,23	9,07	9,62	9,83
0,6	8,42	8,98	9,43	9,74	9,85
0,8	9,23	9,48	9,64	9,84	9,86

Stab nach D, an den Enden eingespannt.

$l_0:l =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$I_1:I_0 = 0,1$	12,19	15,05	17,57	19,07	21,51
0,2	17,57	20,15	22,22	23,40	26,46
0,4	24,42	26,94	28,22	29,25	32,15
0,6	30,55	31,89	32,80	33,35	35,45
0,8	35,29	36,01	36,82	36,74	37,78

35. Ein weiteres Beispiel.

a) Der symmetrische, an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab von der Länge l ist durch die Kraft P gedrückt und die Querschnittsträgheitsmomente ändern sich nach der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - \frac{u^2}{k^2} \right)^2, \quad \frac{1}{k^2} = \frac{4}{l^2} \left(1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} \right).$$

I_0 ist das Trägheitsmoment in der Stabmitte ($u = 0$), I_1 an den Stabenden ($u = \pm \frac{l}{2}$). — Dieser Verlauf der Trägheitsmomente ist z. B. bei einem

dünnwandigen Kastenquerschnitt verwirklicht, wenn der Abstand der Gurte der Gleichung $h = h_0 \left(1 - \frac{u^2}{k^2}\right)$ folgt und bei der Querschnittsfläche F eines Gurtes für I der Wert $F \frac{h^2}{2}$ genommen wird.¹

Mit diesem Querschnittsgesetz läßt sich die Differentialgleichung der *Elastica* elementar integrieren. Die Gleichung

$$E I_0 \frac{(k^2 - u^2)^2}{k^4} \frac{d^2 v}{du^2} + P \cdot v = 0$$

erhält mit der Abkürzung $\frac{P k^4}{E I_0} = a^2$ die Form

$$(k^2 - u^2)^2 \frac{d^2 v}{du^2} + a^2 v = 0$$

und ihr Integral ist

$$v = C_1 \cdot \sqrt{k^2 - u^2} \cdot \sin\left(\beta \cdot \lg \frac{k+u}{k-u}\right) + C_2 \cdot \sqrt{k^2 - u^2} \cdot \cos\left(\beta \cdot \lg \frac{k+u}{k-u}\right),$$

$$\beta = \frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{2k}.$$

Die Randwerte $v = 0$ für $u = \pm \frac{l}{2}$ ergeben mit $\frac{2k+l}{2k-l} = \gamma$ die Konstantengleichungen

$$0 = C_1 \cdot \sin(\beta \lg \gamma) + C_2 \cdot \cos(\beta \lg \gamma), \quad 0 = -C_1 \cdot \sin(\beta \lg \gamma) + C_2 \cdot \cos(\beta \lg \gamma)$$

und die gleich Null gesetzte Determinante ist die Knickbedingung

$$\sin(2\beta \lg \gamma) = 0.$$

Sonach ist mit Einführen von β und γ

$$\frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{k} \lg \frac{2k+l}{2k-l} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und die kleinste kritische Last wird für $n = 1$

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{l^2}{k^2} \left(\frac{\pi^2}{\lg^2 \frac{2k+l}{2k-l}} + 1 \right).$$

In der folgenden Zusammenstellung sind für einige Verhältnisse $I_1 : I_0$ die Werte α dieser Gleichung berechnet.

$I_1 : I_0 =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$	4,0	7,60	8,15	8,52	8,81	9,05	9,25	9,43	9,59	9,84	π^2

¹ A. LOCKSCHIN: Über die Knickung eines doppelwandigen Druckstabes mit parabolisch veränderlicher Querschnittshöhe. *Ztschr. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 10, S. 160—166. 1930. — Siehe auch COWLEY u. LEVY: Critical Loading of Struts and Structures. *Proc. of the Royal Soc. London*, S. 405. 1918.

b) Für den an beiden Enden eingespannten Stab lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E I_0 \frac{(k^2 - u^2)^2}{k^4} \frac{d^2 v}{d u^2} + M + Q \left(\frac{l}{2} - u \right) + P \cdot v = 0,$$

wenn M das Einspannmoment und Q die Querkraft sind (vgl. Pkt. 7, b). Bezeichnet v_0 die unter a) aufgestellte Gleichung für die Ausbiegung, so ist das allgemeine Integral

$$v = v_0 - \frac{Q}{P} \left(\frac{l}{2} - u \right) - \frac{M}{P}.$$

Mit den Randbedingungen $v = 0$, $v' = 0$ für $u = \pm \frac{l}{2}$ bekommt man aus einer analogen Rechnung wie vor die maßgebende Knickgleichung, die dem symmetrischen Verformen entspricht

$$\varrho \cdot \operatorname{tg} \varrho + \frac{l}{4k} \operatorname{lg} \frac{2k+l}{2k-l} = 0, \text{ mit } \varrho = \frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{2k} \operatorname{lg} \frac{2k+l}{2k-l}.$$

Für einen gegebenen Wert k wird nun ϱ bestimmt, und dann ist die Knicklast

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2}, \text{ wo } \alpha = \frac{l^2}{k^2} \left(\frac{4 \varrho^2}{\operatorname{lg}^2 \frac{2k+l}{2k-l}} + 1 \right).$$

Die nachstehende Tabelle enthält die Koeffizienten α für einige Werte $I_1 : I_0$. Das Trägheitsmoment $I_1 = 0$ ist als Einspannung nicht realisierbar und führt zu einer gelenkigen Lagerung.

$I_1 : I_0 =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$	18,27	22,50	25,62	28,24	30,54	32,62	34,50	36,26	39,48	$4\pi^2$

Zusatz. Von der Richtigkeit des angeschriebenen Integrals können wir uns durch Eingehen in die Differentialgleichung überzeugen. Wir betrachten z. B. den an beiden Enden gelenkig gelagerten Stab und wollen diese Umkehrung der Aufgabe so formulieren: Wir nehmen die Biegelinie v an und bestimmen aus der Gleichung

$$E I \frac{d^2 v}{d u^2} + P \cdot v = 0$$

das Gesetz der Querschnittsträgheitsmomente, also $I = -\frac{P v}{E v''}$. Nun ist

$$v'' = -C_1 \cdot \frac{a^2}{\sqrt{(k^2 - u^2)^3}} \cdot \sin \left(\beta \operatorname{lg} \frac{k+u}{k-u} \right) - C_2 \cdot \frac{a^2}{\sqrt{(k^2 - u^2)^3}} \cdot \cos \left(\beta \operatorname{lg} \frac{k+u}{k-u} \right)$$

und daher wird

$$I = \frac{P}{E a^2} (k^2 - u^2)^2 \text{ oder } I = I_0 \left(1 - \frac{u^2}{k^2} \right)^2$$

in Übereinstimmung mit der ursprünglichen Festlegung.

Man könnte auf den Gedanken kommen, bei praktischen Aufgaben verschiedene Biegelinien anzunehmen, die die Randbedingungen erfüllen

und dann die Querschnittsgesetze zu berechnen.¹ Diese Methode wäre wohl einfach, da man die Integration erspart, aber man wird in Wirklichkeit erst mit einer Reihe von Versuchen einen von vornherein ungefähr gegebenen Verlauf der Trägheitsmomente erreichen.

36. Der günstigste Querschnittsverlauf.

Wir wollen die Frage beantworten, wie der Querschnittsverlauf eines beiderseits gelenkig gelagerten Stabes gestaltet sein muß, damit bei einem gegebenen Materialaufwand die größte Knickfestigkeit erreicht wird.²

Bei veränderlichem Querschnitt ist das Querschnittsträgheitsmoment I eine Funktion von u . Die Variation δI an jeder Stelle u verursacht eine Variation δv der Biegelinie. Nun soll bei der Variation der Querschnitte die Stablänge l unverändert, d. h. $\delta l = 0$ sein und damit gewinnt man eine Minimumsbedingung. Die Forderung, daß die Materialmenge des Stabes, d. h. sein Volumen konstant ist, ergibt eine zweite Bedingung, so daß sich die Differentialgleichung der Biegelinie integrieren läßt.³

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 v}{du^2} + F(u) \cdot v = 0, \quad F(u) = \frac{P}{EI(u)}$$

erhalten wir die Differentialgleichung für die Variation δv der Biegelinie

$$\frac{d^2 \delta v}{du^2} + F(u) \cdot \delta v = -v \cdot \delta F(u).$$

Hierbei muß $\delta l = 0$ oder ebenso $\delta v = 0$ sein, für $u = 0$ und $u = l$ (Abb. 64). Sind v_1 und v_2 die Lösungen der homogenen Gleichung, so ist das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung

$$\delta v = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 - \int_0^u \gamma(u, \xi) \cdot v_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi.$$

Die „Grundlösung“ $\gamma(u, \xi)$ zeigt, welchen Teil der Wert $v_1 \cdot \delta F$ der Störungsfunktion an der Stelle ξ am Wert δv an der Stelle u hat; es ist

$$\gamma(u, \xi) = \frac{v_1(u) \cdot v_2(\xi) - v_2(u) \cdot v_1(\xi)}{v_1'(\xi) \cdot v_2(\xi) - v_2'(\xi) \cdot v_1(\xi)},$$

wobei der Nenner eine Konstante ist. Nun sind (vgl. Pkt. 7) $v_1 = 0$,

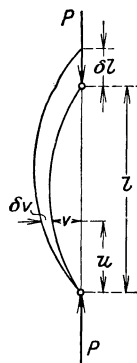


Abb. 64.

¹ Dieser Weg wird von TH. BELJAKOW eingeschlagen: Das Prinzip der „virtuellen“ Biegelinie als Grundlage des Knickproblems. Charkow: Ukrain. Staatsverlag f. Technik. 1932.

² Man verdankt LAGRANGE die Ansätze für dieses Problem und damit eine erste Anwendung der Variationsrechnung.

³ H. BLASIUS: Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch. Ztschr. Math. u. Physik, Bd. 62, S. 182—197. 1914.

$v_2 \neq 0$ für $u = 0$ und $u = l$. Die Randbedingung $\delta v = 0$, $u = 0$ ergibt somit $C_2 = 0$; die Bedingung $\delta v = 0$, $u = l$ liefert die zwei Gleichungen

$$\int_0^l \gamma(l, \xi) \cdot v_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi = 0, \quad \gamma(l, \xi) = \frac{-v_2(l)}{v_1'(\xi) \cdot v_2(\xi) - v_2'(\xi) \cdot v_1(\xi)} \cdot v_1(\xi).$$

Man entnimmt der zweiten Gleichung, daß $\gamma(l, \xi)$ proportional zu $v_1(\xi)$ ist, und damit entsteht aus der ersten Gleichung mit Weglassen konstanter Faktoren die Minimumsbedingung in der Form

$$\int_0^l v_1^2 \cdot \delta F \cdot du = 0. \quad (1)$$

Wir müssen jetzt die Querschnittsfigur des Stabes festlegen und nehmen an, daß die Querschnitte Kreise mit dem veränderlichen Durchmesser z sind. Mit dem Trägheitsmoment $I = \frac{\pi}{64} z^4$, also $F = \frac{P}{EI} = \frac{64P}{\pi E z^4}$ wird Gl. (1)

$$\int_0^l v_1^2 \cdot \frac{\delta z}{z^5} \cdot du = 0. \quad (2)$$

Zufolge des konstanten Volumens $V = \frac{\pi}{4} \int_0^l z^2 du$ ergibt sich mit $\frac{\delta V}{\delta z} = 0$

$$\int_0^l z \cdot \delta z \cdot du = 0. \quad (3)$$

Aus den Gl. (2) und (3) geht hervor, daß $\frac{v_1^2}{z^5}$ proportional zu z ist, d. h. es ist auch

$$v_1 = k \left(\frac{z}{z_0} \right)^3, \quad (4)$$

wenn z_0 den Wert von z in der Stabmitte und k eine Konstante bedeutet.

Diese Beziehung tritt also zu der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 v_1}{du^2} + \frac{64P}{\pi E z^4} v_1 = 0$$

mit den Randbedingungen $v_1 = 0$ für $u = 0$ und $u = l$. Eliminiert man v_1 mit Gl. (4), so erhält man mit $I_0 = \frac{\pi}{64} z_0^4$ und den Abkürzungen $\frac{z}{z_0} = \eta$, $\frac{P}{EI_0} = a^2$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \eta^3}{du^2} + \frac{a^2}{\eta} = 0, \quad (5)$$

unter den Randbedingungen $u = 0$, $\eta = 0$ und $u = \frac{l}{2}$, $\eta = 1$. I_0 ist das

Querschnittsträgheitsmoment in der Stabmitte. Setzt man $\eta^3 = x$, $\frac{du}{dx} = y$, so ist

$$\frac{d^2 \eta^3}{du^2} = \frac{d^2 x}{du^2} = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{6\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{y^2} \right),$$

daher die Gl. (5)

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{y^2} \right) = -6a^2 \eta.$$

Die Integration ergibt

$$\frac{1}{y^2} = -6a^2 \int \eta d\eta = -3a^2 \eta^2 + C;$$

aus der Randbedingung $\eta = 1, \frac{1}{y} = 0$ folgt die Konstante $C = 3a^2$, also ist

$$\frac{1}{y^2} = 3a^2 (1 - \eta^2).$$

Die zweite Integration bestimmt aus

$$a\sqrt{3} \cdot du = \int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{1-\eta^2}} = \int_0^\eta \frac{3\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

die Gleichung

$$u \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{arc sin } \eta - \eta \sqrt{1 - \eta^2}), \quad (6)$$

und aus ihr mit $u = l$ die Knicklast

$$P_k = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{EI_0}{l^2} = 7,402 \frac{EI_0}{l^2}. \quad (7)$$

Da $\eta = \frac{z}{z_0} = \sqrt[3]{\frac{v_1}{k}}$ liefert (6) das gesuchte Querschnittsgesetz und auch die Gleichung der Biegelinie. Mit Hilfe von (7) läßt sich die Gl. (6) auch in der Form

$$\frac{u}{l} = \frac{1}{\pi} (\text{arc sin } \eta - \eta \sqrt{1 - \eta^2}) \quad (6a)$$

anschreiben. — Die hiernach berechneten Werte η sind in der folgenden Zusammenstellung gegeben; die Umrißlinie des Stabes ist in der Abb. 65 aufgezeichnet.

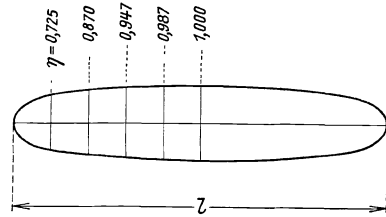


Abb. 65.

$u:l = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\eta = \frac{z}{z_0} = 0$	0,725	0,870	0,947	0,987	1,0

Wie groß ist die Materialersparnis gegenüber dem prismatischen Stab mit kreisförmigem Querschnitt? Besitzen beide Stäbe die gleiche kritische Last, so gilt

$$P_k = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{E}{l^2} \frac{\pi}{64} z_0^4 = \pi^2 \frac{E}{l^2} \frac{\pi}{64} a^4,$$

wenn a der Durchmesser vom gleichförmigen Kreisquerschnitt ist. Daraus folgt $a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} z_0^2$. Das Volumen vom Stab mit veränderlichem Querschnitt $\int_0^l \pi \frac{z^2}{4} du$ ist gleich $\frac{3}{16} \pi z_0^2 l$, das vom Stab mit konstantem Querschnitt ist $\pi \frac{a^2}{4} l = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi z_0^2 l$. Bei gleicher Tragfähigkeit hat also der Stab mit veränderlichem Querschnitt ein im Verhältnis $\sqrt{3}:2$ kleineres Volumen als der Stab mit konstantem Querschnitt.

Andererseits können wir schließen: Haben beide Stäbe den gleichen Rauminhalt, so ist $a^2 = \frac{3}{4} z_0^2$, und die Knicklast des prismatischen Stabes

$$P_{gl} = \pi^2 \frac{E}{l^2} \frac{\pi}{64} a^4 = \frac{9}{16} \pi^2 \frac{E I_0}{l^2} = \frac{3}{4} P_k.$$

Die Knicklast $P_k = \frac{4}{3} P_{gl}$ ist durch die geänderte Materialverteilung um ein Drittel erhöht worden.¹

Wir geben noch die in analoger Weise auffindbaren Ergebnisse für *Stäbe mit rechteckigem Querschnitt* an.

Die Breite b ist konstant, die Höhe h veränderlich. Gleichung der Umrißlinie:

$$\frac{u}{l} = \frac{1}{4} \sqrt{1 - \eta^3} - \frac{3}{4} \sqrt{1 - \eta} + \frac{1}{2},$$

also

$u:l = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\eta = \frac{h}{h_0} = 0$	0,630	0,818	0,927	0,982	1,0

Materialmenge: $V = \frac{4}{5} b h_0 \cdot l$. Knicklast: $P_k = \frac{64}{9} \frac{E I_0}{l^2}$.

Knicklast des prismatischen Stabes mit gleichem Materialverbrauch: $P_{gl} = \frac{64}{125} \pi^2 \frac{E I_0}{l^2} = 0,711 P_k$.

Die Höhe h ist konstant, die Breite b veränderlich. Gleichung der Umrißlinie:

$$\eta = \frac{b}{b_0} = 4 \frac{u}{l} \left(1 - \frac{u}{l} \right).$$

Materialmenge: $V = \frac{2}{3} b_0 h \cdot l$. Knicklast: $P_k = 8 \frac{E I_0}{l^2}$.

Knicklast des prismatischen Stabes mit gleichem Materialverbrauch: $P_{gl} = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{E I_0}{l^2} = 0,823 P_k$.

¹ Zu diesem Resultat gelangte bereits CLAUSEN in einer Abhandlung über die Form architektonischer Säulen: Bulletin physico-mathématique de l'Académie de St.-Petersbourg. 1851. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: A History of the Theory of Elasticity. Cambridge, 1893. 2. Bd., 1. Teil, S. 326.

37. Die Druckkraft ändert sich nach einem Potenzgesetz; der Querschnitt ist konstant.

Wir betrachten den prismatischen, an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l und dem Querschnittsträgheitsmoment I . Die den Stab zentrisch auf Druck beanspruchende Kraft verändert sich stetig mit der Höhe, und die Belastung auf die Längeneinheit sei durch die Gleichung

$$p = p_0 \left(1 - \frac{u}{l}\right)^n$$

bestimmt, wobei n eine positive Zahl ist. An der Einspannstelle $u = 0$ ist $p = p_0$, am freien Ende ist $p = 0$ (Abb. 66).

Das Biegemoment im Querschnitt (u, v) ist durch die Gleichung

$$M = \int_{\xi=0}^{l-u} p(\eta - v) d\xi$$

gegeben und daraus folgt die erste Ableitung nach u

$$\frac{dM}{du} = - \frac{dv}{du} \int_{\xi=0}^{l-u} p \cdot d\xi,$$

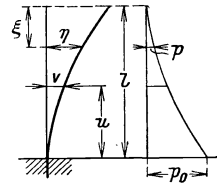


Abb. 66.

denn es ist nur die Funktion unter dem Integralzeichen zu differenzieren, da sie an der oberen Grenze den Wert Null hat. Wir schreiben weiter

$$\frac{dM}{du} = - \frac{dv}{du} \cdot P_u,$$

wo

$$P_u = \int_{\xi=0}^{l-u} p d\xi = - \int_{u=l}^u p du = \frac{p_0 l}{n+1} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^{n+1}$$

die Last des Stabteiles von $u = l$ bis u ist. Die resultierende Last verläuft also vom Wert Null am Stabende bis zum Größtwert $P_0 = \frac{p_0 l}{n+1}$ an der Einspannstelle.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$EI \frac{d^2 v}{du^2} = M$$

unter den Randwerten $u = 0$; $v' = 0$ und $u = l$, Biegemoment $v'' = 0$, wird, wenn man nach u differenziert und für $\frac{dM}{du}$ einsetzt,

$$EI \frac{d^3 v}{du^3} + \frac{p_0 l}{n+1} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^{n+1} \cdot \frac{dv}{du} = 0.$$

Mit den Abkürzungen

$$1 - \frac{u}{l} = z, \quad \frac{dv}{dz} = y, \quad \frac{p_0 l^3}{n+1} \frac{1}{EI} = a^2$$

erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + a^2 z^{n+1} \cdot y = 0,$$

unter den Randbedingungen $z = 1, y = 0$ und $z = 0, y' = 0$. Diese Gleichung kann mit BESSELSchen Funktionen integriert werden, und da die Ordnungszahl $\nu = \frac{1}{n+3}$ bei einem positiven Exponenten n keine ganze Zahl ist, lautet die Lösung (vgl. Pkt. 33)

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot J_\nu \left(2a\sqrt{z} \cdot z^{\frac{1}{2\nu}} \right) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot J_{-\nu} \left(2a\sqrt{z} \cdot z^{\frac{1}{2\nu}} \right).$$

Bevor wir die Knickbedingung allgemein anschreiben, wollen wir zwei Sonderfälle diskutieren.

Ist $n = 0$, so ist $p = p_0 = \text{konstant}$, und die Last P_u verändert sich linear mit der Höhe von Null bis $P_0 = p_0 l$. Dieser Fall ist bei der Beanspruchung eines Stabes durch sein Eigengewicht p_0 auf die Längeneinheit gegeben.¹ Das Integral der Differentialgleichung der *Elastica* ist jetzt

$$y = C_1 \cdot \sqrt{z} \cdot J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{p_0 l^3}{EI}}$$

und daher

$$y' = C_1 \cdot a z \cdot J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right) - C_2 \cdot a z \cdot J_{2/3} \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right).$$

Die Randbedingung $z = 0, y' = 0$ fordert zufolge $J_{-2/3} = \infty$ das Verschwinden von C_1 und mit $z = 1, y = 0$ gelangt man zur Knickgleichung

$$J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{p_0 l^3}{EI}} \right) = 0.$$

Die kleinste Lösung ergibt für das Argument den Wert 1,86635, und somit wird die kritische Länge, bei der der Stab unter seinem Eigengewicht ausknickt

$$l_k = \sqrt[3]{7,8374 \frac{EI}{p_0}},$$

oder anders ausgedrückt, der kritische Wert der Last $P_0 = p_0 l$ hat die Größe

$$P_k = 7,837 \frac{EI}{l^2} = 3,176 \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}.$$

Die Wirkung des Eigengewichtes kann also dadurch ersetzt werden, daß man am freien Stabende die Last $p_0 l: 3,176$ anbringt.

¹ Das Knicken einer Säule unter Eigengewicht wurde erstmals von EULER in mehreren Abhandlungen untersucht. — Siehe J. TODHUNTER u. K. PEARSON: *A History of the Theory of Elasticity*, Bd. 1, S. 44. — J. P. G. v. HEIM: *Über Gleichgewicht elastischer fester Körper*. Stuttgart u. Tübingen, 1838. S. 209. — A. G. GREENHILL: *Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportions can grow*. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, Bd. 4, S. 65—73. 1881. — Ferner C. CHREE: *A. gl. O.*, S. 283—305. 1892.

Im Fall $n = 1$ ist die Differentialgleichung der Biegelinie

$$y = C_1 \sqrt{z} J_{1/4} \left(\frac{1}{2} a z^2 \right) + C_2 \sqrt{z} J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} a z^2 \right), \quad a = \sqrt{\frac{p_0 l^3}{2 E I}}.$$

Wie vor wird aus der Bedingung $z = 0, y' = 0$ die Konstante $C_1 = 0$; mit $z = 1, y = 0$ bekommt man die Knickgleichung

$$J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} a \right) = 0,$$

und aus ihrer kleinsten Wurzel $\frac{a}{2} \simeq 2,006$ folgt der kritische Wert der

$$\text{Last } P_0 = p_0 \frac{l}{2}$$

$$P_k = 16,1 \frac{E I}{l^2}.$$

Man erhält analog für $n = 2$ und für $n = 3$ die Knicklasten

$$P_k = 27,3 \frac{E I}{l^2}, \text{ bzw. } 41,3 \frac{E I}{l^2}.$$

Bei der angenommenen Lastverteilung lautet die Knickgleichung allgemein

$$J_{-v} (2a v) = 0, \quad v = \frac{1}{n+3}$$

und die Knicklast berechnet sich aus der ersten Nullstelle der BESSELSchen Funktion J_{-v} .

38. Weitere Beispiele.

a) Der an einem Ende eingespannte, am anderen Ende freie prismatische Stab sei gleichförmig durch das Eigengewicht g auf die Längeneinheit und die am freien Stabende zentrisch angreifende Druckkraft P belastet.

Für das Biegemoment im Querschnitt (u, v) gilt

$$-\frac{dM}{du} = [g(l-u) + P] \frac{dv}{du}$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie $E I \frac{d^2 v}{d u^2} = M$ wird

$$E I \frac{d^3 v}{d u^3} + (g l - g u + P) \frac{d v}{d u} = 0$$

unter den Randbedingungen $u = 0, v' = 0$ und $u = l, v'' = 0$. Setzt man

$$g l - g u + P = z, \quad \frac{d v}{d z} = y, \quad \frac{1}{g^2 E I} = a^2,$$

so bekommt man die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + a^2 z \cdot y = 0$$

mit den Randwerten $z = g l + P, y = 0$ und $z = P, y' = 0$.

Diese Gleichung haben wir schon in Pkt. 37 untersucht. Wir wollen jetzt aber eine Integration mit unmittelbaren Reihenentwicklungen vornehmen, da wir damit einen Rechnungsweg einschlagen, der oft mit Vorteil zu verwenden ist.

Wir schreiben für y die Potenzreihe

$$y = c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \dots = \sum_k^{0, \infty} c_k \cdot z^k,$$

und dann ist

$$y'' = \sum_k^{0, \infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} \cdot z^k.$$

Unsere Differentialgleichung wird

$$\sum_k^{0, \infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} \cdot z^k + a^2 z \sum_k^{0, \infty} c_k \cdot z^k = 0$$

und der Koeffizientenvergleich ergibt die Rekursionsformel

$$(k+1)(k+2) c_{k+2} + a^2 c_{k-1} = 0.$$

Mit $k=0$ folgt $c_2 = 0$ und daher sind sämtliche Koeffizienten, deren Indizes sich von 2 um ein ganzes Vielfaches von 3 unterscheiden, also c_5, c_8, c_{11}, \dots gleich Null. Aus c_0 und c_1 sind alle übrigen c_k eindeutig bestimmt und diese zwei Größen bilden die Integrationskonstanten des Problems. Man erhält für y die Lösung

$$y = c_0 \left(1 - \frac{a^2}{6} z^3 + \frac{a^4}{5 \cdot 6 \cdot 6} z^6 - \frac{a^6}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} z^9 + \right. \\ \left. + \frac{a^8}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} z^{12} - \dots \right) \\ + c_1 \cdot z \left(1 - \frac{a^2}{3 \cdot 4} z^3 + \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} z^6 - \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} z^9 + \right. \\ \left. + \frac{a^8}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} z^{12} - \dots \right)$$

und daraus

$$y' = c_0 \cdot a^2 z^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{a^2}{5 \cdot 6} z^3 - \frac{a^4}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8} z^6 + \frac{a^6}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11} z^9 - \dots \right) \\ + c_1 \left(1 - \frac{a^2}{3} z^3 + \frac{a^4}{3 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \frac{a^6}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} z^9 + \right. \\ \left. + \frac{a^8}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12} z^{12} - \dots \right).$$

Geht man in diese Gleichungen mit den Randwerten ein und setzt die Determinante der c_0 und c_1 gleich Null, so bekommt man die Knickbedingung.

In einem besonderen Fall muß das Verhältnis von $g l$ und P bekannt sein. Ist $P = \gamma \cdot g l$, so sind die Randwerte:

$$y = 0, z = g l + P = g l (1 + \gamma), \text{ also } a^2 z^3 = \frac{g l^3}{E I} (1 + \gamma)^3 \equiv \kappa, \\ y' = 0, z = P, \text{ und daher } a^2 z^3 = \frac{g l^3}{E I} \gamma^3 \equiv \mu,$$

wobei wir die abkürzenden Bezeichnungen κ und μ eingeführt haben. Mit den aus den Randbedingungen folgenden Reihen

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 - \frac{\varkappa}{6} + \frac{\varkappa^2}{5 \cdot 6 \cdot 6} - \frac{\varkappa^3}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{\varkappa^4}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} - \dots \\
 A_2 &= 1 - \frac{\varkappa}{3 \cdot 4} + \frac{\varkappa^2}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{\varkappa^3}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{\varkappa^4}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} - \dots \\
 A_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{5 \cdot 6} - \frac{\mu^2}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{\mu^3}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11} - \dots \\
 A_4 &= 1 - \frac{\mu}{3} + \frac{\mu^2}{3 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{\mu^3}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{\mu^4}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12} - \dots
 \end{aligned}$$

ergibt sich die Knickgleichung

$$0 = A_1 \cdot A_4 - \mu \frac{1 + \gamma}{\gamma} A_2 \cdot A_3.$$

Für $P = 0$ muß man auf den Fall des Knickens unter Eigengewicht von Pkt. 37 zurückkommen. Nun sind $\gamma = 0$, $\mu = 0$, $\varkappa = \frac{g l^3}{EI}$ und die Knickbedingung ist $A_1 = 0$. Tatsächlich ist A_1 bis auf einen konstanten Faktor die BESSELSche Reihe $J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\varkappa}\right)$ und die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{3}{2 \cdot 4} \left(\frac{4}{9}\varkappa\right) + \frac{3^2}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10} \left(\frac{4}{9}\varkappa\right)^2 - \frac{3^3}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 16} \left(\frac{4}{9}\varkappa\right)^3 + \dots$$

besitzt für $\frac{2}{3}\sqrt{\varkappa} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g l^3}{EI}}$ den kleinsten Wurzelwert 1,8664.

Wir wollen noch den Fall $P = g l$ untersuchen. Hierbei sind $\gamma = 1$, $\varkappa = 8 \frac{g l^3}{EI}$, $\mu = \frac{\varkappa}{8}$ und aus den schnell konvergierenden Reihen der Knickbedingung entsteht die Gleichung

$$0 = 1 - 0,6667 \mu + 0,0805 \mu^2 - 0,0040 \mu^3 + 0,0001 \mu^4 - \dots$$

mit der Lösung $\mu = 1,894$. Die kritische Last ist also

$$P_k = (gl)_k = 1,894 \frac{EI}{l^2}.$$

Hätte man den Einfluß des Eigengewichtes angenähert in der in Pkt. 37 angedeuteten Weise berücksichtigt, indem man im freien Stabende die Last $gl : 3,176$ angreifen ließe, so erhielte man $P + \frac{P}{3,176} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}$ und daraus den Wert $P_k = 1,877 \frac{EI}{l^2}$, der vom genauen nur unerheblich abweicht.¹

b) Bei dem an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l mit konstantem Querschnitt verändere sich die zentrische Druckkraft für die Längeneinheit nach der Gleichung

$$p = p_0 \frac{u}{l};$$

¹ Berechnungen über die Knickung von Stäben durch Eigengewicht und Einzellasten wurden auch von K. KARAS ausgeführt: Ztschr. f. Bauwesen, Bd. 7, S. 86—92, 1925, und Bd. 10, H. 9/10, 1928.

an der Einspannstelle $u = 0$ ist $p = 0$, am freien Ende für $u = l$ ist $p = p_0$. Die resultierende Last im Querschnitt u ist, vgl. Pkt. 37,

$$P_u = p_0 \int_u^{u=l} \frac{u}{l} du = p_0 \frac{l}{2} \left(1 - \frac{u^2}{l^2} \right);$$

sie hat einen parabelförmigen Verlauf und ist am Stabende gleich Null und an der Einspannstelle gleich $P_0 = p_0 \frac{l}{2}$.

Die Differentialgleichung der Elastica

$$EI \frac{d^3 v}{du^3} + p_0 \frac{l}{2} \left(1 - \frac{u^2}{l^2} \right) \frac{dv}{du} = 0$$

unter den Randwerten $u = 0, v' = 0$ und $u = l, v'' = 0$ erhält mit den Abkürzungen

$$\frac{u}{l} = z, \quad \frac{dv}{du} = y, \quad p_0 \frac{l^3}{2} \frac{1}{EI} = a^2$$

die Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + a^2 (1 - z^2) \cdot y = 0,$$

bei den Randbedingungen $z = 0, y = 0$ und $z = 1, y' = 0$.

Für y nehmen wir wie bei (a) die Potenzreihe

$$y = \sum_k^{0, \infty} c_k \cdot z^k$$

an, und wenn wir damit in die Differentialgleichung eingehen, wird

$$\sum^{0, \infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} \cdot z^k + a^2 \sum^{0, \infty} c_k \cdot z^k - a^2 z^2 \sum^{0, \infty} c_k z^k = 0.$$

Der Koeffizientenvergleich von z^k liefert nun die Beziehung

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + a^2 c_k - a^2 c_{k-2} = 0.$$

Mit den Integrationskonstanten c_0 und c_1 sind alle c_k bestimmt und die c mit geradem Index k durch c_0 , die mit ungeradem Index durch c_1 ausgedrückt; aus $k=0$ bzw. $k=1$ werden $c_2 = -\frac{a^2}{2} c_0$ bzw. $c_3 = -\frac{a^2}{6} c_1$. Man hat also die Lösung

$$y = c_0 \left(1 + \frac{c_2}{c_0} z^2 + \frac{c_4}{c_0} z^4 + \dots \right) + c_1 \left(z + \frac{c_3}{c_1} z^3 + \frac{c_5}{c_1} z^5 + \dots \right)$$

und daher

$$y' = c_0 \left(2 \frac{c_2}{c_0} z + 4 \frac{c_4}{c_0} z^3 + \dots \right) + c_1 \left(1 + 3 \frac{c_3}{c_1} z^2 + 5 \frac{c_5}{c_1} z^4 + \dots \right).$$

Die Randbedingung $z = 0, y = 0$ ergibt $c_0 = 0$ und aus $z = 1, y' = 0$ folgt die Knickgleichung

$$0 = 1 + 3 \frac{c_3}{c_1} + 5 \frac{c_5}{c_1} + 7 \frac{c_7}{c_1} + \dots$$

Rechnet man aus der vor angeschriebenen Rekursionsformel die $c_k:c_1$ aus und setzt ein, so bekommt man die Reihe

$$0 = 1 - 0,25 a^2 + 0,011806 a^4 - 0,000230 a^6 + 0,00000243 a^8 - \dots$$

Daraus findet man $a^2 = 5,125$ und für den kritischen Wert der Last $p_0 \frac{l}{2}$ die Gleichung¹

$$P_k = 5,125 \frac{EI}{l^2}.$$

c) In analoger Weise erhält man die folgenden *Ergebnisse*.²

Bei dem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge l mit konstantem Trägheitsmoment sei die spezifische Drucklast p konstant $= p_0$, und in den Stabhälften entgegengesetzt gerichtet. Die in einem Querschnitt wirkende resultierende Kraft

$$P_u = p_0 \frac{l}{2} \left(1 - 2 \frac{u}{l}\right)$$

hat einen linearen Verlauf; sie ist in der Stabmitte $u = 0$ gleich $p_0 \frac{l}{2}$ und an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ gleich Null. Die kritische Last ist

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2}\right)_k = 31,5 \frac{EI}{l^2}.$$

Ist der Stab wie vor belastet, jedoch an den Enden eingespannt, so ist die Knicklast

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2}\right)_k = 75,8 \frac{EI}{l^2}.$$

Bei dem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge l mit konstantem Trägheitsmoment verändere sich die Drucklast für die Längeneinheit nach der Gleichung $p = p_0 \frac{2u}{l}$ entgegengesetzt in den Stabhälften; in der Stabmitte $u = 0$ ist $p = 0$, an den Enden $u = \frac{l}{2}$ ist $p = p_0$. Die resultierende Kraft

$$P_u = \int_u^{\frac{l}{2}} p \cdot du = p_0 \frac{l}{4} \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2}\right)$$

verläuft nach einer Parabel mit den Werten $p_0 \frac{l}{4}$ in der Stabmitte und Null an den Enden. Die kritische Last hat die Größe

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{4}\right)_k = 20,5 \frac{EI}{l^2}.$$

¹ Das Resultat findet sich auch bei E. F. JASINSKI: Recherches sur la flexion des pièces comprimées. Annales des ponts et chaussées, Bd. 8, S. 256. 1894.

² J. DONDORFF: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt und veränderlichem Druck, ohne und mit Querstützen. Dissertation. Aachen, 1907.

Ist der Stab wie vor belastet, aber an den Enden eingespannt, so ist die Knicklast

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{4}\right)_k = 54,0 \frac{EI}{l^2}.$$

39. Die Querschnittsträgheitsmomente und die Druckkraft ändern sich nach Potenzgesetzen.

a) Bei dem an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l verändern sich die Querschnittsträgheitsmomente nach der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - \frac{u}{l}\right)^m$$

und die zentrisch wirkende Druckkraft auf die Längeneinheit nach dem Gesetz

$$p = p_0 \left(1 - \frac{u}{l}\right)^n,$$

wobei m und n z. B. positive Zahlen sind. Die u sind vom Einspannort an gerechnet.

Die in Pkt. 37 aufgestellte Beziehung

$$\frac{dM}{du} = -\frac{p_0 l}{n+1} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^{n+1} \cdot \frac{dv}{du}$$

gibt in Verbindung mit der Gleichung

$$M = EI_0 \left(1 - \frac{u}{l}\right)^m \cdot \frac{d^2 v}{du^2}$$

die Gleichung der elastischen Linie in Differentialform

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^m \cdot \frac{d^3 v}{du^3} - \frac{m}{l} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^{m-1} \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + \\ + \frac{p_0 l}{n+1} \frac{1}{EI_0} \left(1 - \frac{u}{l}\right)^{n+1} \cdot \frac{dv}{du} = 0. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$1 - \frac{u}{l} = z, \quad \frac{dv}{dz} = y, \quad \frac{p_0 l^3}{n+1} \frac{1}{EI_0} = a^2$$

entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{m}{z} \frac{dy}{dz} + a^2 z^{n-m+1} \cdot y = 0,$$

unter den Randbedingungen $z = 1, y = 0$ (d. h. $u = 0, v' = 0$) und $z = 0, y' = 0$ (d. h. $u = l, v'' = 0$). — Das allgemeine Integral lautet

$$y = C \cdot z^{\frac{1-m}{2}} \cdot Z_r \left(2 a \nu \cdot z^{\frac{1}{2}\nu}\right), \quad r = (1-m) \nu, \quad \nu = \frac{1}{n-m+3},$$

wobei Z_r eine Abkürzung für die BESSELSchen Funktionen J_r bzw. N_r bedeutet und C für die Integrationskonstanten gesetzt ist. Es gelten hier wieder die Überlegungen von Pkt. 33. Ist r eine ganze Zahl, so gewinnt man die vollständige Lösung mit (reellen) BESSELSchen Funktionen erster und zweiter Art; ist r keine ganze Zahl, so bilden die Funktionen erster

Art ein fundamentales Lösungssystem. Ist r die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl, so wird die Differentialgleichung mit trigonometrischen Funktionen integriert. Auch der Ausnahmefall $n - m + 3$ läßt sich in geschlossener Form elementar integrieren.

Wir wollen den Rechnungsgang an einigen Beispielen illustrieren.

Wenn $m = 1, n = 1$, d. h. bei einem linearen Verlauf der Querschnittsträgheitsmomente und der spezifischen Kräfte, sind $a^2 = \frac{p_0 l^3}{2EI_0}$, $\nu = \frac{1}{3}$, $r = 0$. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung der Biegelinie ist

$$y = C_1 \cdot J_0 \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right) + C_2 \cdot N_0 \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right)$$

und daraus

$$y' = -C_1 \cdot a \sqrt{z} \cdot J_1 \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right) - C_2 \cdot a \sqrt{z} \cdot N_1 \left(\frac{2}{3} a z^{3/2} \right).$$

Der Randwert $z = 0, y' = 0$ ergibt $J_1 = 0, N_1 = \infty$, also $C_2 = 0$. Aus der Bedingung $z = 1, y = 0$ erhält man somit die Knickgleichung

$$J_0 \left(\frac{2}{3} a \right) = 0.$$

Die erste Nullstelle von J_0 ist beim Argument $\frac{2}{3} a = 2,4048$ vorhanden, vgl. das Beispiel für $m = 1$ in Pkt. 33, und demnach wird die kritische Last

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = 13,01 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Im Fall $m = 2, n = 1$ sind $a^2 = \frac{p_0 l^3}{2EI_0}$, $\nu = \frac{1}{2}$ und die Differentialgleichung der elastischen Linie ist elementar integrierbar. Mit den Beziehungen

$$J_{1/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cdot \sin u, \quad J_{-1/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cdot \cos u$$

folgt

$$y = C_1 \cdot \frac{\sin a z}{z} + C_2 \cdot \frac{\cos a z}{z}$$

und somit

$$y' = C_1 \cdot \frac{a z \cdot \cos a z - \sin a z}{z^2} - C_2 \cdot \frac{a z \cdot \sin a z + \cos a z}{z^2}.$$

Aus der Randbedingung $z = 0, y' = 0$ wird nach Ausrechnen der unbestimmten Formen die Konstante $C_2 = 0$ und aus $z = 1, y = 0$ wird $\sin a = 0$ und $a = \pi$. Daher ist die Knicklast

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = \pi^2 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Für den Ausnahmefall $n - m + 3 = 0$ betrachten wir etwa $m = 3, n = 0$. Dann ist die Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{a^2}{z^2} y = 0, \quad a^2 = \frac{p_0 l^3}{EI_0};$$

ihre Lösung ist

$$y = C_1 \cdot \frac{1}{z} \cdot \sin(k \lg z) + C_2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \cos(k \lg z), \quad k^2 = a^2 - 1$$

und weiter

$$y' = C_1 \left[\frac{k}{z^2} \cdot \cos(k \lg z) - \frac{1}{z^2} \cdot \sin(k \lg z) \right] + \\ + C_2 \left[-\frac{k}{z^2} \cdot \sin(k \lg z) - \frac{1}{z^2} \cdot \cos(k \lg z) \right].$$

Die Bedingung $z = 1$, $y = 0$ liefert $C_2 = 0$; die Bedingung $z = 0$, $y' = 0$ wird nur für $k = 0$ erfüllt, d. h. für $a^2 = 1$. Die kritische Last ist mithin

$$P_k = (p_0 l)_k = \frac{EI_0}{l^2}.$$

In analoger Weise bekommt man z. B. für den Ausnahmefall $m = 4$, $n = 1$ die Gleichung der Elastica

$$y = C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{z^3}} \cdot \sin(k \lg z) + C_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{z^3}} \cdot \cos(k \lg z), \quad k^2 = \frac{p_0 l^3}{2EI_0} - \frac{9}{4}$$

und die Knicklast

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = 2,25 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Der kritische Wert der Last $P = \int_0^l p \cdot du$ kann also, wie bei früheren Aufgaben, in der Form

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}$$

dargestellt werden. Die folgende Tabelle gibt die Werte α für einige Exponenten m und n an.¹

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 0$	7,84	5,78	3,67	1,0	
1	16,1	13,0	9,87	6,59	2,25
2	27,3	23,1	18,9	14,7	10,2
3	41,3	36,1	30,9	25,7	20,2
4		52,1	45,8	39,5	33,0

b) Man kann so wie vor oder durch Integration mit unmittelbaren Reihenentwicklungen die nachstehenden *Resultate* erhalten.²

Ändern sich bei dem gelenkig gelagerten Stab von der Länge l die Trägheitsmomente symmetrisch zur Stabmitte nach der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - 2 \frac{u}{l} \right)$$

und bei einer symmetrisch angeordneten spezifischen Drucklast p_0 die resultierenden Druckkräfte nach der linearen Gleichung

$$P_u = p_0 \frac{l}{2} \left(1 - 2 \frac{u}{l} \right).$$

¹ A. N. DINNIK, 1915; siehe S. TIMOSHENKO: Stabilitätsprobleme der Elastizität. Handb. d. Physikal. u. Techn. Mechanik. 1929. Bd. IV, S. 101.

² Siehe J. DONDORFF, a. a. O.

so sind in der Stabmitte $u = 0$, $I = I_0$, $P_u = p_0 \frac{l}{2}$ und an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$, $I = 0$, $P_u = 0$. Die kritische Last ist

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = 23,1 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Ändern sich bei dem gelenkig gelagerten Stab von der Länge l die Trägheitsmomente nach der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2} \right),$$

die Druckkräfte für die Längeneinheit symmetrisch nach der Formel $p = p_0 \frac{2u}{l}$, also die resultierende Druckkraft nach der Gleichung

$$P_u = p_0 \frac{l}{4} \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2} \right),$$

so sind für die Stabmitte $u = 0$, $I = I_0$, $P_u = p_0 \frac{l}{4}$ und für die Stabenden $u = \frac{l}{2}$, $I = 0$, $P_u = 0$. Die Knicklast ist

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{4} \right)_k = 18,5 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Eine Einspannung der Enden ist zufolge der dort verschwindenden Trägheitsmomente in beiden Fällen nicht realisierbar.

40. Schlußbetrachtung.

Sind die Querschnittsträgheitsmomente und Kräfte nach bekannten Gesetzen veränderlich, so kann es mitunter zweckmäßig sein, von der Differentialgleichung zur Differenzgleichung überzugehen und die Berechnung mit sukzessiven Approximationen durchzuführen.¹

a) Bei dem an den Enden gelenkig gelagerten Stab mit veränderlichem Querschnitt und konstanter Kraftwirkung ist das Problem durch die Differentialgleichung

$$EI(u) \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + P \cdot v = 0$$

gegeben, unter den Randbedingungen $v_0 = v_l = 0$. Wir teilen die Stablänge l in $\varkappa + 1$ gleiche Teile $\xi = \frac{l}{\varkappa + 1}$ und schreiben mit der Abkürzung

$$a^2 = \frac{P}{EI} = \frac{P}{EI_0} \frac{I_0}{I} = a_0^2 \frac{I_0}{I}$$

an Stelle der Differentialbeziehung die Differenzgleichung

$$\frac{1}{\xi^2} (v_{\iota-1} - 2v_\iota + v_{\iota+1}) + a_\iota^2 v_\iota = 0, \text{ wo } \iota = 1, 2, \dots, \varkappa$$

¹ Vgl. das Verfahren von H. HENCKY: Über die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette. Der Eisenbau, 7. Jahrg., S. 437—452. 1920. — Siehe auch Abschnitt 6, wo wir Stäbe mit stufenweise veränderlichen Querschnitten oder Kräften berechnen.

probieren $a^2 l^2 = \frac{P l^2}{EI} = 9,5$; dann ist $2 - a^2 \xi^2 = 1,62$ und mit $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ ergeben sich der Reihe nach

$$v_2 = 1,62, \quad v_3 = 1,6244, \quad v_4 = 1,0115, \quad v_5 = 0,0143;$$

anstatt $v_5 = 0$ folgt also ein zu großer Wert. Setzen wir $a^2 l^2 = 9,65$, so ist $2 - a^2 \xi^2 = 1,614$ und mit $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ sind weiter

$$v_2 = 1,614, \quad v_3 = 1,6050, \quad v_4 = 0,9765, \quad v_5 = -0,0038;$$

somit entsteht für v_5 ein zu kleiner Wert. Die Interpolation liefert die Knicklast für die angenommene Felderteilung.

Verlaufen die Trägheitsmomente bei dem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge l , der durch die Kraft P gedrückt ist, linear und symmetrisch nach der Formel

$$I = I_0 \left(1 - \frac{2u}{l} \right),$$

so ist in der Stabmitte $u = 0$, $I = I_0$ und an den Stabenden $I = 0$. Für $\kappa = 9$ sind $\xi = \frac{l}{10}$ und bei felderweiser Abstufung

$$a_1^2 = 5 a_0^2, \quad a_2^2 = \frac{5}{2} a_0^2, \quad a_3^2 = \frac{5}{3} a_0^2, \quad a_4^2 = \frac{5}{4} a_0^2, \quad a_5^2 = a_0^2 = \frac{P}{EI_0}.$$

Wegen der Symmetrie muß nun $v_6 = v_4$ sein. Mit $a_0^2 l^2 = 5,82$ erhalten wir aus der Rekursionsformel (K) bei $v_0 = 0$ und $v_1 = 1$, unter fortschreitender Berechnung der v -Werte, die Differenz $v_6 - v_4 = 0,0027$; für $a_0^2 l^2 = 5,84$ wird $v_6 - v_4 = -0,0022$. Die Interpolation ergibt $a_0 l^2 = 5,833$ und daher die Knicklast

$$P_k = 5,83 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Nach Pkt. 33 ist der genaue Wert $P_k = 4 \cdot 1,446 \frac{EI_0}{l^2} = 5,78 \frac{EI_0}{l^2}$. Für $\kappa = 3$ bzw. 5 erhalte man anstatt 5,78 den Koeffizienten 6,11 bzw. 5,92. Man erkennt, daß man die Teilung so weit treiben muß, bis sich aufeinanderfolgende Knickwerte praktisch nicht unterscheiden.

b) Wirkt auf den Stab mit konstantem Querschnitt von der Länge l die symmetrisch verteilte Druckkraft $p = p_0 \left(1 - \frac{2u}{l} \right)^n$ auf die Längeneinheit, wobei die u von der Stabmitte an gerechnet sind, so lautet die Differentialgleichung der Elastica, vgl. Pkt. 37

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + a^2 z^{n+1} \cdot y = 0, \quad z = 1 - \frac{2u}{l}, \quad y = \frac{dv}{dz}, \quad a^2 = \frac{p_0 l^3}{8(n+1)EI}.$$

Mit Berücksichtigung der Symmetrie untersuchen wir nur eine Stabhälfte und teilen $\frac{l}{2}$, d. h. die zugehörige Größe z in $\kappa + 1$ gleiche Teile ξ und schreiben diese Gleichung in Differenzenform

$$y_{i+1} = y_i (2 - a^2 z_i^{n+1} \cdot \xi^2) - y_{i-1}.$$

Sind die Enden des Stabes gelenkig gelagert, so gelten die Randwerte $z = 1$, $y = 0$ für die Stabmitte und $z = 0$, $y' = 0$ (Biegemoment

gleich Null) am Stabende. Hierbei bedeutet $y_k' = 0$, daß $y_{k-1} = y_{k+1}$ und es läuft demnach in der angeschriebenen Rekursionsformel ι von 0, 1, 2 bis \varkappa . Für den eingespannten Stab ist $y = 0$ für $z = 0$ und $z = 1$ und ι läuft von 1 bis \varkappa .

Als Beispiel berechnen wir diesen Lastfall mit dem Exponenten $n = 0$. Bei beiderseitiger Einspannung des Stabes ergibt sich für $\varkappa = 7$, d. i. für $\xi = \frac{1}{8}$ die Knicklast

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = 74,7 \frac{EI}{l^2}$$

und für $\varkappa = 5$ der Wert $P_k = 73,2 \frac{EI}{l^2}$. Ist der Stab an den Enden gelenkig gelagert, so wird für $\varkappa = 5$

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{2} \right)_k = 31,5 \frac{EI}{l^2}.$$

Beide Werte sind in guter Übereinstimmung mit den genauen Resultaten von Pkt. 38.

Wir haben in unserer Entwicklung vorausgesetzt, daß ein unbeschränkt elastisches Verhalten des Stabes besteht. Die Knickung außerhalb der Proportionalitätsgrenze wäre entsprechend unseren früheren Darlegungen zu berücksichtigen, wobei zu beachten ist, daß der Knickmodul in den einzelnen Stabteilen verschiedene Werte besitzt.

In den nächsten Punkten geben wir weitere Näherungsverfahren für die Berechnung der Knicklast an.

§ 13. Eine Näherungsberechnung aus der Integralgleichung des Problems.

41. Die Integralgleichung des Problems.¹

Wir betrachten den geraden Stab von der Länge l mit stetig veränderlichem Querschnitt unter einem der EULERSchen Lagerungsfälle. Am Stabende greife die Kraft P an und längs des Stabes eine stetig veränderliche Druckkraft p . Im Querschnitt u wirkt somit die Kraft

$$S(u) = P + \int_u^l p(u) \cdot du = P + P_u,$$

wobei zwischen P und $\int_0^l p(u) \cdot du = P_0$ der Zusammenhang $P = \gamma \cdot P_0$ vorhanden sei.

Wir untersuchen den Zustand einer kleinen Abweichung von der geraden Gleichgewichtslage, d. h. ein geringes Überschreiten der kritischen

¹ S. TIMOSHENKO: Sur la stabilité des Systèmes Élastiques. Annales des Ponts et chaussées, Fasc. III, IV, V. 1913. Ztschr. Math. u. Physik, Bd. 58, S. 337—385. 1910. — H. REISSNER: Energiekriterium der Knick-sicherheit. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 5, S. 475—478. 1925.

Last. Bei der Verbiegung ist die zur Krümmung des Stabes verbrauchte Arbeit der elastischen (inneren) Kräfte

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(u) \cdot \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 ds$$

und mit $\frac{1}{\varrho} = v''$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(u) \cdot \left(\frac{d^2 v}{du^2}\right)^2 du.$$

Die potentielle Energie, die beim Hinabsinken der Last verlorengeht, ist gleich dem Produkt aus der Kraft in die entstehende Verschiebung des Endpunktes der Stabachse. Aus der Gleichung für das Bogendifferential $ds = du \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} \simeq du + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du$ folgt, daß sich der Endpunkt von ds um $\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{du}\right)^2$ senkt. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist also, wenn wir die Arbeit der Zusammendrückung außer acht lassen,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l S(u) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du.$$

Für die potentielle Energie des Systems erhalten wir daher den Ausdruck

$$A = V - T = \int_0^l EI(u) \cdot \left(\frac{d^2 v}{du^2}\right)^2 du - \int_0^l S(u) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du, \quad (1)$$

den wir in etwas anderer Form bereits in Pkt. 6 angeschrieben haben.

Bei dem ausgebogenen Gleichgewichtszustand ist $V > T$, während im Grenzfall des Gleichgewichtes die Bedingung $V = T$ gilt, und damit die Integralgleichung

$$\int_0^l EI(u) \cdot \left(\frac{d^2 v}{du^2}\right)^2 du - \int_0^l S(u) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du = 0. \quad (2)$$

Nimmt man für v den richtigen Wert, so bekommt man in dem Kleinstwert von P die richtige Knicklast. Die Gleichgewichtsform $v(u)$ ist aber im allgemeinen unbekannt und daher wäre die Aufgabe mathematisch so zu formulieren: eine Funktion v ist unter den durch die Stützung vorgeschriebenen Bedingungen derart zu bestimmen, daß der „Energieausdruck“ A ein Kleinstwert wird, und dann P so, daß dieser Kleinstwert gleich Null ist.

Wir können auf elementarem Wege zeigen, daß die beschriebene Lösung der Integralgleichung (1) tatsächlich identisch ist mit der Integration der früher aufgestellten Differentialgleichung. — Zur Biegelinie mit den Ordinaten $v(u)$ betrachten wir eine Variation der Biegelinie, indem wir $v(u) + \varepsilon \cdot \eta(u)$ für v setzen, wobei ε sehr klein ist. Die Variation δA der

Gl. (1) entwickeln wir nach ε , und das Nullwerden der Glieder vom ersten Grad in ε ist die Bedingung, daß $v(u)$ eine Gleichgewichtslage ist, vgl. auch Pkt. 6.

Um eine Aufgabe festzulegen, untersuchen wir den einseitig eingespannten Stab von der Länge l mit konstantem Querschnitt, der durch die Kraft P am freien Ende gedrückt ist.

Aus Gl. (1) entsteht

$$A + \delta A = EI \int_0^l (v'' + \varepsilon \cdot \eta'')^2 du - P \int_0^l (v' + \varepsilon \cdot \eta')^2 du \quad (3)$$

und mit nochmaligem Berücksichtigen der Gl. (1)

$$\delta A = \varepsilon \left[EI \int_0^l 2 v'' \eta'' du - P \int_0^l 2 v' \eta' du \right] + \varepsilon^2 [\dots].$$

Das Nullsetzen der Glieder erster Ordnung in ε soll die Gleichgewichtsbedingung liefern, d. h. der Ausdruck

$$0 = EI \int_0^l v'' \eta'' du - P \int_0^l v' \eta' du. \quad (4)$$

Eine partielle Integration ergibt für den ersten Summanden

$$\int_0^l v'' \eta'' du = [v'' \eta']_0^l - \int_0^l v''' \eta' du$$

und mit den Randbedingungen $u = 0, \eta' = 0$ und $u = l, v'' = 0$ weiter

$$\int_0^l v'' \eta'' du = - \int_0^l v''' \eta' du.$$

Die Gl. (4) lautet daher

$$0 = \int_0^l \left(v''' + \frac{P}{EI} v' \right) \eta' du.$$

Da diese Beziehung für jede beliebige Variation η gelten soll, muß also $v''' + \frac{P}{EI} v' = 0$ sein und $v'' = -\frac{P}{EI} v + C$. Die Konstante C ist durch die Bedingung bestimmt, daß am freien Stabende $v'' = 0, v = \delta$ sind, und demnach wird

$$v'' = \frac{P}{EI} (\delta - v). \quad (5)$$

Aus der gleich Null gesetzten Variation des Energieausdruckes vom Ansatz der Integralgleichung (2) folgt somit die Differentialgleichung der Biegelinie.¹

¹ Die Berechnung der Knicklast aus der Integralgleichung des Problems siehe bei F. KIESSLING: Über die Bestimmung der günstigsten Form gerader, auf Knickung beanspruchter Stäbe. Göteborgs Kungl. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhälles Handlingar, Bd. 1, Nr. 3. 1925.

42. Die Lösung nach dem Verfahren von Ritz-Timoshenko.

Wir wollen uns mit einem approximativen Lösungsverfahren beschäftigen, das bei einfachen Randbedingungen eine bequeme Bestimmung der Knicklast ermöglicht. In der Technischen Literatur wird der Rechnungsweg, den wir jetzt einschlagen, auch als „Energimethode“ bezeichnet. Auf die mathematischen Grundlagen des Problems gehen wir nicht näher ein und benützen nur die Ergebnisse der Theorie.

S. TIMOSHENKO approximiert $v(u)$ in Anwendung der Methode von WALTHER RITZ durch eine Reihe

$$v(u) = c_1 \cdot \varphi_1(u) + c_2 \cdot \varphi_2(u) + c_3 \cdot \varphi_3(u) + \dots,$$

wobei die Funktionen $\varphi(u)$ so gewählt werden, daß die Reihe konvergiert, daß sie den Randbedingungen genügen und daß von vornherein eine gewisse Möglichkeit für diese Gleichgewichtslage zu erwarten ist.¹ Die c sind unbekannte Parameter, die man so bestimmt, daß P in der Energiegleichung $V - T = 0$ von Pkt. 41 einen Kleinstwert erreicht. Die Genauigkeit der Annäherung wird größer, wenn man die Zahl der Parameter erhöht. Setzt man das richtige $v(u)$ ein, so erhält man den genauen Wert von P . Bei einer angenäherten Funktion $v(u)$ ist $V - T > 0$ und man bekommt einen zu großen Wert von P .

Mit der angenommenen Gleichung $v(u)$ schreibt man also die Ausdrücke V und T als Funktion der Koeffizienten c

$$V = v(c_1, c_2, c_3, \dots), \quad T = P \cdot t(c_1, c_2, c_3, \dots)$$

und daraus die Last P

$$P = \frac{v(c_1, c_2, c_3, \dots)}{t(c_1, c_2, c_3, \dots)}.$$

Nun soll die Minimumsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial c_r} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial v}{\partial c_r} t - \frac{\partial t}{\partial c_r} v = 0$$

gelten, und daher besteht bei n Beiwerten c ein System von n in c linearen Gleichungen. Sind die c gefunden, so ist die Knicklast berechenbar.

Wenn man in der Gleichung für P durch einen Wert c , z. B. durch c_1 dividiert, also $\frac{c_2}{c_1} = \lambda_1, \frac{c_3}{c_1} = \lambda_2, \dots$ setzt, so sind anstatt der n Parameter c nur $n - 1$ Parameter λ zu ermitteln.

Zuerst betrachten wir den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab von der Länge l . Die Biegelinie des Stabes mit konstantem Querschnitt ist in erster Näherung eine Sinuslinie, und daher liegt es nahe, für $v(u)$ die Reihe

$$v = a_1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} u\right) + a_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2l} u\right) + a_3 \left(1 - \cos \frac{5\pi}{2l} u\right) + \dots$$

einzuführen. Sie entspricht den Randbedingungen $u = 0, v = 0, v' = 0$ an der Einspannstelle und $u = l, v'' = 0$ am freien Ende. Da aber $v(u)$

¹ W. RITZ: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik. Crelle Journal, Bd. 135, S. 1—61. 1909.

in der Integralgleichung nicht vorkommt, sondern nur die Ableitungen $v'(u)$ und $v''(u)$, kann man ebenso

$$v = c_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2l} u + c_2 \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u + \dots$$

nehmen, und man erkennt, daß es also bei der Gleichung für v genügt, die Randwerte in den Ableitungen zu erfüllen. Man findet hier in der Regel mit zwei Parametern das Auslangen.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und überhaupt den Ansatz in $v'(u)$ machen. Die Theorie ergibt für den herangezogenen Fall, daß das Aufsuchen der Knicklast darauf hinausläuft, den kleinsten positiven Eigenwert einer Integralgleichung zu berechnen und daß die Gestalt des Kernes durch die Grenzbedingung $u = 0, v' = 0$ bestimmt ist. Man wird also bei dem Ansatz in $v'(u)$ nur der Randbedingung $u = 0, v' = 0$ zu entsprechen haben und ihn sonst beliebig, d. h. derart wählen, daß die Integrale leicht auszuwerten sind. Man darf daher z. B. auch die Gleichung

$$v'(z) = a_0 + a_1 \cdot z^\lambda + a_2 \cdot z^{2\lambda} + a_3 \cdot z^{3\lambda} + \dots, \quad z = 1 - \frac{u}{l}$$

verwenden, wobei die a Konstanten und die λ unbekannte Parameter sind, die aus der Minimumsforderung für P hervorgehen.¹ An Beispielen ist zu sehen, daß sich mit der einfachsten Form dieser Reihe

$$v'(z) = z^\lambda - 1, \quad z = 1 - \frac{u}{l}$$

die Rechnung schon mit einer großen Genauigkeit erledigen läßt.

Bei dem an den Enden gelenkig gelagerten Stab kann

$$v = c_1 \cdot \sin \frac{\pi}{l} u + c_2 \cdot \sin 2 \frac{\pi}{l} u + c_3 \cdot \sin 3 \frac{\pi}{l} u + \dots$$

geschrieben werden. Hierbei sind $v = 0, v'' = 0$ für $u = 0$ und $u = l$. Die geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{l} u$ dürfen bei einer symmetrischen Biegelinie fortfallen, da diese Glieder für $u = \frac{l}{2}$ die Werte $v = 0, v' \neq 0$ ergeben. — Sofern eine Symmetrie zur Stabmitte vorliegt, wird man auch von dem früheren Ansatz in $v'(z)$ ausgehen und die u von der Stabmitte an rechnen.

Um einfache Integrationen zu erhalten, pflegt man auch Potenzreihen zu benutzen.² Man setzt zunächst $v = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + \dots$ und bestimmt die a in Hinblick auf die vorgegebenen Randbedingungen. Sind z. B. r Randwerte zu erfüllen, so bleiben bei einem Ansatz mit n Werten a noch $n - r$ Parameter übrig, die der Minimumsbedingung für P gehorchen müssen. — Für den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende freien Stab unter den Randwerten $u = 0, v = 0, v' = 0$ an der Einspannstelle und $u = l, v'' = 0, v''' = 0$ am freien Ende erhält man

$$v = c_1 \cdot (6l^2 u^2 - 4lu^3 + u^4) + c_2 \cdot (10l^2 u^3 - 10lu^4 + 3u^5) + \dots$$

¹ F. KIESSLING: A. a. O. Ferner: Eine Methode zur approximativen Berechnung einseitig eingespannter Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 10, S. 594—599. 1930.

² Vgl. A. u. O. FÜPPL: Drang und Zwang. 1920. Bd. 2, S. 327f.

Bei dem an den Enden gelenkig gelagerten Stab mit den Randbedingungen $v = 0$, $v'' = 0$ für $u = 0$ und $u = l$, gilt analog

$$v = c_1 \cdot (l^3 u - 2 l u^3 + u^4) + c_2 \cdot (4 l^2 u^3 - 7 l u^4 + 3 u^5) + \dots$$

Auch hier gewinnt man mit zwei Gliedern der Reihe ziemlich genaue Resultate, die aber mit einem großen Rechenaufwand erkauft werden müssen.

43. Beispiele.

a) Beim einseitig eingespannten Stab von der Länge l , der durch die Last P zentrisch gedrückt ist, folge der Verlauf der Querschnittsträgheitsmomente dem Gesetz

$$I = I_0 \left(1 - \frac{I_0 - I_1}{I_0} \cdot \frac{u}{l} \right) = I_0 \left(1 - k \frac{u}{l} \right).$$

I_0 ist das Trägheitsmoment an der Einspannstelle $u = 0$, I_1 am freien Ende $u = l$.

Dann lautet die Integralgleichung für P , die aus der Gleichsetzung der Arbeitswerte der inneren und äußeren Kräfte entsteht

$$P \int_0^l \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du = EI_0 \int_0^l \left(1 - \frac{k}{l} u \right) \left(\frac{d^2 v}{du^2} \right)^2 du.$$

Für $v(u)$ nehmen wir die trigonometrische Reihe

$$v = c_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2l} u + c_2 \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u + c_3 \cdot \cos \frac{5\pi}{2l} u + \dots,$$

die den Randwert $u = 0$, $v' = 0$ erfüllt. Bei Beschränkung auf die ersten zwei Glieder der Reihe gewinnt man mit $c_2 : c_1 = \lambda$ die Gleichung

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI_0}{l^2} \cdot \frac{\int_0^l \left(1 - \frac{k}{l} u \right) \left(\cos \frac{\pi}{2l} u + 9\lambda \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u \right)^2 du}{\int_0^l \left(\sin \frac{\pi}{2l} u + 3\lambda \cdot \sin \frac{3\pi}{2l} u \right)^2 du}.$$

Die Ausrechnung der auftretenden Integrale ergibt:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{2l} u \cdot du = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{2l} u \cdot du = \int_0^l \sin^2 \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = \int_0^l \cos^2 \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi}{2l} u \cdot \sin \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = \int_0^l \cos \frac{\pi}{2l} u \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = 0,$$

$$\int_0^l u \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2l} u \cdot du = l^2 \frac{\pi^2 - 4}{4\pi^2}, \quad \int_0^l u \cdot \cos \frac{\pi}{2l} u \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = -\frac{l^2}{\pi^2},$$

$$\int_0^l u \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = l^2 \frac{9\pi^2 - 4}{36\pi^2}.$$

Daher ist

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{E I_0}{l^2} \cdot \frac{1 - 0,2974 k + 3,6476 k \cdot \lambda + (81 - 38,6762 k) \lambda^2}{1 + 9 \lambda^2} \quad (\text{a})$$

und das Aufsuchen des Kleinstwertes von P liefert für den Parameter λ die Gleichung

$$32,828 k \cdot \lambda^2 - (144 - 72 k) \lambda - 3,648 k = 0 \quad (\text{b})$$

Bei bekannten k -Werten erhält man aus Gl. (b) den Wert λ und damit aus Gl. (a) die Knicklast in der Form

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2}.$$

So sind für $k=0$, $\lambda=0$, $\alpha = \frac{\pi^2}{4} = 2,467$; $k=0,5$, $\lambda = -0,01685$, $\alpha = 2,063$; $k=1,0$, $\lambda = -0,04954$, $\alpha = 1,510$.

Bei der genauen Berechnung in Pkt. 33 hatten wir für $k=1,0$ den Koeffizienten $\alpha = 1,446$ gefunden, der um zirka 4,5% kleiner ist als der Näherungswert. Verwendet man hingegen nur das erste Glied der Reihe, d. h. setzt man $\lambda = 0$, so bekommt man Werte, die von den exakten noch wesentlich abweichen.

Wir können das Ergebnis in Annäherung durch die lineare Gleichung $\alpha = 2,470 - 0,960 k$ ausdrücken, oder nach Einführen von k durch die Beziehung

$$\alpha = 1,510 + 0,960 \frac{I_1}{I_0}.$$

b) Besteht für einen an den Enden gelenkig gelagerten Stab von der Länge l ein linearer Verlauf der Querschnittsträgheitsmomente mit den Werten I_0 in der Stabmitte und I_1 an den Enden, so kann die Knicklast durch die Gleichung

$$P_k = \left(6,040 + 3,840 \frac{I_1}{I_0} \right) \frac{E I_0}{l^2} = \alpha \frac{E I_0}{l^2}$$

wiedergegeben werden. Hierbei haben wir in der unter a) angeschriebenen Formel $\frac{l}{2}$ statt l gesetzt. Dem Faktor α dieser Gleichung stellen wir für einige Verhältnisse $I_1:I_0$ die genauen Resultate α' von Pkt. 34 gegenüber.

$I_1:I_0 = 0,1$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\alpha = 6,42$	6,81	7,58	8,34	9,11	9,88
$\alpha' = 6,48$	7,01	7,87	8,61	9,27	π^2 .

c) Beim einseitig eingespannten Stab von der Länge l , der im freien Ende durch die Last P zentrisch gedrückt wird, verändern sich die Querschnittsträgheitsmomente nach dem Gesetz $I = I_0 \left(\frac{l-u}{l} \right)^m$.

In die Integralgleichung für P

$$P \int_0^l \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du = EI_0 \int_0^l \left(1 - \frac{u}{l} \right)^m \left(\frac{d^2v}{du^2} \right)^2 du$$

setzen wir

$$v'(z) = z^\lambda - 1, \quad z = 1 - \frac{u}{l},$$

also $\frac{dv}{du} = -\frac{1}{l} \frac{dv}{dz}$, $\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2v}{dz^2}$, wobei für die Einspannstelle $u = 0$ der Randwert $v' = 0$ erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$P \int_{z=0}^1 \frac{1}{l^2} (z^{2\lambda} - 2z^\lambda + 1) dz = EI_0 \int_{z=0}^1 \frac{\lambda^2}{l^4} z^m \cdot z^{2\lambda-2} \cdot dz.$$

Die Integration führt zu der Beziehung

$$\frac{P l^2}{EI_0} = \frac{2\lambda^2 + 3\lambda + 1}{2(2\lambda + m - 1)}, \quad (a)$$

in der λ so aufzusuchen ist, daß P ein Minimum wird. Daher muß λ der Gleichung

$$\lambda = \frac{1-m}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - 5m + 6} \quad (b)$$

genügen. Für ein bekanntes m berechnen wir aus (b) den Parameter λ und dann aus Gl. (a) die Knicklast

$$P_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2}.$$

Die folgende Aufstellung gibt den Koeffizienten α für einige Werte m ; die Resultate stimmen mit den genauen von Pkt. 33 sehr gut überein.

$m = 0,$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\lambda = 1,725$	1,218	0,707	— 0,5	— 1,0	— 0,793
$\alpha = 2,47$	1,97	1,46	0,25	0	0

d) Der einseitig eingespannte Stab von der Länge l stehe unter der Wirkung des Eigengewichtes und einer am freien Ende angreifenden zentrischen Druckkraft.

Die Arbeit der inneren Kräfte ist wie bei den vorhergehenden Beispielen

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2v}{du^2} \right)^2 du$$

und die äußere Kraft P und das Eigengewicht g auf die Längeneinheit liefern den Arbeitswert

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du + \frac{1}{2} \int_0^l g du \int_0^u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du.$$

Mit einer partiellen Integration für den zweiten Summanden von T

$$\int_0^l du \int_0^u \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du = l \int_0^l \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du - \int_0^l u \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du$$

erhält man

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du + \frac{g}{2} \int_0^l (l-u) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 du.$$

Die Bedingung $V = T$ ergibt die Integralgleichung für P . Für $v(u)$ nehmen wir wie im Beispiel a) den Ansatz

$$v = c \left(\cos \frac{\pi}{2l} u + \lambda \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} u \right),$$

der an der Einspannstelle $u = 0$ der Bedingung $v' = 0$ genügt. Zu den unter (a) angeschriebenen Integralen fügen wir noch hinzu:

$$\int_0^l u \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2l} u \cdot du = l^2 \frac{\pi^2 + 4}{4\pi^2}, \quad \int_0^l u \cdot \sin \frac{\pi}{2l} u \cdot \sin \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = -\frac{l^2}{\pi^2},$$

$$\int_0^l u \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{2l} u \cdot du = l^2 \frac{9\pi^2 + 4}{36\pi^2}$$

und wir bekommen nach Ausrechnen

$$V = c^2 EI \frac{\pi^4}{64l^3} (1 + 81\lambda^2),$$

$$T = c^2 P \frac{\pi^2}{16l} (1 + 9\lambda^2) + c^2 g \frac{\pi^2}{8} (0,1487 + 0,6079\lambda + 2,1487\lambda^2).$$

Wenn zwischen P und gl das feste Verhältnis $P = \gamma \cdot gl$ vorhanden ist, entsteht aus der Gleichung $V = T$

$$P = \frac{\pi^2}{8} \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{1 + 81\lambda^2}{0,5 + 4,5\lambda^2 + \frac{1}{\gamma} (0,1487 + 0,6079\lambda + 2,1487\lambda^2)} \quad (a)$$

und weiter mit der Berechnung des Minimums von P die Beziehung für λ

$$\lambda^2 + (0,4019 + 1,4621\gamma)\lambda - 0,01235 = 0. \quad (b)$$

Ohne Berücksichtigen des Eigengewichtes, d. i. bei $g = 0$, also $\gamma = \infty$, $\lambda = 0$, erhält man die EULERSche Knickformel.

Für $P = 0$, d. h. nur unter Wirkung des Eigengewichtes sind $\gamma = 0$, $\lambda = 0,0287$ und aus der Gleichung $V = T$ wird $P_k = (gl)_k = 7,84 \frac{EI}{l^2}$.

Für $P = gl$ sind $\gamma = 1$, $\lambda = 0,0066$ und damit $P_k = 1,90 \frac{EI}{l^2}$. Beide Werte stimmen nahezu mit den exakten Ergebnissen überein.

e) Ist der Stab vom Beispiel d) an den Enden gelenkig gelagert, so nehmen wir für die unsymmetrische Biegelinie die Gleichung

$$v = c \left(\sin \frac{\pi}{l} u + \lambda \cdot \sin 2 \frac{\pi}{l} u \right)$$

an, die den Randbedingungen $v = 0$, $v' = 0$ für $u = 0$ und $u = l$ Genüge leistet. Mit einer analogen Rechnung wie vor werden die Werte V und T

$$V = c^2 EI \frac{\pi^4}{4l^3} (1 + 16 \lambda^2),$$

$$T = c^2 P \frac{\pi^2}{4l} (1 + 4 \lambda^2) + c^2 g \frac{\pi^2}{8} (1 + 1,8012 \lambda + 4 \lambda^2).$$

Aus der Gleichung $V = T$ erhält man mit $P = \gamma \cdot gl$

$$P = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{1 + 16 \lambda^2}{1 + 4 \lambda^2 + \frac{1}{\gamma} (0,5 + 0,9006 \lambda + 2 \lambda^2)} \quad (a)$$

und die Berechnung des Kleinstwertes von P liefert die Gleichung für λ

$$\lambda^2 + (0,8327 + 1,6655 \gamma) \lambda - 0,0625 = 0. \quad (b)$$

Im Falle $g = 0$ sind $\gamma = \infty$, $\lambda = 0$, und es folgt die EULERSche Formel für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab.

Für $P = 0$ sind $\gamma = 0$, $\lambda = 0,0693$, und die Bedingung $V = T$ ergibt

$$P_k = (gl)_k = 1,88 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2} = 18,56 \frac{EI}{l^2}.$$

Man erhält diesen Wert auch, wenn der gewichtslos gedachte Stab durch die Last von rund $gl: 1,90$ am Ende beansprucht ist. Für $P = gl$ sind $\gamma = 1$, $\lambda = 0,02477$ und $P_k = 6,95 \frac{EI}{l^2}$. Stellte man auch hier das Eigengewicht in der beschriebenen Weise in Rechnung, so bekäme man aus $P + \frac{P}{1,9} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ den Wert $P_k = 6,47 \frac{EI}{l^2}$. Wir haben das Ergebnis: Bei der Knickberechnung einer vertikal stehenden, an den Enden gelenkig gelagerten Säule von konstantem Querschnitt, die durch die Last P gedrückt ist, können wir das Eigengewicht G angenähert so berücksichtigen, daß wir den Teil $G:1,9$ der Last P zuschlagen.

Das Näherungsverfahren von RITZ-TIMOSHENKO haben wir hier zur Bestimmung der Knicklast von Stäben mit stetig veränderlichem Querschnitt und stetig veränderlicher Kraftwirkung bei einer EULERSchen Lagerungsart herangezogen. Wir merken an, daß sich die Energiemethode auch bei anderen Stabilitätsproblemen zur angenäherten Berechnung mit Vorteil benützen läßt. Darauf werden wir fallweise zurückkommen.

Zum Schluß bringen wir noch in Erinnerung, daß bei allen Rechnungen vorausgesetzt war, daß die Spannung in keinem Stabquerschnitt größer als die Proportionalitätsgrenze ist. Andernfalls hätte man für jeden Querschnitt den der Spannung entsprechenden Knickmodul einzuführen. Sollte es dann praktisch nicht möglich sein, mit einem Mittelwert zu rechnen, so wird man den Stab in Felder mit konstantem Knickmodul zerlegen, und damit ergeben sich Aufgaben unseres sechsten Abschnittes.

§ 14. Das Verfahren der Näherungsfolgen.

44. Grundlagen des Verfahrens.

Die kritische Last von axial gedrückten Stäben läßt sich auch mit einem Näherungsverfahren bestimmen, das in enger Verbindung zu der in Pkt. 40 benützten Methode der sukzessiven Approximationen steht.

Nach einem bekannten Satz von MOHR ist die Biegelinie eines Stabes das Seilpolygon für die Belastung mit der (verzerrten) Momentenfläche. Die Differentialgleichung der Seillinie für eine Belastungsfläche mit den Ordinaten M ist nämlich bei der Polweite H des Kräftepolygons

$$H \frac{d^2 v}{du^2} = M$$

und die Differentialgleichung der zur Momentenlinie M gehörenden Biegelinie ist

$$EI(u) \cdot \frac{d^2 v}{du^2} = M.$$

Daher ist die Biegelinie eine Seillinie, die für die Belastungsfläche $M:I(u)$ mit der Polweite E konstruiert wird. Mit Hilfe dieser Beziehung kann die Biegelinie aber auch rechnerisch ermittelt werden.

Den Zusammenhang zwischen Momentenbelastung und Biegelinie verwenden wir jetzt, um die Knicklast eines Stabes mit Näherungsfolgen zu finden. Wir untersuchen nach dieser Methode Stäbe mit stetig veränderlichem Querschnitt oder mit stetig veränderlicher Kraftwirkung. Das graphische Verfahren rührt von L. VIANELLO her, der analytische Weg wurde erstmals von F. ENGESSER eingeschlagen.¹

Zuerst betrachten wir den Fall des veränderlichen Querschnittes. Man nimmt eine mit den Randbedingungen verträgliche Linie $M:I(u)$ an und zeichnet (oder rechnet) die Biegelinie mit den Ordinaten v . Im Knickfall (bei dem eine Ausbiegung überhaupt erst stattfindet) müssen, zufolge der Gleichung $M = P \cdot v$, die Linien M und v affin sein. Ist also das Verhältnis von M und v an jeder Stelle des Stabes dasselbe, so war die gewählte Momentenkurve richtig und der Quotient $M:v$ ist die Knicklast. Sind jedoch Unterschiede vorhanden, so muß der Versuch mit einer neuen Belastungsfläche wiederholt werden.

L. VIANELLO und F. ENGESSER geben an, daß man den zweiten Versuch so vornehmen soll, daß man die aus dem ersten Versuch gefundene Seillinie als Grundlage für den zweiten auffaßt. Wenn man in dieser Weise fortschreitet, erhält man allmählich eine Übereinstimmung (Affinität) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Seillinien, und der Quotient der entsprechenden Ordinaten ist die Knicklast.

Bei veränderlichen Kräften, die nach einem bekannten Gesetz verlaufen, liegt die Sache etwas anders. Man geht am besten von einer

¹ L. VIANELLO: Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 42, S. 1436—1443. 1898. — F. ENGESSER: Über die Knickfestigkeit von Stäben veränderlichen Trägheitsmomentes. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 61, S. 544—548. 1909. Siehe auch Jahrg. 45, S. 506—508. 1893.

willkürlichen v -Linie aus, rechnet hierzu eine M -Linie, konstruiert aus dieser eine v -Linie, rechnet wieder eine M -Linie usw. Eine Affinität zwischen der M - und v -Linie kann hier nicht bestehen, der Vorgang ist vielmehr abgeschlossen, wenn zwei aufeinanderfolgende Seillinien v_n und v_{n+1} sich nicht mehr merklich unterscheiden. Dann ist das aus der Linie v_n berechnete Moment $M = P \cdot v_n$ bereits richtig, somit ist die daraus konstruierte Biegelinie v_{n+1} richtig, also $M = P_k \cdot v_{n+1}$, und die Knicklast P_k hat den Wert $P \cdot v_n : v_{n+1}$.

Die später durchgeführten Beispiele werden zeigen, daß die mitgeteilte Vorschrift tatsächlich zum Ziele führt, aber wir wollen die Konvergenz des Verfahrens an einem fundamentalen EULERSchen Fall exakt nachweisen.¹

Das Problem sei durch die Differentialgleichung

$$v'' = \lambda \cdot v$$

bestimmt, unter den vorgegebenen Randbedingungen $v(0) = v(l) = 0$. War die mit diesen Grenzwerten verträgliche Anfangslinie mit den Ordinaten v_1 zutreffend, so ist das Resultat des Verfahrens v_2 gleich $v_1 : \lambda$, daher $\lambda = v_1 : v_2$.

Wie ändert sich nun v_2 , wenn für v_1 eine von der richtigen Linie abweichende Kurve angenommen wird? Wir entwickeln die Funktion v_1 in eine nach den normierten Eigenfunktionen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ fortschreitende Reihe

$$v_1 = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \dots$$

mit den Koeffizienten c . Die zu den Funktionen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ gehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, so daß $\eta_v'' = \lambda_v \cdot \eta_v$. Jetzt wenden wir das vor beschriebene Iterationsverfahren auf diese Reihe an und erhalten

$$v_2 = \frac{c_1}{\lambda_1} \eta_1 + \frac{c_2}{\lambda_2} \eta_2 + \frac{c_3}{\lambda_3} \eta_3 + \dots$$

und bei wiederholter Fortsetzung

$$v_{n+1} = \frac{c_1}{\lambda_1^n} \eta_1 + \frac{c_2}{\lambda_2^n} \eta_2 + \frac{c_3}{\lambda_3^n} \eta_3 + \dots$$

oder

$$v_{n+1} \cdot \lambda_1^n = c_1 \eta_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \eta_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^n \eta_3 + \dots$$

Da die $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ bedeutend größer als λ_1 sind, wird die Funktion $v_{n+1} \cdot \lambda_1^n$ mehr und mehr nach $c_1 \eta_1$ konvergieren, so daß aus dem Quotienten zweier aufeinanderfolgender Kurven v_n und v_{n+1} mit großer Genauigkeit der kleinste Eigenwert λ_1 ermittelt werden kann.

Eine Eigenschaft der Funktionen η ermöglicht es, λ_1 schon genügend genau aus v_1 und v_2 zu berechnen. Allgemein gilt die sog. Orthogonalitätsbedingung

¹ J. J. KOCH: Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnellaufender Wellen. Verhandl. d. 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. S. 213—218. — Siehe auch E. TREFFTZ: Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 272—275. 1923.

$$\int_0^l \eta_p \eta_q \cdot du = 0, \quad \text{wenn } p \neq q.$$

Es bestehen ja die Gleichungen $\eta_p'' = \lambda_p \cdot \eta_p$, $\eta_q'' = \lambda_q \cdot \eta_q$ mit $\eta(0) = \eta(l) = 0$ und aus $\int_0^l \eta_p'' \eta_q du$ gewinnt man unter Heranziehen dieser Ansätze mit Hilfe von partiellen Integrationen

$$\int_0^l \eta_p'' \eta_q du = \int_0^l \eta_p \eta_q'' du.$$

Somit ist weiter

$$\lambda_p \cdot \int_0^l \eta_p \eta_q du = \lambda_q \cdot \int_0^l \eta_p \eta_q du,$$

d. h. für $p \neq q$ folgt die vor angeschriebene Gleichung. Daher werden

$$\begin{aligned} \int_0^l v_1 v_2 du &= \int_0^l (c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \dots) \left(\frac{c_1}{\lambda_1} \eta_1 + \frac{c_2}{\lambda_2} \eta_2 + \frac{c_3}{\lambda_3} \eta_3 + \dots \right) du \\ &= \frac{c_1^2}{\lambda_1} \int_0^l \eta_1^2 du + \frac{c_2^2}{\lambda_2} \int_0^l \eta_2^2 du + \frac{c_3^2}{\lambda_3} \int_0^l \eta_3^2 du + \dots \\ \int_0^l v_2^2 du &= \int_0^l \left(\frac{c_1}{\lambda_1} \eta_1 + \frac{c_2}{\lambda_2} \eta_2 + \frac{c_3}{\lambda_3} \eta_3 + \dots \right)^2 du \\ &= \frac{c_1^2}{\lambda_1^2} \int_0^l \eta_1^2 du + \frac{c_2^2}{\lambda_2^2} \int_0^l \eta_2^2 du + \frac{c_3^2}{\lambda_3^2} \int_0^l \eta_3^2 du + \dots \end{aligned}$$

Sind die Eigenfunktionen derart normiert (d. h. wird ein noch verfügbarer konstanter Faktor von η_n durch die Bedingung festgelegt), daß

$\int_0^l \eta_n^2 \cdot du = 1$, wo $n = 1, 2, 3, \dots$, so ist

$$\frac{\int_0^l v_1 v_2 du}{\int_0^l v_2^2 du} = \frac{\frac{c_1^2}{\lambda_1} + \frac{c_2^2}{\lambda_2} + \dots}{\frac{c_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{c_2^2}{\lambda_2^2} + \dots} = \lambda_1 \cdot \frac{1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \dots}{1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} + \left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} + \dots}.$$

Bei einer nicht ganz ungünstigen Wahl der Kurve v_1 ist der Bruch auf der rechten Gleichungsseite wenig von Eins verschieden und mithin

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l v_1 v_2 du}{\int_0^l v_2^2 du}.$$

Eine noch größere Genauigkeit wird erzielt, wenn man mit dem Iterationsverfahren bis v_3 geht und dann ist

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l v_2 v_3 du}{\int_0^l v_3^2 du}.$$

Lassen sich nach dem beschriebenen Verfahren auch die höheren Knicklasten auffinden oder, mathematisch formuliert, ist es möglich, die höheren Eigenwerte und zugehörigen Eigenlösungen zu erhalten? Für Knickaufgaben ist die Beantwortung dieser Frage allerdings von keinem praktischen Interesse, und wir wollen dieses Problem nur kurz berühren.

Zunächst erscheint es naheliegend, von einer Kurve auszugehen, deren Entwicklung nach den Eigenfunktionen das Glied $c_1 \eta_1$ nicht umfaßt. Bei der willkürlichen Anfangskurve

$$v_1 = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \dots$$

eliminiert man den Koeffizienten c_1 mit der Gleichung

$$\int_0^l \eta_1 v_1 du \simeq c_1 \int_0^l \eta_1^2 du = c_1$$

und bildet die Linie

$$y_1 = v_1 - c_1 \eta_1.$$

Die Anwendung des früheren Iterationsverfahrens auf y_1 soll nun das gesuchte λ_2 und die Funktion η_2 liefern. Die Methode bringt aber in Wirklichkeit nicht das erwartete Ergebnis. Auch bei der numerischen Berechnung, die zur Erreichung einer größeren Genauigkeit erforderlich ist, bleibt in y_1 ein Rest von $c_1 \eta_1$ übrig, da man die Linie nur mit einer Näherung gefunden hat. Man wird daher immer wieder zum ersten Eigenwert kommen.

Hingegen könnte man die zweite Eigenlösung mit der folgenden Methode bestimmen.¹ Wir schreiben die Gleichung für v_{n+1} in der Form

$$v_{n+1} = \frac{c_1}{\lambda_1^n} \eta_1 + \frac{1}{\lambda_2^n} \left[c_2 \eta_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right)^n \eta_3 + c_4 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4} \right)^n \eta_4 + \dots \right].$$

Dann gehen wir von einer anderen Reihe aus, deren Koeffizienten an Stelle von c_1, c_2, c_3, \dots jetzt c_1', c_2', c_3', \dots sind. Die Iteration führt nun zu

$$\bar{v}_{n+1} = \frac{c_1'}{\lambda_1^n} \eta_1 + \frac{1}{\lambda_2^n} \left[c_2' \eta_2 + c_3' \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right)^n \eta_3 + c_4' \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4} \right)^n \eta_4 + \dots \right].$$

¹ R. v. MISES u. H. GEIRINGER: Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 9, S. 58f. 1929. Dort findet sich auch die Ermittlung einer beliebigen bestimmten Eigenlösung und unabhängig davon die des Eigenwertes, ohne daß vorher die Berechnung der entsprechenden Größen von niedrigerem Index vorgenommen werden muß.

Multipliziert man die erste Gleichung mit c_1' , die zweite mit c_1 und subtrahiert, so wird

$$c_1' v_{n+1} - c_1 \bar{v}_{n+1} = \frac{1}{\lambda_2^n} \left[(c_1' c_2 - c_1 c_2') \eta_2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right)^n (c_1' c_3 - c_1 c_3') \eta_3 + \dots \right].$$

Die n -ten Potenzen der Quotienten $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_4}$ usw. gehen mit wachsendem n gegen Null, und man gewinnt für η_2 die Beziehung

$$\eta_2 = \left[\frac{c_1'}{c_1' c_2 - c_1 c_2'} \cdot v_{n+1} - \frac{c_1}{c_1' c_2 - c_1 c_2'} \cdot \bar{v}_{n+1} \right] \cdot \lambda_2^n.$$

Die zweite Eigenlösung η_2 ergibt sich also bei genügend großem n als eine bekannte Kombination der n -ten Iterierten, die aus zwei beliebigen verschiedenen Ausgangslagen hervorgegangen sind. Vorausgesetzt ist nur, daß nicht zugleich $c_1' = \kappa \cdot c_1$ und $c_2' = \kappa \cdot c_2$ sind, was im allgemeinen leicht zu erreichen sein wird. Die Rechnung ist bis zu einem solchen n zu treiben, daß aus v_n, v_{n+1} und \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1} der Wert η_1 ermittelt werden kann, und sie ist so exakt vorzunehmen, daß die Differenz in der Klammer bei η_2 genau bestimmbar wird. Da noch die Orthogonalitätseigen-

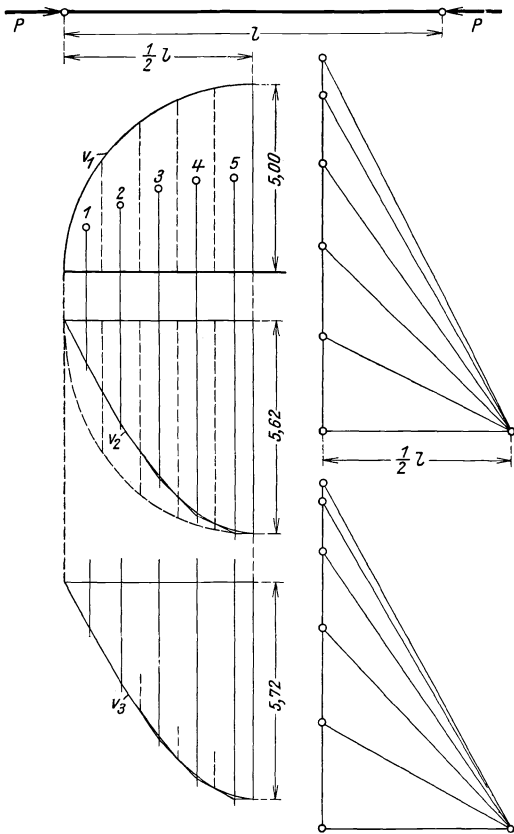


Abb. 67.

schaft $\int_0^l \eta_1 \eta_2 du = 0$ besteht, können η_2 und λ_2 berechnet werden.

45. Beispiele.

a) Wir untersuchen den an beiden Enden gelenkig gelagerten Stab mit konstantem Querschnitt, der durch die Last P zentrisch gedrückt ist.

Die Abb. 67 zeigt die Konstruktion zur Ermittlung der Knicklast, die wegen

Symmetrie nur für eine Stabhälfte durchgeführt wird. Gegenüber dem Original ist die Abbildung auf die Hälfte verkleinert und alle in der Figur abgemessenen Längen gelten in doppelter Größe. Die Stab-

länge l ist durch eine Strecke von 10 cm dargestellt, so daß 1 cm gleich ist $l:10$. Als Linie v_1 , d. h. als Momentenlinie, wird (nicht zutreffend) ein Halbkreisbogen angenommen. Die Fläche wird in zehn äquidistante Teile zerlegt und die erste Seillinie mit den Ordinaten v_2 gezeichnet. Hierbei wurden im Kräftepolygon die Kräfte, d. h. die Flächen $v_1 \cdot 1,0$ in halber Größe aufgetragen und die Polweite $E I$ gleich $l:2$ gesetzt. Die Ordinaten von v_2 bekommt man infolge der gewählten Polweite in $2 \cdot E I : l$ -facher Vergrößerung, und daher ist unter Beachten der Maßstäbe der Längen und Kräfte 1 cm der v_2 -Linie gleich $\frac{l}{10} \frac{l}{2 E I} \cdot 2 = \frac{l^2}{10 E I}$. Die größte Ordinate von v_1 war mit 5 cm festgelegt, bei v_2 wird sie mit 5,62 cm abgemessen. Neben die v_2 -Linie ist strichliert eine Kurve eingetragen, die die Ordinaten von v_1 im Verhältnis 5,62:5 verzerrt. Man sieht, daß zwischen den Linien v_1 und v_2 keine Affinität besteht. Der Quotient z. B. der größten Ordinaten würde auch den sehr unrichtigen Wert

$$P_k = \frac{5}{5,62} \cdot 10 \frac{E I}{l^2} = 8,90 \frac{E I}{l^2}$$

für die Knicklast ergeben. — Man konstruiert jetzt in der gleichen Weise, mit denselben Maßstäben wie vor, aus der v_2 -Linie die v_3 -Linie. Die größte Ordinate von v_3 ist 5,72 cm, und es zeigt sich, daß alle Ordinaten von v_2 und v_3 der Genauigkeit der Zeichnung entsprechend zueinander proportional sind. Somit erhält man die kritische Last

$$P_k = \frac{5,62}{5,72} \cdot 10 \frac{E I}{l^2} = 9,82 \frac{E I}{l^2}$$

Verwendet man die in Pkt. 44 abgeleitete Formel, die es gestattet, aus v_1 und v_2 eine bessere Annäherung für den kleinsten Eigenwert zu finden, d. h. setzt man an Stelle von $v_2:v_1$ den Ausdruck $\Sigma v_1 v_2 : \Sigma v_2^2$, so ist die folgende Rechnung durchzuführen:

Punkt	v_1 cm	v_2 cm	$v_1 \cdot v_2$	v_2^2
1	2,37	1,20	2,84	1,44
2	3,59	2,75	9,87	7,56
3	4,34	4,15	18,01	17,22
4	4,77	5,10	24,33	26,01
5	4,98	5,59	27,84	31,25
			82,89	83,48

Die Knicklast ist damit

$$P_k = \frac{82,89}{83,48} \cdot 10 \frac{E I}{l^2} = 9,93 \frac{E I}{l^2}$$

und man bekommt bereits mit Hilfe der ersten Seillinie eine gute Annäherung.

Wir wollen unser Beispiel auch rechnerisch erledigen und die aufeinanderfolgenden Seillinien analytisch bestimmen.

Bei einer Belastungslinie mit den Ordinaten M ist die Gleichung der Biegelinie $y(u)$ nach dem Satz von MOHR

$$y = \frac{u}{l} \int_{\xi=0}^l \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} (l - \xi) d\xi - \int_{\xi=0}^u \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} (u - \xi) d\xi. \quad (1)$$

Als M -Linie der Gl. (1) nehmen wir z. B. die Parabel

$$v_1 = u(l - u)$$

an, die den Randbedingungen $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l$ genügt und in der Stabmitte den Wert $\max v_1 = \frac{l^2}{4}$ besitzt. Damit erhalten wir aus Gl. (1), wenn wir $v_1 = \xi(l - \xi)$ setzen,

$$v_2 = \frac{u}{12EI} (l^3 - 2lu^2 + u^3)$$

und für $u = \frac{l}{2}$ den Wert $\max v_2 = \frac{5}{192} \frac{l^4}{EI}$. Der Quotient der Maximalwerte von v_1 und v_2 ergibt die kritische Last

$$P_k = \frac{l^2}{4} : \frac{5}{192} \frac{l^4}{EI} = 9,6 \frac{EI}{l^2}$$

bereits in guter Übereinstimmung mit der EULERSchen Formel. Geht man weiter und rechnet aus der v_2 -Linie wie vor eine v_3 -Linie, so wird

$$v_3 = \frac{u}{360(EI)^2} (3l^5 - 5l^3u^2 + 3lu^4 - u^5)$$

und in der Stabmitte $\max v_3 = \frac{61}{23\,040} \frac{l^6}{(EI)^2}$. Somit ist die Knicklast

$$P_k = \frac{5}{192} \frac{l^4}{EI} : \frac{61}{23\,040} \frac{l^6}{(EI)^2} = 9,836 \frac{EI}{l^2},$$

mit einem Fehler von zirka 0,3%.

Es ist von Interesse, dieses Beispiel noch weiter zu untersuchen. Anstatt die Maximalwerte von v_1 und v_2 zu benutzen, verwenden wir die Gleichung

$$\int_0^l v_1 v_2 du : \int_0^l v_2^2 du.$$

(Der frühere Parameter λ ist unmittelbar gleich P_k , da die EI schon in unseren v -Werten stecken.) Die Rechnung ergibt

$$\int_0^l v_1 v_2 du = \frac{1}{12EI} \int_0^l u^2 (l - u) (l^3 - 2lu^2 + u^3) du = \frac{17}{35 \cdot 144} \frac{l^7}{EI},$$

$$\int_0^l v_2^2 du = \frac{1}{144(EI)^2} \int_0^l u^2 (l^3 - 2lu^2 + u^3)^2 du = \frac{31}{18 \cdot 35 \cdot 144} \frac{l^9}{(EI)^2}$$

und damit erhalten wir die kritische Last

$$P_k = 9,871 \frac{EI}{l^2}.$$

Die Übereinstimmung mit dem exakten Resultat ist ungefähr dieselbe wie beim Vergleich der größten Ordinaten der Seillinien v_2 , v_3 .

Wollte man den Mittelwert aller Ordinaten, d. h. die Flächeninhalte in Verbindung bringen, also z. B. $P_k = \int_0^l v_1 du : \int_0^l v_2 du$ setzen, so be-

käme man $P_k = 10 \frac{EI}{l^2}$, ein Ergebnis, das hier etwas besser ist als das aus dem Vergleich der Maximalwerte der Linien v_1 , v_2 .¹

An dieser Stelle sei noch vermerkt, daß sich auch die exakte Lösung der Differentialgleichung

$$k^2 v'' + v = f(u)$$

mit den Randbedingungen $v = 0$ für $u = 0$ und $u = l$ in einer der Gl. (1) entsprechenden Form anschreiben läßt. Wir setzen

$$k \cdot v = - \frac{\sin \frac{u}{k}}{\sin \frac{l}{k}} \int_{\xi=0}^l f(\xi) \cdot \sin \frac{l-\xi}{k} d\xi + \int_{\xi=0}^u f(\xi) \cdot \sin \frac{u-\xi}{k} d\xi, \quad (2)$$

wobei man sich von der Richtigkeit durch Eingehen in die Differentialgleichung überzeugen kann.

b) Der in Abb. 68 dargestellte, an einem Ende eingespannte Stab in Form eines Kreiskegelstumpfes ist am freien Ende durch die Kraft P belastet. Der Verlauf der Querschnittsträgheitsmomente gehorcht der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - \frac{u}{2l}\right)^4.$$

An der Einspannstelle $u = 0$ ist $I = I_0$, am freien Ende $u = l$ ist $I = \frac{1}{16} I_0$.

Wir führen in der Abbildung die graphische Bestimmung der Knicklast vor. Infolge der Verkleinerung der Originalfigur auf zwei Fünftel sind die in Zahlen abgemessenen Längen der Zeichnung mit 2,5 zu multiplizieren. — Die Stablänge l ist gleich 7,5 cm, also 1 cm gleich $l : 7,5$. Aus einer angenommenen v_1 -Linie wird die Kurve $v_1 \frac{I_0}{I}$ bestimmt (in der Abbildung in $\frac{2}{3}$ Größe aufgetragen) und für die Belastung mit $v_1 \frac{I_0}{I}$ das Seilpolygon mit den Ordinaten v_2 konstruiert. Zuzufolge der Multiplikation der $v_1 : I$ mit dem „Bezugsträgheitsmoment“ I_0 ergibt sich die Poldistanz $E I_0$ im Kräftepolygon, die gleich $1,5 \cdot l = 11,25$ cm

¹ Die Berechnung mit Flächeninhalten nimmt K. POHL vor. Näherungslösungen für besondere Fälle von Knickbelastung. Der Stahlbau (Die Bau-technik), 6. Jahrg., S. 137—143. 1933.

gesetzt ist, wodurch die Ordinaten von v_2 in einer $\frac{EI_0}{1,5 \cdot l}$ -fachen Vergrößerung erscheinen. Die Kräfte, d. h. die Flächen sind in $\frac{1}{3}$ Größe aufgetragen, und das bewirkt eine Verkleinerung der v_2 auf ein Drittel. Somit ist 1 cm von v_2 gleich $\frac{l}{7,5} \frac{1,5 \cdot l}{EI_0} \cdot 3 = \frac{3}{5} \frac{l^2}{EI_0}$. Die größte Ordinate der v_1 -Linie an der Einspannstelle ist 3 cm, der entsprechende Wert der v_2 -Linie ist 4,85 cm. Wie man aus der strichlierten Kurve sieht.

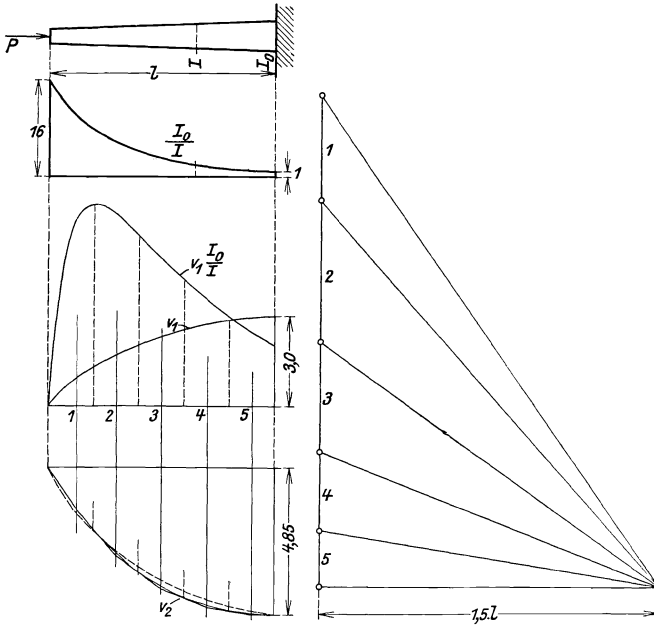


Abb. 68.

die die Ordinaten der v_1 -Linie im Verhältnis 4,85:3 verzerrt wiedergibt, besteht keine vollständige Affinität zwischen beiden Linien. Die Knicklast wäre, wenn man die größten Ordinaten zugrunde legt

$$P_k = \frac{3}{4,85} \cdot \frac{5}{3} \frac{EI_0}{l^2} = 1,03 \frac{EI_0}{l^2},$$

während die elementare Berechnung aus der Differentialgleichung der elastischen Linie den richtigen Wert $\frac{EI_0}{l^2}$ ergibt. Zu dieser guten Übereinstimmung sei hervorgehoben, daß unsere Ausgangslinie schon die zweite Linie einer nicht in die Figur übernommenen Konstruktion war. Im allgemeinen hätte man weiterzugehen, die Kurve $v_2 \frac{I_0}{I}$ zu bilden, das Seilpolygon v_3 zu zeichnen usw., oder zunächst unter Zuhilfenahme der ersten Seillinie anstatt $v_1 : v_2$ den verbesserten Wert $\Sigma v_1 v_2 : \Sigma v_2^2$ einzuführen.

c) Der an den Enden gelenkig gelagerte Stab von der Länge l ist durch die Kraft P gedrückt und die Trägheitsmomente entsprechen der Gleichung

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{u}{b}}.$$

In der Stabmitte $u = 0$ ist $I = I_0$, an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ ist $I = I_1$ und für die Konstante b gilt mithin die Bedingung $\frac{l}{b} = 2 \left(\frac{I_0}{I_1} - 1 \right)$. Um zu einer „Schlußformel“ für die Knicklast zu gelangen, wenden wir das analytische Verfahren der Näherungsfolgen an.

Wir setzen als v_1 -Linie die Parabel

$$v_1 = \frac{l^2}{4} - u^2,$$

die den Randwerten an den Enden Genüge leistet und in der Stabmitte den Wert $\frac{l^2}{4}$ hat. Für die Belastung mit $v_1 \frac{I_0}{I}$, d. h. im Querschnitt ξ mit

$$\frac{l^2}{4} - \xi^2 + \frac{1}{b} \left(\frac{l^2}{4} \xi - \xi^3 \right)$$

bestimmen wir unmittelbar das Biegemoment im Querschnitt u , d. h. den Wert $E I_0 v_2$. Das Biegemoment setzt sich zusammen aus dem Moment der Auflagerkraft und dem Moment der zwischen $u = \frac{l}{2}$ und u liegenden Last und ist

$$E I_0 v_2 = \left(\frac{l}{2} - u \right) \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_0}{I} v_1 d\xi - \int_{\xi=u}^{\frac{l}{2}} \frac{I_0}{I} v_1 (\xi - u) d\xi.$$

Die Ausrechnung ergibt hierfür

$$E I_0 v_2 = \frac{1}{192} (5 l^4 - 24 l^2 u^2 + 48 u^4) + \frac{1}{1920 b} (7 l^5 - 80 l^2 u^3 + 960 u^5),$$

und für $u = 0$ ist $E I_0 v_2 = \frac{l^4}{192} \left(5 + 0,7 \frac{l}{b} \right)$. Der Quotient der größten Ordinaten v_1 und v_2 liefert die Knicklast

$$P_k = \alpha \frac{E I_0}{l^2}, \quad \text{wo } \alpha = \frac{48}{5 + 0,7 \frac{l}{b}}.$$

Für $\frac{I_1}{I_0} = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ erhalten wir $\alpha = 4,53, 6,76, 8,09$ und $8,97$, Werte, die mit den exakten von Pkt. 34 nicht schlecht übereinstimmen. Ohne Schwierigkeit, nur mit einem größeren Rechenaufwand, lassen sich aber aus v_1 und v_2 mit der früher angeschriebenen Formel noch genauere Resultate herleiten.

d) Wir bestimmen graphisch die Knicklast des einseitig eingespannten, senkrecht stehenden Stabes mit freiem Ende, der durch sein Eigengewicht beansprucht ist, Abb. 69.

Im Original ist der Stab von der Länge l mit 7,5 cm aufgezeichnet und die in Zahlen abzumessenden Längen der Figur gelten wie z. T. eingeschrieben in 2,5facher Größe. Zuerst wird eine Biegelinie v_1 angenommen und damit die Momentenlinie berechnet. Der Stab wird hierzu in fünf gleiche Teile zerlegt, für jeden Teil von 1,5 cm Länge ist die Last gleich $g \cdot 1,5$, bei einem Gewicht g der Längeneinheit. Mit Hilfe der abgemessenen Ordinaten der v_1 -Linie findet man für die Momente in den Punkten 1 bis 5 die Werte

$$\begin{aligned} M_1 &= g \cdot 0,45 \cdot 1,5 && = 0,675 g, \\ M_2 &= g \cdot (1,25 + 0,40) \cdot 1,5 && = 2,475 g, \\ M_3 &= g \cdot (1,90 + 1,05 + 0,30) \cdot 1,5 && = 4,875 g, \\ M_4 &= g \cdot (2,40 + 1,55 + 0,80 + 0,25) \cdot 1,5 && = 7,500 g, \\ M_5 &= g \cdot (2,55 + 1,70 + 0,95 + 0,40 + 0,05) \cdot 1,5 && = 8,475 g. \end{aligned}$$

Aus der Momentenlinie ermittelt man graphisch die v_2 -Linie. Die Momentenfläche wird in fünf äquidistante Teile zerlegt, ihre Flächen

$$\begin{aligned} M_I &= 0,505 g, & M_{II} &= 2,360 g, & M_{III} &= 5,500 g, \\ M_{IV} &= 9,270 g, & M_V &= 12,000 g \end{aligned}$$

bilden die Kräfte des Seilpolygons. Diese Werte sind im Kräftepolygon so aufgetragen, daß $2,0 \cdot g$ gleich 1 cm ist; die Polweite wurde der Länge l ($= 7,5$ cm) gleichgesetzt. Das Seilpolygon liefert eine Linie v_2 , die man bereits als affin mit der v_1 -Linie ansehen darf.

Wir können daher die Knicklast berechnen. In der v_2 -Linie ist 1 cm gleich $\frac{l}{7,5} \frac{2l}{EI} \cdot g$; die Ordinate an der Einspannstelle des Stabes ist 10,45 cm, also $\frac{20,9}{7,5} \frac{l^2}{EI} \cdot g$. Die v_1 -Linie hat als entsprechende Ordinate 3 cm. Somit ist die Knicklast

$$\begin{aligned} P_k &= P \cdot v_1 : v_2 = 7,5 g \cdot 3 : \\ &= \frac{20,9}{7,5} \frac{l^2}{EI} g = 8,07 \frac{EI}{l^2}, \end{aligned}$$

während der genaue Wert rund $7,84 \frac{EI}{l^2}$ beträgt.

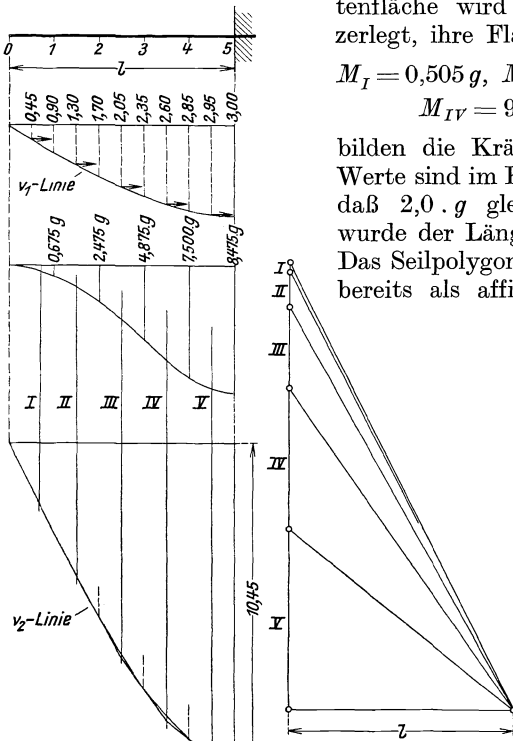


Abb. 69.

Auch bei diesem Beispiel war die Anfangslinie v_1 schon das Resultat eines zweiten Versuches; in der Regel wird man mit dem Zeichnen von zwei Seilpolygonen ein Übereinstimmen der v -Linien erreichen.

Vierter Abschnitt.

Die Stabilität des geraden Stabes bei kontinuierlicher Lagerung.**§ 15. Der an den Enden freie, auf Druck beanspruchte Stab mit konstantem Querschnitt.****46. Die Differentialgleichung des Problems und ihr Integral.**

Bei der Berechnung eines kontinuierlich elastisch gelagerten Stabes gehen wir von der in der Literatur üblichen Annahme aus, daß zwischen der Pressung, dem sog. Bettungsdruck $p(u)$ und der Ausbiegung $v(u)$ der einfache Zusammenhang

$$p(u) = c \cdot v(u)$$

besteht.¹ Die Konstante c ist eine Erfahrungszahl, die Bettungs- oder Bodenziffer. Die Kraft $p(u)$ ist der Ausbiegung $v(u)$ entgegengerichtet, und es wird jetzt vorausgesetzt, daß sie längs des ganzen Stabes wirksam ist.

Wir untersuchen einen elastisch gebetteten geraden Stab mit konstantem rechteckigen Querschnitt von der Breite b , der durch eine axiale zentrische Druckkraft P beansprucht wird. Bedeuten u, v die Schwerpunktskoordinaten eines Querschnittes in einem rechtwinkligen Achsenkreuz, M das Biegemoment und Q die „vertikale“ Querkraft in diesem Schnitt, so ist die Gleichgewichtsbedingung für Drehen für das in der Abb. 70 gezeichnete verformte Stabelement, unter Vernachlässigen von Größen zweiter Kleinheitsordnung

$$(M + dM) - M + P \cdot dv + Q \cdot du = 0.$$

Daher ist

$$\frac{dM}{du} + P \frac{dv}{du} + Q = 0$$

und bei dem konstanten P nach u differenziert

$$\frac{d^2 M}{du^2} + P \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{dQ}{du} = 0.$$

Mit den Ansätzen der üblichen Biegetheorie $M = EI \frac{d^2 v}{du^2}$, $\frac{dQ}{du} = -b \cdot p = -b \cdot c v$, folgt daraus die Differentialgleichung der Elastica

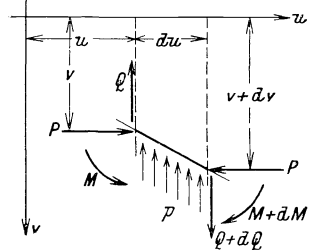


Abb. 70.

¹ H. ZIMMERMANN: Der gerade Stab mit stetiger, elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, S. 898—912. 1905. Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin, 1906. Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin, 1888. — E. CHWALLA: Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 7, S. 276—284. 1927. — Eine ausführliche Darstellung von Biegeproblemen findet man in dem Buch von K. HAYASHI: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin, 1921.

$$\frac{d^4 v}{d u^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v}{d u^2} + \frac{c b}{EI} v = 0,$$

eine lineare homogene Gleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die Lösung ist mit den Integrationskonstanten C

$$v = C_1 \cdot \cos r u + C_2 \cdot \cos \varrho u + C_3 \cdot \sin r u + C_4 \cdot \sin \varrho u$$

und die r und ϱ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^4 + \frac{P}{EI} \alpha^2 + \frac{c b}{EI} = 0,$$

für die sich die Werte

$$r = i \sqrt{\frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c b}{EI}}}, \quad \varrho = i \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c b}{EI}}}$$

ergeben.

Für r und ϱ sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden. Wenn

$$\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 > \frac{c b}{EI},$$

sind die inneren Wurzeln von r und ϱ reell und absolut kleiner als das erste Glied der äußeren Wurzeln. Die r und ϱ sind imaginär; es sind $r = k_1 \cdot i$, $\varrho = k_2 \cdot i$, wobei

$$k_1 = \sqrt{\frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c b}{EI}}} \quad \text{und} \quad k_2 = \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c b}{EI}}}$$

positiv reell sind. Im Fall, daß

$$\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 = \frac{c b}{EI}$$

bekommt man zwei zweifache Wurzeln $r = k \cdot i$, $\varrho = k \cdot i$ mit

$$k = \sqrt{\frac{P}{2EI}}$$

und das Integral findet man aus der allgemeinen Lösung mit einem Grenzübergang. Ist endlich

$$\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 < \frac{c b}{EI},$$

so sind die inneren Wurzel imaginär und die komplexen Wurzelausdrücke lassen sich auf die Form $r = \alpha + \beta \cdot i$, $\varrho = -\alpha + \beta \cdot i$ bringen, wo

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{c b}{4EI} - \frac{P}{4EI}}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{c b}{4EI} + \frac{P}{4EI}}}$$

positiv reell sind.

Die Konstanten der Biegelinien bestimmt man aus den Randbedingungen des Problems. Das Nullsetzen der Koeffizientendeterminante der Konstantengleichungen liefert die Knickbedingung.

47. Die Knickgleichung für den an den Enden freien Stab mit konstantem Querschnitt.

Der an den Enden freie Stab von der Länge l und dem rechteckigen Querschnitt mit der Breite $b = 1$ wird axial und zentrisch mit der Kraft P gedrückt (Abb. 71). Die elastische Linie ist durch die vor angeführten Gleichungen gegeben, und hierzu treten die Randwerte, daß an den Enden Biegemoment M und Querkraft Q verschwinden. Für jedes Stabende gelten also die Ansätze

$$\frac{d^2 v}{du^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 v}{du^3} + P \frac{dv}{du} = 0.$$

Nun ist

$$v'' = C_1 \cdot r^2 \cdot \cos ru + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos \varrho u + C_3 \cdot r^2 \cdot \sin ru + C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \sin \varrho u$$

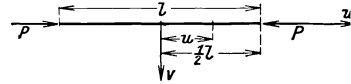


Abb. 71.

und mit Beachten der Beziehungen

$$r^3 + r \frac{P}{EI} = -\frac{1}{r} \frac{c}{EI}, \quad \varrho^3 + \varrho \frac{P}{EI} = -\frac{1}{\varrho} \frac{c}{EI}$$

ist

$$EIv'''' + Pv' = -c \left(C_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin ru + C_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \varrho u + C_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos ru + C_4 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \cos \varrho u \right).$$

Wir legen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des unverformten Stabes und bekommen aus den Randbedingungen für $u = \frac{l}{2}$ und $u = -\frac{l}{2}$ die Konstantengleichungen

$$0 = C_1 r^2 \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_2 \varrho^2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} + C_3 r^2 \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_4 \varrho^2 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \frac{1}{r} \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_2 \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} + C_3 \frac{1}{r} \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_4 \frac{1}{\varrho} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 r^2 \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_2 \varrho^2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} - C_3 r^2 \cdot \sin r \frac{l}{2} - C_4 \varrho^2 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = -C_1 \frac{1}{r} \cdot \sin r \frac{l}{2} - C_2 \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} + C_3 \frac{1}{r} \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_4 \frac{1}{\varrho} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}.$$

Wenn man die erste und dritte sowie die zweite und vierte Gleichung addiert bzw. subtrahiert, erhält man

$$0 = 2 C_1 \cdot r^2 \cdot \cos r \frac{l}{2} + 2 C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = 2 C_3 \cdot r^2 \cdot \sin r \frac{l}{2} + 2 C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = 2 C_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin r \frac{l}{2} + 2 C_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = 2 C_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos r \frac{l}{2} + 2 C_4 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}.$$

Die Knickbedingung ist somit

$$0 = 16 \cdot \begin{vmatrix} r^2 \cdot \cos r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{r} \cdot \sin r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & r^2 \cdot \sin r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{r} \cdot \cos r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} \end{vmatrix}$$

und ausgerechnet

$$r^3 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} \cdot \cos r \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \sin r \frac{l}{2} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} = 0, \quad (\text{A})$$

$$r^3 \cdot \sin r \frac{l}{2} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} \cdot \cos r \frac{l}{2} = 0. \quad (\text{B})$$

Man erkennt leicht, daß die Knickgleichung (A) der symmetrischen, die Gl. (B) der unsymmetrischen Biegeform entspricht. Die Gl. (A) entsteht nämlich aus dem Teil

$$v_a = C_1 \cdot \cos r u + C_2 \cdot \cos \varrho u$$

und die Gl. (B) aus dem Teil

$$v_b = C_3 \cdot \sin r u + C_4 \cdot \sin \varrho u$$

der elastischen Linie. Nun ist für $u = 0$, $v_a' = 0$, d. h. die Biegelinie hat in der Stabmitte eine zur unverformten Stabachse parallele Tangente. Wir können tatsächlich (A) auch unter den Randbedingungen herleiten, daß an einem Stabende das Moment und die Querkraft und in der Stabmitte die Tangentenneigung der Elastica und die Querkraft gleich Null sind.¹

Wir haben nun die drei Fälle für r und ϱ zu behandeln. Ist

$$\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 > \frac{c}{EI},$$

so sind $r = k_1 \cdot i$, $\varrho = k_2 \cdot i$ und die Knickgleichungen (A) und (B) werden

$$k_1^3 \cdot \sin k_2 \frac{l}{2} \cdot \cos k_1 \frac{l}{2} - k_2^3 \cdot \sin k_1 \frac{l}{2} \cdot \cos k_2 \frac{l}{2} = 0,$$

$$k_1^3 \cdot \sin k_1 \frac{l}{2} \cdot \cos k_2 \frac{l}{2} - k_2^3 \cdot \sin k_2 \frac{l}{2} \cdot \cos k_1 \frac{l}{2} = 0,$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} k_2 \frac{l}{2}}{\operatorname{tg} k_1 \frac{l}{2}} = \frac{k_2^3}{k_1^3}, \quad \frac{\operatorname{tg} k_2 \frac{l}{2}}{\operatorname{tg} k_1 \frac{l}{2}} = \frac{k_1^3}{k_2^3}. \quad (\text{I})$$

Wenn

$$\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 = \frac{c}{EI},$$

¹ Vgl. die Berechnung bei H. ZIMMERMANN: Sitzungsber. 1905.

bestimmen wir die Knickbedingungen aus den Gl. (A) und (B) mit einem Grenzübergang. Wir setzen $r = k \cdot i + \Delta$, $\varrho = k \cdot i - \Delta$, $\Delta = 0$ und zufolge

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \sin r \frac{l}{2} \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} &= \frac{1}{2} (i \cdot \sin kl + \mathfrak{S} \sin \Delta l), \\ \mathfrak{S} \sin \varrho \frac{l}{2} \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} &= \frac{1}{2} (i \cdot \sin kl - \mathfrak{S} \sin \Delta l) \end{aligned}$$

gewinnt man die Gleichungen

$$3 \sin kl - kl = 0, \quad 3 \sin kl + kl = 0. \quad (\text{II})$$

Ist

$$\left(\frac{P}{2EI} \right)^2 < \frac{c}{EI},$$

so sind mit $r = \alpha + \beta \cdot i$, $\varrho = -\alpha + \beta \cdot i$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \sin r \frac{l}{2} \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} &= \frac{1}{2} (i \cdot \sin \beta l + \mathfrak{S} \sin \alpha l), \\ \mathfrak{S} \sin \varrho \frac{l}{2} \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} &= \frac{1}{2} (i \cdot \sin \beta l - \mathfrak{S} \sin \alpha l) \end{aligned}$$

und die Knickgleichungen (A) und (B) erhalten die Form

$$\begin{aligned} \beta \left(\sqrt{\frac{c}{EI}} - \frac{P}{EI} \right) \cdot \mathfrak{S} \sin \alpha l + \alpha \left(\sqrt{\frac{c}{EI}} + \frac{P}{EI} \right) \cdot \sin \beta l &= 0, \\ \beta \left(\sqrt{\frac{c}{EI}} - \frac{P}{EI} \right) \cdot \mathfrak{S} \sin \alpha l - \alpha \left(\sqrt{\frac{c}{EI}} + \frac{P}{EI} \right) \cdot \sin \beta l &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Mit $\alpha = 0$, $\beta = k$ kommt man wieder auf die Gl. (II) zurück.

48. Diskussion der Knickgleichungen.

Wir untersuchen zunächst die Gl. (I) von Pkt. 47. Für $c = 0$, d. h. für den Fall ohne Querstützung ist $k_1 = 0$. Aus der ersten Gleichung wird $\text{tg } k_2 \frac{l}{2} = \infty$ und $P = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$; die zweite Gleichung liefert $\text{tg } k_2 \frac{l}{2} = 0$, d. i. $P = 0$ und $P = 4 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$. Beim frei schwebenden Druckstab muß sich aber die Stabilitätsgrenze $P = 0$ ergeben und die erste Knickbedingung (I) ist tatsächlich nicht maßgebend; die zweite ergibt hingegen keine weiteren Lösungen.

Bei den Knickgleichungen (II) wird aus der ersten Gleichung der symmetrischen Gleichgewichtsformen $kl = 2,2788$ und damit die kritische Last $P_k = 1,052 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}$, während die zweite Gleichung der unsymmetrischen Formen durch keine von Null verschiedene Lösung von P befriedigt wird.

Aus den Bedingungen (III), die noch übrigbleiben, entstehen durchwegs die kleinsten Knickwerte.¹ Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{P_k}{P_E}, \quad y = \sqrt{\frac{c l^4}{EI}},$$

¹ Vgl. E. CHWALLA: A. a. O.

wobei P_E die EULERSche Last $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$ für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge l bezeichnet, erhält man

$$\alpha = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{1}{2} y - \frac{\pi^2}{4} x}, \quad \beta = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{1}{2} y + \frac{\pi^2}{4} x}$$

und die beiden Knickbedingungen lauten

$$\frac{\sin \sqrt{\frac{1}{2} y + \frac{\pi^2}{4} x}}{\sin \sqrt{\frac{1}{2} y - \frac{\pi^2}{4} x}} = \mp \frac{y - \pi^2 x}{y + \pi^2 x} \sqrt{\frac{y + \frac{\pi^2}{2} x}{y - \frac{\pi^2}{2} x}}.$$

Das Minuszeichen rechts bezieht sich auf die Gl. (A) der symmetrischen, das Pluszeichen auf die Gl. (B) der unsymmetrischen Gleichgewichtslagen.

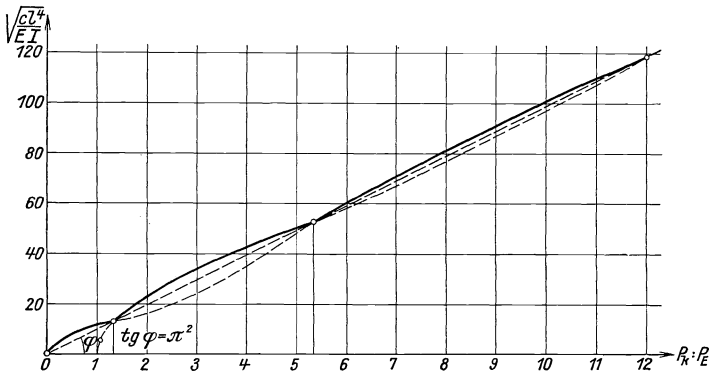


Abb. 72.

Die Lösung wird so vorgenommen, daß man zu angenommenen Werten x die y berechnet. Die Ergebnisse sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz mit den Abszissen x und den „Querstützungsziffern“ y als Ordinaten aufgetragen (Abb. 72). Bei $y = 0$ ist $x = 0$ für die unsymmetrische und $x = 1$ für die symmetrische Biegeform. Mit $x = 1,052$ ergibt sich für die symmetrische Form $y = 1,052 \frac{\pi^2}{2}$, d. i. der aus der Bedingung (II) bestimmte Wert. Für $x = \frac{y}{\pi^2}$ folgt

$$\sin \sqrt{\frac{1}{2} y + \frac{\pi^2}{4} x} = 0, \text{ also } x = \frac{4}{3} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die so gefundenen Punkte liegen auf der durch den Ursprung gehenden Geraden $\text{tg } \varphi = \pi^2$, und es gilt für sie die Gleichung

$$\sqrt{\frac{c l^4}{EI}} = \pi^2 \frac{P_k}{P_E}, \text{ d. i. } P_k = \sqrt{c EI}.$$

Maßgebend ist die Biegelage, die bei einem gegebenen c zur kleinsten Knicklast P_k führt. Die Abb. 72 zeigt stark ausgezogen die Äste dieser Linien, die abwechselnd der unsymmetrischen und symmetrischen Deformationsfigur angehören. Unter höheren Querstützungsziffern nähern sich die Linien beider Knickformen rasch der Geraden $\frac{y}{x} = \pi^2$ und die kritische Last ist dann in guter Näherung gleich \sqrt{cEI} .

Dieser Grenzwert läßt sich auch unmittelbar herleiten, wenn man eine sehr große Länge $l \rightarrow \infty$ der Rechnung zugrunde legt. Sie ergibt sich z. B. aus den Knickbedingungen (III), sobald man bei großen l -Werten die Kreisfunktionen gegenüber den Hyperbelfunktionen vernachlässigt.

§ 16. Der Stab mit konstantem Querschnitt unter anderen Randbedingungen.

49. Die Enden des Stabes sind gelenkig festgehalten.

Der zentrisch auf Druck beanspruchte Stab von konstantem rechteckigen Querschnitt mit der Breite „Eins“ ist kontinuierlich elastisch gelagert und an den Enden in festen Gelenken gestützt. Der analytische Ausdruck für diese Randbedingungen ist das Nullwerden von Ausbiegung und Moment an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ und $u = -\frac{l}{2}$.

Mit der Gleichung der Biegelinie

$$v = C_1 \cdot \text{Cos } ru + C_2 \cdot \text{Cos } \varrho u + C_3 \cdot \text{Sin } ru + C_4 \cdot \text{Sin } \varrho u,$$

wo

$$r = i \sqrt{\frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c}{EI}}}$$

$$\varrho = i \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c}{EI}}}$$

gewinnt man die vier Konstantengleichungen

$$0 = C_1 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r^2 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot r^2 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} - C_3 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} - C_4 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r^2 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2} - C_3 \cdot r^2 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} - C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2}.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Gleichung werden

$$0 = C_1 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2}, \quad 0 = C_3 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r^2 \cdot \text{Cos } r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Cos } \varrho \frac{l}{2}, \quad 0 = C_3 \cdot r^2 \cdot \text{Sin } r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Sin } \varrho \frac{l}{2},$$

und die Knickbedingung reduziert sich auf die Gleichungen

$$0 = (r^2 - \varrho^2) \cdot \cos r \frac{l}{2} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}, \quad 0 = (r^2 - \varrho^2) \cdot \sin r \frac{l}{2} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2}.$$

Aus $r^2 - \varrho^2 = 0$ folgt die Formel $P = 2\sqrt{cEI}$, die nicht das Resultat sein kann, da sie für $c = 0$ nicht die EULERSche Last ergibt. Wir kommen auf diesen Ansatz und seine Rolle bei dem Problem noch zurück.¹

Bei den imaginären Wurzeln der charakteristischen Gleichung $r = k_1 \cdot i$, $\varrho = k_2 \cdot i$ sind

$$\cos k_1 \frac{l}{2} = 0, \quad \cos k_2 \frac{l}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sin k_1 \frac{l}{2} = 0, \quad \sin k_2 \frac{l}{2} = 0,$$

daher

$$k_1 \frac{l}{2} = n \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \frac{l}{2} = n \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und man erhält die kritische Last

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2} n^2 + \frac{c l^2}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{a})$$

Hierbei ist für n jener Wert zu setzen, mit dem P_k ein Minimum wird. Die Bedingung $\frac{dP_k}{dn} = 0$ liefert nun die Gleichung

$$n = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{c}{EI}}; \quad (\text{a}_1)$$

daraus berechnet man n , bestimmt für die benachbarten ganzzahligen n die Last P_k und sieht den kleinsten Wert als maßgebend an. Geht man mit Gl. (a₁) jedoch unmittelbar in Gl. (a) ein, d. h. läßt man die Ganzzahligkeit der n außer acht, so entsteht wieder die ENGESSERSche Formel

$$P_k = 2\sqrt{cEI} \quad \text{oder} \quad P_k = 2\pi^2 \frac{EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2}. \quad (\text{b})$$

Die Last P_k der Gl. (b) ist doppelt so groß wie die EULERSche Last für den gelenkig gelagerten Stab von der Länge $\frac{l}{n}$.

Die Gl. (a) bildet die vollständige Lösung des Problems. Der Fall der vier komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung führt mit $r = \alpha + \beta \cdot i$, $\varrho = \alpha - \beta \cdot i$ (siehe die Bezeichnung von Pkt. 46) wieder zur Gl. (a), während bei den Doppelwurzeln $r = \varrho = k \cdot i$ die Knicklast $P_k = 2\pi^2 \frac{EI}{l^2} n^2$ hervorgeht, die in (a) bereits mit enthalten ist.

Zur Veranschaulichung tragen wir die Gl. (a) in ein rechtwinkeliges Achsenkreuz auf (Abb. 73). Als Abszissen nehmen wir die Werte $\frac{P_k}{P_E}$, wobei P_E die EULERSche Knicklast für den beiderseits gelenkig gelagerten

¹ Die Gleichung wurde erstmals von F. ENGESSER aufgestellt: Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin, 1892. S. 151.

Stab ist, als Ordinaten die Querstützungsziffern $\sqrt{\frac{c l^4}{EI}}$. Den einzelnen n -Werten entsprechen Parabeln, die je nach der Querstützungsziffer zur Gültigkeit gelangen. Sämtliche Parabeln besitzen als gemeinsame Tangente die durch den Ursprung gehende Gerade mit der Neigung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi^2}{2}$ zur Abszissenachse, d. h. die Gerade $P = 2 \sqrt{c EI}$. Die Berührungspunkte sind durch die Abszissen $\frac{P_k}{P_E} = 2 n^2$ festgelegt, d. h. durch die Werte, die sich beim Fall der Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung ergeben haben.

Die den ungeraden Knicklasten ($n = 1, 3, 5, \dots$) zugeordnete Ausbiegung ist symmetrisch zur Stabmitte, denn der die kritische Last erzeugende Teil der Biegelinie $v = C_1 \cdot \operatorname{Cos} ru + C_2 \cdot \operatorname{Cos} qu$ ergibt für

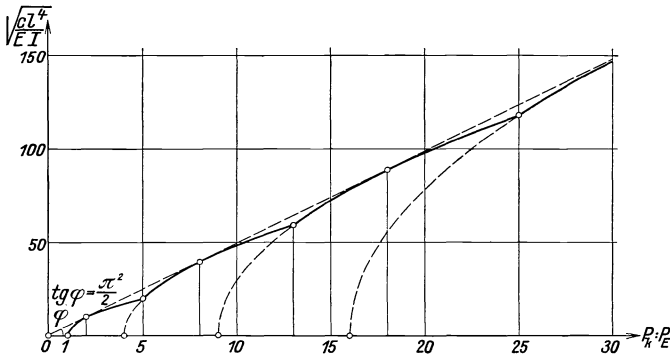


Abb. 78.

die Stabmitte $u = 0$ die Tangentenneigung $v' = 0$. Bei den geraden Knicklasten ($n = 2, 4, \dots$), die aus der Gleichung $v = C_3 \cdot \operatorname{Sin} ru + C_4 \cdot \operatorname{Sin} qu$ entstehen, hat die Biegelinie in der Stabmitte die Ausbiegung $v = 0$. Ein langer Stab zerfällt in kurze Halbwellen von der Länge $\frac{l}{n}$.

Die Aufgabe läßt sich auch mit der *Energiemethode* bequem erledigen.

Die Arbeit der äußeren Kraft P ist ebenso wie beim nicht quergestützten Stab in Pkt. 41

$$T = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du.$$

Zur Arbeit der inneren Kraft, die dort durch

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2v}{du^2} \right)^2 du$$

bestimmt war, tritt noch ein Zusatz wegen der kontinuierlichen Lagerung. Die Reaktion der elastischen Stützung auf das Element du ist bei der Breite $b = 1$ des Stabes $c v \cdot du$ und die Arbeit ist $\frac{1}{2} c v^2 du$, da die Formänderung proportional der Reaktion verläuft. Für den ganzen Stab gilt also

$$V' = \frac{1}{2} c \int_0^l v^2 du.$$

Mit $T = V + V'$ lautet die Integralgleichung des Problems

$$P \int_0^l \left(\frac{dv}{du} \right)^2 du = EI \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{du^2} \right)^2 du + c \int_0^l v^2 du.$$

Setzen wir für v die trigonometrische Reihe

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin n\pi \frac{u}{l},$$

die den Randbedingungen $v = 0$, $v'' = 0$ an den Stabenden genügt, so erhalten wir zufolge

$$\int_0^l v^2 du = \frac{l}{2} \sum C_n^2, \quad \int_0^l v'^2 du = \frac{l}{2} \sum C_n^2 \left(n \frac{\pi}{l} \right)^2,$$

$$\int_0^l v''^2 du = \frac{l}{2} \sum C_n^2 \left(n \frac{\pi}{l} \right)^4$$

die Gleichung

$$P = \frac{EI \sum C_n^2 \left(n \frac{\pi}{l} \right)^4 + c \sum C_n^2}{\sum C_n^2 \left(n \frac{\pi}{l} \right)^2}.$$

Die Last P erreicht ihren Kleinstwert, wenn bis auf ein C_n alle C gleich Null werden. Die Knicklast ist daher wie vor

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{l^2} n^2 + \frac{c l^2}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

50. Die Enden des Stabes sind eingespannt.

Ist der wie vor beanspruchte Stab von der Länge l an den Enden „tangentialfrei“ eingespannt, so sind für $u = \frac{l}{2}$ und $u = -\frac{l}{2}$ die Ausbiegung und der Tangentenwinkel an die Elastica gleich Null.

Die Elastica ist durch dieselbe Gleichung wie früher bestimmt und die Konstantengleichungen sind mit den bezeichneten Randwerten

$$0 = C_1 \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot r \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho \cdot \cos \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} - C_3 \cdot \sin r \frac{l}{2} - C_4 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = -C_1 \cdot r \cdot \sin r \frac{l}{2} - C_2 \cdot \varrho \cdot \sin \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot r \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}.$$

Addiert und subtrahiert man die erste und dritte bzw. zweite und vierte Gleichung, so entstehen die Beziehungen

$$0 = C_1 \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}, \quad 0 = C_3 \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r \cdot \sin r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho \cdot \sin \varrho \frac{l}{2}, \quad 0 = C_3 \cdot r \cdot \cos r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho \cdot \cos \varrho \frac{l}{2}$$

und damit die Knickbedingungen

$$0 = r \cdot \sin r \frac{l}{2} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} - \varrho \cdot \cos r \frac{l}{2} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = \varrho \cdot \sin r \frac{l}{2} \cdot \cos \varrho \frac{l}{2} - r \cdot \cos r \frac{l}{2} \cdot \sin \varrho \frac{l}{2}.$$

Die erste Gleichung, die aus dem Lösungsteil $v = C_1 \cdot \cos ru + C_2 \cdot \cos \varrho u$ hervorgeht, entspricht der symmetrischen, die zweite der unsymmetrischen Biegeform.

Im Falle der imaginären Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden die Knickbedingungen mit $r = k_1 \cdot i$, $\varrho = k_2 \cdot i$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\operatorname{tg} k_2 \frac{l}{2}}{\operatorname{tg} k_1 \frac{l}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{k_2}{k_1} = \frac{\operatorname{tg} k_2 \frac{l}{2}}{\operatorname{tg} k_1 \frac{l}{2}}, \quad (\text{a})$$

wo

$$k_1 = \sqrt{\frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c}{EI}}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 - \frac{c}{EI}}}.$$

Für $c = 0$, d. h. ohne Querstützung sind $k_1 = 0$, $k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich als kleinste kritische Last $P_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, die, so wie es sein muß, dem beiderseits eingespannten Stab von der Länge l entspricht; aus der zweiten Gleichung folgt $\operatorname{tg} k_2 \frac{l}{2} = k_2 \frac{l}{2}$, d. i. $k_2 \frac{l}{2} \cong 4,49$ und ein größeres P .

Bei den Doppelwurzeln der charakteristischen Gleichung erhält man mit $r = k \cdot i + \Delta$, $\varrho = k \cdot i - \Delta$, $k = \sqrt{\frac{P}{2EI}}$, $\Delta = 0$ die Knickgleichungen

$$\sin kl + kl = 0 \quad \text{und} \quad \sin kl - kl = 0,$$

die nur für $P = 0$ erfüllt sind. Die Knickgleichungen im Falle der komplexen Wurzeln $r = \alpha + \beta \cdot i$, $\varrho = -\alpha + \beta \cdot i$ schreiben wir nicht mehr an; sie führen für $c = 0$ nicht zur richtigen EULERSchen Last.

Die Lösung der Aufgabe wird daher durch die Gl. (a) geleistet, und die Abb. 74 zeigt das Ergebnis der Rechnung, wobei wir uns auf die ersten kritischen Lasten beschränken. In einem rechtwinkligen Achsenkreuz sind zu den Abszissen $x = \frac{P_k}{P_E}$ die Ordinaten $y = \sqrt{\frac{c l^4}{E I}}$ aufgetragen; P_E ist die EULERSche Knicklast für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab. Die Linien der zwei Knickgleichungen (a), wobei

$$k_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} x - \sqrt{\frac{\pi^4}{4} x^2 - y^2}}, \quad k_2 \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} x + \sqrt{\frac{\pi^4}{4} x^2 - y^2}}$$

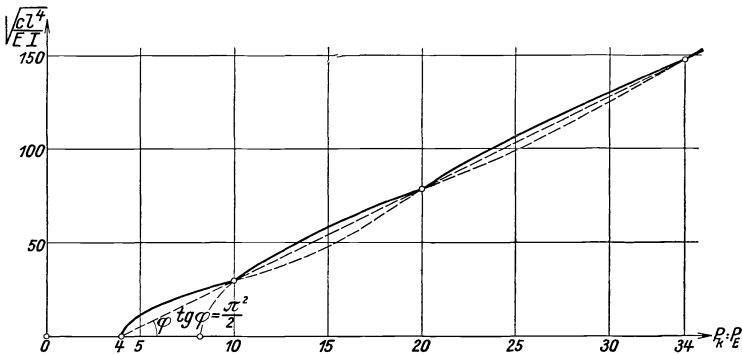


Abb. 74.

schnneiden sich in Punkten, die auf der Geraden $y = (x - 4) \frac{\pi^2}{2}$ liegen und deren Abszissen der Bedingung $x = n^2 + (n + 2)^2$ genügen ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Beide Kurven, die der symmetrischen und der unsymmetrischen Gleichgewichtslage nähern sich bei großen Querstützungsziffern immer mehr ihrer Schnittgeraden, so daß dann in guter Approximation $x = 4 + \frac{2}{\pi^2} y$, d. h.

$$P_k = 4\pi^2 \frac{E I}{l^2} + 2 \sqrt{c E I}$$

gesetzt werden darf.

51. Der teilweise elastisch gestützte Stab.

Der gerade, durch die Kraft P belastete Stab von der Länge L mit rechteckigem Querschnitt von der Breite „Eins“ ist teilweise, auf die Länge l , kontinuierlich elastisch gelagert (Abb. 75). Diese Stützung ist z. B. bei dem im Boden befestigten vertikal stehenden Mast mit freiem Ende realisiert. — Wir werden nur den einfachen Fall diskutieren, daß l sehr groß ist, stellen aber zunächst die genaue Knickbedingung auf.

Für den freien Stabteil $\lambda = L - l$ ist die elastische Linie durch die Gleichung

$$v = A + B \cdot \sin a u, \quad a^2 = \frac{P}{E I}$$

bestimmt, wobei wir u vom freien Ende an zählen. Der Wert $v''' + a^2 \cdot v'$, die „vertikale“ Querkraft, ist hierbei gleich Null. Im Teil l gilt für die Biegelinie die Gleichung

$$v = C_1 \cdot \text{Cos} r u + C_2 \cdot \text{Cos} \varrho u + C_3 \cdot \text{Sin} r u + C_4 \cdot \text{Sin} \varrho u,$$

also für die Querkraft Q der Ausdruck

$$EI v''' + P v' = -c \left[C_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Sin} r u + C_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Sin} \varrho u + C_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Cos} r u + C_4 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Cos} \varrho u \right].$$

Hier rechnen wir die u von der Mitte von l , und zwar nach aufwärts positiv, nach abwärts negativ. Die r und ϱ haben die in Pkt. 46 angegebenen Werte.

Den sechs Konstanten entsprechen sechs Randbedingungen. An der Trennungsstelle der beiden Stabteile müssen die Ausbiegung (v), die Tangentenneigung (v'), das Biegemoment (v'') und die Querkraft ($v''' + a^2 v'$) von beiden Feldern gerechnet gleich sein; am unteren Stabende verschwinden Moment und Querkraft. Somit bestehen der Reihe nach die Gleichungen

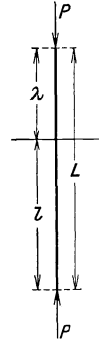


Abb. 75.

$$A + B \cdot \sin a \lambda = C_1 \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2},$$

$$-B \cdot a \cdot \cos a \lambda = C_1 \cdot r \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot r \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2},$$

$$-B \cdot a^2 \cdot \sin a \lambda = C_1 \cdot r^2 \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot r^2 \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = C_1 \cdot r^2 \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_2 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} - C_3 \cdot r^2 \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} - C_4 \cdot \varrho^2 \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2},$$

$$0 = -C_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} - C_2 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} + C_3 \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} + C_4 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2}.$$

Die Knickbedingung ist die gleich Null gesetzte Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -\sin a \lambda & \text{Cos} r \frac{l}{2} & \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} & \text{Sin} r \frac{l}{2} & \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} \\ . & a \cdot \cos a \lambda & r \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} & \varrho \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} & r \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} & \varrho \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} \\ . & a^2 \cdot \sin a \lambda & r^2 \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} & r^2 \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} \\ . & . & \frac{1}{r} \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} & \frac{1}{r} \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} \\ . & . & r^2 \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} & -r^2 \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} & -\varrho^2 \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} \\ . & . & -\frac{1}{r} \cdot \text{Sin} r \frac{l}{2} & -\frac{1}{\varrho} \cdot \text{Sin} \varrho \frac{l}{2} & \frac{1}{r} \cdot \text{Cos} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \text{Cos} \varrho \frac{l}{2} \end{vmatrix}$$

Entwickelt man nach der ersten bzw. zweiten Spalte, so wird

$$0 = a \cdot \cos a \lambda \cdot D_1 - a^2 \cdot \sin a \lambda \cdot D_2$$

und daraus

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = \frac{D_1}{D_2}.$$

Die Determinante D_1 haben wir bereits in Pkt. 47 bei dem an den Enden freien Stab angeschrieben; mit Hinzufügen der in den Knickgleichungen dort weggelassenen Faktoren ist

$$D_1 = \frac{16}{r^2 \varrho^2} \left(r^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} \right) \cdot \left(r^3 \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} \right).$$

Die Determinante D_2 hat die Form

$$D_2 = \begin{vmatrix} r \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} & \varrho \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} & r \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} & \varrho \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} \\ \frac{1}{r} \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} & \frac{1}{r} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} \\ r^2 \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} & \varrho^2 \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} & -r^2 \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} & -\varrho^2 \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} \\ -\frac{1}{r} \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} & -\frac{1}{\varrho} \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} & \frac{1}{r} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} & \frac{1}{\varrho} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} \end{vmatrix}$$

und die Ausrechnung ergibt

$$D_2 = 2 \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 \varrho^2} (r^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho l \cdot \operatorname{Cos} r l - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} r l \cdot \operatorname{Cos} \varrho l).$$

Die Knickbedingung $a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = D_1 : D_2$ lautet mithin

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = \frac{8}{r^2 - \varrho^2} \cdot \frac{\left(r^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} \right)}{r^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho l \cdot \operatorname{Cos} r l - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} r l \cdot \operatorname{Cos} \varrho l} \cdot \left(r^3 \cdot \operatorname{Sin} r \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} \varrho \frac{l}{2} - \varrho^3 \cdot \operatorname{Sin} \varrho \frac{l}{2} \cdot \operatorname{Cos} r \frac{l}{2} \right)$$

und wir haben für r und ϱ wieder drei Fälle zu untersuchen.

Ist $\left(\frac{P}{2EI} \right)^2 > \frac{c}{EI}$, so sind $r = k_1 \cdot i$, $\varrho = k_2 \cdot i$, und die Knickgleichung hat keine maßgebende Lösung für P .

Beim Grenzfall $\left(\frac{P}{2EI} \right)^2 = \frac{c}{EI}$ setzt man $r = k \cdot i + \Delta$, $\varrho = k \cdot i - \Delta$,

wobei $k = \sqrt{\frac{P}{2EI}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und man bekommt

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = \frac{2}{k \Delta} \cdot \frac{-(\Delta^3 - 3 \Delta k^2)^2 \cdot \sin^2 k l + (3 \Delta^2 k - k^3)^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \Delta l}{-(\Delta^3 - 3 \Delta k^2) \cdot \sin 2 k l + (3 \Delta^2 k - k^3) \cdot \operatorname{Sin} 2 \Delta l},$$

also mit $\Delta \rightarrow 0$

$$\operatorname{tg} a \lambda = \frac{\sqrt{2} (-9 \sin^2 k l + k^2 l^2)}{3 \sin 2 k l - 2 k l}.$$

Diese Gleichung liefert, wie wir aus Pkt. 48 wissen, für $\lambda = 0$ kein vollständiges Ergebnis; für $l = 0$ ist $\operatorname{tg} a \lambda = 0$ und man erhält $P = 0$.

Die gesamte Lösung gewinnt man aus der Knickbedingung, bei der $\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 < \frac{c}{EI}$, siehe auch Pkt. 48. Mit den Werten $r = \alpha + \beta \cdot i$, $q = -\alpha + \beta \cdot i$ ergibt sich in Übereinstimmung mit der eben gefundenen Gleichung, wenn wir α statt Δ und β statt k nehmen

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = \frac{2}{\alpha \beta} \cdot \frac{-(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)^2 \cdot \sin^2 \beta l + (3\alpha^2\beta - \beta^3)^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \alpha l}{-(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) \cdot \sin 2\beta l + (3\alpha^2\beta - \beta^3) \cdot \operatorname{Sin} 2\alpha l}.$$

Bei einem bekannten Verhältnis von λ und l läßt sich daraus die Knicklast berechnen.

Wir diskutieren nur den Fall großer Längen l . Die Werte der Kreisfunktionen können dann gegenüber denen der Hyperbelfunktionen vernachlässigt werden; setzt man ferner

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha l : \operatorname{Sin} 2\alpha l = \frac{1}{2} \operatorname{Tg} \alpha l = \frac{1}{2} \text{ so ist}$$

die Knickbedingung

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}$$

und mit den Ausdrücken für α und β

$$a \cdot \operatorname{tg} a \lambda = 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{c}{EI} - a^2}}{\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{EI} - a^2}}}.$$

Bei $\lambda = 0$ wird $\sqrt{\frac{c}{EI}} = a^2$ und entsprechend den Voraussetzungen der Rechnung $P_k = \sqrt{cEI}$. Für Längen $\lambda > 0$, die jetzt allein von Interesse sind, ist bei $c = 0$ die Lösung $P = 0$, während bei $c = \infty$, d. h. bei einer starren Einspannung des Stabteiles λ die EULERSche Formel $P_k = P_E = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{\lambda^2}$ hervorgeht. In der Abb. 76 sind in rechtwinkligen Koordinaten zu den Abszissen $\frac{P_k}{P_E}$ die Ordinaten $\sqrt{\frac{c\lambda^4}{EI}}$ aufgetragen; bei größeren Ordinaten nähert sich die Knicklast rasch dem EULERSchen Wert.

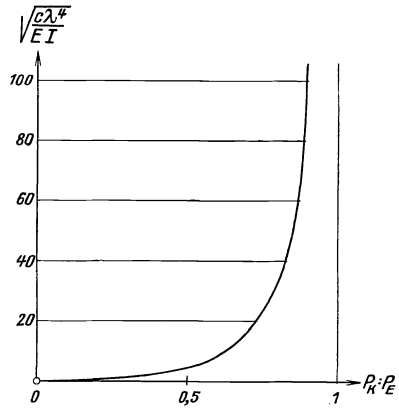


Abb. 76.

§ 17. Ergänzende Untersuchungen.

52. Stabquerschnitt und Längskraft sind stetig veränderlich.

Wir stellen für den kontinuierlich elastisch gelagerten Stab die Differentialgleichung der elastischen Linie unter der Annahme auf, daß Querschnitte und Stabkraft stetig veränderlich sind.

Die in Pkt. 46 angeschriebene Gleichung

$$\frac{dM}{du} + P \frac{dv}{du} + Q = 0$$

gibt bei variablem P nach u differenziert

$$\frac{d^2 M}{du^2} + P \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{dP}{du} \cdot \frac{dv}{du} + \frac{dQ}{du} = 0.$$

Aus der Biegegleichung $M = EI \frac{d^2 v}{du^2}$ erhält man durch zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 M}{du^2} = EI \frac{d^4 v}{du^4} + 2E \frac{dI}{du} \cdot \frac{d^3 v}{du^3} + E \frac{d^2 I}{du^2} \cdot \frac{d^2 v}{du^2}.$$

Die Verbindung beider Ansätze liefert mit $\frac{dQ}{du} = cb(u) \cdot v$ die lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung

$$EI \frac{d^4 v}{du^4} + 2E \frac{dI}{du} \cdot \frac{d^3 v}{du^3} + \left(E \frac{d^2 I}{du^2} + P \right) \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{dP}{du} \cdot \frac{dv}{du} + cb(u) \cdot v = 0,$$

unter vier Randbedingungen für die Stützung der Stabenden.

Die Berechnung kann mit Reihenentwicklungen vorgenommen werden, oder auch bei Randbedingungen, die einen einfachen Ansatz für die *Elastica* gestatten, mit Hilfe des Näherungsverfahrens von RITZ-TIMOSHENKO, vgl. § 13. Wir begnügen uns damit, die Ergebnisse solcher Untersuchungen anzuführen.

a) Der an beiden Enden freie Stab von der Länge l hat einen konstanten Querschnitt mit dem Trägheitsmoment I ; die zentrische Drucklast für die Längeneinheit entspricht der Gleichung $p = p_0 \frac{2u}{l}$ und die resultierende Kraft in einem Querschnitt

$$P_u = p_0 \frac{l}{4} \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2} \right)$$

nimmt von dem Wert $P_u = p_0 \frac{l}{2}$ in der Stabmitte ($u = 0$) parabelförmig zum Wert Null an den Stabenden ($u = \frac{l}{2}$) ab.

Der kritische Wert der Last ist durch die Gleichung

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{4} \right)_k = \alpha \frac{EI}{l^2}$$

bestimmt, wobei der Faktor α in der nachstehenden Tabelle als Funktion von $\frac{cl^4}{16EI}$ gegeben ist.¹

$\frac{cl^4}{16EI} =$	0	1	3	5	10	15	20	50	100	150	200	300	500	1000
$\alpha =$	0	2,0	6,0	10,0	20,0	29,9	33,6	53,1	85,3	129	145	177	233	319

b) Für den wie vor belasteten und elastisch gelagerten Stab, der jedoch an den Enden gelenkig gestützt ist, gelten für den Koeffizienten α die Werte der folgenden Zusammenstellung. Die kritische Last für $c = 0$, d. h. beim Stab ohne Querstützung, ist bereits in Pkt. 38 angeschrieben.¹

¹ Die Berechnung einzelner Werte mit Reihenentwicklungen rührt von F. JASINSKI her: Recherches sur la flexion des pièces comprimées. Annales

$\frac{c l^4}{16 EI} =$	0	5	10	15	20	60	100	150	200	300	500	1000
$\alpha =$	20,5	35,9	50,3	63,6	72,5	96	118	143	164	197	237	326

c) Bei dem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge l mit rechteckigem Querschnitt verlaufen die Trägheitsmomente nach der Gleichung

$$I = I_0 \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2} \right),$$

die Druckkräfte für die Längeneinheit nach dem Gesetz $p = p_0 \frac{2u}{l}$ und die resultierende Druckkraft entsprechend der Formel

$$P_u = p_0 \frac{l}{4} \left(1 - 4 \frac{u^2}{l^2} \right).$$

In der Stabmitte $u = 0$ sind $I = I_0$, $P_u = p_0 \frac{l}{4}$, und an den Stabenden $u = \frac{l}{2}$ sind $I = 0$, $P_u = 0$.

Die Knicklast hat die Größe

$$P_k = \left(p_0 \frac{l}{4} \right)_k = \alpha \frac{EI_0}{l^2},$$

wobei der Koeffizient α als Funktion von $\frac{c l^4}{16 EI_0}$ der nächsten Tabelle zu entnehmen ist.¹ Den kritischen Wert für $c = 0$ haben wir schon in Pkt. 39 mitgeteilt.

$\frac{c l^4}{16 EI_0} =$	0	25	50	100	200	400	600	800	1000
$\alpha =$	18,5	74	94	120	155	198	228	249	266

53. Zur Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken.

Das Problem des elastisch gelagerten Druckstabes ist bei der Druckgurtuntersuchung offener Brücken von praktischem Interesse. Dort liegt jedoch keine stetige Unterstützung vor, sondern eine Lagerung auf elastischen Einzelstützen, die aus den oberen Enden der Querverbände, der sog. Halbrahmen gebildet sind. Ist die Zahl der Stützen groß und ihre Steifigkeit und auch die elastische Verschiebung gleich, so ersetzt man oft angenähert die Wirkung der Einzelstützen durch die der kontinuierlichen Lagerung. Die Konstante c ist gleich dem Wert p für $v = 1$, und man führt für c die Gleichung $c = A : \lambda$ ein, wobei A die Größe der

des ponts et chaussées, Bd. 8. 1894. — Eine Ergänzung mit Hilfe der Energiemethode wurde von S. TIMOSHENKO vorgenommen: Sur la stabilité des Systèmes Élastiques, S. 34 u. 38. Handb. d. Physikal. u. Techn. Mechanik, Bd. IV, S. 110. 1929.

¹ J. DONDORFF: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt und mit veränderlichem Druck, ohne und mit Querstützen. Dissertation. Aachen, 1907.

seitlichen Kraft bedeutet, die, am oberen Ende des Querrahmens angreifend, eine Verschiebung dieses Endes um die Einheit hervorruft, und λ die Entfernung der Stützen, d. h. die Feldweite ist. — Wir wollen dieses Rechenverfahren an zwei Fällen zeigen.

A. Der Stab ist an seinen Enden frei.

Bei großen Querstützungsziffern ist die Knicklast

$$P_k = \sqrt{\frac{A}{\lambda} EI}, \quad (a)$$

mit der Nebenbedingung

$$P_k' = \pi^2 \frac{EI}{\lambda^2} \quad (a')$$

für das Ausknicken eines Feldes. Überschreitet die Spannung $\sigma_k = P_k : F$ die Proportionalitätsgrenze, so ist an Stelle von E der Knickmodul T zu nehmen.

Wir betrachten die Formel (a). Setzen wir für E den Ausdruck $T = \frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}$, vgl. Pkt. 19, so entsteht die quadratische Gleichung für σ_k

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{A}{\lambda} \frac{I}{F^2}} \sqrt{\frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}}.$$

Mit der Abkürzung

$$K = \frac{\pi^2}{2} \frac{\lambda}{A} \frac{F^2}{I},$$

wobei K nur von den Abmessungen des Stabes und der Bettungsziffer $c = \frac{A}{\lambda}$ abhängt, ergibt sich

$$\sigma_k = a - b^2 K \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2a}{b^2 K}} - 1 \right].$$

Benützt man für den Knickmodul die Beziehung $T = \frac{1}{\pi^2} \left(a - b \frac{l}{i} \right) \left(\frac{l}{i} \right)^2$ von Pkt. 19, so folgt aus der quadratischen Gleichung für $\frac{l}{i}$

$$\sigma_k = a - b \frac{l}{i} = \sqrt{\frac{A}{\lambda} \frac{I}{F^2}} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \left(a - b \frac{l}{i} \right) \left(\frac{l}{i} \right)^2}$$

für σ_k wieder der frühere Wert.

Mit den TETMAJERSCHEN Versuchskonstanten für Flußeisen wird nun, siehe Pkt. 18,

$$\sigma_k = 3,10 - 0,00013 K \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{47723}{K}} - 1 \right]$$

bei den Maßeinheiten Tonne und Zentimeter. Ist $\sigma_k \leq 3,10 - 0,0114 \cdot 105 = 1,903$ t/cm², so ist in der Gleichung für P_k der YOUNGSCHEN Modul E einzuführen. — Das Verwenden der Materialkonstanten der Deutschen Vorschriften z. B. für St 37 liefert ebenso

$$\sigma_k = 2,8905 - 0,0000668 K \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{86500}{K}} - 1 \right].$$

Wenn $\sigma_k \geq 2,40 \text{ t/cm}^2$, ist mit $\sigma_k = 2,4 \text{ t/cm}^2$ zu rechnen; wenn $\sigma_k \leq 2,8905 = 0,008175 \cdot 100 = 2,073 \text{ t/cm}^2$, gilt die Gleichung für vollständige Elastizität.

Mit Gl. (a') verläuft die Rechnung bei unelastischem Verhalten in bekannter Weise.

B. Der Stab ist an den Enden gelenkig festgehalten.

Sobald wir allgemein anstatt E den Knickmodul T schreiben, gilt die Gleichung

$$P_k = F \cdot \sigma_k = \pi^2 \frac{T I}{l^2} n^2 + \frac{A}{\lambda} \frac{l^2}{\pi^2 n^2}, \quad (\text{a})$$

wobei n die zum Ausdruck

$$n = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{A}{\lambda T I}} \quad (\text{a}_1)$$

nächste ganze Zahl ist. Als Nebenbedingung besteht

$$P_k' = \pi^2 \frac{T I}{\lambda^2}. \quad (\text{a}')$$

Schließlich führen wir die ENGESSERSche Formel

$$P_k = 2 \sqrt{\frac{A}{\lambda} T I} = 2 \pi^2 \frac{T I}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} \quad (\text{b})$$

an, aus der mit der Abkürzung $K = \frac{\pi^2}{8} \frac{\lambda}{A} \frac{F^2}{I}$ wie unter A die Gleichung

$$\sigma_k = a - b^2 \cdot K \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2a}{b^2 K}} - 1 \right]$$

hervorgeht.

Beispiel. Gegeben sind die Länge des Stabes $l = 10 \lambda = 10 \cdot 4,0 \text{ m}$, die Druckkraft $P = 260 \text{ t}$, Querschnittsfläche und Trägheitsmoment $F = 240 \text{ cm}^2$, $I = 52000 \text{ cm}^4$ und der Widerstand der in den Abständen λ vorhandenen gleichartigen elastischen Stützungen $A = 2,6 \text{ t/cm}$. Wie groß ist der Sicherheitsgrad gegen das seitliche Ausknicken des Gesamtstabes?

Bei einem unelastischen Verhalten, das zunächst vorausgesetzt werden muß, hat man in Gl. (a₁) einen Wert T anzunehmen, und man erhält aus Gl. (a) die Bestätigung, ob dieses T tatsächlich der sich als Resultat ergebenden Knickspannung zugeordnet ist. Um die Wahl zu erleichtern, lassen wir zuerst die Ganzzahligkeit der n außer acht, d. h. wir verwenden die Formel (b). Mit

$$K = \frac{\pi^2}{8} \frac{400^2}{2,6} \frac{240^2}{52000} = 210,24$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 3,10 - 0,00013 \cdot 210,24 \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{47\,723}{210,24}} - 1 \right] = \\ &= 3,10 - 0,385 = 2,715 \text{ t/cm}^2, \end{aligned}$$

also $P_k = 2,715 \cdot 240 = 651,6 \text{ t}$. Der Sicherheitsgrad gegen Ausknicken wäre $651,6 : 260 = 2,506$.

Jetzt bestimmen wir die Knicklast nach Gl. (a). Dem vor gefundenen σ_k entspricht ein Knickmodul $T = 313,74 \text{ t/cm}^2$, und damit ist ein Anhalt für die weitere Rechnung gewonnen. Mit diesem Wert wird aus Gl. (a₁)

$$n = \frac{10 \cdot 400}{\pi} \sqrt[4]{\frac{2,6}{400 \cdot 313,74 \cdot 52000}} = 5,7$$

und dann aus Gl. (a) mit $n = 6$ und $T = 311,1 \text{ t/cm}^2$

$$P_k = \pi^2 \frac{311,1 \cdot 52000}{10^2 \cdot 400^2} \cdot 36 + \frac{2,6}{400} \cdot \frac{10^2 \cdot 400^2}{36 \cdot \pi^2} = 359,24 + 292,71 = 652,0 \text{ t}.$$

(Die kleine Änderung bei T verursacht keinen Unterschied in n , da nur ganzzahlige Werte in Rechnung gestellt werden.) Nun ist $\sigma_k = P_k : F = 2,717 \text{ t/cm}^2$ und T in Einklang mit unserer Annahme. Der Sicherheitsgrad gegen Ausknicken ist $652,0 : 260 = 2,507$.

Bei brückenbaulichen Anwendungen (und Werten $n > 1$) unterscheidet sich das Ergebnis aus Gl. (a) sehr wenig von dem aus der ENGESSERSchen Gleichung. Die genaue Untersuchung der Seitensteifigkeit berücksichtigt die elastischen Einzelstützen und wir werden im sechsten Abschnitt, Pkt. 96, daraus die Gültigkeitsgrenze der ENGESSERSchen Formel erkennen.

54. Über den Zusammenhang zwischen Pressung und Einsenkung.

Eine Kritik des Ansatzes $p(u) = c \cdot v(u)$, mit dem wir unsere vorstehenden Rechnungen ausgeführt haben, wurde von K. WIEGHARDT gegeben.¹ Die Einsenkung an einer Stelle hängt nicht nur von der Pressung an dieser Stelle ab, sondern von der Gesamtheit aller Pressungen. WIEGHARDT ersetzt die lineare Gleichung zwischen p und v durch eine Integralgleichung, die man auch in der Form

$$p(u) = c \int K(u, \xi) \cdot v(\xi) \cdot d\xi$$

anschreiben kann (Abb. 77). Die GREENSche Funktion K stellt die sog. Einflußlinie der Pressungen vor. K ist eine unbekannte Funktion der gegenseitigen Entfernung der

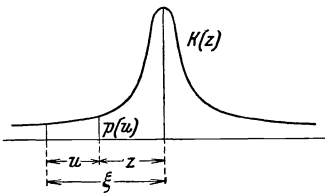


Abb. 77.

Stellen u und ξ , hat den größten Wert für $u = \xi$ und verschwindet für wachsende positive und negative $\xi - u$ entweder schon im Endlichen oder erst im Unendlichen. Die Konstante c ist ein Analogon zur früheren Bettungsziffer.

Eine Berechnung des Knickfalles würde mit dieser Gleichung einen großen mathematischen Apparat in Bewegung setzen, und wir wollen uns mit einer Annäherung begnügen. Wir schreiben mit $\xi - u = z$

$$p(u) = c \int K(z) \cdot v(u + z) \cdot dz,$$

¹ K. WIEGHARDT: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 2, S. 165—184. 1922.

entwickeln $v(u+z)$ in die TAYLORSche Reihe

$$v(u+z) = v(u) + z \cdot v'(u) + \frac{z^2}{2} v''(u) + \frac{z^3}{6} v'''(u) + \dots$$

und erhalten

$$p(u) = c \cdot v(u) \cdot \int K(z) \cdot dz + c \cdot v'(u) \cdot \int z \cdot K(z) \cdot dz + \frac{c}{2} v''(u) \cdot \int z^2 \cdot K(z) \cdot dz + \dots$$

Infolge der Symmetrie von K bezüglich der Stelle $u = \xi$ sind das zweite Integral, das vierte usf. gleich Null, und wenn man beim vierten Glied abbricht und die neuen Konstanten

$$c \int K(z) \cdot dz = c_1, \quad \frac{c}{2} \int z^2 \cdot K(z) \cdot dz = c_2$$

einführt, gewinnt man die Beziehung

$$p(u) = c_1 \cdot v(u) + c_2 \cdot v''(u).$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite bildet eine Korrektur der früheren Gleichung, und bei Berücksichtigen dieses Gliedes wird man der WIEGHARDTSchen Forderung einigermaßen entgegenkommen.¹

Die für einen Stab mit konstantem rechteckigen Querschnitt und konstanter Druckkraft abgeleitete Differentialgleichung von Pkt. 46 wird mit unserer Formel

$$\frac{d^4 v}{d u^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 v}{d u^2} + \frac{b}{EI} \left(c_1 v + c_2 \frac{d^2 v}{d u^2} \right) = 0,$$

oder

$$\frac{d^4 v}{d u^4} + \frac{P + b c_2}{EI} \frac{d^2 v}{d u^2} + \frac{c_1 b}{EI} v = 0.$$

Sie unterscheidet sich nur dadurch von der früheren Gleichung, daß an Stelle von P jetzt $P + b c_2$ steht. Alle Erwägungen von vor gelten somit, wenn man statt P den Wert $P + b c_2$ nimmt.

Wie groß sind die Konstanten c ? Für den praktischen Fall eines auf dem Boden gelagerten Stabes sind keine Versuchsergebnisse vorhanden, die eine Berechnung der beiden Konstanten gestatten. Messungen an Eisenbahngleisen zeigten eine gute Übereinstimmung mit den nach der üblichen Theorie ermittelten Durchbiegungen und Pressungen.² Aber diese wertvollen Experimente lassen sich nicht mit Sicherheit heranziehen, da bei der Lagerung auf Querschwellen die Stützung keine stetige war. Ältere Versuche bewiesen eigentlich nur, daß die Senkungen sehr rasch mit der Entfernung von der Laststelle abklingen.³ Wirklichen Aufschluß könnten erst sorgfältige Prüfungen mit kontinuierlich elastisch gestützten Stäben bringen.⁴

¹ J. RATZERSDORFER: 2. Internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien, 1929. S. 316—318.

² S. TIMOSHENKO: Method of analysis of Statical and Dynamical Stresses in Rail. Verhandl. d. 2. Internat. Congr. f. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. S. 407.

³ Versuche von A. FÖPPL im Hofe seines Laboratoriums. Vorl. über Techn. Mechanik, 7. Aufl. 1919. Bd. 3, S. 258.

⁴ Siehe auch H. GRANHOLM: On the elastic stability of piles surrounded by a supporting medium. Dissertation. Stockholm, 1929. — Auch bei Boden-

Fünfter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit von Stabwerken.¹

§ 18. Die reine Fachwerkknickung.

55. Die Knickgleichung bei ebenen oder räumlichen Fachwerken.

Wir betrachten zuerst ein *ebenes System*, ein Tragwerk von k Punkten oder Knoten, die durch s gerade Linien oder Stäbe miteinander verbunden sind und (skalar gezählt) $m < 2k$ Bewegungsbeschränkungen oder Auflagerbedingungen unterworfen werden. Angenommen ist, daß das System eine „natürliche“ Lage besitzt, bei der weder äußere noch innere Kräfte wirksam sind. Bekannt seien von jedem Stab die in diesem

Zustand vorhandene „natürliche“ Länge l und das Produkt aus dem Modul E in die Querschnittsfläche F des Stabes. E ist entweder konstant (YOUNG'Scher Modul), oder es ist sein „augenblicklicher“ Wert, der Knickmodul, gegeben.

Haben in irgendeinem verzerrten Zustand des Systems, der aber mit den Auflagerbedingungen verträglich ist, die einzelnen Stäbe die Längen a , so besteht in jedem Stab eine Kraft von der Größe

$$S = EF \frac{a-l}{l}, \quad (1)$$

wobei eine Zugkraft positives Vorzeichen besitzt. Wir beziehen für unsere Rechnung das System auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem x, y und nennen α_{ix} den Winkel zwischen dem Stab ix und der x -Achse; der Winkel wird hierbei von der positiven x -Achse im Gegenuhrzeigersinn zum Stab gezählt (Abb. 78). Um das Gleichgewicht aufrechtzuerhalten, muß an dem x -ten Knoten eine äußere Kraft angreifen, deren rechtwinkelige Komponenten X_x, Y_x durch die Gleichungen

$$\sum_i S_{ix} \cdot \cos \alpha_{ix} = X_x, \quad \sum_i S_{ix} \cdot \sin \alpha_{ix} = Y_x$$

untersuchungen finden sich Ansätze, bei denen das elastische Verhalten mit zwei Konstanten erfaßt werden soll; F. KÖGLER: Über Baugrund-Probekbelastungen. Die Bautechnik, Jahrg. 9, H. 24. 1931.

¹ R. v. MISES: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 406—422. 1923. — R. v. MISES u. J. RATZERSDORFER: Die Knicksicherheit von Fachwerken. A. gl. O., Bd. 5, S. 218—285. 1925. Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken. A. gl. O., Bd. 6, S. 181—199. 1926.

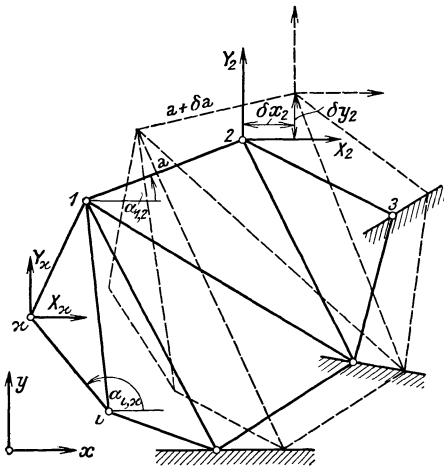


Abb. 78.

verknüpft sind. Unter Beachtung von (1) kann man hierfür

$$\sum_{\iota} \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \alpha \right]_{\iota, \kappa} - X_{\kappa} = 0, \quad \sum_{\iota} \left[EF \frac{a-l}{l} \sin \alpha \right]_{\iota, \kappa} - Y_{\kappa} = 0 \quad (2)$$

schreiben, für $\kappa = 1, 2, \dots, k$. Die Summe erstreckt sich über alle Indizes ι , die den mit dem κ -ten Knoten verbundenen Stäben entsprechen. Setzt man für nicht vorhandene Verbindungen $F_{\iota, \kappa} = 0$, so darf man die Summation auch einheitlich von $\iota = 1$ bis k ausdehnen. Es können also $2k$ Gleichungen der Form (2) aufgestellt werden, die bei gegebener Lage der Knotenpunkte sämtliche äußeren Kräfte, die m Auflagerkräfte und die $2k - m$ Lastgrößen bestimmen. Wir wollen nun unter dem „reduzierten System“ von (2) die $2k - m$ Gleichungen verstehen, die übrigbleiben, wenn man die mit Auflagerkräften fortläßt. Die Koordinatenrichtungen dürfen für jeden Knoten beliebig gewählt werden, und daher ist es möglich, bei einer einfachen Bewegungsbeschränkung die eine Koordinatenrichtung parallel der Bewegungsnormalen zu wählen und die zugehörige Gleichgewichtsbedingung auszuschalten. Sogenannte „elastische“ Auflager denken wir uns durch Stäbe ersetzt, die in das System einbezogen werden. Auf jeden Fall wird man schließlich $2k - m$ reduzierte Gleichungen bekommen, die Lastwerte und keine Auflagergrößen enthalten.

Zu einem verzerrten Zustand gibt es nur ein System von Kräften, mit denen sich das Tragwerk im Gleichgewicht befindet, während hingegen das Umgekehrte, daß zu einem Kräftesystem nur ein verformter Zustand gehört, nicht behauptet werden kann. Wir bezeichnen eine beliebige verzerrte Lage mit den zugeordneten äußeren Kräften als „Gleichgewichtsfigur“.

Um die Stabilität einer bestimmten Gleichgewichtsfigur zu untersuchen, erteilen wir jedem Knoten, soweit es die Auflagerbedingungen zulassen, unendlich kleine Verschiebungen $\delta x, \delta y$. Bei der vor angedeuteten Achsenwahl wird erreicht, daß m von diesen Verschiebungsgrößen Null werden, während die übrigen $2k - m$ willkürlich bleiben. Dabei verändern sich die Längen a um δa , die Winkel α um $\delta \alpha$, und man gewinnt aus den Gleichungen

$$a_{\iota, \kappa}^2 = (x_{\kappa} - x_{\iota})^2 + (y_{\kappa} - y_{\iota})^2, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\iota, \kappa} = (y_{\kappa} - y_{\iota}) : (x_{\kappa} - x_{\iota})$$

durch Differentiation bzw. durch einfache Überlegungen

$$\delta a_{\iota, \kappa} = \delta (x_{\kappa} - x_{\iota}) \cdot \cos \alpha_{\iota, \kappa} + \delta (y_{\kappa} - y_{\iota}) \cdot \sin \alpha_{\iota, \kappa} \quad (3)$$

und

$$a_{\iota, \kappa} \cdot \delta \alpha_{\iota, \kappa} = -\delta (x_{\kappa} - x_{\iota}) \cdot \sin \alpha_{\iota, \kappa} + \delta (y_{\kappa} - y_{\iota}) \cdot \cos \alpha_{\iota, \kappa}.$$

Ermittelt man für die Stablängen $a + \delta a$ nach Gl. (2) die Stabkräfte und setzt sie unter den Winkeln $\alpha + \delta \alpha$ in den Knoten zusammen, so gelangt man zu den neuen Kräften $X + \delta X$ bzw. $Y + \delta Y$, die erforderlich wären, den neuen Zustand in Wirksamkeit zu halten. Wir nehmen hierbei an, daß $\delta X_{\kappa} = \delta Y_{\kappa} = 0$ sind, d. h. daß die *äußeren Lasten an Größe und Richtung unverändert mit ihren Angriffspunkten mitgehen*. Die Gleichungen, die erfüllt sein müssen, damit die neue Figur mit den

alten Kräften eine Gleichgewichtsfigur bildet, bekommt man, wenn man die linken Seiten der Gl. (2) nach den Regeln der Differentialrechnung „variirt“, d. h. statt $\sin \alpha$ jetzt $\cos \alpha \cdot \delta \alpha$, statt a jetzt δa schreibt usf.:

$$\begin{aligned} \sum_i \left[-EF \frac{a-l}{l} \sin \alpha \cdot \delta \alpha + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \cos \alpha \right]_{ix} &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \alpha \cdot \delta \alpha + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \sin \alpha \right]_{ix} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Der erste Teil in der Summe rührt von der Drehung $\delta \alpha$, der zweite von der Längenänderung δa her. Die Anzahl dieser Gleichungen ist $2k - m$. Führt man für $\delta \alpha$ und δa die Ausdrücke (3) ein, so entstehen $2k - m$ lineare homogene Gleichungen für die $2k - m$ unabhängigen Verrückungen δx , δy . Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems nennen wir „Knickbedingung“ oder „Knickgleichung“.

Verwendet man das System der nicht reduzierten $2k$ Gleichungen, so sind noch m Gleichungen mit den Werten δX , δY für die Auflagerkräfte vorhanden. Man kann sie entweder eliminieren oder mit dem nicht reduzierten System weiterrechnen.

Zu beachten ist, daß bei unserem Ansatz von der Kleinheit der Formänderungen oder Verschiebungen kein Gebrauch gemacht wurde. Die Differenzen $a - l$ sind endliche Werte, die Winkel α in den Gl. (2) sind exakt die Winkel der Stäbe in der verzerrten Gleichgewichtslage. Im Ergebnis unserer Rechnungen kann aber wohl mitunter angenähert $a = l$ genommen werden. Die Werte δa , δx , δy sind jedoch im strengen Sinne unendlich kleine Größen.

Dieses allgemeine Verfahren ist mit geringen Änderungen auf den dreidimensionalen Fall übertragbar. Gegeben seien bei einem *Raumfachwerk* k Knoten, s Stäbe und $m < 3k$ Auflagerbedingungen.

An Stelle der Gl. (2) treten Ansätze mit den drei Richtungskosinussen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ bezüglich der drei Koordinatenachsen x , y , z .

$$\begin{aligned} \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \alpha \right]_{ix} - X_x &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \beta \right]_{ix} - Y_x &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \gamma \right]_{ix} - Z_x &= 0. \end{aligned} \quad (2')$$

Statt der Gl. (3) hat man die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \delta a_{ix} &= \delta(x_x - x_i) \cdot \cos \alpha_{ix} + \delta(y_x - y_i) \cdot \cos \beta_{ix} + \delta(z_x - z_i) \cdot \cos \gamma_{ix}, \\ a_{ix} \cdot \delta(\cos \alpha_{ix}) &= \delta(x_x - x_i) - \cos \alpha_{ix} \cdot \delta a_{ix}, \\ a_{ix} \cdot \delta(\cos \beta_{ix}) &= \delta(y_x - y_i) - \cos \beta_{ix} \cdot \delta a_{ix}, \\ a_{ix} \cdot \delta(\cos \gamma_{ix}) &= \delta(z_x - z_i) - \cos \gamma_{ix} \cdot \delta a_{ix}. \end{aligned} \quad (3')$$

Die Gl. (4), deren gleich Null gesetzte Determinante als Knickgleichung bezeichnet wird, lauten jetzt

$$\begin{aligned} \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cdot \delta(\cos \alpha) + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \cos \alpha \right]_{i,z} &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cdot \delta(\cos \beta) + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \cos \beta \right]_{i,z} &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cdot \delta(\cos \gamma) + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \cos \gamma \right]_{i,z} &= 0, \end{aligned} \quad (4')$$

wobei die δa und $\delta(\cos \alpha)$ usf. mit Hilfe von (3') durch δx , δy , δz auszudrücken sind. Das ebene Fachwerk mit ebener Deformation ist der räumliche Fall mit den zusätzlichen Bedingungen $\delta z = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Sind für die Gleichgewichtsfigur, deren Stabilität untersucht werden soll, die Stabkräfte bekannt, so kann man sie zur Vereinfachung in die Gl. (4) bzw. (4') für $EF \frac{a-l}{l}$ einführen. Ein besonders bequemes Verfahren ergibt sich aber bei *statisch bestimmten* (ebenen oder räumlichen) *Fachwerken*. Man ermittelt nach irgendeiner der üblichen Methoden die Stabkräfte S für die Gleichgewichtsfigur und dann die Stabkräfte S' nach der Verschiebung, indem man die neuen Winkel der Berechnung zugrunde legt. Der Ausdruck $\delta S = S' - S$ ist linear und homogen in den δx , δy , und dem Ansatz (4) entspricht das System der $2k - 3$ Gleichungen

$$\left[\delta S - EF \frac{\delta a}{l} \right]_{i,z} = 0, \quad (5)$$

wo für δa wieder die Beziehungen (3) zu nehmen sind. Inhaltlich besagt die Gl. (5) dasselbe wie Gl. (4), der Unterschied ist nur formaler Natur, da hier Gleichungen für jeden Stab, dort für jeden Knoten aufgestellt werden. Bei statisch unbestimmten Systemen lassen sich die Stabkräfte aus den Stabwinkeln nicht unabhängig von den Verschiebungen berechnen, und das ist die Ursache, daß die Gl. (5) auf statisch bestimmte Systeme beschränkt sind. Bildet man die Determinante der Gl. (5) und setzt sie gleich Null, so erhält man die Knickgleichung. Wie sich das Verfahren im einzelnen gestaltet, wird später gezeigt.

56. Begriff der Stabilität und Bedeutung der Knickgleichung.

Eine Gleichgewichtsfigur heißt „*stabil*“, wenn zu jeder unendlich kleinen, mit den Auflagerbedingungen verträglichen Verschiebung ein positiver Arbeitsaufwand gehört. Man bezeichnet sie (gegen gewisse Störungen) als „*instabil*“, wenn es auch nur eine solche Verschiebungsmöglichkeit gibt, die ohne Arbeitsaufwand oder unter Arbeitsgewinn vor sich geht. Endlich kann man eine Gleichgewichtsfigur „*indifferent*“ nennen, wenn jede Verschiebung ohne Arbeitsaufwand erfolgt. So ist

z. B. ein schwerer Körper im tiefsten Punkt einer Schale im stabilen, auf dem Scheitel einer Kuppe im instabilen, auf einer horizontalen Ebene im indifferenten Gleichgewicht. Ebenso steht ein schweres Prisma (gegen Kippen) stabil auf dem Tisch, ein Ei instabil, weil im ersten Fall ein Heben, im zweiten ein Senken des Schwerpunktes mit der Störung verbunden ist.

Wir wollen jetzt und im folgenden Punkt wegen der einfachen Schreibweise nur vom ebenen Fachwerk sprechen, selbstverständlich haben alle Überlegungen aber auch für das räumliche System Geltung.

Die Größe der zur Verschiebung δx , δy erforderlichen Arbeit erhält man, wenn man jede der Gl. (4) von Pkt. 55 der Reihe nach mit den ihr entsprechenden Verschiebungsgrößen $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2, \dots$ multipliziert und dann addiert. Denn die linken Seiten der Gl. (4) stellen die Kraftgrößen dar, die, abgesehen von den Kräften $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ notwendig wären, um das Stabwerk in den neuen Zustand zu bringen, die Arbeit der X, Y ist jedoch Null. — Wir können auch einen anderen Weg einschlagen. Die Formänderungsarbeit oder das elastische Potential für die Gleichgewichtsfigur ist

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ix} \left[\frac{EF}{l} (a-l)^2 \right]_{ix} - L = A - L, \quad (A)$$

wobei sich die Summe über alle Stäbe erstreckt und L die Arbeit der äußeren Kräfte

$$L = \sum_x (X_x x_x + Y_x y_x) \quad (A_1)$$

vorstellt. Die rechte Seite der Gl. (A) ist eine Funktion der $2k - m$ freien Koordinaten x, y (die auch in den a stecken), und dabei sind nach den früheren Gl. (3)

$$\frac{\partial a_{ix}}{\partial x_x} = \cos \alpha_{ix}, \quad \frac{\partial a_{ix}}{\partial y_x} = \sin \alpha_{ix}.$$

Beim Übergang zu einer Nachbarfigur ist also die Verzerrungsarbeit

$$\begin{aligned} \delta U = & \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \dots \\ & \dots \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \cdot \delta x_1^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} \cdot \delta y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \delta x_1 \cdot \delta y_1 + \dots \right] \quad (B) \end{aligned}$$

erforderlich. Nun gilt nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für jede Gleichgewichtsfigur

$$\frac{\partial A}{\partial x_x} = \frac{\partial L}{\partial x_x}, \quad \frac{\partial A}{\partial y_x} = \frac{\partial L}{\partial y_x},$$

und da $U = A - L$, ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_x} &= \sum_i \left[\frac{EF}{l} (a-l) \cos \alpha \right]_{ix} - X_x = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y_x} &= \sum_i \left[\frac{EF}{l} (a-l) \sin \alpha \right]_{ix} - Y_x = 0, \end{aligned}$$

d. h. mit der Gleichgewichtsbedingung (2) von Pkt. 55. Mit anderen Worten: Eine unendlich kleine Verrückung aus dem durch (2) gekennzeichneten Gleichgewichtszustand erfolgt in erster Näherung arbeitslos.

Um zu bestimmen, ob δU positiv ist, muß man also die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigen, die in (B) schon mit angeschrieben wurden. Für die Lasten X, Y gibt es solche Glieder nicht, da L in x und y linear ist. (Darin liegt die Annahme, daß die X und Y parallel und der Größe nach unverändert bei der Verzerrung mitgehen.) Die Glieder zweiter Ordnung in (B) lassen sich bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ in der Form ansetzen

$$\begin{aligned} & \delta x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \dots \right] \\ & + \delta y_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \dots \right] \\ & + \delta x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \right] \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{B'}$$

wobei das Differentiationszeichen vor der Klammer sich nur auf die ersten Faktoren jedes Summanden, nicht auf die $\delta x, \delta y$ bezieht.

Der immer gleiche Klammersausdruck stimmt mit den Gliedern erster Ordnung von δU überein und mag etwa $\delta_1 U$ heißen. Der ganze Ausdruck (B') ist homogen vom zweiten Grad in den Verrückungen $\delta x, \delta y$. Ein quadratisches Glied wie δx_1^2 kommt nur einmal vor, und zwar mit dem Koeffizienten $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$; die gemischten Glieder erscheinen zweimal mit dem gleichen Koeffizienten, z. B. $\delta x_1, \delta y_1$ in der ersten Zeile an zweiter Stelle und in der zweiten Zeile an erster Stelle, jedesmal multipliziert mit $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial y_1}$. Wir behaupten nun: Die Koeffizienten der Gl. (4) von Pkt. 55, nachdem man in sie $\delta x, \delta y$ als Variable eingeführt hat, sind identisch mit den Elementen der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial y_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \cdot \partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{C}$$

die aus den Koeffizienten von (B') gebildet ist. Man sieht dies wie folgt ein.

Bezeichnen wir für den Augenblick die linke Seite der ersten Gl. (2) mit G_1 , so war die erste Gl. (4) so entstanden, daß die Veränderung δG_1 , die G_1 durch die Verrückungen $\delta x, \delta y$ erfährt, bestimmt und gleich Null gesetzt wurde. Denkt man sich hier die $\delta x, \delta y$ als Variable, so hat man

$$\delta G_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \dots = 0.$$

Nun ist aber vor gezeigt worden, daß G_1 nichts anderes ist als $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, mithin sind die Koeffizienten der eben angeschriebenen Gleichung auch

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial y_1}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}, \quad \dots$$

Da das Analoge für jede der Gl. (4) bzw. (2) gilt, ist unsere Behauptung erwiesen.

Man erkennt somit: Die Lösbarkeit der Gl. (4) oder das Verschwinden ihrer Determinante, d. i. der Determinante (C), besagt, daß der betreffende Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist, d. h. daß der Übergang zu einem beliebigen Nachbarzustand auch bei Berücksichtigen der Glieder zweiter Ordnung arbeitslos erfolgt.

57. Kriterien für die Stabilität.

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Koeffizienten der Gl. (4) von Pkt. 55, also auch die Elemente von (C) in Pkt. 56 oder die zweiten Ableitungen von U mit

$$c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, \dots; c_{2,1}, c_{2,2}, \dots; c_{3,1}, c_{3,2}, \dots; \dots$$

so haben wir zu fragen: Wann ist, damit ein Kleinstwert von U unter Berücksichtigen der Glieder zweiter Ordnung vorhanden ist, der Ausdruck

$$c_{1,1} \cdot \delta x_1^2 + 2c_{1,2} \cdot \delta x_1 \cdot \delta y_1 + c_{1,3} \cdot \delta x_1 \cdot \delta x_2 + \dots$$

nur positiver Werte fähig? Man nennt einen solchen homogenen Ausdruck vom zweiten Grad in mehreren Variablen eine „quadratische Form“. Die Theorie der quadratischen Formen liefert für das Positivsein einer Form die folgenden Bedingungen:

a) Es ist notwendig (aber nicht hinreichend), daß die Determinante der c positiv ist.

b) Sieht man die c als Veränderliche an, d. h. betrachtet man verschiedene Gleichgewichtsfiguren, so wird das Gebiet der stabilen von den instabilen immer durch solche getrennt, für die die Determinante gleich Null ist (ohne daß aber die Umkehrung gilt; das Überschreiten eines Punktes, in dem die Determinante verschwindet, muß noch nicht in das instabile Gebiet führen).

c) Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist, daß außer der ganzen Determinante auch jede Determinante positiv ist, die durch Fortlassen der letzten Zeilen und ebenso vielen Spalten aus der ursprünglichen entsteht, also

$$c_{1,1} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{vmatrix} > 0 \text{ usf.}$$

Damit wird jede Stabilitätsfrage beantwortbar. Insbesondere lehrt der zweite wichtigste Satz: *Stabile Gleichgewichtsfiguren werden von instabilen stets durch solche getrennt, für die die Knickgleichung erfüllt ist.*

Wenn ein spannungsloser Zustand existiert, ist er immer stabil. Denn sobald alle $a = l$ sind, ist $U = 0$, und da U als Quadratsumme nur positive Werte hat, bedarf jede Veränderung, wenn sie überhaupt Spannungen hervorruft, einen positiven Arbeitsaufwand. Betrachtet man daher eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren, bei denen sich die äußeren Kräfte um einen gemeinsamen Faktor λ unterscheiden, sich also untereinander proportional verändern, und geht man mit $\lambda X, \lambda Y$ in die Knickgleichung ein, so erhält man eine Gleichung für λ , und man hat nur den kleinsten λ -Wert aufzusuchen, der dieser Gleichung genügt. Für alle λ unterhalb dieses Wertes herrscht bestimmt Stabilität, da der Übergang vom stabilen spannungslosen Zustand zu einem instabilen notwendig durch einen der Knickgleichung entsprechenden hindurchführen muß. Weiß man überdies, daß λ eine einfache Wurzel der Knickgleichung ist, so ändert ihre linke Seite, d. i. die Determinante (C), hier sicher ihr Vorzeichen; für größere λ besteht also Instabilität.

58. Das einfachste ebene Fachwerk.

Zunächst soll an einem „Schulbeispiel“ die vor entwickelte allgemeine Theorie erläutert werden.

Zweiglied lange, vollkommen gleiche Stäbe sind um feste Punkte drehbar und im gemeinsamen Gelenk in Richtung ihrer Winkelhalbierenden durch ein Gewicht P belastet (Abb. 79). Die kritischen Werte dieser Last sind zu bestimmen.

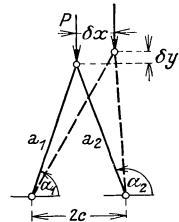


Abb. 79.

Elementares Verfahren. Das System besitzt drei Knoten ($k = 3$), zwei Stäbe ($s = 2$) und vier Auflagerbedingungen ($m = 4$). Die beiden Stäbe haben im spannungsfreien Zustand je die Länge l ; im verzernten Zustand unter der Last P sind die Stablängen a_1 und a_2 und die Neigungswinkel der Stäbe gegen die durch die Auflagerpunkte gelegte Achse α_1 und α_2 . Erteilt man dem gemeinsamen Gelenk eine Verschiebung $\delta x, \delta y$, so sind nach den Gl. (3) von Pkt. 55

$$\delta a_1 = \delta x \cdot \cos \alpha_1 + \delta y \cdot \sin \alpha_1, \quad \delta a_2 = \delta x \cdot \cos \alpha_2 + \delta y \cdot \sin \alpha_2,$$

$$a_1 \cdot \delta \alpha_1 = -\delta x \cdot \sin \alpha_1 + \delta y \cdot \cos \alpha_1, \quad a_2 \cdot \delta \alpha_2 = -\delta x \cdot \sin \alpha_2 + \delta y \cdot \cos \alpha_2.$$

Die Gl. (4) lauten unter Fortlassen des Konstantwertes $\frac{EF}{l}$, der bei der Knickbedingung herausfällt,

$$-(a_1 - l) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - (a_2 - l) \cdot \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cdot \delta a_1 + \cos \alpha_2 \cdot \delta a_2 = 0,$$

$$(a_1 - l) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 + (a_2 - l) \cdot \cos \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cdot \delta a_1 + \sin \alpha_2 \cdot \delta a_2 = 0.$$

Setzt man für $\delta \alpha$ und δa die Werte ein, so ergibt sich

$$\delta x \cdot \left[2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} \right) \right] + \delta y \cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} \right] l = 0,$$

$$\delta x \cdot \left[\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} \right] l + \delta y \cdot \left[2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right) \right] = 0$$

und die Knickgleichung wird

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} \right) & l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} \right) \\ l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} \right) & 2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right) \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = 4 - 2l \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{l^2}{a_1 \cdot a_2} \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Verfahren mit Hilfe der Formänderungsarbeit. Der Ausdruck für das elastische Potential, Gl. (A) von Pkt. 56, ist

$$U = \frac{1}{2} \frac{EF}{l} [(a_1 - l)^2 + (a_2 - l)^2] - L.$$

Wenn wir den konstanten Faktor $\frac{EF}{l}$ weglassen, erhalten wir unter Beachtung der früheren Gl. (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2 - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} &= l \left(\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2 - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} \right). \end{aligned}$$

Die Knickbedingung, d. i. die gleich Null gesetzte Determinante (C)

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

hat wieder den vor angeschriebenen Wert.

Wir betrachten, um die Knickgleichung zu diskutieren, die Stabilität der symmetrischen Gleichgewichtsfigur: $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi - \alpha$. Hierfür ist

$$0 = \left(1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha \right) \cdot \left(1 - \frac{l}{a} \cos^2 \alpha \right),$$

oder

$$\sin^2 \alpha = \frac{a}{l}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{a}{l}.$$

Man erkennt, daß $a < l$ sein muß, daß also nur bei Druck eine Instabilität überhaupt möglich wird. Ist $2c$ die Entfernung der beiden festen Punkte, um die die Stäbe drehbar sind, so ist $c = a \cdot \cos \alpha$, und damit werden die Knickgleichungen

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{c}{l}, \quad \cos^3 \alpha = \frac{c}{l},$$

wobei aus der ersten Bedingung zwei Lösungen für α hervorgehen.

Die kritischen Lasten ergeben sich aus $P = -2S \cdot \sin \alpha = -2EF \cdot \frac{a-l}{l} \sin \alpha$. Nun ist $\frac{a-l}{l} = -\cos^2 \alpha$, bzw. $-\sin^2 \alpha$ und daher

$$P_k = 2EF \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha, \quad \text{bzw.} \quad P_k = 2EF \cdot \sin^3 \alpha.$$

Nehmen wir als *Beispiel* $\frac{c}{l} = 0,336$, so sind die kritischen Werte von α der Größe nach geordnet

$$\cos \alpha' = 0,400, \quad \cos \alpha'' = 0,695 \left(= \sqrt[3]{\frac{c}{l}} \right), \quad \cos \alpha''' = 0,739$$

und die zugehörigen kritischen Lasten

$$P_k' = 0,29 EF, \quad P_k'' = 0,74 EF, \quad P_k''' = 0,74 EF.$$

Die Abb. 80 zeigt die spannungsfreie Lage und die drei für dieses $\frac{c}{l}$ kritischen Stellungen maßstabrichtig aufgetragen.

Um zu erfahren, was die kritischen Werte aber bedeuten, müssen wir auf die vollständige Stabilitätsbedingung zurückgreifen. Die Knickdeterminante wird für den Fall der Symmetrie

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l}{a} \cos^2 \alpha \end{vmatrix}.$$

Nun verlangt die Stabilität (als notwendige und hinreichende Bedingung), daß die Determinante selbst und ihr erstes Element positiv seien, d. h. daß

$$1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha > 0, \quad 1 - \frac{l}{a} \cos^2 \alpha > 0.$$

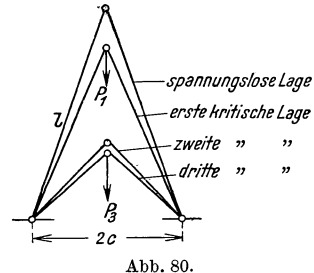


Abb. 80.

Dies ist auch unmittelbar verständlich. Denn das Nullwerden der zwei anderen Elemente der Determinante besagt: Die Verrückung in der x -Richtung bedarf nur einer x -Kraft, nämlich $\left(1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha\right) \cdot \delta x^2$, die Verrückung in der y -Richtung nur einer y -Kraft $\left(1 - \frac{l}{a} \cos^2 \alpha\right) \cdot \delta y^2$ und beide Kräfte müssen positiv sein. Mit der Beziehung $a \cdot \cos \alpha = c$ gehen die Stabilitätsbedingungen über in:

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha < \frac{c}{l}, \quad \cos^3 \alpha < \frac{c}{l}.$$

Setzt man statt der Ungleichheitszeichen die Gleichheitszeichen, so erhält man wieder die Knickbedingungen. In der Abb. 81 sind die Ausdrücke $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ und $\cos^3 \alpha$ als Abszissen zu den Ordinaten $c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ aufgetragen; $c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ist die jeweilige Höhenlage der Spitze. Ein Schnitt im Abstand $x = \frac{c}{l} = 0,336$ liefert die kritischen Werte und läßt erkennen, daß nur oberhalb des ersten Wertes beide Ungleichheiten erfüllt sind. Da er auf der $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ -Linie liegt, tritt Instabilität zuerst gegen horizontale Verrückungen auf. Sie besteht aber nur in einem begrenzten Gebiet — bis zum zweiten Schnitt mit derselben Linie. Schon früher ist jedoch beim Schnitt mit der $\cos^3 \alpha$ -Linie Instabilität gegen Vertikalstörungen vorhanden. Man entnimmt der Abbildung, daß bei größeren

$\frac{c}{l}$ -Werten ($\frac{c}{l} > 0,385$) diese allein möglich wird. Ist z. B. $\frac{c}{l} = 0,9551$, so hat nur die zweite Knickgleichung eine Lösung $\cos \alpha = 0,9848$, und damit ergibt sich die kritische Last $P_k = 0,01 EF$. Im Falle $\frac{c}{l} = 1$, d. h. bei den drei Gelenkpunkten in einer Geraden ist $P_k = 0$ und das System für jeden Lastangriff instabil.

Wir haben also das Ergebnis: Stellt man zwei gleiche Stäbe unter spitzem Winkel zusammen und belastet sie in ihrem Schnittpunkt in Richtung der Winkelsymmetralen, so werden sie bei wachsendem Druck zuerst instabil gegen Seitenstörungen, dann bevor noch diese Instabilität aufhört, instabil gegen Vertikalstörungen. Bei einem flachen Anfangswinkel der Stäbe gilt nur diese Instabilität. In einem

kleinen Zwischenbereich von $\frac{c}{l}$ endet die seitliche Stabilität, ehe die vertikale beginnt.

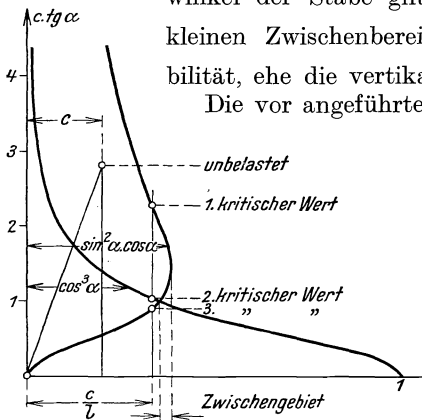


Abb. 81.

Die vor angeführten Werte zeigen, daß bei Stäben aus den üblichen Baustoffen, Stahl, Holz o. dgl., die kritischen Belastungen weit über jenen liegen, die das Material zufolge seiner begrenzten Festigkeit verträgt. Die Stabilitätsuntersuchung wird also in diesem Fall keine praktische Bedeutung besitzen. Andererseits wäre die hier getroffene Anordnung sehr gut für Demonstrationsversuche geeignet. Man müßte dann an Stelle von eigentlichen Stäben Zug- und Druck-

federn (Schraubenfedern) verwenden, die Längenänderungen bis zu etwa 10% der natürlichen Länge leicht zulassen.

Zusatz. Das Tragsystem, der einfachste Fall einer statisch bestimmten Konstruktion, kann auch bequem nach dem *Stabkraftverfahren* berechnet werden. Durch Zerlegen nach den beiden Stabrichtungen erhält man die Kräfte in den Stäben a_1 und a_2

$$S_1 = -P \frac{\cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad S_2 = P \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Die Stabkraftzuwächse sind somit

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= P \frac{\cos \alpha_2 \cdot \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \delta \alpha_1 - P \frac{\cos \alpha_1}{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \delta \alpha_2, \\ \delta S_2 &= -P \frac{\cos \alpha_2}{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \delta \alpha_1 + P \frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \delta \alpha_2. \end{aligned}$$

Wir bilden die Differenz und die Summe der δS und bekommen bei der symmetrischen Gleichgewichtsform, d. h. für $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi - \alpha$

$$\delta S_1 - \delta S_2 = -\frac{P}{2 \cos \alpha} (\delta \alpha_1 + \delta \alpha_2), \quad \delta S_1 + \delta S_2 = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} (\delta \alpha_1 - \delta \alpha_2).$$

Jedes δS setzt man gleich dem $EF \frac{\delta a}{l}$ und mit Hilfe der Gleichungen für δa und $\delta \alpha$ werden

$$\delta S_1 - \delta S_2 \equiv \frac{EF}{l} 2 \cos \alpha \cdot \delta x = \frac{P}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{a} 2 \sin \alpha \cdot \delta x,$$

$$\delta S_1 + \delta S_2 \equiv \frac{EF}{l} 2 \sin \alpha \cdot \delta y = \frac{P \cdot \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{a} 2 \cos \alpha \cdot \delta y,$$

also

$$P = 2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} EF \frac{a}{l} \quad \text{und} \quad P = 2 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} EF \frac{a}{l}.$$

Aus der Beziehung $S = -\frac{P}{2 \sin \alpha} = EF \frac{a-l}{l}$ folgt $EF \frac{a}{l} = EF - \frac{P}{2 \sin \alpha}$ und wenn man damit in die Gleichungen für P eingeht, entstehen wie früher die Formeln $P_k = 2 EF \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$ bzw. $P_k = 2 EF \cdot \sin^3 \alpha$.

59. Das einfachste räumliche Fachwerk.

Wir übertragen den Fall des Beispiels von Pkt. 58 in den Raum. Drei vollkommen gleiche Stäbe sind um feste Punkte drehbar, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden; im gemeinsamen Kugelgelenk sind sie durch ein Gewicht P in Richtung ihrer Symmetralen belastet (Abb. 82). Die kritischen Werte der Last P sind gesucht.

Wir gehen von der in Pkt. 55 beschriebenen elementaren Methode aus. Die Stäbe haben im spannungslosen Zustand je die Länge l ; im verzerrten Zustand unter der Last P sind die Stablängen a_1, a_2, a_3 und die Richtungskosinusse der drei Stäbe $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1, \dots, \cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3$. Dem gemeinsamen Gelenk erteilen wir die Verschiebungen $\delta x, \delta y, \delta z$ nach den drei Koordinatenrichtungen und erhalten aus den Gl. (3') die Längen- und Winkeländerungen

$$\delta a_1 = \delta x \cdot \cos \alpha_1 + \delta y \cdot \cos \beta_1 + \delta z \cdot \cos \gamma_1,$$

$$\sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 = \cos \alpha_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta x}{a_1},$$

$$\sin \beta_1 \cdot \delta \beta_1 = \cos \beta_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta y}{a_1},$$

$$\sin \gamma_1 \cdot \delta \gamma_1 = \cos \gamma_1 \cdot \frac{\delta a_1}{a_1} - \frac{\delta z}{a_1}$$

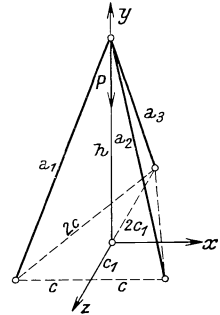


Abb. 82.

und ebensolche Gleichungen, wie sie hier für den Stab 1 angeschrieben sind, für die Stäbe 2 und 3. Die Gl. (4') lauten

$$\sum_1^3 [-(a-l) \sin \alpha \cdot \delta \alpha + \delta a \cdot \cos \alpha] = 0,$$

$$\sum_1^3 [-(a-l) \sin \beta \cdot \delta \beta + \delta a \cdot \cos \beta] = 0,$$

$$\sum_1^3 [-(a-l) \sin \gamma \cdot \delta \gamma + \delta a \cdot \cos \gamma] = 0$$

und nach Einsetzen der Werte für $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ und δa

$$0 = \delta x \cdot \left[3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \alpha}{a} \right] + \delta y \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a} + \delta z \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{a},$$

$$0 = \delta x \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a} + \delta y \cdot \left[3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \beta}{a} \right] + \delta z \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{a},$$

$$0 = \delta x \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{a} + \delta y \cdot l \sum_1^3 \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{a} + \delta z \cdot \left[3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \gamma}{a} \right].$$

Damit wird die Knickbedingung

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \alpha}{a} & l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a} & l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{a} \\ l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{a} & 3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \beta}{a} & l \sum_1^3 \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{a} \\ l \sum_1^3 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \gamma}{a} & l \sum_1^3 \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{a} & 3 - l \sum_1^3 \frac{\sin^2 \gamma}{a} \end{vmatrix}$$

Bei der Diskussion beschränken wir uns wie früher auf die symmetrischen Gleichgewichtsfiguren und setzen $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Das Koordinatensystem wählen wir derart, daß die y -Achse durch das gemeinsame Gelenk geht und der Ursprung im Schwerpunkt des Basisdreieckes von der Seitenlänge $2c$ liegt (h ist die Höhe der Spitze über der Basis), siehe Abb. 82. Sonach sind die Richtungskosinuse der drei Stäbe

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{a} = \cos \alpha, \quad \cos \alpha_2 = \cos(\pi - \alpha), \quad \cos \alpha_3 = 0,$$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \cos \beta_3 = \frac{h}{a} = \cos \beta,$$

$$\cos \gamma_1 = \cos \gamma_2 = \frac{c}{a} \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \gamma, \quad \cos \gamma_3 = -2 \cos \gamma$$

und die Knickgleichung wird

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \frac{l}{a} (3 - 2 \cos^2 \alpha) & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 - \frac{l}{a} (1 - 2 \cos^2 \gamma) \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = \left(3 - 3 \frac{l}{a} + 2 \frac{l}{a} \cos^2 \alpha \right) \cdot \left(1 - \frac{l}{a} \sin^2 \beta \right) \cdot \left(1 - \frac{l}{a} + 2 \frac{l}{a} \cos^2 \gamma \right).$$

Daher sind

$$\text{a) } \cos^2 \alpha = -\frac{3}{2} \frac{a-l}{l}, \quad \text{b) } \sin^2 \beta = \frac{a}{l}, \quad \text{c) } \cos^2 \gamma = -\frac{1}{2} \frac{a-l}{l}.$$

Die Stabilität verlangt, daß

$$3 - 3 \frac{l}{a} + 2 \frac{l}{a} \cos^2 \alpha > 0, \quad 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \beta > 0, \quad 1 - \frac{l}{a} + 2 \frac{l}{a} \cos^2 \gamma > 0,$$

wobei die linken Seiten dieser Ungleichungen die Kräfte vorstellen, die eine Verschiebung von der Größe „Eins“ in der x - bzw. y - bzw. z -Richtung erzeugen. Setzt man statt der Ungleichheitszeichen die Gleichheitszeichen, so entstehen die Formeln für die kritischen Werte. Man sieht wieder, daß $a < l$ sein muß, daß also nur bei Druck eine Instabilität möglich ist. Zwischen den Winkeln α , β und γ gilt die Beziehung $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, und wir gewinnen, wenn wir sie für die drei Stäbe anschreiben, die bei-

den Gleichungen $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta$,

$\cos \gamma = \frac{1}{2} \sin \beta$. Berücksichtigen wir noch den Ansatz $c = a \cdot \cos \alpha$, so lauten die Knickbedingungen in β ausgedrückt

a) und c) $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \beta \cdot (2 - \sin^2 \beta) = \frac{c}{l}$,

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin^3 \beta = \frac{c}{l}$.

Hierbei ist die erste Gleichung für die Instabilität in horizontaler Richtung, die zweite für die in vertikaler Richtung maßgebend.

Die kritischen Werte der Last

ergeben sich aus $P = -3 \frac{h}{l} S = -3 \frac{h}{l} E F \frac{a-l}{l}$. Nun ist $\frac{a-l}{l}$ in den Fällen a und c gleich $-\frac{1}{2} \sin^2 \beta$, im Fall b gleich $-\cos^2 \beta$, und die Höhenlage der Spitze ist bestimmt durch $h = a \cdot \cos \beta = \frac{2}{3} \sqrt{3} c \cdot \cotg \beta$. Mithin werden

$$P_k = \frac{\sqrt{3}}{2} E F \frac{c}{l} \cdot \sin 2\beta \text{ bzw. } P_k = 2 \sqrt{3} E F \frac{c}{l} \cdot \frac{\cos^3 \beta}{\sin \beta}.$$

In der Abb. 83 sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz die Werte $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \beta \cdot (2 - \sin^2 \beta)$ bzw. $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin^3 \beta$ zu den Ordinaten $\cotg \beta$ aufgetragen. Für ein gegebenes $\frac{c}{l}$ findet man daraus die kritischen Werte β . Unter dem eingezeichneten $\frac{c}{l}$ beginnt die Instabilität in horizontaler Richtung, dann folgt die Instabilität gegen Vertikalstörungen. Bei größeren $\frac{c}{l}$ -Werten ($\frac{c}{l} > 0,471$) ist nur diese vorhanden.

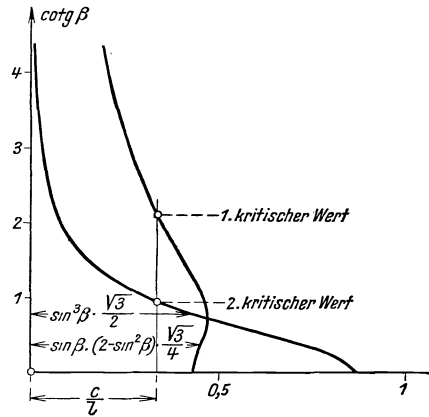


Abb. 83.

Auch die hier gefundenen Ergebnisse könnte man an einem einfachen Modell kontrollieren, bei dem an Stelle der Stäbe geeignete Federn benutzt werden.

60. Ein statisch unbestimmtes ebenes System.

Zwei gleiche Stäbe sind um feste Punkte drehbar; in der Winkelsymmetralen durch das gemeinsame Gelenk ist ein Gelenkstab so angebracht, daß die Fußpunkte der drei Stäbe in einer Geraden liegen. Die Belastung erfolgt durch ein Gewicht P in Richtung der Symmetralen (Abb. 84). Die kritischen Werte der Last P sind zu berechnen.

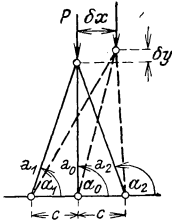


Abb. 84.

Durch Hinzufügen eines Stabes zum Fachwerk von Pkt. 58 haben wir das Schulbeispiel für ein statisch unbestimmt gelagertes Fachwerk erhalten und wir führen deshalb die Berechnung durch, wenn auch die Stabilitätsuntersuchung hier ebenfalls nicht von praktischem Wert ist.

Die drei Stäbe haben die Querschnittsflächen F, F, F_0 , die Elastizitätszahlen E, E, E_0 und im spannungsfreien Zustand die natürlichen Längen l, l, l_0 . Unter dem Lastangriff sind die neuen Stablängen a_1, a_2, a_0 und die Neigungswinkel der Stäbe gegen die durch die Auflagerpunkte gelegte Achse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0$. Nach einer Verschiebung des gemeinsamen Gelenkes um $\delta x, \delta y$ gelten für die Längen- und Winkeländerungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= \delta x \cdot \cos \alpha_1 + \delta y \cdot \sin \alpha_1, & a_1 \cdot \delta \alpha_1 &= -\delta x \cdot \sin \alpha_1 + \delta y \cdot \cos \alpha_1, \\ \delta a_2 &= \delta x \cdot \cos \alpha_2 + \delta y \cdot \sin \alpha_2, & a_2 \cdot \delta \alpha_2 &= -\delta x \cdot \sin \alpha_2 + \delta y \cdot \cos \alpha_2, \\ \delta a_0 &= \delta x \cdot \cos \alpha_0 + \delta y \cdot \sin \alpha_0, & a_0 \cdot \delta \alpha_0 &= -\delta x \cdot \sin \alpha_0 + \delta y \cdot \cos \alpha_0. \end{aligned}$$

Die Beziehungen (4) von Pkt. 55 lauten, wenn man $\frac{E_0 F_0}{E F} = k$ setzt,

$$\begin{aligned} -\frac{a_1 - l}{l} \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - \frac{a_2 - l}{l} \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 - \frac{a_0 - l_0}{l_0} k \cdot \sin \alpha_0 \cdot \delta \alpha_0 + \\ + \frac{\cos \alpha_1}{l} \cdot \delta x_1 + \frac{\cos \alpha_2}{l} \cdot \delta x_2 + \frac{\cos \alpha_0}{l_0} k \cdot \delta x_0 = 0, \\ \frac{a_1 - l}{l} \cos \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 + \frac{a_2 - l}{l} \cos \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 + \frac{a_0 - l_0}{l_0} k \cdot \cos \alpha_0 \cdot \delta \alpha_0 + \\ + \frac{\sin \alpha_1}{l} \cdot \delta y_1 + \frac{\sin \alpha_2}{l} \cdot \delta y_2 + \frac{\sin \alpha_0}{l_0} k \cdot \delta y_0 = 0. \end{aligned}$$

Nach Einführen der Werte $\delta \alpha$ und δa ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta x \cdot \left[\left(2 + k \frac{l}{l_0} \right) - l \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha_2}{a_2} + k \frac{\sin^2 \alpha_0}{a_0} \right) \right] + \\ + \delta y \cdot l \left[\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} + k \frac{\sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0}{l_0} \right] = 0, \\ \delta x \cdot l \left[\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} + \frac{\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{a_2} + k \frac{\sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0}{a_0} \right] + \\ + \delta y \cdot \left[\left(2 + k \frac{l}{l_0} \right) - l \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{a_2} + k \frac{\cos^2 \alpha_0}{a_0} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Die Knickbedingung ist die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante der δx , δy .

Wir betrachten die Stabilität der symmetrischen Gleichgewichtsfigur mit $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \pi - \alpha$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$; $a_1 = a_2 = a$, $a_0 = a \cdot \sin \alpha$ und bekommen daher als Knickbedingung die Determinantengleichung

$$0 = \begin{vmatrix} \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) - l \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{a} + \frac{k}{a \cdot \sin \alpha}\right) & \cdot \\ \cdot & \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) - \frac{l}{a} 2 \cos^2 \alpha \end{vmatrix}$$

oder

$$2 \sin^2 \alpha + \frac{k}{\sin \alpha} = \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) \frac{a}{l} \quad \text{und} \quad 2 \cos^2 \alpha = \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) \frac{a}{l}.$$

Die Stabilität verlangt, daß

$$2 + k \frac{l}{l_0} - l \left(\frac{2 \sin^2 \alpha}{a} + \frac{k}{a \cdot \sin \alpha}\right) > 0, \quad 2 + k \frac{l}{l_0} - \frac{l}{a} 2 \cos^2 \alpha > 0;$$

die linken Seiten dieser Ungleichungen sind die Kräfte, die eine Verschiebung von der Größe „Eins“ in der x - bzw. y -Richtung hervorrufen. Bei Gleichheitszeichen an Stelle der Ungleichheitszeichen erhält man die Knickbedingung. — Bedeutet $2c$ die Entfernung der äußeren Gelenkfußpunkte, so ist $c = a \cdot \cos \alpha$, und die Knickgleichungen lauten

$$\left(2 \sin^2 \alpha + \frac{k}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha = \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) \frac{c}{l} \quad \text{und} \quad 2 \cos^3 \alpha = \left(2 + k \frac{l}{l_0}\right) \frac{c}{l}.$$

Für $k = 0$ kommt man auf die Formeln von Pkt. 58 zurück; wir nehmen im folgenden drei gleichartige Stäbe an und setzen $k = 1$.

Um die kritische Last zu bestimmen, berechnen wir zunächst das Tragwerk unter dem Angriff P im verzerrten Zustand. Das System ist „einfach statisch unbestimmt“, und wir wählen als überzählige Wirkungsgröße die Stabkraft S_0 im mittleren Stab von der Länge a_0 . Die Stabkraft S in den beiden anderen Stäben ist dann durch die Gleichung $S = \mathfrak{S} + \sigma \cdot S_0$ gegeben; hierbei sind \mathfrak{S} die Stabkraft im „Hauptsystem“ mit durchschnittenem Stab a_0 unter dem Lastangriff P und σ die Stabkräfte im Hauptsystem für den Lastangriff $S_0 = 1$. Die Elastizitätsgleichung von MAXWELL-MOHR liefert

$$S_0 = - \frac{\sum \mathfrak{S} \sigma \frac{s}{EF}}{\sum \sigma^2 \frac{s}{EF}},$$

mit den Summen über sämtliche Stäbe von der Länge $s = a$ bzw. a_0 . Nun sind $\mathfrak{S} = -\frac{P}{2 \sin \alpha}$, $\sigma = -\frac{1}{2 \sin \alpha}$ bzw. 1 und daher weiter

$$S_0 = -\frac{P}{1 + 2 \sin^3 \alpha}, \quad S = -\frac{P \cdot \sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin^3 \alpha}.$$

Zufolge der Gleichungen $S_0 = EF \frac{a_0 - l_0}{l_0}$, $S = EF \frac{a - l}{l}$ erhält man die kritischen Lasten

$$P_k = EF \left(1 - \frac{a_0}{l_0}\right) (1 + 2 \sin^3 \alpha) \text{ bzw. } P_k = EF \left(1 - \frac{a}{l}\right) \cdot \frac{1 + 2 \sin^3 \alpha}{\sin^3 \alpha},$$

wobei die Werte $\frac{a}{l} \left(= \frac{c}{l} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}\right)$, $\frac{a_0}{l_0} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{l_0} \left(= \frac{l}{l_0} \cdot \frac{c}{l} \cdot \text{tg } \alpha\right)$ der Knickbedingung zu entnehmen sind.

Wie in Pkt. 58 setzen wir als Beispiel $\frac{c}{l} = 0,336$, d. i. $\frac{l}{l_0} = 1,062$. Hiermit werden die kritischen Werte von α

$$\cos \alpha' = 0,3666, \quad \cos \alpha'' = 0,8015,$$

und die zugeordneten kritischen Lasten

$$P_k' = 0,25 EF, \quad P_k'' = 0,92 EF.$$

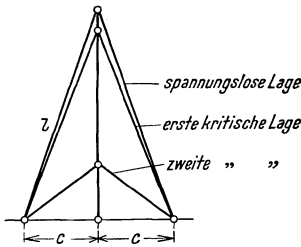


Abb. 85.

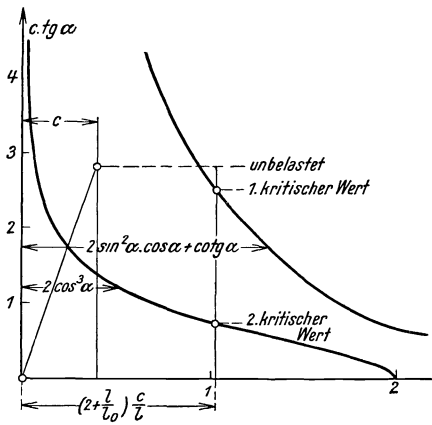


Abb. 86.

Die Abb. 85 zeigt in maßstabrichtiger Zeichnung die spannungsfreie Lage und die beiden kritischen Stellungen.

In der Abb. 86 sind in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu den Abszissen $2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \text{ctg } \alpha$ bzw. $2 \cos^3 \alpha$ die Ordinaten $c \cdot \text{tg } \alpha$ aufgetragen. Für das eingezeichnete $\left(2 + \frac{l}{l_0}\right) \frac{c}{l} = 1,029$ entsteht zuerst Instabilität in horizontaler Richtung und später, ohne daß diese aufhört, eine Instabilität gegen Vertikalstörungen. Die erste kritische Last ist infolge der geänderten Kraftverteilung etwas kleiner als beim Stab ohne mittleren Stiel, hingegen ist die zweite kritische Last erhöht. Bei Werten $\frac{c}{l} \geq 0,613$ ist jetzt nur die Instabilität gegen Horizontalstörungen möglich.

61. Ein statisch bestimmter ebener Fachwerkträger.

Das in der Abb. 87 dargestellte statisch bestimmte Parallelfachwerk mit statisch bestimmter Lagerung (Festlager in 0 und Bewegungslager in 4) hat fünf Knoten ($k = 5$), sieben Stäbe ($s = 7$) und drei Auflager-

bedingungen ($m = 3$). Sämtliche Gurtstäbe haben die natürliche Länge l , die verzerrte Länge a , die Querschnittsfläche F und den Elastizitätsmodul E . Für die Gitterstäbe, die unter dem Winkel α gegen die Untergurtstäbe geneigt sind, gelten die entsprechenden Größen l' , a' , F' , E' .

Wir untersuchen die Stabilität eines Gleichgewichtszustandes, bei dem die Gurtstäbe gleichmäßig verkürzt oder gedehnt, die Gitterstäbe hingegen unverändert sind. Das zugehörige System der äußeren Kräfte bestehe aus vier Horizontalkräften in den Knoten 0, 1, 3 und 4 von der gleichen Größe $\frac{1}{2} P$.

Zur Aufstellung der Knickbedingung lösen wir das Spannungsproblem für den verformten Zustand und setzen den Stabkraftzuwachs δS gleich $E F \frac{\delta a}{l}$.

Die Knoten 1, 2 und 3 verschieben sich in der vertikalen y -Richtung um δy_1 , δy_2 , δy_3 und in 0 und 4 sind dann die vertikalen Reaktionen

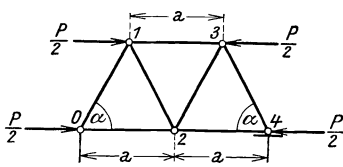


Abb. 87.

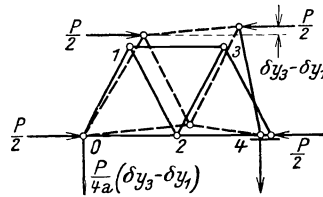


Abb. 88.

$\frac{P}{4a} (\delta y_3 - \delta y_1)$ bzw. $-\frac{P}{4a} (\delta y_3 - \delta y_1)$ (Abb. 88). Stellt man für den Knoten 0 die Gleichgewichtsbedingungen in vertikaler bzw. horizontaler Richtung auf, so erhält man

$$-\frac{P}{2a} \delta y_2 + \frac{P}{4a} (\delta y_3 - \delta y_1) + \delta S_{0,1} \cdot \sin \alpha = 0, \quad \delta S_{0,2} + \delta S_{0,1} \cdot \cos \alpha = 0$$

und daraus

$$\delta S_{0,1} = \frac{P}{4a \cdot \sin \alpha} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3),$$

$$\delta S_{0,2} = -\frac{P}{4a} \cdot \cotg \alpha \cdot (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3).$$

Für den Knoten 4 sind unter Vertauschung der Indizes 1 mit 3

$$\delta S_{3,4} = \frac{P}{4a \cdot \sin \alpha} (-\delta y_1 + 2 \delta y_2 + \delta y_3),$$

$$\delta S_{2,4} = -\frac{P}{4a} \cdot \cotg \alpha \cdot (-\delta y_1 + 2 \delta y_2 + \delta y_3).$$

Der Schnitt durch die Stäbe 0,2; 1,2; 1,3 liefert als vertikale Gleichgewichtsbedingung

$$\delta S_{1,2} \cdot \sin \alpha = \frac{P}{4a} (\delta y_3 - \delta y_1) - \frac{P}{2a} \delta y_2 - \frac{P}{2a} (\delta y_3 - \delta y_1),$$

also ist

$$\delta S_{1,2} = \frac{P}{4a \cdot \sin \alpha} (\delta y_1 - 2 \delta y_2 - \delta y_3)$$

und analog

$$\delta S_{2,3} = \frac{P}{4a \cdot \sin \alpha} (-\delta y_1 - 2 \delta y_2 + \delta y_3).$$

Endlich gewinnt man aus der horizontalen Gleichgewichtsbedingung im früheren Schnitt

$$\delta S_{1,3} + \delta S_{1,2} \cdot \cos \alpha + \delta S_{0,2} = 0$$

den letzten noch zu bestimmenden Stabkraftzuwachs

$$\delta S_{1,3} = \frac{P}{4a} \cdot \cotg \alpha \cdot 4 \delta y_2.$$

Die Längenänderungen der sieben Stäbe sind

$$\begin{aligned} \delta a_{0,1} &= \delta x_1 \cdot \cos \alpha + \delta y_1 \cdot \sin \alpha, & \delta a_{0,2} &= \delta x_2, & \delta a_{1,3} &= \delta x_3 - \delta x_1, \\ \delta a_{3,4} &= (\delta x_4 - \delta x_3) \cdot \cos \alpha + \delta y_3 \cdot \sin \alpha, & \delta a_{2,4} &= \delta x_4 - \delta x_2, \\ \delta a_{1,2} &= (\delta x_2 - \delta x_1) \cdot \cos \alpha - (\delta y_2 - \delta y_1) \cdot \sin \alpha, \\ \delta a_{2,3} &= (\delta x_3 - \delta x_2) \cdot \cos \alpha + (\delta y_3 - \delta y_2) \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Jedes δa ist gleich dem betreffenden $\delta S \cdot \frac{l}{EF}$ bzw. $\delta S \cdot \frac{l'}{E'F'}$ und mit den Abkürzungen

$$p = \frac{P}{2a} \frac{l}{EF} \cdot \cotg^2 \alpha, \quad p' = \frac{P}{2a} \frac{l'}{E'F'} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \equiv p \cdot \omega$$

entstehen für die Stäbe 0,1; 0,2 und 1,2 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta x_1 \cdot \cotg \alpha + \delta y_1 &= \frac{p}{2} \cdot \omega (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3), \\ \delta x_2 \cdot \cotg \alpha &= -\frac{p}{2} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3), \\ (\delta x_2 - \delta x_1) \cdot \cotg \alpha - (\delta y_2 - \delta y_1) &= \frac{p}{2} \cdot \omega (\delta y_1 - 2 \delta y_2 - \delta y_3). \end{aligned}$$

Addiert man die erste und dritte Gleichung und subtrahiert hiervon die mit $\cos \alpha$ multiplizierte zweite, so folgt

$$2 \delta y_1 - \delta y_2 = p \omega (\delta y_1 - \delta y_3) + \frac{p}{2} (\delta y_1 + 2 \delta y_2 - \delta y_3), \quad (a)$$

eine Gleichung, die nur die δy enthält. In gleicher Weise ergibt sich für das Dreieck 2, 3, 4 unter Vertauschung der Indizes 1 mit 3

$$2 \delta y_3 - \delta y_2 = p \omega (\delta y_3 - \delta y_1) + \frac{p}{2} (\delta y_3 + 2 \delta y_2 - \delta y_1), \quad (b)$$

denn die horizontale Verschieblichkeit von 4 ändert nichts an der Symmetrie. Eine dritte Beziehung mit den drei δy liefert das Dreieck 1, 2, 3 durch Aufstellen von $\delta a_{1,2} + \delta a_{2,3} - \cos \alpha \cdot \delta a_{1,3}$ und Division durch $\sin \alpha$

$$\delta y_1 - 2 \delta y_2 + \delta y_3 = -2 p \omega \cdot \delta y_2 - 2 p \cdot \delta y_2. \quad (c)$$

Wir addieren und subtrahieren die Gl. (a) und (b) und bekommen das System

$$\begin{aligned}\delta y_1 - \delta y_2 \cdot (p + 1) + \delta y_3 &= 0, \\ \delta y_1 \cdot (2 - p - 2p\omega) - \delta y_3 (2 - p - 2p\omega) &= 0, \\ \delta y_1 - \delta y_2 \cdot 2(1 - p - p\omega) + \delta y_3 &= 0\end{aligned}$$

und mit Nullsetzen der Determinante die Knickbedingung

$$0 = (2 - p - 2p\omega)(1 - 3p - 2p\omega).$$

Die Gleichung

$$p(3 + 2\omega) = 1$$

entspricht der symmetrischen Biegeform, wobei $\delta y_1 = \delta y_3$. Die Knickgleichung

$$p(1 + 2\omega) = 2$$

ist der unsymmetrischen Form zugeordnet.

Bezeichnen wir mit

$$I = 2F \cdot \left(\frac{a}{4} \operatorname{tg} \alpha\right)^2$$

angenähert das Trägheitsmoment der beiden Gurtquerschnitte für eine in der Mitte zwischen den Gurtungen liegende horizontale Achse und setzen

$$L = \frac{3}{2} \sqrt{al} \simeq \frac{3}{2} a \simeq \frac{3}{2} l,$$

so folgt für den Parameter p der Wert: $p = \frac{P L^2}{36 E I}$. Die kritische Last ist daher für die symmetrische Form

$$P_k = \frac{36}{3 + 2\omega} \frac{E I}{L^2}$$

und für die unsymmetrische Form

$$P_k = \frac{72}{1 + \omega} \frac{E I}{L^2}.$$

Im Grenzfall $\omega = 0$, d. h. bei unendlich starken Diagonalstäben werden

$$P_k = 12 \frac{E I}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad P_k = 72 \frac{E I}{L^2}.$$

Ein vollwandiger Stab von der Länge des Untergurtes ($l = \frac{4}{3} L$) hat die Knicklasten $5,6 \frac{E I}{L^2}$ bzw. $22,2 \frac{E I}{L^2}$; bei einem Stab von der Länge des Obergurtes ($l = \frac{2}{3} L$) sind die Knicklasten viermal größer. Der vor berechnete Grenzfall $\omega = 0$ liegt, wie zu vermuten war, zwischen diesen Werten.

Auch hier beim ebenen Fachwerkträger von der Gestalt eines Dachbinders wird die Stabilitätsuntersuchung kaum praktische Bedeutung erlangen, da die Tragfähigkeit der Einzelstäbe schon erschöpft sein wird, bevor die berechnete Knickgrenze des Fachwerkes erreicht ist. Wir können aber mit den gleichen Überlegungen ein für die Anwendungen sehr wichtiges Problem, den langgestreckten Gitterträger, behandeln.

62. Der statisch bestimmte Fachwerkgitterträger. Aufstellen der Gleichungen.

Wir betrachten den in der Abb. 89 dargestellten statisch bestimmten und statisch bestimmt gelagerten Gitterträger, bei dem in den vier Endknoten der Gurte je die Kraft $\frac{1}{2}P$ angreift. Die Knoten sind im Untergurt von 0, 2 bis $2n$, im Obergurt von 1, 3 bis $2n-1$ beziffert

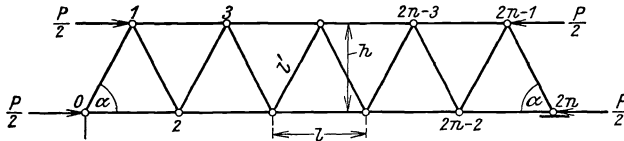


Abb. 89.

und das System besitzt $2n + 1$ Knoten, $4n - 1$ Stäbe und 3 Auflagerbedingungen. Untersucht wird die Stabilität eines Gleichgewichtszustandes mit gleichmäßig geänderten Gurtstäben und unveränderter Vergitterung. Die Gurtstäbe haben die natürliche Länge l , die verzerrte a , die Elastizitätszahl E und die Querschnittsfläche F ; die unter dem Winkel α zum Untergurt geneigten Diagonalen haben als entsprechende Werte $l' = a'$, E' , F' . Bei der Berechnung nehmen wir eine symmetrische Verformung an, da hiermit die kleinsten Knicklasten entstehen.

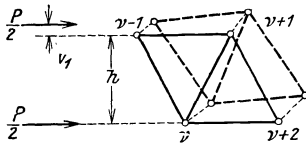


Abb. 90.

Wir schlagen denselben Weg ein wie in Pkt. 61, indem wir zuerst den deformierten Zustand betrachten und die Stabkraftzuwächse ermitteln. Die Verschiebungen benennen wir jetzt der Kürze halber mit u und v an Stelle der früheren δx , δy . In der

Abb. 90 sind zwei Dreiecke $v-1, v, v+1, v+2$ im verformten Zustand herausgezeichnet. Bei einem Schnitt durch die drei Stäbe $v-1, v+1; v, v+1; v, v+2$ liefert die vertikale Gleichgewichtsbedingung für den Diagonalstab $v, v+1$ die Gleichung

$$\delta S_{v, v+1} \cdot \sin \alpha = \frac{P}{2} \left(\frac{v_{v+1} - v_{v-1}}{a} + \frac{v_{v+2} - v_v}{a} \right),$$

also

$$\delta S_{v, v+1} = \frac{P}{2a \cdot \sin \alpha} (v_{v+2} + v_{v+1} - v_v - v_{v-1}).$$

Für den Diagonalstab $v-1, v$ ist ebenso

$$\delta S_{v-1, v} = \frac{P}{2a \cdot \sin \alpha} (-v_{v+1} - v_v + v_{v-1} + v_{v-2}).$$

Stellt man für den Knoten v das Moment auf, so ergibt sich mit $h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ für den Gurtstab $v-1, v+1$

$$\delta S_{v-1, v+1} = \frac{P}{2a} \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot (v_{v+1} + 2v_v + v_{v-1} - 2v_1).$$

Die Längenänderungen der Stäbe eines Dreieckes $\nu - 1, \nu, \nu + 1$ sind

$$\begin{aligned} \delta a_{\nu-1, \nu+1} &= u_{\nu+1} - u_{\nu-1}, \\ \delta a_{\nu-1, \nu} &= (u_{\nu} - u_{\nu-1}) \cdot \cos \alpha - (v_{\nu} - v_{\nu-1}) \cdot \sin \alpha, \\ \delta a_{\nu, \nu+1} &= (u_{\nu+1} - u_{\nu}) \cdot \cos \alpha + (v_{\nu+1} - v_{\nu}) \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

und daraus wird, wenn man die zweite und dritte Gleichung addiert und hiervon die mit $\cos \alpha$ multiplizierte erste subtrahiert,

$$\delta a_{\nu, \nu+1} - \delta a_{\nu-1, \nu+1} \cdot \cos \alpha + \delta a_{\nu-1, \nu} = (v_{\nu+1} - 2v_{\nu} + v_{\nu-1}) \sin \alpha.$$

Führt man mit $\delta a = \delta S \cdot \frac{l}{EF}$ bzw. $\delta a' = \delta S \cdot \frac{l'}{E'F'}$ die Werte der Stabkraftzuwächse ein, wenn a die verzerrte Länge eines Gurtstabes, a' die eines Gitterstabes ist, so erhält man die Differenzgleichung

$$\begin{aligned} v_{\nu+1} - 2v_{\nu} + v_{\nu-1} &= -\frac{P}{2EF} \frac{l}{a} \cdot \cotg^2 \alpha \cdot (v_{\nu+1} + 2v_{\nu} + v_{\nu-1} - 2v_1) + \\ &+ \frac{P}{2E'F'} \frac{l'}{a} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot (v_{\nu+2} - 2v_{\nu} + v_{\nu-2}). \quad (\text{K}) \end{aligned}$$

Sie wurde hier nur für ein Dreieck mit einem Obergurtstab hergeleitet, gilt aber, wie man sich leicht überzeugen kann, unverändert auch für alle anderen Dreiecke von $\nu = 2$ bis $2n - 2$. Für $\nu = 1$ tritt noch v_{-1} auf, worin die Neigung eines links von 1 liegenden Gurtstabes zum Ausdruck kommt. Da die äußere Kraft in 1 horizontal ist, hat man $v_{-1} = v_1$ zu nehmen, was man auch unmittelbar durch Ausrechnen von $\delta S_{0,1}$ bestätigen kann. Die Randbedingungen der Differenzgleichung (K) lauten also (bei Symmetrie):

$$v_0 = 0, \quad v_{-1} = v_1, \quad v_{n+1} = v_{n-1}, \quad v_{n+2} = v_{n-2}. \quad (\text{R})$$

Schreibt man die Gl. (K) für $\nu = 1, 2, \dots, n$ mit diesen Nebenbedingungen an, so entstehen n lineare homogene Gleichungen für v_1, v_2, \dots, v_n , deren gleich Null gesetzte Determinante die Knickgleichung bildet. Wir eliminieren jedoch zuvor in Gl. (K) mit Hilfe der Substitution

$$v_{\nu} = y_{\nu} + \frac{1}{2} v_1$$

das störende v_1 . Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p &= \frac{P}{2EF} \cdot \cotg^2 \alpha, \quad p' = \frac{P}{2E'F'} \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \equiv p \cdot \omega, \\ \omega &= \frac{p'}{p} = \frac{EF}{E'F'} \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (\text{p})$$

wird dann die Differenzgleichung, da $a \cong l$

$$\begin{aligned} y_{\nu+1} - 2y_{\nu} + y_{\nu-1} &= -p(y_{\nu+1} + 2y_{\nu} + y_{\nu-1}) + \\ &+ p\omega(y_{\nu+2} - 2y_{\nu} + y_{\nu-2}) \quad (\text{K}') \end{aligned}$$

und die Randwerte haben die Form

$$y_0 = -y_1, \quad y_{-1} = y_1, \quad y_{n+1} = y_{n-1}, \quad y_{n+2} = y_{n-2}. \quad (\text{R}')$$

Wir werden später noch zeigen, daß die Gl. (K') auch aus unserer allgemeinen Stabwerktheorie hervorgeht. Zunächst diskutieren wir aber das gefundene Ergebnis und beginnen hierbei mit den Grenzfällen von sehr starken und sehr schwachen Diagonalen.

63. Fortsetzung von Pkt. 62: Diskussion der Differenzgleichung.

A. Sehr starke Diagonalen bei endlicher Felderzahl.

Im Grenzfall unendlich starker Diagonalen ist $\omega = 0$. Dann wird aus (K') die Differenzgleichung zweiter Ordnung

$$y_{\nu+1} - 2y_{\nu} + y_{\nu-1} = -p(y_{\nu+1} + 2y_{\nu} + y_{\nu-1}),$$

mit den Randbedingungen $y_0 = -y_1$, $y_{n+1} = y_{n-1}$. Die anderen Bedingungen fallen fort, da weder y_{-1} noch y_{n+2} in den Gleichungen vorkommen, wenn ν von 1 bis n läuft. Nimmt man, um die Differenzgleichung zu integrieren, $y_{\nu} = e^{\nu \xi i} = r^{\nu}$, so muß r der Gleichung

$$r - 2 + \frac{1}{r} = -p\left(r + 2 + \frac{1}{r}\right)$$

genügen. Daraus gewinnt man, da $r = e^{\xi i}$, also $r + \frac{1}{r} = 2 \cos \xi$ die Beziehung

$$\cos \xi - 1 = -p(\cos \xi + 1) \quad \text{oder} \quad p = \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}.$$

Das allgemeine Integral ist aus Bestandteilen der Form $e^{\nu \xi i}$ zusammensetzen und kann somit in der Gestalt

$$y_{\nu} = A \cdot \cos \nu \xi + B \cdot \sin \nu \xi$$

geschrieben werden. Nun folgen aus den Randwerten die Gleichungen

$$A = -A \cdot \cos \xi - B \cdot \sin \xi$$

$$A \cdot \cos(n+1)\xi + B \cdot \sin(n+1)\xi = A \cdot \cos(n-1)\xi + B \cdot \sin(n-1)\xi$$

und wir erhalten, mit dem Verschwinden der Determinante der Unbekannten A , B , die Knickbedingung

$$\begin{vmatrix} 1 + \cos \xi & \sin \xi \\ -2 \sin n \xi \cdot \sin \xi & 2 \cos n \xi \cdot \sin \xi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(2n-1)\frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\xi}{2} = 0.$$

Daher ist $(2n-1)\xi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ bzw. $\xi = \pi, 3\pi, \dots$

und mit dem kleinsten kritischen Wert $\xi = \frac{\pi}{2n-1}$ weiter

$$p = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2(2n-1)}.$$

Führen wir das fiktive Trägheitsmoment

$$I = 2F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

ein und setzen als Länge

$$L = \left(n - \frac{1}{2}\right)l,$$

so wird der Parameter $p = \frac{PL^2}{4(2n-1)^2 EI}$. Die kritische Last ist somit

$$P_k = k^2 \cdot \pi^2 \frac{EI}{L^2}, \text{ wo } k^2 = \left(\frac{4n-2}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2} \right)^2. \quad (\text{A})$$

Der nur von der Felderzahl abhängige Faktor k^2 ist sehr wenig von 1 verschieden. Bei großer Felderzahl wird k^2 nahezu gleich 1, und als Knicklast ergibt sich die EULERSche Formel. Man erhält die folgenden Werte: $n = 2$, $k^2 = 1,216$; $n = 3$, $k^2 = 1,070$; $n = 4$, $k^2 = 1,035$; $n = 5$, $k^2 = 1,020$; $n = 10$, $k^2 = 1,004$; $n = \infty$, $k^2 = 1$. Der Gitterträger mit sehr starken Diagonalen verhält sich demnach schon bei einer verhältnismäßig geringen Felderzahl fast genau so wie ein Vollwandträger, der aus den beiden Gurtquerschnitten besteht. Diese Ähnlichkeit mit dem vollwandigen Stab gilt aber nur hinsichtlich der ersten Knicklast, die allerdings praktisch allein in Frage kommt. Die höheren Knicklasten weichen beträchtlich ab und sind beim Gitterstab überhaupt nur in beschränkter Zahl vorhanden. Die Erhöhung des Wertes k^2 über 1 erklärt sich damit, daß die Annahme $L = \left(n - \frac{1}{2} \right) l$ als Länge für den vollwandigen Ersatzstab nur eine im Grund willkürliche Schätzung ist.

B. Schwache Diagonalen bei großer Felderzahl.

Zunächst wollen wir die Differenzengleichung (K') etwas umformen. Die Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung sind allgemein

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{y_{v+1} - 2y_v + y_{v-1}}{(\Delta x)^2}$$

und

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{y_{v+2} - 4y_{v+1} + 6y_v - 4y_{v-1} + y_{v-2}}{(\Delta x)^4}.$$

Da in unserem Fall $\Delta x = \frac{l}{2}$, lautet mit $L = \left(n - \frac{1}{2} \right) l$ die Gl. (K') in anderer Schreibweise

$$\frac{L^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = -p \left[4y + \frac{L^2}{(2n-1)^2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \omega \left(\frac{L^4}{(2n-1)^4} \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} + \frac{4L^2}{(2n-1)^2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right) \right]. \quad (\text{K}'')$$

Wir lassen nun bei festem L die Felderzahl n ins Unendliche wachsen. Dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und die Glieder in (K''), die $(2n-1)^4$ im Nenner haben, treten gegen die mit $(2n-1)^2$ zurück. Den Wert p muß man von gleicher Größenordnung ansehen wie $\frac{1}{(2n-1)^2}$, es bleibt daher, wenn ω nicht sehr groß wird, auf der rechten Seite der Gl. (K'') nur $-4py$. Nehmen wir aber sehr schwache Diagonalen, d. h. ω sehr groß an, so liefern die Glieder niederster Ordnung

$$\frac{L^2}{(2n-1)^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = -4p \cdot y + 4p\omega \frac{L^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2},$$

oder

$$y'' = -\frac{(2n-1)^2}{L^2} \cdot \frac{4p}{1-4p\omega} y,$$

mit den Randbedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $x = L$.

Das ist die bekannte Differentialgleichung, die sich bei der Berechnung des einteiligen Stabes ergeben hat. Somit muß bei unseren Randwerten

$$\frac{(2n-1)^2}{L^2} \frac{4p}{1-4p\omega} = \frac{\pi^2}{L^2} \text{ sein, also}$$

$$p = \frac{\pi^2}{4[(2n-1)^2 + \omega\pi^2]}.$$

Mit der ersten Gl. (p) erhält man, wenn man angenähert $(2n-1)^2 = 4n^2$ setzt, die kritische Last

$$P_k = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4n^2} \omega}, \text{ wo } \omega = \frac{EF}{E'F'} \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (\text{B})$$

Für ein unendliches n ist Gl. (B) wieder die EULERSche Formel; bei einer endlichen Felderzahl ist die Abnahme von P_k um so größer, je schwächer die Diagonalverbindungen sind.¹

C. Schwache Diagonalen bei endlicher Felderzahl.

Aus grundsätzlichem Interesse suchen wir zu erfahren, welche Last der Gitterträger übernehmen kann, wenn das Gitter im Vergleich zu den Gurtstäben sehr schwach ist. Die für große Felderzahl entwickelte Formel (B) zeigt nur, daß bei einem endlichen n -Wert p gleich Null wird, wenn ω gegen Unendlich geht. Auf die Frage, wie groß $p' = p \cdot \omega$ ist, gibt diese Gleichung aber keine unmittelbare Antwort.

Setzt man in Gl. (K') $p = 0$, so entsteht die Differenzengleichung

$$y_{v+1} - 2y_v + y_{v-1} = p'(y_{v+2} - 2y_v + y_{v-2}),$$

unter den Randwerten $y_0 = -y_1$, $y_{-1} = y_1$, $y_{n+1} = y_{n-1}$, $y_{n+2} = y_{n-2}$. Das allgemeine Integral lautet

$$y_v = A \cdot \cos v \xi + B \cdot \sin v \xi + C,$$

wobei mit $y_v = e^{v\xi} = r^v$ der Wert r der Gleichung

$$r - 2 + \frac{1}{r} = p' \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

entsprechen muß. Daher wird

$$2(\cos \xi - 1) = -4p' \cdot \sin^2 \xi \quad \text{oder} \quad p' = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\xi}{2}}.$$

¹ Die gleiche Formel findet sich bei F. ENGESSER: Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Ztrbl. d. Bauverwaltung, Bd. 11, S. 483, 1891, und bei E. ELWITZ: Die Lehre von der Knickfestigkeit, Hannover, 1918, S. 303, wird dort aber für jedes Stärkeverhältnis von Gurt und Vergitterung als gültig angesehen. Siehe auch Pkt. 77. — Vgl. ferner L. PRANDTL: Knicksicherheit von Gitterstäben. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 51, S. 1867—1869 u. 2087/2088. 1907. — S. TIMOSHENKO: Sur la stabilité des Systèmes Élastiques. Paris, 1913. S. 51. — K. LJUNGBERG: Auf Knickung beanspruchte Gitterstäbe. Der Eisenbau, Jahrg. 13, S. 100—105, 1922; Jahrg. 11, S. 322—330, 1920.

Nun liefern die beiden ersten Randbedingungen die Konstanten $B = 0$, $C = -A \cdot \cos^2 \frac{\xi}{2}$ und dann die zwei Symmetriebedingungen

$$A \cdot \cos(n+1)\xi = A \cdot \cos(n-1)\xi, \quad A \cdot \cos(n+2)\xi = A \cdot \cos(n-2)\xi$$

den Wert $\xi = \frac{\pi}{n}$. Somit folgt $p' = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{2n}}$ und aus der zweiten

Gl. (p) berechnet sich die kritische Last

$$P_k = E' F' \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} \simeq E' F' \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4n^2}\right). \quad (C)$$

Bei sehr schwacher Vergitterung wird die Tragfähigkeit lediglich durch den Querschnitt der Gitterstäbe begrenzt; wenn die Knicklast nach Gl. (C) mit wachsender Felderzahl n abnimmt, so liegt das daran, daß mit n die Länge L des Trägers zunimmt, die sonst in (C) nicht vorkommt.

D. Der allgemeine Fall.

Die Differenzgleichung (K') wird durch den Ansatz

$$y_\nu = A \cdot \cos \nu \xi + B \cdot \sin \nu \xi + C \cdot \text{Cos} \nu \xi' + D \cdot \text{Sin} \nu \xi'$$

integriert, sofern $r = e^{\xi i}$ und $r' = e^{\xi' i}$ der Bedingung genügen, die man durch Einführen von $y_\nu = r^\nu$ in Gl. (K') erhält. Diese charakteristische Gleichung lautet

$$r - 2 + \frac{1}{r} = -p \left(r + 2 + \frac{1}{r}\right) + p' \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2}\right)$$

oder

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1+p}{p'} \left(r + \frac{1}{r}\right) + 2 \frac{1-p-2p'}{p'} = 0.$$

Von den zwei Lösungen für die Unbekannte $r + \frac{1}{r}$ ist die eine kleiner als 2, die andere größer als 2. Wir setzen die erste gleich $2 \cos \xi$, die zweite gleich $2 \text{Cos} \xi'$. Daher sind

$$\frac{1+p}{2p'} = \cos \xi + \text{Cos} \xi', \quad \frac{1-p-2p'}{2p'} = \cos \xi \cdot \text{Cos} \xi'.$$

Nun verlangen die Randwerte (R'), wenn man die beiden ersten in der Form $y_1 = y_{-1}$, $y_0 = -\frac{1}{2}(y_1 + y_{-1})$ anschreibt:

$$2B \cdot \sin \xi + 2D \cdot \text{Sin} \xi' = 0, \quad A \cdot (1 + \cos \xi) + C \cdot (1 + \text{Cos} \xi') = 0,$$

$$A \cdot [\cos(n+1)\xi - \cos(n-1)\xi] + B \cdot [\sin(n+1)\xi - \sin(n-1)\xi] +$$

$$+ C \cdot [\text{Cos}(n+1)\xi' - \text{Cos}(n-1)\xi'] +$$

$$+ D \cdot [\text{Sin}(n+1)\xi' - \text{Sin}(n-1)\xi'] = 0,$$

$$A \cdot [\cos(n+2)\xi - \cos(n-2)\xi] + B \cdot [\sin(n+2)\xi - \sin(n-2)\xi] +$$

$$+ C \cdot [\text{Cos}(n+2)\xi' - \text{Cos}(n-2)\xi'] +$$

$$+ D \cdot [\text{Sin}(n+2)\xi' - \text{Sin}(n-2)\xi'] = 0.$$

Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante der Konstantengleichungen ist die Knickbedingung. Unter Beachtung des Additionstheorems für Kreis- bzw. Hyperbelfunktionen bekommt man sie nach einiger Rechnung in der Form

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{tg} n \xi = -\operatorname{Tg} \frac{\xi'}{2} \cdot \operatorname{Tg} n \xi'.$$

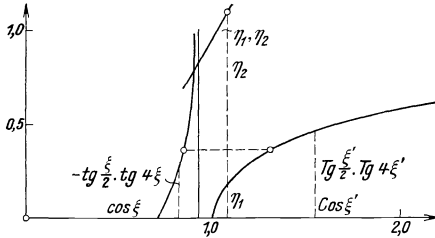


Abb. 91.

Drückt man die Funktionen von ξ und ξ' durch $\cos \xi$ bzw. $\cos \xi'$ aus, so folgt ein in diesen beiden Variablen symmetrischer Ausdruck, und ein solcher läßt sich stets durch Summe und Produkt der Variablen darstellen. Da

$$\cos \xi + \cos \xi' = \frac{1+p}{2p'}, \quad \cos \xi \cdot \cos \xi' = \frac{1-p-2p'}{2p'},$$

entsteht eine Gleichung zwischen p und $p' = p \cdot \omega$.

Für $n = 2$ sind zum Beispiel

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\xi = \frac{2 \cos \xi \cdot (1 - \cos \xi)}{2 \cos^2 \xi - 1}, \quad -\operatorname{Tg} \frac{\xi'}{2} \cdot \operatorname{Tg} 2\xi' = \frac{2 \cos \xi' \cdot (1 - \cos \xi')}{2 \cos^2 \xi' - 1}$$

und mit Gleichsetzen und Reduzieren ergibt sich

$$2 \cos \xi \cdot \cos \xi' - (\cos \xi + \cos \xi') + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad p(3 + 2\omega) = 1,$$

d. i. die für den Fachwerkträger in Pkt. 61 für symmetrisches Ausknicken unmittelbar hergeleitete Gleichung.

Für größere n verfährt man einfacher graphisch, indem man zu $\cos \xi$ bzw. $\cos \xi'$ als Abszissen die Funktionen $-\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{tg} n \xi$ bzw. $\operatorname{Tg} \frac{\xi'}{2} \cdot \operatorname{Tg} n \xi'$ als Ordinaten aufträgt, die Punkte gleicher Höhe zusammenfaßt und aus deren Abszissen das arithmetische Mittel und das Produkt bildet. Man gewinnt

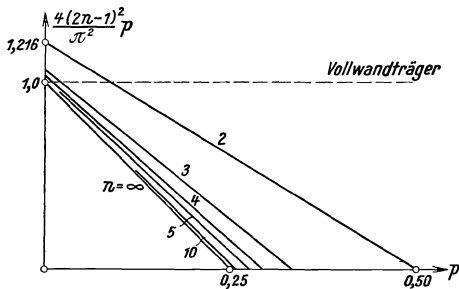


Abb. 92.

eine Kurve mit den Koordinaten $\eta_1 = \frac{1}{2} (\cos \xi + \cos \xi')$, $\eta_2 = \cos \xi \cdot \cos \xi'$ (vgl. Abb. 91), die man mit Rücksicht auf die Beziehungen $2\eta_1 = \frac{1+p}{2p'}$, $\eta_2 = \frac{1-p-2p'}{2p'}$ in eine p, p' -Linie verwandeln kann. Die Umwandlung ist linear, d. h. einer Geraden in η_1, η_2 entspricht eine Gerade in p, p' . Die Konstruktion zeigt, daß die p, p' -Linien nicht merklich von Geraden abweichen. Für $n = 2$ ist es exakt die Gerade $3p + 2p' = 1$, für sehr große n -Werte die Gerade $16n^2p + 4\pi^2p' = \pi^2$ (Fall B). In der Abb. 92 sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz zu den Abszissen p' die Ordinaten $\frac{4}{\pi^2} (2n - 1)^2 \cdot p$ auf-

getragen; zuerst wurden die beiden Linien $n = 2$ und $n = \infty$ eingezeichnet und dann die aus A und C berechneten Punkte, die auf den Achsen liegen, durch gerade Linien verbunden, die wir als Näherungslösung annehmen. Für die Gerade, die durch die Punkte $p' = 0$, $p = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n-2}$

und $p = 0$, $p' = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n}}$ hindurchgeht, gilt nun die Gleichung

$$p \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{4n-2} + 4p' \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2n} = 1.$$

Setzt man $p' = p \cdot \omega$, löst nach p auf, führt dann für p seinen Wert $\frac{P L^2}{(4n-2)^2 E I}$ ein, so erhält man als Ergebnis die kritische Last für den Gitterträger

$$P_k = \frac{k^2}{1 + \lambda \cdot \omega} \pi^2 \frac{E I}{L^2} \quad (\text{D})$$

mit

$$k^2 = \left(\frac{4n-2}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2} \right)^2, \quad \lambda = \left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2} \cdot \cos \frac{\pi}{2n} \right)^2,$$

$$I = F \frac{h^2}{2}, \quad L = \left(n - \frac{1}{2} \right) l, \quad \omega = \frac{E F'}{E F} \frac{1}{2 \cos^3 \alpha}.$$

Nachfolgend haben wir für einige Felderzahlen n die Koeffizienten k^2 und λ zusammengestellt.

$n = 2$	3	4	5	10	∞
$k^2 = 1,216$	1,070	1,035	1,020	1,004	1
$\lambda = 0,6667$	0,3167	0,1778	0,1125	0,0269	0

Damit ist man in Stand gesetzt, die Tragfähigkeit des Fachwerk-gitterträgers bei jeder Felderzahl und jedem Stärkeverhältnis zwischen Gurt und Vergitterung zu beurteilen.

§ 19. Die reine Rahmenknickung ebener Systeme.

64. Die Hauptgleichungen des ebenen Problems.

In den vorhergehenden Punkten haben wir die Knicksicherheit idealer Fachwerke (mit reibungslosen Gelenken) behandelt, wobei nur Längenänderungen der Stäbe in Betracht gezogen sind. Der reinen Fachwerkknickung stellen wir jetzt die reine Rahmenknickung gegenüber, bei der die einzelnen Stäbe biegesteif, aber keiner Dehnung fähig sind. Die Grundlage der Berechnung bilden drei Gleichungen, die wir aus der Biegetheorie gerader Stäbe ableiten.

Wir untersuchen einen geraden Stab von der Länge l , der durch die axiale endliche Druckkraft P und die axiale unendlich kleine Zusatzkraft S beansprucht ist und an dessen Enden die unendlich kleinen Biegemomente M_a und M_b und die unendlich kleine Querkraft Q wirken. Den verbogenen Stab beziehen wir auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem u, v , wobei die u -Achse mit der unverformten Stabachse zu-

sammenfällt. Mit der Annahme, daß der Stab in seiner Ebene, die eine Biegehauptebene sei, nur kleine Ausbiegungen erfährt, genügt entsprechend Abb. 93 die Ausbiegung v als Funktion der Abszisse u der Differentialgleichung

$$v'' = \frac{M}{EI}. \tag{1}$$

M ist das Biegemoment im Querschnitt u , v des Stabes, I das Trägheitsmoment seines Querschnittes für die Schwerpunkthauptachse, E der Youngsche Modul des Stabmaterials oder sein augenblicklicher Wert, der Knickmodul. Da die Ausbiegung als klein von erster Ordnung angesehen wird, sind es auch die M_a , M_b , Q und S (und die von den S herrührenden u_a , u_b). Das Biegemoment ist durch die Gleichung

$$M = M_a - Q \cdot u - P(v - v_a) \tag{2}$$

gegeben, aus der durch zweimaliges Differenzieren $M'' = -P \cdot v''$ folgt.

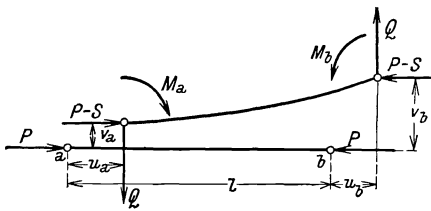


Abb. 93.

Die Gl. (1) wird daher $M'' = -\frac{P}{EI} \cdot M$, und man erhält mit dem Parameter

$$z^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

unter Berücksichtigen der Grenzbedingungen $u = 0$, $M = M_a$ und $u = l$, $M = M_b$

$$M = M_a \cdot \cos z \frac{u}{l} + \frac{M_b - M_a \cdot \cos z}{\sin z} \cdot \sin z \frac{u}{l}. \tag{3}$$

Setzt man in Gl. (2) für u den Wert l , so gewinnt man die Gleichgewichtsbedingung des Stabes, die immer erfüllt sein muß:

$$M_a - M_b = Q \cdot l + P(v_b - v_a). \tag{I}$$

Differenziert man Gl. (2), so entsteht $M' = -Q - P \cdot v'$ und daraus mit Einführen der Randwerte

$$M_a' - M_b' = P(v_b' - v_a'), \quad M_a' + M_b' = -2Q - P(v_b' + v_a').$$

Berechnet man aus (3) die linken Seiten dieser Ansätze, so gelangt man zu den zwei „Hauptgleichungen“ des Problems, die mit den Abkürzungen

$$t(z) = \frac{1 - \cos z}{z \cdot \sin z}, \quad s(z) = \frac{1 + \cos z}{z \cdot \sin z} - \frac{2}{z^2}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI} \tag{A}$$

unter Beachten von (I) sich in der Form

$$v_b' - v_a' = \frac{l}{EI} (M_b + M_a) \cdot t(z), \tag{II}$$

$$2 \frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') = \frac{l}{EI} (M_b - M_a) \cdot s(z)$$

anschreiben lassen. Die erste Gleichung zeigt, daß der Winkel zwischen den Endtangente der Biegelinie proportional der Summe der Endmomente

ist; die zweite sagt aus, daß der Winkel zwischen der Stabsehne und der mittleren Tangentenrichtung proportional ist der Differenz der Endmomente. In den drei Gl. (I) und (II), die linear und homogen in den unendlich kleinen Größen $Q, M_a, M_b, v_a, v_b, v_a', v_b'$ sind, ist alles enthalten, was wir aus der Biegetheorie brauchen. Die Werte von $t(z)$ und $s(z)$ sind für jedes z explizite angebar. Für $z = 0$, d. h. für eine verschwindende Axialkraft, sind $t(z) = \frac{1}{2}$, $s(z) = -\frac{1}{6}$ und daher sind die zwei Hauptgleichungen

$$v_b' - v_a' = \frac{l}{EI} \cdot \frac{M_b + M_a}{2}, \quad 2 \frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') = -\frac{l}{EI} \frac{M_b - M_a}{6}, \quad (II')$$

wie man auch unmittelbar leicht finden kann. Ist P eine Zugkraft, so ist z imaginär, und mit $z' = z \cdot \sqrt{-1}$ werden

$$t(z) = \frac{\cos z' - 1}{z' \cdot \sin z'}, \quad s(z) = -\frac{\cos z' + 1}{z' \cdot \sin z'} + \frac{2}{z'^2}.$$

Wir heben eine wichtige Tatsache hervor: Wird P um einen kleinen Betrag S verändert, der von gleicher Ordnung wie Q, M, v, v' ist, so tritt in z und weiter in den Abkürzungen unter (A) ein Zusatz von dieser Größenordnung auf. In den Gl. (II) liefert dies nur Zusatzglieder zweiter Ordnung. Unsere Hauptgleichungen und die Gleichgewichtsbedingung sind also auch exakt richtig, wenn bei der Axialkraft P die unendlich kleine Zusatzkraft S vernachlässigt wird.

65. Die reine Rahmenknickung ebener Systeme. Allgemeiner Ansatz.

Unter „reiner Rahmenknickung“ verstehen wir einen Knickvorgang, bei dem die Längenänderungen der Stäbe infolge der Axialkräfte nicht berücksichtigt werden, die Entfernung je zweier Knoten also unverändert ist. Die Verbindungsstäbe bleiben dabei im allgemeinen nicht geradlinig, sondern gehen in Kurven über, die sich in den Knoten unter unveränderten Winkeln aneinanderschließen. Während bei der „reinen Fachwerkknickung“ nur die Längenänderungen der Stäbe maßgebend sind, kommt hier nur deren Biegsamkeit zur Geltung. Man sieht leicht ein, und auch spätere Ansätze zeigen es, daß eine Vernachlässigung der Längenänderungen immer dann zulässig ist, wenn die Querschnitte der Stäbe sehr groß gegenüber den Längen sind.

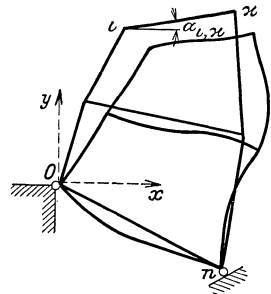


Abb. 94.

Wir nehmen an, es sei ein ebenes Rahmentragwerk gegeben, Abb. 94, das unter dem Einfluß bestimmter äußerer Kräfte in einen biegefreien Gleichgewichtszustand gelangt ist. Das Tragsystem habe k Knoten, s Stäbe, und es sei m_1 die Zahl der Verschiebungs-, m_2 die Zahl der Verdrehungsbeschränkungen. Für jeden Stab ist eine Stabkraft bekannt, Querkräfte und Biegemomente sind nicht vorhanden. Völlig will-

kürlich darf man die äußeren Kräfte allerdings nicht annehmen; daß es aber bei jeder Stabverbindung Zustände biegefreien Gleichgewichtes gibt, erkennt man beispielsweise an dem Rechtwinkelrahmen der Abb. 95.

Im ersten Fall sind beide Ständer axial mit $\frac{P}{2}$ belastet, im zweiten nur der rechte Ständer mit P , der Querstab ist beide Male spannungslos. Die allgemeine Bedingung für die Möglichkeit eines biegefreien Gleichgewichtes ist hier offenbar die, daß die waagrechten Komponenten der in den beiden oberen Knotenpunkten angreifenden Lasten einander aufheben. Auf den kräftefreien oder „natürlichen“ Zustand greifen wir gar nicht zurück. Somit ist es auch gleichgültig, ob wir Längenänderungen, die während des Knickvorganges ausgeschlossen sein sollen (d. i. beim Übergang aus dem biegefreien in den schwach gebogenen Gleichgewichtszustand), für den Übergang aus dem natürlichen in den zu untersuchenden biegefreien Zustand zulassen oder nicht. Nur müssen wir im ersten Fall annehmen, daß die Fixierung der Rahmenwinkel nach Aufbringen der Last und Eintritt der Längenänderungen erfolgt; die Stablänge l bedeutet also die durch die Last P bereits veränderte Länge.

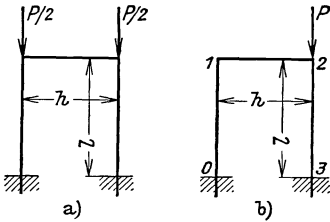


Abb. 95.

Wir untersuchen nun die Stabilität eines gegebenen biegefreien Gleichgewichtszustandes. Zu diesem Zweck betrachten wir einen unendlich benachbarten Zustand und fragen, ob ein positiver Arbeitsaufwand erforderlich ist, um von der ersten zur zweiten Form zu kommen. An der Grenze zwischen stabilen und instabilen Zuständen müssen solche liegen, bei denen der Übergang zu einer Nachbarlage ohne Arbeitsaufwand möglich ist, wo sich also in unendlicher Nähe des biegefreien Zustandes wieder eine Gleichgewichtslage befindet. Diese muß nicht mehr biegefrei sein, kann aber nur unendlich kleine Verformungen aufweisen. Wir können daher die Frage nach der Stabilitätsgrenze so stellen, daß wir die Bedingungen suchen, bei denen in unendlicher Nachbarschaft des durch die Kräfte P gegebenen geradlinigen Zustandes eine Gleichgewichtsform mit schwachen Ausbiegungen besteht. Oder anders ausgedrückt: Wir berechnen aus den Gleichungen zwischen den Biegegrößen Q , M_a , M_b , v_a , v_b , v_a' , v_b' die von Null verschiedene Lösung.

Wir denken uns jedem Knoten, soweit es die Bewegungsbeschränkungen gestatten, zwei unendlich kleine Verschiebungen δx , δy und eine unendlich kleine Drehung $\delta \vartheta$ erteilt. Die Zahl der unabhängigen Verrückungen ist zunächst $2k - m_1$, da m_1 die Zahl der Verschiebungsbeschränkungen ist. Die Stablängen sind aber als unveränderlich angenommen, und es gilt für jeden Stab iz (vom Knoten i zum Knoten z) mit dem Winkel α_{iz} zur x -Achse, eine Gleichung

$$(\delta x_z - \delta x_i) \cdot \cos \alpha_{iz} + (\delta y_z - \delta y_i) \cdot \sin \alpha_{iz} = 0.$$

Somit sind nur $2k - m_1 - s$ unabhängige Verschiebungsgrößen vorhanden. Die Zahl der unabhängigen Drehungswinkel ist $k - m_2$, denn wir haben m_2 Drehungsbeschränkungen. — Durch die $2k - s - m_1$ Verschiebungsgrößen δx , δy kann man die in den Gl. (I) und (II) auftretenden v_a , v_b ausdrücken, z. B. für den Stab $i\kappa$

$$v_a = \delta y_i \cdot \cos \alpha_{i\kappa} - \delta x_i \cdot \sin \alpha_{i\kappa}, \quad v_b = \delta y_{i\kappa} \cdot \cos \alpha_{i\kappa} - \delta x_{i\kappa} \cdot \sin \alpha_{i\kappa}.$$

Die v_a' , v_b' der Gl. (II) sind unmittelbar gleich den betreffenden $\delta\vartheta$. In der veränderten Lage erfahren die Stäbe Zusatzkräfte und -momente, die wieder als Größen erster Ordnung angesehen werden. Für jeden Stab gibt es eine axiale Zusatzkraft S (die sich zu P algebraisch addiert), eine Querkraft Q , zwei Endmomente M_a , M_b . An jedem freien Knoten müssen nun Zusatzkräfte bzw. -momente im Gleichgewicht sein. Zwischen den $2s$ Zusatzkräften S und Q bestehen mithin $2k - m_1$ Gleichungen der Form

$$\sum_i (S_{i\kappa} \cdot \cos \alpha_{i\kappa} + Q_{i\kappa} \cdot \sin \alpha_{i\kappa}) = 0, \quad \sum_i (S_{i\kappa} \cdot \sin \alpha_{i\kappa} - Q_{i\kappa} \cdot \cos \alpha_{i\kappa}) = 0.$$

(Hier ist die Annahme enthalten, daß die äußeren Lasten, nicht aber die Auflagerkräfte bei der Deformation nach Größe und Richtung unverändert bleiben.) Die Zahl der unabhängigen Zusatzkraftgrößen ist sonach $2s - (2k - m_1)$. Ebenso wird durch die Bedingung, daß an den $k - m_2$ an der Drehung nicht behinderten Knoten die Momentensumme Null sein muß, die Zahl $2s$ der Momentgrößen M_a , M_b auf $2s - (k - m_2)$ unabhängige Biegemomente herabgesetzt. Eine Zusammenfassung ergibt:

$$\begin{array}{ll} 2k - s - m_1 \dots \text{Verschiebungen,} & k - m_2 \dots \text{Drehungen,} \\ 2s - 2k + m_1 \dots \text{Zusatzkräfte,} & 2s - k + m_2 \dots \text{Biegemomente} \end{array}$$

und daher als Summe $3s$ Veränderliche.

Schreibt man also für jeden der s Stäbe die Momentengleichung (I) und die beiden Hauptgleichungen (II) an, drückt dabei die v_a , v_b durch $2k - s - m_1$ unabhängige Verschiebungsgrößen, die v_a' , v_b' durch $k - m_2$ Drehungsgrößen, die Q durch $2s - 2k + m_1$ Kraftgrößen, endlich die M_a , M_b durch $2s - k + m_2$ unabhängige Biegemomente aus, so hat man ein System von $3s$ linearen homogenen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, dessen gleich Null gesetzte Determinante die Stabilitätsgrenze, die Knickbedingung oder Knickgleichung liefert.

Hierbei gilt die Einschränkung, daß zwar der Übergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslagen stets durch eine Nullstelle der Knickdeterminante hindurchführt, daß aber das Überschreiten einer Nullstelle nicht notwendig Instabilität zur Folge hat.

Wir vermerken noch, daß als Knickbedingung dieselbe Determinantengleichung erhalten wird, wenn man, wie bei der reinen Fachwerkknickung, von der Gesamtenergie des Systems ausgeht. In Pkt. 71 kommen wir noch auf diese Bedeutung der Knickgleichung zurück.

66. Ein wichtiger Sonderfall: Der Polygonrahmen.

Die Gleichungen und die Knickbedingung werden besonders übersichtlich, wenn das Rahmentragwerk aus einem einzigen Polygonzug besteht, Abb. 96. Wir nehmen an, daß dieser an beiden Enden eingespannt ist, d. h. wir betrachten einen sog. „*eingespannten Stabzug*“. Die Knoten beziffern wir von 0 bis n , die Stäbe in derselben Folge mit 1 bis n , die Indizes bei l_v, E_v, I_v, z_v beziehen sich auf den v -ten Stab. Jetzt sind $s = n, k = n + 1, m_1 = 4, m_2 = 2$.

Das Anfangsmoment des $(v + 1)$ -ten ist gleich dem Endmoment des v -ten Stabes und sei M_v ; die $2s$ Momente sind hiermit durch $2s - k + m_2 = n + 1$ Momentgrößen ausgedrückt. Die Drehungswinkel der freien Knoten seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, wobei ϑ_v gleich ist dem v_a' für den $(v + 1)$ -ten und dem v_b' für den v -ten Stab; die v' sind so durch $k - m_2 = n - 1$ Drehungsgrößen dargestellt. — Nun die Zusatzkräfte.

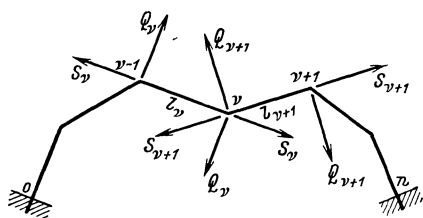


Abb. 96.

Damit ein biegefreies Gleichgewicht besteht, also ein Knickproblem in unserer früheren Erklärung überhaupt vorliegt, müssen die Belastungen so beschaffen sein, daß der Rahmen ein zu ihnen passendes Seileck bildet. Die Kräfte Q und S haben daher in jedem Knoten die gleiche Resultierende. Somit ist Q_v die zum

v -ten Stab senkrechte Komponente einer von v unabhängigen Kraft $Q_v = -X \cdot \sin \alpha_v + Y \cdot \cos \alpha_v$, wenn α_v der Winkel des v -ten Stabes mit der x -Achse ist. Die s Größen Q sind derart durch $2s - 2k + m_1 = 2$ Werte X, Y zu ersetzen. Die Normalverschiebungen v kommen in den Gl. (II) nur in der Verbindung $\frac{v_b - v_a}{l}$ vor, und hierfür schreiben wir

$$\frac{v_b - v_a}{l_v} = \delta_v.$$

Anstatt der Größen v hat man jetzt n Werte δ , während nur $2k - s - m_1 = n - 2$ unabhängige v vorhanden sind. Zwischen den „*Stabdrehwinkeln*“ δ gelten aber, wenn man Unveränderlichkeit der Stablängen voraussetzt, die beiden Beziehungen

$$\sum_{v=1}^n l_v \delta_v \cdot \cos \alpha_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n l_v \delta_v \cdot \sin \alpha_v = 0, \quad (1)$$

die aussagen, daß die Vektorsumme der Relativverschiebungen zwischen Anfang und Ende des Stabzuges, d. h. die Verschiebung des n -ten Knotens gegenüber dem ersten Null sein muß. Die noch verfügbaren Gleichungen sind nun: Die Gleichgewichtsbedingungen (I)

$$M_v - M_{v-1} + P_v l_v \delta_v = l_v (X \cdot \sin \alpha_v - Y \cdot \cos \alpha_v) \quad (2)$$

und die Hauptgleichungen (II)

$$\begin{aligned} \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu-1} &= \left(\frac{l}{EI}\right)_\nu (M_\nu + M_{\nu-1}) \cdot t(z), \\ 2\delta_\nu - (\vartheta_\nu + \vartheta_{\nu-1}) &= \left(\frac{l}{EI}\right)_\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s(z), \end{aligned} \quad (3)$$

wobei ν die Werte 1 bis n durchläuft. Man hat somit $3n + 2$ lineare homogene Gleichungen mit $3n + 2$ Unbekannten ($n + 1$ Momente, $n - 1$ Drehwinkel, n Stabdrehwinkel, 2 Werte X, Y). Die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems ist die Knickbedingung.

Eine Vereinfachung läßt sich erzielen, wenn man die Zahl der Gleichungen vermindert und z. B. aus (1), (2) und (3) die Stabdrehwinkel eliminiert. Man berechnet aus (2) die δ und setzt in die zweite Gruppe der Hauptgleichungen (3) ein. Mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{l}{EI} \frac{1}{z \cdot \sin z}$$

bekommt man für $\nu = 1$ bis $\nu = n$ die $2n$ Beziehungen

$$\begin{aligned} \vartheta_{\nu-1} &= \lambda_\nu (M_{\nu-1} \cdot \cos z_\nu - M_\nu) + X \cdot \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - Y \cdot \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu}, \\ \vartheta_\nu &= \lambda_\nu (M_{\nu-1} - M_\nu \cdot \cos z_\nu) + X \cdot \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - Y \cdot \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Verbindung der Gl. (1) und (2) ergibt die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n (M_\nu - M_{\nu-1}) \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - X \cdot \sum_1^n \frac{\sin^2 \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu + \\ + Y \cdot \sum_1^n \frac{\sin \alpha_\nu \cdot \cos \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu = 0, \\ \sum_{\nu=1}^n (M_\nu - M_{\nu-1}) \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu} - X \cdot \sum_1^n \frac{\sin \alpha_\nu \cdot \cos \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu + \\ + Y \cdot \sum_1^n \frac{\cos^2 \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

so daß $2n + 2$ Gleichungen den $2n + 2$ Unbekannten ($n + 1$ Momenten, $n - 1$ Drehwinkeln, 2 Werten X, Y) gegenüberstehen.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen und aus den Gleichungen auch die Winkel ϑ entfernen. Ist $\nu < n$, so ersetzt man in der ersten Gl. (4) ν durch $\nu + 1$ und erhält damit einen Ausdruck für ϑ_ν , den man der rechten Seite der zweiten Gl. (4) gleichstellen kann. Daraus folgen für $\nu = 1$ bis $n - 1$ die $n - 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} M_{\nu-1} \cdot \lambda_\nu - M_\nu (\lambda_\nu \cdot \cos z_\nu + \lambda_{\nu+1} \cdot \cos z_{\nu+1}) + M_{\nu+1} \cdot \lambda_{\nu+1} - \\ - X \left(\frac{\sin \alpha_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} - \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} \right) + Y \left(\frac{\cos \alpha_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} - \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn man sich, der Einspannung entsprechend, am Anfang bzw. am

Ende des Stabzuges einen Stab von unendlich kleiner Länge angeschlossen denkt, findet man als erste bzw. letzte Gleichung

$$\begin{aligned} -M_0 \cdot \lambda_1 \cdot \cos z_1 + M_1 \cdot \lambda_1 - X \cdot \frac{\sin \alpha_1}{P_1} + Y \cdot \frac{\cos \alpha_1}{P_1} &= 0, \\ M_{n-1} \cdot \lambda_n - M_n \cdot \lambda_n \cdot \cos z_n + X \cdot \frac{\sin \alpha_n}{P_n} - Y \cdot \frac{\cos \alpha_n}{P_n} &= 0. \end{aligned} \quad (6')$$

Schließlich hat man noch zwei Beziehungen (5), womit eine Übereinstimmung zwischen der Zahl der Gleichungen und der Zahl der Unbekannten ($n + 1$ Momente, 2 Größen X , Y) vorhanden ist.

Bei der Umformung der Gleichungen kann man auch aus je drei Gl. (6) die Werte X , Y berechnen und eliminieren und eine Kette von $n - 1$ Gleichungen aufstellen, von denen jede nur M_{v-2} , M_{v-1} , M_v , M_{v+1} , M_{v+2} als Variable enthält. In den Gl. (5) kann X und Y z. B. mit Gl. (6') eliminiert werden. Man gewinnt demnach $n + 1$ Fünfmomentengleichungen für die $n + 1$ Momente. Die Koeffizienten der Unbekannten sind hierbei im allgemeinen komplizierte Ausdrücke; im nächsten Beispiel soll aber auch dieses Verfahren gezeigt werden.

Ist die Längskraft eine Zugkraft, so ist für P der Wert $-P$ zu nehmen. Wenn die Längskraft in einem Stab gleich Null ist, belassen wir für diesen Stab den Stabdrehwinkel als Unbekannte. Für die zusätzliche Variable tritt die Gleichgewichtsbedingung (2) des Stabes ein.

Wir haben zu beachten, daß bei jeder Elimination von Unbekannten, die im Grunde eine Vereinfachung der Knickdeterminante bedeuten, auch Lösungen verlorengehen können. Bilden wir mit den zuletzt erhaltenen Gleichungen die Knickbedingung, so heißt dies, daß wir die von Null verschiedenen Werte der Unbekannten M dieses Gleichungssystems suchen. Um zu erfahren, ob nicht auch von Null verschiedene Lösungen der eliminierten Variablen bestehen, brauchen wir nur auf die vorhergehenden Gleichungen zurückzugreifen. In diesen Gleichungen schreiben wir die bereits ermittelten Unbekannten gleich Null und bestimmen schrittweise Lösungen für die übrigen Variablen. An dem Beispiel von Pkt. 67 wird dieser Weg zu erkennen sein.

Für einen geraden Stab, der von verschiedenen Längskräften ergriffen ist, bzw. der stufenweise veränderliche Querschnitte besitzt, gelten zufolge $\alpha = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} M_{v-1} \cdot \lambda_v - M_v (\lambda_v \cdot \cos z_v + \lambda_{v+1} \cdot \cos z_{v+1}) + M_{v+1} \cdot \lambda_{v+1} + \\ + Y \left(\frac{1}{P_{v+1}} - \frac{1}{P_v} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_1^n (M_v - M_{v-1}) \frac{1}{P_v} + Y \cdot \sum_1^n \frac{l_v}{P_v} = 0.$$

Im Fall des beiderseits gelenkig gelagerten Stabes von der Länge L mit konstantem Querschnitt, der durch die Kraft P belastet ist, sind $M_{v-1} = M_{v+1} = 0$, somit $Y = 0$, $\cos z = 0$, und als kritischer Wert ergibt sich die EULERSche Last $P_k = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$.

Ist der Stabzug in einem Knoten „punktweise“ unterstützt, so sind $n + 1$ Momente und vier Größen X, Y unbekannt (zwei für den einen und zwei für den anderen Stabteil). Zur Verwendung stehen $n + 1$ Gl. (6), (6') und vier Gl. (5), nämlich zwei für jede „Öffnung“ des Stabpolygons. Die Rechnung läßt sich in analoger Weise bei beliebig vielen Zwischenstützen erledigen, denn es treten mit jeder Stütze zwei Unbekannte X, Y und ebenso zwei neue Gleichungen hinzu. Wie vor kann man wieder auf den geraden Stab übergehen. Wir werden die vielfachen, damit grundsätzlich gelösten Probleme des durchlaufenden geraden Stabes wegen ihrer Wichtigkeit im nächsten Abschnitt noch gesondert behandeln.

67. Der regelmäßige Ring mit radialer Belastung.

Gegeben ist ein regelmäßiges Polygon von n gleichen Stäben, die gleiche Winkel miteinander einschließen und dieselbe Längskraft P erhalten. Die Längskraft kann beispielsweise von einer radialen Belastung der Knoten mit gleichen Kräften herrühren, Abb. 97.

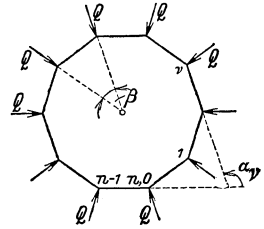


Abb. 97.

Um die kritischen Werte der Last P zu finden, gehen wir nach dem in Pkt. 66 beschriebenen Verfahren von den Gl. (5) und (6) aus. Die Differenzgleichung (6) wird, wenn man für P den Wert $z^2 \frac{EI}{l^2}$ einführt und $\beta = \frac{2\pi}{n}$, $\alpha_v = \nu \cdot \beta$ setzt,

$$M_{\nu-1} - 2 \cos z \cdot M_{\nu} + M_{\nu+1} = 2l \frac{\sin z}{z} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \left[X \cdot \cos \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \beta + Y \cdot \sin \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \beta \right]. \quad (\alpha)$$

Die zwei Beziehungen (5) lauten, da alle Summen wie $\sum_1^n \sin \alpha_v$, $\sum_1^n \cos \alpha_v$, $\sum_1^n \sin 2\alpha_v$ usw. als Projektionen von Vektoren, die ein geschlossenes Polygon bilden, gleich Null sind

$$\sum_1^n (M_{\nu} - M_{\nu-1}) \sin \alpha_{\nu} = \frac{n}{2} l \cdot X, \quad (\beta)$$

$$\sum_1^n (M_{\nu} - M_{\nu-1}) \cos \alpha_{\nu} = -\frac{n}{2} l \cdot Y.$$

Multipliziert man Gl. (α) mit $-2 \cos \beta$, addiert hierzu die vorhergehende (für $\nu - 1$) und die folgende (für $\nu + 1$), so wird die rechte Seite gleich Null, und man erhält eine Differenzgleichung mit fünf Momenten

$$M_{\nu-2} - 2 (\cos z + \cos \beta) M_{\nu-1} + 2 (1 + 2 \cos z \cdot \cos \beta) M_{\nu} - 2 (\cos z + \cos \beta) M_{\nu+1} + M_{\nu+2} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Periodizität ist bei dem geschlossenen Ring ohne Auflager $M_{v+n} = M_v$, und es gilt die Lösung

$$M_v = A \cdot \cos m v \beta + B \cdot \sin m v \beta,$$

wobei m eine beliebige ganze Zahl ist. Aus der Fünfmomentengleichung folgt hiermit für Werte $m > 1$

$$z = m \cdot \beta = m \cdot \frac{2\pi}{n} \text{ oder } n z = 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots \quad (\text{a})$$

Für $m = 1$ werden die Gl. (α) und (β) mit Einsetzen der angeführten Lösung $2(\cos \beta - \cos z) M_v =$

$$= 2l \frac{\sin z}{z} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \left[X \cdot \cos \left(v + \frac{1}{2} \right) \beta + Y \cdot \sin \left(v + \frac{1}{2} \right) \beta \right],$$

$$- A \cdot \sin \beta + B \cdot (1 - \cos \beta) = l \cdot X, \quad A \cdot (1 - \cos \beta) + B \cdot \sin \beta = -l \cdot Y,$$

und wenn man in der ersten Gleichung mit Hilfe der beiden anderen die Werte X, Y eliminiert, so gewinnt die rechte Seite die Form

$-4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot M_v$, und es entsteht

$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z - \sin z}, \quad (\text{b})$$

eine weitere Beziehung zwischen z und der Seitenzahl n .

Schließlich müssen wir noch prüfen, ob bei der Elimination der ϑ und δ beim Übergang von den allgemeinen Gleichungen zu den Gl. (5) und (6) nicht Lösungen verloren wurden. Aus den Gl. (4) erkennen wir, daß es bei verschwindenden M, X, Y nur dann Lösungen für ϑ gibt, wenn $\lambda = \infty$, d. h. $\sin z = 0$ wird, also für

$$z = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (\text{c})$$

Ohne jede genauere Untersuchung ist ersichtlich, da es sich nur um Formänderungen ohne Wendepunkt ($z = \pi$) oder mit Wendepunkt ($z = 2\pi$) handeln kann, daß bei gerader Seitenzahl alle Werte von (c) möglich sind, daß hingegen bei ungerader Seitenzahl nur die geraden Werte $2\pi, 4\pi, \dots$ in Geltung bleiben. Bei unseren früheren Ansätzen haben wir aber zuerst die δ eliminiert, und deshalb greifen wir auf die Gl. (3) zurück. Bei verschwindenden M und ϑ sind nur Lösungen für die δ vorhanden, die mit der Bedingung (c) übereinstimmen.

Man hat sonach das Ergebnis: Für das *gleichseitige Dreieck* ($n = 3$) ist der Kleinstwert von z aus Gl. (b) gleich $1,23\pi$, für das *Quadrat* ($n = 4$) ist aus Gl. (a) oder Gl. (c) $z = \pi$, für *Polygone* mit einer Seitenzahl $n > 4$ ist der kleinste Wert z aus Gl. (a) gleich $\frac{4\pi}{n}$.¹ Bezeichnen wir mit L die Gesamtlänge des Polygons $L = n \cdot l$, so ist die kritische Last von P bei der Seitenzahl $n = 3$

$$P_k = 13,6 \cdot \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

¹ Der Fall $n = 3$ wurde auch von H. ZIMMERMANN diskutiert: Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, S. 26—38. 1925.

und für regelmäßige Polygone mit $n > 3$

$$P_k = 16 \cdot \pi^2 \frac{EI}{L^2}.$$

68. Der Rechtwinkelrahmen.

Von dem in der Abb. 98 gezeichneten Rechtwinkelrahmen mit eingespannten Ständerfüßen ist der rechtsseitige Stiel durch das Gewicht P belastet. Elastizitätszahl, Länge und Querschnittsträgheitsmoment sind für den rechten Ständer E , l und I , für den linken Hilfsständer E_1 , l und I_1 , für den Querstab E' , h und I' .

Wir wollen bei der Aufstellung der Gleichungen unmittelbar von den allgemeinen Ansätzen (1), (2) und (3) ausgehen, die wir in Pkt. 66 für den ebenen Polygonrahmen hergeleitet haben. Die Gl. (1) ergeben, da $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{3\pi}{2}$ die Beziehungen

$$\delta_2 = 0, \quad \delta_1 = \delta_3 (= \delta),$$

die auch sofort zu erkennen sind, denn die Knoten 1 und 2 können sich nur horizontal verschieben. Die Momentengleichungen (2) liefern für die beiden Stiele

$$M_1 - M_0 = l \cdot X, \quad M_3 - M_2 + z^2 \frac{EI}{l} \delta = -l \cdot X,$$

woraus man durch Addition

$$z^2 \frac{EI}{l} \delta = M_0 - M_1 + M_2 - M_3$$

erhält. [Für den Querstab wenden wir die Gl. (2) nicht an, da sie nur das sonst nicht mehr auftretende Y bestimmt.] Die Hauptgleichungen (3) nehmen für die drei Stäbe mit den Abkürzungen

$$\varkappa = \frac{E' I'}{EI} \frac{l}{h} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E_1 I_1}{EI}$$

die Form an

$$\begin{aligned} \frac{EI}{l} \vartheta_1 &= \frac{1}{2\lambda} (M_0 + M_1), & \frac{EI}{l} (2\delta - \vartheta_1) &= \frac{1}{6\lambda} (M_0 - M_1), \\ \frac{EI}{l} (\vartheta_2 - \vartheta_1) &= \frac{1}{2\varkappa} (M_2 + M_1), & \frac{EI}{l} (\vartheta_2 + \vartheta_1) &= \frac{1}{6\varkappa} (M_2 - M_1), \\ \frac{EI}{l} \vartheta_2 &= -(M_3 + M_2) \cdot t(z), & \frac{EI}{l} (2\delta - \vartheta_2) &= (M_3 - M_2) \cdot s(z). \end{aligned}$$

Aus den beiden mittleren Gleichungen berechnen wir ϑ_1 und ϑ_2

$$\frac{EI}{l} \vartheta_1 = -\frac{1}{6\varkappa} (2M_1 + M_2), \quad \frac{EI}{l} \vartheta_2 = \frac{1}{6\varkappa} (M_1 + 2M_2)$$

und setzen diese Werte sowie den für δ gefundenen in die vier anderen ein. So gewinnt man die folgenden vier Gleichungen für die vier Momente M , wobei wir für die Ausdrücke $t(z)$ und $s(z)$ der Kürze halber t und s schreiben

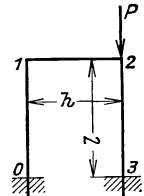


Abb. 98.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\kappa} M_0 + \left(\frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\kappa}\right) M_1 + \frac{1}{\kappa} M_2 &= 0, \\ \frac{1}{\kappa} M_1 + \left(\frac{2}{\kappa} + 6t\right) M_2 + 6t \cdot M_3 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{12}{z^2}\right) M_0 - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\kappa} - \frac{12}{z^2}\right) M_1 - \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{12}{z^2}\right) M_2 + \frac{12}{z^2} M_3 &= 0, \\ \frac{1}{\lambda} M_0 - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\kappa}\right) M_1 + \left(6s - \frac{3}{\kappa}\right) M_2 - 6s \cdot M_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems — eine Beziehung zwischen κ , λ und z — ist die Knickbedingung, die zu jedem Wertepaar κ , λ ein bestimmtes z ergibt. Die Knicklast ist dann

$$P_k = z^2 \frac{EI}{l^2}.$$

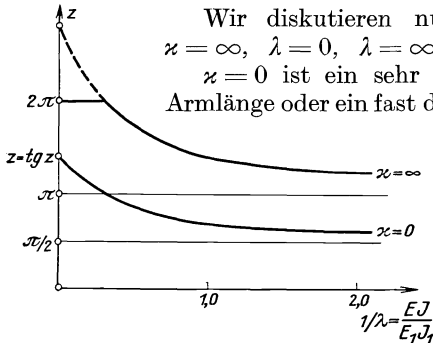


Abb. 99.

Wir diskutieren nunmehr die vier Grenzfälle $\kappa = 0$, $\kappa = \infty$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

$\kappa = 0$ ist ein sehr biegeschwacher Querstab, eine große Armlänge oder ein fast drehbares Gelenk. Die Knickbedingung lautet aufgelöst, wenn wir in den Gleichungen die Glieder, die additiv zu $\frac{1}{\kappa}$ treten, fortlassen,

$$\lambda = \frac{z^2}{3} \left(1 - \frac{2}{z^2(t-s)}\right)$$

und nach Einsetzen von t und s

$$\lambda = \frac{z^3}{3(z - tgz)}.$$

Die Abb. 99 zeigt den Verlauf der z als Funktion von $\frac{1}{\lambda}$. Für $\frac{1}{\lambda} = 0$ ist $z = tgz$, die Knicklast hat jenen Wert, der dem einseitig eingespannten Stab entspricht; für $\frac{1}{\lambda} = \infty$, bei einer schwachen Einspannung des unbelasteten Hilfsständers im Querstab, ist $z = \frac{\pi}{2}$.

$\kappa = \infty$ stellt einen sehr starken kurzen Querstab vor, dessen belastetes Ende vertikal erhalten bleibt. Die Knickgleichung wird

$$\lambda = \frac{s \cdot z^2 + 2}{12s}, \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{z^3}{24\left(\frac{z}{2} - tg\frac{z}{2}\right)} \cdot \frac{1 - \cos z}{z \cdot \sin z} = 0.$$

In der Abb. 99 ist $\frac{1}{\lambda}$ als Funktion von z aufgetragen. $\frac{1}{\lambda} = 0$ bedeutet einen sehr starken, $\frac{1}{\lambda} = \infty$ einen sehr schwachen Hilfsständer. Wenn $\frac{1}{\lambda}$ die Werte 0 bis ∞ durchläuft, bewegt sich z von 2π bis π .

$\lambda = 0$ ist ein sehr schwacher Hilfsständer. Die Knickbedingung wird, wenn wir die zu $\frac{1}{\lambda}$ additiven Glieder weglassen,

$$\kappa = -\frac{(s \cdot z^2 + 2) - t \cdot z^2}{6(s \cdot z^2 + 2) \cdot t} \text{ oder } \kappa = -\frac{z}{3} \cotg z.$$

Die Kurve der z als Funktion von $\frac{1}{\kappa}$ ist in der Abb. 100 dargestellt. Die Grenzwerte sind bereits aus den vorhergehenden Fällen zu ersehen; für $\frac{1}{\kappa} = 0$ ist $z = \pi$, für $\frac{1}{\kappa} = \infty$ ist $z = \frac{\pi}{2}$.

$\lambda = \infty$ bedeutet einen sehr starken Hilfsständer, das belastete Ende des rechten Ständers wird unverschieblich erhalten. Die Knickgleichung ist

$$\kappa = \frac{t-s}{8s \cdot t} \text{ oder}$$

$$\kappa = \frac{z^2}{4} \cdot \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{2(1 - \cos z) - z \cdot \sin z}.$$

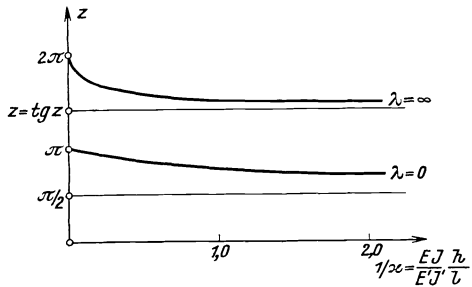


Abb. 100.

Die Abb. 100 gibt auch den Verlauf der z als Funktion von $\frac{1}{\kappa}$. Die Grenzwerte sind wieder schon bei den zwei zuerst untersuchten Fällen vorhanden; für $\frac{1}{\kappa} = 0$ ist $z = 2\pi$, für $\frac{1}{\kappa} = \infty$ ist $z = tg z$.

69. Der Rahmenstab (Vierendeelträger, Stockwerkrahmen).

Wir untersuchen einen *Rahmenstab*, einen aus Rechtecken zusammengesetzten Träger, bei dem jeder Gurt mit der Kraft $\frac{P}{2}$ belastet ist,

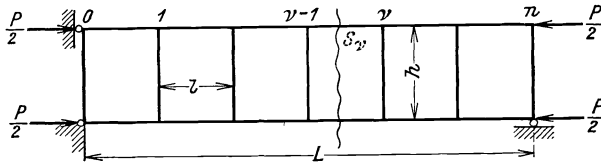


Abb. 101.

Abb. 101. Die Gurtstäbe haben die Längen, Elastizitätszahlen, Querschnittsträgheitsmomente l, E, I , die Querstäbe h, E', I' , und es sei

$$\kappa = \frac{E' I' l}{E I h}.$$

Die Zahl der Felder ist n , die Knoten haben die Bezeichnung 0 bis n , die Gurtstäbe 1 bis n . Die vorgegebenen Auflagerbedingungen sind: Knoten 0 unten fest (zwei Bedingungen), Knoten 0 oben vertikal geführt (eine Bedingung), Knoten n unten horizontal geführt (eine Bedingung). Das Tragwerk hat also $k = 2(n + 1)$ Knoten, $s = 3n + 1$ Stäbe, $m_1 = 4$ Auflagerbeschränkungen, $m_2 = 0$ Drehungsbeschränkungen.

Bei der Formänderung erleiden die Knoten nur eine vertikale Verschiebung, und zwar die oberen und die unteren um das gleiche Maß y_ν , wobei ν von 1 bis $n - 1$ läuft. Nach Pkt. 65 ist die Zahl der unbekanntnen Verschiebungen gleich $2k - s - m_1$, also hier gleich $n - 1$, was auch sofort zu sehen ist. Die Anzahl der weiteren Variablen (Drehungen, Zusatzkräfte, Momente) läßt sich sehr vermindern, wenn man Ober- und Untergurt gemeinsam behandelt.

Wir benennen die Summe der Drehungen im oberen und unteren Knoten ν mit $2y'_\nu$, die Summe der Biegemomente im Ober- und Untergurt unmittelbar links vom Knoten mit $2L_\nu$, unmittelbar rechts mit $2R_\nu$, Abb. 102. Wenn wir die Hauptgleichungen (II) für den ν -ten Ober- und Untergurtstab anschreiben und addieren, so treten links die Summen der Verschiebungen und Drehungen, rechts die Summen der Momente vom Ober- und Untergurtstab auf. Dabei ist für das ν -te Feld (vom Knoten $\nu - 1$ bis Knoten ν) die Summe der M_a gleich $2R_{\nu-1}$, die Summe der M_b gleich $2L_\nu$. Man gewinnt so die Gleichungen

$$y'_\nu - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EI} (R_{\nu-1} + L_\nu) \cdot t(z), \quad (a)$$

$$2 \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} - (y'_\nu + y'_{\nu-1}) = \frac{l}{EI} (L_\nu - R_{\nu-1}) \cdot s(z), \quad (b)$$

$$\text{mit } z^2 = \frac{Pl^3}{2EI}, \text{ da die Kraft gleich } \frac{P}{2} \text{ gesetzt ist. — Die}$$

Gleichgewichtsbedingung (I) für den ν -ten Obergurtstab enthält die Querkraft Q , für den ν -ten Untergurtstab demnach $-Q$, vorausgesetzt, daß keine vertikale Auflagerkraft vorhanden ist. (In diesem Fall müßte man sie als Unbekannte mitführen, was unsymmetrische Knickformen ergäbe.) Wenn man nun die beiden Gleichgewichtsbedingungen addiert, so entsteht die Gleichung

$$\frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} = - \frac{l}{EI} \cdot \frac{1}{z^2} (L_\nu - R_{\nu-1}), \quad (c)$$

die aus einem durch beide Gurte gelegten Schnitt auch unmittelbar hergeleitet werden kann. — Jetzt sind noch die Gleichungen für den Querstab aufzustellen. Für diesen ist $v_a = v_b = 0$, da die Knoten nur vertikale Verschiebungen erfahren. Da $P = 0$, gelten die Gl. (II'). Das Moment M_a am oberen Ende ist $L_\nu^o - R_\nu^o$, das Moment M_b am unteren Ende ist $-L_\nu^u + R_\nu^u$ (Abb. 102), daraus folgt $M_b - M_a = -2 \cdot (L_\nu - R_\nu)$ und die zweite Gl. (II') lautet

$$y'_\nu = \frac{1}{6z} \frac{l}{EI} (R_\nu - L_\nu). \quad (d)$$

Die Gl. (a) bis (d) genügen zur Lösung des Problems. Die Ansätze (a), (b) und (c) gelten für jedes der n Felder, also für $\nu = 1$ bis n . Die Gl. (d) gilt für jeden Querstab, d. h. für $\nu = 0$ bis n . Daher sind insgesamt $4n + 1$ Gleichungen vorhanden; L_0 und R_n muß man dabei Null setzen. An Unbekanntnen hat man $n - 1$ Ausbiegungen y_1 bis y_{n-1} , $n + 1$ Drehwinkel y'_0 bis y'_n , n Momentensummen L_1 bis L_n und n Momenten-

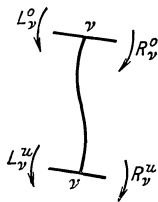


Abb. 102.

summen R_0 bis R_{n-1} , somit im ganzen $4n$. Eine Unbekannte wäre also zu wenig, aber wir haben die vertikale Auflagerkomponente schon gleich Null angenommen und uns so auf symmetrische Verformungen beschränkt, wobei $\sum y'_\nu = 0$. Dann ist die Summe aller n Gl. (b) und aller n Gl. (c) identisch, nämlich $0 = \sum (L_\nu - R_{\nu-1})$; von den $4n + 1$ Gleichungen sind somit nur $4n$ voneinander unabhängig.

Eliminiert man aus den Gl. (a), (b) und (c) die y (dies ist das allgemeine Verfahren und bei allen Stäben anwendbar, für die P von Null verschieden ist), so bekommt man

$$y'_\nu - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EI} (R_{\nu-1} + L_\nu) \cdot t(z),$$

$$-y'_\nu - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EI} (L_\nu - R_{\nu-1}) \cdot \left[s(z) + \frac{2}{z^2} \right],$$

für $\nu = 1$ bis n . Durch Auflösen nach L_ν und $R_{\nu-1}$ findet man, unter Beachten der Gleichungen für $t(z)$ und $s(z)$, die Beziehungen

$$\frac{l}{EI} L_\nu = \frac{z}{\sin z} (\cos z \cdot y'_\nu - y'_{\nu-1}), \quad \frac{l}{EI} R_{\nu-1} = \frac{z}{\sin z} (y'_\nu - \cos z \cdot y'_{\nu-1}).$$

Wenn $\nu < n$, darf man aus der zweiten Gleichung schließen, daß $\frac{l}{EI} R_\nu = \frac{z}{\sin z} (y'_{\nu+1} - \cos z \cdot y'_\nu)$. Damit wird

$$\frac{l}{EI} (R_\nu - L_\nu) = \frac{z}{\sin z} (y'_{\nu+1} - 2 \cos z \cdot y'_\nu + y'_{\nu-1})$$

und aus Gl. (d) entsteht

$$y'_{\nu+1} - y'_\nu \left(2 \cos z + 6\kappa \cdot \frac{\sin z}{z} \right) + y'_{\nu-1} = 0 \quad (\text{K})$$

für $\nu = 1$ bis $n - 1$, eine Differenzgleichung zweiter Ordnung in y' . Um die Randbedingungen herzuleiten, muß man berücksichtigen, daß $L_0 = 0$, $R_n = 0$, und es folgt

$$y'_{-1} = \cos z \cdot y'_0, \quad y'_{n+1} = \cos z \cdot y'_n. \quad (\text{R})$$

Mit den Hilfsgrößen y'_{-1} und y'_{n+1} kann man die Differenzgleichung auch für $\nu = 0$ und $\nu = n$ anschreiben und hat dann $n + 3$ Gleichungen für $n + 3$ Variable $y'_{-1}, y'_0, \dots, y'_{n+1}$.

Um die Gl. (K) zu integrieren, führen wir den Ansatz $y'_\nu = e^{\nu i \vartheta}$ ein und erhalten aus

$$e^{i \vartheta} + e^{-i \vartheta} - 2 \left(\cos z + 3\kappa \cdot \frac{\sin z}{z} \right) = 0$$

die Beziehung

$$\cos \vartheta = \cos z + 3\kappa \cdot \frac{\sin z}{z}. \quad (\alpha)$$

Das allgemeine Integral $y'_\nu = A \cdot \cos \nu \vartheta + B \cdot \sin \nu \vartheta$ nehmen wir in Hinblick auf die Symmetrie in der Form $\sin \left(\nu - \frac{n}{2} \right) \vartheta$ an und die Randbedingungen ergeben

$$\cos z = \cos \vartheta + \cotg \frac{n}{2} \vartheta \cdot \sin \vartheta. \quad (\beta)$$

Eliminiert man ϑ aus den Bestimmungsgleichungen (α) und (β), so entsteht eine Gleichung für z als Funktion von κ und n . Für $\kappa = 0$, d. h. bei sehr schwachen Querstäben, wird $z = \frac{\pi}{n}$, d. h. der Rahmenstab trägt nur soviel wie die beiden Gurte in unverbundenem Zustand; für $\kappa = \infty$, d. i. bei sehr starken Querstäben, ist $z = \pi$, entsprechend einer Formänderung, wie sie Abb. 103 andeutet; jeder Gurt hat in der Mitte

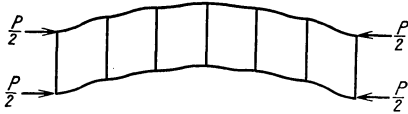


Abb. 103.

jedes Feldes einen Wendepunkt, an den Enden des Feldes eine waagrechte Tangente und zeigt dabei — im ganzen gesehen — eine Sinusform. Bei Auflösung der Gl. (α) und (β) geht man am einfachsten derart vor, daß man bei vorgegebenem n den Parameter ϑ die Werte zwischen $\frac{\pi}{n}$ und $\frac{2\pi}{n+1}$ durchlaufen läßt, aus Gl. (β) den Wert n berechnet und hiernach aus Gl. (α) das κ bestimmt. Die gefundenen Wertepaare κ, z kann man in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen und damit bei festem n das gesuchte z als Funktion von κ erhalten (Abb. 104).

Für eine große Felderzahl n und kleine κ wird ϑ klein, $n \cdot \vartheta$ nahe π und aus Gl. (α) in erster Näherung $z^2 = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + 6\kappa$. Führen wir die Gesamtlänge $L = n \cdot l$ und das fiktive Trägheitsmoment $\bar{I} = 2 \cdot I$ ein, so lautet der asymptotische Ausdruck für die Knicklast

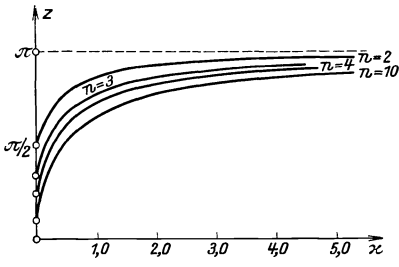


Abb. 104.

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} + 12 \frac{E' I'}{h l}. \quad (A)$$

Der erste Summand ist entsprechend der EULERSCHEN Formel für die unverbundenen Gurte gebildet, der zweite stellt den von der Querverbindung herrührenden Zusatz dar, der durch Verkleinern von l beliebig vergrößert werden kann.

Wir müssen überlegen, ob bei engen Feldern der Ansatz der reinen Rahmenknickung, d. h. die Vernachlässigung der Dehnungen während des Knickvorganges, noch eine brauchbare Annäherung liefert. Die Gl. (A) kann nämlich nicht die vollständige Lösung des Problems sein. Das Hauptglied enthält nur das Trägheitsmoment der Gurtstabquerschnittsflächen F bezüglich ihrer eigenen Schwerachse $\bar{I} = 2 \cdot I$, während man noch ein Glied von der Größe $2F \cdot \frac{h^2}{4}$ erwarten sollte, welches das Trägheitsmoment bezüglich der gemeinsamen Schwerachse zum Ausdruck bringt. Schließlich muß der Vierendeelträger bei großer Felderzahl die Tragfähigkeit eines vollwandigen Stabes annehmen. Nun ergibt die Theorie der reinen Fachwerkknickung, die ein Berück-

sichtigen der Längenänderungen unter Vernachlässigung der Biegungen darstellt, beim ebenen Fachwerkträger das fiktive Trägheitsmoment $F \frac{h^2}{2}$, während wir jetzt bei Beachten der Biegesteifigkeit und Außerachtlassen der Dehnungen nur den anderen Bestandteil $2I$ auffinden. Demgemäß muß man vermuten, daß eine Theorie, die sowohl die Längenänderungen wie die Biegesteifigkeit in Rechnung setzt, das vollständige Resultat liefern wird.

§ 20. Die allgemeine Stabwerkknickung ebener Systeme.

70. Allgemeine Ansätze.

Wenn wir die Ansätze der reinen Fachwerkknickung und der reinen Rahmenknickung zusammenfassen, also bei biegesteifen geraden Stäben die Längenänderungen berücksichtigen, so ergibt sich eine vollständige Stabwerktheorie, die für jedes Tragwerk mit steifen oder gelenkigen Knoten anwendbar ist.

Wir betrachten wie vorher ein ebenes System von k Knoten und s geraden Stäben. Die Theorie der reinen Rahmenknickung bedarf jetzt nur einer kleinen Ergänzung. Die in Pkt. 65 getroffene Annahme, wonach während des Knickvorganges keine Längenänderung der Stäbe stattfindet, lassen wir fallen und setzen vielmehr voraus, daß sich der (unendlich kleinen) Biegung eine (unendlich kleine) Dehnung überlagert.

Die Gleichgewichtsbedingung (I)

$$M_a - M_b = Q \cdot l + P(v_b - v_a) \quad (\text{I})$$

und die beiden Hauptgleichungen (II)

$$\begin{aligned} v_b' - v_a' &= \frac{l}{EI} (M_b + M_a) \cdot t(z); \\ 2 \frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') &= \frac{l}{EI} (M_b - M_a) \cdot s(z), \end{aligned} \quad (\text{II})$$

mit den Abkürzungen

$$t(z) = \frac{1 - \cos z}{z \cdot \sin z}, \quad s(z) = \frac{1 + \cos z}{z \cdot \sin z} - \frac{2}{z^2}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

bleiben ungeändert bestehen. Sind u_b und u_a die Verschiebungskomponenten der Endpunkte eines Stabes in der Stabrichtung (vgl. Abb. 93), S die in die Stabrichtung fallende Komponente der Zusatzkraft, so gilt noch die *Dehnungsgleichung*

$$u_b - u_a = \frac{S}{EF} l, \quad (\text{III})$$

wobei F die Fläche des Stabquerschnittes ist. Untersucht wird wieder die Stabilität eines biegefreien Gleichgewichtszustandes, wobei wir die Stabkraft P für jeden Stab als gegeben ansehen. In den Gl. (I) und (II) sind die Längen ohne Berücksichtigung der durch die S bewirkten Änderungen eingesetzt. Hierbei ist zu beachten, daß die Längen-

änderungen infolge der ursprünglichen endlichen Kräfte bisher auch nicht vernachlässigt waren; für die Längen und die Winkel werden ja bei der Stabilitätsberechnung die Werte des verformten Endzustandes genommen.

Die Bilanz zwischen Gleichungen und Unbekannten ändert sich nur in einem Punkt gegenüber der reinen Rahmenknickung. Neu sind bei s Stäben s unbekannte Verschiebungen, aber ebenso s Dehnungsgleichungen (III). Wir haben demnach $4s$ lineare homogene Gleichungen mit $4s$ Variablen, deren gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante die Knickbedingung liefert.

Zum Fall der reinen Rahmenknickung kommt man zurück, wenn man in (III) die Querschnittsflächen F mit dem Wert Unendlich einführt. Sind alle Knotenmomente gleich Null, so hat man die reine Fachwerkknickung. Die Theorie läßt aber noch verschiedene Erweiterungen zu. Ist ein Stab in einem Knoten gelenkig angeschlossen, so ist das betreffende Endmoment Null, dafür die Neigung ϑ' unbekannt, d. h. nicht gleich der Neigung der übrigen Stäbe in diesem Knoten. Man braucht jedoch nicht nur die Grenzfälle völlig nachgiebiger oder völlig steifer Eckverbindungen in Betracht zu ziehen, sondern kann auch „*elastische*“ Anschlüsse verwenden. Eine solche Nachgiebigkeit wird durch einen linearen Zusammenhang zwischen den Drehungen oder Verschiebungen und den Endmomenten festgelegt; für die neue Unbekannte tritt also eine neue Gleichung ein. Auch elastische Auflagerbedingungen wären in gleicher Weise zu behandeln.

Will man bei einer praktischen Berechnung der Einfachheit halber einen speziellen Ansatz benützen, so muß man in jedem Fall besonders überlegen, was zutreffend bleibt. Ein Vierendeelträger kann natürlich nicht als Fachwerk berechnet werden, da er dann keine Tragkraft hätte. Wird anderseits ein Gitterträger, der aus lauter Dreiecken zusammengesetzt ist, als reines Rahmentragwerk aufgefaßt, so könnten die Knoten keine gegenseitigen Verschiebungen erfahren, und die Knickgrenze wäre erst erreicht, wenn der einzelne Gurtstab ausknickt. Beim Gitterträger mit Diagonal- und Querstäben darf man diese aber in den Gurtstäben als gelenkig eingehängt ansehen. An der vollständigen Theorie gemessen, wird im allgemeinen die Tragkraft unterschätzt, sobald man ein bestimmtes Stabsystem als Fachwerk, überschätzt, sobald man es als reinen Rahmen rechnet.

Wir werden als Beispiele den Rahmenbalken und den Gitterträger mit biegesteifen Gurten untersuchen. Zuvor wollen wir aber eine grundsätzliche Betrachtung über die Stabilitätsbedingung einfügen.

71. Bedeutung der Knickgleichung.

Beim Rahmentragwerk bestimmen wir nach dem Vorhergehenden die Stabilitätsgrenze aus der Bedingung, daß in unendlicher Nachbarschaft des geradlinigen Zustandes ein Gleichgewichtszustand mit schwachen Ausbiegungen vorhanden ist. Zu diesem Zweck suchen

wir aus den Gleichungen zwischen den Biegegrößen Q, S, M, u, v, v' die von Null verschiedene Lösung. Früher hatten wir beim reinen Fachwerk für die Stabilitätsgrenze festgestellt, daß das Gleichgewicht indifferent ist, also der Übergang von der gegebenen Gleichgewichtsfigur zu einer benachbarten auch bei Berücksichtigen der Glieder zweiter Ordnung keine Arbeitsleistung hervorruft. Wir wollen jetzt die Gleichwertigkeit beider Aussagen für ein Stabwerk nachweisen.¹

Die Formänderungsarbeit oder die Gesamtenergie für die Gleichgewichtsfigur des Stabwerkes sei in der Ausgangslage gleich U . Jedem Knotenpunkt \varkappa entsprechen, soweit nicht Auflager- und Verdrehungsbeschränkungen bestehen, drei freie Koordinaten, deren Veränderungen wir mit $\delta x_\varkappa, \delta y_\varkappa, \delta \vartheta_\varkappa$ bezeichnen. Setzen wir hierfür allgemein zur Abkürzung $\delta \omega_\varkappa$, so ist die Änderung von U , d. h. die Verzerrungsarbeit beim Übergang zu einer Nachbarfigur, unter Vernachlässigung von Gliedern dritter und höherer Ordnung (vgl. Pkt. 56)

$$\delta U = \delta^1 U + \delta^2 U = \frac{\partial U}{\partial \omega_1} \cdot \delta \omega_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2} \cdot \delta \omega_2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1^2} \cdot \delta \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1 \cdot \partial \omega_2} \cdot \delta \omega_1 \cdot \delta \omega_2 + \dots \right].$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten erfolgt eine unendlich kleine Verrückung aus der Gleichgewichtslage in erster Näherung arbeitslos, und die Summe der in den $\delta \omega$ linearen Glieder ist daher gleich Null. Für die Stabilität ist das Verhalten der Glieder zweiter Ordnung maßgebend, und das Verschwinden der Determinante der quadratischen Form

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_{\iota, \varkappa} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_\iota \cdot \partial \omega_\varkappa} \cdot \delta \omega_\iota \cdot \delta \omega_\varkappa$$

bedeutet, daß der Gleichgewichtszustand ein indifferenter ist.

Bei einer Lagenänderung des Stabwerkes gilt für die Änderung der Gesamtenergie die Gleichung

$$\delta U = \delta A - \delta L.$$

Hierbei enthält A die elastische Arbeit der Dehnung und Biegung bei der virtuellen Verrückung aus dem spannungslosen Zustand und L die Arbeit der äußeren Kräfte.

Wir berechnen zuerst δA für einen mit P axial belasteten Stab von der Länge l mit den Endmomenten M_a, M_b und den Zusatzkräften Q und S . Ist l_0 die „natürliche“ Stablänge im spannungsfreien Zustand, Δl_0 die Verkürzung gegenüber diesem Zustand, so ist die Arbeit der Dehnung bei einer weiteren Verkürzung um d (Δl_0) gleich $\frac{EF}{l_0} \Delta l_0 \cdot d$ (Δl_0). Nun hat der Stab in der Ausgangslage mit der Länge l bereits die Ver-

¹ W. WENZEL: Über die Stabilität des Gleichgewichtes ebener elastischer Stabwerke und die Knickfestigkeit des Gitterträgers. Inauguraldissertation. Berlin, 1929.

kürzung $l_0 - l$, in der Endlage $l_0 - s$, wenn s die Länge des gebogenen Stabes vorstellt. Somit ist die Dehnungsarbeit

$$\delta A_1 = \int_{l_0 - l}^{l_0 - s} \frac{EF}{l_0} \Delta l_0 \cdot d(\Delta l_0),$$

oder

$$\delta A_1 = \frac{1}{2} \frac{EF}{l_0} [(l_0 - s)^2 - (l_0 - l)^2] = \frac{1}{2} \frac{EF}{l_0} [2(l_0 - l)(l - s) + (l - s)^2]$$

Die Stablänge nach der Ausbiegung ist bis zu Gliedern zweiter Ordnung genau

$$s = \int_0^{l + u_b - u_a} \left(1 + \frac{v'^2}{2}\right) du = l + u_b - u_a + \int_0^l \frac{v'^2}{2} du.$$

Daher wird

$$\delta A_1 = \frac{1}{2} \frac{EF}{l_0} \left[-2(l_0 - l)(u_b - u_a) + (u_b - u_a)^2 - 2(l_0 - l) \int_0^l \frac{v'^2}{2} du \right]$$

und mit den Werten

$$\frac{EF}{l_0} (l_0 - l) = P, \quad \frac{EF}{l_0} (u_b - u_a) = S,$$

folgt

$$\delta A_1 = -P(u_b - u_a) + \frac{1}{2} S(u_b - u_a) - \frac{1}{2} P \int_0^l v'^2 du.$$

Die Biegearbeit δA_2 ist für den in der Anfangslage nicht ausgebogenen Stab gleich

$$\delta A_2 = \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 du,$$

wenn wir bis auf Glieder zweiter Ordnung genau v'' statt $\frac{1}{\varrho}$ nehmen. Mit hin besteht für den Stab $a - b$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta A_{a,b} &= \delta A_1 + \delta A_2 = \\ &= -P(u_b - u_a) + \frac{1}{2} S(u_b - u_a) - \frac{P}{2} \int_0^l v'^2 du + \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 du. \end{aligned}$$

Für die Ausbiegung v gilt hierbei der Wert aus der Differentialgleichung

$$EIv'' = M_a - Q \cdot u - P(v - v_a),$$

unter den Randwerten $u = 0$, $M_a = EIv_a''$ und $u = l$, $M_b = EIv_b''$.

Mit $z^2 = \frac{Pl^2}{EI}$ und den Integrationskonstanten A und B ist

$$v = A \cdot \sin \frac{z}{l} u + B \cdot \cos \frac{z}{l} u + \frac{1}{P} (M_a - Q \cdot u + P \cdot v_a)$$

und die Rechnung ergibt für die beiden letzten Summanden in der Gleichung $\delta A_{a,b}$ den Ausdruck:

$$\frac{Q}{2} (v_b - v_a) + \frac{1}{2} M_b v_b' - \frac{1}{2} M_a v_a'.$$

Demnach ist

$$\delta A_{a,b} = -P(u_b - u_a) + \frac{1}{2} S(u_b - u_a) + \frac{1}{2} Q(v_b - v_a) + \frac{1}{2} M_b v_b' - \frac{1}{2} M_a v_a'.$$

Das Vorzeichen der Knotenmomente wählen wir derart, daß das im Sinn von M_b drehende Moment der Abb. 93 positiv ist; das Vorzeichen von M_a ist dann in der abgeleiteten Gleichung umzukehren.

Für das ganze Stabwerk ist also die Änderung der elastischen Arbeit der Dehnung und Biegung

$$\delta A = \sum_{a,b} \delta A_{a,b},$$

wobei sich die Summe über alle Stäbe erstreckt. Die Verschiebungen u, v drückt man mit Hilfe der Beziehungen

$$u_a = \delta x_a \cdot \cos \alpha_{ab} + \delta y_a \cdot \sin \alpha_{ab}, \quad u_b = -\delta x_b \cdot \cos \alpha_{ba} - \delta y_b \cdot \sin \alpha_{ba}, \\ v_a = -\delta x_a \cdot \sin \alpha_{ab} + \delta y_a \cdot \cos \alpha_{ab}, \quad v_b = \delta x_b \cdot \sin \alpha_{ba} - \delta y_b \cdot \cos \alpha_{ba}$$

durch die virtuellen Verrückungen $\delta x, \delta y$ aus, und die Drehung der in den Knoten a einmündenden Stäbe v_a' ist unmittelbar gleich der Drehung $\delta \vartheta_a$. Beachtet man die Gleichheit der Kraftgrößen $P_{ab} = P_{ba}, Q_{ab} = Q_{ba}, S_{ab} = S_{ba}$, ferner daß die Momente im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt werden, also sämtliche Momentenglieder nur positive Beiträge liefern, so entsteht nach Einsetzen und Ordnen die Gleichung

$$\delta A = \sum_a \left[\delta x_a \cdot \sum_b \left(P_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} - \frac{1}{2} S_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} + \frac{1}{2} Q_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab} \right) + \right. \\ \left. + \delta y_a \cdot \sum_b \left(P_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab} - \frac{1}{2} S_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab} - \frac{1}{2} Q_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta \vartheta_a \cdot \sum_b M_a \right].$$

Die Änderung des Potentials der äußeren Kräfte ist

$$\delta L = \sum_a (X_a \cdot \delta x_a + Y_a \cdot \delta y_a),$$

da die äußeren Kräfte bei der Formänderung unverändert mitgehen und äußere Momente nicht auftreten. — Bei der Zusammenfassung von δA und δL fallen nun zufolge $X_a = \sum_b P_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab}$, $Y_a = \sum_b P_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab}$ die Glieder erster Ordnung tatsächlich heraus und die Glieder zweiter Ordnung in δU erhalten die Form

$$\delta U = \delta A - \delta L = \delta^2 U = \frac{1}{2} \sum_a \left[\delta x_a \cdot \sum_b (-S_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} + Q_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab}) + \delta y_a \cdot \sum_b (-S_{ab} \cdot \sin \alpha_{ab} - Q_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab}) + \delta \vartheta_a \cdot \sum_b M_a \right].$$

Damit ist der gesuchte Nachweis schon erbracht. Die zwei ersten Summen in der eckigen Klammer auf der rechten Seite entsprechen den Kräften, die im Knoten a in der x - bzw. y -Richtung angreifen, die dritte Summe ist gleich den dort wirkenden Momenten. Jeder dieser Ausdrücke ist mit der zugehörigen virtuellen Verrückung δx_a bzw. δy_a bzw. $\delta \vartheta_a$ multipliziert und der ganze Arbeitswert addiert. Schreibt man die Summen gleich Null, so entstehen die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten a , aus denen ein lineares homogenes System in den Verrückungen hergeleitet werden kann, welches die Bedingung bildet, daß die Nachbarlage der Gleichgewichtsfigur wieder eine Gleichgewichtslage ist. (Die aufgestellte Beziehung läßt noch erkennen, daß die Gleichgewichtsbedingungen ein symmetrisches Schema besitzen.) Auch im Fall des Stabwerkes gelangt man also von diesen Ansätzen aus zu derselben Determinantengleichung für die Stabilitätsgrenze wie bei Betrachtung der Formänderungsarbeit, und unsere Knickgleichung bedeutet, daß der Gleichgewichtszustand indifferent ist.

§ 21. Der Rahmenstab. Ein Beispiel zur allgemeinen Stabwerkknickung ebener Systeme.

72. Der Rahmenstab. Aufstellen der Gleichungen.

Wir nehmen das Beispiel des Rahmenträgers, das wir bei der reinen Rahmenknickung behandelt haben, wieder auf und berücksichtigen auch die Längenänderungen der Stäbe. An diesem Problem hatten wir früher erkannt, daß die vollständige Lösung nur auf diesem Wege zu erreichen sein wird. Wir beschränken uns auf symmetrische Verformungen, da hierbei die kleinsten Knickwerte entstehen. (Siehe Abb. 101.)

Ein Vertikalschnitt durch den Rahmenstab zeigt, daß die Zusatzkräfte im Ober- und Untergurt desselben Faches umgekehrt gleich sein müssen. Somit sind es auch die Dehnungen, und das bedeutet bei der angenommenen Festlegung, daß die horizontalen Verschiebungen von zwei untereinander liegenden Knoten gleich von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Nennen wir u_ν die Verschiebung des Obergurtknotens ν nach rechts, S_ν die Zugkraft im Obergurtstab $\nu - 1, \nu$, so ist die Dehnungsgleichung (III), die wir in Pkt. 70 angeschrieben haben

$$S_\nu = (u_\nu - u_{\nu-1}) \frac{EF}{l} \quad (e)$$

für $\nu = 1$ bis n . Wie in Pkt. 69, bezeichnen wir die Summe der Drehungen im oberen und unteren Knoten ν mit $2y_\nu'$, die Summe der Biegemomente im Ober- und Untergurt unmittelbar links vom Knoten mit $2L_\nu$,

unmittelbar rechts mit $2R_\nu$. Wenn wir die Hauptgleichungen (II) für den ν -ten Ober- und Untergurtstab addieren, erhalten wir

$$y_\nu' - y_{\nu-1}' = \frac{l}{EI} (R_{\nu-1} + L_\nu) \cdot t(z) \quad (a)$$

$$2 \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} - (y_\nu' + y_{\nu-1}') = \frac{l}{EI} (L_\nu - R_{\nu-1}) \cdot s(z), \quad (b)$$

Gleichungen, die unverändert wie vor geblieben sind, nur daß jetzt y die halbe Summe der oberen und unteren Verschiebung ist, ohne daß jedoch die Gleichheit beider behauptet werden könnte. Ebenso wie bei der reinen Rahmenknickung, bekommt man als Gleichgewichtsbedingung für einen Vertikalschnitt

$$\frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} = - \frac{l}{EI} \frac{1}{z^2} (L_\nu - R_{\nu-1}). \quad (c)$$

In der früheren Gl. (d) tritt ein von den Verschiebungen u herrührendes Glied hinzu, denn diese Gleichung war die zweite der Hauptgleichungen (II') für den Querstab und enthält allgemein noch den Ausdruck $2 \frac{v_b - v_a}{l}$. Statt v_b , v_a und l sind nun $-u_\nu$, u_ν und h zu setzen. Daher wird

$$2 \frac{u_\nu}{h} + y_\nu' = \frac{1}{6\kappa} \frac{l}{EI} (R_\nu - L_\nu). \quad (d')$$

Schließlich stellen wir die Momentengleichung (I) für den Querstab auf. Da $2(L_\nu - R_\nu)$ die Differenz der Endmomente und $S_{\nu+1} - S_\nu$ gleich der Querkraft Q ist, lautet sie

$$2(L_\nu - R_\nu) + h \cdot (S_{\nu+1} - S_\nu) = 0, \quad (f)$$

für $\nu = 1$ bis $n - 1$. Mit dem System der sechs Gleichungen (a) bis (f) ist die erforderliche Anzahl zur Berechnung der sechs Variablenreihen y , y' , L , R , S , u gegeben.

Wir eliminieren wie bei der reinen Rahmenknickung wieder die Werte y . Die dort bestimmte Beziehung für $R_\nu - L_\nu$ war aus den Gleichungen (a), (b) und (c) abgeleitet und gilt daher unverändert weiter

$$\frac{l}{EI} (R_\nu - L_\nu) = \frac{z}{\sin z} (y_{\nu+1}' - 2 \cos z \cdot y_\nu' + y_{\nu-1}').$$

Mit Hilfe der Gl. (d') entsteht jetzt

$$\left[y_{\nu+1}' - y_\nu' \left(2 \cos z + 6\kappa \cdot \frac{\sin z}{z} \right) + y_{\nu-1}' \right] \cdot \frac{z}{12\kappa \cdot \sin z} = \frac{u_\nu}{h}. \quad (d'')$$

Wenn $\nu < n$, kann man ν in Gl. (e) durch $\nu + 1$ ersetzen, also $S_{\nu+1}$ und dann $S_{\nu+1} - S_\nu$ berechnen. Die Gl. (f) liefert damit

$$2(L_\nu - R_\nu) + EF \frac{h}{l} (u_{\nu+1} - 2u_\nu + u_{\nu-1}) = 0,$$

für $\nu = 1$ bis $n - 1$. Hier übernehmen wir den früheren Ausdruck für $L_\nu - R_\nu$, sowie die Werte u aus der eben entwickelten Gl. (d''), indem

wir sie auch auf $\nu + 1$ und $\nu - 1$ anwenden. Man gewinnt eine Differenzgleichung vierter Ordnung in y'

$$y'_{\nu+2} + a \cdot y'_{\nu+1} + 2b \cdot y'_\nu + a \cdot y'_{\nu-1} + y'_{\nu-2} = 0, \quad (\text{K})$$

für $\nu = 2$ bis $n - 2$, wobei die Abkürzungen eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} a &= -2 \left(1 + \cos z + 3\kappa \cdot \frac{\sin z}{z} + 3\lambda \right), \\ b &= 1 + 2 \cos z + 6\kappa \cdot \frac{\sin z}{z} + 6\lambda \cdot \cos z, \\ \lambda &= \kappa \cdot \frac{I}{F} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{E'}{E} \cdot \frac{4I'l}{Fh^3}. \end{aligned}$$

Als Randbedingungen haben wir wie vorher aus $L_0 = 0$, $R_n = 0$

$$y'_{-1} = \cos z \cdot y'_0, \quad y'_{n+1} = \cos z \cdot y'_n. \quad (\text{R}_1)$$

Dies ermöglicht die Differenzgleichung auch für $\nu = 1$ und $\nu = n - 1$ anzuschreiben. Man benötigt aber noch die Gleichungen für $\nu = 0$ und $\nu = n$. Für $\nu = 0$ ergibt sich aus Gl. (f): $-2R_0 + h \cdot S_1 = 0$ und daraus mit Gl. (e): $2R_0 = EF \frac{h}{l} (u_1 - u_0)$. Wenn man für R_0 den vor gefundenen Ausdruck $\frac{l}{EI} R_0 = \frac{z}{\sin z} (y'_1 - \cos z \cdot y'_0)$ nimmt, so wird

$$(y'_1 - \cos z \cdot y'_0) \frac{2z}{\sin z} = \frac{Fh}{I} (u_1 - u_0).$$

Bildet man aus Gl. (d'') die Differenz $u_1 - u_0$ und setzt sie dem jetzt bestimmten Wert gleich, so erhält man mit

$$y'_2 + (a + 1)y'_1 + (b - \cos z)y'_0 = 0, \quad (\text{R}_2)$$

und analog

$$y'_{n-2} + (a + 1)y'_{n-1} + (b - \cos z)y'_n = 0,$$

die beiden Gleichungen für $\nu = 0$ und $\nu = n$.

Es ist bemerkenswert, daß das Problem nur von zwei Parametern abhängt, von dem bereits früher benutzten κ , dem Verhältnis der Steifigkeiten von Quer- und Gurtstab, und von λ , d. i. dem κ -fachen Verhältnis $I : F \frac{h^2}{4}$. Auf die Dehnbarkeit der Querstäbe kommt es überhaupt nicht an. Die reine Rahmenknickung ist der Fall $\lambda = 0$, und man sieht, daß sie nur bei großem $\frac{Fh^2}{I}$ eine zutreffende Näherung bilden wird.

Man kann auch die Frage stellen, wie sich statt der berechneten y' die Ausbiegungen y verhalten. Aus der Gl. (c) folgt in Verbindung mit der Gl. (b)

$$\delta = \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} = \frac{1}{z^2 \cdot s(z) + 2} \cdot (y'_\nu + y'_{\nu-1}).$$

Die δ (oder die Differenzen der y) lassen sich also linear homogen in y' ausdrücken, d. h. es genügen auch die δ der Differenzgleichung (K). Damit wird

$$y_{\nu+2} + a \cdot y_{\nu+1} + 2b \cdot y_\nu + a \cdot y_{\nu-1} + y_{\nu-2} = \text{konst.}$$

Die Konstante verschwindet nur bei einer bestimmten Wahl des Nullpunktes der y . Legt man durch das ν -te Feld beim Knoten ν einen Schnitt, so liefert das Momentengleichgewicht $L_\nu + \frac{P}{2}(y_\nu - y_0) - h \cdot S_\nu = 0$. Da man S_ν nach Gl. (e) durch u_ν , $u_{\nu-1}$, diese nach Gl. (d') durch y'_ν , $y'_{\nu-1}$, R_ν , L_ν , $R_{\nu-1}$, $L_{\nu-1}$, endlich die R und L durch die y ersetzen kann, so zeigt sich, daß $y_\nu - y_0$ ebenfalls der Differenzgleichung (K) genügt, also y_ν dann und nur dann, wenn $y_0 = 0$ genommen wird. Unter dieser Voraussetzung gilt somit

$$y_{\nu+2} + a \cdot y_{\nu+1} + 2b \cdot y_\nu + a \cdot y_{\nu-1} + y_{\nu-2} = 0. \quad (\text{K}')$$

Die Randbedingungen sind

$$y_0 = y_n = 0. \quad (\text{R}_1')$$

Faßt man weiter die zweite Gl. (R₂) in die Form

$$(y'_{n-2} + y'_{n-1}) + a(y'_{n-1} + y'_n) + (b - a - \cos z)y'_n = 0$$

und beachtet, daß nach (R₁): $y'_n = \frac{y'_n + y'_{n+1}}{1 + \cos z}$, so wird

$$(y'_{n-2} + y'_{n-1}) + a(y'_{n-1} + y'_n) + \frac{b - a - \cos z}{1 + \cos z} (y'_n + y'_{n+1}) = 0.$$

Nun ist, wie gerade gezeigt wurde, jede Summe aufeinanderfolgender y' bis auf einen konstanten Faktor gleich der Differenz der betreffenden y , und man bekommt, da $y_n = 0$,

$$\frac{a - b + \cos z}{1 + \cos z} y_{n+1} + (a - 1)y_{n-1} + y_{n-2} = 0$$

und in gleicher Weise

$$y_2 + (a - 1)y_1 + \frac{a - b + \cos z}{1 + \cos z} y_{-1} = 0. \quad (\text{R}_2'')$$

Zusatz. Wir haben in Pkt. 70 angemerkt, daß unsere allgemeine Stabwerktheorie auch die Erweiterung auf elastische Anschlußverbindungen gestattet. Erfahren die Anschlüsse der Querstäbe z. B. elastische Verschiebungen senkrecht zur Querstabrichtung, so tritt in Gl. (d') ein Glied mit der Verschiebungsgröße hinzu. Dieses läßt sich als Funktion der Querkraft vom Querstab, also auch vom Endmoment darstellen. Führt man die Rechnung dann wie vor durch, so erhalten die Koeffizienten der Differenzgleichung additive Zusatzglieder, die das „Nachgeben“ der Querverbindungen zum Ausdruck bringen. In den folgenden Untersuchungen behalten wir jedoch den ideellen biegesteifen Anschluß bei.¹

¹ Der Rahmenbalken wurde eingehend von L. MANN behandelt: Die Berechnung steifer Vierecknetze. Ztschr. f. Bauwesen, Bd. 59, S. 539—567. 1909. Der Ansatz (K', R₁', R₂') stimmt im wesentlichen mit dem von MANN überein, wenn man dort die Glieder wegläßt, die der Berücksichtigung der Schubspannungen bei der Biegung dienen. Siehe auch die Rechnung von E. CHWALLA, bei der elastische Anschlüsse der Querstäbe berücksichtigt werden: Die Stabilität des Rahmenstabes. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Bd. 136, S. 487—529. 1927. — Vgl. noch die hiervon verschiedenen An-

73. Fortsetzung von Pkt. 72: Diskussion der Differenzgleichung.*A. Sehr starke Querverbindungen.*

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß das Trägheitsmoment I' der Querstäbe unendlich groß sei. Dann sind

$$\kappa = \frac{E' I'}{E I} \frac{l}{h} = \infty, \quad \lambda = \kappa \cdot \frac{4 I}{F h^2} = \infty, \quad \frac{\lambda}{\kappa} \equiv \varrho = \frac{4 I}{F h^2}$$

und aus der Gl. (K) entsteht

$$(y'_{v+1} + y'_{v-1}) \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \right) - 2 y'_v \cdot \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \cdot \cos z \right) = 0,$$

eine Differenzgleichung zweiter Ordnung. Wenn wir sie in den Ausbiegungen anschreiben

$$(y_{v+1} + y_{v-1}) \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \right) - 2 y_v \cdot \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \cdot \cos z \right) = 0,$$

brauchen wir nur die Randwerte $y_0 = y_n = 0$ hinzunehmen. Die Bedingungen (R_2') haben weiter keine Bedeutung, da sie bloß y_{-1} und y_{n+1} bestimmen, diese aber in den Gleichungen nicht auftreten, wenn wir, was völlig genügt, v von 1 bis $n-1$ laufen lassen.

Um diese Gleichung aufzulösen, setzen wir (aus Symmetriegründen)

$y_v = \cos \left(v - \frac{n}{2} \right) \vartheta$ und erhalten

$$\cos \vartheta \cdot \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \right) - \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho \cdot \cos z \right) = 0, \quad (\text{a})$$

während die Randbedingung verlangt, daß $\vartheta = \frac{\pi}{n}$. Daher wird die Knickgleichung

$$\varrho = \frac{4 I}{F h^2} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos z} \cdot \frac{\sin z}{z}, \quad (\text{A})$$

mit der Knicklast

$$P_k = 2z^2 \frac{E I}{l^2}.$$

Bei großer Felderzahl sind $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und z kleine Werte. In *erster Näherung* folgt aus Gl. (a): $z^2 = \frac{\pi^2}{n^2} \frac{1 + \varrho}{\varrho}$ und mit dem fiktiven Trägheitsmoment $\bar{I} = 2 \left(I + F \frac{h^2}{4} \right)$ wird bei der Gesamtlänge $L = n \cdot l$ des Stabes die kritische Last

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2};$$

sätze bei H. MÜLLER-BRESLAU: Der Eisenbau, 2. Jahrg., S. 475—487. 1911. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 5. Aufl. Leipzig, 1924. S. 380f. — K. LJUNGBERG: Der Eisenbau, 11. Jahrg., S. 243—251. 1920. — M. GRÜNING: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin, 1925. S. 686f. — Siehe ferner die Formeln von F. ENGESSER: Ztrbl. d. Bauverwaltung, 29. Jahrg., S. 136—139, 1909, und von S. TIMOSHENKO: Sur la stabilité des Systèmes Élastiques. Paris, 1913. S. 54.

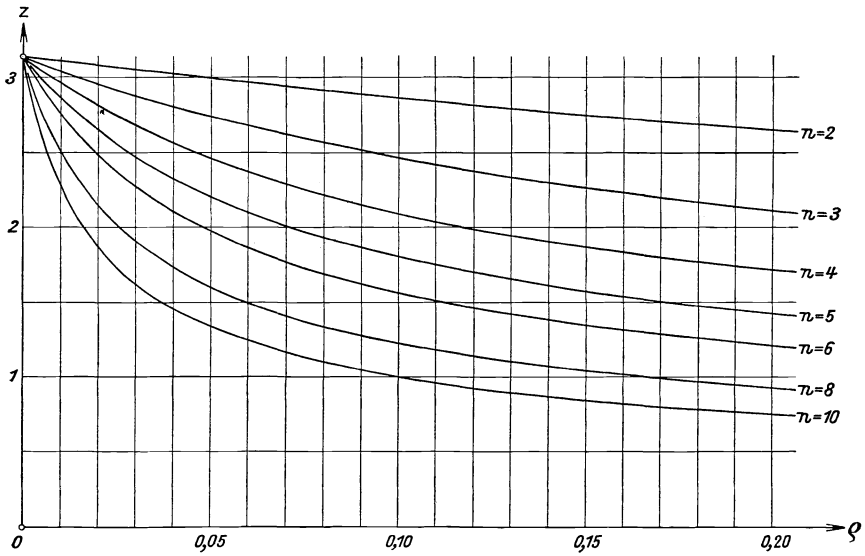


Abb. 105 a.

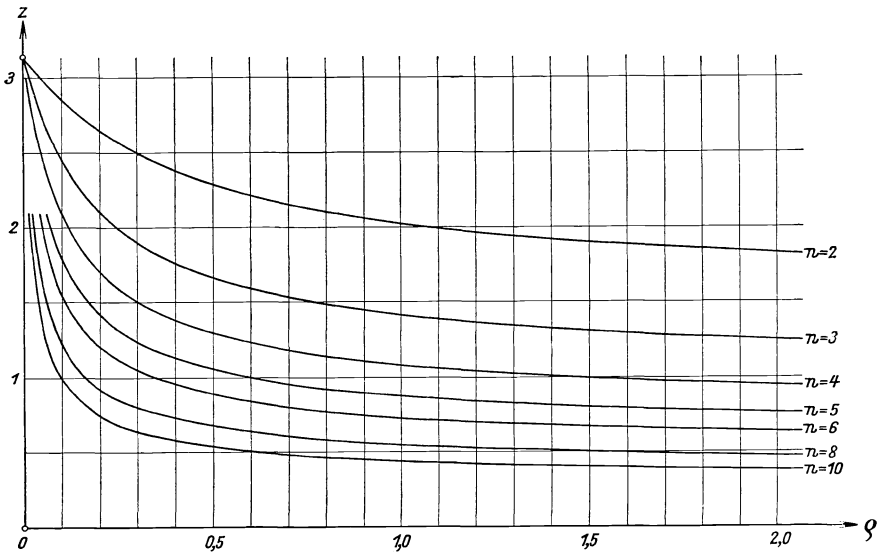


Abb. 105 b.

der Rahmenträger wirkt wie ein eingliedriger Stab mit dem resultierenden Trägheitsmoment beider Gurtungen. — Um eine *zweite Näherung* zu gewinnen, entwickeln wir die Gl. (a) bis zum zweiten Glied und setzen in den höheren Potenzen von z^2 den ersten Näherungswert ein. Damit ergibt sich

$$z^2 = \frac{\pi^2}{n^2} \frac{1 + \varrho}{\varrho} \left(1 - \frac{\pi^2}{12 n^2 \varrho} \right)$$

und die Knicklast wird

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{12 n^2} \frac{F h^2}{4 \bar{I}} \right) \text{ oder } P_k \simeq \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2}{48 n^2} \frac{F h^2}{\bar{I}} \right)} \quad (A')$$

Der zweite Summand in der Klammer, der mit wachsendem n gegen Null geht, zeigt in erster Näherung die Abminderung der Tragkraft in bezug auf den vollwandigen Stab. Man könnte für kleinere n und ϱ auch weitere Näherungen ableiten, indem man höhere Potenzen von z und ϑ berücksichtigt.

Wir ziehen es jedoch vor, auf die vollständige Gleichung (A) zurückzugreifen, die versuchsmäßig leicht auswertbar ist. In der Abb. 105 ist für einige häufig vorkommende Felderzahlen n der Zusammenhang zwischen z und ϱ aufgezeichnet, so daß sich die Rechnung im gegebenen Fall ohne Mühe durchführen läßt. Für $\varrho = 0$ ist immer $z = \pi$, entsprechend der reinen Rahmenknickung bei $\kappa = \infty$.

B. Der allgemeine Fall.

Im allgemeinen Fall handelt es sich darum, zu bekannten Werten n , κ und λ das z zu finden. Dies ist wohl nicht direkt möglich, da die Gleichung in z transzendent ist, aber man kann bei vorgegebenem n die drei Variablen z , κ , λ als Funktionen zweier Parameter ϑ_1 , ϑ_2 explizite darstellen, womit zusammengehörige Wertetripel z , κ , λ bestimmt sind.

Führen wir in die Gl. (K') von Pkt. 72 den Ansatz $y_v = e^{v i \vartheta}$ ein, so wird

$$4 \cos^2 \vartheta + 2a \cdot \cos \vartheta + 2(b - 1) = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung, die nicht reell sein müssen, seien ϑ_1 und ϑ_2 ; dann sind

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = -\frac{a}{2}, \quad \cos \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_2 = \frac{b-1}{2}. \quad (x)$$

Die Randbedingungen gewinnt man in folgender Weise. Die allgemeine Lösung der Differenzgleichung (K') ist mit Rücksicht auf die Symmetrie

$$y_v = A \cdot \cos\left(v - \frac{n}{2}\right) \vartheta_1 + B \cdot \cos\left(v - \frac{n}{2}\right) \vartheta_2.$$

Daher wird mit $y_0 = y_n = 0$

$$\frac{A}{B} = -\frac{\cos \frac{n}{2} \vartheta_2}{\cos \frac{n}{2} \vartheta_1}.$$

Die Bedingung (R₂') verlangt, daß

$$A \cdot \left[\cos\left(\frac{n}{2} - 2\right) \vartheta_1 + (a-1) \cdot \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \vartheta_1 - \right. \\ \left. - \frac{a-b + \cos z}{1 + \cos z} \cdot \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \vartheta_1 \right] + B \cdot \left[\cos\left(\frac{n}{2} - 2\right) \vartheta_2 + \right. \\ \left. + (a-1) \cdot \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \vartheta_2 - \frac{a-b + \cos z}{1 + \cos z} \cdot \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \vartheta_2 \right] = 0.$$

Die Gleichsetzung beider Werte für $A : B$ liefert eine Gleichung, die nach $\cos z$ aufgelöst werden kann

$$\cos z = -1 - \frac{(a - b - 1) \cdot \left[\cos \vartheta - \operatorname{tg} \frac{n \vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta \right]_2^1}{\left[\cos 2 \vartheta + a \cdot \cos \vartheta + \operatorname{tg} \frac{n \vartheta}{2} \cdot (\sin 2 \vartheta + (a - 2) \cdot \sin \vartheta) \right]_2^1}. \quad (\beta)$$

Hierbei bedeutet in abgekürzter Schreibweise $[x]_2^1$ die Differenz $x_1 - x_2$. Schließlich hat man aus den beiden Definitionsgleichungen für a und b noch \varkappa und λ zu bestimmen und erhält

$$\varkappa = \frac{b + a \cdot \cos z + \cos 2z}{1 - \cos z} \cdot \frac{z}{6 \sin z}, \quad \lambda = -\frac{1}{6} \frac{a + b + 1}{1 - \cos z}. \quad (\gamma)$$

Zu angenommenen Werten von ϑ_1 und ϑ_2 rechnet man nun a und b aus den Gl. (α), dann z aus Gl. (β) und endlich \varkappa und λ aus den Gl. (γ). Benützt man Formeln für $\operatorname{tg} \frac{n \vartheta}{2}$, so wird man in Gl. (β) durch $\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2$ kürzen und den übrigbleibenden Bruch rational durch $\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2$ und $\cos \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_2$, also auch durch a und b ausdrücken. Mithin sind $\cos z$, nach den Gl. (γ) daher auch λ und $\varkappa \frac{\sin z}{z}$ rational in a und b .

C. Die Felderzahlen $n = 2$ bis $n = 6$.

Bei kleiner Felderzahl lohnt es nicht, sich auf die Integrationsverfahren zu stützen, und es ist einfacher, unmittelbar von den allgemeinen Ansätzen in Pkt. 72 auszugehen.

Für $n = 2$ wird aus der Gl. (K) mit $\nu = 1$ unter Berücksichtigung von (R_1)

$$(a + \cos z) (y_0' + y_2') + 2b \cdot y_1' = 0,$$

eine Beziehung, die bei symmetrischem Ausknicken immer erfüllt ist, da $y_1' = 0$, $y_2' = -y_0'$. Nun gilt nur noch die Gl. (R_2)

$$y_2' + (a + 1) y_1' + (b - \cos z) y_0' = 0,$$

die mit den angeschriebenen Randwerten die Knickbedingung $b - 1 - \cos z = 0$ liefert. Nach Einführen des Ausdrucks für b wird

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = -\frac{1}{6} \frac{EI}{E'I'} \frac{h}{l} - \frac{4I}{Fh^2}.$$

Bei $n = 3$ entsteht aus den Gl. (K) und (R_1) für $\nu = 1$, unter Beachten der Symmetriebedingungen $y_2' = -y_1'$, $y_3' = -y_0'$

$$(a - 1 + \cos z) y_0' + (2b - a) y_1' = 0.$$

Aus dem Randwert (R_2) folgt

$$(b - \cos z) y_0' + a \cdot y_1' = 0.$$

Somit ist die Knickbedingung

$$2b(b - \cos z) - a(a + b - 1) = 0,$$

eine Gleichung zwischen \varkappa , λ und z . Man erhält selbstverständlich dieselbe Beziehung aus den Gl. (K') und (R_2').

Für $n = 4$ sind $y_0' = -y_4'$, $y_1' = -y_3'$, $y_2' = 0$, und man kommt zu den Gleichungen

$$y_0'(a + \cos z) + y_1'(2b - 1) = 0, \quad y_0'(b - \cos z) + y_1'(a + 1) = 0.$$

Die Knickbedingung ist daher

$$(a + 2b) \cdot \cos z + a(a + 1) + b(1 - 2b) = 0.$$

Für $n = 5$ sind $y_0' = -y_5'$, $y_1' = -y_4'$, $y_2' = -y_3'$, und man gewinnt die Beziehungen

$$\begin{aligned} y_0' + y_1'(a - 1) + y_2'(2b - a) &= 0, \\ y_0'(a + \cos z) + y_1' \cdot 2b + y_2'(a - 1) &= 0, \\ y_0'(b - \cos z) + y_1'(a + 1) + y_2' &= 0, \end{aligned}$$

aus denen mit Nullsetzen der Determinante die Knickgleichung hervorgeht.

Für $n = 6$ sind $y_0' = -y_6'$, $y_1' = -y_5'$, $y_2' = -y_4'$, $y_3' = 0$, und es folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0' + y_1' \cdot a + y_2'(2b - 1) &= 0, \\ y_0'(a + \cos z) + y_1' \cdot 2b + y_2' \cdot a &= 0, \\ y_0'(b - \cos z) + y_1'(a + 1) + y_2' &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich wie vor die Knickbedingung ergibt.

Eine Darstellung der Resultate ist hier nicht wie in Abb. 105 möglich; für eine bestimmte Felderzahl könnte der Zusammenhang von α , ϱ und z aber mit einem Nomogramm veranschaulicht werden.

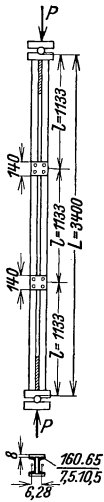


Abb. 106.

74. Rechnungsvorgang und Versuche.

A. Beispiele zur elastischen Knickung.

a) Die Rahmenstäbe vom Hamburger Gasbehälter.

Anlässlich des Einsturzes der Rahmenstäbe vom Hamburger großen Gasbehälter im Jahre 1909 wurden im Materialprüfungsamt Berlin-Lichterfelde drei diesen nachgeformte Stäbe auf Knickfestigkeit geprüft (Abb. 106). Die Abmessungen und Querschnittsmaße waren: Länge $L = 340$ cm, Felderzahl $n = 3$ ($l = 113,3$ cm), Querschnittsfläche eines Gurtstabes $F = 24$ cm², Trägheitsmoment des Gurtquerschnittes (zwei U-Eisen Nr. 16) bezüglich der eigenen Schwerachse $I = 85,3$ cm⁴, Bindeblech (Querstab) Höhe $h = 6,28$ cm, Breite $b = 14$ cm, Stärke $d = 0,8$ cm. Das Material war bestimmt durch: Elastizitätszahlen der drei Versuchsstäbe $E = 2010, 2027, 2045$ t/cm², Proportionalitätsgrenze im Mittel rund 2680 kg/cm², Stauchgrenze im Mittel rund 2860 kg/cm². Das Experiment ergab die Knicklasten: 81 t, 83,5 t, 89,4 t.¹

¹ M. RUDELOFF: Untersuchung von drei Druckstäben auf Knickfestigkeit. Verhandl. d. Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes, 91. Jahrg., S. 507—524. 1912.

Diesen Stab wollen wir nach den in Pkt. 73 angegebenen Methoden untersuchen. Da die Spannung $P_k : 2F$ kleiner als die Proportionalitätsgrenze ist, können wir die Rechnung mit den YOUNG'schen Elastizitätszahlen durchführen. Es sind

$$\bar{I} = 2I + F \frac{h^2}{2} = 643,86 \text{ cm}^4, \quad I' = 2 \cdot \frac{1}{12} db^3 = 365,87 \text{ cm}^4,$$

$$\kappa = \frac{I'}{I} \frac{l}{h} = 77,3834, \quad \varrho = \frac{4I}{F h^2} = 0,3605, \quad \lambda = \kappa \cdot \frac{4I}{F h^2} = 27,8950.$$

Aus Gl. (A) (*starre Bindebleche*) wird für $n = 3$ der Parameter $z = 1,8148$ (siehe auch Abb. 105) und bei den vor angeschriebenen Werten von E sind die kritischen Lasten

$$P_k = 88,0 \text{ t}, 88,7 \text{ t}, 89,5 \text{ t}.$$

Aus Gl. (A') (*starre Bindebleche bei großer Felderzahl*) folgen

$$P_k = 82,5 \text{ t}, 83,2 \text{ t}, 83,9 \text{ t}.$$

Das *genaue Verfahren* liefert aus der Knickgleichung $2b(b - \cos z) - a(a + b - 1) = 0$ mit den Werten

$$-a = 169,37 + 2 \cos z + 464,3004 \frac{\sin z}{z},$$

$$b = 1 + 169,37 \cos z + 464,3004 \frac{\sin z}{z}$$

den Parameter $z = 1,813$; daher sind die Knicklasten

$$P_k = 87,8 \text{ t}, 88,6 \text{ t}, 89,3 \text{ t}.$$

Alle Resultate stimmen mit den Versuchen gut überein.

b) Weitere Lichterfelder Versuche.

Bei einer weiteren Versuchsreihe wurden drei wie unter a) gebildete Stäbe durch Futterbleche verstärkt, so daß eine Teilung in sechs gleiche Felder bestand. Die experimentell gefundene mittlere Knicklast war 102,6 t.¹

Unsere für starre Bindebleche aufgestellte Gleichung hat vor bereits ausgereicht, und die zwischen die U-Eisen eingeschobenen Futterbleche werden der Fiktion der starren Querverbindung um so mehr entsprechen.

Die Gleichung (A) lautet mit $n = 6$ und $\cos \frac{\pi}{n} = 0,8660$

$$0,3605 = \frac{0,1340}{0,8660 - \cos z} \cdot \frac{\sin z}{z};$$

daraus wird $z = 0,9864$ und mit dem YOUNG'schen Modul $E = 2015 \text{ t/cm}^2$, der im Mittel festgestellt war, folgt als Knicklast $P_k = 104,3 \text{ t}$, in guter Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis. Man erkennt, daß man bei den im Stahlbau üblichen Druckstäben mit der für starre Bindebleche gültigen Formel (A) rechnen darf.

¹ M. RUDELOFF: A. a. O., 93. Jahrg., S. 147—213. 1914. Ein Stab wurde im Versuchsbericht wegen fehlerhafter Zentrierung und daher einer wesentlich kleineren „Bruchlast“ ausgeschaltet.

B. Knickung im unelastischen Bereich.

Auch wenn die Knickspannung $\sigma_k = P_k : 2F$ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, läßt sich die Rechnung in einfacher Weise durchführen, sobald man starre Querverbindungen voraussetzt. Dann ist der Parameter z vom Modul E unabhängig, und der aus der Formel (A) bestimmte z -Wert bleibt unverändert in Geltung. — Nehmen wir im unelastischen Bereich einen linearen Zusammenhang zwischen der Spannung σ_k und der Schlankheit λ_0 , also den Ansatz $\sigma_k = a - b \cdot \lambda_0$ als Grundlage für die Berechnung des Knickmoduls, so folgt mit $T = \frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}$ aus der Gleichung $P_k = 2F \cdot \sigma_k = 2 \frac{z^2 T I}{l^2}$ die Beziehung

$$\sigma_k = a - b \cdot \left(\pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{F}{I}} \right).$$

Der Klammerausdruck $\pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{F}{I}}$ ist die *reduzierte Schlankheit* (vgl. Pkt. 19). Für a und b setzen wir z. B. die Versuchswerte TETMAJERS oder die Konstanten der Deutschen Vorschriften (vgl. Pkt. 18).

Geben wir die Starrheit der Querverbindungen (nicht aber die ihrer Anschlüsse) auf, so schreiben wir an Stelle von E der Gurtstäbe wie vor den der resultierenden Spannung $\sigma_k = P_k : 2F$ zugeordneten Knickmodul, für das E' der Querstäbe den konstanten YOUNGSchen Modul. Bei den praktisch verwendeten Druckstäben bringt aber diese komplizierte Untersuchung kein wesentlich anderes Ergebnis, so daß wir die Annahme starrer Querverbindungen festhalten.¹

Die Einstellung des empirischen „mittleren“ Knickmoduls zieht allerdings eine Ungenauigkeit nach sich; aber auch eine Herleitung mit Beachten der Arbeitslinie des Baustoffes besitzt nur hypothetischen Charakter, vgl. Pkt. 16, und daher erscheint dieser einfache Vorgang wohl berechtigt. — Wir kontrollieren unseren Rechnungsweg wieder an ausgeführten Versuchen.

a) Nachrechnung von zwei Berliner Versuchen.²

Die zwei Stäbe Nr. 25 der Berliner Versuche hatten eine Knicklänge $L = 500$ cm und sechs gleiche Felder ($n = 6$.) Der Querschnitt bestand aus zwei nach außen gerichteten U-Eisen Nr. 20, mit $F = 32,2$ cm² $I = 148$ cm⁴. Die Höhe der Bindebleche war $h = 18,02$ cm. Experimentell wurden die Knicklasten 155 t und 161 t aufgefunden.

¹ Annäherungsrechnungen, die von der TETMAJERSchen Formel ausgehen, wurden entwickelt von F. ENGESSER: Der Eisenbau, 2. Jahrg., S. 385—392, 1911; R. KROHN: Ztrbl. d. Bauverwaltung, Jahrg. 28, S. 559—564, 1908; R. SALIGER: Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 64, S. 5—8 u. 21—24, 1912. — Vgl. auch die Schrift von DIETRICH RÜHL: Berechnung gegliederter Knickstäbe. Berlin, 1932.

² PETERMANN, MÜLLER-BRESLAUS Knickversuche mit Rahmenstäben: Der Bauingenieur, 7. Jahrg., S. 1009—1016. 1926.

Aus der Gl. (A) von Pkt. 73

$$\varrho = \frac{4 \cdot 148}{32,2 \cdot 18,02^2} = 0,05663 = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6} - \cos z} \cdot \frac{\sin z}{z}$$

folgt $z = 1,902$ (siehe auch Abb. 105). Somit ist die reduzierte Schlankheit

$$\lambda_0 = \pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{F}{I}} = \pi \frac{83,4}{1,902} \sqrt{\frac{32,2}{148}} = 64.$$

Die Knicklast ist mit den Materialkonstanten TETMAJERS für Flußeisen

$$P_k = 2 \cdot 32,2 \cdot (3,1 - 0,0114 \cdot 64) = \text{rund } 153 \text{ t,}$$

und mit den Konstanten der Deutschen Vorschriften für St 37

$$P_k = 2 \cdot 32,2 \cdot (2,8905 - 0,008175 \cdot 64) = \text{rund } 153 \text{ t.}$$

In Hinblick auf die benützten empirischen Spannungsgesetze ist das Rechnungsergebnis als zutreffend anzusehen.

b) Nachrechnung eines Pariser Versuches.¹

Der Stab Nr. III der Pariser Versuche besaß die Länge $L = 625$ cm und sechs gleiche Felder ($n = 6$). Der Querschnitt war aus zwei nach außen gekehrten U-Eisen Nr. 22 ($220 \cdot 75 \cdot 15$) gebildet, mit $F = 47,4$ cm² und $I = 190$ cm⁴. Die Bindebleche hatten die Höhe $h = 23,38$ cm, Breite $b = 13$ cm und Stärke $d = 0,8$ cm. Beim Versuch ergab sich die Knicklast von 184 t, infolge Versagens der Querverbindungen.

Die Formel (A) liefert mit

$$\varrho = \frac{4I}{Fh^2} = \frac{4 \cdot 190}{47,4 \cdot 23,38^2} = 0,02933$$

den Wert $z = 2,281$ (siehe auch Abb. 105). Daher ist die reduzierte Schlankheit

$$\lambda_0 = \pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{I}{F}} = \pi \frac{104,2}{2,281} \sqrt{\frac{47,4}{190}} = 71,7.$$

Die Knicklast ist mit den TETMAJERSchen Konstanten für Flußeisen

$$P_k = 2 \cdot 47,4 \cdot (3,1 - 0,0114 \cdot 71,7) = 216 \text{ t,}$$

bzw mit den Konstanten der Deutschen Vorschriften für St. 37

$$P_k = 2 \cdot 47,4 \cdot (2,8905 - 0,008175 \cdot 71,7) = 218 \text{ t.}$$

Die Ursache, daß Rechnung und Versuch miteinander nicht in Einklang stehen, liegt im Nachgeben der Querverbindungen, und darauf werden wir in Pkt. 75 zurückkommen.²

¹ Siehe den Bericht von R. KRÖHN: Beitrag zur Untersuchung der Knickfestigkeit gegliederter Stäbe. A. a. O.

² Knickversuche mit Rahmen- und Gitterstäben wurden in großer Zahl von F. v. EMPERGER in Wien ausgeführt: Beton u. Eisen, 7. Jahrg., S. 71f. 1908. Die Stäbe erhielten eine sog. Flächenlagerung (ein nicht genau definiertes Mittel zwischen der gelenkigen Lagerung und der vollen Einspannung), und aus diesem Grunde rechnen wir die Versuche nicht nach.

C. Ein Vorgang bei der Bemessung von Rahmenstäben.

Bei Rahmenstäben muß auch das Knicken um die sog. „Stoffachse“ untersucht werden. Der Gliederträger verhält sich in dieser Richtung wie zwei einteilige Stäbe, und es ist

$$P_k = 2\pi^2 \frac{E_1 I_x}{L^2},$$

wenn I_x das Querschnittsträgheitsmoment eines Gurtes bezüglich der Stoffachse und E_1 der Knickmodul ist.

Die Bemessung des Rahmenstabes läßt sich z. B. in der Weise durchführen, daß man die gleiche Knicklast hinsichtlich des Knickens um die Materialachse und die materialfreie Achse verlangt (Abb. 107). Dann gilt die Beziehung

$$2\pi^2 \frac{E_1 I_x}{L^2} = 2z^2 n^2 \frac{EI}{L^2},$$

wobei E_1 und E die Knickmodulwerte sind. Nun ist $E_1 = E$, wenn die Knickspannung σ_k für beide Richtungen die gleiche Größe hat, und somit

$$z = \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{I_x}{I}}. \quad (1)$$

Mit dem hieraus berechneten Wert

$$\varrho = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos z} \cdot \frac{\sin z}{z} \quad (2)$$

ergibt sich unter der Annahme starrer Bindebleche für den Abstand der Gurte die Beziehung

$$h = 2 \sqrt{\frac{I}{F \cdot \varrho}}. \quad (3)$$

Die Felderzahl n ist derart zu wählen, daß in Gl. (1) der Wert $z < \pi$. Die Auflösung der transzendenten Gl. (2) nach z ist jetzt umgangen, aber man kann auch zu bekannten Größen z und n der Abb. 105 den Wert ϱ entnehmen. — Wir haben so eine wirtschaftliche Ausbildung des Rahmenträgers für zentrische Last erreicht.

Beispiel. Der sechsfeldrige Stab der Lichterfelder Versuche, den wir unter A nachgerechnet haben, soll so geformt werden, daß die gleiche Knicklast bezüglich des Knickens um die beiden vor bezeichneten Achsen besteht. Aus Gl. (1) wird

$$z = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{925}{85,3}} = 1,724,$$

damit aus Gl. (2)

$$\varrho = \frac{1 - 0,866}{0,866 + 0,153} \cdot \frac{0,988}{1,724} = 0,0754$$

und dann aus Gl. (3)

$$h = 2 \sqrt{\frac{85,3}{24 \cdot 0,0754}} = 13,7 \text{ cm.}$$

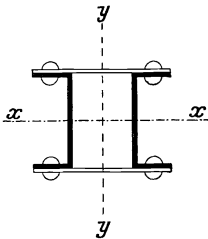


Abb. 107.

Die reduzierte Schlankheit ist (für beide Richtungen)

$$\lambda_0 = \pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{F}{I}} = n l \sqrt{\frac{F}{I_x}} = 55$$

und die Knicklast z. B. mit den TETMAJERSchen Konstanten

$$P_k = 2 \cdot 24 \cdot (3,1 - 0,0114 \cdot 55) = 119 \text{ t.}$$

75. Über den Querverband und seine Anschlüsse.

Unsere Berechnungen in Pkt. 74 haben gezeigt, daß die für starre Querstäbe aufgestellten Formeln bei sachgemäß ausgebildeten Stäben aus Flußstahl vollständig ausreichen. Wir suchen nun die Bedingung, unter der die Voraussetzung der „Starrheit“ zutreffend ist, und werden dann den Querverband und seine Anschlüsse von vornherein in dieser Weise konstruieren.

Bei der Biegung des Stabes nach Einleitung des Knickvorganges oder bei der sehr schwachen Biegung unter einem sehr kleinen unvermeidlichen Fehlerhebel werden die Querverbindungen beansprucht, und wir wollen sie bei einer vorgegebenen Verformung berechnen. Die Ausbiegung läßt sich aus unseren Gleichungen der ersten Näherung nicht bestimmen, sondern nur die Form der elastischen Linie. Wir nehmen also eine Ausbiegung an, und da wir mithin zu einer willkürlichen Annahme gezwungen sind, führen wir zur Vereinfachung die Ersatzbiegeline

$$y = y_m \cdot \sin \pi \frac{x}{L}$$

ein, wobei y_m die Ausbiegung in der Stabmitte $x = \frac{1}{2} L$ bedeutet.

Nach Pkt. 72 ist die Querkraft im Querstab ν , zufolge der Gleichung $h \cdot Q_\nu = 2(R_\nu - L_\nu)$,

$$Q_\nu = 2 \frac{EI}{hl} \cdot \frac{z}{\sin z} (y'_{\nu+1} - 2 \cos z \cdot y'_\nu + y'_{\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1,$$

und im ersten Querstab $\nu = 0$, da $y'_{-1} = \cos z \cdot y'_0$

$$Q_0 = 2 \frac{EI}{hl} \cdot \frac{z}{\sin z} (y'_1 - \cos z \cdot y'_0).$$

Mit der vor angesetzten Gleichung für y findet man, wenn man $2 EI = \frac{P_k l^2}{z^2}$ schreibt, die Beziehungen

$$Q_0 = \frac{y_m}{L} \cdot P_k \cdot \frac{\pi l}{h} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n} - \cos z}{z \cdot \sin z}, \quad Q_\nu = Q_0 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{n} \nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Der Größtwert von Q ist bei $\nu = 1$ vorhanden, d. h. der zweite Querstab ist am meisten beansprucht. (Bei $n = 3$ ist $Q_1 = Q_0$.) Man wird nun in praxi alle Stäbe gleich ausbilden, entsprechend der größten Querkraft

$$Q = \frac{y_m}{L} \cdot P_k \cdot 2\pi \frac{l}{h} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{n} - \cos z}{z \cdot \sin z}. \quad (1)$$

Für $\frac{y_m}{L}$ wählen wir eine kleine Ausbiegung, auf deren Größe wir noch zurückkommen, und als maßgebende Spannung die Streck- (Stauch-) Grenze des Baustoffes, um das Bruchverhalten zu berücksichtigen.

Unter der Annahme, daß das Biegemoment in der Mitte des Querstabes gleich Null ist, hat das in der Querverbindung und in ihrem Nietanschluß wirkende Moment die Größe $M = Q \cdot \frac{h'}{2}$, wenn h' der gegenseitige Abstand der Niete von den beiden Gurtstäben ist (Abb. 108). Dieses Moment setzen wir gleich $W_n \cdot \sigma_s$, wobei W_n das Widerstandsmoment des Nutzquerschnittes vom Querstab (mit Beachten der Nietverschwächung) und σ_s die Spannung der Streckgrenze sind. Die vom Bindeblech aufnehmbare Querkraft ist daher

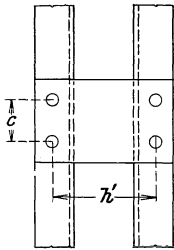


Abb. 108.

$$Q_b = 2 \frac{W_n \sigma_s}{h'}$$

Erfolgt der Anschluß an einen Gurtstab z. B. mit zwei Nieten vom Abstand c (in jedem der beiden sich in der Abbildung überdeckenden Bindebleche), so entfällt

auf einen Niet die Kraft $\frac{Q}{4}$ und infolge des Momentes die Belastung $\frac{M}{2c}$, d. i. $\frac{Q}{4} \frac{h'}{c}$. Die Nietkraft $f_n \cdot \sigma_s$ ($f_n =$ Fläche eines Nietes) hat somit den Wert

$$\sqrt{\left(\frac{Q}{4}\right)^2 + \left(\frac{Q}{4} \frac{h'}{c}\right)^2} = \frac{Q}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{c}\right)^2}$$

und die von einem Niet übertragbare Querkraft ist

$$Q_n = \frac{4 f_n \cdot \sigma_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{c}\right)^2}}$$

Bei einem Anschluß der Bindebleche an die Gurtstäbe mit je drei Nieten in den Abständen c sind die Nietkräfte in analoger Weise $N_1 = \frac{Q}{6}$ und $N_2 = \frac{M}{4c} = \frac{Q}{8} \frac{h'}{c}$, die resultierende Nietkraft ist gleich

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{Q}{6} \sqrt{1 + \frac{9}{16} \left(\frac{h'}{c}\right)^2}$$

und die vom Nietanschluß aufnehmbare Querkraft hat die Größe

$$Q_n = \frac{6 f_n \cdot \sigma_s}{\sqrt{1 + \frac{9}{16} \left(\frac{h'}{c}\right)^2}}$$

Wir berechnen zunächst die Querverbindung der *Strebe vom Hamburger Gasbehälter*. Die Querstäbe haben die Länge $h' = 9,6$ cm, das Widerstandsmoment $W_n = 41$ cm³ bei Anschlüssen mit zwei Nieten

vom Durchmesser 20 mm im Abstand $c = 7$ cm. Die Querkräfte, die der Querstab und der Nietanschluß aufnimmt, sind z. B. bei der Streckgrenze von $2,5 \text{ t/cm}^2$ vom Stabmaterial bzw. $2,0 \text{ t/cm}^2$ vom Nietmaterial

$$Q_b = 2 \cdot \frac{41 \cdot 2,5}{9,6} = 21,3^t, \quad Q_n = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 2,0}{\sqrt{1 + \left(\frac{9,6}{7,0}\right)^2}} = 14,8^t.$$

Die Querkraft ist nach Gl. (1), mit der Knicklast $P_k = 89,5 \text{ t}$

$$Q = \frac{y_m}{L} \cdot 89,5 \cdot \frac{3,14 \cdot 113,3}{6,28} \cdot \frac{0,5 + 0,242}{1,8148 \cdot 0,970} = \frac{y_m}{L} \cdot 2137$$

und die für die Nietanschlüsse kritische Ausbiegung ist also

$$\frac{y_m}{L} = \frac{14,8}{2137} \approx \frac{1}{145}.$$

Bei dem früher nachgerechneten *Pariser Versuch* waren: $h' = 28$ cm, $W_n = 32,9 \text{ cm}^3$, zwei Nieten vom Durchmesser 20 mm, $c = 7$ cm. Mit den gleichen Werten der Streckgrenze wie vor sind

$$Q_b = 2 \cdot \frac{32,9 \cdot 2,5}{28,0} = 5,88^t, \quad Q_n = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 2,0}{\sqrt{1 + \left(\frac{28,0}{7,0}\right)^2}} = 6,18^t.$$

Nach Gl. (1) ist die größte Querkraft mit $P_k = 216 \text{ t}$ und dem für starre Querverbindungen gefundenen z -Wert

$$Q = \frac{y_m}{L} \cdot 216 \cdot \frac{3,14 \cdot 104,2}{23,38} \sqrt{3} \cdot \frac{0,866 + 0,652}{2,281 \cdot 0,758} = \frac{y_m}{L} \cdot 4600$$

und daher ist die kritische Ausbiegung für den Querstab

$$\frac{y_m}{L} = \frac{5,88}{4600} \approx \frac{1}{780}.$$

Die Ausbiegung war beim Versuch unter einer nicht genau zentrischen Kraftwirkung zweifellos größer, und tatsächlich wurde festgestellt, daß der Bruch nicht ausreichende Bindebleche und Nietanschlüsse zur Ursache hatte.

Wir setzen nun $\frac{y_m}{L}$ gleich $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{150}$ und dimensionieren den Querverband mit der aus Gl. (1) bestimmten Querkraft und den Spannungswerten der Streckgrenze.

Für praktische Zwecke bringen wir die Gl. (1) noch in eine bequemer verwendbare Form. Bei sehr starken Querverbindungen gilt die Knickbedingung (siehe Pkt. 73)

$$\frac{1}{\sin z} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos z \right) = \frac{F h^2}{4 I} \frac{1}{z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right),$$

und damit

$$Q = \frac{y_m}{L} \cdot P_k \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{h}{l} \frac{\pi^2 l^2}{z^2} \frac{F}{I} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

Nehmen wir für $\frac{y_m}{L} \cdot \frac{1}{2\pi}$ den „Erfahrungswert“ $\frac{1}{900}$ und für $\pi \frac{l}{z} \sqrt{\frac{F}{I}}$ die reduzierte Schlankheit λ_0 , so ist die Querkraft

$$Q = \frac{1}{900} P_k \cdot \frac{h}{l} \lambda_0^2 \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right). \quad (2)$$

Legt man also diesen Wert mit der Spannung der Streckgrenze der Bemessung zugrunde, so wird die Fiktion der starren Querverbindungen genügend erfüllt, und es wird auch vor dem Erreichen der kritischen Last kein „Gleiten der Nietverbindungen“ eintreten.

§ 22. Statisch unbestimmte Gitterträger. Beispiele zur allgemeinen Stabwerkknickung ebener Systeme.

76. Der Gitterträger mit biegesteifen Gurten und gelenkig eingehängten Diagonalstäben. Aufstellen der Gleichungen.

Wir greifen auf den bei der reinen Fachwerkknickung untersuchten Gitterträger zurück, nehmen aber an, daß die Gurtstäbe biegesteif sind, Abb. 109. Die Diagonalstäbe sind an den Gurten gelenkig angeschlossen und sind wie früher reine Fachwerkstäbe. Die Lagerung des Gitterträgers ist wieder statisch bestimmt.¹ Wir bezeichnen die Untergurtnoten mit $0, 2, \dots, 2n$, die Obergurtnoten mit $1, 3, \dots, 2n-1$. In den Knoten-

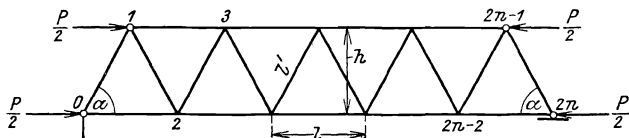


Abb. 109.

punkten $0, 1$ und $2n-1, 2n$ greifen waagrecht die äußeren Kräfte von der Größe $\frac{1}{2}P$ an. Die Gurtstäbe haben die Länge l , die Querschnittsfläche F , das Querschnittsträgheitsmoment I bezüglich der waagrechten Schwerachse und den Elastizitätsmodul E ; für die Gitterstäbe gelten die Werte $l' = \frac{l}{2} \cos \alpha$, F' , E' ; α ist der Winkel, den ein Gitterstab mit dem Untergurt einschließt. Vorhanden sind also $k = 2n + 1$ Knotenpunkte, $s = 4n - 1$ Stäbe und drei Auflagerbedingungen.

Unsere Gleichungen entwickeln wir aus der allgemeinen Stabwerktheorie. Bei der Verformung gibt es in jedem Gurtstab eine axiale Zusatzkraft S , eine Querkraft Q und im Knotenpunkt ein Moment M ; in jedem Diagonalstab eine Zusatzkraft T . Unbekannt sind $2k - 3$ ($= 4n - 1$) unabhängige Knotenpunktverschiebungen, k ($= 2n + 1$) Drehungen,

¹ W. WENZEL: Über die Stabilität des Gleichgewichtes ebener elastischer Stabwerke und die Knickfestigkeit des Gitterträgers. Inauguraldissertation. Berlin, 1929.

$s (= 4n - 1)$ axiale Zusatzkräfte, $2n - 1$ Querkkräfte und $k - 4 (= 2n - 3)$ Momente (da die Endmomente gleich Null sind), also insgesamt $14n - 5$ Größen. Man hat auch $14n - 5$ Gleichungen zur Verfügung, nämlich für jeden Gurtstab die Momentengleichung (I) und die zwei Hauptgleichungen (II) in der Anzahl $3(2n - 1)$, ferner s Dehnungsgleichungen (III) und dann $2k - 3$ Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten.

Wir benennen im Gurtstab $\nu - 1, \nu + 1$ die axiale Zusatzkraft mit $S_{\nu-1, \nu+1}$, die Querkraft mit $Q_{\nu-1, \nu+1}$, im Gitterstab $\nu - 1, \nu$, die Zusatzkraft mit $T_{\nu-1, \nu}$, Abb. 110. Für den Gurtstab $\nu - 1, \nu + 1$ besteht die Gleichgewichtsbedingung

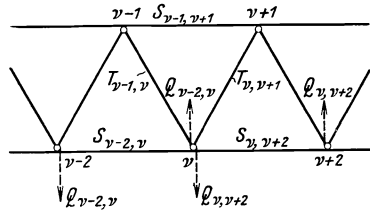


Abb. 110.

$$M_{\nu+1} - M_{\nu-1} + Q_{\nu-1, \nu+1} \cdot l + \frac{P}{2} (v_{\nu+1} - v_{\nu-1}) = 0 \quad (I)$$

und die Dehnungsgleichung

$$u_{\nu+1} - u_{\nu-1} = S_{\nu-1, \nu+1} \cdot \frac{l}{EF} \quad (1)$$

Für den Gitterstab $\nu - 1, \nu$ lautet die Dehnungsgleichung

$$(u_{\nu} - u_{\nu-1}) \cdot \cos \alpha \mp (v_{\nu} - v_{\nu-1}) \cdot \sin \alpha = T_{\nu-1, \nu} \cdot \frac{l}{E'F'} \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen im Knoten ν sind

$$(T_{\nu-1, \nu} - T_{\nu, \nu+1}) \cdot \cos \alpha = -S_{\nu-2, \nu} + S_{\nu, \nu+2} \quad (3)$$

$$\pm (T_{\nu-1, \nu} + T_{\nu, \nu+1}) \cdot \sin \alpha = Q_{\nu-2, \nu} - Q_{\nu, \nu+2} \quad (4)$$

In den Gl. (2) und (4) und im weiteren gilt bei den Doppelzeichen das obere Vorzeichen für gerade ν , das untere für ungerade ν . Die Hauptgleichungen (II) für den Gurtstab geben wir später an und transformieren zuerst die bereits angeschriebenen Gleichungen, so daß sie nur Verschiebungen v und Momente M enthalten.

Mit den Beziehungen (1) und (2) stellt man für die drei Stäbe des Dreiecks $\nu - 1, \nu, \nu + 1$ drei Gleichungen auf. Die zwei Gl. (2), die zu den Gitterstäben $\nu - 1, \nu$ und $\nu, \nu + 1$ gehören, werden addiert und hiervon wird Gl. (1) für den Gurtstab $\nu - 1, \nu + 1$ subtrahiert. So bekommt man

$$v_{\nu+1} - 2v_{\nu} + v_{\nu-1} = \pm (T_{\nu-1, \nu} + T_{\nu, \nu+1}) \frac{l}{E'F' \cdot \sin \alpha} \mp S_{\nu-1, \nu+1} \cdot \frac{l}{EF} \cotg \alpha \quad (5)$$

Die Gl. (4) liefert in Verbindung mit Gl. (I) die Summe $\pm (T_{\nu-1, \nu} + T_{\nu, \nu+1})$ als Funktion von v und M

$$\begin{aligned} & \pm (T_{\nu-1, \nu} + T_{\nu, \nu+1}) = \\ & = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\frac{P}{2l} (v_{\nu+2} - 2v_{\nu} + v_{\nu-2}) + \frac{1}{l} (M_{\nu+2} - 2M_{\nu} + M_{\nu-2}) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Aus Gl. (3) folgt, wenn man sie für die Werte $\nu = 1, 3, \dots, \nu - 1$ ansetzt und addiert

$$S_{\nu-1, \nu+1} = - (T_{\nu-1, \nu} - T_{\nu-2, \nu-1} + T_{\nu-3, \nu-2} - T_{\nu-4, \nu-3} + \dots \mp T_{0, 1}) \cdot \cos \alpha$$

oder

$$S_{\nu-1, \nu+1} = [-(T_{\nu-2, \nu-1} + T_{\nu-1, \nu}) + 2(T_{\nu-3, \nu-2} + T_{\nu-2, \nu-1}) - 3(T_{\nu-4, \nu-3} + T_{\nu-3, \nu-2}) \dots \mp \nu \cdot T_{0, 1}] \cdot \cos \alpha$$

und mit den Gl. (4)

$$S_{\nu-1, \nu+1} = \mp \cotg \alpha \cdot (Q_{\nu-1, \nu+1} + 2Q_{\nu-2, \nu} + 2Q_{\nu-3, \nu-1} + \dots + 2Q_{1, 3} + 2Q_{0, 2}).$$

Drückt man die Q aus (I) durch die v und M aus, so wird mit Beachtung, daß $M_0 = M_1 = 0$

$$S_{\nu-1, \nu+1} = \pm \frac{P}{2l} \cdot \cotg \alpha \cdot (v_{\nu+1} + 2v_\nu + v_{\nu-1} - 2v_1) \pm \frac{1}{l} \cdot \cotg \alpha \cdot (M_{\nu+1} + 2M_\nu + M_{\nu-1}). \quad (7)$$

Nach Einführen der Ausdrücke (6) und (7) in Gl. (5) gewinnt man die Differenzgleichung in den Variablenreihen v und M

$$v_{\nu+1} - 2v_\nu + v_{\nu-1} = \frac{l}{E'F' \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \left[\frac{P}{2l} (v_{\nu+2} - 2v_\nu + v_{\nu-2}) + \frac{1}{l} (M_{\nu+2} - 2M_\nu + M_{\nu-2}) \right] - \frac{l}{EF} \cdot \cotg^2 \alpha \cdot \left[\frac{P}{2l} (v_{\nu+1} + 2v_\nu + v_{\nu-1} - 2v_1) + \frac{1}{l} (M_{\nu+1} + 2M_\nu + M_{\nu-1}) \right] \quad (K_1)$$

für $\nu = 2$ bis $2n - 2$.

Einen zweiten Zusammenhang zwischen v und M berechnen wir aus den Hauptgleichungen (II) für die Gurtstäbe. (Siehe Pkt. 70.) Addiert und subtrahiert man die Gl. (II), so wird

$$v_a' = \frac{v_b - v_a}{l} - \frac{l}{EI} \left[(M_b + M_a) \frac{1}{2} t(z) + (M_b - M_a) \frac{1}{2} s(z) \right],$$

$$v_b' = \frac{v_b - v_a}{l} + \frac{l}{EI} \left[(M_b + M_a) \frac{1}{2} t(z) - (M_b - M_a) \frac{1}{2} s(z) \right].$$

Bei den Gurtstäben $\nu - 2, \nu$ und $\nu, \nu + 2$ mit den Verschiebungen der Endpunkte $v_{\nu-2}, v_\nu, v_{\nu+2}$ und den Endmomenten $M_{\nu-2}, M_\nu, M_{\nu+2}$ setzen wir mit Rücksicht auf den stetigen Verlauf der Formänderung die Verdrehung der beiden Stäbe im Knoten ν gleich und finden mit

$$z^2 = \frac{P}{2} \frac{l^2}{EI}$$

$$\frac{P}{2} (v_{\nu+2} - 2v_\nu + v_{\nu-2}) = - (M_{\nu+2} - 2M_\nu + M_{\nu-2}) + \frac{z}{\sin z} (M_{\nu+2} - 2 \cos z \cdot M_\nu + M_{\nu-2}), \quad (K_2)$$

für $\nu = 2$ bis $2n - 2$.

Nehmen wir alle Knotenmomente gleich Null, so haben wir den Fall des reinen Fachwerkträgeres; die Gl. (K₁) ist dann identisch mit der in Pkt. 62 hergeleiteten Gl. (K).

Die zwei simultanen Differenzgleichungen (K₁) und (K₂) vertreten ein System von $4n - 6$ linearen Gleichungen, da beide von $\nu = 2$ bis $2n - 2$ aufgeschrieben werden können. Unbekannt sind $2n + 1$ Momente (M_0 bis M_{2n}) und $2n + 1$ Verschiebungen (v_0 bis v_{2n}), d. s. $4n + 2$ Größen. Als Randwerte hat man zunächst wegen der horizontalen Führungen in den Knoten 0 und $2n$

$$v_0 = v_{2n} = 0, \quad (\text{R}_1)$$

und da die Momente an den Gurtenden verschwinden

$$M_0 = M_1 = M_{2n-1} = M_{2n} = 0. \quad (\text{R}_2)$$

Die zwei noch fehlenden Bedingungen bestimmen wir in der folgenden Weise. Aus Gl. (5) wird für $\nu = 1$

$$v_2 - 2v_1 + v_0 = -(T_{0,1} + T_{1,2}) \frac{l'}{E'F'} \cdot \sin^2 \alpha + S_{0,2} \frac{l}{EF} \cotg^2 \alpha$$

und mit

$$(T_{1,0} + T_{1,2}) \cdot \sin \alpha = Q_{1,3} = -\frac{P}{2l} (v_3 - v_1) - \frac{1}{l} (M_3 - M_1)$$

$$S_{0,2} = T_{0,1} \cdot \cos \alpha = Q_{0,2} \cdot \cotg \alpha = -\left(\frac{P}{2l} v_2 + \frac{1}{l} M_2\right) \cotg \alpha$$

schließlich

$$v_2 - 2v_1 + v_0 = \frac{l'}{E'F'} \cdot \sin^2 \alpha \left[\frac{P}{2l} (v_3 - v_1) + \frac{1}{l} M_3 \right] - \frac{l}{EF} \cotg^2 \alpha \cdot \left[\frac{P}{2l} v_2 + \frac{1}{l} M_2 \right]. \quad (\text{R}_3)$$

Eine ebensolche Beziehung läßt sich für das andere Trägerende aufstellen, wobei ν durch $2n - \nu$ zu ersetzen ist. [Man erhält Gl. (R₃) auch aus (K₁) mit den hinzugefügten Bedingungen $v_{-1} = v_1$, $M_{-1} = M_1$.]

Wir können diese Gleichungen noch in einer vereinfachten Form angeben. Um in (K₁) das die Symmetrie störende v_1 zu eliminieren, schreibt man

$$v_\nu = y_\nu + \frac{1}{2} v_1.$$

Führt man die Differenzen

$$\begin{aligned} \Delta^2 M_\nu &= M_{\nu+1} - 2M_\nu + M_{\nu-1}, \\ \Delta^4 M_\nu &= M_{\nu+2} - 4M_{\nu+1} + 6M_\nu - 4M_{\nu-1} + M_{\nu-2} \end{aligned}$$

und die entsprechenden Ausdrücke für die y ein, ferner wie bei der reinen Fachwerkknickung die Abkürzungen

$$\begin{aligned} p &= \frac{P}{2EF} \cdot \cotg^2 \alpha, & p' &= \frac{P}{2E'F'} \cdot \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \equiv p \cdot \omega, \\ \omega &= \frac{p'}{p} = \frac{EF}{E'F'} \cdot \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \end{aligned}$$

so entstehen aus (K₂) und (K₁) die zwei Differenzgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} \frac{P}{2} (\Delta^4 y_\nu + 4 \Delta^2 y_\nu) &= - \frac{\sin z}{z} (\Delta^4 M_\nu + 4 \Delta^2 M_\nu) + \\ &+ (\Delta^4 M_\nu + 4 \Delta^2 M_\nu + 2 M_\nu - 2 \cos z \cdot M_\nu), \\ \frac{\sin z}{z} \frac{P}{2} (\Delta^2 y_\nu + p \cdot \Delta^2 y_\nu + 4 p \cdot y_\nu) &= - p \frac{\sin z}{z} (\Delta^2 M_\nu + 4 M_\nu) + \\ &+ p \omega (\Delta^4 M_\nu + 4 \Delta^2 M_\nu + 2 M_\nu - 2 \cos z \cdot M_\nu), \end{aligned} \quad (\text{K}')$$

unter den Randwerten

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 &= 0, \quad M_0 = 0, \quad M_1 = 0, \\ \frac{P}{2} (y_2 - 3 y_1) - p \omega \frac{P}{2} (y_3 - y_1) - p \omega M_3 + \\ &+ p \frac{P}{2} (y_2 + y_1) + p M_2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{R}')$$

und den vier analogen Gleichungen, in denen ν durch $2n - \nu$ ersetzt ist.

77. Fortsetzung von Pkt. 76: Diskussion von Sonderfällen.

Der allgemeine Fall des Gitterträgers mit biegesteifen Gurtstäben — bei endlicher Felderzahl — ist bedeutend umständlicher zu berechnen als beim reinen Fachwerkträger. Aus dem System (K') erhalten wir mit den Ansätzen $M_\nu = r^\nu$, $y_\nu = \alpha \cdot r^\nu$ die charakteristischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} \alpha \frac{P}{2} \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) &= - \frac{\sin z}{z} \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) + \left(r^2 - 2 \cos z + \frac{1}{r^2} \right), \\ \frac{\sin z}{z} \alpha \frac{P}{2} \left[\left(r - 2 + \frac{1}{r} \right) + p \left(r + 2 + \frac{1}{r} \right) \right] &= \\ &= - p \frac{\sin z}{z} \left(r + 2 + \frac{1}{r} \right) + p \omega \left(r^2 - 2 \cos z + \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Nach Elimination von α ergibt sich daraus mit $\beta = r + \frac{1}{r}$ die Gleichung vierten Grades in β :

$$\begin{aligned} f(\beta) \equiv & - (\beta - 2)^4 \cdot p \omega + (\beta - 2)^3 \cdot \left(p - 8 p \omega + 1 - \frac{\sin z}{z} \right) + \\ & + (\beta - 2)^2 \cdot \left(8 p - 18 p \omega + 2 p \omega \cdot \cos z + 4 - 4 \frac{\sin z}{z} \right) + \\ & + (\beta - 2) \cdot (18 p - 2 p \cdot \cos z - 8 p \omega + 8 p \omega \cdot \cos z + 2 - 2 \cos z) + \\ & + (8 p - 8 p \cdot \cos z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Nach Berechnung der vier Wurzeln β können die ihnen zugeordneten vier Werte α aus den Gl. (1) bestimmt werden. Wir wollen aber den allgemeinen Fall nicht weiter behandeln. Geschlossene Ausdrücke für die Knicklast lassen sich nicht erreichen und überdies zeigt sich, daß man in praktischen Fällen bereits bei kleiner Felderzahl ($n = 3$) mit der Formel rechnen darf, die für große Felderzahlen in zweiter Näherung genau gilt. Wir untersuchen im folgenden einige wichtige Sonderfälle.

A. Beliebige Gitterstärke bei großer Felderzahl.

Zur Herleitung einer *ersten Näherung* der Knicklast bei großer Felderzahl genügt es, in den Gl. (K') oder ebenso in der Gl. (2) die Glieder bis einschließlich zweiter Ordnung zu benutzen. Dabei sind

$$z^2 = \frac{P l^2}{2 E I}, \quad p = \frac{z^2}{16} \frac{4 I}{F h^2} \quad \text{und} \quad \beta - 2$$

klein von zweiter Ordnung. Man erhält aus Gl. (2), die jetzt eine Gleichung ersten Grades in $(\beta - 2)$ wird

$$\beta = 2 - \frac{4 p z^2}{z^2 + 16 p}.$$

Wir setzen $\beta = 2 \cos \xi$ und schreiben die allgemeine Lösung von (K') aus Symmetriegründen in der Form $y_\nu = \alpha \cdot \cos(n - \nu)\xi$. Nun verlangt der Randwert $y_0 + y_1 = 0$, daß $\cos n\xi + \cos(n - 1)\xi = 2 \cdot \cos(2n - 1)\frac{\xi}{2} \cdot \cos\frac{\xi}{2} = 0$, also $\xi = \frac{\pi}{2n - 1}$. Die Verbindung der hieraus entspringenden Gleichung

$$2 \cos \xi = 2 \left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) = 2 - \frac{\pi^2}{(2n - 1)^2}$$

mit dem Ausdruck für β ergibt

$$z^2 = \frac{4 \pi^2}{(2n - 1)^2} \frac{1 + \varrho}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{4 I}{F h^2}.$$

Mit dem fiktiven Trägheitsmoment $\bar{I} = 2 \left(I + \frac{F h^2}{4}\right)$ und der mittleren Stablänge $L = \left(n - \frac{1}{2}\right)l$ findet man jetzt für die Knicklast die EULERSche Formel

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2}.$$

Es ist beachtenswert, daß die Summanden, die mit $p' = p \cdot \omega$ multipliziert sind, in erster Näherung keinen Beitrag leisten.

Um eine *zweite Näherung* für die Knicklast zu bekommen, berechnen wir in der Gleichung $\beta = 2 \cos \xi$ beide Seiten bis zu Gliedern vierter Ordnung genau. Die Gl. (2) lautet, wenn man $\sin z$ und $\cos z$ entwickelt,

$$f(\beta) \equiv (\beta - 2)^2 \left(8 p - 16 p \omega + \frac{2}{3} z^2\right) + (\beta - 2) \left(16 p + p z^2 + z^2 - \frac{z^4}{12} - 4 p \omega z^2\right) + 4 p z^2 - p \frac{z^4}{3} = 0.$$

Die frühere Lösung $\beta = 2 - \frac{4 p z^2}{z^2 + 16 p}$ bringt in $f(\beta)$ die Glieder bis zur vierten Ordnung zum Verschwinden. Das NEWTONSche Näherungsverfahren liefert als verbesserte Lösung

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

den bis zur vierten Ordnung genauen Wert

$$\beta_1 = 2 - \frac{4 p z^2}{z^2 + 16 p} - \frac{4}{3} p^2 z^4 \frac{z^2 - 16 p}{(z^2 + 16 p)^3} - \frac{16 p^2 \omega z^6}{(z^2 + 16 p)^3}.$$

Die Gleichung $f(\beta) = 0$ wird hiermit bis zur sechsten Ordnung erfüllt.

Mit Einführen von $\beta_1 = 2 \cos \xi$ und von $\beta_2 = 2 \cos \eta$ für die nicht näher interessierende zweite Wurzel der charakteristischen Gleichung setzen wir als allgemeine Lösung der Differenzgleichung (K')

$$\begin{aligned} M_\nu &= A \cdot \cos(n - \nu) \xi + B \cdot \cos(n - \nu) \eta, \\ y_\nu &= \alpha_1 \cdot A \cdot \cos(n - \nu) \xi + \alpha_2 \cdot B \cdot \cos(n - \nu) \eta, \end{aligned}$$

wobei wir die symmetrische Form der Ausbiegung berücksichtigen. Aus den Randwerten $y_0 + y_1 = 0$, $M_0 + M_1 = 0$ folgt nun die Determinantengleichung für die Stabilitätsgrenze

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 [\cos n \xi + \cos(n-1) \xi] & \alpha_2 [\cos n \eta + \cos(n-1) \eta] \\ \cos n \xi + \cos(n-1) \xi & \cos n \eta + \cos(n-1) \eta \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = 4(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \cos(2n-1) \frac{\xi}{2} \cdot \cos(2n-1) \frac{\eta}{2} \cdot \cos \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\eta}{2}$$

und $\cos(2n-1) \frac{\xi}{2} = 0$. Man hat wie früher $\xi = \frac{\pi}{2n-1}$ und, wenn man die Gleichung $\beta_1 = 2 \cos \xi$ bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickelt,

$$\beta_1 = 2 \cos \xi = 2 - \frac{\pi^2}{(2n-1)^2} + \frac{1}{12} \frac{\pi^4}{(2n-1)^4}.$$

Diesen Ausdruck setzt man dem vor berechneten β_1 gleich, führt $16p = z^2 \cdot \varrho$ ein und benützt bei den Gliedern in z^4 für z^2 den ersten Näherungswert $z^2 = \frac{4\pi^2}{(2n-1)^2} \frac{1+\varrho}{\varrho}$. Damit erhält man

$$z^2 = \frac{4\pi^2}{(2n-1)^2} \frac{1+\varrho}{\varrho} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{(2n-1)^2} \frac{1}{1+\varrho} - \frac{\pi^2}{(2n-1)^2} \frac{\omega}{1+\varrho} \right]$$

und als Knicklast

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} \left[1 - \frac{1}{12} \frac{\pi^2}{(2n-1)^2} \frac{F h^2}{\bar{I}} (1 + 6\omega) \right], \quad \omega = \frac{E F}{E' F'} \frac{l'}{l} \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (\text{A})$$

Das Ergebnis wird nur wenig beeinflusst sein, wenn der Gitterträger auch rechtwinkelige Endfelder besitzt.¹

Wir werden noch zeigen, daß diese zweite Näherung für Werte $z < \pi$ schon von $n = 3$ an eine sehr gute ist. Für kleine ϱ ist die Formel (A) jedoch nicht zutreffend. Das ist aber ohne Bedeutung, denn die Tragfähigkeit ist dann nicht mehr durch das Instabilwerden der Gesamtfigur bedingt, sondern durch das Verhalten der einzelnen Gurtstäbe, deren Knicklast bei $z = \pi$ erschöpft wird (vgl. C).

¹ W. WENZEL: A. a. O. — Bei H. MÜLLER-BRESLAU (Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, S. 437—478) und bei M. GRÜNING (Die Statik des ebenen Tragwerks, S. 694) sind die Resultate hiervon abweichend und auch untereinander verschieden, selbst wenn nur bis zu den Gliedern zweiter Ordnung entwickelt wird.

B. Schwache Diagonalen bei großer Felderzahl.

Bei schwachen Diagonalstäben ist ω sehr groß, und wir schreiben in zweiter Näherung, anstatt des Wertes für z^2 , der vor zu der Gl. (A) geführt hat,

$$z^2 = \frac{4\pi^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1+\varrho}{\varrho} \left[1 - \frac{\pi^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\omega}{1+\varrho} \right],$$

indem wir dort den zweiten Summanden in der Klammer unterdrücken. Die Knicklast kann, wenn wir noch $4n^2$ für $(2n-1)^2$ setzen, in die Form gebracht werden

$$P_k = \pi^2 \frac{E\bar{I}}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4n^2} \frac{\omega}{1+\varrho}}.$$

Im kritischen Lastwert für den Fachwerkträger in Pkt. 63 war bei geringer Gitterstärke $F \frac{h^2}{2}$ an Stelle der Summe $\bar{I} = 2I + F \frac{h^2}{2}$ und der Faktor $\frac{1}{1+\varrho}$ fehlte vollständig.¹

Den Grenzfall verschwindender Gitterstärke $\omega \rightarrow \infty$ wollen wir unmittelbar berechnen. Das Gleichungssystem reduziert sich jetzt auf die Differenzgleichung vierter Ordnung

$$M_{\nu+2} - 2 \cos z \cdot M_{\nu} + M_{\nu-2} = 0,$$

unter den Randwerten $M_0 = M_1 = M_{2n-1} = M_{2n} = 0$. Aus Gl. (1) erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$r^4 - 2 \cos z \cdot r^2 + 1 = 0,$$

mit den Lösungen $r = \pm e^{\pm i \frac{z}{2}}$. Das allgemeine Integral lautet demnach bei Symmetrie

$$M_{\nu} = A \cdot \cos(n-\nu) \frac{z}{2} + B \cdot (-1)^{\nu} \cdot \cos(n-\nu) \frac{z}{2}$$

und als Knickbedingung folgt aus $M_0 = M_1 = 0$

$$\cos n \frac{z}{2} \cdot \cos(n-1) \frac{z}{2} = 0,$$

d. h. $z = \frac{\pi}{n}$ bzw. $z = \frac{\pi}{n-1}$. Damit ergibt sich, wie zu erwarten war, für jede Felderzahl die EULERSche Knicklast der Einzelgurte:

$$\frac{P_k}{2} = \pi^2 \frac{EI}{(nl)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{P_k}{2} = \pi^2 \frac{EI}{[(n-1)l]^2}.$$

¹ Bei ENGESSER und bei ELWITZ, a. a. O., wird die Biegesteifigkeit der Gurte tatsächlich in der Weise berücksichtigt, daß im Resultat, welches bei uns der reinen Fachwerkknickung mit schwachen Diagonalen entspricht, für $F \frac{h^2}{2}$ der Wert \bar{I} genommen wird.

C. Die Sonderfälle $n = 2$ und $n = 3$ bei beliebiger Vergitterung und bei starken Diagonalen.

Bei den Sonderfällen $n = 2$ und $n = 3$ ist es einfacher, eine unmittelbare Ausrechnung der Gleichungsdeterminante vorzunehmen, anstatt Integrationsverfahren zu benutzen.

Für $n = 2$ hat man bei beliebiger Vergitterung, unter Beachten der Symmetrie der Ausbiegung, d. h. bei $y_0 = y_4$, $y_1 = y_3$ aus den Gl. (K') und den Randwerten (R')

$$\begin{aligned} P(y_0 - y_2) - 2(1 - z \cdot \cotg z) M_2 &= 0, \\ P(y_0 + y_2) + p P(y_0 - y_2) - 2p(1 + \omega z \cdot \cotg z) M_2 &= 0, \\ P(3y_0 + y_2) - p P(y_0 - y_2) + 2p M_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die gleich Null gesetzte Determinante der y_0 , y_2 und M_2 ergibt die Knickbedingung

$$3p + 2p\omega = 1 - \frac{\operatorname{tg} z}{z}, \quad z^2 = \frac{P l^2}{2 E I},$$

während man in Pkt. 61 bei dem als Fachwerk berechneten Gitterträger

$$3p + 2p\omega = 1$$

gefunden hat. Mit der Abkürzung

$$\frac{2}{h^3} \left(\frac{l'}{l}\right)^3 \frac{E I}{E' F'} + \frac{3 I}{4 h^2 F} = k$$

auten beide Gleichungen

$$k z^2 = 1 - \frac{\operatorname{tg} z}{z} \quad \text{und} \quad k z^2 = 1.$$

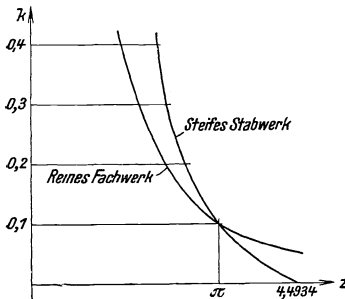


Abb. 111.

In der Abb. 111 sind in einem rechtwinkligen Achsenkreuz für diese zwei Fälle die $z = l \sqrt{\frac{P}{2 E I}}$ als Funktion der k aufgetragen. Die Kurven schneiden sich im Punkt $\frac{\operatorname{tg} z}{z} = 0$, somit sind bei $z = \pi$, $k = \frac{1}{\pi^2}$ die Knicklasten für den Fachwerkträger und für den steifartigen Gitterträger gleich. Man entnimmt der Figur, für welche k das reine Fachwerk, für welche das steife Stabwerk die größeren kritischen Werte ergibt.

Für $n = 3$ erhält man bei einer symmetrischen Biegeform die folgenden Gleichungen mit den Unbekannten y_0 , y_2 , y_3 , M_2 und M_3 :

$$\begin{aligned} P(y_0 - y_2) - 2\left(1 + \frac{z}{\sin z} - 2z \cdot \cotg z\right) M_2 &= 0, \\ P(y_0 + 2y_2 - y_3) + p P(y_0 - 2y_2 - y_3) + 2p\omega \left(\frac{z}{\sin z} - 2z \cdot \cotg z\right) M_2 - \\ &\quad - 2p(2M_2 + M_3) = 0, \\ P(y_0 + y_3) + 2(1 - z \cdot \cotg z) M_3 &= 0, \\ P(y_2 - y_3) + p P(y_2 + y_3) + 2p(M_2 + M_3) + 2p\omega z \cdot \cotg z \cdot M_3 &= 0, \\ P(3y_0 + y_2) - p P(y_0 - y_2) - p\omega P(y_0 + y_3) + 2p M_2 - 2p\omega M_3 &= 0. \end{aligned}$$

Das Nullsetzen der Koeffizientendeterminante liefert die Knickbedingung.

Wir schreiben die Knickgleichungen für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ noch bei einer sehr starken Vergitterung, d. i. für $\omega = 0$ an. Dann bleibt nur der Parameter $\varrho = \frac{4I}{Fh^2} = \frac{16p}{z^2}$ in der Rechnung, und wir können z als Funktion von ϱ einfach darstellen. Man hat also:

$$\text{für } n = 2 \dots 3p + \frac{\text{tg } z}{z} - 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{für } n = 3 \dots 5p^2 \cdot \cos z \cdot (2 \cos z - 1) + 7p(2 \cos z - 1) \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) + \\ + 3p \cdot \cos z \cdot \left(\frac{\sin z}{z} - 2 \cos z + 1 \right) + \\ + \left(\frac{\sin z}{z} - 2 \cos z + 1 \right) \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) = 0. \end{aligned}$$

Die Abb. 112 zeigt in den voll ausgezogenen Linien die für *starke* Diagonalen berechneten z als Funktion von ϱ . Ferner sind strichliert die Werte für $n = 2$ und $n = 3$ eingetragen, die aus der für große Felderzahl entwickelten Formel (A) für $\omega = 0$ hervorgehen.

Man erkennt, daß diese Gleichung für $z < \pi$ von $n = 3$ an gut anwendbar ist. Bei kleinen ϱ , bei denen keine Übereinstimmung mit dem genauen Wert besteht, ist überhaupt nicht das Instabilwerden des Stabwerkes, sondern

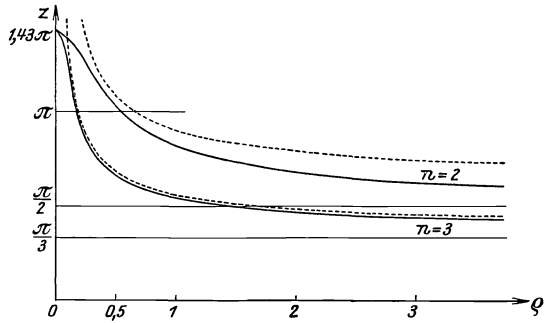


Abb. 112.

das Ausknicken der einzelnen Gurtstäbe bei $z = \pi$ maßgebend. Wir schließen daraus aber weiter: Auch bei einer beliebigen Vergitterung verwenden wir von $n = 3$ ab die bei großer Felderzahl gültige Formel (A) und untersuchen hierbei noch das Ausknicken der einzelnen Gurtstäbe.

78. Der Gitterträger mit biegesteifen Gurten und gelenkig eingehängten Diagonal- und Querstäben. Aufstellen der Gleichungen.

Wir betrachten wie vor den Gitterträger mit biegesteifen Gurten und gelenkig eingehängten Diagonalstäben und fügen in jedem Knoten noch einen vertikalen Querstab hinzu, der an den Gurtstäben ebenfalls gelenkig angeschlossen ist, Abb. 113. Höhe, Querschnittsfläche und Elastizitätszahl der Querstäbe sind h , F'' und E'' .

Für jeden Querstab entstehen gegenüber der früheren Rechnung sieben zusätzliche Unbekannte: Zwei Knotenpunktverschiebungen und eine Drehung (infolge eines neuen Knotens), eine Zusatzkraft (infolge des Querstabes), eine Zusatzkraft und eine Querkraft (wegen des neu gebildeten Gurtstabes), ein Knotenmoment. Wir können auch sieben

Gleichungen aufstellen: Für den Gurtstab eine Momentengleichung, zwei Hauptgleichungen und eine Dehnungsgleichung, für den Querstab eine Dehnungsgleichung und schließlich im hinzugekommenen Knoten zwei Gleichgewichtsbedingungen.

Die Knotenpunktverschiebungen v und u , die Momente M , die Querkräfte Q und Zusatzkräfte S der Gurtstäbe beziffern wir im Ober-

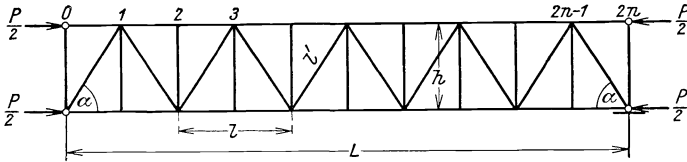


Abb. 113.

gurt mit o , im Untergurt mit u . Die Zusatzkräfte der Diagonalstäbe bezeichnen wir mit T , die der Querstäbe mit U ; hierbei bedeutet z. B. $T_{v-1,u}^{v,0}$ die Zusatzkraft im Stab, der vom unteren Knotenpunkt $v-1$ zum oberen Knotenpunkt v führt, U_v die Zusatzkraft im Stab zwischen dem oberen und dem unteren Knoten v .

Für die Gurtstäbe $v-1, v$ gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_v^o - M_{v-1}^o + \frac{l}{2} \cdot Q_{v-1,v}^o + \frac{P}{2} (v_v^o - v_{v-1}^o) = 0, \tag{I}$$

$$M_v^u - M_{v-1}^u + \frac{l}{2} \cdot Q_{v-1,v}^u + \frac{P}{2} (v_v^u - v_{v-1}^u) = 0$$

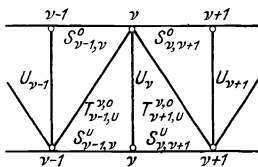


Abb. 114.

und die Dehnungsgleichungen

$$u_v^o - u_{v-1}^o = S_{v-1,v}^o \cdot \frac{l}{2EF}, \tag{1}$$

$$u_v^u - u_{v-1}^u = S_{v-1,v}^u \cdot \frac{l}{2EF}.$$

Für die im Obergurtknoten v zusammenstoßenden Diagonal- und Querstäbe lauten die Dehnungsgleichungen

$$(u_v^o - u_{v-1}^u) \cdot \cos \alpha + (v_v^o - v_{v-1}^u) \cdot \sin \alpha = T_{v-1,u}^{v,0} \cdot \frac{l}{E'F'},$$

$$(u_{v+1}^u - u_v^o) \cdot \cos \alpha + (v_v^o - v_{v+1}^u) \cdot \sin \alpha = T_{v+1,u}^{v,0} \cdot \frac{l}{E'F'}, \tag{2}$$

$$v_v^o - v_v^u = U_v \cdot \frac{h}{E''F''}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung im Obergurtknoten v in horizontaler Richtung ergibt für die Zusatzkräfte die Beziehung (vgl. Abb. 114)

$$(T_{v+1,u}^{v,0} - T_{v-1,u}^{v,0}) \cdot \cos \alpha = S_{v-1,v}^o - S_{v,v+1}^o \tag{3}$$

und ebenso für den Untergurtknoten $v-1$

$$(T_{v-1,u}^{v,0} - T_{v-2,u}^{v,0}) \cdot \cos \alpha = S_{v-2,v-1}^u - S_{v-1,v}^u \tag{3a}$$

Die vertikale Gleichgewichtsbedingung für zwei Schnitte links und rechts vom Knoten ν liefert

$$T_{\nu-1,u}^{\nu,0} \cdot \sin \alpha = -Q_{\nu-1,\nu}^0 - Q_{\nu-1,\nu}^u, \quad T_{\nu+1,u}^{\nu,0} \cdot \sin \alpha = Q_{\nu,\nu+1}^0 + Q_{\nu,\nu+1}^u,$$

also

$$(T_{\nu-1,u}^{\nu,0} + T_{\nu+1,u}^{\nu,0}) \cdot \sin \alpha = (Q_{\nu,\nu+1}^0 + Q_{\nu,\nu+1}^u) - (Q_{\nu-1,\nu}^0 + Q_{\nu-1,\nu}^u). \quad (4)$$

Bevor wir weitergehen, untersuchen wir zunächst die angeschriebenen Gleichungen.

Addiert man die ersten zwei Dehnungsgleichungen (2), so erhält man

$$\begin{aligned} (u_{\nu+1}^u - u_{\nu-1}^u) \cdot \cos \alpha - (v_{\nu-1}^u - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu+1}^u) \cdot \sin \alpha = \\ = (T_{\nu-1,u}^{\nu,0} + T_{\nu+1,u}^{\nu,0}) \frac{l}{E' F'} \end{aligned}$$

Die Gl. (1) ergeben für die Untergurtstäbe $\nu-1, \nu$ und $\nu, \nu+1$

$$u_{\nu+1}^u - u_{\nu-1}^u = \frac{l}{2EF} (S_{\nu-1,\nu}^u + S_{\nu,\nu+1}^u),$$

wobei $S_{\nu-1,\nu}^u = S_{\nu,\nu+1}^u = S_{\nu-1,\nu+1}^u$, denn die Zusatzkräfte in Gurtstäben, die durch einen dreistabigen Knoten getrennt sind, haben die gleiche Größe. Daher wird

$$\begin{aligned} v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^u = - (T_{\nu-1,u}^{\nu,0} + T_{\nu+1,u}^{\nu,0}) \frac{l}{E' F' \cdot \sin \alpha} + \\ + S_{\nu-1,\nu+1}^u \cdot \frac{l}{EF} \cotg \alpha. \quad (5) \end{aligned}$$

Aus den Gl. (4) findet man, sobald man Q mit den Gl. (I) eliminiert,

$$\begin{aligned} - (T_{\nu-1,u}^{\nu,0} + T_{\nu+1,u}^{\nu,0}) \cdot \sin \alpha = \\ = \frac{P}{l} (v_{\nu+1}^0 - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^0 + v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^u + v_{\nu-1}^u) + \\ + \frac{2}{l} (M_{\nu+1}^0 - 2M_{\nu}^0 + M_{\nu-1}^0 + M_{\nu+1}^u - 2M_{\nu}^u + M_{\nu-1}^u). \quad (6) \end{aligned}$$

Stellt man Gl. (3a) für die Werte $\nu = 1, 3, 5 \dots \nu - 2, \nu$ auf und addiert über alle Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} S_{\nu-1,\nu+1}^u = - \cos \alpha \cdot (T_{\nu-1,u}^{\nu,0} - T_{\nu-1,u}^{\nu-2,0} + T_{\nu-3,u}^{\nu-2,0} - \dots \\ \dots + T_{2,u}^{3,0} - T_{2,u}^{1,0} + T_{0,u}^{1,0}), \end{aligned}$$

und wenn man anstatt der Zusatzkräfte T die Querkräfte Q einführt,

$$\begin{aligned} S_{\nu-1,\nu+1}^u = \cotg \alpha \cdot [(Q_{\nu-1,\nu}^0 + Q_{\nu-1,\nu}^u) + (Q_{\nu-2,\nu-1}^0 + Q_{\nu-2,\nu-1}^u) + \dots \\ \dots + (Q_{2,3}^0 + Q_{2,3}^u) + (Q_{1,2}^0 + Q_{1,2}^u) + (Q_{0,1}^0 + Q_{0,1}^u)]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gl. (I) wird, unter Beachten der Randwerte $M_0 = M_1 = 0$, $v_0^u = 0$,

$$S_{\nu-1,\nu+1}^u = - \cotg \alpha \cdot \left[\frac{P}{l} (v_{\nu}^0 + v_{\nu}^u - v_0^0) + \frac{2}{l} (M_{\nu}^0 + M_{\nu}^u) \right]. \quad (7)$$

Setzt man (6) und (7) in (5) ein, so entsteht eine Differenzgleichung zweiter Ordnung in v und M :

$$\begin{aligned} v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^u &= \\ &= \frac{l}{E'F' \sin^2 \alpha} \left[\frac{P}{l} (v_{\nu+1}^0 - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^0 + v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^u + v_{\nu-1}^u) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{l} (M_{\nu+1}^0 - 2M_{\nu} + M_{\nu-1}^0 + M_{\nu+1}^u - 2M_{\nu}^u + M_{\nu-1}^u) \right] - \\ &\quad - \frac{l}{EF} \cot^2 \alpha \cdot \left[\frac{P}{l} (v_{\nu}^0 + v_{\nu}^u - v_0^0) + \frac{2}{l} (M_{\nu}^0 + M_{\nu}^u) \right], \quad (\text{K}_1) \end{aligned}$$

für $\nu = 1$ bis $2n - 1$. Ist ν ein dreistabiger Obergurtnode, so lautet die linke Seite von (K₁): $v_{\nu+1}^0 - 2v_{\nu}^u + v_{\nu-1}^0$, während die rechte Seite ihre Form unverändert beibehält.

Der Zusammenhang zwischen den Ausbiegungen im Obergurt und Untergurt kommt durch Gleichungen für die Querstäbe zum Ausdruck. Für die Zusatzkräfte im Querstab gelten bei einem dreistabigen Untergurtnode ν bzw. Obergurtnode ν die Beziehungen

$$U_{\nu} = Q_{\nu-1, \nu}^u - Q_{\nu, \nu+1}^u \quad \text{bzw.} \quad U_{\nu} = Q_{\nu, \nu+1}^0 - Q_{\nu-1, \nu}^0.$$

In Verbindung mit (1) und (2) gewinnt man daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{E''F''}{h} (v_{\nu}^0 - v_{\nu}^u) &= \frac{P}{l} (v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^u + v_{\nu-1}^u) + \\ &\quad + \frac{2}{l} (M_{\nu+1}^u - 2M_{\nu}^u + M_{\nu-1}^u) \\ \text{und} & \\ \frac{E''F''}{h} (v_{\nu}^0 - v_{\nu}^u) &= -\frac{P}{l} (v_{\nu+1}^0 - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^0) - \\ &\quad - \frac{2}{l} (M_{\nu+1}^0 - 2M_{\nu}^0 + M_{\nu-1}^0). \end{aligned} \quad (\text{K}_2)$$

Endlich stellen wir noch die Hauptgleichungen (II) für die aufeinanderfolgenden Gurtstäbe $\nu - 1, \nu$ und $\nu, \nu + 1$ auf. In Hinblick auf den stetigen Verlauf der Biegelinie erhält man mit der Abkürzung $z^2 = \frac{Pl^2}{8EI}$

$$\begin{aligned} \frac{P}{2} (v_{\nu+1}^0 - 2v_{\nu}^0 + v_{\nu-1}^0) &= - (M_{\nu+1}^0 - 2M_{\nu}^0 + M_{\nu-1}^0) + \\ &\quad + \frac{z}{\sin z} (M_{\nu+1}^0 - 2 \cos z \cdot M_{\nu}^0 + M_{\nu-1}^0) \\ \text{und} & \\ \frac{P}{2} (v_{\nu+1}^u - 2v_{\nu}^u + v_{\nu-1}^u) &= - (M_{\nu+1}^u - 2M_{\nu}^u + M_{\nu-1}^u) + \\ &\quad + \frac{z}{\sin z} (M_{\nu+1}^u - 2 \cos z \cdot M_{\nu}^u + M_{\nu-1}^u), \end{aligned} \quad (\text{K}_3)$$

zwei Differenzgleichungen in den Variablenreihen v und M von $\nu = 1$ bis $2n - 1$.

Die Differenzgleichungen (K) vertreten ein System von $8n - 2$ Gleichungen, da (K₁) und (K₃) von 1 bis $2n - 1$ und (K₂) in der Anzahl $2n + 1$ angeschrieben werden können. Unbekannt sind $2(2n + 1)$

Momente M und $2(2n + 1)$ Verschiebungen v . Als Randbedingungen hat man infolge der horizontalen Führungen in den Knoten 0 und $2n$

$$v_0^u = v_{2n}^u = 0 \tag{R_1}$$

und infolge der verschwindenden Momente an den Gurtenden

$$M_0^0 = M_0^u = M_{2n}^0 = M_{2n}^u = 0. \tag{R_2}$$

79. Fortsetzung von Pkt. 78: Diskussion von Sonderfällen.

A. Sehr starke Vergitterung bei großer Felderzahl.

Die abgeleiteten Gleichungen werden wesentlich einfacher, wenn die Querstäbe sehr stark sind, d. h. für $F'' \rightarrow \infty$. Aus den Gl. (K₂) wird dann $v_v^0 = v_v^u (= v_v)$ und mit Einführen von $M^0 + M^u = 2M$, $v^0 + v^u = 2v$ lassen sich die beiden Gurte gemeinsam behandeln, so daß nur $2(2n + 1)$ Unbekannte übrig bleiben. Wir wollen auch die Diagonalstäbe als sehr stark ansehen, $F' \rightarrow \infty$ und bekommen aus (K₁) und (K₃) mit dem Parameter

$$p = \frac{P}{2EF} \cdot \cotg^2 \alpha = \frac{z^2}{4} \cdot \frac{4I}{Fh^2}$$

die Gleichungen

$$P \cdot \Delta^2 v_v + 4pP \cdot v_v + 8p \cdot M_v = 0, \tag{K'}$$

$$\frac{\sin z}{z} \frac{P}{2} \cdot \Delta^2 v_v + \frac{\sin z}{z} \cdot \Delta^2 M_v - (\Delta^2 M_v + 2M_v - 2 \cos z \cdot M_v) = 0,$$

unter den Randwerten

$$v_0 = v_{2n} = 0, \quad M_0 = M_{2n} = 0. \tag{R'}$$

Mit dem Lösungsansatz $M_v = r^v$, $v_v = \alpha \cdot r^v$ und der Abkürzung $\beta = r + \frac{1}{r}$ erhält man die charakteristischen Gleichungen

$$P\alpha(\beta - 2) + 4pP\alpha + 8p = 0,$$

$$\frac{\sin z}{z} \frac{P}{2} \alpha(\beta - 2) + \frac{\sin z}{z} (\beta - 2) - (\beta - 2) - 4 \sin^2 \frac{z}{2} = 0. \tag{1}$$

Eliminiert man α , so entsteht die Gleichung

$$f(\beta) \equiv (\beta - 2)^2 \cdot \left(\frac{\sin z}{z} - 1 \right) - (\beta - 2) \cdot \left(4p + 4 \sin^2 \frac{z}{2} \right) - 16p \cdot \sin^2 \frac{z}{2} = 0, \tag{2}$$

und nach Berechnung von β kann α aus (1) gefunden werden.

In *erster Näherung* setzen wir $\sin z = z$, und damit wird

$$\beta = 2 - \frac{4pz^2}{z^2 + 4p} \equiv 2 \cos \xi,$$

und das allgemeine Integral der Gl. (K') lautet dann aus Symmetriegründen $v_v = \alpha \cdot \cos(n - v)\xi$. Nun verlangt die Randbedingung $v_0 = 0$, daß $\cos n\xi = 0$, oder $n\xi = \frac{\pi}{2}$. Das Einführen von

$$2 \cos \xi = 2 \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{4n^2}$$

in die Gleichung für β liefert

$$z^2 = \frac{\pi^2}{4n^2} \frac{1 + \varrho}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{4I}{Fh^2}.$$

Mit dem fiktiven Trägheitsmoment $\bar{I} = 2 \left(I + F \frac{h^2}{4} \right)$ und der Stablänge $L = n \cdot l$ ergibt sich daraus für die Knicklast in erster Näherung die EULERSche Formel

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2}.$$

Um die *Abminderung der Tragkraft* gegenüber einem vollwandigen Stab vom Querschnittsträgheitsmoment \bar{I} zu bestimmen, berechnen wir in der Gleichung $\beta = 2 \cos \xi$ beide Seiten bis zu Gliedern vierter Ordnung genau. Entwickelt man $\sin z$ und $\sin^2 \frac{z}{2}$, so erhält (2) die Form:

$$f(\beta) \equiv (\beta - 2)^2 \left(-\frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \right) - (\beta - 2) \left(4p + z^2 - \frac{z^4}{12} \right) - 4pz^2 + p \frac{z^4}{3} = 0.$$

Unter Verwendung des NEWTONSchen Näherungsverfahrens gewinnen wir aus der Gleichung $\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ als verbesserte Lösung zum früheren β den bis zur vierten Ordnung genauen Wert

$$\beta_1 = 2 - \frac{4pz^2}{z^2 + 4p} - \frac{4}{3} p^2 z^4 \frac{z^2 - 4p}{(z^2 + 4p)^3},$$

der die Gleichung $f(\beta) = 0$ bis zur sechsten Ordnung befriedigt.

Mit Einführen von $\beta_1 = 2 \cos \xi$ und $\beta_2 = 2 \cos \eta$ für die nicht weiter interessierende zweite Wurzel der charakteristischen Gleichung schreiben wir das allgemeine Integral von (K'):

$$M_v = A \cdot \cos(n - \nu)\xi + B \cdot \cos(n - \nu)\eta, \\ v_\nu = \alpha_1 \cdot A \cdot \cos(n - \nu)\xi + \alpha_2 \cdot B \cdot \cos(n - \nu)\eta,$$

wobei wir Symmetrie der Verformung voraussetzen. Die Randwerte $M_0 = 0$, $v_0 = 0$ ergeben die Bedingung für die Stabilitätsgrenze

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \cdot \cos n \xi & \alpha_2 \cdot \cos n \eta \\ \cos n \xi & \cos n \eta \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos n \xi \cdot \cos n \eta,$$

also wie vor $\xi = \frac{\pi}{2n}$. Die Gleichung $\beta_1 = 2 \cos \xi$ ist nun bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickelt

$$\beta_1 = 2 \cos \xi = 2 - \frac{\pi^2}{4n^2} + \frac{1}{12} \frac{\pi^4}{16n^4}.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für β_1 gleich und verwendet man bei den Gliedern höherer Ordnung für z^2 den ersten Näherungswert, so bekommt man

$$z^2 = \frac{\pi^2}{4n^2} \frac{1 + \varrho}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{24} \frac{\pi^2}{n^2} \frac{1}{1 + \varrho} \right)$$

und damit die Knicklast

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} \left(1 - \frac{1}{48} \frac{\pi^2 F h^2}{n^2 \bar{I}} \right). \quad (\text{A})$$

Die kritische Last des Gitterträgers mit sehr starken Diagonal- und Querstäben ist in zweiter Näherung gleich dem Wert, der ohne Querstäbe aufgefunden wurde, wenn man dort $4n^2$ für $(2n-1)^2$ setzt. Die Formel (A) von Pkt. 77 wird man nun auch bei beliebigen Querstäben benutzen.¹

B. Die Sonderfälle $n = 1$ und $n = 2$ bei sehr starker Vergitterung.

Im Sonderfall $n = 1$ erhält man aus den Gleichungen (K) mit den Randwerten $v_0 = v_2 = 0$, $M_0 = M_2 = 0$ die Beziehungen

$$v_1(-P + 2Pp) + M_1 4p = 0, \quad v_1 \frac{P}{2} \frac{\sin z}{z} + M_1 \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) = 0$$

und als Knickbedingung folgt

$$\frac{4I}{Fh^2} = \frac{2(z \cdot \cos z - \sin z)}{z^3 \cdot \cos z}.$$

Für $n = 2$ lauten die Gleichungen (K) unter den Randbedingungen $v_0 = v_4 = M_0 = M_4 = 0$ bei Berücksichtigen der Symmetrie, d. h. mit $v_1 = v_3$, $M_1 = M_3$

$$P(-2v_1 + v_2) + 4Ppv_1 + 8pM_1 = 0,$$

$$P(v_1 - v_2) + 2Ppv_2 + 4pM_2 = 0,$$

$$\frac{P}{2}(-2v_1 + v_2) + (-2M_1 + M_2) + \frac{z}{\sin z}(2\cos z \cdot M_1 - M_2) = 0,$$

$$\frac{P}{2}(v_1 - v_2) + (M_1 - M_2) + \frac{z}{\sin z}(\cos z \cdot M_2 - M_1) = 0.$$

Die gleich Null gesetzte Determinante der v und M ist die Knickgleichung.

80. Rechnungsvorgang. Schlußbemerkung.

Die vor hergeleiteten Gleichungen sind nur zutreffend, solange die übliche Elastizitätstheorie besteht. Im Fall der unelastischen Knickung führen wir ein empirisches Spannungsgesetz ein und ändern unsere Formeln in der folgenden Weise um.²

In der Gleichung für die kritische Last

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2} k^2$$

bildet der Faktor $\pi^2 \frac{E \bar{I}}{L^2}$ die Knicklast des vollwandigen Stabes mit der Querschnittsfläche $2F$ und dem Trägheitsmoment $\bar{I} = 2 \left(I + F \frac{h^2}{4} \right)$ der Gurte, und k^2 ist ein Abminderungsfaktor, der von den Abmessungen

¹ H. MÜLLER-BRESLAU u. M. GRÜNING errechnen für den Gitterstab mit Querriegeln dieselbe Knickformel wie für den Stab ohne Querriegel.

² Vgl. auch F. ENGESSER: Knicksicherheit von Gitterstäben. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 52, S. 359/360. 1908.

der Stäbe und den Elastizitätszahlen der Gurt- und Gitterstäbe abhängt. Wir setzen für den Elastizitätsmodul E der Gurtstäbe den Knickmodul $T = \frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}$, wobei $\sigma_k = P_k : 2F$ und die Materialkonstanten a und b z. B. entsprechend der empirischen TETMAJERSCHEN Gleichung gewählt werden; für die Gitterstäbe bedeute E den YOUNGSCHEM Elastizitätsmodul.

Wir wollen den Rechnungsgang am Beispiel des *Gitterträgers* mit *Diagonalen*, ohne Querstäbe, veranschaulichen. In zweiter Näherung gilt bei großer Felderzahl die Gleichung

$$P_k = \pi^2 \frac{T \bar{I}}{L^2} k^2,$$

$$k^2 = 1 - \frac{\pi^2}{12 \cdot (2n - 1)^2} \frac{F h^2}{\bar{I}} - \frac{2 \pi^2}{(2n - 1)^2} \frac{F h^2}{\bar{I}} \cdot \frac{F}{F'} \left(\frac{V}{l}\right)^3 \frac{T}{E}.$$

Nimmt man für T den vor angeschriebenen Wert, ferner $P_k = 2F \cdot \sigma_k$, so erhält man eine Gleichung fünften Grades in σ_k , die man durch Probieren auflösen muß. Wir umgehen diese Auflösung und lassen in k^2 angenähert das Glied mit $T : E$ fort, d. h. wir betrachten zunächst den Gitterstab mit sehr starken Diagonalstäben. Dann ist k^2 konstant und wir können mit der reduzierten Schlankheit

$$\lambda_0 = \frac{L}{i \cdot k}, \quad i = \sqrt{\frac{\bar{I}}{2F}} = \sqrt{\frac{I}{F} + \frac{h^2}{4}}$$

rechnen. Die Knickspannung folgt der Gleichung $\sigma_k = a - b \cdot \lambda_0$, und daraus finden wir einen Knickmodul T . Jetzt geben wir die Starrheit der Diagonalen auf und führen in k^2 diesen ersten Näherungswert T ein. Damit bekommen wir neue Werte k und λ_0 und ein verbessertes σ_k . In der Regel wird man die Rechnung bereits abschließen dürfen.

Zahlenbeispiel für einen Stab aus Flußstahl. Stablänge $L = 400$ cm, Feldlänge $l = 100$ cm (Felderzahl $n = 4$), Höhe $h = 25$ cm, Diagonallänge $V = 55,9$ cm, Querschnittsfläche der Gurte $F = 48,3$ cm², Trägheitsmoment I der Gurtquerschnitte $I = 317$ cm⁴, Querschnittsfläche der Diagonalen $F' = 13,1$ cm².

Mit diesen Werten erhält man

$$\bar{I} = 2I + F \frac{h^2}{2} = 15728 \text{ cm}^4, \quad i = \sqrt{\frac{I}{F} + \frac{h^2}{4}} = 12,76 \text{ cm},$$

$$k^2 = 0,9678 - 0,4980 \frac{T}{E}.$$

Bei sehr starken Diagonalstäben sind $k^2 = 0,9678$, $\lambda_0 = \frac{L}{i k} = 31,9$, $\sigma_k = 3,1 - 0,0114 \cdot 31,9 = 2,737$ t/cm² und die Knicklast

$$P_k = 2 \cdot 48,3 \cdot 2,737 = 264 \text{ t}.$$

Dem berechneten σ_k entspricht ein Knickmodul $T = 281,2$ t/cm². Mit diesem Wert und $E = 2000$ t/cm² bekommen wir $k^2 = 0,8978$ und $\lambda_0 = 33,1$, $\sigma_k = 2,723$ t/cm², also die kritische Last

$$P_k = 2 \cdot 48,3 \cdot 2,723 = 263 \text{ t}.$$

Man erkennt, welchen geringen Einfluß die Elastizität der Gitterstäbe besitzt.

Wird der *Gitterstab* auch mit *Querriegeln* ausgeführt, so gilt bei sehr starker Vergitterung die Formel (A) von Pkt. 79, und das Resultat ist praktisch dasselbe wie vor bei starken Diagonalen.

Zum Vergleich führen wir noch Ergebnisse vom *Rahmenstab* an. Bei einer Ausbildung als vierfeldrigen Rahmenstab erhielt man bei sehr starken Bindeblechen (vgl. Pkt. 74) mit $\varrho = \frac{4I}{Fh^2} = 0,042$ für den Parameter z den Wert 2,54. Daher wäre die reduzierte Schlankheit $\lambda_0 = \frac{\pi}{z} l \sqrt{\frac{F}{I}} = 48,3$ und somit die Knicklast

$$P_k = 2 \cdot 48,3 \cdot (3,1 - 0,0114 \cdot 48,3) = 246 \text{ t.}$$

Hätte der Rahmenstab acht Felder, so wären $z = 1,70$, $\lambda_0 = 36$ und

$$P_k = 2 \cdot 48,3 \cdot (3,1 - 0,0114 \cdot 36) = 260 \text{ t.}$$

In einem bestimmten Fall ist auch das Knicken um die Materialachse zu untersuchen und festzustellen, ob hierbei ein kleinerer kritischer Wert entsteht.

Knickversuche mit Gitterstäben der von uns behandelten einfachen Art, bei denen Lagerung und Lastaufbringung die Forderungen der Theorie erfüllen, sind zur Zeit nicht vorhanden. Experimente, die nur in geringer Zahl ausgeführt wurden, sollten im wesentlichen besonderen Baufällen genügen.¹ Einwandfreie Knickversuche hätten aber nicht nur den Zweck, die Rechnung zu kontrollieren, sondern hier auch die Aufgabe, ein richtiges Urteil über die Vergitterung zu ermöglichen.

Wenn wir zum Schluß die statisch unbestimmten Gliederstäbe miteinander vergleichen, so geben wir dem Rahmenstab, wegen der größeren statischen Klarheit in der Verwendung als Druckglied, den Vorrang gegenüber dem Gitterträger. In seiner ruhigen Linienführung dürfte der Rahmenstab auch ästhetischen Anforderungen besser entsprechen.

§ 23. Probleme der Stabwerkknickung räumlicher Systeme.

81. Ansätze, wenn keine Torsionsbeanspruchung der Stäbe vorhanden ist.

Wir betrachten einen geraden Stab von der Länge l , der durch eine axiale endliche Druckkraft P und eine axiale unendlich kleine Zusatzkraft S belastet ist. Unsere Rechnung beziehen wir auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem u, v, w ; dabei sei u in der Richtung der Achse des unverformten Stabes, v und w parallel den Trägheitshauptachsen vom Querschnitt des unverformten Stabes genommen. An den Stabenden a und b wirken die Biegemomente M_a, N_a und M_b, N_b sowie die unendlich kleinen Querkkräfte Q, R (Abb. 115).

¹ Z. B. Versuche in *Phönixville*, Pa., anlässlich des Neuaufbaues der *Quebecbrücke*: Der Eisenbau, 2. Jahrg., S. 309f., 1911; ferner bei R. MAYER: Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921. S. 407—497.

Setzen wir nur kleine Ausbiegungen voraus, so genügen die Komponenten v und w der Ausbiegung als Funktionen der Abszisse u den Differentialgleichungen

$$v'' = \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{M}{EI_w}, \quad w'' = \frac{d^2 w}{du^2} = \frac{N}{EI_v}, \quad (1)$$

wobei M und N die Komponenten des Biegemomentes und I_w, I_v die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes an der Stelle u sind; E bedeutet den Elastizitätsmodul (YOUNG'schen Modul) des Stabmaterials, oder seinen augenblicklichen Wert, den Knickmodul. Das Biegemoment im Querschnitt u, v, w ist hierbei durch die Gleichungen

$M = M_a - Q \cdot u - P(v - v_a),$ (2)

$N = N_a - R \cdot u - P(w - w_a)$

bestimmt.

Aus Gl. (2) erhält man für $u = l$ die Gleichgewichtsbedingungen für die Momente

$$M_a - M_b = Q \cdot l + P(v_b - v_a), \quad (1)$$

$$N_a - N_b = R \cdot l + P(w_b - w_a).$$

Der Vergleich der Ansätze (1) und (2) mit den Formeln (1) und (2) von Pkt. 64 zeigt ferner, daß wir Beziehungen derselben Bauart aufstellen dürfen, wie

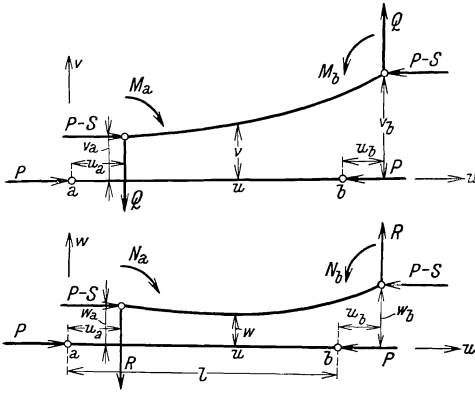


Abb. 115.

sie dort hergeleitet sind, wenn wir anstatt der Momente und Ausbiegungen die entsprechenden Komponenten einführen. Die Hauptgleichungen des Problems lauten also

$$\begin{aligned} v_b' - v_a' &= \frac{l}{EI_w} (M_b + M_a) \cdot t(z_w), \\ 2 \frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') &= \frac{l}{EI_w} (M_b - M_a) \cdot s(z_w), \\ w_b' - w_a' &= \frac{l}{EI_v} (N_b + N_a) \cdot t(z_v), \\ 2 \frac{w_b - w_a}{l} - (w_b' + w_a') &= \frac{l}{EI_v} (N_b - N_a) \cdot s(z_v), \end{aligned} \quad (II)$$

wobei die Abkürzungen benützt sind:

$$\begin{aligned} t(z_w) &= \frac{1 - \cos z_w}{z_w \cdot \sin z_w}, & s(z_w) &= \frac{1 + \cos z_w}{z_w \cdot \sin z_w} - \frac{2}{z_w^2}, & z_w^2 &= \frac{Pl^2}{EI_w}, \\ t(z_v) &= \frac{1 - \cos z_v}{z_v \cdot \sin z_v}, & s(z_v) &= \frac{1 + \cos z_v}{z_v \cdot \sin z_v} - \frac{2}{z_v^2}, & z_v^2 &= \frac{Pl^2}{EI_v}. \end{aligned}$$

Schließlich bewirkt die unendlich kleine Zusatzkraft S , die wir als Zug positiv rechnen, eine unendlich kleine Längenänderung des Stabes. Sind u_a und u_b die Verschiebungskomponenten der Endpunkte a und b

in der u -Richtung, so gilt nach dem HOOKEschen Gesetz die *Dehnungsgleichung*

$$u_b - u_a = \frac{S}{EF} l, \quad (\text{III})$$

wenn F die Fläche des Stabquerschnittes bedeutet.

Die Hauptgleichungen (II) lassen sich in eine für manche Zwecke bequeme Form bringen. Wenn man die erste und zweite, bzw. dritte und vierte Gleichung addiert und subtrahiert, bekommt man

$$\begin{aligned} v_a' &= \frac{v_b - v_a}{l} + M_a \cdot \psi_w' + M_b \cdot \psi_w'', \\ v_b' &= \frac{v_b - v_a}{l} - M_a \cdot \psi_w'' - M_b \cdot \psi_w', \\ w_a' &= \frac{w_b - w_a}{l} + N_a \cdot \psi_v' + N_b \cdot \psi_v'', \\ w_b' &= \frac{w_b - w_a}{l} - N_a \cdot \psi_v'' - N_b \cdot \psi_v', \end{aligned} \quad (\text{II}')$$

mit den Abkürzungen

$$\psi' = \frac{l}{EI} \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad \psi'' = \frac{l}{EI} \frac{\sin z - z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI}.$$

Mit diesen Gleichungen können wir jedes räumliche Problem der Stabwerkknickung erledigen, wenn die Stäbe nicht auf Torsion beansprucht sind. Den Nachweis führen wir dann so wie beim ebenen Problem in Pkt. 65 und Pkt. 70 an einem System mit biegesteifen Knoten.

Gegeben sei ein Tragwerk mit k Knoten, s Stäben, m_1 Verschiebungs- und m_2 Verdrehungsbeschränkungen. Jedem Knoten denken wir uns, soweit es die Bewegungsbeschränkungen zulassen, unendlich kleine Verrückungen δx , δy , δz nach den drei Koordinatenrichtungen und Verdrehungen $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$ erteilt. Die Zahl der unabhängigen Verschiebungen ist nun $3k - m_1$; die Zahl der unabhängigen Drehungswinkel ist $2k - m_2$ (wobei die v' und w' unmittelbar gleich den Werten $\delta\vartheta_1$ und $\delta\vartheta_2$ sind). Für jeden Stab sind drei Zusatzkräfte S , Q und R vorhanden, und da in jedem freien Knoten zwischen diesen Kräften drei Gleichgewichtsbedingungen bestehen, gibt es $3s - (3k - m_1)$ unabhängige Zusatzkraftgrößen. Die Bedingung, daß an den $k - m_2$ an der Drehung nicht behinderten Knoten die Momentensumme Null ist, verringert die Zahl $4s$ der Momentgrößen M , N auf $4s - (2k - m_2)$ unabhängige Biegemomente. Somit ist die Anzahl der Unbekannten gleich $7s$. Zur Verfügung stehen $7s$ lineare homogene Gleichungen, nämlich $2s$ Momentengleichungen (I), $4s$ Hauptgleichungen (II) und s Dehnungsgleichungen (III), und ihre gleich Null gesetzte Determinante ist die Knickbedingung.

Nimmt man die Querschnittsflächen in (III) gleich unendlich, so hat man die reine Rahmenknickung, sind alle Knotenmomente Null, so liegt die reine Fachwerkknickung vor. Bei dem gelenkigen Anschluß eines Stabes ist sein betreffendes Endmoment gleich Null, aber seine Tangentenneigung in diesem Knoten tritt hierfür als Unbekannte ein.

82. Beispiele zum räumlichen Ausknicken.

a) Wir untersuchen nochmals den in Pkt. 9 behandelten axial gedrückten Stab, der an einem Ende in einer Schneide, am anderen Ende in einem Gelenk gelagert ist.

Die Schneide liege — in der Bezeichnung von Pkt. 81 — am Stabende a in der Ebene v, w und schließe mit der w -Achse, die mit der I_{\min} -Achse zusammenfällt, den Winkel φ ein. Die v -Achse ist die I_{\max} -Achse des Querschnittes.

Die Komponenten des Biegemomentes im Querschnitt u sind in der v, u - und w, u -Ebene

$$M = P \cdot v + Q(l - u) \cdot \sin \varphi, \quad N = P \cdot w + Q(l - u) \cdot \cos \varphi.$$

Für $u = 0$ sind $v_a = w_a = 0$ und $M_a = Q \cdot l \cdot \sin \varphi$, $N_a = Q \cdot l \cdot \cos \varphi$; für $u = l$ sind $v_b = w_b = 0$ und $M_b = N_b = 0$. Die Schneidenbedingung lautet $v_a' \cdot \sin \varphi + w_a' \cdot \cos \varphi = 0$ und daraus folgt mit den Hauptgleichungen (II') von Pkt. 81 die Knickbedingung

$$M_a \cdot \psi_w' \cdot \sin \varphi + N_a \cdot \psi_v' \cdot \cos \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad Ql(\psi_w' \cdot \sin^2 \varphi + \psi_v' \cdot \cos^2 \varphi) = 0.$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{P}{EI_v} = \frac{P}{EI_{\max}} = \alpha^2, \quad \frac{P}{EI_w} = \frac{P}{EI_{\min}} = \beta^2$$

und

$$z_v^2 = \frac{Pl^2}{EI_v} = \alpha^2 l^2, \quad z_w^2 = \frac{Pl^2}{EI_w} = \beta^2 l^2$$

sind nun

$$\psi_v' = \frac{1}{Pl} \frac{\alpha l \cdot \cos \alpha l - \sin \alpha l}{\sin \alpha l}, \quad \psi_w' = \frac{1}{Pl} \frac{\beta l \cdot \cos \beta l - \sin \beta l}{\sin \beta l}.$$

Führt man diese Werte in die Knickgleichung ein, so bekommt man

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = - \frac{\psi_v'}{\psi_w'} = - \frac{\sin \beta l \cdot (\alpha l \cdot \cos \alpha l - \sin \alpha l)}{\sin \alpha l \cdot (\beta l \cdot \cos \beta l - \sin \beta l)},$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Pkt. 9.

b) Der Stab ist an beiden Enden in Schneiden gelagert, die mit der w -Achse (I_{\min} -Achse) die Winkel φ_1 bzw. φ_2 einschließen.

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen nehmen die Komponenten des Biegemomentes im Querschnitt u in den Ebenen v, u und w, u die Form an:

$$M = P \cdot v + Q_1(l - u) \cdot \sin \varphi_1 - Q_2 \cdot u \cdot \sin \varphi_2, \\ N = P \cdot w + Q_1(l - u) \cdot \cos \varphi_1 - Q_2 \cdot u \cdot \cos \varphi_2.$$

Zufolge der Randwerte, die aussagen, daß an den Stabenden die Ausbiegungen gleich Null sind, hat man also für $u = 0$, $M_a = Q_1 \cdot l \cdot \sin \varphi_1$, $N_a = Q_1 \cdot l \cdot \cos \varphi_1$ und für $u = l$, $M_b = -Q_2 \cdot l \cdot \sin \varphi_2$, $N_b = -Q_2 \cdot l \cdot \cos \varphi_2$. Aus den Schneidenbedingungen

$$v_a' \cdot \sin \varphi_1 + w_a' \cdot \cos \varphi_1 = 0, \quad v_b' \cdot \sin \varphi_2 + w_b' \cdot \cos \varphi_2 = 0$$

entstehen nun mit den Hauptgleichungen (II'), unter Beachten der eben angeschriebenen Momentenwerte, die Beziehungen

$$0 = Q_1 l \cdot (\psi_w' \cdot \sin^2 \varphi_1 + \psi_v' \cdot \cos^2 \varphi_1) - Q_2 l \cdot (\psi_w'' \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \psi_v'' \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2),$$

$$0 = Q_1 l \cdot (\psi_w'' \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \psi_v'' \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2) - Q_2 l \cdot (\psi_w' \cdot \sin^2 \varphi_2 + \psi_v' \cdot \cos^2 \varphi_2).$$

Die gleich Null gesetzte Determinante ist die Knickbedingung

$$0 = \sin^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2 \cdot [(\psi_w')^2 - (\psi_w'')^2] + \cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_2 \cdot [(\psi_v')^2 - (\psi_v'')^2] + (\sin^2 \varphi_2 \cdot \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 \cdot \sin^2 \varphi_1) \cdot \psi_v' \cdot \psi_w' - 2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \psi_v'' \cdot \psi_w'',$$

aus der mit den früheren Werten ψ_v' , ψ_w' und den Ausdrücken

$$\psi_v'' = \frac{1}{Pl} \frac{\sin \alpha l - \alpha l}{\sin \alpha l}, \quad \psi_w'' = \frac{1}{Pl} \frac{\sin \beta l - \beta l}{\sin \beta l}$$

das in Pkt. 9 angegebene Resultat hervorgeht.

c) Das in Abb. 116 dargestellte symmetrische *Zweistabek* ist aus zwei gleichen Stäben je von der Länge l gebildet, die an ihren Enden eingespannt und in der gemeinsamen Ecke biegesteif, aber torsionsfrei verbunden sind. Ein Stab ist durch die Druckkraft P , der andere durch eine Zugkraft P belastet. Wir untersuchen das Knicken aus der Stabebene.

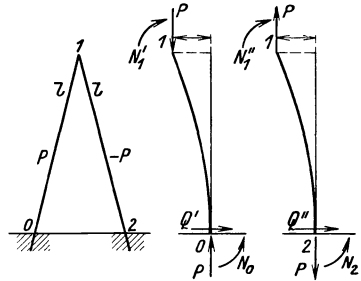


Abb. 116.

Für den durch die Druckkraft P beanspruchten Stab 0—1 gelten für die Tangentenneigung der Elastica in 0 und 1 die Gleichungen

$$w_0' = \frac{w_1}{l} - \frac{N_0}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Tg} z} - 1 \right) - \frac{N_1'}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\sin z} \right), \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

$$w_1' = \frac{w_1}{l} + \frac{N_0}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\sin z} \right) + \frac{N_1'}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Tg} z} - 1 \right).$$

Hierbei sind N_0 und N_1 die Endmomente des Stabes, w_1 die Ausbiegung der Spitze 1, I das Trägheitsmoment für die Achse senkrecht zur Biegerichtung. In analoger Weise bestehen für den Stab 1—2, der von der Zugkraft P ergriffen ist, die Ausdrücke

$$w_2' = \frac{w_1}{l} - \frac{N_2}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} \right) - \frac{N_1''}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Sin} z} - 1 \right),$$

$$\overline{w_1'} = \frac{w_1}{l} + \frac{N_2}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Sin} z} - 1 \right) + \frac{N_1''}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} \right).$$

Diese Gleichungen gestatten mit Hilfe der Randwerte unsere Aufgabe zu lösen. Zuzufolge der Einspannung der Stäbe sind $w_0' = 0$, $w_2' = 0$; im Eckpunkt 1 sind die Tangentenwinkel gleich, d. h. es ist $w_1' = \overline{w_1'}$. Nun verlangt das Gleichgewicht, daß an der Spitze die Momentensumme Null ist, daß also $N_1' + N_1'' = 0$, und da ferner die Summe der Quer-

kräfte der beiden Stäbe verschwinden muß, ergeben die Gleichgewichtsbedingungen für die zwei Stäbe die Beziehung $N_2 = -N_0$. Die angeschriebenen Randwerte erhalten damit die Form

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{w_1}{l} - \frac{N_0}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{tg} z} - 1 \right) - \frac{N_1'}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\sin z} \right), \\ 0 &= \frac{w_1}{l} + \frac{N_0}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} \right) + \frac{N_1'}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Sin} z} - 1 \right), \\ 0 &= \frac{N_0}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{Sin} z} - \frac{z}{\sin z} \right) + \frac{N_1'}{Pl} \left(\frac{z}{\operatorname{tg} z} - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} \right). \end{aligned}$$

Die Knickbedingung, die gleich Null gesetzte Determinante lautet, wenn wir die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren,

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{z}{\operatorname{tg} z} - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} & \frac{z}{\sin z} - \frac{z}{\operatorname{Sin} z} \\ \frac{z}{\sin z} - \frac{z}{\operatorname{Sin} z} & \frac{z}{\operatorname{tg} z} - \frac{z}{\operatorname{Tg} z} \end{vmatrix}$$

und ausgerechnet¹

$$\operatorname{Cos} z \cdot \operatorname{cos} z = 1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{sin} z = 0.$$

Die Gleichung $\operatorname{sin} z = 0$, also $z = \pi$, entspricht der trivialen Lösung, bei der das System gerade bleibt; die kleinste von Null verschiedene Wurzel der ersten Gleichung $z = 4,3700$ liefert die Knicklast

$$P_k = 19,1 \frac{EI}{l^2}.$$

d) Ist ein gerader Stab in zwei verschiedenen Ebenen gestützt, und zwar abwechselnd durch Stützen, die der einen und der anderen Richtung angehören, so tritt im allgemeinen eine räumliche Verformung ein. Die Berechnung eines solchen Beispiels werden wir im nächsten Abschnitt durchführen (Pkt. 100), da wir dort den mehrfach gelagerten Stab im Zusammenhang behandeln.

83. Ein räumliches Tragwerk: Der Gittermast.²

A. Problemstellung, Ansatz der Gleichungen.

Der zu untersuchende Gittermast mit quadratischem Grundriß besteht aus vier Gurtstäben, die in gleichen Abständen durch Diagonal- und Querstäbe verbunden sind (Abb. 117). Während die Gurte als biegesteif angenommen werden, sind die Füllungsstäbe in den Knoten mittels Kugelgelenken eingehängt. An den Enden ist der Mast vertikalen Führungen unterworfen. Wir setzen alle Gurtstäbe, sowie die

¹ Das Resultat stimmt mit dem von E. MELAN überein. Die Berechnung von Flachmasten unter Berücksichtigung der Knickgefahr senkrecht zur Kraftebene. Elektrotechn. Ztschr., S. 1197/1198. 1921. Vgl. ferner a. a. O., Jahrg. 1934, S. 318/319.

² W. KOCHANOWSKY: Über die Stabilität des Gleichgewichtes und die Knickfestigkeit eines räumlichen Gittermastes. Inauguraldissertation. Berlin, 1933.

Diagonal- und Querstäbe als untereinander gleich voraus. Jeder Gurt wird durch die axiale Druckkraft $\frac{P}{4}$ beansprucht, so daß der gesamte Mast dem Druck P ausgesetzt ist. Die Gurte beziffern wir mit $\mu = 1, 2, 3, 4$, die Höhen der Knoten mit $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$, so daß jeder Knoten durch zwei Nummern (μ, ν) festgelegt erscheint. — Die hiermit dargestellte Gleichgewichtsfigur beziehen wir auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem u, v, w , die Gurtstäbe besitzen die Richtung der u -Achse, während die v - und die w -Achse parallel zu den Trägheitshauptachsen der Gurtquerschnitte verlaufen. Die Seitenflächen des Mastes sind parallel der u, v - bzw. u, w -Ebene.

Die in der Rechnung auftretenden Konstanten haben die folgende Benennung: F, E, l Querschnittsfläche, Elastizitätszahl und Länge der Gurtstäbe; F', E', l' entsprechende Werte der Diagonalstäbe; F'', E'', h entsprechende Werte der Querstäbe; I_w, I_v Hauptträgheitsmomente der Gurtquerschnitte; α (spitzer) Winkel zwischen den Gurt- und Diagonalstäben in der Ausgangslage; $L = n \cdot l$ Gesamtlänge des Mastes.

Wir erteilen jedem Knoten — soweit es die Auflagerbeschränkungen gestatten — unendlich kleine virtuelle Verrückungen $u_{\mu, \nu}, v_{\mu, \nu}, w_{\mu, \nu}$ parallel den Koordinatenachsen und unendlich kleine Drehungen $\varphi_{\mu, \nu}$ und $\psi_{\mu, \nu}$ um Achsen in der v - bzw. w -Richtung. Hierdurch werden im Gurtstab

$\mu, \nu - \mu, \nu + 1$ eine axiale, unendlich kleine Zusatzkraft $S_{\mu, \nu+1}^{\mu, \nu}$ — als Zugkraft positiv gerechnet — und unendlich kleine Querkräfte $Q_{\mu, \nu+1}^{\mu, \nu}$ in der v -Richtung und $R_{\mu, \nu+1}^{\mu, \nu}$ in der w -Richtung sowie Biegemomente entstehen; wegen des Momentengleichgewichtes genügt es, in jedem Knoten μ, ν nur ein Moment mit den Komponenten $M_{\mu, \nu}$ bzw. $N_{\mu, \nu}$ einzuführen. Da die Füllungsstäbe als Fachwerkstäbe gelenkig an die Gurte angeschlossen sind, treten in den Gurtstäben keine Torsionsmomente auf, und es ist nicht notwendig, eine Drehung der Knoten um eine Achse in der u -Richtung anzunehmen. Aus demselben Grund wirken in den Gitterstäben keine Querkräfte und Momente; die unendlich kleine Zusatzkraft in dem Diagonalstab $\mu, \nu - \mu + 1, \nu + 1$ bezeichnen wir mit $T_{\mu+1, \nu+1}^{\mu, \nu}$, in dem Querstab $\mu, \nu - \mu + 1, \nu$ mit $U_{\mu+1, \nu}^{\mu, \nu}$ (Abb. 118).

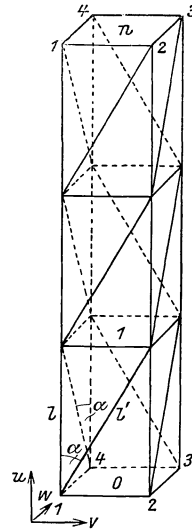
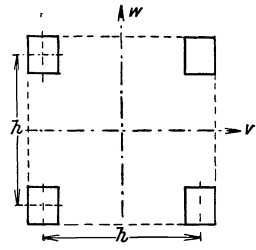


Abb. 117.

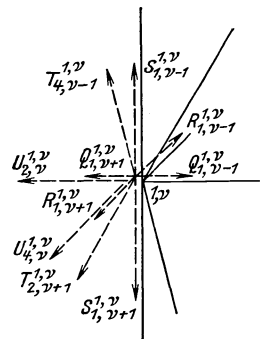


Abb. 118.

In der durch die Verrückungen und Drehungen entstandenen verzerrten Lage des Mastes müssen sich bei einer Gleichgewichtslage die zusätzlichen Spannkkräfte und Querkkräfte der Gurtstäbe sowie die Spannkkräfte der Gitterstäbe das Gleichgewicht halten; damit folgen die Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten ν :

$$\begin{aligned}
 S_{1,\nu-1}^{1,\nu} - S_{1,\nu+1}^{1,\nu} - (T_{2,\nu+1}^{1,\nu} - T_{4,\nu-1}^{1,\nu}) \cdot \cos \alpha &= 0, \\
 Q_{1,\nu-1}^{1,\nu} - Q_{1,\nu+1}^{1,\nu} - U_{2,\nu}^{1,\nu} - T_{2,\nu+1}^{1,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 R_{1,\nu-1}^{1,\nu} - R_{1,\nu+1}^{1,\nu} - U_{4,\nu}^{1,\nu} - T_{4,\nu-1}^{1,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 S_{2,\nu-1}^{2,\nu} - S_{2,\nu+1}^{2,\nu} - (T_{3,\nu+1}^{2,\nu} - T_{1,\nu-1}^{2,\nu}) \cdot \cos \alpha &= 0, \\
 Q_{2,\nu-1}^{2,\nu} - Q_{2,\nu+1}^{2,\nu} + U_{1,\nu}^{2,\nu} + T_{1,\nu-1}^{2,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 R_{2,\nu-1}^{2,\nu} - R_{2,\nu+1}^{2,\nu} - U_{3,\nu}^{2,\nu} - T_{3,\nu+1}^{2,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 S_{3,\nu-1}^{3,\nu} - S_{3,\nu+1}^{3,\nu} - (T_{4,\nu+1}^{3,\nu} - T_{2,\nu-1}^{3,\nu}) \cdot \cos \alpha &= 0, \\
 Q_{3,\nu-1}^{3,\nu} - Q_{3,\nu+1}^{3,\nu} + U_{4,\nu}^{3,\nu} + T_{4,\nu+1}^{3,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 R_{3,\nu-1}^{3,\nu} - R_{3,\nu+1}^{3,\nu} + U_{2,\nu}^{3,\nu} + T_{2,\nu-1}^{3,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 S_{4,\nu-1}^{4,\nu} - S_{4,\nu+1}^{4,\nu} - (T_{1,\nu+1}^{4,\nu} - T_{3,\nu-1}^{4,\nu}) \cdot \cos \alpha &= 0, \\
 Q_{4,\nu-1}^{4,\nu} - Q_{4,\nu+1}^{4,\nu} - U_{3,\nu}^{4,\nu} - T_{3,\nu-1}^{4,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0, \\
 R_{4,\nu-1}^{4,\nu} - R_{4,\nu+1}^{4,\nu} + U_{1,\nu}^{4,\nu} + T_{1,\nu+1}^{4,\nu} \cdot \sin \alpha &= 0.
 \end{aligned}$$

Ferner gelten für alle Gurt- und Gitterstäbe die Dehnungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 u_{1,\nu+1} - u_{1,\nu} &= \frac{l}{E'F} \cdot S_{1,\nu+1}^{1,\nu}, \\
 (u_{2,\nu+1} - u_{1,\nu}) \cdot \cos \alpha + (v_{2,\nu+1} - v_{1,\nu}) \cdot \sin \alpha &= \frac{l'}{E'F'} \cdot T_{2,\nu+1}^{1,\nu}, \\
 v_{2,\nu} - v_{1,\nu} &= \frac{h}{E''F''} \cdot U_{2,\nu}^{1,\nu}, \\
 u_{2,\nu+1} - u_{2,\nu} &= \frac{l}{E'F} \cdot S_{2,\nu+1}^{2,\nu}, \\
 (u_{3,\nu+1} - u_{2,\nu}) \cdot \cos \alpha + (w_{3,\nu+1} - w_{2,\nu}) \cdot \sin \alpha &= \frac{l'}{E'F'} \cdot T_{3,\nu+1}^{2,\nu}, \\
 w_{3,\nu} - w_{2,\nu} &= \frac{h}{E''F''} \cdot U_{3,\nu}^{2,\nu}, \\
 u_{3,\nu+1} - u_{3,\nu} &= \frac{l}{E'F} \cdot S_{3,\nu+1}^{3,\nu}, \\
 (u_{4,\nu+1} - u_{3,\nu}) \cdot \cos \alpha - (v_{4,\nu+1} - v_{3,\nu}) \cdot \sin \alpha &= \frac{l'}{E'F'} \cdot T_{4,\nu+1}^{3,\nu}, \\
 -v_{4,\nu} + v_{3,\nu} &= \frac{h}{E''F''} \cdot U_{4,\nu}^{3,\nu}, \\
 u_{4,\nu+1} - u_{4,\nu} &= \frac{l}{E'F} \cdot S_{4,\nu+1}^{4,\nu}, \\
 (u_{1,\nu+1} - u_{4,\nu}) \cdot \cos \alpha - (w_{1,\nu+1} - w_{4,\nu}) \cdot \sin \alpha &= \frac{l'}{E'F'} \cdot T_{1,\nu+1}^{4,\nu}, \\
 -w_{1,\nu} + w_{4,\nu} &= \frac{h}{E''F''} \cdot U_{1,\nu}^{4,\nu}.
 \end{aligned}$$

Für die Gurtstäbe bestehen noch die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_{\mu, v+1} - M_{\mu, v} + l \cdot Q_{\mu, v+1}^{\mu, v} + \frac{P}{4} (v_{\mu, v+1} - v_{\mu, v}) = 0,$$

$$N_{\mu, v+1} - N_{\mu, v} + l \cdot R_{\mu, v+1}^{\mu, v} + \frac{P}{4} (w_{\mu, v+1} - w_{\mu, v}) = 0$$

und die Hauptgleichungen

$$\begin{aligned} \psi_{\mu, v+1} - \psi_{\mu, v} &= \frac{l}{EI_w} (M_{\mu, v+1} + M_{\mu, v}) \cdot t(z_w), \\ \frac{2}{l} (v_{\mu, v+1} - v_{\mu, v}) - (\psi_{\mu, v+1} + \psi_{\mu, v}) &= \frac{l}{EI_w} (M_{\mu, v+1} - M_{\mu, v}) \cdot s(z_w), \\ \varphi_{\mu, v+1} - \varphi_{\mu, v} &= \frac{l}{EI_v} (N_{\mu, v+1} + N_{\mu, v}) \cdot t(z_v), \\ \frac{2}{l} (w_{\mu, v+1} - w_{\mu, v}) - (\varphi_{\mu, v+1} + \varphi_{\mu, v}) &= \frac{l}{EI_v} (N_{\mu, v+1} - N_{\mu, v}) \cdot s(z_v). \end{aligned}$$

Dabei sind die Abkürzungen verwendet:

$$z^2 = \frac{Pl^2}{4EI}, \quad t(z) = \frac{1 - \cos z}{z \cdot \sin z}, \quad s(z) = \frac{1 + \cos z}{z \cdot \sin z} - \frac{2}{z^2}.$$

B. Ergebnisse der Berechnung.

Aus den angeschriebenen Gleichungen können alle Unbekannten bis auf die Horizontalverschiebungen v, w und die Momente M, N eliminiert werden, und man erhält ein System von 16 linearen homogenen Differenzgleichungen für die 16 Reihen von Variablen $v_{\mu, v}, w_{\mu, v}, M_{\mu, v}$ und $N_{\mu, v}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Wir teilen nur die Ergebnisse der Berechnung mit.

a) Sehr schwache Vergitterung.

Im Falle sehr schwacher Diagonalstäbe ($F' \rightarrow 0$) und sehr schwacher Querstäbe ($F'' \rightarrow 0$) ist die Knicklast

$$P_k = 4\pi^2 \frac{EI_w}{L^2} \text{ bzw. } P_k = 4\pi^2 \frac{EI_v}{L^2}.$$

Der kleinere dieser beiden Werte ist maßgebend und zeigt auch die Richtung an, nach welcher der Mast ausbiegt. Der kritische Wert ist, wie bei einer sehr schwachen Vergitterung vorausszusehen war, die EULERSche Knicklast für die einzelnen Gurte.

b) Sehr starke Vergitterung bei großer Felderzahl.

Im Falle sehr starker Gitterstäbe ($\frac{1}{F'} \rightarrow 0, \frac{1}{F''} \rightarrow 0$) gelten bei großer Felderzahl in *erster Näherung* die EULERSchen Knicklasten

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}_w}{L^2} \text{ bzw. } P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}_v}{L^2},$$

wobei $\bar{I}_w = 4 \left(I_w + F \frac{h^2}{4} \right)$ und $\bar{I}_v = 4 \left(I_v + F \frac{h^2}{4} \right)$ die Trägheitsmomente des Gesamtquerschnittes vom Mast sind.

In zweiter Näherung kommt man zum Resultat

$$P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}_w}{L^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{n^2} \frac{F h^2}{\bar{I}_w} \right) \text{ bzw. } P_k = \pi^2 \frac{E \bar{I}_v}{L^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{n^2} \frac{F h^2}{\bar{I}_v} \right).$$

Das zweite Glied in der Klammer zeigt die Abminderung der Tragkraft gegenüber der vollwandigen quadratischen Säule. Der kleinere Wert P_k stellt die maßgebende Knicklast vor.

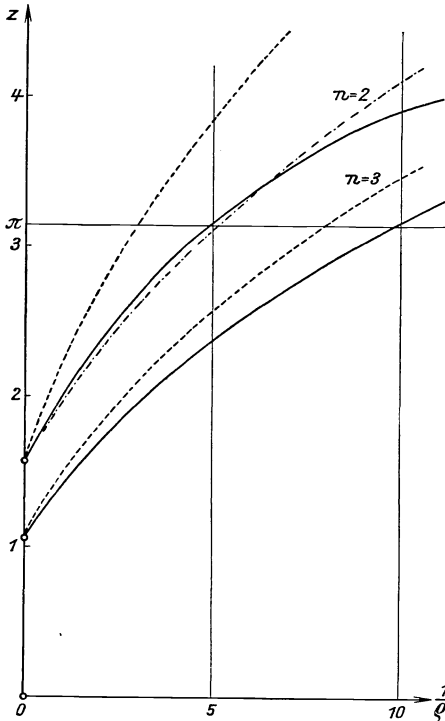


Abb. 119.

= zirka 5 ist $z = \pi$. Bei Werten $\frac{1}{q}$, die größer als zirka 5 sind, bleibt also die Kräfteverteilung nur so lange stabil, bis die Grenze der Tragfähigkeit der einzelnen Gurtstäbe ($z = \pi$) erreicht wird. Die strichlierte Linie gibt das Resultat von b) in der ersten Näherung, die strichpunktierte in der zweiten Näherung.

Bei der Felderzahl $n = 3$ ist der Zusammenhang zwischen z und $\frac{1}{q}$ auch in der Abb. 119 dargestellt. Für $\frac{1}{q} = 0$ ist $z = \frac{\pi}{3}$ und von $\frac{1}{q} =$ = zirka 10 ab wird das Ausknicken der einzelnen Gurtstäbe maßgebend. Die strichlierte Kurve ist das Ergebnis der ersten Näherung von b); die zweite Näherung von b) deckt sich in dem betrachteten Gebiet bereits mit dem exakten Resultat.

c) Sehr starke Vergitterung bei beliebiger Felderzahl.

Eine Auflösung der Differenzgleichungen, die bei b) noch möglich war, ist bei beliebiger Felderzahl praktisch nicht mehr durchzuführen. Die Fälle für die Felderzahlen $n = 2$ und $n = 3$ lassen sich jedoch unmittelbar ausrechnen und damit Schlüsse auf die übrigen endlichen n -Werte ziehen. Wir schreiben die Knicklast hierbei in der Form an

$$P_k = z_w^2 \cdot \frac{4 E I_w}{l^2}$$

bzw.

$$P_k = z_v^2 \cdot \frac{4 E I_v}{l^2},$$

wobei z ein Koeffizient ist, der von den Abmessungen des Stabes abhängt.

Für den Fall $n = 2$ zeigt die Abb. 119 in einem rechtwinkligen Achsenkreuz den Parameter z als Funktion von $\frac{1}{q} = \frac{F h^2}{4 I}$. Für $\frac{1}{q} = 0$ ist $z = \frac{\pi}{2}$ und bei $\frac{1}{q} =$

Der Vergleich der genauen Ergebnisse mit dem Fall einer sehr großen Felderzahl zeigt, daß wir für beliebige Werte n , die größer als 3 sind, ausreichend genau die Formeln von b) benützen dürfen; von etwa $n = 5$ ab stimmt die zweite Näherung schon mit der ersten praktisch überein.¹

§ 24. Weitere Fragen der Stabilitätstheorie.

84. Exzentrische Belastung, Anfangsbiegung.²

A. *Das Fachwerk.* — Die Theorie der reinen Fachwerknickung ist auf jeden Gleichgewichtszustand eines idealen Fachwerkes anwendbar. Damit sie zu richtigen und widerspruchsfreien Ergebnissen führt, muß

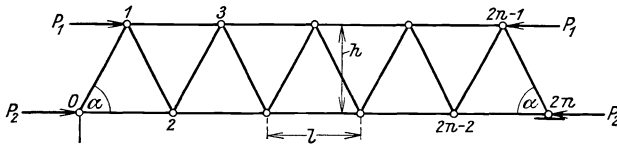


Abb. 120.

der Betrachtung wirklich ein Gleichgewichtszustand unterlegt werden, d. h. es müssen für ihn die Gleichungen von Pkt. 55 erfüllt sein. Die am κ -ten Knoten angreifende äußere Kraft mit den rechtwinkligen Komponenten X_κ, Y_κ ist mit den Stabkräften S durch die Gleichungen

$$\sum_i S_{i\kappa} \cdot \cos \alpha_{i\kappa} = X_\kappa, \quad \sum_i S_{i\kappa} \cdot \sin \alpha_{i\kappa} = Y_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots, k \quad (a)$$

verbunden. Für die Stabkraft S gilt die Gleichung $S = E F \frac{a-l}{l}$.

Hierbei ist l die natürliche Stablänge in der Lage, bei der weder äußere noch innere Kräfte wirksam sind, und a die Stablänge im verzerrten System. Wird nun beispielsweise der Gitterträger der Abb. 120 in den beiden Gurten ungleich belastet,

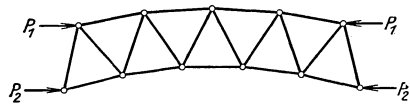


Abb. 121.

etwa im Obergurt mit $P_1 < \frac{P}{2}$, im

Untergurt mit $P_2 > \frac{P}{2}$, so liefert die übliche Art der Spannkraftberechnung

das Ergebnis, daß alle Obergurtstäbe die Stabkraft P_1 , die des Untergurtes P_2 als Druck übernehmen, während die Vergitterung spannungslos bleibt. Bestimmt man nach den üblichen Methoden die Formänderung des Fachwerkes, so erhält man ein Bild, wie es die Abb. 121

¹ Eine Näherungsberechnung mit Hilfe einer „Hintereinanderschaltung von Knicksteifigkeiten“ gibt L. FÖPPL: Über das Ausknicken von Gittermasten, insbesondere von hohen Funktürmen. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 1—10. 1933.

² R. v. MISES: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 416f. 1923.

übertrieben andeutet. Die Gurte sind verformt, denn bei den ungleichen Längenänderungen im Ober- und Untergurt könnten sonst die Diagonalen nicht ohne Dehnung, also auch nicht spannungslos sein. Für das gezeichnete verformte Fachwerk besteht aber kein Gleichgewicht bei spannungslosen Gitterstäben und konstanten Gurtkräften. Die Gl. (a), in denen die α die Stabwinkel nach der Formänderung vorstellen, sind jetzt nicht erfüllt. Man könnte versuchen, die Spannkraftberechnung zu wiederholen, damit neue Verzerrungen zu rechnen usf., um etwa auf diese Weise zu einer Lösung der Gl. (a) zu kommen. In der Regel wird es aber genügen, in der folgenden Art vorzugehen.

Man setzt die Verrückungen, welche die einzelnen Knotenpunkte in der Abb. 121 gegenüber dem Zustand der geradlinigen Zusammendrückung erfahren, als kleine Größen voraus. Die Spannungen werden für den verzerrten Zustand berechnet und dann die zusätzlichen Stabkräfte, die zum System $-P_1$ oben, $-P_2$ unten, 0 in den Diagonalen hinzutreten, linear und homogen durch die Verrückungen ausgedrückt. Die zugehörigen Längenänderungen der Stäbe sind ebenfalls linear, aber nicht homogen durch die Verrückungen darstellbar; wenn nämlich alle jetzt betrachteten zusätzlichen Verschiebungen gleich Null sind, so haben doch die Gitterstäbe nicht ihre natürliche Länge. Schreibt man für jeden Stab die Gl. (a) an, so erhält man bei m Bewegungsbeschränkungen ein System von $2k - m$ linearen, nicht homogenen Gleichungen für die $2k - m$ Verrückungen. Ist die Determinante dieses Gleichungssystems nahe Null, so werden die Verrückungen sehr groß, im Gegensatz zu der Annahme von kleinen Werten; man muß daraus schließen, daß dann ein Gleichgewichtszustand mit kleinen Ausbiegungen nicht vorhanden ist. Von Wichtigkeit ist die Beantwortung der Frage, wann der kritische Fall eintritt, daß sich die Determinante des Gleichungssystems der Null nähert. Nun kommt es bei der Determinante auf die absoluten Glieder gar nicht an, und das sind hier die Längenänderungen der Gitterstäbe, die bei Wegfall jeder Ausbiegung nur durch die ungleichen Verkürzungen des Ober- und Untergurtes entstehen. Das Fortlassen dieser Glieder bedeutet daher soviel wie die Voraussetzung, daß die Gitterstäbe erst nach dem Aufbringen der Last und nach Bildung der Gurtverkürzungen (spannungslos) montiert werden. Das derart homogen gemachte Gleichungssystem ist aber das System

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,z} \left[\frac{EF}{l} (a - l)^2 \right]_{i,z} - \sum_z (X_z x_z + Y_z y_z) \quad (b)$$

von Pkt. 56 für den Gleichgewichtszustand eines Fachwerkes, das sich von dem ursprünglich gegebenen in der natürlichen Länge der Gitterstäbe unterscheidet; der Zustand weist geradlinig verkürzte Gurte mit den Druckkräften P_1 , P_2 und spannungslose Gitterstäbe auf. Die Stabilitätsbedingung für diese Gleichgewichtslage gibt die Nullstelle der Determinante, also die kritischen Belastungswerte, bei denen das wirklich gegebene Fachwerk kein Gleichgewicht mit kleinen Verrückungen der Knotenpunkte besitzt. Das Ergebnis dieser Überlegungen können wir

in den folgenden Satz fassen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf statisch bestimmte Fälle beschränken.

Ist die Belastung eines Fachwerkes so beschaffen, daß die in üblicher Weise (aus der Konfiguration der natürlichen Längen) berechneten Stabkräfte kein Gleichgewichtssystem mehr bilden, sobald man die aus den berechneten Stabkräften folgenden Verzerrungen berücksichtigt, so kann es vorkommen, daß für gewisse Werte der Belastung die Formänderungen außerordentlich rasch wachsen; nimmt man alle Verzerrungen von vornherein als klein an und macht den Ansatz demgemäß linear, so ergibt er für diese kritischen Belastungswerte keine endliche Lösung. Die kritischen Lastwerte sind dabei identisch mit der Stabilitätsgrenze für einen Gleichgewichtszustand, den man mit den ursprünglich berechneten Stabkräften dadurch erhält, daß man die natürlichen Stablängen des gegebenen Fachwerkes passend abändert.

In jedem konkreten Fall bestehen verschiedene Möglichkeiten, den Gleichgewichtszustand zu definieren, dessen Stabilitätsgrenze die kritischen Belastungen liefert. Bei dem mit P_1 und P_2 beanspruchten Gitterträger darf man entweder wie vor annehmen, die Längen der Gitterstäbe seien erst nach der Verkürzung der Gurte festgestellt worden, oder die Gurtstäbe hätten vor Aufbringen der Last oben und unten verschiedene Längen gehabt. Das Resultat muß für beide Annahmen mit der Näherung übereinstimmen, mit der die elastischen Dehnungen gegenüber den ursprünglichen Längen vernachlässigt werden.

Außer der Kenntnis der kritischen Lastwerte kann mitunter die genauere Spannkraftermittlung, unter Berücksichtigen der Formänderungen, gefordert werden. Sie wird geleistet durch die Auflösung des vor angegebenen nichthomogenen linearen Gleichungssystems, dessen gleich Null gesetzte Determinante zu den kritischen Werten führt; die Gleichungen selbst sind wesentlich die Beziehungen (b), nur daß bei den δa auf die absoluten, von den δx , δy unabhängigen Glieder zu achten ist. Die ganze Rechnung entspricht im Falle des Vollwandstabes der üblichen Untersuchung „auf exzentrischen Druck“ unter Benützung der linearen Biegleichung. Die vollständige Lösung des Systems (a), wie wir sie zuerst andeuteten, würde der Verwendung der genaueren Differentialgleichung der Biegung entsprechen. Daß der Näherungsweg in der Regel ausreichende Ergebnisse liefert, liegt daran, daß man es mit Materialien von großer Elastizitätszahl E zu tun hat, bei denen unter normalen Verhältnissen zu endlichen Kräften sehr kleine Verformungen gehören.

B. Das Rahmentragwerk. — Auf Rahmentragwerke sind die für Fachwerke angestellten Überlegungen sinngemäß zu übertragen. Dabei beschränken wir uns wieder auf Belastungen, die in gewissem Sinn biegefreien Gleichgewichtszuständen entsprechen. Ein Beispiel hierzu ist der in Pkt. 68 besprochene Rechteckrahmen mit einseitiger Belastung, oder auch ein Rahmenstab der Abb. 101, wenn beide Gurtstäbe ungleichmäßig gedrückt sind. Mit Fortlassen der Längenänderungen ist der Zustand jedesmal ein biegefreier. Bei den Vernachlässigungen, von denen

hier die Rede ist, handelt es sich aber um die Dehnungen oder Verkürzungen, welche von den ursprünglich berechneten, endlichen Stabkräften herrühren, und nicht um die beim Knickvorgang auftretenden, verschwindend kleinen Längenänderungen. Wir können hier den allgemeinen Satz formulieren:

Ist ein Rahmentragwerk derart belastet, daß ein biegefreier Gleichgewichtszustand dann und nur dann möglich ist, wenn von den endlichen Längenänderungen der Stäbe abgesehen wird, so tritt ein Gleichgewicht mit Ausbiegungen, ein und diese können bei bestimmten Belastungswerten außerordentlich stark wachsen; die kritischen Belastungen sind identisch mit der Stabilitätsgrenze für den biegefreien Zustand, den man durch Außerachtlassen der endlichen Längenänderungen erhält.

85. Bemerkungen zum Kirchhoffschen Eindeutigkeitsatz.¹

Wir greifen den in Pkt. 14 besprochenen KIRCHHOFFSchen Satz über die Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtes nochmals auf und geben ihm eine vervollständigte Formulierung, die weniger praktische Folgerungen als eine begriffliche Klärung zum Ziele hat.

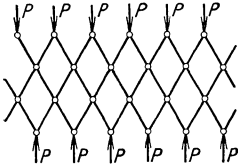


Abb. 122.

Der Ansatz, den wir in Pkt. 55 für die Stabilitätsuntersuchung am idealen Fachwerk eingeführt haben, gestattet uns, nach einer kleinen Umdeutung weit über das ursprüngliche Anwendungsgebiet hinaus zu entscheidenden Schlüssen für beliebig elastische Körper (elastische

Kontinua) zu gelangen. Wir ändern jetzt die Vorstellung dahin ab, daß wir statt von einem Fachwerk mit idealen Gelenken von einem elastischen Punkthaufen sprechen, also von einem System von k Punkten, zwischen denen Anziehungs- und Abstoßungskräfte proportional den Abstandsänderungen gegenüber der Ausgangslage wirken und das m Bewegungsbeschränkungen unterworfen ist. Um ein bestimmtes Bild vor uns zu haben, können wir etwa die Punkte in der Anordnung eines regelmäßigen Gitters annehmen, Abb. 122; die Verbindungslinien zwischen den Punkten bedeuten dabei keine materiellen Stabverbindungen, sondern geben nur die Wirkungslinien der elastischen Kräfte an. Denken wir uns im Ausdruck der Gesamtenergie von Pkt. 56

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,z} \left[\frac{EF}{l} (a-l)^2 \right]_{i,z} - \sum_z (X_z x_z + Y_z y_z) \quad (1)$$

für EF eine vorbestimmte Konstante eingesetzt, so stellt U auch für unser Punktsystem den richtigen Wert der potentiellen Energie dar, wofern wir unter l den ursprünglichen („natürlichen“) Abstand der Punkte, unter a den Abstand in der eben betrachteten Gleichgewichtslage verstehen. Die Gleichungen von Pkt. 55

¹ R. v. MISÈS: Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 418—421. 1923.

$$\sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \alpha \right]_{ix} - X_x = 0, \quad \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \sin \alpha \right]_{ix} - Y_x = 0 \quad (2)$$

bilden dann die expliziten Gleichgewichtsbedingungen, und die Determinante der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_i \left[-EF \frac{a-l}{l} \sin \alpha \cdot \delta \alpha + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \cos \alpha \right]_{ix} &= 0, \\ \sum_i \left[EF \frac{a-l}{l} \cos \alpha \cdot \delta \alpha + EF \frac{\delta a}{l} \cdot \sin \alpha \right]_{ix} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

liefert die Stabilitätsbedingung für den elastischen Punkthaufen. Die Behauptung KIRCHHOFFS von der Eindeutigkeit des Gleichgewichtes läuft darauf hinaus, daß es bei bekannten Kräften X , Y für die Entfernungen a und Winkel α nur ein Wertsystem geben soll, das die Gl. (2) erfüllt. Es ist klar, daß dies sicher dann nicht mehr zutrifft, wenn für ein Wertsystem a, α die Gl. (3) eine nicht verschwindende Lösung besitzen; denn das Vorhandensein einer solchen Lösung besagt, wie aus der Ableitung von (3) hervorgeht, daß in unmittelbarer Nähe des betreffenden Wertsystems a, α ein zweites, die Gl. (2) befriedigendes Wertsystem vorhanden ist. Da sich in den ausgeführten Beispielen wirklich gezeigt hat, daß die Determinante der Gl. (3) für bestimmte Belastungsfälle verschwindet, so ist — zunächst für den elastischen Punkthaufen aus endlich vielen Punkten — der Eindeutigkeitsatz widerlegt.

Wie überträgt sich nun der Gedankengang des KIRCHHOFFSchen Beweises auf unseren Fall mit endlich vielen Punkten? Der Beweis benützt in doppelter Weise die Tatsache, daß die elastischen Verschiebungen klein, also die $a - l$ klein gegen l seien. Erstens werden, wenn wir die Übertragung gleich vornehmen, für die Winkel α in (2) ohne weiteres die Werte eingestellt, die den Neigungen der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten vor der Verzerrung durch die Kräfte X , Y entsprechen. Zweitens werden die Längenänderungen $a - l$ durch die $2k - m$ Verschiebungskomponenten der Punkte, unter Vernachlässigen aller Glieder höherer Ordnung, linear und homogen ausgedrückt. (Auch die Ersetzung der richtigen a durch ihre Werte vor der Formänderung bedeutet nur eine folgerichtige Vernachlässigung solcher Glieder.) Nach dieser Vereinfachung bildet (2) ein System linearer, nicht homogener Gleichungen, dessen Lösung, wenn sie für beliebige X , Y überhaupt möglich ist, gewiß eindeutig sein muß. Unmöglichkeit der allgemeinen Lösung besteht nur in dem sogenannten „Ausnahmefall“ der Fachwerktheorie, der in keinem der Beispiele vorliegt, die wir bei der reinen Fachwerkknickung (in § 18) untersucht haben, und den wir mit Sicherheit ausschließen, wenn wir ein regelmäßiges Punktgitter wie Abb. 122 voraussetzen. Also haben die Gl. (2) immer eine und nur eine Lösung! Bei KIRCHHOFF sieht die Sache nur deshalb etwas anders aus, weil im Falle des Kontinuums die linear gemachten Gleichgewichtsbedingungen ein System linearer partieller Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten darstellen.

Von allem nebensächlichen Beiwerk entkleidet, liegt folgender Fehlschluß vor. Es wird bewiesen: Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen durch Vernachlässigen höherer Potenzen der Verschiebungen zu linearen Gleichungen macht, so haben diese immer eine und nur eine Lösung. Das aber, was zu beweisen wäre, wenn man die „Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtsproblems“ mit Recht behaupten wollte, ist: Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen in der genannten Weise zu linearen Gleichungen macht, so geht dabei keine Lösung der ursprünglich nicht linearen Gleichungen verloren. Daß sich dieser Beweis nicht erbringen läßt, zeigen die Beispiele, in denen eine Stabilitätsgrenze vorhanden ist. Im übrigen ist die Behandlung, die KIRCHHOFF mit den elastischen Gleichgewichtsbedingungen vornimmt, inhaltlich gleichwertig mit dem — völlig zutreffenden — Verfahren der üblichen Fachwerkberechnung, wobei man ja auch zu einer eindeutigen Lösung des Spannungsproblems gelangt. Aber man darf aus diesem Vorgang, der an seinem Platze berechtigt ist, nicht Schlüsse ziehen, für die seine Grundlagen nicht ausreichen.

Fragen wir nun nach dem offenbar vorhandenen richtigen Kern in dem KIRCHHOFFSchen Satz, und suchen wir eine widerspruchsreife Aussage über Ein- oder Mehrdeutigkeit des Gleichgewichtsproblems zu finden, so müssen wir vor allem auf unbestimmte Näherungsbegriffe, wie „kleine“ Verschiebungen, „große“ Elastizitätszahlen, verzichten. Zunächst erkennt man, daß der „natürliche“ oder kräftefreie Gleichgewichtszustand unseres Punkthaufens ein stabiler Zustand ist. Denn sobald alle X , Y verschwinden, kann U nach (1) niemals negativ werden, und der Wert $U = 0$, den das Potential für $a = l$ erreicht, stellt wirklich ein Minimum dar. Nun wissen wir auch, daß instabile Zustände von stabilen immer durch Nullstellen der Determinante von (3) getrennt werden. Denken wir uns jetzt die äußeren Belastungen X , Y bis auf einen gemeinsamen Multiplikator λ gegeben und dieses λ alle positiven und negativen Werte durchlaufend. Setzen wir die Knickgleichung an, d. h. die Determinante von (3) gleich Null, so enthält diese Gleichung den Parameter λ , weil die $a - l$, die in (3) auftreten, ebenso wie die α von den äußeren Kräften abhängen. Diese Gleichung wird nun für $\lambda = 0$ nicht erfüllt; das ist der Hauptteil dessen, was an dem KIRCHHOFFSchen Satz überhaupt zu retten ist. Wäre $\lambda = 0$ eine Wurzel der Knickgleichung, so könnte nicht das Potential U , was eben bemerkt wurde, an dieser Stelle ein wirkliches Minimum sein. Wir folgern nun weiter: Wenn die Gleichung mit $\lambda = 0$ nicht befriedigt wird, so gibt es eine Wurzel λ_0 vom kleinsten absoluten Betrag, und für alle λ -Werte, die kleiner als λ_0 sind, ist das Gleichgewicht stabil. So gelangen wir zu einem Ergebnis, das den richtigen Teil der KIRCHHOFFSchen Aussage einschließt und gleichzeitig der Möglichkeit des Stabilitätswechsels, der Verzweigungsstellen, Rechnung trägt.

Sind die Belastungen, die an dem elastischen Punktsystem angreifen, bis auf einen Zahlenfaktor λ bestimmt, so gibt es einen von Null verschiedenen Betrag λ_0 (der auch unendlich sein kann), so daß für alle λ -Werte,

die absolut genommen kleiner als λ_0 sind, eindeutige, stabile Gleichgewichtslagen bestehen, die sich, wenn λ gegen Null geht, stetig an den natürlichen Zustand anschließen; für λ -Werte, die über λ_0 liegen, kann das Gleichgewichtsproblem mehrere Lösungen besitzen.

Es ist anschaulich klar, daß der Wert λ_0 von der Gestalt des Körpers, der Art der Belastung und der Größe der Elastizitätszahl in der Weise abhängen wird, daß schlankeren Körpern und größerer Härte kleinere λ_0 entsprechen usf. Beachtet man, daß die in der Natur vorkommenden Stoffe alle nur begrenzt elastisch sind, d. h. bei Anwachsen der Spannungen in den Fließzustand geraten oder zu Bruch gehen, so wird man verstehen, wie es möglich war, den Eindeutigkeitssatz für Körper von „allseits gleichen Dimensionen“ und „großer“ Elastizitätszahl für wahr anzunehmen.

Die letzten Betrachtungen waren an ein mechanisches System angeknüpft, das aus einer endlichen Anzahl in elastischer Wechselwirkung befindlicher Punkte gebildet ist. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß alle Schlußfolgerungen auch für beliebige, kontinuierlich ausgedehnte Körper Geltung behalten. Wenn wir zunächst wie bisher von einem Dreiecknetz (im Raum Tetraedernetz) nach Abb. 122 ausgehen, können wir die Maschenweite des Gitters mehr und mehr verkleinern und dabei die Punktezahl k entsprechend vergrößern. Geht man zur Grenze über, so nimmt der erste, elastische Teil des Potentials U die Form eines über den ganzen Körper erstreckten Raumintegrals an, und aus dem einfachen Minimumproblem, das die Gleichgewichtsbedingungen lieferte, wird ein Variationsproblem. Die Gl. (2) werden zu Differentialgleichungen, und die Gl. (3) entsprechen der zweiten Variation des Integrals U . Es mag dahingestellt bleiben, ob man auf diesem Wege, d. h. ohne Einführung anderer Kräfte als der in den Verbindungsgeraden der Einzelpunkte wirkenden, wirklich zu den Ansätzen gelangt, die man für die Untersuchung elastischer Körper zu verwenden pflegt. Sicher ist, daß die für unsere Schlußfolgerungen entscheidenden Eigenschaften von U — bei Abwesenheit von äußeren Kräften nur positiver Werte fähig zu sein und dabei den Charakter einer positiven quadratischen Form aufzuweisen — bei jeder Art von Ansatz für einfach zusammenhängende Kontinua vorhanden sein müssen. Man weiß auch, daß der Übergang vom algebraischen Problem mit endlich vielen Veränderlichen zum transzendenten mit unendlich vielen Freiheitsgraden in aller Strenge ausgeführt werden kann und bei Beschränkung auf die physikalisch zulässige Allgemeinheit zu den erwarteten Ergebnissen führt. Wenn wir früher in den Beispielen des Gitterträgers und Rahmenbalkens gesehen haben, wie unsere Stabilitätsbedingung bei dichter werdendem Maschennetz in die EULERSche Formel übergeht, so äußert sich darin nur eine, im ganzen Verlauf der Rechnung zu verfolgende, besondere Durchführung eines derartigen Grenzüberganges. Wir dürfen somit schließen: Der vor für das elastische Punktsystem ausgesprochene Satz gilt auch für jeden beliebigen elastischen Körper, der bei Abwesenheit von äußeren Lasten einen eindeutig bestimmten „natürlichen“ Zustand besitzt.

86. Spannkraftermittlung bei Fachwerkträgern unter Berücksichtigen der Formänderung.

a) Wir betrachten den in Pkt. 61 untersuchten ebenen Fachwerkträger mit statisch bestimmter Lagerung und nehmen an, daß der Obergurt mit der Kraft P_1 , der Untergurt mit P_2 gedrückt wird. Die Spannkräfte sollen jetzt mit Berücksichtigen der Formänderung bestimmt werden. In der Abb. 123 ist der verformte Zustand eingezeichnet, bei dem sich die Knoten 1, 2, 3 in der vertikalen Richtung um δy_1 , δy_2 , δy_3 verschieben. Wir lösen das Spannungsproblem für das deformierte Fachwerk und berechnen die Stabkraftzuwächse δS .

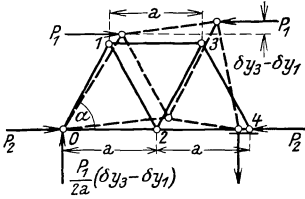


Abb. 123.

In einer analogen Rechnung zu Pkt. 61 bekommen wir für den Knoten 0 aus den Gleichgewichtsbedingungen in vertikaler und horizontaler Richtung

$$\delta S_{0,1} = \frac{P_1}{2a \cdot \sin \alpha} (\delta y_1 + 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 - \delta y_3),$$

$$\delta S_{0,2} = -\frac{P_1}{2a} \cdot \cotg \alpha \cdot (\delta y_1 + 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 - \delta y_3)$$

und ebenso für den Knoten 4

$$\delta S_{3,4} = \frac{P_1}{2a \cdot \sin \alpha} (-\delta y_1 + 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 + \delta y_3),$$

$$\delta S_{2,4} = -\frac{P_1}{2a} \cdot \cotg \alpha \cdot (-\delta y_1 + 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 + \delta y_3).$$

Die vertikale und horizontale Gleichgewichtsbedingung im Schnitt durch die Stäbe 0, 2; 1, 2; 1, 3 ergibt

$$\delta S_{1,2} = \frac{P_1}{2a \cdot \sin \alpha} (\delta y_1 - 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 - \delta y_3),$$

$$\delta S_{1,3} = \frac{P_1}{2a} \cdot \cotg \alpha \cdot 4 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2$$

und daher ist auch

$$\delta S_{2,3} = \frac{P_1}{2a \cdot \sin \alpha} (-\delta y_1 - 2 \frac{P_2}{P_1} \delta y_2 + \delta y_3).$$

Für die Längenänderungen der sieben Stäbe setzen wir nun die absoluten Werte der ersten Näherung ein, d. h. für den Obergurtstab $\delta a_{1,3} = \Delta_1 = \frac{P_1 l}{EF}$, für die Untergurtstäbe $\delta a_{0,2} = \delta a_{2,4} = \Delta_2 = \frac{P_2 l}{EF}$ und für alle Gitterstäbe den Wert Null. Dann lauten die früheren Stabgleichungen

$$0 = \delta x_1 \cdot \cos \alpha + \delta y_1 \cdot \sin \alpha, \quad 0 = \delta x_3 - \delta x_1 - \Delta_1,$$

$$0 = (2\Delta_2 - \delta x_3) \cdot \cos \alpha + \delta y_3 \cdot \sin \alpha,$$

$$0 = (\Delta_2 - \delta x_1) \cdot \cos \alpha - (\delta y_2 - \delta y_1) \cdot \sin \alpha,$$

$$0 = (\delta x_3 - \Delta_2) \cdot \cos \alpha + (\delta y_3 - \delta y_2) \cdot \sin \alpha.$$

Die Auflösung liefert die vertikalen Verschiebungen

$$\delta y_1 = \delta y_3 = \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{2} \cdot \cotg \alpha, \quad \delta y_2 = (\Delta_1 - \Delta_2) \cdot \cotg \alpha$$

und somit sind, wenn man noch $a = l$ nimmt, die Stabkraftzuwächse in erster Näherung

$$\begin{aligned} \delta S_{0,1} = \delta S_{3,4} &= -\delta S_{1,2} = -\delta S_{2,3} = -\frac{P_2(P_2 - P_1)}{EF} \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}, \\ \delta S_{0,2} = \delta S_{2,4} &= \frac{P_2(P_2 - P_1)}{EF} \cdot \cotg^2 \alpha, \\ \delta S_{1,3} &= -\frac{2P_2(P_2 - P_1)}{EF} \cdot \cotg^2 \alpha. \end{aligned}$$

Diese δS treten zu den Stabkräften Null in den Gitterstäben bzw. $-P_1$ und $-P_2$ in den Gurtstäben hinzu und stellen also bei den Diagonalen unmittelbar die Stabkräfte in zweiter Näherung dar.¹

b) Der statisch bestimmte und statisch bestimmt gelagerte Gitterträger der Abb. 89 ist im Obergurt mit der Kraft P_1 , im Untergurt mit P_2 gedrückt. Wir beziffern die Knoten im Untergurt mit $0, 2, \dots, \nu$ bis $2n$, im Obergurt von $1, 3, \dots$ bis $2n - 1$. In einer gleichartigen Rechnung wie in Pkt. 62 gewinnen wir die Stabkraftzuwächse der Gitterstäbe

$$\begin{aligned} \delta S_{\nu, \nu+1} &= \frac{P_1}{a \cdot \sin \alpha} \left[\frac{P_2}{P_1} (v_{\nu+2} - v_\nu) + (v_{\nu+1} - v_{\nu-1}) \right], \\ \delta S_{\nu-1, \nu} &= -\frac{P_1}{a \cdot \sin \alpha} \left[(v_{\nu+1} - v_{\nu-1}) + \frac{P_2}{P_1} (v_\nu - v_{\nu-2}) \right] \end{aligned}$$

und die Stabkraftzuwächse der Gurtstäbe

$$\begin{aligned} \delta S_{\nu-1, \nu+1} &= \frac{P_1}{a} \cdot \cotg \alpha \cdot \left[(v_{\nu+1} + v_{\nu-1}) + \frac{2P_2}{P_1} v_\nu - 2v_1 \right], \\ \delta S_{\nu-2, \nu} &= -\frac{P_1}{a} \cdot \cotg \alpha \cdot \left[\frac{P_2}{P_1} (v_\nu + v_{\nu-2}) + 2v_{\nu-1} - 2v_1 \right]. \end{aligned}$$

Für die Längenänderungen der Stäbe der zwei Dreiecke $\nu - 1, \nu, \nu + 1$ und $\nu, \nu + 1, \nu + 2$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1 l}{EF} = u_{\nu+1} - u_{\nu-1}, \\ 0 &= (u_\nu - u_{\nu-1}) \cdot \cos \alpha - (v_\nu - v_{\nu-1}) \cdot \sin \alpha, \\ 0 &= (u_{\nu+1} - u_\nu) \cdot \cos \alpha + (v_{\nu+1} - v_\nu) \cdot \sin \alpha, \\ \Delta_2 &= \frac{P_2 l}{EF} = u_{\nu+2} - u_\nu, \\ 0 &= (u_{\nu+2} - u_{\nu+1}) \cdot \cos \alpha - (v_{\nu+2} - v_{\nu+1}) \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Aus den ersten drei bzw. den letzten drei Gleichungen folgen die Beziehungen

$$v_{\nu+1} - 2v_\nu + v_{\nu-1} = -\Delta_1 \cdot \cotg \alpha, \quad v_{\nu+2} - 2v_{\nu+1} + v_\nu = \Delta_2 \cdot \cotg \alpha,$$

¹ Vgl. ähnliche Erwägungen bei K. JEŽEK: Die Berechnung von Fachwerken nach einer Theorie zweiter Ordnung. Ingenieur-Archiv, III. Bd., S. 371—393. 1932.

und analog ist

$$v_\nu - 2v_{\nu-1} + v_{\nu-2} = \Delta_2 \cdot \cotg \alpha.$$

Wenn man von den drei eben gefundenen Gleichungen die letzten zwei addiert und die mit zwei multiplizierte erste hinzufügt, so entsteht

$$v_{\nu+2} - 2v_\nu + v_{\nu-2} = 2(\Delta_2 - \Delta_1) \cdot \cotg \alpha, \quad \nu = 2, 4, \dots, 2n - 2,$$

eine Differenzgleichung vierter Ordnung in den Ausbiegungen der Untergurtnoten. Mit Rücksicht auf die Randbedingungen $v_0 = v_{2n} = 0$ schreiben wir als Lösung

$$v_\nu = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{4} \cdot \cotg \alpha \cdot \nu(\nu - 2n)$$

und berechnen dann die Ausbiegungen der Obergurtnoten aus der vor angegebenen Gleichung

$$v_{\nu-1} = \frac{1}{2}(v_\nu + v_{\nu-2}) - \frac{\Delta_2}{2} \cdot \cotg \alpha,$$

wobei wir die Randwerte $v_{-1} = v_1$ bzw. $v_{2n+1} = v_{2n-1}$ beachten.

Nach Einsetzen und Ausrechnen erhalten wir mit $a = l$ die Stabkraftzuwächse für die Gitterstäbe

$$\begin{aligned} \delta S_{\nu, \nu+1} &= -\frac{P_2 - P_1}{EF} \cdot [(P_1 + P_2)(n - \nu) - P_2] \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}, \\ \delta S_{\nu-1, \nu} &= \frac{P_2 - P_1}{EF} \cdot [(P_1 + P_2)(n - \nu) + P_2] \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

bzw. für die Enddiagonalen

$$\delta S_{0,1} = \delta S_{2n-1, 2n} = -\frac{P_2 - P_1}{EF} \cdot P_2(n - 1) \cdot \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}$$

und für die Gurtstäbe

$$\begin{aligned} \delta S_{\nu-1, \nu+1} &= -\frac{P_2 - P_1}{2EF} \cdot [(P_1 + P_2)(2n\nu - \nu^2) - P_1 \cdot 2n] \cdot \cotg^2 \alpha, \\ \delta S_{\nu-2, \nu} &= \frac{P_2 - P_1}{2EF} \cdot [(P_1 + P_2)(2n\nu - \nu^2 - 4n + 2\nu) + \\ &\quad + P_2(2n - 2)] \cdot \cotg^2 \alpha. \end{aligned}$$

Addiert man die entsprechenden Werte zu den Stabkräften Null in den Gitterstäben bzw. $-P_1$ und $-P_2$ in den Gurtstäben, so ergeben sich die Stabkräfte in zweiter Näherung. Für $2n = 4$ kommt man wieder auf die im ersten Beispiel direkt hergeleiteten Formeln.

87. Ein besonderer Fall mit Anfangsbiegung,¹

Der Zweigelenkrahmen der Abb. 124 besteht aus zwei gleichen Stäben je von der Länge l und ist im Scheitelpunkt, in welchem beide Stäbe biegesteif verbunden sind, in seiner Symmetrieachse durch die Kraft $2Q$ belastet. Die Rahmenhöhe ist h , die Entfernung der Gelenkfußpunkte ist $2c$.

¹ Vgl. C. B. BIEZENO: Über eine Stabilitätsfrage beim gelenkig gelagerten, schwach gekrümmten Stabe. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, Vol. 32, S. 990—994. 1929.

Das Biegemoment im Querschnitt x, y des verformten Stabes ist durch die Gleichung

$$M = Q \cdot x - H \cdot y$$

gegeben, wenn Q die vertikale und H die „statisch unbestimmte“ horizontale Auflagerreaktion ist. Der Zusammenhang $E I y'' = -M$ der üblichen Biegetheorie liefert die Differentialgleichung der Elastica

$$y'' + \frac{H}{E I} y - \frac{Q}{E I} x = 0,$$

und die Lösung ist

$$y = C_1 \cdot \cos ax + C_2 \cdot \sin ax + \frac{Q}{H} x, \quad a^2 = \frac{H}{E I}.$$

Die Integrationskonstanten C folgen aus den Randwerten $x = 0, y = 0$ und $x = c, y' = \operatorname{tg} \alpha$, wobei die letztere Bedingung aussagt, daß der Winkel im Scheitel bei der Verformung erhalten bleibt, also bei einer symmetrischen Deformation die Tangente an die gebogene Stabachse die ursprüngliche Stabneigung mit dem Winkel α besitzt. Damit findet man die Ausbiegung

$$y = \frac{\sin ax}{a \cdot \cos ac} \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{Q}{H} \right) + \frac{Q}{H} x.$$

Im Scheitel des Rahmens ist $x = c$ und für die Scheitelsenkung $\delta = h - y(c)$ gilt die Gleichung

$$\frac{\delta}{c} = \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{Q}{H} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg} ac}{a c} \right).$$

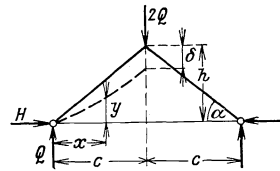


Abb. 124.

Die statisch unbestimmte Größe H berechnen wir aus der Änderung der Stablänge bei der Verformung. Die Länge l' des ausgebogenen Stabes ist gleich der ursprünglichen Länge $l = \frac{c}{\cos \alpha}$, vermindert um die Größe Δ der Zusammendrückung. Nun ist

$$l' = \int_0^c \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx \simeq c + \frac{1}{2} \int_0^c y'^2 dx,$$

und die Zusammendrückung hat den Wert

$$\Delta = \frac{1}{E F} \int_0^c P \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{H c}{E F} + \frac{Q}{E F} \int_0^c y' dx,$$

wenn wir für die Längskraft im gebogenen Stab mit der Querschnittsfläche F den Ausdruck $P = \cos \varphi \cdot (H + Q \cdot \operatorname{tg} \varphi)$ setzen, wobei $\operatorname{tg} \varphi = y'$ die Tangentenneigung bedeutet. Aus $l' = l - \Delta$ folgt nun

$$\frac{c}{\cos \alpha} = c + \frac{H c}{E F} + \frac{1}{2} \int_0^c y'^2 dx + \frac{Q}{E F} \int_0^c y' dx,$$

und nach Einführen des Wertes für y' bekommt man die Gleichung für H

$$\frac{2(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \left(\frac{Q}{H}\right)^2 \left[\frac{2ac + \sin 2ac}{4ac \cdot \cos^2 ac} - \frac{2 \operatorname{tg} ac}{ac} + 1 \right] -$$

$$- \left(\frac{Q}{H}\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left[\frac{2ac + \sin 2ac}{2ac \cdot \cos^2 ac} - \frac{2 \operatorname{tg} ac}{ac} \right] + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{2ac + \sin 2ac}{4ac \cdot \cos^2 ac} +$$

$$+ \frac{2}{c^2} \frac{I}{F} \left[\left(\frac{Q}{H}\right)^2 \cdot (a^2 c^2 - ac \cdot \operatorname{tg} ac) + \left(\frac{Q}{H}\right) \cdot (\operatorname{tg} \alpha \cdot ac \cdot \operatorname{tg} ac) + a^2 c^2 \right].$$

Wir nehmen ein *Beispiel* mit $\alpha = 45^\circ$ und vernachlässigen den Einfluß der Zusammendrückung, d. h. wir schreiben die Fläche F gleich unendlich. Die Lösung wird am einfachsten so vorgenommen, daß man zu festen Werten $a \cdot c$, d. h. $\frac{H}{EI} c^2$ aus der vorstehenden quadratischen

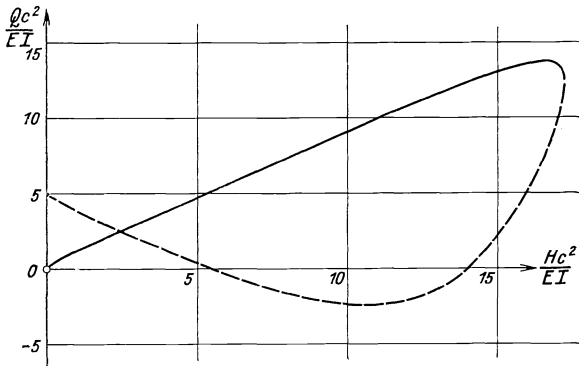


Abb. 125.

Gleichung den Wert $\frac{Q}{H}$, also damit Q berechnet. In dem rechtwinkligen Achsenkreuz der Abb. 125 sind als Ergebnis zu den Abszissen $\frac{H}{EI} c^2$ die Ordinaten $\frac{Q}{EI} c^2$ aufgetragen; die starken Linien der Schleifenkurve zeigen den Verlauf der maßgebenden Größen Q . Die Last $2Q$ erreicht den kritischen Höchstwert bei $2Q = 55,2 \frac{EI}{l^2} = 5,59 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ und der größte Horizontalschub ist unter einer kleineren Angriffslast gleich $49,8 \frac{EI}{l^2}$.

Bei dieser Berechnung haben wir uns auf die symmetrische Verformung und den ersten kritischen Wert beschränkt; weitere Schleifenkurven und höhere kritische Lasten können ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Das gefundene Ergebnis verbinden wir aber noch mit einer allgemeineren Überlegung. Wir erinnern zunächst an den Quadratrahmen, den Sonderfall eines regelmäßigen Ringes, den wir bei der reinen Rahmenknickung untersucht haben. Dort war vorausgesetzt, daß alle Stäbe durch dieselbe Längskraft P ergriffen sind, die z. B. von einer radialen

Belastung der Knoten herrühren kann. Bringt man in zwei gegenüberliegenden Knoten des Quadratrahmens feste Gelenke an, so liegt ein Fall vor, der dem hier berechneten entspricht. Ebenso wenn im Fachwerk von Pkt. 58 der gemeinsame Knoten der zwei Stäbe steif ausgebildet wird. Wir ziehen die Schlussfolgerung:

Wenn man in einem Stabwerk, das durch Angriffskräfte biegefrei beansprucht ist, steife Knoten durch feste Gelenke ersetzt oder umgekehrt Gelenke in steife Knoten verwandelt und dabei aus dem „biegefreien Grundfall“ ein System mit Anfangsbiegung entsteht, so bildet auch dieses ein Problem der elastischen Stabilität.

Sechster Abschnitt.

Die Knickfestigkeit des durchlaufenden geraden Stabes und das Problem der Seitensteifigkeit.

§ 25. Der durchlaufende gerade Stab; die Längskräfte haben stets die Richtung der unverformten Stabachse.

88. Formulierung des Problems. Grundlagen aus der Biegetheorie.

Wir bestimmen die Knickfestigkeit eines geraden Stabes, der in beliebig vielen Punkten entweder fest oder elastisch gestützt und von beliebig vielen axial wirkenden Längskräften beansprucht ist. Die Axialkräfte sollen hierbei auch nach der Formänderung die Richtung der ursprünglichen Stabachse unverändert beibehalten.

Den Stabteil zwischen zwei Unterstützungspunkten nennen wir eine „Öffnung“, den Teil einer Öffnung, für den E , I und P konstant sind, ein „Feld“. Es bedeutet E allgemein den Knickmodul, I das maßgebende Querschnittsträgheitsmoment und P die axiale Längskraft. Das Entstehen der Felder kann also z. B. die Folge von stufenweise veränderlichen Kräften oder von sprungartig verschiedenen Querschnitten sein.

Wir können den durchlaufenden Stab unmittelbar mit Hilfe der allgemeinen Theorie der Stabwerkknickung vom fünften Abschnitt behandeln. Dieser Fall ist bei der „reinen Rahmenknickung“ auch schon untersucht worden, aber wir wollen ihn wegen seiner Wichtigkeit noch besonders hervorheben.¹

Zunächst betrachten wir ein Feld von der Länge l , das durch die axiale endliche Kraft P gedrückt ist und an dessen Enden a und b die unendlich kleinen Biegemomente M_a und M_b und die unendlich kleine Querkraft Q wirken. Wie früher, beziehen wir das Feld auf ein

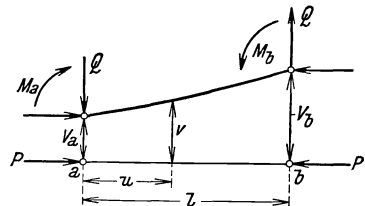


Abb. 126.

¹ Vgl. J. RATZERSDORFER: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit beliebig vielen Feldern. Der Flug, H. 1—4. 1919.

rechtwinkeliges Koordinatensystem u, v , wobei die u -Achse mit der unverformten Stabachse zusammenfällt und der Ursprung im Stabende a liegt. Die Ausbiegungen der Enden sind v_a und v_b , Abb. 126.

Das Biegemoment an der Stelle u, v ist durch die Gleichung

$$M = M_a - Q \cdot u - P(v - v_a)$$

bestimmt, und wenn man $u = l$ setzt, entsteht die Gleichgewichtsbedingung

$$M_a - M_b = Q \cdot l + P(v_b - v_a). \quad (\text{I})$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie $v'' = \frac{M}{EI}$ erhält mit dem Parameter $z^2 = \frac{Pl^2}{EI}$ die Form

$$v'' + \frac{z^2}{l^2} v = \frac{z^2}{Pl^2} (M_a - Q \cdot u + P \cdot v_a),$$

unter den Randwerten $u = 0, v = v_a$ und $u = l, v = v_b$. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$v = A \cdot \sin \frac{z}{l} u + B \cdot \cos \frac{z}{l} u + \frac{1}{P} (M_a - Q \cdot u + P \cdot v_a)$$

und daher weiter

$$v' = A \cdot \frac{z}{l} \cdot \cos \frac{z}{l} u - B \cdot \frac{z}{l} \cdot \sin \frac{z}{l} u - \frac{Q}{P}.$$

Aus den Randwerten folgen die Konstanten A und B und mit Beachten der Gleichgewichtsbedingung (I) wird

$$v' = \frac{v_b - v_a}{l} + \frac{M_a}{Pl} \left(z \cdot \cotg z \cdot \cos \frac{z}{l} u + z \cdot \sin \frac{z}{l} u - 1 \right) + \frac{M_b}{Pl} \left(1 - \frac{z}{\sin z} \cdot \cos \frac{z}{l} u \right).$$

Bei Verwenden der Abkürzungen

$$\psi' = \frac{l}{EI} \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad \psi'' = \frac{l}{EI} \frac{\sin z - z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI}$$

sind somit die Tangentenwinkel der elastischen Linie an den Feldenden ($u = 0$ bzw. $u = l$)

$$v_a' = \frac{v_b - v_a}{l} + M_a \cdot \psi' + M_b \cdot \psi'', \quad v_b' = \frac{v_b - v_a}{l} - M_a \cdot \psi'' - M_b \cdot \psi'.$$

Man bekommt diese Beziehungen auch, wenn man die zwei Hauptgleichungen von Pkt. 64 addiert bzw. subtrahiert, vgl. Pkt. 81.

Die Gleichungen (I) und (II) sind, wie wir bereits im 5. Abschnitt gezeigt haben, alles, was wir aus der Biegetheorie zur Lösung unserer Probleme brauchen. Die Werte ψ', ψ'' sind für jedes z explizite angebar. (Siehe die Tabelle am Schluß des Buches.) Für $z = 0$, d. h. für eine verschwindende Axialkraft sind

$$\psi' = -\frac{1}{3} \frac{l}{EI}, \quad \psi'' = -\frac{1}{6} \frac{l}{EI};$$

bei einer Zugkraft P ist z imaginär und mit $z' = z \cdot \sqrt{-1}$ gelten

$$\psi' = \frac{l}{EI} \frac{\text{Sin } z' - z' \cdot \text{Cos } z'}{z'^2 \cdot \text{Sin } z'}, \quad \psi'' = \frac{l}{EI} \frac{z' - \text{Sin } z'}{z'^2 \cdot \text{Sin } z'}.$$

89. Die Knickgleichung für den durchlaufenden Stab. Die Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken.

Von einem über mehrere Öffnungen durchlaufenden Stab betrachten wir zwei aneinandergrenzende Felder mit den Längen l_r und l_{r+1} , den Kräften P_r, P_{r+1} , den Trägheitsmomenten I_r, I_{r+1} und den Elastizitätszahlen E_r, E_{r+1} . An den Enden $r-1, r, r+1$ sind die Momente M_{r-1}, M_r, M_{r+1} und die Ausbiegungen v_{r-1}, v_r, v_{r+1} .

Die Biegelinie hat einen stetigen Verlauf, und muß daher an der Trennungsstelle der beiden Felder dieselbe Tangente besitzen. Für das Feld l_r von $r-1$ bis r ist die Tangentenneigung bei r

$$v_b' = \frac{v_r - v_{r-1}}{l_r} - M_{r-1} \cdot \psi_r'' - M_r \cdot \psi_r'$$

und für das Feld l_{r+1} , wenn man es von r nach $r+1$ rechnet,

$$v_a' = \frac{v_{r+1} - v_r}{l_{r+1}} + M_r \cdot \psi_{r+1}' + M_{r+1} \cdot \psi_{r+1}''.$$

Durch Gleichsetzen entsteht eine Dreimomentengleichung, die *Stetigkeitsbedingung*

$$M_{r-1} \cdot \psi_r'' + M_r (\psi_r' + \psi_{r+1}') + M_{r+1} \cdot \psi_{r+1}'' + \frac{v_{r-1}}{l_r} - v_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) + \frac{v_{r+1}}{l_{r+1}} = 0, \quad (\text{A})$$

die für je zwei aufeinanderfolgende Felder angeschrieben werden kann, auch wenn die Felder durch einen Stützpunkt getrennt sind, also verschiedenen Öffnungen angehören. Ist ein Stabende eingespannt, so denkt man sich diesem Ende eine Öffnung von unendlich kleiner Länge (oder unendlich großem Trägheitsmoment) angefügt. Bei Einspannung der Trägerenden o bzw. n erhält man somit die Gleichungen

$$M_0 \cdot \psi_1' + M_1 \cdot \psi_1'' - \frac{v_o}{l_1} + \frac{v_1}{l_1} = 0 \quad \text{bzw.} \\ M_{n-1} \cdot \psi_n'' + M_n \cdot \psi_n' + \frac{v_{n-1}}{l_n} - \frac{v_n}{l_n} = 0. \quad (\text{A}')$$

Für jedes Feld gilt ferner eine Gleichgewichtsbedingung (I). Innerhalb einer Öffnung hat die Querkraft den gleichen Wert, und wenn man für zwei benachbarte Felder l_r und l_{r+1} einer Öffnung die durch l dividierten Gl. (I) subtrahiert, fällt Q heraus und die *Gleichgewichtsbedingung* lautet in anderer Schreibweise

$$M_{r-1} \frac{1}{l_r} - M_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{1}{l_{r+1}} + v_{r-1} \frac{P_r}{l_r} - v_r \left(\frac{P_r}{l_r} + \frac{P_{r+1}}{l_{r+1}} \right) + v_{r+1} \frac{P_{r+1}}{l_{r+1}} = 0. \quad (\text{B})$$

Durch die Gleichungen (A) und (B) wird bei festen Stützen die Lösung des Problems geleistet. Bei einem Stab mit eingespannten Enden von n Feldern und p Zwischenstützen sind $n + 1$ Endmomente und $n - 1 - p$ Ausbiegungen unbekannt. Dem stehen $n + 1$ Stetigkeitsbedingungen und $n - 1 - p$ Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Ist jede Öffnung einfeldrig, so fallen die Gl. (B) fort und die Gl. (A) mit den unbekanntem Stützenmomenten genügen zur Berechnung der Aufgabe.

Nimmt man die Stützung elastisch an, so kommt man zu dem Problem, das bei der Berechnung der „*Seitensteifigkeit*“ der Druckgurte offener Brücken auftritt. Sind drei aufeinanderfolgende Stützen des Stabes mit c , k und w bezeichnet, so ist die Stützkraft in k

$$C_k = Q_{k,w} - Q_{c,k},$$

wenn $Q_{k,w}$ und $Q_{c,k}$ die Querkräfte in den Öffnungen (k , w) bzw. (c , k) unmittelbar rechts der Stütze k bzw. c bedeuten. Die Auflagerkraft setzen wir proportional der Ausbiegung

$$C_k = v_k \cdot A_k,$$

wobei A_k durch die Stützkonstruktion, also bei offenen Brücken durch die Bauart der Halbrahmen bestimmt ist. Damit wird die *Lagergleichung*

$$Q_{k,w} - Q_{c,k} - v_k \cdot A_k = 0,$$

oder in entwickelter Form

$$M_{k-1} \frac{1}{l_k} - M_k \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + M_{k+1} \frac{1}{l_{k+1}} + v_{k-1} \frac{P_k}{l_k} - v_k \left(\frac{P_k}{l_k} + \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}} \right) + v_{k+1} \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}} + v_k \cdot A_k = 0. \quad (C)$$

Mit Hilfe der Gl. (I) für das erste und letzte Feld ergeben sich unmittelbar die Gleichungen für die erste und letzte Stütze 0 bzw. n

$$\begin{aligned} -M_0 \frac{1}{l_1} + M_1 \frac{1}{l_1} - v_0 \frac{P_1}{l_1} + v_1 \frac{P_1}{l_1} + v_0 \cdot A_0 &= 0, \\ M_{n-1} \frac{1}{l_n} - M_n \frac{1}{l_n} + v_{n-1} \frac{P_n}{l_n} - v_n \frac{P_n}{l_n} + v_n \cdot A_n &= 0. \end{aligned} \quad (C')$$

Die Lagergleichungen sind daher in der Anzahl der elastischen Stützenverschiebungen aufgestellt.

Die Stetigkeitsbedingungen (A), die Gleichgewichtsbedingungen (B) und die Lagergleichungen (C) bilden ein System von linearen homogenen Gleichungen, dessen gleich Null genommene Koeffizientendeterminante die Knickbedingung ist.

Mitunter ist eine Vereinfachung der Ansätze zu erzielen, wenn man die Ausbiegungen von vornherein eliminiert.

Geht man mit den $\frac{v_b - v_a}{l}$ aus den Gl. (I) in die Gl. (A) ein, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\lambda = \frac{l}{EI} \frac{1}{z \cdot \sin z}, \quad \sigma = \frac{1}{P}, \quad \sigma_{i,i+1} = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

zur Verfügung stehen $n + 1$ Stetigkeitsbedingungen (a) und $p + 1$ Gleichgewichtsbedingungen (b). Im Fall elastischer Stützen entspricht die Zahl der Lagergleichungen (c) den unbekanntem Stützenverschiebungen. Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante dieser Gleichungen ist die Knickbedingung. Der Grad der Determinante ist dann geringer als beim ersten Verfahren, wenn die Zahl der eliminierten Ausbiegungen v größer als die der Querkräfte Q , d. h. die der Öffnungen ist.

Bei der Berechnung der *Seitensteifigkeit* der Druckgurte offener Brücken geht man am besten so vor, daß man bei einem gegebenen Sicherheitsgrad — d. h. unter den mit dem Sicherheitsgrad multiplizierten Lasten P — die die Knickgleichung erfüllenden Werte A ermittelt, denen die Halbrahmen genügen müssen. Die zahlenmäßige Rechnung ist aber schon bei wenigen Öffnungen sehr umständlich, und für eine größere Felderzahl wird man angenähert den später in Pkt. 96 untersuchten Sonderfall oft zugrunde legen dürfen.

Schließlich merken wir an, daß wir mit einem Grenzübergang z. B. auf den Fall der kontinuierlichen gleichmäßigen Lagerung zurückkommen. Setzen wir anstatt der konstanten Länge l die kleine Größe Δu , so lautet die Lagergleichung (C)

$$\frac{\Delta^2 M}{\Delta u^2} + P \frac{\Delta^2 v}{\Delta u^2} + v \frac{A}{\Delta u} = 0$$

und die Stetigkeitsbedingung (A) geht, unter Beachten der Kleinheit von z , in die Biegegleichung $M = EI \frac{\Delta^2 v}{\Delta u^2}$ über. Nimmt man für $\frac{A}{\Delta u}$ die Bettungsziffer c und an Stelle der Differenzgleichung die Differentialgleichung, so entstehen die Ausdrücke von Pkt. 46.

Beispiel. Für den vierfelderigen Stab von einer Öffnung, der in seinen Endpunkten gelenkig gelagert ist (Abb. 127), gelten die Gleichungen (a) und (b)

$$\begin{aligned} -M_1 (\lambda_1 \cdot \cos z_1 + \lambda_2 \cdot \cos z_2) + M_2 \cdot \lambda_2 + Q \cdot \sigma_{1,2} &= 0, \\ M_1 \cdot \lambda_2 - M_2 (\lambda_2 \cdot \cos z_2 + \lambda_3 \cdot \cos z_3) + M_3 \cdot \lambda_3 + Q \cdot \sigma_{2,3} &= 0, \\ M_2 \cdot \lambda_3 - M_3 (\lambda_3 \cdot \cos z_3 + \lambda_4 \cdot \cos z_4) + Q \cdot \sigma_{3,4} &= 0, \\ M_1 \cdot \sigma_{1,2} + M_2 \cdot \sigma_{2,3} + M_3 \cdot \sigma_{3,4} - Q \cdot \sum_1^4 l \sigma &= 0, \end{aligned}$$

und mit der Abkürzung $-\lambda \cdot \cos z = \mu$ ist die Knickgleichung¹

$$0 = \begin{vmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \lambda_2 & \cdot & \sigma_{1,2} \\ \lambda_2 & \mu_2 + \mu_3 & \lambda_3 & \sigma_{2,3} \\ \cdot & \lambda_3 & \mu_3 + \mu_4 & \sigma_{3,4} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_{2,3} & \sigma_{3,4} & -\sum_1^4 l \sigma \end{vmatrix}.$$

¹ Vgl. die achtreihige Determinante für das gleiche Beispiel bei H. ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, S. 193. 1909. Ferner: Die Knick-

Wir wollen noch eine Zahlenrechnung durchführen. Gegeben seien: $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 100 \text{ cm}$, $I = 800 \text{ cm}^4$, $P_1 = P_4 = 1500 \text{ kg}$, $P_2 = P_3 = 3000 \text{ kg}$, $E = 120000 \text{ kg/cm}^2$. Gesucht ist der Sicherheitsgrad, d. h. das Lastvielfache, bei dem ein Knicken des Stabes stattfindet.

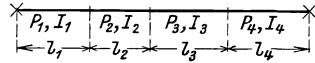


Abb. 127.

Zufolge der Symmetrie wird die angeschriebene Determinantengleichung (wie auch eine unmittelbare Rechnung sofort ergibt),

$$\Delta = \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) - \lambda_2^2 = 0.$$

Wir berechnen z. B. die Determinante Δ für verschiedene Lastvielfache, bestimmen ihre erste Nullstelle und erhalten damit die Knicksicherheit $s = 3,3$.

90. Ein Satz über die Knickdeterminante.

Wir stellen einen Satz über die *Knickdeterminante* auf und werden daraus entnehmen, wie sich der Stab mit *festen* Stützen verhält, wenn die einzelnen Öffnungen die Knickgrenze erreichen.

Zunächst betrachten wir als Beispiel den Stab der Abb. 128 mit sechs Feldern, eingespannten Enden und einer Zwischenstütze am Ende des dritten Feldes. Schreiben wir nach dem zweiten Verfahren von Pkt. 89 die Knickgleichung unter der Annahme fester Stützen auf, so stehen den unbekanntem sieben Momenten und zwei Querkräften jetzt sieben Stetigkeitsbedingungen und zwei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Mit den Abkürzungen $-\lambda \cdot \cos z = \mu$, $\sum l \sigma = L$ hat man die Gleichungen

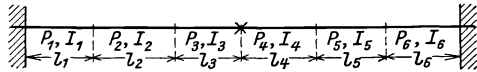


Abb. 128.

$$\begin{aligned} M_0 \cdot \mu_1 + M_1 \cdot \lambda_1 + Q_{0,3} \sigma_1 &= 0, \\ M_0 \cdot \lambda_1 + M_1 \cdot (\mu_1 + \mu_2) + M_2 \cdot \lambda_2 + Q_{0,3} \cdot \sigma_{1,2} &= 0, \\ M_1 \cdot \lambda_2 + M_2 \cdot (\mu_2 + \mu_3) + M_3 \cdot \lambda_3 + Q_{0,3} \cdot \sigma_{2,3} &= 0, \\ M_2 \cdot \lambda_3 + M_3 \cdot (\mu_3 + \mu_4) + M_4 \cdot \lambda_4 - Q_{0,3} \cdot \sigma_3 + Q_{3,6} \cdot \sigma_4 &= 0, \\ M_3 \cdot \lambda_4 + M_4 \cdot (\mu_4 + \mu_5) + M_5 \cdot \lambda_5 + Q_{3,6} \cdot \sigma_{4,5} &= 0, \\ M_4 \cdot \lambda_5 + M_5 \cdot (\mu_5 + \mu_6) + M_6 \cdot \lambda_6 + Q_{3,6} \cdot \sigma_{5,6} &= 0, \\ M_5 \cdot \lambda_6 + M_6 \cdot \mu_6 - Q_{3,6} \cdot \sigma_6 &= 0, \\ M_0 \cdot \sigma_1 + M_1 \cdot \sigma_{1,2} + M_2 \cdot \sigma_{2,3} - M_3 \cdot \sigma_3 - Q_{0,3} \cdot L_{1,3} &= 0, \\ M_3 \cdot \sigma_4 + M_4 \cdot \sigma_{4,5} + M_5 \cdot \sigma_{5,6} - M_6 \cdot \sigma_6 - Q_{3,6} \cdot L_{4,6} &= 0. \end{aligned}$$

In der Knickdeterminante ordnen wir die Spalten und Zeilen derart, daß zuerst alle Größen der ersten Öffnung, dann die der zweiten Öffnung auftreten.

festigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin, 1910, mit einem vereinfachten Verfahren.

$$D = \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & Q_{0,3} & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & Q_{3,6} \\ \mu_1 & \lambda_1 & \cdot & \sigma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 & \mu_1 + \mu_2 & \lambda_2 & \sigma_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \mu_2 + \mu_3 & \sigma_{2,3} & \lambda_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_1 & \sigma_{1,2} & \sigma_{2,3} & -L_{1,3} & -\sigma_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 & -\sigma_3 & \mu_3 + \mu_4 & \lambda_4 & \cdot & \cdot & \sigma_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_4 & \mu_4 + \mu_5 & \lambda_5 & \cdot & \sigma_{4,5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_5 & \mu_5 + \mu_6 & \lambda_6 & \sigma_{5,6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_6 & \mu_6 & -\sigma_6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_4 & \sigma_{4,5} & \sigma_{5,6} & -\sigma_6 & -L_{4,6} \end{vmatrix}$$

Wir zerlegen sie in zwei Determinanten mit den fünften Spalten

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu_4 \ \lambda_4 \ 0 \ 0 \ \sigma_4 \quad \text{bzw.} \quad 0 \ 0 \ \lambda_3 \ -\sigma_3 \ \mu_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

und erhalten

$$D = D_1 + D_2.$$

Sowohl D_1 als auch D_2 zerfällt in ein Produkt von zwei Determinanten, wie bei getrennter Anschreibung (die wir des Raumes halber fortlassen), leicht zu sehen ist, und es wird

$$D = D_{0,3} \cdot \bar{D}_{3,6} + \bar{D}_{0,3} \cdot D_{3,6}.$$

Hierbei bedeuten $D_{0,3}$ und $\bar{D}_{0,3}$ die Knickdeterminanten des Stabteiles 0—3 bei drehbarer Lagerung ($M_3 = 0$) und bei Einspannung im Punkt 3; $D_{3,6}$ und $\bar{D}_{3,6}$ die entsprechenden Determinanten für den Stabteil 3—6.

Wir verallgemeinern diese Gleichung und setzen für den Stab mit den Stützen 0, c und n die Koeffizientendeterminante in der Form an:

$$D_{0,n} = D_{0,c} \cdot \bar{D}_{c,n} + \bar{D}_{0,c} \cdot D_{c,n}.$$

$D_{0,c}$ und $\bar{D}_{0,c}$ sind die Knickdeterminanten des Stabteiles 0— c , $D_{c,n}$ und $\bar{D}_{c,n}$ des Teiles c — n bei gelenkiger Lagerung bzw. Einspannung in c . Die Knickgleichung für den ganzen Stab 0— n ist $D_{0,n} = 0$; in den Öffnungen 0— c , bzw. c — n für sich allein liefert $D_{0,c} = 0$, bzw. $D_{c,n} = 0$ die kleinsten kritischen Werte. Wir ziehen nun die Schlußfolgerung:

Wenn die Knickbedingung für eine Öffnung des Stabes erfüllt ist, so wird das Gleichgewicht nur dann instabil, wenn sich auch die Gesamtheit der anderen Öffnungen an der Knickgrenze befindet. Ein weiterer Sonderfall ist vorhanden, wenn jede Öffnung für sich die Knickgrenze erreicht.¹

Der Zerlegungssatz gestattet es, die Knickdeterminante bequemer zu entwickeln, aber wir können mit ihm zum Beispiel auch das folgende beachtenswerte Resultat herleiten.

¹ Ein ähnliches, aber damit nicht übereinstimmendes Ergebnis findet sich bei H. ZIMMERMANN: Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, Abschn. VI—IX. 1909. Vgl. auch Sitzungsber. 1907.

Ein Stab mit gerader Felderzahl sei in den Endpunkten 0 und $2n$ eingespannt, und es bestehe bezüglich des mittleren Stützpunktes n eine Symmetrie in der Anlage und Belastung. Jetzt ist

$$D_{0,2n} = D_{0,n} \cdot \bar{D}_{n,2n} + \bar{D}_{0,n} \cdot D_{n,2n}$$

und zufolge der Symmetrie $D_{0,n} = D_{n,2n}$, $\bar{D}_{0,n} = \bar{D}_{n,2n}$, also

$$D_{0,2n} = 2 \cdot D_{0,n} \cdot \bar{D}_{0,n}.$$

Die Determinante $\bar{D}_{0,n} = 0$ für den in n eingespannten Stab ergibt einen größeren kritischen Wert als die Determinante $D_{0,n} = 0$ für den in n gelenkig gelagerten Stab. Man hat daher das Ergebnis, daß der symmetrische, durch Axialkräfte symmetrisch gedrückte Stab mit gerader Felderzahl so zu berechnen ist, als ob in seiner Mitte ein Gelenk wäre.

§ 26. Der durchlaufende gerade Stab; die Längskräfte haben die Richtung der Tangente an die Biegelinie.

91. Aufstellen der Knickgleichung.

Wir untersuchen wie vor einen über beliebig viele Öffnungen durchlaufenden geraden Stab, setzen aber voraus, daß die Längskräfte bei der Verformung nicht unverändert mitgehen, sondern an der Trennungsstelle zweier Felder die Richtung der Tangente an die elastische Linie haben und daß ihre Projektionen auf die ursprüngliche Stabachse die Größe P besitzen (Abb. 129).¹

Ein Feld a, b des Stabes von der Länge l , das wir wieder zuerst betrachten, ist also durch eine axiale Druckkraft beansprucht, die in a und b tangentiell zur Biegelinie verläuft. An den Enden des Feldes mit den Ausbiegungen v_a und v_b wirken die unendlich kleinen Biegemomente M_a und M_b und die unendlich kleinen vertikalen Querkräfte Q und Q' . Das Biegemoment an der Stelle u, v ist dann durch die Gleichung

$$M = M_a - (Q - P \cdot v_a') u - P(v - v_a) \tag{1}$$

bestimmt und daraus folgt für $u = l$ die Gleichgewichtsbedingung für ein Feld

$$M_b = M_a - (Q - P \cdot v_a') l - P(v_b - v_a). \tag{2}$$

Man erkennt, daß gegenüber der Rechnung von Pkt. 88 an Stelle von Q jetzt $Q - P \cdot v_a'$ genommen ist und daß sich hierfür aus (2) ein gleichlautender Ausdruck wie dort ergibt. Für die Gleichung v der Biege-

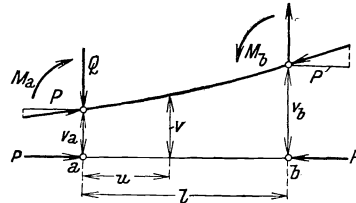


Abb. 129.

¹ J. RATZERSDORFER: Die Berechnung der Tragflächenholme. Österr. Flugtschr. 6. Jahrg., Heft 6 u. 7, 1919. Durchgehende Balken mit beliebig vielen Öffnungen bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte. Der Eisenbau, 10. Jahrg., S. 93—109, 1919.

linie und zufolge der gleichartigen Randbedingungen auch für die Tangentenneigung der elastischen Linie entstehen dieselben Beziehungen wie in Pkt. 88.

Die *Stetigkeitsbedingung*, die den stetigen Verlauf der elastischen Linie veranschaulicht, behält somit ihre frühere Form und lautet für zwei benachbarte Felder l_r und l_{r+1}

$$M_{r-1} \cdot \psi_r'' + M_r (\psi_r' + \psi_{r+1}') + M_{r+1} \cdot \psi_{r+1}'' + \frac{v_{r-1}}{l_r} - v_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) + \frac{v_{r+1}}{l_{r+1}} = 0. \quad (\text{A})$$

Wir stellen ferner die Gleichgewichtsbedingung für zwei aneinander-grenzende Felder l_r und l_{r+1} einer Öffnung auf. Aus der Annahme, daß die Längskräfte an der Trennungstelle r die Richtung der Tangente an die Biegelinie haben, folgt die Gleichheit der Querkräfte im Punkt r von beiden Feldern gerechnet. Unter Querkraft versteht man die Schnittreaktion, d. h. die Komponente der Kräfte einerseits des Querschnittes normal zur Achse des gebogenen Stabes; sie ist von der vertikalen Querkraft zu unterscheiden. Wenn wir in (1) die Gleichung der Biegelinie (vgl. Pkt. 88)

$$v = A \cdot \sin z \frac{u}{l} + B \cdot \cos z \frac{u}{l} + \frac{1}{P} [M_a - (Q - P \cdot v_a') u + P \cdot v_a]$$

einführen, so ist das Biegemoment

$$M = -P \cdot \left(A \cdot \sin z \frac{u}{l} + B \cdot \cos z \frac{u}{l} \right).$$

Nach Einsetzen der Integrationskonstanten, die wir auch aus den Randwerten $u = 0$, $M = M_a$ und $u = l$, $M = M_b$ berechnen dürfen, wird

$$M = M_a \cdot \cos z \frac{u}{l} + \frac{M_b - M_a \cdot \cos z}{\sin z} \cdot \sin z \frac{u}{l}.$$

Die Ableitung des Momentes nach u , d. h. die Querkraft ist demnach

$$R = -\frac{z}{l} \cdot \left(M_a \cdot \sin z \frac{u}{l} - \frac{M_b - M_a \cdot \cos z}{\sin z} \cdot \cos z \frac{u}{l} \right).$$

Mit den Abkürzungen

$$v' = \frac{1}{l} \frac{z}{\operatorname{tg} z}, \quad v'' = -\frac{1}{l} \frac{z}{\sin z}$$

sind an der Stelle r vom Feld l_r für $u = l_r$ bzw. vom Feld l_{r+1} für $u = l_{r+1}$

$$R' = M_{r-1} \cdot v_r'' + M_r \cdot v_r', \quad R'' = M_r \cdot v_{r+1}' + M_{r+1} \cdot v_{r+1}''.$$

Aus $R' = -R''$ ergibt sich die *Gleichgewichtsbedingung*

$$M_{r-1} \cdot v_r'' + M_r (v_r' + v_{r+1}') + M_{r+1} \cdot v_{r+1}'' = 0, \quad (\text{B})$$

die für zwei benachbarte Felder innerhalb der Öffnung angeschrieben werden kann. — Die Gl. (B) läßt sich auch so herleiten, daß man z. B. für die zwei Felder l_r und l_{r+1} die Gleichgewichtsbedingung in der vertikalen Richtung aufstellt.

Ist die Stütze k des Stabes elastisch, so setzt man den Stützendruck proportional der Ausbiegung und kommt mit der eben angedeuteten Rechnung zur Lagergleichung

$$M_{k-1} \cdot v_k'' + M_k (v_k' + v_{k+1}') + M_{k+1} \cdot v_{k+1}'' - v_k \cdot A_k = 0, \quad (C)$$

die für die Lagerkonstante $A_k = 0$ in Gl. (B) übergeht.

Bei einem n -felderigen Stab mit eingespannten Enden und p Zwischenstützen sind $n + 1$ Endmomente der Felder und $n + 1$ Ausbiegungen unbekannt und $n + 1$ Stetigkeitsbedingungen, $n - 1 - p$ Gleichgewichtsbedingungen und $p + 2$ Lagergleichungen, also $2n + 2$ Gleichungen vorhanden. Die gleich Null gesetzte Determinante dieses Gleichungssystems ist die Knickbedingung.

92. Eine Umformung der Gleichungen.

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung untersuchen wir nur den wichtigeren Fall, daß alle Stützen fest sind, sich also die Gleichungen (A) und Gleichgewichtsbedingungen (B) beschränken. In den Gl. (B) kommen die Ausbiegungen

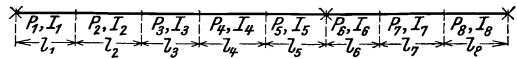


Abb. 130.

nicht vor, und wir eliminieren sie auch aus den Gl. (A), damit der Grad der Knickdeterminante erniedrigt wird.

Um die Rechnung übersichtlich zu gestalten, führen wir sie zuerst an einem Beispiel durch, an einem achtfelderigen Stab mit Gelenklagern an den Enden 0 und 8 und einer Zwischenstütze am Ende des fünften Feldes (Abb. 130). Mit den Abkürzungen

$$M_{r-1} \cdot \psi_r'' + M_r (\psi_r' + \psi_{r+1}') + M_{r+1} \cdot \psi_{r+1}'' = L_r, \quad \frac{1}{l_r} = \delta_r \quad (1)$$

schreiben wir die Stetigkeitsbedingungen in der Form

$$\begin{aligned} L_1 &= v_1 (\delta_1 + \delta_2) - v_2 \delta_2, \\ L_2 &= -v_1 \delta_2 + v_2 (\delta_2 + \delta_3) - v_3 \delta_3, \\ L_3 &= \dots - v_2 \delta_3 + v_3 (\delta_3 + \delta_4) - v_4 \delta_4, \\ L_4 &= \dots - v_3 \delta_4 + v_4 (\delta_4 + \delta_5) - v_5 \delta_5, \\ L_5 &= \dots - v_4 \delta_5 + v_5 (\delta_5 + \delta_6) - v_6 \delta_6, \\ L_6 &= \dots - v_5 \delta_6 + v_6 (\delta_6 + \delta_7) - v_7 \delta_7, \\ L_7 &= \dots - v_6 \delta_7 + v_7 (\delta_7 + \delta_8). \end{aligned} \quad (2)$$

Die Koeffizientendeterminante der v lautet, wenn man jede zweite Zeile und jede zweite Spalte mit -1 multipliziert,

$$A_{1,8} = \begin{vmatrix} \delta_1 + \delta_2 & \delta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_2 & \delta_2 + \delta_3 & \delta_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \delta_3 & \delta_3 + \delta_4 & \delta_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \delta_4 & \delta_4 + \delta_5 & \delta_5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \delta_5 & \delta_5 + \delta_6 & \delta_6 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_6 & \delta_6 + \delta_7 & \delta_7 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \delta_7 & \delta_7 + \delta_8 & \cdot \end{vmatrix}$$

$$D_{i,0} = \prod_1^c \delta \cdot \sum_{i+1}^c l, \quad D_{i,n} = \prod_{w+1}^n \delta \cdot \sum_{w+1}^i l.$$

Bei gleichen Längen l werden

$$\Delta_{c+1,w} = (w-c) \cdot \delta^{w-c-1}, \quad D_{i,k} = (i-c) \cdot (w-k) \cdot \delta^{w-c-2}, \quad i \leq k.$$

Beispiel. Für den in Pkt. 89 betrachteten vierfelderigen Stab von einer Öffnung, der in seinen Endpunkten drehbar gelagert ist, lauten unsere Gleichungen [die sich hier auf die Gleichgewichtsbedingungen (B) reduzieren]

$$\begin{aligned} M_1(v_1' + v_2') + M_2 \cdot v_2'' &= 0, \\ M_1 \cdot v_2'' + M_2(v_2' + v_3') + M_3 \cdot v_3'' &= 0, \\ M_2 \cdot v_2'' + M_3(v_3' + v_4') &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist die Knickbedingung

$$\Delta = 0 = \begin{vmatrix} v_1' + v_2' & v_2'' & \cdot \\ v_2'' & v_2' + v_3' & v_3'' \\ \cdot & v_2'' & v_3' + v_4' \end{vmatrix}.$$

Wir berechnen wieder das Zahlenbeispiel von Pkt. 89 mit $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 100$ cm, $I = 800$ cm⁴, $P_1 = P_4 = 1500$ kg, $P_2 = P_3 = 3000$ kg, $E = 120000$ kg/cm². Das Lastvielfache s , bei dem die Knickdeterminante Δ gleich Null ist, d. h. die Knicksicherheit ist 2,2, während sich bei Längskräften, die ständig parallel zur ursprünglichen Stabachse bleiben, $s = 3,3$ ergeben hat.

Man sieht an diesem Beispiel, welchen Einfluß auf das Resultat die Voraussetzung über die Richtung der Längskraft nach der Verformung haben kann. Beide von uns gewählten Annahmen führen zum gleichen Ergebnis, wenn alle Öffnungen einfelderig sind und die Lösung allein durch die Stetigkeitsbedingungen geleistet wird. Denn jedesmal war die in die Stabachse fallende Kraftkomponente von der gleichen Größe, und die andere Komponente der geneigten Kraft wird von der Stütze aufgenommen. Sobald aber verschiedene Kräfte innerhalb einer Öffnung angreifen, wird man überlegen müssen, welche Voraussetzung richtiger ist. Bei einer vertikal stehenden Säule mit Lasten zwischen den Knotenpunkten bleiben selbstverständlich die Gewichte auch nach der Formänderung vertikal. Anders liegen die Verhältnisse beim Gurtstab einer Brücke oder beim Tragflächenholm einer Flugzeugzelle. Die Verschiedenheit der Längskräfte in einer Öffnung rührt davon her, daß die Knotenpunkte des Haupttragwerkes und eines waagrechten Querverbandes nicht übereinstimmen. Über die Richtung der resultierenden Stabkräfte nach der Formänderung kann aber von vornherein in der Regel nichts Genaueres ausgesagt werden, und man ist darauf angewiesen, eine mögliche Annahme zu treffen. Welche Kraftverteilung in einem gegebenen Fall der Wirklichkeit tatsächlich am besten entspricht, könnten nur sorgfältig ausgeführte Versuche entscheiden. Die Rechnung ließe sich natürlich für jede beliebige Richtung der Längskräfte nach der Verformung in ähnlicher Weise erledigen.

§ 27. Anwendungen und weitere Untersuchungen.

93. Der symmetrisch ausgebildete, gelenkig gelagerte Stab mit drei Feldern.

Wir berechnen die Knicklast des drehbar gelagerten Stabes von der Länge l , dessen Querschnittsträgheitsmomente im mittleren Teil auf die Länge l_1 , die Größe I_1 und in den beiden gleichen Endfeldern l_0 die Größe I besitzen (Abb. 131).

Aus den Gl. (a) von Pkt. 89 folgt unmittelbar die Knickbedingung

$$\lambda_0 \cdot \cos z_0 + \lambda_1 \cdot \cos z_1 - \lambda_1 = 0.$$

Nach Einsetzen der Werte λ wird

$$\frac{l_0}{I} \frac{\cos z_0}{z_0 \cdot \sin z_0} = \frac{l_1}{I_1} \frac{1 - \cos z_1}{z_1 \cdot \sin z_1}$$

und mit $z_0 = \sqrt{\frac{P l_0^2}{E I}}$, $z_1 = \sqrt{\frac{P l_1^2}{E I_1}}$, $l_0 = \frac{l - l_1}{2}$ ergibt sich

$$\operatorname{tg} \left(\frac{l - l_1}{2} \sqrt{\frac{P_k}{E I}} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P_k}{E I_1}} \right) = \sqrt{\frac{I_1}{I}}.$$

Wir können ebenso von zwei Gl. (A) von Pkt. 89 ausgehen. Unbekannt sind ein Moment und eine Ausbiegung, und nach Elimination einer dieser Größen entsteht die angeschriebene Knickgleichung zur Berechnung der kritischen

Last P_k .

Dieser Aufgabe kommt im Stahlbau eine Bedeutung zu, da man Stäbe im mittleren Teil oft durch Lamellen verstärkt. Wir geben deshalb für einige Verhältnisse $l_1 : l$ und $I_1 : I$ die Lösung der Knickgleichung an. Bezeichnen wir mit P_E die EULERSche Last für den Stab von der Länge l und dem konstanten Trägheitsmoment I , so lautet die Knickbedingung

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{l - l_1}{l} \sqrt{\frac{P_k}{P_E}} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{l_1}{l} \sqrt{\frac{I}{I_1} \frac{P_k}{P_E}} \right) = \sqrt{\frac{I_1}{I}}.$$

Die nachfolgende Tabelle enthält den Faktor k , mit dem P_E multipliziert werden muß, um die Knicklast zu berechnen, d. h. es ist

$$P_k = k \cdot \pi^2 \frac{E I}{l^2}$$

und man erkennt, welche Verstärkung des mittleren Teiles erforderlich ist, um die Knicklast in einem verlangten Verhältnis über die des unverstärkten Stabes zu erhöhen.¹ Ist $l_1 = 0$, so entsteht die EULERSche Formel

¹ Siehe K. HOENING: Beitrag zur Berechnung der Knicksicherheit von Stäben mit veränderlichem Querschnitt. Der Eisenbau, Bd. 6, S. 241—246. 1915. — Ferner E. ELWITZ: Die Knickkraft in Stäben mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment. Ztrbl. d. Bauverwaltung, Jahrg. 37, S. 517f. 1917.

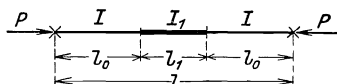


Abb. 131.

($P_k = P_E$), wenn l_1 klein und I_1 wenig von I verschieden ist, ändert sich die Größe der kritischen Last nur wenig.¹

Vorausgesetzt ist bei dieser Untersuchung eine vollkommene Elastizität des Stabmaterials; im Fall der unelastischen Knickung ist für jeden Stabteil der der Spannung zugehörige Knickmodul einzuführen, vgl. Pkt. 19.

$\frac{l_1}{l}$	k						
	$\frac{I_1}{I} = 1,2$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
0,1	1,034	1,059	1,079	1,095	1,109	1,119	1,128
0,2	1,068	1,123	1,167	1,202	1,232	1,257	1,279
0,3	1,101	1,186	1,257	1,320	1,372	1,417	1,457
0,4	1,132	1,249	1,349	1,443	1,523	1,595	1,662
0,5	1,157	1,302	1,437	1,561	1,674	1,780	1,880
0,6	1,176	1,346	1,509	1,663	1,810	1,952	2,088

94. Der Stab mit zwei Öffnungen und der symmetrische Stab mit drei Öffnungen bei festen Stützen.²

Wir untersuchen den in der Abb. 132 gezeichneten geraden Stab mit zwei einfelderigen Öffnungen, der an seinen Enden gelenkig gelagert ist. Die Öffnung von der Länge l_1 und dem Trägheitsmoment I_1 ist durch die Kraft P_1 , das Feld von der Länge l_2 und dem Trägheitsmoment I_2 ist durch P_2 belastet. Die Elastizitätszahlen sind E_1 bzw. E_2 .

Die Knickgleichung ist die Stetigkeitsbedingung (vgl. Pkt. 89)

$$\psi_1' + \psi_2' = 0$$

und für ψ eingesetzt

$$\frac{1}{P_1 l_1} \cdot \sin z_1 \cdot (\sin z_1 - z_1 \cdot \cos z_1) + \frac{1}{P_2 l_2} \cdot \sin z_2 \cdot (\sin z_2 - z_2 \cdot \cos z_2) = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $\sin z_1 = \sin z_2 = 0$, d. h. $z_1 = z_2 = \pi$.

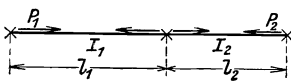


Abb. 132.

Ein Knickfall ist also, in Übereinstimmung mit dem in Pkt. 90 hergeleiteten Satz über die Knickdeterminante, dann vorhanden, wenn jede Öffnung durch ihre EULERSche Last für gelenkige Lagerung ergriffen ist.

Um die weiteren Lösungen der Knickgleichung zu erhalten, schreiben wir sie mit den Abkürzungen

$$\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} = \varrho, \quad \frac{z_1}{z_2} \sqrt{\varrho} = \frac{l_1}{E_1 I_1} : \frac{l_2}{E_2 I_2} = x$$

in der Form

$$\sqrt{\varrho} \left(\frac{1}{z_1} - \cotg z_1 \right) + \left(\frac{1}{z_2} - \cotg z_2 \right) = 0$$

¹ Vgl. die damit übereinstimmenden Knickversuche von A. FÖPPL mit Winkeleisen, die im mittleren Teil durch Nietlöcher geschwächt waren. Vorles. über Techn. Mechanik, 3. Bd., 8. Aufl., S. 384, 1920.

² J. RATZERSDORFER: Zur Knickfestigkeit der Tragflächenholme. Ztschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, Jahrg. 9, S. 131—136. 1918.

In der Abb. 135 sind als Ergebnis zu den Abszissen $x = \frac{l_1}{l_2} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}$ und den Ordinaten z die so gewonnenen Kurven für die Werte

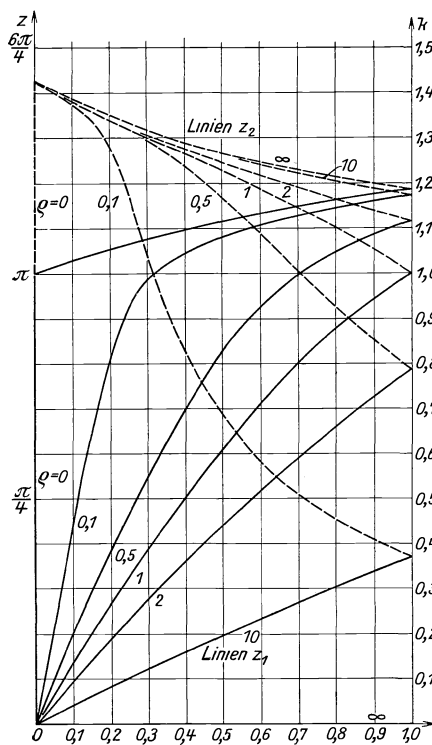


Abb. 135.

$\rho = \frac{P_2}{P_1} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} = 0, 0,1, 0,5, 1, 2, 10$ und ∞ aufgetragen. Die Linien für $\rho = 0$ ($P_2 = 0$) und $\rho = \infty$ ($P_1 = 0$) wurden hierbei unmittelbar aus den Knickgleichungen

$$\frac{1}{P_1 l_1} (1 - z_1 \cdot \cotg z_1) + \frac{1}{3} \frac{l_2}{E_2 I_2} = 0$$

bzw.

$$\frac{1}{3} \frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{1}{P_2 l_2} (1 - z_2 \cdot \cotg z_2) = 0$$

bestimmt. Bei den in einem konkreten Fall bekannten Größen x und ρ lassen sich aus den vollgezogenen Linien die Ordinaten z_1 , aus den strichlierten Linien die Ordinaten z_2 entnehmen und die Knicklasten

$$P_{1,k} = z_1^2 \cdot \frac{E_1 I_1}{l_1^2}, \quad P_{2,k} = z_2^2 \cdot \frac{E_2 I_2}{l_2^2}$$

berechnen. Die Ordinaten k , die in der Abbildung rechts angeschrieben sind, stellen die Zahlen vor, mit deren Quadrat man die EULERSchen

Lasten $\pi^2 \frac{E_1 I_1}{l_1^2}$ bzw. $\pi^2 \frac{E_2 I_2}{l_2^2}$ multiplizieren muß, um die kritischen Lastwerte zu erhalten. Der Bereich 0 bis 1

genügt für die Abszissen, da wir die Länge jener Öffnung mit l_1 bezeichnen, für die der Quotient $\frac{l}{EI}$ den kleineren Wert hat.

Der symmetrische und symmetrisch belastete *Stab über drei Öffnungen* mit gelenkigen Enden kann in derselben Weise behandelt werden (Abb.

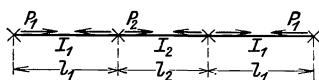


Abb. 136.

136). Die Endöffnungen von der Länge l_1 und dem Querschnittsträgheitsmoment I_1 sind durch die Druckkräfte P_1 , die Mittelöffnung von der Länge und dem Trägheitsmoment I_2 durch P_2 zentrisch beansprucht.

Die Abb. 137 zeigt das Resultat der Untersuchung.

In einem rechtwinkligen Achsenkreuz sind die Linien $\rho = \frac{P_2}{P_1} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} = 0, 0,1, 0,5, 1, 2, 5, 10$ und ∞ eingezeichnet; für einen bestimmten Wert ρ entnimmt man der Figur zur Abszisse $x = \frac{l_1}{l_2} \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}$

die Ordinaten k_1 (vollgezogene Linien) bzw. k_2 (strichlierte Linien). Multipliziert man mit den Quadraten dieser Zahlen die EULERSchen Werte der Öffnungen, so gewinnt man die Knicklasten

$$P_{1,k} = k_1^2 \cdot \pi^2 \frac{E_1 I_1}{l_1^2}, \quad P_{2,k} = k_2^2 \cdot \pi^2 \frac{E_2 I_2}{l_2^2}.$$

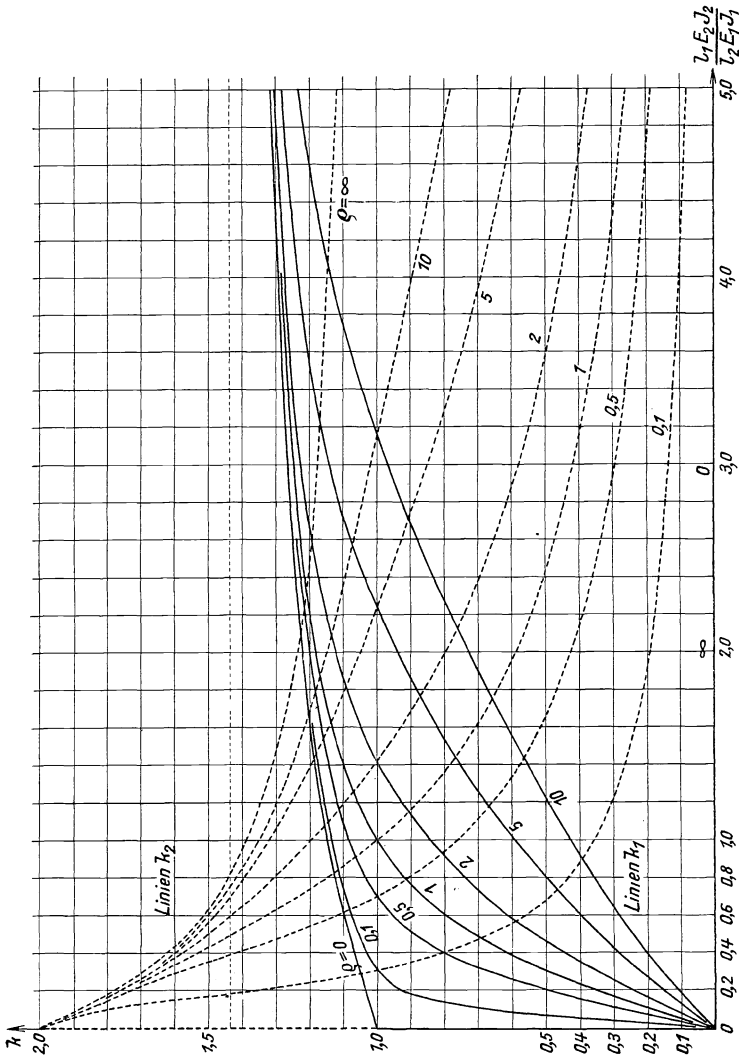


Abb. 137.

Für E ist in diesen Formeln der YOUNGSCHE Elastizitätsmodul einzusetzen, wenn die Spannung $P_k:F$ nicht größer als die Proportionalitätsgrenze des Materials ist; F ist die Querschnittsfläche der betreffenden

Analog sind

$$D_{1,n} = a_1 \cdot D_{2,n} - b_2^2 \cdot D_{3,n}, \quad D_{2,n} = a_2 \cdot D_{3,n} - b_3^2 \cdot D_{4,n} \text{ usf.}$$

Somit wird nach Einsetzen in die Gleichung für $D_{0,n}$

$$D_{0,n} = D_{1,n} \cdot \left[a_0 - \frac{b_1^2}{a_1 - \frac{b_2^2}{a_2 - \frac{b_3^2}{a_3 - \dots - \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} - \frac{b_n^2}{a_n}}}} \right].$$

In unserem Fall bedeutet $D_{1,n} = 0$ die Knickgleichung für einen Stab von der Länge $l - n$, der in der Stütze 1 gelenkig gelagert und in n wie der Gesamtstab befestigt ist. Die maßgebende kritische Last entsteht, wenn wir Lösungen ausschließen, bei denen die einzelnen Öffnungen die Knickgrenze erreichen, aus der kleinsten Wurzel des gleich Null gesetzten Kettenbruches, den wir kurz mit dem üblichen Symbol anschreiben:

$$\left(\begin{array}{cccc} -b_1^2, & -b_2^2, & \dots, & -b_n^2 \\ a_0 & a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{array} \right).$$

Als *Beispiel* nehmen wir einen *Stab mit fünf Öffnungen* an, bei dem die Endstützen 0 und 5 gelenkig gelagert sind. Das Trägheitsmoment des Stabes sei unveränderlich, die Belastung erfolge durch die konstante Kraft P , die Stablängen seien $l_1 = l_3 = l_5 = l$, $l_2 = l_4 = 0,8 l$. Die Knickgleichung lautet

$$0 = \left(\begin{array}{cccc} -\psi_2''^2, & -\psi_3''^2, & -\psi_4''^2 \\ \psi_1' + \psi_2', & \psi_2' + \psi_3', & \psi_3' + \psi_4', & \psi_4' + \psi_5' \end{array} \right).$$

Die Öffnung 0—1 für sich allein knickt bei $z = \pi$. Für den Stab mit den Feldern 0—2 ist die Knickbedingung $\psi_1' + \psi_2' = 0$, die mit $z = z_1 = 1,10 \pi$ befriedigt wird, vgl. die graphische Darstellung in Pkt. 94. (Der Index 1 bei z besagt, daß sich z auf das erste Feld l_1 bezieht.) Für die Felder 0—3 gilt die Knickgleichung

$$0 = \psi_1' + \psi_2' - \frac{\psi_2''^2}{\psi_2' + \psi_3'},$$

mit der Lösung $z = z_1 = 1,063 \pi$, vgl. Pkt. 94. Der Stab mit den Feldern 0—4 hat die Knickbedingung

$$0 = \psi_1' + \psi_2' - \frac{\psi_2''^2}{\psi_2' + \psi_3' - \frac{\psi_3''^2}{\psi_3' + \psi_4'}}$$

und es folgt $z = z_1 = 1,10 \pi$, ein Ergebnis, das wir in diesem besonderen Fall auch dem Satz über die Knickdeterminante (Pkt. 90) entnehmen können. Es ist

$$D_{0,4} = D_{0,2} \cdot \bar{D}_{2,4} + D_{2,4} \cdot \bar{D}_{0,2} = 0$$

und $D_{0,2} = D_{2,4} = 0$ bedeutet, daß das Knicken eintritt, wenn der zweifelderige Stab 0—2 oder 2—4, der an den Enden gelenkig gelagert ist, ausknickt. Für den Gesamtstab 0—5 mit der vor angeschriebenen Knickgleichung wird $z = z_1 = 1,087 \pi$. Die Knicklast des Stabes 0—5 ist somit

$$P_k = 1,24 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Bei diesem Rechnungsgang erkennt man den Einfluß von sukzessive hinzugefügten Öffnungen auf das Resultat, und man überblickt die ungefähre Lage der ersten Nullstelle der einzelnen Determinanten. Man ist auch imstande abzuschätzen, ob weitere Felder außer acht bleiben können, d. h. wann in der hier angegebenen Form mit einem „*Näherungsbruch*“ gerechnet werden darf.

B. Der an den *Enden eingespannte Stab* auf festen Stützen hat n gleiche einfelderige Öffnungen von der Länge l , die durch die gleiche Druckkraft P beansprucht sind. — Die Stetigkeitsbedingung

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2 M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' = 0$$

ist dann eine lineare homogene Differenzgleichung unter den Randwerten $M_0 \psi' + M_1 \psi'' = 0$, $M_{n-1} \psi'' + M_n \psi' = 0$ für die Einspannung der Stabenden 0 und n .

Zur Lösung setzen wir $M_k = r^k$ und erhalten die charakteristische Gleichung

$$\frac{\psi''}{r} + 2\psi' + \psi'' r = 0$$

und mit $r + \frac{1}{r} = \beta$ wird daraus $\beta = -\frac{2\psi'}{\psi''}$. Das allgemeine Integral der Differenzgleichung lautet mit der Einführung $\beta = 2 \cos \xi$

$$M_k = C_1 \cdot \sin k \xi + C_2 \cdot \cos k \xi$$

und die Randbedingungen liefern mit Beachten von $\frac{\psi'}{\psi''} = -\cos \xi$ die Gleichungen

$$\psi'' \cdot C_1 \cdot \sin \xi = 0,$$

$$\psi'' \cdot C_1 \cdot [\sin(n-1)\xi - \sin n \xi \cdot \cos \xi] + \psi'' \cdot C_2 \cdot [\cos(n-1)\xi - \cos n \xi \cdot \cos \xi] = 0.$$

Diese Gleichungen sind zunächst für $\psi'' = 0$ erfüllt, d. i. für die triviale Lösung $z = 0$. Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante ergibt die Knickbedingung

$$\cos(n-1)\xi - \cos n \xi \cdot \cos \xi = 0, \text{ d. h. } \sin n \xi \cdot \sin \xi = 0 \text{ oder } \xi = \nu \cdot \frac{\pi}{n}.$$

Dabei läuft ν von 0 bis n , da, wie auch unsere Ansatzgleichungen zeigen, für β jetzt entsprechend den $n+1$ Momenten, $n+1$ Werte in Betracht kommen. Aus der Gleichstellung der Ausdrücke für $\beta = -\frac{2\psi'}{\psi''}$ und $2 \cos \xi = 2 \cos \nu \frac{\pi}{n}$ folgt die Knickbedingung

$$\frac{\sin z - z \cdot \cos z}{\sin z - z} = \cos \nu \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Der Wert $\cos \nu \frac{\pi}{n}$ bewegt sich zwischen $+1$ (für $\nu = 0$) und -1 (für $\nu = n$), also z zwischen 2π und π , da für $z = 2\pi$ die linke Seite der Knickgleichung $+1$, für $z = \pi$ gleich -1 ist. Der kleinste Wurzelwert ist demnach $z = \pi$, aber wenn man damit in die Stetigkeitsbedingung eingeht, werden alle Momente gleich Null, der Stab bleibt (ebenso wie bei $z = 0$) gerade. Anstatt $\nu = n$ nehmen wir deshalb $\nu = n - 1$, d. h. $\cos (n - 1) \frac{\pi}{n} = -\cos \frac{\pi}{n}$ und erhalten als endgültige Form der Knickgleichung

$$\frac{\sin z - z \cdot \cos z}{z - \sin z} = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Für $n = 1$ ist $z = 2\pi$ und die Knicklast hat den Wert $P_k = 4 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ vom beiderseits eingespannten Stab. Für $n = 2$ wird $z = \text{tg } z$, also $z = 1,43 \pi$, d. h. es ergibt sich die Knicklast $P_k \simeq 2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ für den an einem Ende eingespannten, am anderen Ende gelenkig gestützten Stab von der Länge l . (Vgl. hierzu das allgemeine Resultat am Schluß von Pkt. 90). Für $n = 3, 4, 10$ sind $z = 1,226 \pi, 1,141 \pi, 1,024 \pi$. Mit wachsender Zahl der Öffnungen nimmt die Wirkung der Einspannung ab, und die Knicklast nähert sich dem Wert für den an seinen Enden gelenkig gelagerten Stab.¹

96. Der Stab von gleichen Öffnungen mit festen Enden, konstanter Druckkraft bei gleichartiger elastischer Stützung.

a) Allgemeine Untersuchung.²

Für den Stab von gleichen einfelderigen Öffnungen von der Länge l mit konstanter Druckkraft P sind die Stetigkeitsbedingungen

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2 M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' + \frac{v_{k-1}}{l} - v_k \frac{2}{l} + \frac{v_{k+1}}{l} = 0 \quad (a)$$

und die Lagergleichungen lauten bei einer gleichartigen elastischen Stützung

$$M_{k-1} - 2 M_k + M_{k+1} + v_{k-1} \cdot P - v_k \cdot 2 P + v_{k+1} \cdot P + v_k \cdot A \cdot l = 0. \quad (b)$$

M sind die Stützenmomente, v die Ausbiegungen an den Stützstellen und A die Lagerkonstante. (Siehe Pkt. 89.)

Diese Gleichungen, bei denen k von 1 bis $n - 1$ läuft, wenn der Stab die Länge $n \cdot l$ besitzt, bilden ein System von zwei simultanen

¹ Vgl. F. BLEICH u. E. MELAN: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik. Berlin u. Wien, 1927. S. 215f.

² Siehe F. BLEICH: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin, 1924. S. 198f. — M. GRÜNING: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin, 1925. S. 697f. — Eine Berechnung mit Hilfe der Energiemethode geben S. KASARNOWSKY u. D. ZETTERHOLM: Zur Theorie der Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Fachwerkbrücken. Der Bauingenieur, 8. Jahrg., S. 760—769. 1927.

Differenzgleichungen unter den homogenen Randbedingungen $v_0 = 0$, $v_n = 0$, $M_0 = 0$, $M_n = 0$. Geht man mit dem Lösungsansatz $M_k = r^k$, $v_k = \alpha \cdot r^k$ in (a) und (b) ein, so bekommt man mit der Abkürzung $\beta = r + \frac{1}{r}$ die charakteristischen Gleichungen

$$\beta \psi'' + 2\psi' + \frac{\alpha}{l} (\beta - 2) = 0, \quad \beta - 2 + P\alpha \left(\beta - 2 + \frac{Al}{P} \right) = 0.$$

Bestimmt man aus der ersten Gleichung das α und führt es in die zweite ein, so entsteht für β die quadratische Gleichung

$$(\beta - 2)^2 - [P(\beta - 2) + Al] \cdot \left(\beta + \frac{2\psi'}{\psi''} \right) l \psi'' = 0. \quad (c)$$

Zu jedem β gibt es ein α , man hat also einen Wert α_1 und einen Wert α_2 . Die Lösungen der Differenzgleichungen (a) und (b) sind demnach, wenn wir $\beta_1 = 2 \cos \xi$ und $\beta_2 = 2 \cos \eta$ schreiben,

$$M_k = C_1 \cdot \sin k\xi + C_2 \cdot \cos k\xi + C_3 \cdot \sin k\eta + C_4 \cdot \cos k\eta, \\ v_k = \alpha_1 \cdot C_1 \cdot \sin k\xi + \alpha_1 \cdot C_2 \cdot \cos k\xi + \alpha_2 \cdot C_3 \cdot \sin k\eta + \alpha_2 \cdot C_4 \cdot \cos k\eta,$$

und die Randbedingungen ergeben die Gleichungen

$$0 = C_2 + C_4, \quad 0 = \alpha_1 \cdot C_2 + \alpha_2 \cdot C_4, \\ 0 = C_1 \cdot \sin n\xi + C_2 \cdot \cos n\xi + C_3 \cdot \sin n\eta + C_4 \cdot \cos n\eta, \\ 0 = \alpha_1 \cdot C_1 \cdot \sin n\xi + \alpha_1 \cdot C_2 \cdot \cos n\xi + \alpha_2 \cdot C_3 \cdot \sin n\eta + \alpha_2 \cdot C_4 \cdot \cos n\eta.$$

Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante liefert die Knickbedingung

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \sin n\xi \cdot \sin n\eta,$$

oder

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \xi = \nu \frac{\pi}{n}, \quad \eta = \nu \frac{\pi}{n}, \quad \text{wo } \nu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ (also $\beta_1 = \beta_2$), ohne daß die beiden anderen Bedingungen erfüllt sind, bestimmt man mit Hilfe der Konstantengleichungen $M_k = 0$, $v_k = 0$, d. h. der Stab bleibt gerade.

Sobald $\xi = \nu \frac{\pi}{n}$ (oder ebenso $\eta = \nu \frac{\pi}{n}$), wird

$$\beta_1 = 2 \cos \nu \frac{\pi}{n} \quad (\text{bzw. } \beta_2 = 2 \cos \nu \frac{\pi}{n}).$$

Auch jetzt ist $\alpha_1 = \alpha_2$, aber mit dem Unbestimmtwerden von $C_1 + C_3$ sind die Lösungen erfaßt, die das Knicken ausdrücken, ($\nu = 0$ und $\nu = n$ entsprechen der Lösung $M_k = 0$). Die Gl. (c) ergibt mit diesem β einen Zusammenhang zwischen A , P und den Abmessungen des Stabes. Am einfachsten ist es, wenn man (c) nach A auflöst und damit folgt

$$A \cdot l = 2 \left(\cos \nu \frac{\pi}{n} - 1 \right) \cdot \frac{\left(\cos \nu \frac{\pi}{n} - 1 \right) - P \cdot \left(\cos \nu \frac{\pi}{n} + \frac{\psi'}{\psi''} \right) l \psi''}{\left(\cos \nu \frac{\pi}{n} + \frac{\psi'}{\psi''} \right) l \psi''}$$

und nach Einführen der Werte ψ

$$A = \frac{2P}{l} z \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right) - (1 - \cos z)}{\left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}\right) (z - \sin z) - z (1 - \cos z)}. \quad (1)$$

Schreiben wir Gl. (1) vorübergehend in der Form $A = P \cdot K$, so sehen wir, daß A den größten und zugleich P den kleinsten Wert annimmt, der den Übergang vom stabilen zum instabilen Zustand kennzeichnet, wenn K ein Maximum ist. Man gewinnt alle Gleichgewichtslagen, wenn man, den $n - 1$ Eigenwerten von A entsprechend, ν von 1, 2, ... bis

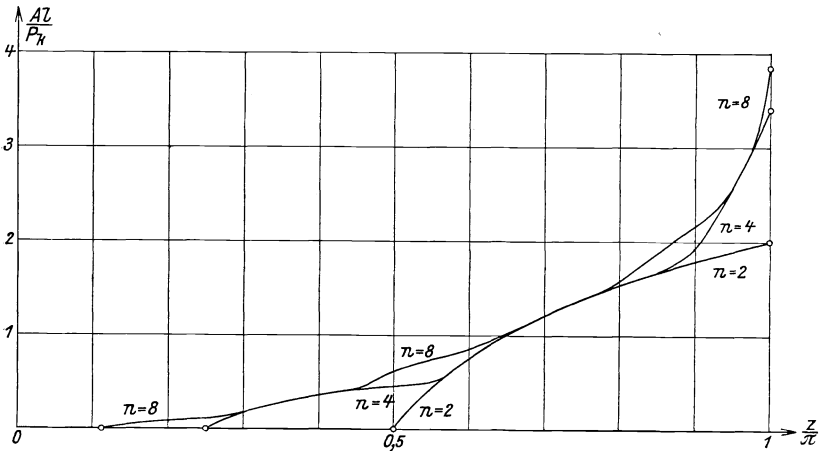


Abb. 138.

$n - 1$ laufen läßt. Wir suchen also den Faktor ν , für den A ein Maximum wird. Mit den Abkürzungen

$$1 - \cos \nu \frac{\pi}{n} = x, \quad 1 - \cos z = a, \quad z - \sin z = b$$

wird Gl. (1)

$$A = \frac{2P}{l} z \frac{x(x-a)}{xb - za}$$

und die Bedingung $\frac{dA}{dx} = 0$ bestimmt als maßgebenden Wert x

$$x = z \frac{a}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{z}}\right). \quad (2)$$

Von der Reihe der ganzzahligen ν wählt man jene Zahl, mit der man diesem x am nächsten kommt und erhält aus Gl. (1) die Lagerkonstante A , unter der sich der Stab an der Knickgrenze befindet.

Die Abb. 138 zeigt den Verlauf der Linie $\frac{A l}{P_k}$ in Abhängigkeit von $\frac{z}{\pi}$ für die Felderzahlen $n = 2, 4$ und 8 . Bei $z = \frac{\pi}{n}$ ist $A = 0$ und der

Stab ist dann auf seine ganze Länge $n \cdot l$ knicksicher. Das teilweise Zusammenfallen einzelner Linien hat darin seine Ursache, daß der maßgebende x -Wert an diesen Stellen die gleiche Größe besitzt. — Den Grenzfall $z = \pi$ untersuchen wir unter b).

b) Ein Sonderfall: Der Fachwerkstab.

Die Konstante A wächst mit zunehmendem Parameter z und der absolute Größtwert von A und der Kleinstwert von P entsteht für $z = \pi$, d. h. wenn jede Öffnung für sich die Knickgrenze erreicht. Aus Gl. (1) folgt damit

$$A = \frac{2P}{l} \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n} \right)$$

und A wird in diesem besonderen Fall ein Maximum, wenn ν gleich $n - 1$ ist. Da $\cos(n - 1) \frac{\pi}{n} = -\cos \frac{\pi}{n}$, wird der Grenzwert von A , bei dem die Stützpunkte unter der Knickung nicht nachgeben,

$$A_{\max} = \frac{4P_k}{l} \cos^2 \frac{\pi}{2n}. \quad (3)$$

Für $n = 2$ ist $A_{\max} = \frac{2P_k}{l}$, bei größer werdender Felderzahl nimmt A zu und ist für $n \rightarrow \infty$ gleich $\frac{4P_k}{l}$.

Zur Kontrolle untersuchen wir noch unmittelbar den in den Endpunkten 0 und n gelenkig festgehaltenen Stab von konstantem Querschnitt mit konstanter Druckkraft, wenn alle gleichartig elastisch gelagerten Zwischenpunkte Gelenke sind d. h. also ein Fachwerkstab vorliegt. Von den früheren Gleichungen bleibt nur das System der Lagergleichungen

$$v_{k+1} - v_k \left(2 - \frac{Al}{P} \right) + v_{k-1} = 0 \quad (a)$$

übrig, unter den Randbedingungen $v_0 = 0$, $v_n = 0$. Mit dem Ansatz $v_k = r^k$ und der Abkürzung $\beta = r + \frac{1}{r}$ wird die charakteristische Gleichung

$$\beta - 2 + \frac{Al}{P} = 0$$

und das Integral der Differenzgleichung (a) lautet mit $\beta = 2 \cos \xi$

$$v_k = C_1 \cdot \sin k \xi + C_2 \cdot \cos k \xi.$$

Die Randwerte ergeben $C_2 = 0$, $C_1 \cdot \sin n \xi + C_2 \cdot \cos n \xi = 0$, und die Knickbedingung ist

$$\sin n \xi = 0, \quad \text{d. h. } \xi = \nu \frac{\pi}{n} \quad \text{mit } \nu = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Das Gleichsetzen der Ausdrücke von β und $2 \cos \xi$ führt zur Beziehung

$$2 - \frac{Al}{P} = 2 \cos \nu \frac{\pi}{n} \quad \text{oder} \quad A = \frac{2P}{l} \left(1 - \cos \nu \frac{\pi}{n} \right)$$

und als Größtwerth von A folgt für $\nu = n - 1$ wieder die Gl. (3). Wir haben also tatsächlich das Resultat, welches aus der allgemeinen Gleichung (1) mit der Bedingung $z = \pi$ hervorgeht.¹

Die Gelenkpunkte liegen abwechselnd auf beiden Seiten der stabilen Lage, denn es gilt

$$v_k = C_1 \cdot \sin k(n-1) \frac{\pi}{n} = C \cdot (-1)^k \cdot \sin k \frac{\pi}{n}.$$

c) Die Felderzahl des Stabes ist sehr groß.

Wir nehmen die Berechnung von a) wieder auf und betrachten einen sehr langen Stab, $n \rightarrow \infty$, den man praktischen Rechnungen oft zugrunde legen kann. Von den unendlich vielen Lösungen für x , d. h. $1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}$, greifen wir die heraus, für die A ein analytisches Maximum wird, d. h. wir beachten nicht mehr die Ganzzahligkeit der ν . Setzen wir also das vor bestimmte x in Gl. (1) ein, so bekommen wir die Kraft, die die Verschiebung Eins der Stütze hervorruft, nach einiger Rechnung zu

$$A = \frac{2P_k}{l} \frac{z(1 - \cos z)}{(\sqrt{z} + \sqrt{\sin z})^2}, \quad z^2 = \frac{P_k l^2}{EI}. \quad (4)$$

Schreibt man $\frac{z^2}{2}$ für $1 - \cos z$ und z für $\sin z$, so ergibt sich

$$A = \frac{P_k}{l} \frac{z^2}{4}, \quad (4')$$

eine Gleichung, die für Werte $z < 0,7\pi$ mit (4) gut übereinstimmt. Die Gl. (4') ist aber, wie man sich leicht überzeugt, nichts anderes als die ENGESSERSche Formel $P_k = 2 \sqrt{\frac{A}{l} EI}$, siehe Pkt. 53, deren Gültigkeitsgrenze für die Knickberechnung von Stäben mit elastischen Einzelstützen hiermit festgelegt ist.

Die Abb. 139 enthält den Verlauf der Werte $\frac{Al}{P_k}$ als Funktion von z und man erkennt durch Gegenüberstellen mit der Abb. 138, daß man die Gl. (4) bzw. (4') [volle bzw. strichlierte Linie] für Felderzahlen $n \geq 8$ benutzen darf. In die Figur sind auch die Resultate von Modellversuchen mit Flacheisenstäben eingetragen, die ENGESSER ausgeführt hat, Versuche, bei denen die Knickspannung kleiner als die Proportionalitätsgrenze war. Die theoretische Formel für große Felderzahl ist also in ausreichender Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.²

¹ J. G. BUBNOFF hat (Festigkeit der Schiffe, Petersburg, 1912, Bd. 1, S. 259) eine Formel aufgestellt und Koeffizienten berechnet, die mit Gl. (3) übereinstimmen. W. B. KLEMPERER u. H. B. GIBBONS diskutierten einige Sonderfälle: Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 251f. 1933. Der Maximalwert von A für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ wurde schon von F. ENGESSER aufgefunden: Die seitliche Standfestigkeit offener Brücken. Ztrbl. d. Bauverwaltung, Jahrg. 12, S. 349—351. 1892.

² F. ENGESSER, Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes, Der Eisenbau, Jahrg. 9. S. 28f, 1918.

Im elastischen Bereich bedeutet E im Ausdruck $z^2 = \frac{P_k l^2}{EI}$ den YOUNG'schen Modul; im unelastischen Bereich setzen wir für E den Knickmodul $T = \frac{\sigma_k (a - \sigma_k)^2}{\pi^2 b^2}$ und es ist damit $z = \frac{b \pi l}{a - \sigma_k} i$, wobei $\frac{l}{i}$ die Schlankheit eines Feldes vorstellt und a, b die Materialkonstanten einer linearen Knickbeziehung sind.

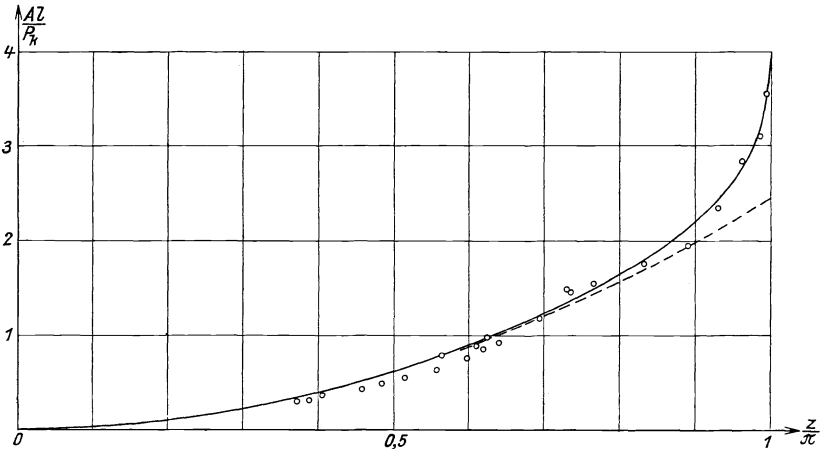


Abb. 139.

97. Fortsetzung von Pkt. 96: Zur Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken. Ergänzende Untersuchungen.

- a) Der an den Enden festgehaltene Stab mit gleichen Öffnungen bei gleichartiger elastischer Stützung.

Die in Pkt. 96 abgeleiteten Formeln sind bei der Berechnung der Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken von Bedeutung. Wird für das seitliche Ausknicken des Gesamtstabes der Sicherheitsgrad s verlangt, so ist bei dem erforderlichen Rahmenwiderstand A die Gebrauchslast P gleich $P_k : s$.

Einer praktischen Berechnung darf man, wie schon erwähnt, für Felderzahlen $n \geq 8$ die Gl. (4) bzw. (4') zugrunde legen. Man entnimmt der Abb. 139, daß für z -Werte in der Nähe von π schon eine kleine Vergrößerung von z ein starkes Anwachsen von A bedingt. Es ist nun wichtig, die folgende Tatsache zu beachten. Wird der Gurt mit der Gebrauchslast P für die „freie Knicklänge“ l mit dem Sicherheitsgrad s_1 ausgebildet, so gilt $\frac{P s_1 l^2}{EI} = \pi^2$. Wählt man bei der Berechnung von A denselben Sicherheitsgrad $s = s_1$, dann ist $z = \pi$ und A erreicht seinen Größtwert $\frac{4 P s}{l}$. Um unter $z = \pi$ zu bleiben, muß $s < s_1$ angenommen werden,

oder anders formuliert: man hat den Stab mit der Sicherheit $s = s_1$ für eine freie Knicklänge zu konstruieren, die größer als die Feldweite l ist. Hierbei wird es sich empfehlen, z -Werte einzuführen, die kleiner als etwa $0,8\pi$ sind.

Schließlich sei angemerkt, daß man diese Formeln auch als Näherung benützen wird, wenn die Kräfte und Querschnitte in den einzelnen Öffnungen nicht sehr verschieden sind. Man wird dann für P und I das Mittel der Stabkräfte bzw. Trägheitsmomente der die Stütze begrenzenden Öffnungen einführen.

Zahlenbeispiel. Der Druckgurt einer offenen Stahlbrücke ist (an der ungünstigsten Stelle) mit $P = 260$ t beansprucht. Die Feldlänge beträgt $l = 4,0$ m, die Querschnittsfläche des Gurtstabes $F = 240$ cm², das maßgebende Trägheitsmoment $I = 52000$ cm⁴. Wie groß ist der erforderliche Rahmenwiderstand der Pfosten, damit eine 2,5-fache Sicherheit für das Ausknicken des Gurtes besteht? Die angegebenen Zahlen sind die Mittelwerte für die den zu untersuchenden Rahmen begrenzenden Gurtstäbe.

Für das Feld von der Länge l sind $i = \sqrt{I:F} = 14,72$ cm, $\frac{l}{i} = 27,17$, und unter Zugrundelegung der TETMAJERSchen Formel $P_k = 240 \cdot (3,10 - 0,0114 \cdot 27,17) = 240 \cdot 2,790 = 669,6$ t. Die Knicksicherheit ist somit $669,6:260 = 2,575$.

Den erforderlichen Rahmenwiderstand A erhalten wir aus Gl. (4). Mit $P_k = 260 \cdot 2,5 = 650$ t ist $\sigma_k = 650:240 = 2,708$ t/cm²; daher wird mit den TETMAJERSchen Materialwerten $z = \frac{b\pi}{a - \sigma_k} \frac{l}{i} = 2,4819$ und weiter

$$A = \frac{2 \cdot 650}{400} \cdot 0,799 = 2,60 \text{ t/cm.}$$

Bei den nicht viel größeren Sicherheitsgraden $s = 2,51$ bzw. $2,55$ bzw. $2,575$ (der dem Einzelstab mit der freien Knicklänge $l = 400$ cm entspricht), wären die erforderlichen Rahmenwiderstände $A = 2,78$ t/cm bzw. $3,89$ t/cm und $A = \frac{4 \cdot 260 \cdot 2,575}{400} = 6,70$ t/cm.

Im Pkt. 99 zeigen wir die Bestimmung der Widerstände der Brückenhalbrahmen, die aus den Pfosten und Querträgern gebildet sind.

b) Die Stützstellen des Stabes sind nach einem besonderen Gesetz ungleichartig elastisch.¹

Der Stab hat n gleiche Öffnungen von der Länge l , eine konstante Druckkraft P und ist an den Enden gelenkig festgehalten. Die Lagerkonstanten A verlaufen symmetrisch zur Mitte des Gesamtstabes ($k = \frac{n}{2}$) nach der Gleichung

$$A_k = C \cdot \left[\alpha + \text{Cos } \beta \left(\frac{n}{2} - k \right) \right]. \quad (1)$$

Da Gl. (1) drei Parameter C , α und β enthält, läßt sich diese Linie in

¹ F. BLEICH u. E. MELAN: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin u. Wien, 1927. S. 226f.

einem praktischen Fall mit α und β der vorhandenen A -Linie anpassen. Der kritische Zusammenhang von A (d. h. C) und P wird gesucht.

Die Knickbedingung ist durch die Gleichung gegeben:

$$0 = \mathfrak{U}^2 \cdot r_1 \cdot r_2 (t_1 \cdot t_3 - t_2^2) + 2 \mathfrak{U} \cdot [\varrho (t_1 \cdot r_1 \cdot s_2^2 + t_3 \cdot r_2 \cdot s_1^2) - r_1 \cdot r_2 (t_1 \cdot s_2 + t_3 \cdot s_1)] + 4 [\varrho^2 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2 - \varrho \cdot s_1 \cdot s_2 (r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1) + r_1 \cdot r_2 \cdot s_1 \cdot s_2]. \quad (2)$$

Hierbei bedeuten:

$$\mathfrak{U} = \frac{Cl}{nP}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

$$r = \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{\sin z - z}, \quad r_1 = r + \cos \nu \frac{\pi}{n}, \quad r_2 = r + \cos (\nu + 2) \frac{\pi}{n},$$

$$s_1 = 1 - \cos \nu \frac{\pi}{n}, \quad s_2 = 1 - \cos (\nu + 2) \frac{\pi}{n}, \quad \varrho = \frac{\sin z}{z - \sin z},$$

$$t_1 = \alpha \cdot n + \text{Sin} \frac{n\beta}{2} \cdot \text{Sin} \beta \cdot \left(\frac{1}{\text{Cos} \beta - 1} - \frac{1}{\text{Cos} \beta - \cos 2\nu \frac{\pi}{n}} \right), \quad (3)$$

$$t_2 = \text{Sin} \frac{n\beta}{2} \cdot \text{Sin} \beta \cdot \left(\frac{1}{\text{Cos} \beta - \cos 2 \frac{\pi}{n}} - \frac{1}{\text{Cos} \beta - \cos 2(\nu + 1) \frac{\pi}{n}} \right),$$

$$t_3 = \alpha \cdot n + \text{Sin} \frac{n\beta}{2} \cdot \text{Sin} \beta \cdot \left(\frac{1}{\text{Cos} \beta - 1} - \frac{1}{\text{Cos} \beta - \cos 2(\nu + 2) \frac{\pi}{n}} \right).$$

In diesen Gleichungen ist ν ein ganzzahliger Koeffizient zwischen 1 und $n - 1$, der so zu wählen ist, daß \mathfrak{U} ein Maximum wird. Die Rechnung muß also versuchsmäßig mit verschiedenen Werten $\nu = 1, 2, \dots$ usw. erfolgen; aus den Gl. (3) werden die Koeffizienten bestimmt, und damit die quadratische Gl. (2) aufgelöst. Der größte \mathfrak{U} -Wert liefert für die Mitte des Gesamtstabes den Rahmenwiderstand, unter dem Instabilitätseintritt:

$$A = C(\alpha + 1) = \frac{nP_k}{l} (\alpha + 1) \cdot \mathfrak{U}_{\max}.$$

c) Schlußbetrachtung.

Das sogenannte Problem der Seitensteifigkeit der Druckgurte offener Brücken, das von F. ENGESSER angeschnitten wurde, besteht in der Aufstellung des Zusammenhanges zwischen Druckkraft und Rahmenwiderstand. Ein vorgegebener Sicherheitsgrad gegen das seitliche Ausknicken wird durch die passende Wahl des Gurtquerschnittes und der Halbrahmen erreicht. Die Vertikale des Halbrahmens, der Pfosten, erhält eine Spannkraft als Organ der Brückentragwand und vom Rahmenwiderstand eine zusätzliche Biegebeanspruchung, die aus der Knicktheorie gefunden wird. Dieses Ergebnis läßt sich in besonderen Fällen in der folgenden Weise interpretieren. Ist die Spannkraft im Pfosten gleich Null, so wäre er ohne Berücksichtigen der Formänderung des Gurtes ein unbelasteter Stab. Unter Heranziehen der Verformung wird also die Beanspruchung dieses „unbelasteten“ Stabes bestimmbar.

Analoge Überlegungen darf man für *Druckstützen* des elastisch gelagerten Stabes anstellen.¹ Bei einer elastischen Stützung, z. B. durch Pendelsäulen von der Höhe h , der Querschnittsfläche F und der Elastizitätszahl E' , ist die Verschiebung unter der Last Eins $v = \frac{h}{E' F}$, und die Konstante A ist gleich $\frac{1}{v} = \frac{E' F}{h}$. Aus dem Gleichsetzen mit dem Wert A der Knickbedingung kann die erforderliche Querschnittsfläche der Stütze so ermittelt werden, daß $z = \pi$ für jede Öffnung die kleinste Knicklast ist.

98. Die Seitensteifigkeit eines ebenen Polygonrahmens.

a) Wir betrachten einen ebenen Polygonrahmen, einen sogenannten ebenen Stabzug und untersuchen das Ausknicken senkrecht zur Stabebene. In jedem Eckpunkt denken wir uns einen Knotenkörper, in dem die beiden angrenzenden Stäbe in einem Zylinder drehbar (torsionsfrei) gelagert sind; senkrecht zur Ebene des Rahmens ist jeder Knoten elastisch gestützt. Unter dieser Annahme können wir die Seitensteifigkeit des Polygonzuges mit kleinen Umformungen aus den Gleichungen für den geraden Stab berechnen.

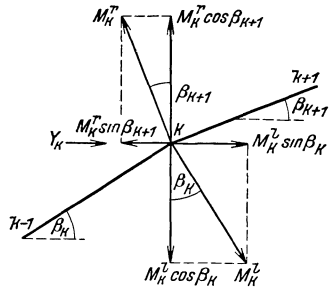


Abb. 140.

Zwei aufeinander folgende Polygonstäbe l_k, l_{k+1} mit den Kräften P_k, P_{k+1} und den Neigungswinkeln β_k, β_{k+1} gegen die Horizontale haben links und rechts vom Knoten k die Momente M_k^l bzw. M_k^r in der Ebene senkrecht zur Tragwand. Die Abb. 140 zeigt diese Momente in vektorieller Darstellung und ihre Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten. Die Gleichgewichtsbedingung in waagrechter Richtung ergibt die Beziehung

$$M_k^l \cdot \cos \beta_k = M_k^r \cdot \cos \beta_{k+1} \equiv M_k,$$

und damit sind die Endmomente der Stäbe durch das in der waagrechten Ebene wirkende Knotenmoment M ausgedrückt. Das in der lotrechten Richtung wirkende Moment

$$M_k^l \cdot \sin \beta_k - M_k^r \cdot \sin \beta_{k+1} = M_k \cdot (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_{k+1}) \equiv Y_k \quad (1)$$

verdreht die Stäbe in ihren Lagern und ist für uns jetzt ohne Bedeutung.

Wir nehmen wie beim geraden Stab an, daß die Horizontalprojektion der elastischen Linie einen stetigen Verlauf besitzt. Um nun die Winkelgrößen v' in der waagrechten Projektion zu erhalten, sind die früheren Werte durch den cosinus des Stabneigungswinkels zu dividieren. Sind die Tangentenneigungen der verformten Stäbe links und rechts vom

¹ P. FILLUNGER u. K. JEŽEK: Über die Beanspruchung von „unbelasteten“ Stäben. Der Bauingenieur, 13. Jahrg., S. 870. 1931. — K. JEŽEK: Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., 84. Jahrg., H. 3/4. 1932.

Knoten k mit v_b' und v_a' benannt, so ist die Bedingung der Stetigkeit der Elastica im Knoten k

$$\frac{v_b'}{\cos \beta_k} - \frac{v_a'}{\cos \beta_{k+1}} = 0. \quad (2)$$

Für die Neigungswinkel der verformten Gurtstäbe bestehen unter Beachtung von (1) die Gleichungen, vgl. Pkt. 88

$$\begin{aligned} v_b' &= \frac{v_k - v_{k-1}}{l_k} - M_{k-1} \cdot \frac{\psi_k''}{\cos \beta_k} - M_k \cdot \frac{\psi_k'}{\cos \beta_k}, \\ v_a' &= \frac{v_{k+1} - v_k}{l_{k+1}} + M_k \cdot \frac{\psi_{k+1}'}{\cos \beta_{k+1}} + M_{k+1} \cdot \frac{\psi_{k+1}''}{\cos \beta_{k+1}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\psi' = \frac{1}{Pl} \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{\sin z}, \quad \psi'' = \frac{1}{Pl} \frac{\sin z - z}{\sin z}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI}.$$

Damit folgt die entwickelte *Stetigkeitsbedingung*

$$\begin{aligned} M_{k-1} \cdot \frac{\psi_k''}{\cos^2 \beta_k} + M_k \left(\frac{\psi_k'}{\cos^2 \beta_k} + \frac{\psi_{k+1}'}{\cos^2 \beta_{k+1}} \right) + M_{k+1} \cdot \frac{\psi_{k+1}''}{\cos^2 \beta_{k+1}} + \\ + v_{k-1} \cdot \frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} - v_k \left(\frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} + \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} \right) + \\ + v_{k+1} \cdot \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} = 0. \quad (I) \end{aligned}$$

Die Lagergleichung können wir nach den Herleitungen vom geraden Stab ohne weiteres angeben. Die Stützkraft C_k ist, vgl. Pkt. 89,

$$\begin{aligned} C_k &= -M_{k-1} \cdot \frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} + M_k \left(\frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} + \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} \right) - \\ - M_{k+1} \cdot \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} - v_{k-1} \cdot \frac{P_k}{l_k} + v_k \left(\frac{P_k}{l_k} + \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}} \right) - v_{k+1} \cdot \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}}, \end{aligned}$$

und mit $C_k = v_k \cdot A_k$ lautet demnach die *Lagergleichung*

$$\begin{aligned} M_{k-1} \frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} - M_k \left(\frac{1}{l_k \cdot \cos \beta_k} + \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} \right) + \\ + M_{k+1} \frac{1}{l_{k+1} \cdot \cos \beta_{k+1}} + v_{k-1} \frac{P_k}{l_k} - v_k \left(\frac{P_k}{l_k} + \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}} \right) + \\ + v_{k+1} \frac{P_{k+1}}{l_{k+1}} + v_k \cdot A_k = 0. \quad (II) \end{aligned}$$

Führen wir die Abkürzungen ein:

$$\frac{\psi'}{\cos^2 \beta} = \varphi', \quad \frac{\psi''}{\cos^2 \beta} = \varphi'', \quad l \cos \beta = a, \quad P \cos \beta = H, \quad \text{mit } z^2 = \frac{Pl^2}{EI},$$

so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} M_{k-1} \cdot \varphi_k'' + M_k (\varphi_k' + \varphi_{k+1}') + M_{k+1} \cdot \varphi_{k+1}'' + \frac{v_{k-1}}{a_k} - \\ - v_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{v_{k+1}}{a_{k+1}} = 0, \\ M_{k-1} \frac{1}{a_k} - M_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) + M_{k+1} \frac{1}{a_{k+1}} + v_{k-1} \frac{H_k}{a_k} - \\ - v_k \left(\frac{H_k}{a_k} + \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} - A_k \right) + v_{k+1} \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} = 0. \quad (K) \end{aligned}$$

also Beziehungen von derselben Bauart wie beim geraden Stab. Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante des Systems (K) ist die Knickbedingung.

Sind H , a und A konstant, so können wir analoge Schlußfolgerungen ziehen, wie in Pkt. 96. Bei gelenkig festgehaltenen Enden gilt für große Felderzahl mit dem Sicherheitsgrad s die Gleichung

$$A_{erf} = \frac{2 H s}{a} \frac{z (1 - \cos z)}{(\sqrt{z} + \sqrt{\sin z})^2},$$

$$z^2 = \frac{P s l^2}{E I}.$$

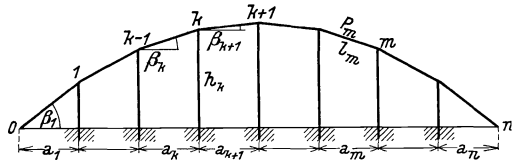


Abb. 141.

b) Wir ändern das voranstehende Beispiel dahin ab, daß in den einzelnen Knotenpunkten Hängestangen angebracht werden (Abb. 141). Der Vertikalstab ist im Knotenkörper, in welchem zwei Polygonstäbe biegesteif, aber torsionsfrei lagern, mittels eines lotrechten zylindrischen Zapfens reibungslos in einer Büchse eingehängt und an seinem unteren Ende eingespannt.

Wie vor, gelten die Gleichungen

$$M_k = M_k' \cdot \cos \beta_k = M_k' \cdot \cos \beta_{k+1}, \quad Y_k = M_k \cdot (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_{k+1}), \quad (1)$$

wobei das Moment Y jetzt von der Hängestange aufgenommen werden soll.

Die früher getroffene Annahme, daß der Grundriß der Biegelinie nach der Verformung einen stetigen Verlauf hat, läßt sich hier nicht aufrecht halten.¹ Die richtige Kontinuitätsbedingung besagt vielmehr, daß in dem steifen Knoten die beiden Gurttangente und die Tangente an die Vertikale auch nach der Deformation in einer Ebene bleiben.

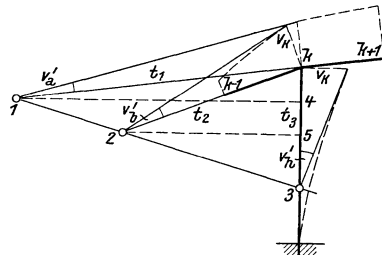


Abb. 142.

Die Abb. 142 zeigt die drei im Knoten k zusammenstoßenden Stäbe, deren Endpunkte die Ausbiegungen v_{k-1} , v_k , v_{k+1} und Null besitzen. Die Biegelinien sind in die Zeichenebene umgeklappt und die Tangenten im Punkt k eingetragen. Da die drei Tangenten einer Ebene angehören, müssen ihre Schnittpunkte 1, 2 und 3 mit den betreffenden unverformten Stäben in einer Geraden liegen. Die Neigungswinkel der Tangenten von den Gurtstäben benennen wir wieder links vom Knoten k mit v'_1 , rechts

¹ Vgl. A. OSTENFELD: Die Seitensteifigkeit offener Brücken. Beton u. Eisen, 15. Jahrg., S. 123f. 1916. — H. ZIMMERMANN u. H. MÜLLER-BRESLAU sehen diese Annahme hingegen für alle Fälle als gültig an. — H. ZIMMERMANN: Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, S. 326f. 1907. — H. MÜLLER-BRESLAU: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, 2. Abt., S. 334f.

mit v_a' und von der Hängesäule mit v_h' . Nun sind die Abstände des Knotens k von den Punkten 1, 2 und 3

$$t_1 = v_k : v_a', \quad t_2 = v_k : v_b', \quad t_3 = v_k : v_h'.$$

Die Bedingung, daß die drei „Durchstoßpunkte“ in einer Geraden liegen, formulieren wir so: Wir ziehen von 1 und 2 senkrechte Linien auf t_3 und schreiben mit Hilfe der ähnlichen Dreiecke 1, 4, 3 und 2, 5, 3 die Beziehung an

$$\overline{1, 4} : \overline{2, 5} = \overline{4, 3} : \overline{5, 3}.$$

Setzen wir die Werte

$$\begin{aligned} \overline{1, 4} &= t_1 \cdot \cos \beta_{k+1}, & \overline{2, 5} &= t_2 \cdot \cos \beta_k, \\ \overline{4, 3} &= t_3 - t_1 \cdot \sin \beta_{k+1}, & \overline{5, 3} &= t_3 - t_2 \cdot \sin \beta_k \end{aligned}$$

ein und beachten die Gleichungen für die t , so folgt die Stetigkeitsbedingung

$$\frac{v_b'}{\cos \beta_k} - \frac{v_a'}{\cos \beta_{k+1}} = v_h' \cdot (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_{k+1}). \quad (2)$$

Die gleich Null gesetzte linke Gleichungsseite wäre die Bedingung, daß der Grundriß der elastischen Linie des Polygonzuges eine Linie stetiger Krümmung ist; der Zusatz auf der rechten Seite entspricht dem Vorhandensein der Hängesäulen, die das Moment Y aufnehmen. Nur bei sehr flachen Rahmen wird dieser Zusatz ohne Einfluß bleiben.

Wir haben gegenüber a) nur noch die rechte Seite der Gl. (2) zu bestimmen. Im Knoten k gelten die Ansätze

$$v_h = C_k \cdot \xi_k + Y_k \cdot \eta_k = v_k, \quad v_h' = C_k \cdot \xi_k' + Y_k \cdot \eta_k', \quad (3)$$

wenn ξ_k bzw. ξ_k' die Ausbiegung bzw. Tangentenneigung des Hängesäulenkopfes infolge der Kraft $C_k = 1$ und η_k bzw. η_k' die Ausbiegung bzw. Tangentenneigung infolge des Momentes $Y_k = 1$ bedeuten. Für den am unteren Ende eingespannten Stab von der Höhe h_k sind zum Beispiel

$$\xi_k = \frac{h_k^3}{3 E I_h}, \quad \xi_k' = \frac{h_k^2}{2 E I_h} \quad \text{und} \quad \eta_k = \frac{h_k^2}{2 E I_h}, \quad \eta_k' = \frac{h_k}{E I_h}.$$

Die Stützkraft C_k hat den früher angegebenen Wert, und somit läßt sich der Zusatzausdruck in Gl. (2) anschreiben. Fügen wir zu den Abkürzungen unter a) noch

$$\tau_k = \operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_{k+1}, \quad \tau_k \cdot \xi_k' = \sigma_k$$

hinzu, so lautet schließlich die *Stetigkeitsbedingung* in entwickelter Form

$$\begin{aligned} &M_{k-1} \left(\varphi_k'' - \frac{\sigma_k}{a_k} \right) + M_k \left(\varphi_k' + \varphi_{k+1}' + \frac{\sigma_k}{a_k} + \frac{\sigma_k}{a_{k+1}} + \tau_k^2 \cdot \eta_k' \right) + \\ &+ M_{k+1} \left(\varphi_{k+1}'' - \frac{\sigma_k}{a_{k+1}} \right) + v_{k-1} \left(\frac{1}{a_k} - \sigma_k \cdot \frac{H_k}{a_k} \right) - v_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} - \right. \\ &\left. - \sigma_k \cdot \frac{H_k}{a_k} - \sigma_k \cdot \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} \right) + v_{k+1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \sigma_k \cdot \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} \right) = 0. \quad (I) \end{aligned}$$

Geht man mit C_k und Y_k in die Gleichung für v_h ein, so erhält man die *Lagergleichung*

$$M_{k-1} \frac{1}{a_k} - M_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{\tau_k \eta_k}{\xi_k} \right) + M_{k+1} \frac{1}{a_{k+1}} + v_{k-1} \frac{H_k}{a_k} - v_k \left(\frac{H_k}{a_k} + \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} - \frac{1}{\xi_k} \right) + v_{k+1} \frac{H_{k+1}}{a_{k+1}} = 0, \quad (\text{II})$$

die zweite Beziehung in M und v . Mit $\frac{1}{\xi_k} = A_k$, $\eta_k = 0$ und $\xi_k' = 0$, $\eta_k' = 0$ kommt man auf die Gleichungen von a) zurück.

Die beiden Systeme (I) und (II) liefern die erforderliche Gleichungszahl für die unbekanntenen Momente und Ausbiegungen und die gleich Null gesetzte Determinante ist die Knickbedingung. Wir erinnern daran, daß für den jeweiligen Wert E der YOUNGSche Modul des Materials oder, wenn die resultierende Spannung die Proportionalitätsgrenze überschreitet, der zugehörige Knickmodul einzuführen ist.

Das behandelte Problem der Seitensteifigkeit läßt verschiedene Erweiterungen zu. Die Hängestangen können z. B. die Vertikalstäbe von Halbrahmen sein, so daß in den Gleichungen für v_h und v_h' noch Konstantwerte hinzutreten, die von der Belastung der Querträger abhängen. An Stelle des Polygonzuges kann ein Fachwerkgerüst verwendet werden u. dgl. mehr.

99. Zusatz. Über die Ausbiegung der Querrahmen von Brücken.

Bei einer elastischen Stützung haben wir die Gleichung $C_k = v_k \cdot A_k$ eingeführt, d. h. die Auflagerkraft proportional der Ausbiegung angenommen. Die Konstante A_k ergibt sich aus der Verschiebung des Punktes k der Stützkonstruktion und für $C_k = 1$ ist

$$A_k = \frac{1}{v_k}.$$

Wir wollen als Beispiel für zwei gebräuchliche Brückenbauarten die Werte A , d. h. die Rahmenwiderstände berechnen.

a) *Offene Halbrahmen*. Bei einer offenen Brücke sind die Querverbände sog. Halbrahmen, d. s. Rahmen von U-förmiger Gestalt, die aus einem Fahrbahnquerträger und zwei Pfosten bestehen (Abb. 143). Wir bestimmen die Ausbiegung der beiden Rahmenenden unter der Wirkung von dort angreifenden Horizontalkräften „Eins“, also die reziproken Werte von A .

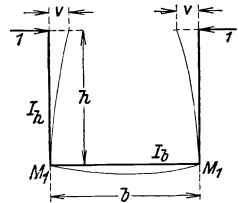


Abb. 143.

In den Rahmenstielen sei eine Längskraft V vorhanden. Dann lautet unsere Stetigkeitsbedingung (A) von Pkt. 89, mit den Bezeichnungen der Abb. 143,

$$M_1 (\psi_h' + \psi_b') + M_1 \cdot \psi_b'' + \frac{v}{h} = 0,$$

und da $M_1 = 1 \cdot h$, ergibt sich die Beziehung

$$v = -h^2 \cdot (\psi_h' + \psi_b' + \psi_b'').$$

Hierbei sind für den *Querträger*, bei dem die Längskraft angenähert gleich Null ist

$$\psi_b' = -\frac{1}{3} \frac{b}{EI_b}, \quad \psi_b'' = -\frac{1}{6} \frac{b}{EI_b}.$$

Für die *Vertikalen* gilt, bei einer Druckkraft V ,

$$\psi_h' = \frac{h}{EI_h} \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad z^2 = \frac{Vh^2}{EI_h},$$

bei einer Zugkraft V

$$\psi_h' = \frac{h}{EI_h} \frac{\text{Esin } z' - z' \cdot \text{Cos } z'}{z'^2 \cdot \text{Esin } z'}, \quad z' = z \cdot \sqrt{-1},$$

und bei dem Wert $V = 0$, den man der Rechnung in der Regel zugrunde legen darf,

$$\psi_h' = -\frac{1}{3} \frac{h}{EI_h}.$$

Man hat daher das Resultat

$$A = \frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{h^2 b}{2EI_b} - h^2 \psi_h'},$$

wobei die ψ_h' die vor angegebenen Werte haben. Angenähert läßt sich der Einfluß der Querträgerhöhe auf die Verringerung der Ausbiegung so berücksichtigen, daß man im Ausdruck $h^2 \psi_h'$ für h die sogenannte freie Ständerhöhe h_1 einsetzt, indem man von h etwa die halbe Querträgerhöhe abzieht.

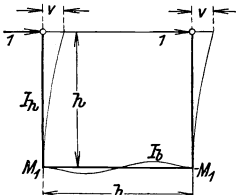


Abb. 144.

b) *Offene Halbrahmen mit gelenkig angeschlossenen Querriegeln* (Abb. 144). Ist der Querriegel starr, so biegen sich die beiden Obergurte nach derselben Seite aus, und die Deformation erfolgt so, wie es die Figur andeutet. Man entnimmt der Anschauung, daß die Eckmomente M_1

jetzt verschiedene Vorzeichen haben, und somit ist die Stetigkeitsbedingung

$$M_1 (\psi_h' + \psi_b') - M_1 \cdot \psi_b'' + \frac{v}{h} = 0.$$

Mit den gleichen Überlegungen wie früher bekommt man den Rahmenwiderstand

$$A = \frac{1}{\frac{h^2 b}{6EI_b} - h^2 \psi_h'}.$$

Hierbei sind die ψ_h' dieselben Werte wie vor. An Stelle von $h^2 \psi_h'$ darf wieder $h_1^2 \psi_h'$ gesetzt werden.

Bei Brücken mit unterem und oberem Windverband liegt der elastisch gestützte Gurt auch zwischen den beiden Verbänden. Die Querkonstruktion ist ein Viereckrahmen, und wenn man ausreichend genau die

Wirkung der Längskräfte auf die Verformung außer acht läßt, so ist die Ausbiegung der Stiele am Ort der Gurte nach den bekannten Methoden der Statik statisch unbestimmter Systeme zu berechnen.¹

100. Ein abwechselnd in zwei verschiedenen Ebenen gestützter Stab.

Ein gleichschenkeliges Winkelleisen ist an den Enden 0 und n in festen Gelenken und in $n - 1$ Zwischenpunkten auf durch den Schwerpunkt gehenden Pendelstützen gelagert. Diese in gleichen Abständen l angeordneten Stützen haben abwechselnd die Richtung des einen und des anderen Schenkels, Abb. 145. Der Stab ist durch die zentrische Druckkraft P beansprucht und der kritische Lastwert ist gesucht. — In der Baupraxis wird dieser Fall z. B. bei Leitungsmasten realisiert, deren Verstrebung häufig so gebildet ist, daß die Eckwinkel in der beschriebenen Weise gestützt sind.

Wir legen für unsere Rechnung ein rechtwinkliges Koordinatensystem u, v, w fest, so daß die u -Achse mit der Stabachse, die v -Achse mit der I_{\max} - und die w -Achse mit der I_{\min} -Achse des Querschnittes zusammenfällt (Abb. 145).

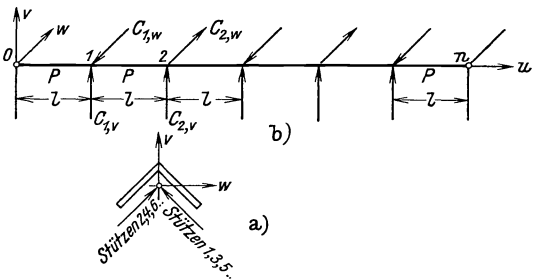


Abb. 145.

Die Momente an den Stützstellen sind in der v, u -Ebene mit M , in der w, u -Ebene mit N bezeichnet. Die Komponenten der Stützkräfte in beiden Ebenen C_v und C_w werden positiv gerechnet, wenn ihre Richtung die der positiven v - bzw. w -Achse ist.

Zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützpunkten $k - 1, k, k + 1$ besteht in der v, u -Ebene die Stetigkeitsbedingung

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2 M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' + \frac{v_{k-1}}{l} - 2 \frac{v_k}{l} + \frac{v_{k+1}}{l} = 0$$

und die Gleichung für die Stützkraft in k ist (vgl. auch Pkt. 89)

$$- M_{k-1} \frac{1}{Pl} + 2 M_k \frac{1}{Pl} - M_{k+1} \frac{1}{Pl} - \frac{v_{k-1}}{l} + 2 \frac{v_k}{l} - \frac{v_{k+1}}{l} = \frac{C_{k,v}}{P}.$$

In analoger Weise gelten in der w, u -Ebene die Beziehungen

$$N_{k-1} \cdot \varphi'' + 2 N_k \cdot \varphi' + N_{k+1} \cdot \varphi'' + \frac{w_{k-1}}{l} - 2 \frac{w_k}{l} + \frac{w_{k+1}}{l} = 0,$$

$$- N_{k-1} \frac{1}{Pl} + 2 N_k \frac{1}{Pl} - N_{k+1} \frac{1}{Pl} - \frac{w_{k-1}}{l} + 2 \frac{w_k}{l} - \frac{w_{k+1}}{l} = \frac{C_{k,w}}{P}.$$

Hierbei sind

¹ Siehe z. B. H. MÜLLER-BRESLAU: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Leipzig, 1908. 2. Bd., 2. Abt., S. 316f.

$$Pl\psi' = \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{\sin z}, \quad Pl\psi'' = \frac{\sin z - z}{\sin z}, \quad z^2 = \frac{Pl^2}{EI_w} = \frac{Pl^2}{EI_{\min}},$$

$$Pl\varphi' = \frac{z' \cdot \cos z' - \sin z'}{\sin z'}, \quad Pl\varphi'' = \frac{\sin z' - z'}{\sin z'}, \quad z'^2 = \frac{Pl^2}{EI_v} = \frac{Pl^2}{EI_{\max}}.$$

Dieses Gleichungssystem mit den Randbedingungen an den Stabenden

$$M_0 = N_0 = 0, \quad v_0 = w_0 = 0; \quad M_n = N_n = 0, \quad v_n = w_n = 0$$

leistet die Lösung unserer Aufgabe. In jedem der $n - 1$ Zwischenstützpunkte sind zwei Momente, zwei Verschiebungen und zwei Komponenten der Auflagerkraft unbekannt; daher ist die Zahl der Unbekannten $6(n - 1)$. Die Zahl der aufgeschriebenen Gleichungen ist $4(n - 1)$, aber wir haben in jedem Stützpunkt eine lineare Beziehung zwischen w und v einerseits und zwischen C_w und C_v andererseits zur Verfügung.

Für ein ungerades k sind in unserer Bezeichnung (siehe Abb. 145) $w = v$, $C_w = -C_v$, und für ein gerades k sind $w = -v$, $C_w = C_v$. Die Gleichungen in der w, u -Ebene lauten damit

$$N_{k-1} \cdot \varphi'' + 2N_k \cdot \varphi' + N_{k+1} \cdot \varphi'' \mp \frac{v_{k-1}}{l} \mp 2 \frac{v_k}{l} \mp \frac{v_{k+1}}{l} = 0,$$

$$-N_{k-1} \frac{1}{Pl} + 2N_k \frac{1}{Pl} - N_{k+1} \frac{1}{Pl} \pm \frac{v_{k-1}}{l} \pm 2 \frac{v_k}{l} \pm \frac{v_{k+1}}{l} = \mp \frac{C_{k,v}}{P},$$

wo bei den Doppelzeichen das obere Vorzeichen für ungerade k , das untere für gerade k gilt. Setzen wir $N_k = (-1)^k \cdot L_k$, so gewinnen beide Gleichungen eine gemeinsame Form und wir erhalten das System

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' + \frac{v_{k-1}}{l} - 2 \frac{v_k}{l} + \frac{v_{k+1}}{l} = 0, \quad (\text{a})$$

$$-M_{k-1} \frac{1}{Pl} + 2M_k \frac{1}{Pl} - M_{k+1} \frac{1}{Pl} - \frac{v_{k-1}}{l} + 2 \frac{v_k}{l} - \frac{v_{k+1}}{l} = \frac{C_{k,v}}{P}, \quad (\text{b})$$

$$L_{k-1} \cdot \varphi'' - 2L_k \cdot \varphi' + L_{k+1} \cdot \varphi'' - \frac{v_{k-1}}{l} - 2 \frac{v_k}{l} - \frac{v_{k+1}}{l} = 0, \quad (\text{c})$$

$$-L_{k-1} \frac{1}{Pl} - 2L_k \frac{1}{Pl} - L_{k+1} \frac{1}{Pl} + \frac{v_{k-1}}{l} + 2 \frac{v_k}{l} + \frac{v_{k+1}}{l} = -\frac{C_{k,v}}{P}. \quad (\text{d})$$

Wir wollen aus diesen Ansätzen die Ausbiegungen eliminieren. Addieren wir die Gl. (a) bis (d), so entsteht eine Differenzgleichung in den Variablen M und L

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' + L_{k-1} \cdot \varphi'' - 2L_k \cdot \varphi' + L_{k+1} \cdot \varphi'' -$$

$$-\frac{1}{Pl} (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) - \frac{1}{Pl} (L_{k-1} + 2L_k + L_{k+1}) = 0. \quad (\text{K}_1)$$

Eine zweite Gleichung finden wir in der folgenden Weise. Die Addition von (b) und (d) liefert

$$4 \frac{v_k}{l} = \frac{1}{Pl} (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1} + L_{k-1} - 2L_k + L_{k+1}),$$

und wenn wir diese Gleichung für v_k auch auf $k - 1$ und $k + 1$ anwenden und in (a) eingehen, ergibt sich

$$M_{k-1} \cdot \psi'' + 2 M_k \cdot \psi' + M_{k+1} \cdot \psi'' + \frac{1}{4 P \bar{l}} (M_{k-2} - 4 M_{k-1} + 6 M_k - 4 M_{k+1} + M_{k+2}) + \frac{1}{4 P \bar{l}} (L_{k-2} - 2 L_k + L_{k+2}) = 0. \quad (\text{K}_2)$$

In den zwei simultanen Differenzgleichungen (K) lassen wir k in (K₁) von 0 bis n , und in (K₂) von 1 bis $n - 1$ laufen, wobei wir die Momentgrößen $M_{-1}, L_{-1}, M_{n+1}, L_{n+1}$ als Unbekannte hinzunehmen. Wir haben also $(n + 1) + (n - 1)$, d. h. $2n$ Gleichungen gegenüber $2(n + 3)$ Momenten. Für das Verschwinden der Momente an den Stabenden gelten die vier Randwerte

$$M_0 = L_0 = M_n = L_n = 0, \quad (\text{R}_1)$$

und die zwei noch fehlenden bekommen wir mit einer besonderen Herleitung. Setzen wir in den Gl. (b) und (d) für $k = 0$ und addieren, so folgt die Bedingung

$$M_{-1} + M_1 + L_{-1} + L_1 = 0 \quad (\text{R}_2)$$

und analog

$$M_{n-1} + M_{n+1} + L_{n-1} + L_{n+1} = 0.$$

In die Gl. (K) gehen wir nun mit dem Lösungsansatz $M_k = r^k, L_k = \alpha \cdot r^k$ ein und erhalten mit der Abkürzung $\beta = r + \frac{1}{r}$ die charakteristischen Gleichungen

$$\psi'' \beta + 2 \psi' + \alpha (\varphi'' \beta - 2 \varphi') - \frac{1}{P \bar{l}} (\beta - 2) - \frac{\alpha}{P \bar{l}} (\beta + 2) = 0,$$

$$\psi'' \beta + 2 \psi' + \frac{1}{4 P \bar{l}} (\beta - 2)^2 + \frac{\alpha}{4 P \bar{l}} (\beta^2 - 4) = 0.$$

Eliminiert man das α , so entsteht die Gleichung

$$a_0 \cdot \beta^3 + a_1 \cdot \beta^2 + a_2 \cdot \beta + a_3 = 0, \quad (1)$$

mit den Werten

$$a_0 = \frac{1}{4 P \bar{l}} (\psi'' - \varphi''),$$

$$a_1 = \frac{1}{P \bar{l}} (\psi'' + \varphi'') + \frac{1}{2 P \bar{l}} (\psi' + \varphi') - \psi'' \varphi'',$$

$$a_2 = \frac{1}{P \bar{l}} (\psi'' - \varphi'') + \frac{2}{P \bar{l}} (\psi' - \varphi') + 2 \psi'' \varphi' - 2 \psi' \varphi'',$$

$$a_3 = \frac{2}{P \bar{l}} (\psi' + \varphi') + 4 \psi' \varphi'.$$

Entsprechend den drei Wurzeln β und den drei Werten α der charakteristischen Gleichungen setzen wir $\beta_1 = 2 \cos \xi, \beta_2 = 2 \cos \eta, \beta_3 = 2 \cos \zeta$ und schreiben als Integral der Gl. (K)

$$M_k = C_1 \cdot \sin k \xi + C_2 \cdot \cos k \xi + C_3 \cdot \sin k \eta + C_4 \cdot \cos k \eta + C_5 \cdot \sin k \zeta + C_6 \cdot \cos k \zeta,$$

$$L_k = \alpha_1 \cdot (C_1 \cdot \sin k \xi + C_2 \cdot \cos k \xi) + \alpha_2 \cdot (C_3 \cdot \sin k \eta + C_4 \cdot \cos k \eta) + \alpha_3 \cdot (C_5 \cdot \sin k \zeta + C_6 \cdot \cos k \zeta).$$

Die Randbedingungen (R) liefern damit die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 0 &= C_2 + C_4 + C_6, \\
 0 &= \alpha_1 \cdot C_2 + \alpha_2 \cdot C_4 + \alpha_3 \cdot C_6, \\
 0 &= (1 + \alpha_1) \cdot C_2 \cdot \cos \xi + (1 + \alpha_2) \cdot C_4 \cdot \cos \eta + (1 + \alpha_3) \cdot C_6 \cdot \cos \zeta, \\
 0 &= C_1 \cdot \sin n \xi + C_2 \cdot \cos n \xi + C_3 \cdot \sin n \eta + C_4 \cdot \cos n \eta + C_5 \cdot \sin n \zeta + \\
 &\quad + C_6 \cdot \cos n \zeta, \\
 0 &= \alpha_1 \cdot C_1 \cdot \sin n \xi + \alpha_1 \cdot C_2 \cdot \cos n \xi + \alpha_2 \cdot C_3 \cdot \sin n \eta + \alpha_2 \cdot C_4 \cdot \cos n \eta + \\
 &\quad + \alpha_3 \cdot C_5 \cdot \sin n \zeta + \alpha_3 \cdot C_6 \cdot \cos n \zeta, \\
 0 &= (1 + \alpha_1) \cdot C_1 \cdot \sin n \xi \cdot \cos \xi + (1 + \alpha_1) \cdot C_2 \cdot \cos n \xi \cdot \cos \xi + \\
 &\quad + (1 + \alpha_2) \cdot C_3 \cdot \sin n \eta \cdot \cos \eta + (1 + \alpha_2) \cdot C_4 \cdot \cos n \eta \cdot \cos \eta + \\
 &\quad + (1 + \alpha_3) \cdot C_5 \cdot \sin n \zeta \cdot \cos \zeta + (1 + \alpha_3) \cdot C_6 \cdot \cos n \zeta \cdot \cos \zeta.
 \end{aligned}$$

Die gleich Null gesetzte Determinante, die Knickbedingung, zerfällt in zwei Determinanten, da die ersten drei Gleichungen die Konstanten C_1 , C_3 und C_5 nicht enthalten, also die ersten drei Zeilen der Determinante in drei Spalten Nullstellen besitzen. Als maßgebende Knickbedingung folgt

$$\sin n \xi = 0, \quad \sin n \eta = 0, \quad \sin n \zeta = 0,$$

und

$$\xi = \nu \frac{\pi}{n}, \quad \eta = \nu \frac{\pi}{n}, \quad \zeta = \nu \frac{\pi}{n},$$

wobei ν von 1, 2 bis $n - 1$ läuft, da $\nu = 0$ und $\nu = n$ als Fälle der Doppelwurzeln zur trivialen Lösung $M = 0$ führen. Somit ist

$$\beta = 2 \cos \nu \frac{\pi}{n}, \quad (2)$$

und die Knickgleichung wird durch Verbindung der Gl. (1) mit (2)

$$a_0 \cdot 8 \cos^3 \nu \frac{\pi}{n} + a_1 \cdot 4 \cos^2 \nu \frac{\pi}{n} + a_2 \cdot 2 \cos \nu \frac{\pi}{n} + a_3 = 0.$$

Für ν ist jener Wert zu wählen, der für den Parameter z bzw. z' den kleinsten Wert ergibt.¹

Im Fall $n = 2$ ist die Knickbedingung $a_3 = 0$ oder

$$\psi' + \varphi' + 2Pl \cdot \psi' \varphi' = 0,$$

wie man ebenso unmittelbar leicht errechnen kann. Nimmt man für $I_{\max} : I_{\min} = z^2 : z'^2$ den beim gleichschenkeligen Winkeleisen etwa zu treffenden Mittelwert von 3,8 an, so wird (vgl. die Tabelle am Schluß des Buches) $z = 2,419$. Daher ist die Knicklast

$$P_k = 5,85 \frac{EI_{\min}}{l^2}.$$

¹ Zum gleichen Resultat kommen F. u. H. BLEICH: Die Stabilität räumlicher Stabverbindungen. Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Ver., Jahrg. 80, S. 349f. 1928. — Vgl. auch K. GIRMANN: Die Knickfestigkeit der Eckstäbe von Raumtragwerken mit ebenen Knoten. Ztschr. d. V. D. I., Bd. 72, S. 588 bis 590. 1928.

Auch der Fall $n = 3$ läßt sich unschwer direkt berechnen, wenn man als Unbekannte $(M_1 + M_2)$, $(M_1 - M_2)$, $(L_1 + L_2)$, $(L_1 - L_2)$, v_1 und v_2 einführt. Wir erhalten $z = 2,086$ und die Knicklast

$$P_k = 4,35 \frac{EI_{\min}}{l^2}.$$

Für größere n schwankt die Knicklast über den Wert von $n = 3$ auf und ab und erreicht den Kleinstwert für $n = \infty$. Hierbei ist $z = 2,048$ und die kritische Last

$$P_k = 4,20 \frac{EI_{\min}}{l^2}.$$

In praktischen Fällen wird man für Werte $n > 3$ mit dem Wert für $n = \infty$ rechnen dürfen.

Fallen die Ebenen der Stützen mit den Ebenen der Hauptachsen zusammen, so knickt der Stab in der Ebene senkrecht zur Achse des kleinsten Trägheitsmomentes mit der Knicklänge $2l$ aus. Bei zwei über Eck gestellten Winkeln mit $I_{\max} = I_{\min}$ sind die Trägheitsmomente für alle Schwerachsen gleich und der Stab knickt in der Richtung einer der Stützebenen mit der Knicklänge $2l$ (Abb. 146).

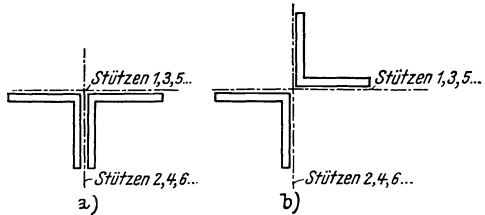


Abb. 146.

Siebenter Abschnitt.

Die Stabilität von Bogenträgern in ihrer Ebene.

§ 28. Die Stabilität des Kreisbogens unter gleichmäßigem äußeren Druck.

101. Der gleichmäßige äußere Druck bleibt normal zur verzerrten Mittellinie. Die Differentialgleichung des Problems und ihre Lösung.

Wir betrachten einen dünnen, nach einem Kreisbogen mit dem Radius a geformten Stab, der unter einem gleichmäßigen radialen Druck p steht. Solange der Druck eine bestimmte Größe nicht überschreitet, wirkt im Stab nur die tangential gerichtete Druckkraft $P = p \cdot a$ mit der Gleichgewichtsform einer gleichmäßigen Pressung. Nach Erreichen dieses Grenzwertes entstehen Ausbiegungen und der Stab knickt. Wir wollen das Problem des Knickens in der Stabebene untersuchen, wobei wir voraussetzen, daß der Druck auch nach der Verformung normal zur verzerrten Mittellinie des Bogens bleibt.

Ein Punkt A der Stabachse sei in der Ausgangslage durch die Polarkoordinaten a und φ festgelegt — $\varphi = 0$ entspreche der Bogenmitte — und verschiebe sich bei der ebenen Deformation radial um w und tangential um v und gelange in die Lage \bar{A} (Abb. 147). Der Punkt \bar{A} hat die rechtwinkligen Koordinaten

$$x = (a - w) \cdot \sin \varphi + v \cdot \cos \varphi, \quad y = (a - w) \cdot \cos \varphi - v \cdot \sin \varphi, \quad (1)$$

wenn w in der Richtung zum Kreismittelpunkt und v im Sinne der wachsenden Bogenlängen gezählt wird. Die Länge ds eines Elementes der Bogenmittellinie mit dem zugehörigen Zentriwinkel $d\varphi$ ist nach der Verzerrung gleich \overline{ds} ; es gilt die Gleichung

$$\left(\frac{\overline{ds}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(a - w + \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2,$$

und somit ist die spezifische Dehnung der Achse zufolge der Verschiebungen v, w

$$\varepsilon = \frac{\overline{ds} - ds}{ds} = \frac{\overline{ds}}{a \cdot d\varphi} - 1.$$

Bei Voraussetzung der *Dehnungslosigkeit*, d. h. mit $\varepsilon = 0$ besteht also einschließlich der Glieder zweiter Ordnung die Gleichung

$$0 = \left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right) + \frac{1}{2a} \left[\left(w - \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2 \right]. \quad (2)$$

Diese Annahme ist in Übereinstimmung mit der (insbesondere von KIRCHHOFF entwickelten) Theorie des elastischen Verhaltens dünner Stäbe.

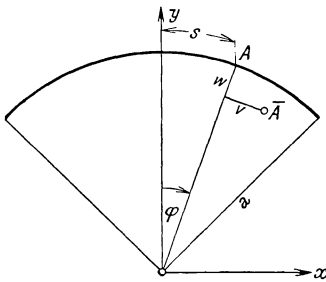


Abb. 147.

Für die Krümmung K und den Krü-

mungshalbmesser $\frac{1}{\varrho}$ der verformten Achse gilt die Beziehung

$$K = \frac{1}{\varrho} = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x' y'' - x'' y'}{a^3},$$

und mit Verwenden der Gl.(1) und ihrer Ableitungen nach φ erhält man daher

$$K = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) + \frac{1}{a^3} \left[\left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) - \left(v + \frac{dw}{d\varphi} \right) \left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Die im Stab auftretenden Biegemomente sind nach der gebräuchlichen Theorie

$$M = EI \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a} \right),$$

wobei E das Knickmodul und I das konstante Querschnittsträgheitsmoment sind.¹

In erster Näherung ist die Bedingung der Dehnungslosigkeit des Stabes

$$w - \frac{dv}{d\varphi} = 0;$$

¹ Vgl. hierzu A. E. H. LOVE, deutsch von A. TIMPE: Lehrbuch der Elastizität. 1907. S. 456.

das Biegemoment wird dann

$$M = \frac{EI}{a^2} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right),$$

und die Verdrehung ψ der Kreistangente hat zufolge $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a}$ den Wert

$$\psi = \frac{v}{a} + a \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Nach diesen allgemeinen Ansätzen stellen wir für ein Element der verformten Achse die Gleichgewichtsbedingungen auf. Mit den Verschiebungen v, w treten zu der Druckkraft P unendlich kleine Zusatzkräfte und Zusatzmomente: Die Kraft T in Richtung der Tangente, die Kraft N in Richtung der Normalen und das Biegemoment M in der Stabebene. Für ein Element von der Länge „Eins“ bestehen daher die Gleichungen (Abb. 148)

$$N + \frac{dN}{ds} - N \cdot \cos \frac{1}{\rho} + p \cdot \cos \frac{1}{2\rho} - (P + T) \cdot \sin \frac{1}{\rho} = 0,$$

$$P + T + \frac{dT}{ds} - (P + T) \cdot \cos \frac{1}{\rho} + N \cdot \sin \frac{1}{\rho} = 0,$$

$$\frac{dM}{ds} + N \cdot l = 0.$$

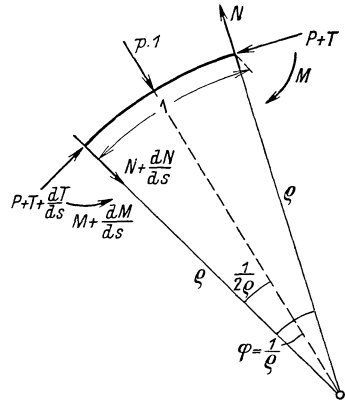


Abb. 148.

Vernachlässigt man die Glieder von höherer als erster Kleinheitsordnung, so erhält man mit $\cos \frac{1}{\rho} = 1$, $\sin \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}$ die Beziehungen

$$\frac{dN}{ds} + p - (P + T) \frac{1}{\rho} = 0, \tag{a}$$

$$\frac{dT}{ds} + N \frac{1}{\rho} = 0, \tag{b}$$

$$\frac{dM}{ds} + N = 0. \tag{c}$$

In der Schreibweise $\frac{1}{\rho} = K$, $P = p \cdot a$ lautet die Gl. (a) differenziert

$$\frac{d^2 N}{ds^2} - (pa + T) \frac{dK}{ds} - K \frac{dT}{ds} = 0. \tag{\alpha}$$

Setzt man aus (a), (b) und (c) die Werte

$$pa + T = \frac{1}{K} \left(p + \frac{dN}{ds} \right), \quad \frac{dT}{ds} = -K \cdot N, \quad N = -\frac{dM}{ds} = -EI \frac{dK}{ds}$$

in (α) ein, so gewinnt man die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{d^3 K}{ds^3} + \left(K^2 + \frac{p}{EIK} \right) \frac{dK}{ds} = \frac{1}{K} \frac{dK}{ds} \frac{d^2 K}{ds^2}. \tag{5}$$

Wenn man mit Gl. (3) für K den Ausdruck $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \frac{dv}{ds} + a \frac{d^3v}{ds^3}$ einführt, die Produkte von Differentialquotienten vernachlässigt und im Produkt mit $\frac{dK}{ds}$ für K dann $\frac{1}{a}$ nimmt, folgt die Gleichung

$$\frac{d^6v}{ds^6} + \frac{1+z^2}{a^2} \frac{d^4v}{ds^4} + \frac{z^2}{a^4} \frac{d^2v}{ds^2} = 0, \quad z^2 = 1 + \frac{p a^3}{EI}. \quad (6)$$

Das allgemeine Integral von (6) hat die Form

$$v = \frac{1}{a} \left[C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{s}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{sz}{a} + C_4 \cdot s + C_5 \cdot \sin \frac{s}{a} + C_6 \cdot \sin \frac{sz}{a} \right] \quad (7)$$

und mit $w = \frac{dv}{d\varphi} = a \frac{dv}{ds}$ wird weiter

$$w = -C_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{s}{a} - C_3 \cdot \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{sz}{a} + \\ + C_4 + C_5 \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{s}{a} + C_6 \cdot \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{sz}{a}. \quad (8)$$

Den sechs Konstanten C entsprechend braucht man zur Lösung sechs Randbedingungen, d. h. Angaben über die Lagerung des Kreisbogens.¹

102. Fortsetzung von Pkt. 101: Der Kreisbogen unter verschiedenen Randbedingungen.

Um die kritische Last eines Kreisbogens zu bestimmen, ist es ausreichend, die eben abgeleiteten Gleichungen zu benutzen, die ausschließlich Größen zweiter Ordnung genau sind.

a) Ist der *Kreisbogen an den Enden in unverschieblichen Gelenken gelagert*, so sind dort die Verschiebungen und das Biegemoment gleich Null. Mit der Bogenlänge $2b$ lauten die Randwerte

$$s = \pm b, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M = EI \left(\frac{w}{a^2} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d^2w}{ds^2} = 0.$$

Aus den Gl. (7) und (8) von Pkt. 101 folgen daher die sechs Konstantengleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{b}{a} z + C_4 \cdot b + C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} + C_6 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \\ 0 &= -C_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} - C_3 \cdot \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} z + C_4 + C_5 \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} + C_6 \cdot \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z, \\ 0 &= C_2 \cdot \sin \frac{b}{a} + C_3 \cdot z^3 \cdot \sin \frac{b}{a} z - C_5 \cdot \cos \frac{b}{a} - C_6 \cdot z^3 \cdot \cos \frac{b}{a} z, \\ 0 &= C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{b}{a} z - C_4 \cdot b - C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} - C_6 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \\ 0 &= C_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} + C_3 \cdot \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} z + C_4 + C_5 \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} + C_6 \cdot \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z, \\ 0 &= -C_2 \cdot \sin \frac{b}{a} - C_3 \cdot z^3 \cdot \sin \frac{b}{a} z - C_5 \cdot \cos \frac{b}{a} - C_6 \cdot z^3 \cdot \cos \frac{b}{a} z. \end{aligned}$$

¹ Vgl. K. FEDERHOFER: Über die Querknickung gleichmäßig gedrückter Kreisringe. Der Eisenbau, Jahrg. 12, S. 291. 1921. — Ferner P. FUNK: Über die Stabilität eines Kreisbogens unter gleichmäßigem radialen Druck. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 4, S. 143—146. 1924.

Wenn man die ersten drei Gleichungen zu den letzten drei entsprechend addiert bzw. subtrahiert, erhält man mit Nullsetzen der Koeffizientendeterminante die Knickbedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \frac{b}{a} & \cos \frac{b}{a} z & . & . & . \\ . & \sin \frac{b}{a} & z \cdot \sin \frac{b}{a} z & . & . & . \\ . & \sin \frac{b}{a} & z^3 \cdot \sin \frac{b}{a} z & . & . & . \\ . & . & . & b & \sin \frac{b}{a} & \sin \frac{b}{a} z \\ . & . & . & 1 & \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} & \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z \\ . & . & . & . & \cos \frac{b}{a} & z^3 \cdot \cos \frac{b}{a} z \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\sin \frac{b}{a} z = 0 \text{ und } \left(1 - \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{a}{b} \frac{1}{z} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{a} z\right) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung $\sin \frac{b}{a} z = 0$, die aus dem Lösungsteil $v \cdot a = C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{s}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{s}{a} z$ hervorgeht, wird $\frac{b}{a} z = n \cdot \pi$, $n = 1, 2, \dots$ und somit der kritische Druck

$$p_k = \frac{EI}{a^3} \left[n^2 \left(\pi \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right]. \tag{A}$$

Mit Ausnahme vom Wert $b : a = \pi$ liefert diese Gleichung mit $n = 1$ die kleinsten Knicklasten. In diesem besonderen Fall, d. h. für den Kreisring mit einem Gelenk, führt Gl. (A) bei $n = 1$ auf die triviale Lösung $p = 0$ und mit $n = 2$ auf die Last $p = 3 \frac{EI}{a^3}$, während aus der zweiten Knickgleichung der kleinere Wert $p_k = 1,39 \frac{EI}{a^3}$ hervorgeht.

Dem $v(s)$, das zu Gl. (A) gehört, entspricht für $s = 0$ die Verschiebung $w = \frac{dv}{ds} = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0$, und das bedeutet, daß die elastische Linie im Bogenscheitel einen Wendepunkt besitzt.¹

Im folgenden sind für einige Winkel $b : a$ die kritischen Lasten p_k zusammengestellt.

$b : a =$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$p_k \frac{a^3}{EI} =$	35,0	8,0	3,0	1,25	0,44	1,39

¹ Eine Berechnung, die hiervon ihren Ausgang nimmt, findet sich bei E. HURLBRINK: Schiffbau, Jahrg. 9, S. 640. 1907/08. — R. MAYER: Ztschr. Math. u. Physik, Bd. 61, S. 318f. 1913. Die Knickfestigkeit. Berlin, 1921. S. 136.

b) Bei dem *an den Enden eingespannten Kreisbogen* sind die Randwerte

$$s = \pm b, v = 0, w = 0, \psi = \frac{v}{a} + \frac{dw}{ds} = 0, \text{ d. h. } \frac{dw}{ds} = 0.$$

Für die Integrationskonstanten bestehen somit die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{b}{a} z + C_4 \cdot b + C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} + C_6 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \\ 0 &= -C_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} - C_3 \cdot \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} z + C_4 + C_5 \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} + C_6 \cdot \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z, \\ 0 &= -C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} - C_3 \cdot z^2 \cdot \cos \frac{b}{a} z - C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} - C_6 \cdot z^2 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \\ 0 &= C_1 + C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} + C_3 \cdot \cos \frac{b}{a} z - C_4 \cdot b - C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} - C_6 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \\ 0 &= C_2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} + C_3 \cdot \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{b}{a} z + C_4 + C_5 \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} + C_6 \cdot \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z, \\ 0 &= -C_2 \cdot \cos \frac{b}{a} - C_3 \cdot z^2 \cdot \cos \frac{b}{a} z + C_5 \cdot \sin \frac{b}{a} + C_6 \cdot z^2 \cdot \sin \frac{b}{a} z, \end{aligned}$$

aus denen man wie vor die Determinantengleichung herleitet

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \frac{b}{a} & \cos \frac{b}{a} z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sin \frac{b}{a} & z \cdot \sin \frac{b}{a} z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \frac{b}{a} & z^2 \cdot \cos \frac{b}{a} z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & \sin \frac{b}{a} & \sin \frac{b}{a} z \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} & \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{b}{a} z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sin \frac{b}{a} & z^2 \cdot \sin \frac{b}{a} z \end{vmatrix}.$$

Die Knickbedingungen sind also

$$z \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \operatorname{tg} \frac{b}{a} z = 0 \text{ und } \left(1 - \frac{b}{a} \cdot \operatorname{cotg} \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{b}{a} z \cdot \operatorname{cotg} \frac{b}{a} z\right) = 0.$$

Die erste Gleichung ergibt die kleinsten Werte für p , und man findet wie früher, daß der Bogenscheitel ein Wendepunkt der *Elastica* ist.

Die folgende Aufstellung enthält für einige Werte $b:a$ die nächsten, über 1 gelegenen Werte z und die daraus bestimmten kritischen Lasten p_k .¹

$b:a =$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$z =$	8,621	4,375	3,0	2,364	2,066	2,0
$p_k \frac{a^3}{EI} =$	74,32	19,14	8,0	5,59	4,27	3,0

¹ E. L. NICOLAI: Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Ztschr. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, S. 227—229. 1923. Ber. d. Polytechn. Instituts in Petersburg, Bd. 27, S. 323—377. 1918. (Russisch.)

c) Bei einem geschlossenen *Kreisring* muß die Tangentialverschiebung v , Gl. (7) von Pkt. 101, eine periodische Funktion von $\varphi = \frac{s}{a}$ mit der Periode 2π sein. Das erfordert das Verschwinden der Konstanten C_1 und C_4 und die Ganzzahligkeit von z . Für $z = 1$ ergibt sich mit der Gleichung $z^2 = 1 + \frac{p a^3}{EI}$ eine unverformte Verschiebung des Ringes. Mit $z = 2$ bekommt man die kleinste kritische Belastung, bei der Instabilität eintritt,¹

$$p_k = \frac{3EI}{a^3}.$$

Diese Gleichung folgt auch aus den früheren Formeln für den Kreisbogen. Bei dem an den Enden gelenkig gelagerten Bogen erhielten wir aus der Knickbedingung für $b : a = \pi$ die Gleichung für den Ring mit einem eingeschalteten Gelenk. Das Fehlen des Gelenkes verlangt nun einen stetigen Verlauf der Verzerrungen. Für den ersten Faktor der dort angeschriebenen Determinantengleichung, also für die Knickbedingung (A), besitzen die Radialverschiebungen w die gleiche Neigung der Endtangenten $\frac{dw}{ds}$ und es besteht die beim Kreisring notwendige Stetigkeit. Im Fall der anderen Knickgleichung haben die Endtangenten die entgegengesetzt gleiche Neigung, und daher kommt beim Kreisring nur Gl. (A) in Betracht. — Unter dem vorausgesetzten Belastungszustand ist der kritische Lastwert vom beiderseits eingespannten Bogen für $b : a = \pi$ hingegen unmittelbar übereinstimmend mit dem Resultat von M. LÉVY.²

103. Zusatz. Der gleichmäßige äußere Druck ist stets zum Mittelpunkt des Kreisbogens gerichtet.

In Pkt. 101 war vorausgesetzt, daß die den Kreisbogen beanspruchenden äußeren Kräfte auch nach der Verformung senkrecht zur Mittellinie des Bogens wirken. Jetzt nehmen wir an, daß die angreifenden gleichmäßigen Druckkräfte ihre Lage zur verzerrten Stabachse ändern und stets zum Mittelpunkt des Kreisbogens gerichtet sind.

Wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen für ein Element des dünnen Stabes von der Länge „Eins“ aufstellen, erfahren die Gleichungen in Pkt. 101 nur eine geringe Korrektur. Die Gl. (a) bleibt ungeändert be-

¹ M. LÉVY: Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications. Journ. des Math. pures et appl., Liouville, Bd. 3, S. 5—43. 1884. — J. BOUSSINESQ: Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 97, S. 843. 1883.

² Eine erste Näherung für die Ausbiegung, die zu einem formal ähnlichen Ergebnis wie beim geraden Stab in Pkt. 2 führt, berechnet K. FEDERHOFER: Verhandl. d. 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik. Zürich, 1926. S. 388 bis 392. Die genauere Lösung des Problems findet sich bei G. H. HALPHEN: Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1888, Bd. 2, S. 192—236, und bei A. G. GREENHILL: The Elastic Curve, under uniform normal pressure. Math. Annalen, Bd. 52, S. 465—500. 1899.

stehen, denn wir hatten $p \cdot \cos \frac{1}{2} \varrho = p$ gesetzt, und es müßte ebenso der cosinus des neuen Winkels gleich Eins genommen werden. Auch die Gl. (c) bleibt dieselbe wie früher. Hingegen ändert sich Gl. (b), da eine Komponente von p in die Richtung des Stabelementes fällt. Bei der Verformung kommt der Punkt A des Kreisbogens in die Lage \bar{A} und die Tangente verdreht sich um den Winkel ψ (Abb. 149). Der Winkel im Kreismittelpunkt ($A O \bar{A}$) ist gleich $\frac{v}{a}$ und daher ist der Winkel zwischen $O \bar{A}$ und der neuen Kreis-tangente $\frac{\pi}{2} - \psi + \frac{v}{a}$. Die Komponente von p in Richtung des Stabelementes ist also

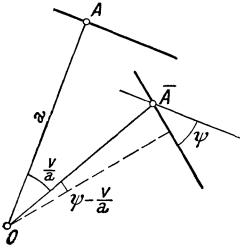


Abb. 149.

$$p \cdot \sin \left(\psi - \frac{v}{a} \right) = p \left(\psi - \frac{v}{a} \right) = p a \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten nun (mit $\frac{1}{\varrho} = K$)

$$\frac{dN}{ds} + p - (pa + T) \cdot K = 0, \quad (a)$$

$$\frac{dT}{ds} + N \cdot K - pa \frac{d^2 v}{ds^2} = 0, \quad (b)$$

$$\frac{dM}{ds} + N = 0. \quad (c)$$

Die Gl. (a) gibt differenziert

$$\frac{d^2 N}{ds^2} - (pa + T) \frac{dK}{ds} - K \frac{dT}{ds} = 0,$$

und wenn man aus (a) den Ausdruck $(pa + T)$, aus (b) den Wert $\frac{dT}{ds}$ und aus (c) den Wert $N = -\frac{dM}{ds} = -EI \frac{dK}{ds}$ einführt, erhält man die Differentialgleichung der Elastica

$$\frac{d^3 K}{ds^3} + \left(K^2 + \frac{p}{EI} K \right) \frac{dK}{ds} + \frac{K}{EI} pa \frac{d^2 v}{ds^2} = 0.$$

Schreibt man K in der tangentialen Verzerrungskomponente v , so entsteht die Gleichung

$$\frac{d^6 v}{ds^6} + \frac{1}{a^2} \left(2 + \frac{pa^3}{EI} \right) \frac{d^4 v}{ds^4} + \frac{1}{a^4} \left(1 + 2 \frac{pa^3}{EI} \right) \frac{d^2 v}{ds^2} = 0.$$

Das allgemeine Integral ist

$$v = C_1 + C_2 \cdot \cos r \frac{s}{a} + C_3 \cdot \cos \varrho \frac{s}{a} + C_4 \cdot \frac{s}{a} + C_5 \cdot \sin r \frac{s}{a} + C_6 \cdot \sin \varrho \frac{s}{a},$$

wobei r und ϱ ,

$$r = \sqrt{-\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - 2z + 3}}, \quad \varrho = \sqrt{-\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - 2z + 3}},$$

$$z = 2 + \frac{pa^3}{EI},$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind. Wir geben im folgenden Resultate der Rechnung an.

Sind die Enden des Kreisbogens von der Länge $2b$ in unverschieblichen *Gelenken* gelagert, so ist der kritische Wert von p

$$p_k = \frac{EI}{a^3} \frac{\left[n^2 \left(\pi \frac{a}{b} \right)^2 - 1 \right]^2}{n^2 \left(\pi \frac{a}{b} \right)^2 - 2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Die nachstehende Zusammenstellung zeigt p_k für einige Winkel $b:a$.

$$\begin{array}{cccccc} b:a & = & 30^\circ & 60^\circ & 90^\circ & 120^\circ & 150^\circ & 180^\circ \\ p_k \frac{a^3}{EI} & = & 36,03 & 9,14 & 4,5 & 6,25 & 6,03 & 4,5 \end{array}$$

Für den an den Enden *ingespannten* Kreisbogen ist die Lösung der Knickgleichung für einige Werte $b:a$ in der folgenden Aufstellung vermerkt.

$$\begin{array}{cccccc} b:a & = & 30^\circ & 60^\circ & 90^\circ & 120^\circ & 150^\circ & 180^\circ \\ p_k \frac{a^3}{EI} & = & 74,9 & 20,1 & 10,6 & 8,8 & 8,0 & 6,47 \end{array}$$

Beim geschlossenen *Kreisring* muß v eine periodische Funktion von $\frac{s}{a}$ mit der Periode 2π sein. Wir setzen daher (in Übereinstimmung mit der Gleichung, die in den beiden früheren Fällen zur Knicklast geführt hat)

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_1 \cdot \sin n \frac{s}{a} + C_2 \cdot \cos n \frac{s}{a} \right),$$

wo die C Konstanten sind und n von 0 bis ∞ läuft. Aus der Differentialgleichung erhalten wir

$$\sum_0^{\infty} \left[-n^6 + 2n^4 - n^2 + \frac{p a^3}{EI} (n^4 - 2n^2) \right] \cdot \left(C_1 \cdot \sin n \frac{s}{a} + C_2 \cdot \cos n \frac{s}{a} \right) = 0$$

und daraus

$$\frac{p a^3}{EI} = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 - 2}.$$

Die kritische Last wird (für $n = 2$)

$$p_k = 4,5 \frac{EI}{a^3},$$

von der gleichen Größe wie beim Kreisring mit einem eingeschalteten Gelenk.¹

Ebenso wie beim geraden Stab im sechsten Abschnitt die Richtung der Längskraft bei der Verformung die Größe der Knicklast beeinflusst, ist hier die Richtung des gleichförmigen äußeren Druckes bei der Formänderung entscheidend für den Wert der kritischen Last.

¹ Siehe E. L. NICOLAI: A. a. O.

Punkt $A(x, y)$ und ε die Dehnung, so ist die Formänderungsarbeit für Biegung und Dehnung der Bogenachse

$$A_1 = \frac{EI}{2} \int_{-l}^l \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right)^2 ds + \frac{EF}{2} \int_{-l}^l \varepsilon^2 ds. \quad (1)$$

Für ϱ und r gelten die Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\xi' \eta'' - \xi'' \eta'}{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

wenn man die Glieder von höherer als zweiter Kleinheitsordnung in der waagrechten Verschiebung w und lotrechten Verschiebung v streicht und die Flachheit des Bogens berücksichtigt, erhält man für das Quadrat der Krümmungsänderung

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right)^2 = (v''^2 + 4y''^2 \cdot w'^2 - 4y'' \cdot w' \cdot v'') + 2y' \cdot (2y'' \cdot w' \cdot w'' - 3y'' \cdot v' \cdot v'' - w'' \cdot v'') + y'^2 \cdot (w''^2 - 3v''^2),$$

wobei alle Ableitungen nach x genommen sind. Die Dehnung ε folgt aus der Gleichung

$$\varepsilon \cdot ds = (\xi'^2 + \eta'^2)^{1/2} dx - (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

und unter denselben Voraussetzungen wie vor wird

$$\varepsilon \frac{ds}{dx} = (w' + y' \cdot v') \left(1 - \frac{1}{2} y'^2 \right) + \frac{1}{2} (v'^2 - 2y' \cdot w' \cdot v') \left(1 - \frac{3}{2} y'^2 \right) + \frac{1}{2} y'^2 \cdot w'^2.$$

Das Bogenelement ds kann durch $dx \cdot \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 \right)$ ersetzt werden. Geht man mit den angeschriebenen Gleichungen in (1) ein, so ergibt sich A_1 als quadratische Funktion der Verschiebungen w und v und ihrer Ableitungen.

Im Querschnitt A des Bogens wirkt die Axialkraft

$$N = H \cdot \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 \right)$$

und die Arbeit der Normalkräfte, die von Anfang an in voller Größe wirken, beträgt

$$A_2 = - \int_{-l}^l N \varepsilon \cdot ds = - H \int_{-l}^l (w' + y' \cdot v') dx - \frac{H}{2} \int_{-l}^l (v'^2 - 2y' \cdot w' \cdot v') (1 - y'^2) dx - \frac{H}{2} \int_{-l}^l y'^2 \cdot w'^2 \cdot dx.$$

Glieder mit y'^4 sind hier wegen der Flachheit des Bogens fortgelassen.

Nun ist, da $y' = -2 \frac{fx}{l^2}$,

$$\int_{-l}^l (w' + y' \cdot v') dx = \int_{-l}^l w' \cdot dx - \frac{2f}{l^2} \int_{-l}^l x \cdot v' \cdot dx.$$

Der erste Summand ist bei unverschieblichen Auflagern gleich Null und wenn wir beim zweiten partiell integrieren, wird der ganze Ausdruck

$$\frac{2f}{l^2} \int_{-l}^l v \cdot dx.$$

Somit ist der Arbeitswert A_2 mit Beachtung, daß $\frac{2Hf}{l^2} = p$,

$$A_2 = -p \int_{-l}^l v \cdot dx - \frac{H}{2} \int_{-l}^l (v'^2 - 2y' \cdot w' \cdot v') (1 - y'^2) dx - \frac{H}{2} \int_{-l}^l y'^2 \cdot w'^2 \cdot dx. \quad (2)$$

Das Potential der gleichmäßig verteilten Belastung hat den Wert

$$A_3 = p \int_{-l}^l v \cdot dx. \quad (3)$$

Die Gesamtenergie erhält man durch Addition der Arbeitsgrößen der Gleichungen (1), (2) und (3). Da in der Ausgangslage des Bogens zwischen den Axialkräften und der Belastung $2 \cdot pl$ Gleichgewicht herrscht, heben sich bei der Zusammenfassung von A_2 und A_3 nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten die Glieder erster Ordnung auf.

Wir untersuchen wieder den Fall einer *dehnungslosen Verformung*. Dann gilt in erster Näherung mit $\varepsilon = 0$ die Bedingung

$$w' + y' \cdot v' = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung bedeutet aber auch $\int_{-l}^l v \cdot dx = 0$ und wird am einfachsten bei einer Antisymmetrie der lotrechten Verschiebungen v erfüllt. Mit Gl. (4) ist das Quadrat der Krümmungsänderung

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right)^2 = v''^2 \cdot (1 - y'^2)$$

und Gl. (1) wird

$$A_1 = \frac{EI}{2} \int_{-l}^l v''^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} y'^2\right) \cdot dx.$$

Die Summe der Gleichungen (2) und (3) gewinnt die Form

$$A_2 + A_3 = -\frac{H}{2} \int_{-l}^l v'^2 \cdot (1 + y'^2) \cdot dx.$$

Wählt man statt x die neue Variable

$$z = x \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

und führt die Bezeichnung

$$\alpha = 2 \left(\frac{f}{l^2} \right)^2 \frac{EI}{H}$$

ein, so lautet mit $y'^2 = 4f^2 \frac{x^2}{l^4} = 2\alpha z^2$ und den Ableitungen nach z der Ausdruck für das Gesamtpotential bis auf einen konstanten Faktor

$$A = \int_{x=-l}^l [v''^2 \cdot (1 - \alpha z^2) - v'^2 \cdot (1 + 2\alpha z^2)] \cdot dz \equiv \int_{x=-l}^l V \cdot dz. \quad (5)$$

Die durch die Gleichung (4) verknüpften Funktionen $w(z)$ und $v(z)$ müssen A zu einem Minimum machen.¹ Nach den Methoden der Variationsrechnung ist die Bedingung hierfür die LAGRANGESche Gleichung

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial V}{\partial v''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial V}{\partial v'} + \frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

Nun sind

$$\frac{\partial V}{\partial v''} = 2v'' \cdot (1 - \alpha z^2), \quad \frac{\partial V}{\partial v'} = -2v' \cdot (1 + 2\alpha z^2)$$

und die Differentialgleichung der Elastica wird

$$\frac{d^4 v}{dz^4} (1 - \alpha z^2) - 4 \frac{d^3 v}{dz^3} \cdot \alpha z + \frac{d^2 v}{dz^2} (1 - 2\alpha + 2\alpha z^2) + 4 \frac{dv}{dz} \cdot \alpha z = 0.$$

Dividiert man durch $(1 - \alpha z^2)$, d. h. multipliziert man mit $(1 + \alpha z^2)$, so folgt, wenn man alle Größen mit α^2 infolge der Beschränkung auf flache Bogen streicht

$$\frac{d^4 v}{dz^4} - 4 \frac{d^3 v}{dz^3} \cdot \alpha z + \frac{d^2 v}{dz^2} (1 - 2\alpha + 3\alpha z^2) + 4 \frac{dv}{dz} \cdot \alpha z = 0, \quad (6)$$

eine Differentialgleichung vierter Ordnung in $v(z)$ mit von z abhängigen Koeffizienten.

Wir schreiben die Lösung in Form einer unendlichen Reihe in Potenzen von α

$$v = \varphi_0(z) + \alpha \cdot \varphi_1(z) + \alpha^2 \cdot \varphi_2(z) + \dots$$

und berücksichtigen wegen der Kleinheit von α^2 nur die zwei ersten Glieder. Geht man damit in Gl. (6) ein und setzt die Summen, die bei den gleich hohen Potenzen von α stehen, gleich Null, so erhält man

$$\frac{d^4 \varphi_0}{dz^4} + \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} = 0$$

und

$$\frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - 4z \frac{d^3 \varphi_0}{dz^3} + (3z^2 - 2) \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} + 4z \frac{d\varphi_0}{dz} = 0. \quad (7)$$

¹ Beachte den Zusammenhang mit der in § 13 dargestellten *Energie-methode*, wo für die Ausbiegung ein Näherungsansatz gewählt und darin enthaltene Koeffizienten aus der Minimumsbedingung bestimmt werden.

Die Lösung der ersten Gl. (7) ist

$$\varphi_0(z) = a \cdot \sin z + b \cdot \cos z + cz + d,$$

und wenn man beachtet, daß mit v auch φ_0 und φ_1 antisymmetrisch sein sollen, darf man die symmetrischen Glieder $b \cdot \cos z$ und d fortlassen und

$$\varphi_0(z) = a \cdot \sin z + cz$$

setzen. Die zweite Gl. (7) wird damit

$$\frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - 3 a z^2 \cdot \sin z + 8 a z \cdot \cos z + 2 a \cdot \sin z + 4 c z = 0.$$

Für φ_1 machen wir den Ansatz

$$\varphi_1 = A \cdot z^3 \cdot \cos z + B \cdot z^2 \cdot \sin z + C \cdot z \cdot \cos z + D \cdot \sin z + E \cdot z^3 + F \cdot z,$$

da wir wieder symmetrische Glieder streichen, d. h. Konstantwerte, Glieder mit $\cos z$, mit z^2 und jene, bei denen sich $\sin z$ mit einer ungeraden Potenz von z oder $\cos z$ mit einer geraden Potenz von z verbindet. Aus der Differentialgleichung finden wir durch Vergleich der Beiwerte der gleichen Funktion von z

$$A = \frac{1}{2} a, \quad B = -\frac{7}{4} a, \quad C = -\frac{15}{4} a, \quad D = 0, \quad E = -\frac{2}{3} c,$$

und daher als endgültige Lösung der Gl. (6), mit $F = 0$

$$v = a \cdot \sin z + cz + \alpha \left[\frac{1}{2} a z^3 \cdot \cos z - \frac{7}{4} a z^2 \cdot \sin z - \frac{15}{4} a z \cdot \cos z - \frac{2}{3} c z^3 \right].$$

Wir haben in dieser Gleichung die zwei Integrationskonstanten a und c , die sich aus den Randwerten des Problems für eine Bogenhälfte ergeben. Die gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante der Konstantengleichungen ist die Knickbedingung.¹

105. Fortsetzung von Pkt. 104: Der Parabelbogen unter verschiedenen Randbedingungen.

a) Ist der flache *Parabelbogen an den Enden in unverschieblichen Gelenken gelagert*, so sind an den Stabenden die Verschiebungen und das Biegemoment gleich Null. Für $z = l \sqrt{\frac{H}{EI}} = k$ gelten also $v = 0$ und $M = 0$. (Die waagrechte Verschiebung w tritt nicht auf, denn

¹ Siehe J. FRITSCHÉ: Zur Berechnung der Knickbelastung von Bogenträgern. Die Bautechnik, Jahrg. 3, H. 35 u. 36. 1925. — K. FEDERHOFER: Über Eigenschwingungen und Knicklasten des parabolischen Zweigelenkbogens. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 143. Bd., S. 131f. 1934. — Bei J. FRITSCHÉ wird die Lösung aus der Differentialgleichung gewonnen, während K. FEDERHOFER nach Aufstellen des Energieausdruckes das von TIMOSHENKO ausgearbeitete Näherungsverfahren von RITZ heranzieht.

die Herleitung der Gleichung für w aus v erfordert bereits den zusätzlichen Randwert $z = k, w = 0$.) Zuzufolge der Beziehung $M = EI \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right)$ ist

$$M = v'' \cdot \left(1 - \frac{1}{2} y'^2 \right),$$

mit $\frac{1}{2} y'^2 = 2f^2 \frac{x^2}{l^4} = \alpha z^2$ weiter

$$M = v'' \cdot (1 - \alpha z^2)$$

und nach Einsetzen von v unter Fortlassen der Glieder mit α^2

$$M = -a \cdot \sin z + a \cdot \alpha \left(-\frac{1}{2} z^3 \cdot \cos z - \frac{1}{4} z^2 \cdot \sin z - \frac{1}{4} z \cdot \cos z + 4 \sin z \right) - 4 c \alpha z.$$

Die zwei Konstantengleichungen sind demnach

$$0 = a \left[\sin k + \alpha \left(\frac{1}{2} k^3 \cdot \cos k - \frac{7}{4} k^2 \cdot \sin k - \frac{15}{4} k \cdot \cos k \right) \right] + c k \left(1 - \frac{2}{3} \alpha k^2 \right),$$

$$0 = a \left[\sin k + \alpha \left(\frac{1}{2} k^3 \cdot \cos k + \frac{1}{4} k^2 \cdot \sin k + \frac{1}{4} k \cdot \cos k - 4 \sin k \right) \right] + 4 c \alpha k.$$

Die gleich Null gesetzte Determinante der a und c liefert wieder unter Streichen der Glieder mit α^2 die Bedingung

$$\sin k + \alpha \left(\frac{1}{2} k^3 \cdot \cos k - \frac{5}{12} k^2 \cdot \sin k + \frac{k}{4} \cos k - 8 \sin k \right) = 0.$$

Führt man die Bezeichnung

$$\vartheta = 2 \left(\frac{f}{l} \right)^2$$

ein und berücksichtigt man, daß $k^2 \cdot \alpha = \vartheta$, so erhält die Knickgleichung für den Zweigelenkbogen die Form

$$\operatorname{tg} k + \frac{3 \vartheta k (2 k^2 + 1)}{k^2 (12 - 5 \vartheta) - 96 \vartheta} = 0.$$

Nach Bestimmung der kleinsten Wurzel k ergibt sich der kritische Horizontalschub, bzw. die kritische Belastung

$$H_k = k^2 \frac{EI}{l^2}, \quad p_k = 2k^2 \frac{f}{l} \frac{EI}{l^3}.$$

b) Für einen an den *Enden eingespannten Parabelbogen* ist am Stabende die Verschiebung v gleich Null und die Verdrehung ψ der Tangente gleich Null. Nun ist $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = v'' \cdot \left(1 - \frac{1}{2} y'^2 \right)$, also

$$\psi = \int v'' \cdot \left(1 - \frac{1}{2} y'^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx = \int v'' \cdot dx = \frac{dv}{dx}.$$

Aus den Randwerten $z = k, v = 0, v' = 0$ folgen die Konstantengleichungen

$$0 = a \left[\sin k + \alpha \left(\frac{1}{2} k^3 \cdot \cos k - \frac{7}{4} k^2 \cdot \sin k - \frac{15}{4} k \cdot \cos k \right) \right] + ck \left(1 - \frac{2}{3} \alpha k^2 \right),$$

$$0 = a \left[\cos k + \alpha \left(-\frac{1}{2} k^3 \cdot \sin k - \frac{1}{4} k^2 \cdot \cos k + \frac{1}{4} k \cdot \sin k - \frac{15}{4} \cos k \right) \right] + c \left(1 - 2\alpha k^2 \right).$$

Ihre gleich Null gesetzte Determinante, die Knickgleichung, lautet

$$\sin k - k \cdot \cos k + \alpha k^2 \left(\frac{1}{2} k^2 \cdot \sin k + \frac{17}{12} k \cdot \cos k - 4 \sin k \right) = 0,$$

oder mit der früheren Abkürzung ϑ

$$\operatorname{tg} k - \frac{k(12 - 17\vartheta)}{6(2 + \vartheta k^2 - 8\vartheta)} = 0.$$

Mit dem kleinsten k -Wert berechnet man aus den vor angeschriebenen Gleichungen den kritischen Horizontalschub, bzw. die kritische Belastung.

Die Abb. 151 zeigt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem für den Zweigelenbogen und den eingespannten Bogen zu den Abszissen $\frac{2l}{f}$ als Ordinaten die Koeffizienten α der Gleichung für die kritische Last

$$p_k = \alpha \frac{EI}{l^3}.$$

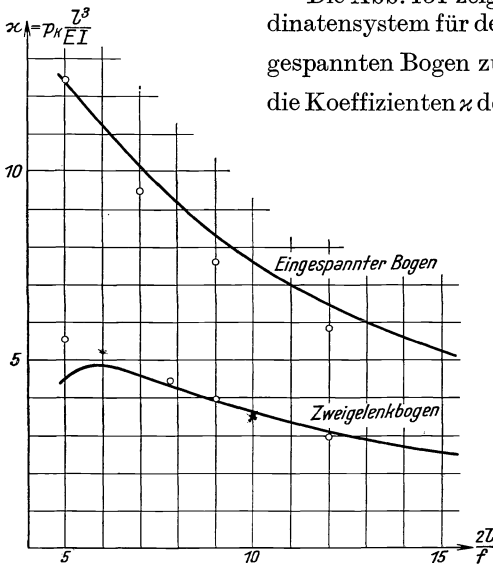


Abb. 151.

Wir haben in die Abbildung die Ergebnisse von Versuchen eingetragen, die E. GABER durchgeführt hat.¹ Verwendet waren hierbei nach Parabel geformte Stahlbänder von $4 \cdot 30 = 120 \text{ mm}^2$ Querschnittsfläche und 180 cm Stützweite mit dem YOUNGSchen Elastizitätsmodul des Materials von 2072,5 t/cm². Bei allen untersuchten Bogen wurde die antisymmetrische Ausbiegung beobachtet, also die dehnungslose Verformung nachgewiesen. Die errechneten

Gleichungen geben für flache Bogen ausreichende Resultate.

Im Laufe unserer Entwicklungen haben wir wiederholt auf Experimente zurückgegriffen und aufgestellte Formeln nachgeprüft. Ein Versuch hat den Zweck, die notwendigen Materialkonstanten zu verschaffen oder die Theorie zu kontrollieren und ihre Unterlagen sicherzustellen. Auch auf dem behandelten begrenzten Teilgebiet der Mechanik ist es nur bei richtiger Verbindung der experimentellen Forschung mit theoretischen Überlegungen möglich, der physikalischen Wahrheit näherzukommen.

¹ E. GABER: Über die Knicksicherheit vollwandiger Bogen. Die Bau-technik, Jahrg. 12, S. 646—651. 1934.

Tabelle der Funktionen:

$$a' = \frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z^2 \cdot \sin z}, \quad a'' = \frac{\sin z - z}{z^2 \cdot \sin z}; \quad b' = \frac{1}{z \cdot \sin z}, \quad b'' = \frac{\cotg z}{z};$$

$$c' = \frac{z}{\operatorname{tg} z}, \quad c'' = \frac{z}{\sin z}.$$

$\frac{z}{\pi}$	a'	a''	b'	b''	c'	c''
0	— 0,3333	— 0,1667	∞	∞	1,0	1,0
0,05	— 0,3338	— 0,1671	40,6954	40,1945	0,9918	1,0041
0,10	— 0,3356	— 0,1685	10,3007	9,7966	0,9669	1,0166
0,15	— 0,3384	— 0,1711	4,6743	4,1648	0,9249	1,0380
0,20	— 0,3424	— 0,1746	2,7077	2,1906	0,8648	1,0690
0,25	— 0,3479	— 0,1795	1,8006	1,2733	0,7854	1,1107
0,30	— 0,3549	— 0,1857	1,3115	0,7709	0,6848	1,1650
0,35	— 0,3637	— 0,1936	1,0207	0,4634	0,5603	1,2341
0,40	— 0,3747	— 0,2035	0,8367	0,2586	0,4083	1,3213
0,45	— 0,3883	— 0,2158	0,7162	0,1120	0,2239	1,4313
0,50	— 0,4053	— 0,2313	0,6366	0	0	1,5708
0,55	— 0,4266	— 0,2510	0,5860	— 0,0917	— 0,2737	1,7494
0,60	— 0,4538	— 0,2764	0,5578	— 0,1723	— 0,6125	1,9820
0,65	— 0,4893	— 0,3098	0,5496	— 0,2495	— 1,0405	2,2918
0,70	— 0,5372	— 0,3553	0,5621	— 0,3304	— 1,5978	2,7183
0,75	— 0,6045	— 0,4201	0,6002	— 0,4244	— 2,3562	3,3322
0,80	— 0,7060	— 0,5186	0,6769	— 0,5477	— 3,4592	4,2758
0,85	— 0,8752	— 0,6846	0,8249	— 0,7350	— 5,2409	5,8820
0,90	— 1,2136	— 1,0194	1,1445	— 1,0885	— 8,7019	9,1498
0,95	— 2,2278	— 2,0296	2,1419	— 2,1155	— 18,8435	19,0783
1,0	$\mp \infty$	$\mp \infty$	$\pm \infty$	$\mp \infty$	$\mp \infty$	$\pm \infty$
1,05	1,8221	2,0298	— 1,9379	1,9140	20,8271	— 21,0865
1,10	0,8069	1,0202	— 0,9365	0,8906	10,6357	— 11,1831
1,15	0,4666	0,6863	— 0,6097	0,5432	7,0906	— 7,9579
1,20	0,2947	0,5216	— 0,4513	0,3651	5,1888	— 6,4138
1,25	0,1898	0,4250	— 0,3601	0,2547	3,9270	— 5,5536
1,30	0,1179	0,3626	— 0,3027	0,1779	2,9673	— 5,0482
1,35	0,0645	0,3202	— 0,2646	0,1201	2,1610	— 4,7600
1,40	0,0222	0,2908	— 0,2391	0,0739	1,4291	— 4,6246
1,45	— 0,0134	0,2705	— 0,2223	0,0348	0,7215	— 4,6121
1,50	— 0,0450	0,2572	— 0,2122	0	0	— 4,7124
1,55	— 0,0747	0,2501	— 0,2079	— 0,0325	— 0,7713	— 4,9302
1,60	— 0,1042	0,2488	— 0,2092	— 0,0646	— 1,6332	— 5,2852
1,65	— 0,1355	0,2537	— 0,2165	— 0,0983	— 2,6412	— 5,8177
1,70	— 0,1711	0,2665	— 0,2314	— 0,1360	— 3,8803	— 6,6015
1,75	— 0,2150	0,2903	— 0,2572	— 0,1819	— 5,4978	— 7,7750
1,80	— 0,2747	0,3321	— 0,3009	— 0,2434	— 7,7833	— 9,6206
1,85	— 0,3673	0,4086	— 0,3790	— 0,3377	— 11,4066	— 12,8019
1,90	— 0,5437	0,5702	— 0,5421	— 0,5156	— 18,3708	— 19,3162
1,95	— 1,0573	1,0701	— 1,0435	— 1,0306	— 38,6788	— 39,2246
2,0	— ∞	∞	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞